

Projeto 1 - Processamento de Sinais Digitais

Daniel Tatsch, Nelson Alves, Schaiana Sonaglio

Engenharia de Telecomunicações

IFSC - Instituto Federal de Santa Catarina, São José, SC

Maio de 2018

1 Introdução

Este relatório apresenta quatro implementações onde foi aplicada a metodologia de projeto de filtros digitais *IIR* (do inglês *Infinite Impulse Response*), que é um filtro digital com resposta ao impulso de duração infinita, utilizado em processamento de sinais digitais; são eles: filtro passa baixas - aproximação de Chebyshev, filtro passa altas - aproximação de Butterworth, filtro passa faixa e filtro passa faixa elípticos - aproximação de Euler.

2 Metodologia

A metodologia aplicada se divide em três partes: (a) projeto de um filtro protótipo analógico passa baixas, cálculo da função de transferência $H(p)$; (b) transformação em frequência do filtro, transformar $H(p)$ em $H(s)$, para obtenção de filtros passa baixas, passa altas, passa faixa e rejeita faixa, conforme o tipo de filtro desejado; (c) transformação do filtro analógico em filtro digital, transformar $H(s)$ em $H(z)$, utilizando a transformação *Bilinear*. No caso dos filtros Passa Faixa e Rejeita Faixa, foram utilizadas funções do *software* MATLAB® para o cálculo de $H(p)$, não realizando esta parte da metodologia através de cálculo, como nos demais.

2.1 Projeto de um filtro protótipo analógico passa baixas

Nesta etapa da metodologia, é calculada a função de transferência $H(p)$, que efetua a transformação da frequência de *hertz* (Hz) para radianos por segundo (rad/s), servindo como protótipo de referência para a atenuação nas frequências de passagem e rejeição; este cálculo é baseado no tipo de aproximação escolhida, as aproximações utilizadas neste relatório foram a de *Butterworth*, a de *Chebyshev* e a de *Euler*. No domínio de p , todos os filtros são projetados primeiramente como um passa baixas.

2.2 Transformação em frequência do filtro

Nesta etapa da metodologia, é calculada a função de transferência $H(s)$, que efetua a conversão de ω para λ , para obter a frequência normalizada. Esta etapa é necessária por causa da distorção que ocorre no sinal, após passar pela transformação bilinear.

2.3 Transformação do filtro analógico em filtro digital

Nesta etapa da metodologia, é calculada a função de transferência $H(z)$, que transforma as frequências em Ωs e Ωp , denominando a resposta em função da frequência de amostragem, em uma escala de 0 a π ; esta função é obtida através da transformação bilinear da função $H(s)$. A Transformação Bilinear mapeia pontos de um determinado plano em outro: neste caso, os pontos sobre o eixo imaginário do plano s são mapeados sobre círculo de raio unitário do plano z . Esta transformação preserva a ordem do filtro e é calculada pela Equação (1), substituindo nela a variável s .

$$H_z(z) = H_s\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right) \quad (1)$$

No domínio de s , o mapeamento por transformação bilinear deforma a resposta em frequência do filtro, portanto, para este relatório, não foram levadas em consideração as equações e coeficientes de $H(s)$.

2.4 Especificações do Projeto

Para todos os filtros, foram considerados os valores da Tabela 1, exceto para o filtro passa altas (filtro 2), que foi projetado com atenuação mínima na banda de rejeição $A_s = 20$ dB, mas mantendo os demais parâmetros.

Tabela 1 - Especificações gerais.

Frequência de amostragem (F_a)	8 KHz
Ganho médio na banda de passagem (G_p)	0 dB
Atenuação máxima na banda de passagem (A_p)	0.5 dB
Atenuação mínima na banda de rejeição (A_s)	30 dB

O filtro passa baixas foi implementado utilizando a aproximação de Chebyshev tipo 1 e o passa altas utilizando aproximação de Butterworth, já os filtros passa faixa e rejeita faixa foram implementados utilizando a aproximação de Euler.

