Übung 3

3.1 Prädikatenlogische Äquivalenzen

Damit zwei prädikatenlogische Aussagen äquivalent sind, müssen sie für beliebige Prädikate und Universen dieselben Wahrheitsbelegungen haben. Sind die Aussagen

I $\forall x : (P(x) \leftrightarrow Q(x))$

II $\forall x : P(x) \leftrightarrow \forall x : Q(x)$

äquivalent? Um zu zeigen, dass sie **nicht** äquivalent sind, genügt es, zwei Prädikate $P(x)$ und $Q(x)$ zu finden, sodass die Wahrheitsbelegungen der Aussagen nicht identisch sind. Zum Beispiel:

- $P(x)$: x ist gerade.
- $Q(x)$: x ist ungerade.

Man nehme an, das Universum sei $\mathbb{N}$. Mit diesen Prädikaten ist die Aussage I falsch, da eine natürliche Zahl nie gleichzeitig gerade und ungerade sein kann, aber immer entweder das eine oder das andere. Die Aussage II ist wahr, weil sowohl $\forall x : P(x)$ also auch $\forall x : Q(x)$ falsch sind, und wenn zwei Aussagen falsch sind, ist die Biimplikation der beiden Aussagen wahr. Damit sind I und II **nicht äquivalent**.

3.2 Negation in der Prädikatenlogik

a)

$$\begin{aligned}\neg\forall x\exists y : P(x,y) &\equiv \exists x\neg\exists y : P(x,y)\\ &\equiv \exists x\forall y : \neg P(x,y)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\neg\exists y : (Q(y) \land \forall x : R(x,y)) &\equiv \forall y : \neg(Q(y) \land \forall x : R(x,y))\\ &\equiv \forall y : \neg Q(y) \lor \neg\forall x : R(x,y)\\ &\equiv \forall y : \neg Q(y) \lor \exists x : \neg R(x,y)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\neg(\forall x\forall y : Q(x,y) \land \exists x\exists y : P(x,y)) &\equiv \neg\forall x\forall y : Q(x,y) \lor \neg\exists x\exists y : P(x,y)\\ &\equiv \exists x\neg\forall y : Q(x,y) \lor \forall x\neg\exists y : P(x,y)\\ &\equiv \exists x\exists y : \neg Q(x,y) \lor \forall x\forall y : \neg P(x,y)\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\neg\exists x\exists y : (Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)) &\equiv \forall x\neg\exists y : (Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))\\ &\equiv \forall x\forall y : \neg(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))\\ &\equiv \forall x\forall y : Q(x,y) \leftrightarrow \neg Q(y,x)\end{aligned}$$

3.3 Implikationen in der Prädikatenlogik

Eine Implikation ist nur dann falsch, wenn die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist. Um zu zeigen, dass eine Implikation $p \to q$ wahr ist, reicht es also zu zeigen, dass, wenn p wahr ist, auch q wahr sein muss.

a) $p \to q$:

Wenn p wahr ist, dann gilt für jedes x, dass entweder $Q(x)$ oder $P(x)$ oder beide wahr sind.

q ist wahr, wenn $\exists x : Q(x)$ oder $\forall x : P(x)$ oder beide wahr sind, bzw. ist q nur dann **falsch**, wenn

$$\neg(\exists x : Q(x) \vee \forall x : P(x)) \equiv \forall x : \neg Q(x) \wedge \exists x : \neg P(x)$$

wahr ist. q kann also nur dann falsch sein, wenn im Universum **kein** x existiert, das $Q(x)$ erfüllt **und mindestens ein** x existiert, das $P(x)$ nicht erfüllt. In diesem Fall aber müsste p falsch sein, weil es dann mindestens ein x gibt, das **weder** $Q(x)$ **noch** $P(x)$ erfüllt. Somit muss q wahr sein, wenn p wahr ist. Damit ist die Implikation $p \to q$ **wahr**.

b) $q \to p$:

q ist wahr, wenn $\exists x : Q(x)$ oder $\forall x : P(x)$ oder beide wahr sind.

