Übung 2

11/10

2.1 Äquivalenzen

a)

$$
\begin{array}{r|l}
\neg a \land (a \lor b) \to b & \text{Distributive law} \\
(\neg a \land a) \lor (\neg a \land b) \to b & \text{Negation law} \\
0 \lor (\neg a \land b) \to b & \text{Commutative law} \\
(\neg a \land b) \lor 0 \to b & \text{Identity law} \\
(\neg a \land b) \to b & \text{Solving conditional: } p \to q \equiv \neg p \lor q \\
\neg(\neg a \land b) \lor b & \text{De Morgan} \\
(\neg(\neg a) \lor \neg b) \lor b & \text{Double negation} \\
(a \lor \neg b) \lor b & \text{Associative law} \\
a \lor (\neg b \lor b) & \text{Negation law} \\
a \lor 1 & \text{Domination law} \\
1 & \textbf{Tautology}
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
p \land q \land (p \leftrightarrow \neg q) & \text{Solving biconditional: } p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q) \\
p \land q \land ((p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)) & \text{Substitution: } a = (p \land \neg q),\ b = (\neg p \land q) \\
p \land q \land (a \lor b) & \text{Associative law} \\
p \land (q \land (a \lor b)) & \text{Distributive law} \\
p \land ((q \land a) \lor (q \land b)) & \text{Back-substitution} \\
p \land ((q \land (p \land \neg q)) \lor (q \land (\neg p \land q)) & \text{Associative, commutative law} \\
p \land ((q \land \neg q \land p) \lor (q \land q \land \neg p)) & \text{Negation, idempotent law} \\
p \land ((0 \land p) \lor (q \land \neg p)) & \text{Commutative, domination law} \\
p \land (0 \lor (q \land \neg p)) & \text{Commutative, identity law} \\
p \land (q \land \neg p) & \text{Associative, commutative law} \\
q \land (p \land \neg p) & \text{Negation law} \\
q \land 0 & \text{Domination law} \\
0 & \textbf{Contradiction}
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{r|l}
(a \lor b) \land (\neg a \lor c) \to (b \lor c) & \text{Substitution: } x = a \lor b,\ y = \neg a \lor c,\ z = b \lor c \\
x \land y \to z & \text{Solving conditional: } p \to q \equiv \neg p \lor q \\
\neg(x \land y) \lor z & \text{De Morgan} \\
\neg x \lor \neg y \lor z & \text{Back-substitution} \\
\neg(a \lor b) \lor \neg(\neg a \lor c) \lor (b \lor c) & \text{De Morgan} \\
(\neg a \land \neg b) \lor (\neg(\neg a) \land \neg c) \lor (b \lor c) & \text{Double negation, associative law} \\
(\neg a \land \neg b) \lor (a \land \neg c) \lor b \lor c & \text{Commutative, associative law} \\
(c \lor (a \land \neg c)) \lor (b \lor (\neg a \land \neg b)) & \text{Distributive law} \\
((c \lor a) \land (c \lor \neg c)) \lor ((b \lor \neg a) \land (b \lor \neg b)) & \text{Negation law} \\
((c \lor a) \land 1) \lor ((b \lor \neg a) \land 1) & \text{Identity law} \\
(c \lor a) \lor (b \lor \neg a) & \text{Associative, commutative law} \\
(a \lor \neg a) \lor b \lor c & \text{Negation law} \\
1 \lor b \lor c & \text{Domination law} \\
1 & \textbf{Tautology}
\end{array}
$$

3 pt

2.2 Normalformen

DNF: Summe (Disjunktion) der Minterme der einschlägigen Indizes.
CNF: Produkt (Konjunktion) der Maxterme der nicht einschlägigen Indizes.