3 Implementações e Análises

Nesta seção, serão apresentadas as implementações dos quatro filtros citados na introdução deste documento.

3.1 Filtro 1 - Passa Baixas - Chebyshev

O primeiro filtro implementado foi o filtro passa baixas com aproximação de Chebyshev tipo 1.

3.1.1 Cálculos utilizados

As especificações utilizadas nos cálculos estão ilustradas na Tabela 2.

Tabela 2 - Filtro Passa Baixas: especificações

Frequência de amostragem (Fa)	8 KHz
Ganho médio na banda de passagem (Gp)	0 dB
Atenuação máxima na banda de passagem (Ap)	0.5 dB
Atenuação mínima na banda de rejeição (As)	30 dB
Frequência de Passagem (Fp)	1050 Hz
Frequência de Rejeição (Fr)	1400 Hz
Aproximação	Chebyshev Tipo 1

Para encontrar a função de transferência $H(p)$, primeiramente, conforme ilustrado na Equação (2), foi realizado o cálculo das frequências de passagem e de rejeição em radianos, normalizadas pela frequência de amostragem.

$$\omega_s = \frac{2 * \pi * Fr}{Fa} = 1,0996 \text{ rad/s} \quad \omega_p = \frac{2 * \pi * Fp}{Fa} = 0,8247 \text{ rad/s} \quad (2)$$

Em seguida, conforme ilustrado na Equação (3) e na Equação (4), foi realizada a conversão de ω para λ e de ω para Ω . Estes ajustes são realizados para normalizar todos os parâmetros em função da frequência de amostragem, pois quando ocasionada a distorção do filtro oriunda da transformação bilinear, os valores serão ajustados automaticamente.

$$\lambda_s = 2 * Fa * \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 1.2256 \text{ Hz} \quad \lambda_p = 2 * Fa * \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 0.8748 \text{ Hz} \quad (3)$$

$$\Omega_p = \frac{\lambda_p}{\lambda_s} = 1 \quad \Omega_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 1.4010 \quad (4)$$

Para obter a ordem do filtro, a Equação (5) foi realizada.

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}(\sqrt{(10^{0.1As} - 1)/(10^{0.1Ap} - 1)})}{\cosh^{-1}(\Omega_s)} = 6 \quad (5)$$

Para obter os pólos, a Equação (6), a Equação (8), a Equação (9) e a Equação (10) foram realizadas.

$$\psi_2 = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} = 0,2957 \quad (6)$$

Sendo que ϵ é calculado conforme ilustrado na Equação (7).

$$\epsilon = \sqrt{(10^{0.1Ap} - 1)} = 0,3493 \quad (7)$$

$$\theta = \frac{(2k - 1)\pi}{2n} = [0,2618 \quad 0,7854 \quad 1,3090 \quad 1,8326 \quad 2,3562 \quad 2,8798] \quad (8)$$

$$pk = -\sinh(\psi_2)\sin(\theta) + j\cosh(\psi_2)\cos(\theta)k \quad (9)$$

Com $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Com os valores assumidos por pk , que foram ilustrados na Equação (10), temos o denominador Dp que será utilizado para a obtenção da função de transferência $H(p)$, conforme mostrado na Equação (11).

$$pk = \begin{bmatrix} -0.0777 + 1.00846i & -0.212 + 0.738i & -0.289 + 0.270i \\ -0.289 - 0.270i & -0.212 - 0.738i & -0.0777 - 1.00846i \end{bmatrix} \quad (10)$$

Agora, para o cálculo do Np , verifica-se a ordem do filtro: se for ímpar, $Np = 1$, se for par, como é o caso deste filtro, utiliza-se a Equação (7) e Equação (12).

$$H(p) = \frac{Np}{Dp} \quad (11)$$

$$H(0) = \sqrt{\frac{1}{1 + \epsilon^2}} = 0,9441 \quad (12)$$

Após obter o valor de Np e de Dp , basta resolvermos a Equação (11), conforme foi ilustrado na Equação (13).