Man nimmt an, dass das Universum mehrere Elemente enthält, von denen **genau eines** $Q(x)$ erfüllt und **keines** $P(x)$ erfüllt. In diesem Fall ist q wahr (natürlich kann q auch noch in anderen Fällen wahr sein). Unter den gegebenen Voraussetzungen ist p falsch, weil das Universum Elemente enthält, für die **weder** $Q(x)$ **noch** $P(x)$ erfüllt sind. Damit ist die Implikation $q \to p$ **falsch**.

Beweismethoden

- $P(x, y) : x$ und y sind ungerade.
- $Q(x, y) : x \cdot y$ ist ungerade.

Zu zeigen: $\forall x \forall y : P(x, y) \to Q(x, y)$.

Oder auch: $U(x)$: x ist ungerade.
Zu zeigen: $\forall x \forall y : U(x) \wedge U(y) \to U(x \cdot y)$

Direkter Beweis: $p \to q$

Die Zahlen c und $d \in \mathbb{N}$ sind ungerade, wenn zwei Zahlen m und $n \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $c = 2 \cdot m + 1$ und $d = 2 \cdot n + 1$. Wenn man beide multipliziert, erhält man:

$$\begin{aligned} c \cdot d &= (2m + 1) \cdot (2n + 1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2 \cdot (2mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

Man kann nun definieren, dass $2mn + m + n = z$. z muss ebenfalls eine natürliche Zahl sein, da die natürlichen Zahlen durch Addition und Multiplikation nicht verlassen werden. Damit gilt: $c \cdot d = 2 \cdot z + 1$ und somit muss $c \cdot d$ ungerade sein. $\square$

Beweis durch Kontraposition: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Man nimmt an $c \cdot d$ sei **nicht** ungerade, also gerade und zeigt, dass dadurch „c **und** d sind ungerade“ **nicht** gilt, also c **oder** d (oder beide) gerade sind.

Wenn $c \cdot d$ gerade ist, so gibt es eine natürliche Zahl k, so dass $c \cdot d = 2k \Leftrightarrow k = \frac{c \cdot d}{2}$. $c \cdot d$ ist durch 2 teilbar ($2 \mid c \cdot d$), wobei 2 eine Primzahl ist. Das bedeutet, dass entweder c oder d (oder beide) durch zwei teilbar sein müssen ($2 \mid c$ oder $2 \mid d$).

Begründung:
Annahme: Wenn 2 kein Teiler von c ist, muss es ein Teiler von d sein. Die einzigen Teiler von 2 sind 2 und 1, damit ist $ggT(2, c)$ entweder 2 oder 1. Da 2 **kein** Teiler von c ist (gemäss Annahme), gilt $ggT(2, c) = 1$, also sind 2 und c **teilerfremd**. Weil aber $2 \mid c \cdot d$ gilt, muss $ggT(2, d) = 2$ sein. $\square$

Beweis durch Kontradiktion: Um durch zu zeigen, dass eine Implikation $p \to q$ wahr ist, nimmt man an, dass p und $\neg q$ beide wahr sind und zeigt, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Annahmen:

I $c = 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $d = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$.

II $c \cdot d = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$

Gestützt auf Annahme I multipliziert man c und d

$$\begin{aligned} c \cdot d &= (2m + 1) \cdot (2n + 1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2 \cdot (2mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

Man kann nun definieren, dass $2mn + m + n = z$. z muss ebenfalls eine natürliche Zahl sein, da die natürlichen Zahlen durch Addition und Multiplikation nicht verlassen werden.

$$c \cdot d \overset{(I)}{=} 2 \cdot z + 1 = 2 \cdot k \overset{(II)}{=} c \cdot d$$

ist ein Widerspruch, also ist $p \to q$ wahr. $\square$