Institut für Informatik, Universität Bern
Diskrete Mathematik, HS 2020

Prof. Christian Cachin
Anna Parker
Luca Zanolini

Übung 6

6.1 Unendliche Mengen (3pt)

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $\{0,1\}^\infty$, also die Menge der (einseitig) unendlichen binären Strings, überabzählbar ist. Benutzen Sie dieses Resultat, um zu beweisen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, also die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, ebenfalls überabzählbar ist.

6.2 Zwei Relationen (2pt)

Gegeben sind zwei Relationen T und V auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, definiert als

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y)|x \text{ teilt } y\} \\ V &= \{(x,y)|x \text{ ist ein Vielfaches von } y\} \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die folgenden Relationen:

a) $T \cup V$;

b) $T \cap V$;

c) $T \setminus V$;

d) $V \setminus T$.

6.3 Eigenschaften von Relationen (3pt)

Bestimmen Sie für jede der folgendenen Relationen R auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, ob sie reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist, wobei xRy gegeben ist durch:

a) $x - y = 0$;

b) $|x| = y$;

c) $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$

d) $xy \geq 1$;

e) $xy = 0$;

f) $xy > 0$;

g) $x = 2y$;

h) $x \geq y^2$;

i) $x = 1$ oder $y = 1$;

j) $x = 1$.

6.4 Matrixdarstellung (2pt)

Eine Relation R auf einer Menge $\mathcal{X}$ kann durch eine binäre $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{X}|$ Matrix M dargestellt werden. Beschreiben und erklären Sie Eigenschaften von M, falls

a) R reflexiv ist;

b) R symmetrisch ist.

Zeigen Sie ebenfalls je ein Beispiel einer Relation mit der angegebenen Eigenschaft.