$$H(p) = \frac{0.0895}{p^6 + 1.1591p^5 + 2.1718p^4 + 1.5897p^3 + 1} \quad (13)$$

Após obter a função de transferência $H(p)$, fazemos a conversão em frequência do filtro, transformando $H(p)$ em $H(s)$, conforme ilustrado nas Equações (14) e (15).

$$H(s) = H(p)\left(\frac{s}{\lambda p}\right) \quad (14)$$

$$H(s) = \frac{0.08946}{2.2309s^6 + 2.2623s^5 + 3.7081s^4 + 2.3745s^3 + 1.5312s^2 + 0.4942s + 0.0947} \quad (15)$$

Para transformar o filtro de analógico para digital, transformamos $H(s)$ em $H(z)$ através da transformação bilinear, conforme ilustrado na Equação (16).

$$f_z = 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2.0z - 2.0}{z + 1.0} \quad (16)$$

Após a simplificação normalização do numerador e denominadores, a Equação (17) foi realizada, representando a resposta em frequência do filtro digital.

$$H(z) = \frac{0.000297 z^6 + 0.001784 z^5 + 0.004462 z^4 + 0.005949 z^3 + 0.004462 z^2}{z^6 - 4.1506 z^5 + 7.9399 z^4 - 8.7822 z^3 + 5.8785 z^2 - 2.2510 z + 0.3856} + \frac{0.001784 z + 0.0002974}{z^6 - 4.1506 z^5 + 7.9399 z^4 - 8.7822 z^3 + 5.8785 z^2 - 2.2510 z + 0.3856} \quad (17)$$

3.1.2 Análise

Através da implementação dos filtros no *software* MATLAB®, os resultados ilustrados na Figura 1, na Figura 2, na Figura 3 e na Figura 4 foram obtidos.

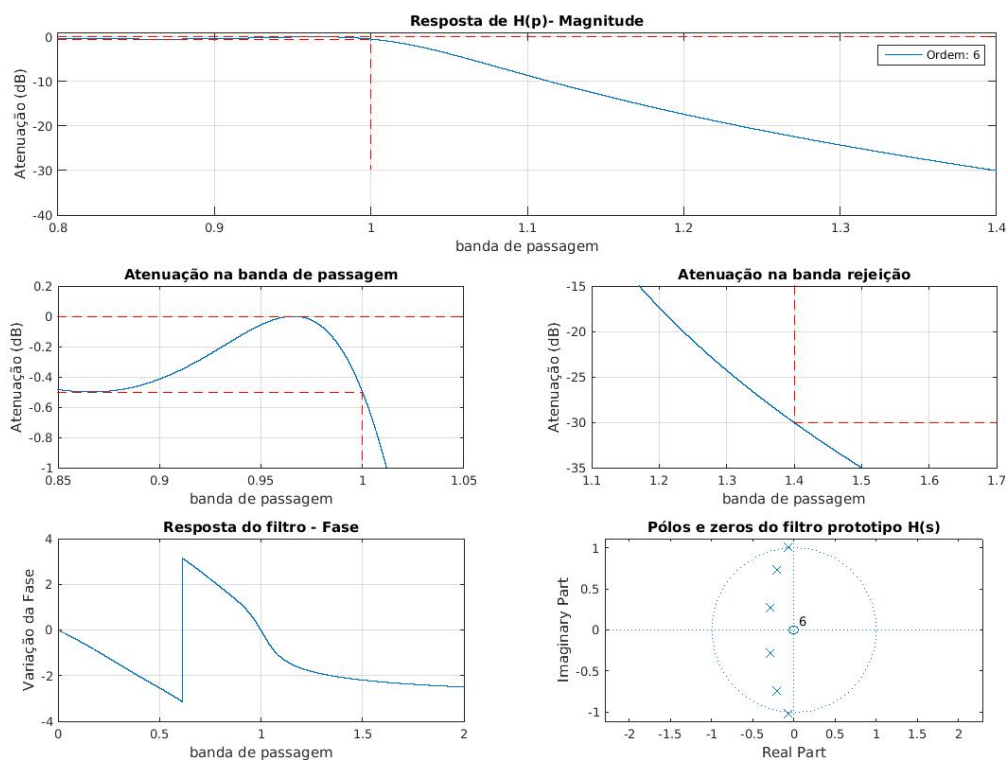


Figura 1 - Filtro 1: Função de transferência $H(p)$: elaboração própria.

