Pascale Welsch
13-204-821

ÜBUNG 7

① a) Die reflexive Hülle von R enthält R sowie alle Paare (a,a) für $a \in X$, wobei $X = \{a,b,c,d\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Die symmetrische Hülle von R enthält R sowie alle Paare (b,a), für welche gilt: $(a,b) \in R$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Die transitive Hülle kann mithilfe des Warshall-Algorithmus gefunden werden:

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

W_4 = Transitive Hülle

② a) Die kleinste Relation, welche reflexiv und transitiv ist, ist die Vereinigung der reflexiven und transitiven Hülle von R.

R =

	u	v	w	x
u	0	1	0	1
v	0	0	0	0
w	0	0	1	0
x	1	0	0	0

reflexive Hülle von R:

	u	v	w	x
u	1	1	0	1
v	0	1	0	0
w	0	0	1	0
x	1	0	0	1

Transitive Hülle von R mithilfe des Warshall-Algorithmus:

$$R = W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{transitive Hülle}$$

Zur transitiven Hülle muss also nur noch (v,v) hinzugefügt werden, damit sie reflexiv wird. Die Relation bleibt dadurch transitiv. Die kleinste Relation S, welche R enthält und reflexiv und transitiv ist, ist also

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Die symmetrische Hülle ist die Ausgangsmatrix für die Bildung der transitiven Hülle:

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W_4 ist somit symmetrisch und transitiv, also ist es die Antwort zu dieser Aufgabe.

c) Die Antwort bei b) ist auch bereits reflexiv und somit ist W_4 aus b) eine Äquivalenzrelation.

(3) Zu zeigen: R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
(1) (2) (3)

(1) Für $(a,b) R (a,b)$ gilt: $a+b = b+a$ ✓
$\rightarrow$ R ist <u>reflexiv</u> für beliebige Paare $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(2) Sei $(a,b) R (x,y)$, dann gilt gemäss Definition

$$a+y = b+x \iff b+x = a+y$$
$$\iff x+b = y+a$$

und dies entspricht gerade der Relation $(x,y) R (a,b)$, also ist R <u>symmetrisch</u>

(3) Sei $(u,v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $(a,b) R (u,v)$ $(u,v) R (x,y)$.
Dann gilt $a+v = b+u$ sowie $u+y = v+x$.

$$a+v-(b+u) = 0 \quad \text{und} \quad v+x-(u+y) = 0 \implies$$
$$a+v-b-u = v+x-u-y \quad | -v, +u$$
$$a-b = x-y \quad | +b, +y$$
$$a+y = b+x$$

Damit gilt auch $(a,b) R (x,y)$, also ist R <u>transitiv</u>.

Aus (1), (2) und (3) folgt, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(4) R sei eine Relation auf der Menge S aller binären Strings mit Länge S, welche S in $n+1$ Klassen partitioniert. Die k-te Klasse soll $\binom{n}{k}$ Strings enthalten. Eine mögiche Relation R ist

$$xRy \text{ g.d.w. Anzahl } 1 \text{ in } x = \text{Anzahl } 1 \text{ in } y.$$

Bsp: $(001) R (010)$ und $(110) R (101)$

Ist R eine Äquivalenzfunktion?

- R ist reflexiv, weil für jedes $a \in \{0,1\}^n$ gilt, dass aRa, da $a=a$ und somit auch Anzahl 1 in a = Anzahl 1 in a.
- R ist symmetrisch, weil für jedes $a, b \in \{0,1\}^n$ gilt, wenn aRb, dann auch bRa (aus Anzahl 1 in a = Anzahl 1 in b folgt, dass Anzahl 1 in b = Anzahl 1 in a.
- R ist transitiv, weil für aRb und bRc auch aRc gelten muss. (Anzahl 1 in a = Anzahl 1 in b = Anzahl 1 in c).