Die Minterme und Maxterme können mithilfe der Wahrheitstabelle gefunden werden.

a)

a	b	a⊕b	Minterm	Maxterm
0	0	0	$m_0 = \neg a \land \neg b$	$M_0 = a \lor b$
0	1	1	$m_1 = \neg a \land b$	$M_1 = a \lor \neg b$
1	0	1	$m_2 = a \land \neg b$	$M_2 = \neg a \lor b$
1	1	0	$m_3 = a \land b$	$M_3 = \neg a \lor \neg b$

$\text{DNF} = m_1 \lor m_2 = (\neg a \land b) \lor (a \land \neg b)$

$\text{CNF} = M_0 \land M_3 = (a \lor b) \land (\neg a \lor \neg b)$

b)

a	b	c	(a → b) → c	Minterm	Maxterm
0	0	0	0	$m_0 = \neg a \land \neg b \land \neg c$	$M_0 = a \lor b \lor c$
0	0	1	1	$m_1 = \neg a \land \neg b \land c$	$M_1 = a \lor b \lor \neg c$
0	1	0	0	$m_2 = \neg a \land b \land \neg c$	$M_2 = a \lor \neg b \lor c$
0	1	1	1	$m_3 = \neg a \land b \land c$	$M_3 = a \lor \neg b \lor \neg c$
1	0	0	1	$m_4 = a \land \neg b \land \neg c$	$M_4 = \neg a \lor b \lor c$
1	0	1	1	$m_5 = a \land \neg b \land c$	$M_5 = \neg a \lor b \lor \neg c$
1	1	0	0	$m_6 = a \land b \land \neg c$	$M_6 = \neg a \lor \neg b \lor c$
1	1	1	1	$m_7 = a \land b \land c$	$M_7 = \neg a \lor \neg b \lor \neg c$

$$\text{DNF} = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

$$\text{CNF} = M_0 \wedge M_2 \wedge M_6 = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$$

2pt

c) Diese Aussage ist nur in genau einem Fall falsch und zwar wenn $p = 1,\ q = 1,\ r = 0$. Die DNF und die CNF sind, nachdem sie vereinfacht wurden, identisch $(\neg p \vee \neg q \vee r)$.

2.3 Bärengraben

Die Aussage von Beat kann mittels Distributivgesetz umgeformt werden zu

$$P(x) \wedge (W(x) \vee T(x)) \wedge B(x).$$

Diese Aussage unterscheidet sich nur dadurch von der Aussage von Alina, dass eine Konjunktion anstelle einer Implikation verwendet wird.

$P(x) \wedge (W(x) \vee T(x))$	$B(x)$	$P(x) \wedge (W(x) \vee T(x)) \wedge B(x)$	$P(x) \wedge (W(x) \vee T(x)) \rightarrow B(x)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

2pt

In den beiden letzten Zeilen, also im Falle dass $P(x) \wedge (W(x) \vee T(x))$ wahr ist, liefern beide Lösungen dasselbe Ergebnis. Man muss sich also überlegen, welches Ergebnis die Aussage liefern soll, wenn $P(x) \wedge (W(x) \vee T(x))$ falsch ist. Falls auch $B(x)$ falsch ist, muss die Aussage wahr sein (eine Person, die nicht in Bern wohnt und auch noch nie als Tourist dort war, hat den Bärengraben nicht besucht). Falls $B(x)$ wahr ist, muss die Aussage auch wahr sein (x kann ein Hund sein, der in Bern wohnt und den Bärengraben besucht hat). Somit ist die Lösung von Alina korrekt und diejenige von Beat falsch.

2.4 Aussagen der Prädikatenlogik

Annahme: Das Universum für die folgenden Aufgaben besteht aus allen Personenwagen.

a) V(x): x hat 4 Räder
S(x): x ist sauber
$\forall x (V(x) \wedge S(x))$

b) $\exists x (V(x) \wedge \neg S(x))$

2pt

c) L(x): x ist ein Lamborghini
$\exists x (L(x) \wedge S(x)) \wedge \exists x (V(x) \wedge \neg S(x))$

d) $\forall x (S(x) \rightarrow L(x) \vee V(x))$

e) $\forall x (L(x) \rightarrow V(x))$

2.5 Prädikate

a) P1: Es existiert ein x, sodass $x + 4 \not> 3x$. Bsp: Wenn $x = 3$, dann $7 \not> 9$. Dieses Prädikat ist **wahr**.

P2: Für alle x gilt, dass $4x < 5x$. Gegenbeispiel: Wenn $x = -1$, dann $-4 \not< -5$. Dieses Prädikat ist **falsch**.

b) P1: Es soll ein Universum gefunden werden, sodass P1 **falsch** ist: $U = \{0, 1\}$

P2: Es soll ein Universum gefunden werden, sodass P2 **wahr** ist: $U = \mathbb{N}_{>0}$

2Pt