Na Figura 1, observa-se o comportamento do filtro em $H(p)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros; é possível notar que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, confirmando a estabilidade do filtro em $H(p)$.

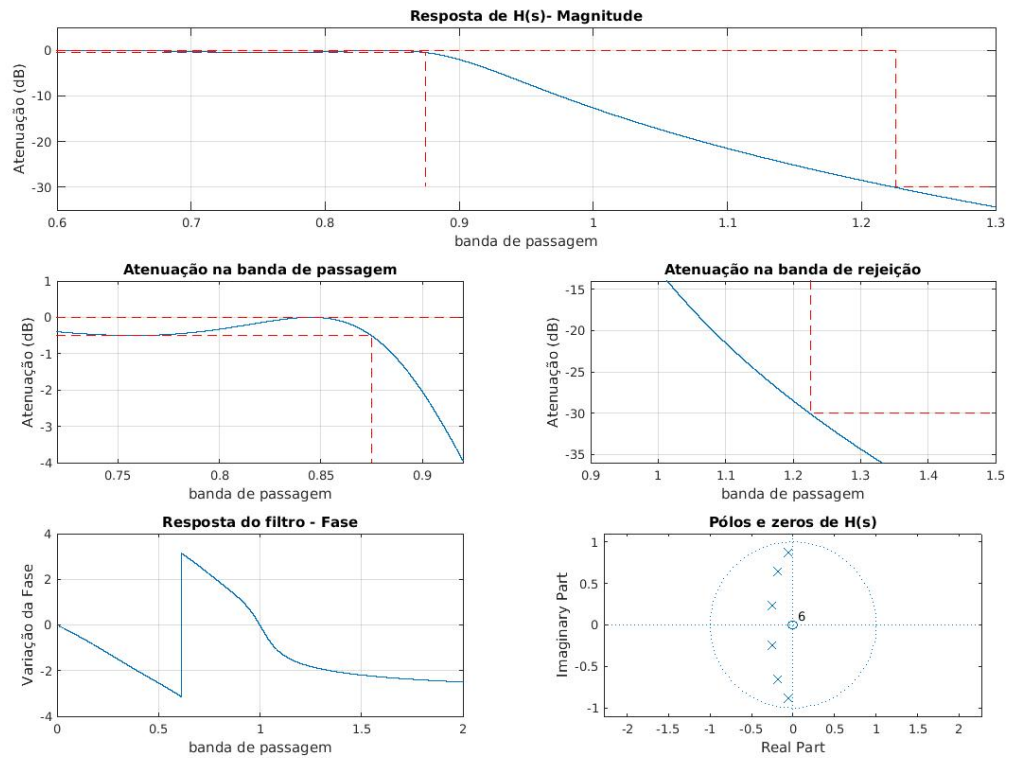


Figura 2 - Filtro 1: Função de transferência $H(s)$: elaboração própria.

Na Figura 2, observa-se o comportamento do filtro em $H(s)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros. Como essa etapa possui o mesmo critério de estabilidade de $H(p)$, observa-se também que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, o filtro estando, assim, estável.

