DMA - Serie 5

Pascale Welsch
13-204-821

1

a) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor \iff \lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$

Aus (1) folgt:

$\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil \iff -\lceil -x \rceil \leq x < -\lceil -x \rceil + 1 \quad | + \lceil -x \rceil$

$\iff 0 \overset{a}{\leq} x + \lceil -x \rceil \overset{b}{<} 1$

a. Aus (5) folgt, dass $-x \leq \lceil -x \rceil$,
also gilt $x + (-x) \leq x + \lceil -x \rceil \iff 0 \leq x + \lceil -x \rceil$.
Die Ungleichung a. ist somit immer erfüllt.

b. Aus (5) folgt, dass $\lceil -x \rceil < -x+1$, d.h.
$x + \lceil -x \rceil < x + (-x+1) \iff x + \lceil -x \rceil < 1$.
Die Ungleichung b. ist somit immer erfüllt.
Da $0 \leq x + \lceil -x \rceil < 1 \iff \lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil \iff \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$,
ist Aussage a) <u>wahr</u>. $\square$

b) Sei $\lfloor x \rfloor = k$, $k \in \mathbb{N}$.
Aus (1) folgt, dass
$k \leq x < k + 1 \quad |+n$
$k + n \leq x + n < k + 1 + n$
Aus (1) folgt, dass
$\lfloor x + n \rfloor = k + n = \lfloor x \rfloor + n$ $\square$
Somit ist Aussage b) wahr.

c) Sei $x = 1{,}5$, $y = 1{,}5$
$\lfloor 1{,}5 + 1{,}5 \rfloor \overset{?}{=} \lfloor 1{,}5 \rfloor + \lfloor 1{,}5 \rfloor$
$\lfloor 3 \rfloor \overset{?}{=} \lfloor 1{,}5 \rfloor + \lfloor 1{,}5 \rfloor$
$3 \neq 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ Widerspruch!
Aussage c) gilt nicht $\forall x, y \in \mathbb{R}$

d) Sei $x = -1/2$

$$\left\lceil \frac{-1/2 + 1}{2} \right\rceil \overset{?}{=} \left\lfloor \frac{-1/2}{2} \right\rfloor + 1$$

$$\left\lceil \frac{1}{4} \right\rceil \overset{?}{=} \left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor + 1$$

$1 \neq -1 + 1 = 0 \Rightarrow$ Widerspruch!
Aussage d) gilt nicht $\forall x \in \mathbb{R}$

e) Analog zu b) gilt, dass $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Beweis: Sei $\lceil x \rceil = k$, $k \in \mathbb{N}$

Aus (2) folgt, dass

$$k-1 < x \leq k \quad | +n$$

$$k-1+n < x+n \leq k+n$$

Aus (2) folgt, dass

$$\lceil x+n \rceil = k+n = \lceil x \rceil + n \qquad (6)$$

$$\left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil \overset{?}{=} \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

Es können 2 Fälle unterschieden werden:

① m gerade: Sei $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

$$\left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2k}{k} \right\rfloor + 1 \iff \left\lceil \frac{2k}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil = \lfloor k \rfloor + 1$$

$$\iff \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil = k+1 \quad | (6)$$

$$\iff k + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = k+1$$

$$\iff k+1 = k+1 \checkmark$$

② m ungerade: Sei $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\left\lceil \frac{2k+1+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor + 1 \iff \left\lceil \frac{2k+2}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2k}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$$

$$\iff \lceil k+1 \rceil = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 \quad | \text{ b)}$$

$$\iff k+1 = k + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = k+1 \checkmark$$

Da e) für alle geraden und alle ungeraden m gilt, ist e) wahr $\forall m \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

② Eine Funktion $f: A \to B$ ist bijektiv g.d.w. es eine inverse Funktion $f^{-1}: B \to A$ gibt

① Zeige $f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$

Da f bijektiv ist, muss sie per Definition auch injektiv und surjektiv sein.
Da f surjektiv ist, gilt es für jedes $b \in B$ genau ein $a \in A$, sodass $b = f(a)$.
Sei $f^{-1}: B \to A$, $f^{-1}(b) = a$.
Es gilt $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$ und $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$.

