DMA - Serie 6

1. Zu zeigen: $|P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$

Dies kann mittels Diagonalisierung und Kontradiktion gezeigt werden.

Angenommen, $P(\mathbb{N})$ sei abzählbar. Dann existiert eine bijektive Funktion $f: \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$.
$P(\mathbb{N})$ enthält <u>alle</u> Untermengen von $\mathbb{N}$, also muss jede natürliche Zahl $i \in \mathbb{N}$ mittels f auf eine solche Untermenge M_i abgebildet werden können.

Es kann die folgende Untermenge konstruiert werden:

$$M = \{ i \in \mathbb{N} \mid i \notin M_i \}$$

(d.h. M enthält i g.d.w. i nicht in M_i enthalten ist.
Also existiert kein $i \in \mathbb{N}$ mit $f(i) = M$, da i genau dann in M enthalten ist, wenn es nicht in M_i enthalten ist und umgekehrt. M ist also verschieden von allen M_i.
Somit gibt es keine bijektive Funktion $f: \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ und damit ist $P(\mathbb{N})$ überabzählbar. $\square$

2. a) $T \cup V$ ist die Vereinigung der Teilmengen T und V von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, enthält also alle Elemente (x, y), wobei x ein Teiler <u>oder</u> Vielfaches von y ist.

$T \cup V = \{ (x,y) \mid x$ ist ein Vielfaches von y $\vee$ x ist ein Teiler von $y \}$

b) $T \cap V$ enthält alle Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ für die gilt: x ist ein Teiler <u>und</u> ein Vielfaches von y. Dies ist nur möglich wenn $x = y$, denn für

T gilt: $x \leq y$ und für
V gilt: $x \geq y$

$T \cap V = \{ (x,y) \mid x$ ist Teiler von $y \wedge x$ ist Vielfaches von $y \}$
$= \{ (x,y) \mid x = y \}$ (Identitätsrelation)

(Es wird hier angenommen, dass $0 \notin \mathbb{N}$)

c) $T \setminus V$ enthält alle Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, wobei x ein Teiler von y, aber kein Vielfaches von y ist.
Dies ist identisch zu $T \setminus (V \cap T)$, also
$T \setminus V = \{(x,y) \mid x \text{ teilt } y \wedge x \text{ ist } \underline{\text{kein}} \text{ Vielfaches von } y\}$
$= \{(x,y) \mid x \text{ teilt } y \wedge x \neq y\}$

d) $V \setminus T$ enthält alle Elemente aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, wobei x ein Vielfaches von y, aber kein Teiler von y ist.
Dies ist identisch zu $V \setminus (V \cap T)$, also
$V \setminus T = \{(x,y) \mid x \text{ ist ein Vielfaches von } y \wedge x \text{ ist kein Teiler von } y\}$
$= \{(x,y) \mid x \text{ ist ein Vielfaches von } y \wedge x \neq y\}$

3 1. Eine Relation R ist <u>reflexiv</u>, wenn $(a,a) \in R$ für jedes $a \in A$
2. Eine Relation R ist <u>symmetrisch</u>, wenn $(b,a) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in R$
3. Eine Relation R ist <u>transitiv</u>, falls $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$, dann auch $(a,c) \in R$.

a) 1. R ist reflexiv, weil $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ also ist $(a,a) \in R$ für jedes Element $a \in \mathbb{Q}$.
2. R ist symmetrisch, weil es <u>nur</u> Elemente (x,y) enthält, für die gilt $x = y$, d.h. $\forall (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$.
3. Die Relation ist transitiv, da $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$ $(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$, weil $x = y = z$.
$\Rightarrow$ Es handelt sich hier um die Identitätsrelation.

b) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, da z.B. $(-1,-1)$ nicht in R enthalten ist, weil $|-1| \neq -1$.
2. R ist <u>nicht</u> symmetrisch, weil z.B. $(-1,1)$ in R enthalten ist, $(1,-1)$ aber nicht.
3. R ist <u>nicht</u> transitiv, weil z.B. $(-1,1)$ und $(1,1)$ in R enthalten sind, $(1,-1)$ aber nicht.

c) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, weil $\frac{0}{0}$ undefiniert und damit, $\frac{0}{0} \notin \mathbb{N}$, also $(0,0) \notin R$.
2. R ist <u>nicht</u> symmetrisch, weil z.B. $(2,1) \in R$ aber $(1,2) \notin R$.
3. R ist transitiv, weil $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$ gilt, dass wenn $\left(\frac{x}{y} \in \mathbb{N} \wedge \frac{y}{z} \in \mathbb{N}\right)$ $\longrightarrow \frac{x}{z} \in \mathbb{N}$.

d) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, weil $0 \cdot 0 \neq 1$ und damit $(0,0) \notin R$.
2. R ist symmetrisch, weil $x \cdot y = y \cdot x$ also $\forall x,y \in \mathbb{Q}$: $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$.
3. R ist <u>nicht</u> transitiv, weil z.B. $(1,2) \in R \land (2,\frac{1}{2}) \in R$, aber $(1,\frac{1}{2}) \notin R$.

e) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, da $1 \cdot 1 \neq 0$ und somit $(1,1) \notin R$.
2. R ist symmetrisch, weil $x \cdot y = y \cdot x$, also wenn $(x,y) \in R$ dann auch $(y,x) \in R$.
3. R ist <u>nicht</u> transitiv, weil z.B. falls $(2,0)$ und $(0,3)$ $\in R$, dann ist $(2,3) \notin R$.

f) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, weil $0 \cdot 0 \neq 0$ und damit $(0,0) \notin R$.
2. R ist symmetrisch, weil $x \cdot y = y \cdot x$, also wenn $(x,y) \in R$, dann auch $(y,x) \in R$.
3. R ist transitiv, weil wenn $x > 0$, dann muss auch $y > 0$ sein und somit auch $z > 0$. Dann ist auch $x \cdot z > 0$. Wenn $x < 0$, dann muss auch y und folglich auch $z < 0$ sein. Damit ist auch $x \cdot z > 0$.
x, y oder z dürfen nicht 0 sein.

g) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, weil $1 \neq 2 \cdot 1$, also ist $(1,1) \notin R$.
2. R ist <u>nicht</u> symmetrisch, weil zwar $(2,1) \in R$, aber $(1,2) \notin R$.
3. R ist <u>nicht</u> transitiv, weil $(2,1) \in R$ und $(1,\frac{1}{2}) \in R$, aber $(2,\frac{1}{2}) \notin R$.

h) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, weil $2 \neq 2^2$, also $(2,2) \notin R$.
2. R ist <u>nicht</u> symmetrisch, weil $(4,2) \in R$ aber $(2,4) \notin R$.
3. R ist transitiv, weil wenn $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ muss gelten, dass $\sqrt{x} \geq y \geq z^2$ also ist auch $\sqrt{x} \geq z^2$ und damit $x \geq z^2$ (z könnte als einziger Wert negativ sein).

i) 1. R ist <u>nicht</u> reflexiv, weil $(2,2) \notin R$.
2. R ist symmetrisch, weil wenn $(x,1) \in R$, dann auch $(1,x) \in R$ und wenn $(1,x) \in R$, dann auch $(x,1) \in R$.
3. R ist <u>nicht</u> transitiv, weil $(3,1) \in R$ und $(1,2) \in R$, aber $(3,2) \notin R$.

i) 1. R ist nicht reflexiv, da $(2,2) \notin R$.

2. R ist nicht symmetrisch, da $(1,2) \in R$ aber $(2,1) \notin R$.

3. R ist transitiv weil wenn zwei Tupel $(x,y), (y,z) \in R$, muss gelten, dass $x=y=1$. Damit ist auch $(x,z) \in R$.

4 Die Relation R auf der Menge X kann durch die folgende binäre Matrix M dargestellt werden.

$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Wenn an einer Stelle m_{ij} in der Matrix eine 1 steht, bedeutet dies, dass $(x_i, x_j) \in R$.

a) Eine Relation ist reflexiv, wenn darin alle (x_i, x_j) enthalten sind, für die gilt: $i=j$.

$$M = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline x_1 & 1 & & & \\ x_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_n & & & & 1 \end{array}$$

In der Matrix muss deshalb in der Diagonalen überall eine 1 stehen. Die Elemente ausserhalb der Diagonalen können 0 oder 1 sein.

Ein Beispiel einer Relation mit dieser Eigenschaft könnte sein: $T = \{(x,y) \mid x \text{ teilt } y\}$ auf der Menge $X = \{1,2,3,4\}$:

$$M = \begin{array}{c|cccc} x \backslash y & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

b) Eine Relation ist reflexiv, wenn gilt, dass Position $m_{ij} = 1$, g.d.w. Position $m_{ji} = 1$. Dies bedeutet auch, dass wenn $m_{ij} = 0$, dann auch $m_{ji} = 0$, also ist R symmetrisch g.d.w. $m_{ij} = m_{ji}$ $\forall i,j \in \mathbb{N}$. Das heisst,

$$M = M^t \text{ (transponierte Matrix)}$$

$$M = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline x_1 & 0 & 1 & & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n & 0 & 1 & & 0 \end{array}$$

Ein Beispiel dafür könnte sein $x_i + x_j = 3$ auf der Menge $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$M = \begin{array}{c|c} x \backslash y & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$