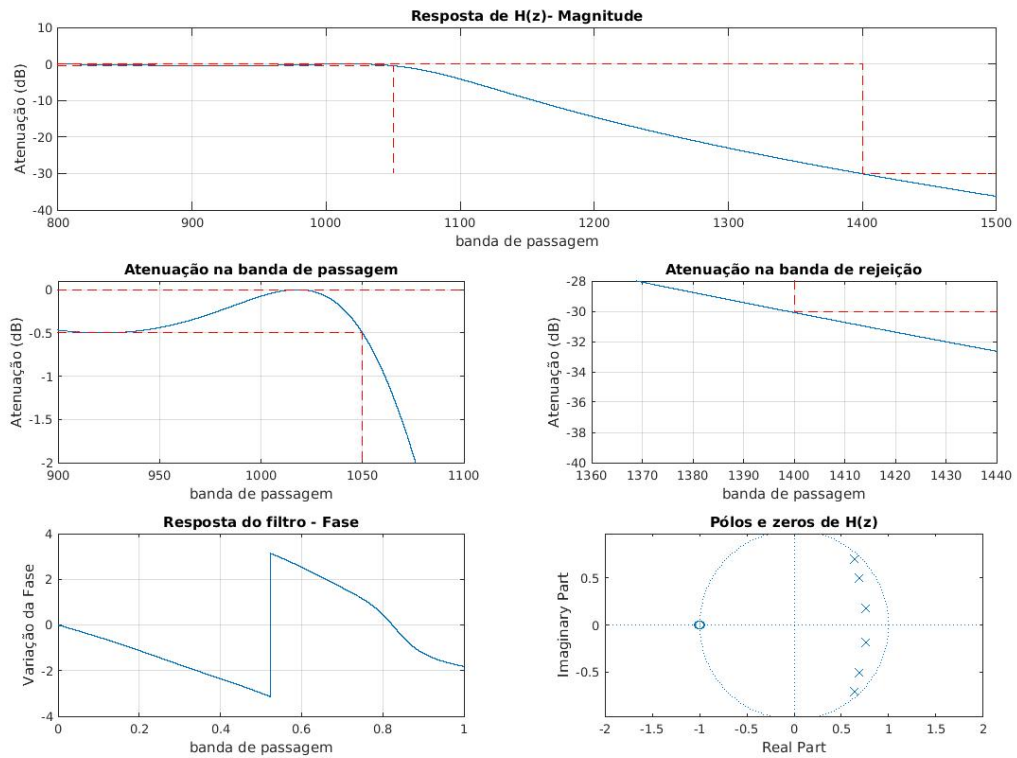


Figura 3 - Filtro 1: Função de transferência $H(z)$: elaboração própria.

Na Figura 3, observa-se o comportamento do filtro em $H(z)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros.

Conforme dito anteriormente, após a transformação de filtro analógico para filtro digital, foi necessário realizar a transformação bilinear.

No caso de $H(z)$, a estabilidade do filtro só será mantida se os pólos estiverem dentro do círculo unitário do Domínio Z, confirma-se, assim, a estabilidade do filtro projetado, mesmo após ter passado por transformação bilinear.

Ainda na Figura 3, observa-se que as atenuações máximas das bandas de passagem e de rejeição ficaram dentro das especificações do projeto, 0.5 dB e 30 dB, respectivamente.

