Institut für Informatik, Universität Bern
Diskrete Mathematik, HS 2020

Prof. Christian Cachin
Anna Parker
Luca Zanolini

Übung 5

5.1 Rundungsfunktionen (2pt)

Die *Abrundungsfunktion* (engl., *floor function*) weist einer rellen Zahl x die grösste ganze Zahl zu, welche kleiner oder gleich x ist. Ihr Wert wird als $\lfloor x \rfloor$ geschrieben und die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ heisst deshalb auch untere Gaussklammer.

Die *Aufrundungsfunktion* (engl., *ceiling function*) weist einer rellen Zahl x die kleinste ganze Zahl zu, welche grösser oder gleich x ist. Ihr Wert wird als $\lceil x \rceil$ geschrieben und die Funktion $\lceil \cdot \rceil$ heisst deshalb auch obere Gaussklammer.

Einige nützliche Eigenschaften der Ab- und Aufrundungsfunktionen für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x < n+1 \tag{1}$$
$$\lceil x \rceil = n \quad \Leftrightarrow \quad n-1 < x \leq n \tag{2}$$
$$\lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad x-1 < n \leq x \tag{3}$$
$$\lceil x \rceil = n \quad \Leftrightarrow \quad x \leq n < x+1 \tag{4}$$
$$x-1 \;<\; \lfloor x \rfloor \;\leq\; x \;\leq\; \lceil x \rceil \;<\; x+1 \tag{5}$$

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen, wiederum für $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}^+$:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & \lceil -x \rceil & = & -\lfloor x \rfloor \\
\text{b)} & \lfloor x+n \rfloor & = & \lfloor x \rfloor + n \\
\text{c)} & \lfloor x+y \rfloor & = & \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \\
\text{d)} & \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil & = & \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 \\
\text{e)} & \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil & = & \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1
\end{array}$$

5.2 Bijektivität (2pt)

Zeigen Sie, dass eine Funktion f genau dann bijektiv ist, wenn f^{-1} eine Funktion ist.

5.3 Kardinalität von Mengen (4pt)

Finden Sie pro Teilaufgabe zwei überabzählbare Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, welche die geforderte Eigenschaft haben, oder zeigen Sie, dass solche $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ nicht existieren:

a) $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ist endlich;

b) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ist endlich;

c) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ist endlich;

d) $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ist abzählbar;

e) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ist abzählbar;

f) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ist abzählbar;

g) $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ ist überabzählbar; und

h) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ist überabzählbar.

5.4 Menge aller Programme (2pt)

Wählen Sie eine beliebige Programmiersprache L und betrachten Sie die Menge $\mathcal{M}$ aller Computerprogramme, die in L geschrieben sind. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ abzählbar ist.