Das heisst, wenn es eine bijektive Funktion $f: A \to B$ gibt, die jedes Element $a \in A$ eindeutig auf ein Element $b \in B$ abbildet, so muss es eine inverse Funktion $f^{-1}: B \to A$ geben, die jedes $b \in B$ auf ein $a \in A$ abbildet.

② Zeige $f^{-1}: B \to A \Rightarrow f: A \to B$

Die Funktion $f^{-1}: B \to A$ wurde so definiert, dass $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$ und $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$.

$f \circ f^{-1}$ ist die Identitätsfunktion $\iota_A: A \to A$, also ist f surjektiv.
Seien $a_1, a_2 \in A$ und $f(a_1) = f(a_2)$. Es gilt
$a_1 = f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) = a_2$, also ist f injektiv. Somit ist f auch bijektiv. $\square$

③ a) Sei A die Menge, die das Intervall aller reellen Zahlen von 0 bis 1, sowie die Zahl 2 enthält.
$A = \{(0,1), 2\}$
Und sei
$B = \{(0,1)\}$.

$A \setminus B = \{2\}$ → endlich

b) Es gilt, dass $|A| > |\mathbb{N}|$ und $|B| > |\mathbb{N}|$
$A \cup B$ enthält alle Elemente, die in A oder B oder beiden enthalten sind. Damit muss $|A \cup B| > |\mathbb{N}|$ sein.
Es gibt also kein A und B, s.d. $A \cup B$ endlich ist.

c) Im einfachsten Fall ist $A \cap B = \emptyset$ → endlich.
Sei $A = \mathbb{R}^-$ und $B = \mathbb{R}^+$, dann ist $A \cap B = \emptyset$

d) Sei A die Menge, die das Intervall aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 sowie alle natürlichen Zahlen enthält.
$A = \{(0,1)\} \cup \mathbb{N}$
Und sei
$B = \{(0,1)\}$.
$A \setminus B = \mathbb{N}$ → abzählbar

e) Es gibt keine solchen A und B, Erklärung wie in b).

f) Sei $A = \{(0,1)\} \cup \mathbb{N}$ und $B = \{(2,3)\} \cup \mathbb{N}$

$A \cap B = \mathbb{N}$ → abzählbar

g) Sei $A = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^+$
$A \setminus B = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ → überabzählbar

h) Sei $A = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^+$
$A \cap B = \mathbb{R}^+$ → überabzählbar

④ Eine Programmiersprache L ist eine Menge von Strings (Worten) über einem <u>endlichen</u> Alphabet. Diese Worte werden übersetzt in Maschinensprache, also eine low-level Programmiersprache, die in binärer Schreibweise mit 0 und 1 dargestellt werden kann. Nur so können die Programme überhaupt ausgeführt werden. Jede Programmiersprache und damit jedes Programm in dieser Programmiersprache kann also auf Worte Σ^* über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ abgebildet werden.

Für diesen Beweis wird deshalb die Sprache gewählt, die aus Worten Σ^* über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ besteht (ein praktisches Beispiel hierfür wäre die Programmierung mit Lochkarten).

Ein Computerprogamm muss endlich sein, es besteht also aus einer endlichen Menge von endlichen Worten Σ^*, damit ist auch ein Computerprogramm ein endliches Wort Σ^* aus 0 und 1.
Für eine bestimmte Wortlänge gibt es nur eine bestimmte Anzahl Programme. Also können alle Programme, die es gibt, aufgelistet werden (mit aufsteigender Länge):

$M = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$
Um zu zeigen, dass diese Menge abzählbar ist, muss man sie auf $\mathbb{N}$ abbilden. Die Funktion, die dafür gewählt wird, ist die folgende: Sei s ein Wort aus Σ^*

$$s \rightarrow (1s)_B$$

Wenn man vor jedes binäre Wort s eine 1 setzt, kann dieses Wort <u>eindeutig</u> als natürliche Zahl interpretiert werden. Damit hat M dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ und ist abzählbar.