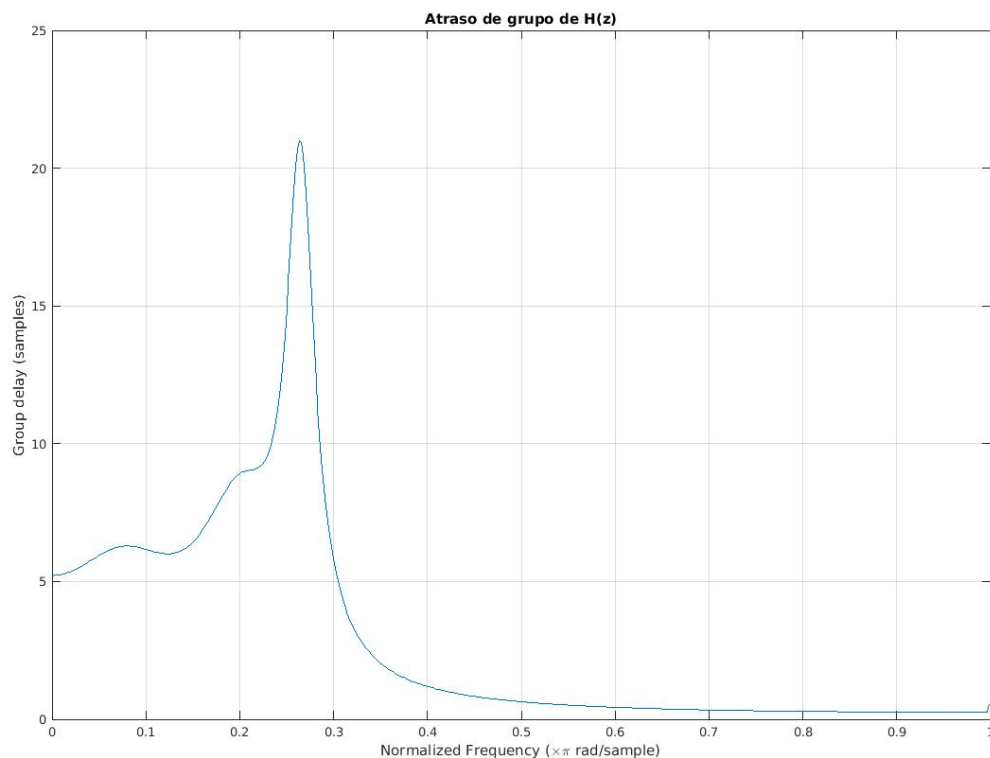


Figura 4 - Filtro 1: Atraso de grupo: elaboração própria.

Na transformação para filtro digital, é necessário medir o atraso de grupo, que mede o tempo de atraso da magnitude do sinal; para essa medição, foi utilizada a função *grpdelay()*. Observa-se, na Figura 4, que, em aproximadamente $0,26\pi$, há uma perda de aproximadamente 22 amostras por segundo.

3.2 Filtro 2 - Passa Altas - Butterworth

O segundo filtro implementado foi o filtro passa altas com aproximação de Butterworth.

3.2.1 Cálculos utilizados

As especificações utilizadas nos cálculos estão ilustradas na Tabela 2.

Tabela 3 - Filtro Passa Baixas: especificações

Frequência de amostragem (Fa)	8 KHz
Ganho médio na banda de passagem (Gp)	0 dB
Atenuação máxima na banda de passagem (Ap)	0.5 dB
Atenuação mínima na banda de rejeição (As)	20 dB
Frequência de Passagem (Fp)	1400 Hz
Frequência de Rejeição (Fr)	1050 Hz
Aproximação	Butterworth

Para encontrar a função de transferência $H(p)$, primeiramente, conforme ilustrado na Equação (18), foi realizado o cálculo das frequências de passagem e de rejeição em radianos, normalizadas pela frequência de amostragem.

$$\omega_s = \frac{2 * \pi * Fr}{Fa} = 0,8247 \text{ rad/s} \quad \omega_p = \frac{2 * \pi * Fp}{Fa} = 1,0996 \text{ rad/s} \quad (18)$$

Em seguida, conforme ilustrado na Equação (19) e na Equação (20), foi realizada a conversão de ω para λ e de ω para Ω .

$$\lambda_s = 2 * Fa * \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 0,8748 \text{ Hz} \quad \lambda_p = 2 * Fa * \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 1,2256 \text{ Hz} \quad (19)$$

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_s} = 1 \quad \Omega_s = \frac{\omega_p}{\omega_s} = 1,4010 \quad (20)$$

Para obter a ordem do filtro, a Equação (21) foi realizada.

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{10^{0.1As}-1}{10^{0.1Ap}-1}\right)}{2\log(\Omega_s)} = 10 \quad (21)$$

Para obter os pólos, a Equação (22) foi realizada.

$$p_k = \epsilon^{1/n} e^{\frac{j(2k+n-1)}{2n}} \quad (22)$$

Com $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Sendo que ϵ é calculado conforme ilustrado na Equação (7).

$$pk = \begin{bmatrix} -0.1738 + 1.0972i & -0.5043 + 0.9898i & -0.7855 + 0.7855i & -0.9898 + 0.5043i \\ -1.0972 + 0.1738i & -1.0972 - 0.1738i & -0.9898 - 0.5043i & -0.7855 - 0.7855i \\ & & -0.5043 - 0.9898i & -0.1738 - 1.0972i \end{bmatrix} \quad (23)$$

Com os valores assumidos por pk , que foram ilustrados na Equação (23), tem-se o denominador Dp que será utilizado para a obtenção da função de transferência $H(p)$, conforme mostrado na Equação (24).

Agora, para o cálculo do Np , verifica-se a ordem do filtro: se for ímpar, $Np = 1$, se for par, como é o caso deste filtro, utiliza-se a Equação (7) e Equação (24).

$$H(p) = \frac{Np}{Dp} \quad (24)$$

$$H(0) = \frac{1}{1 + \epsilon^2} = x \quad (25)$$

Após obter o valor de Np e de Dp , resolve-se a Equação (24), conforme foi ilustrado na Equação (26).

$$H(p) = \frac{2.8627}{p^{10} + 7.1014p^9 + 25.2152p^8 + 58.6814p^7 + 98.8193p^6 + 125.6010p^5 + 121.9548p^4 + 89.374p^3 + 47.3952p^2 + 16.4731p + 2.8627} \quad (26)$$

Após obter a função de transferência $H(p)$, faz-se a conversão em frequência do filtro, transformando $H(p)$ em $H(s)$, conforme ilustrado nas Equações (27) e (28).

$$H(s) = H(p)\left(\frac{\lambda p}{s}\right) = x \quad (27)$$

$$H(s) = \frac{2.8627}{\frac{20.1894}{s} + \frac{71.1923}{s^2} + \frac{164.5370}{s^3} + \frac{275.1670}{s^4} + \frac{347.3279}{s^5} + \frac{334.9173}{s^6} + \frac{243.7507}{s^7} + \frac{128.3680}{s^8} + \frac{44.3088}{s^9} + \frac{7.6470}{s^{10}} + 2.8627} \quad (28)$$

Para transformar o filtro de analógico para digital, transforma-se $H(s)$ em $H(z)$ através da transformação bilinear, conforme ilustrado na Equação (29).

$$f_z = 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2.0z - 2.0}{z + 1.0} \quad (29)$$

Após a simplificação normalização do numerador e do denominador, as Equações (30) (31) (32) foram realizadas, representando a resposta em frequência do filtro digital.

$$Hz(z) = \frac{Nz}{Dz} \quad (30)$$

Onde:

$$Nz = 0.0328 z^{10} - 0.3286 z^9 + 1.4789 z^8 - 3.9437814334523864090442657470703 z^7 + 6.9016 z^6 - 8.2819 z^5 + 6.9016 z^4 - 3.9437 z^3 + 1.4789 z^2 - 0.3286 z + 0.0328 \quad (31)$$

e

$$Dz = z^{10} - 3.5700 z^9 + 6.7479 z^8 - 8.2241 z^7 + 7.0369 z^6 - 4.3487 z^5 + 1.95006 z^4 - 0.6222 z^3 + 0.1345 z^2 - 0.0177 z + 0.0011 \quad (32)$$

3.2.2 Análise

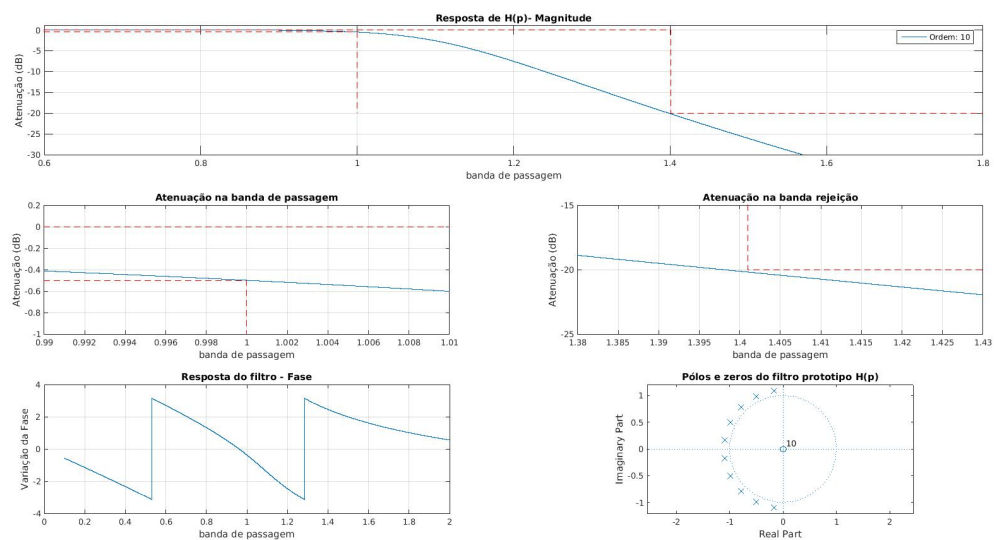


Figura 5 - Filtro 2: Função de transferência $H(p)$: elaboração própria.

Na Figura 5, observa-se o comportamento do filtro em $H(p)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros; é possível notar que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, confirmando a estabilidade do filtro em $H(p)$.

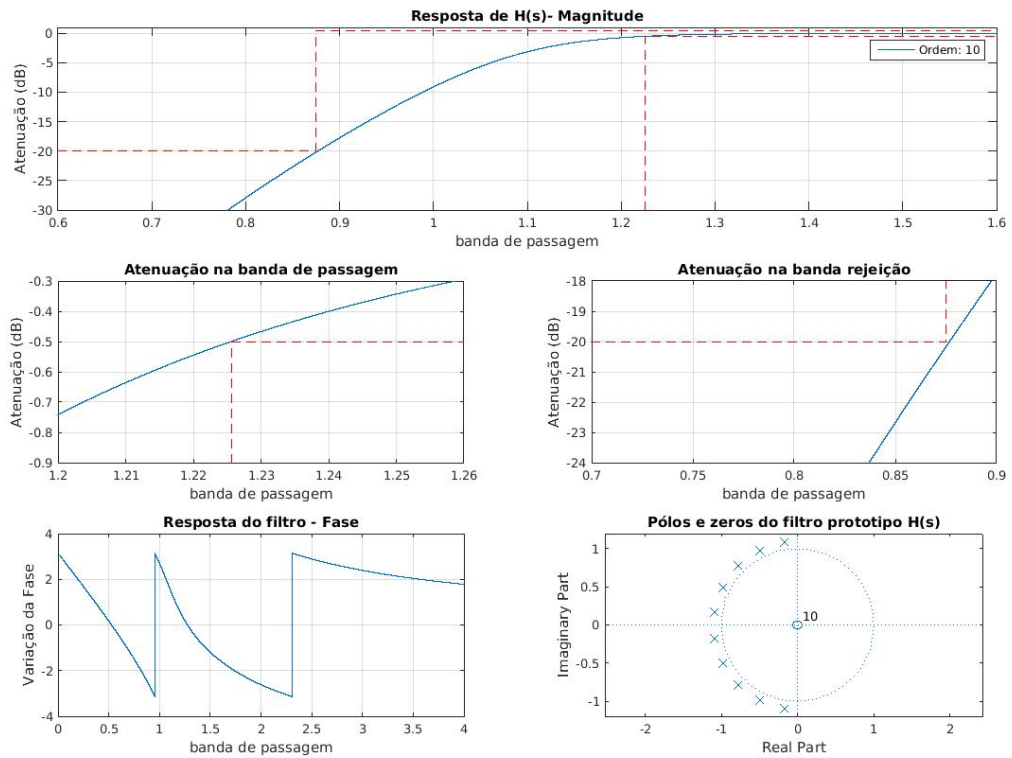


Figura 6 - Filtro 2: Função de transferência $H(s)$: elaboração própria.

Na Figura 6, observa-se o comportamento do filtro em $H(s)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros. Como essa etapa possui o mesmo critério de estabilidade de $H(p)$, observa-se também que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, o filtro estando, assim, estável.

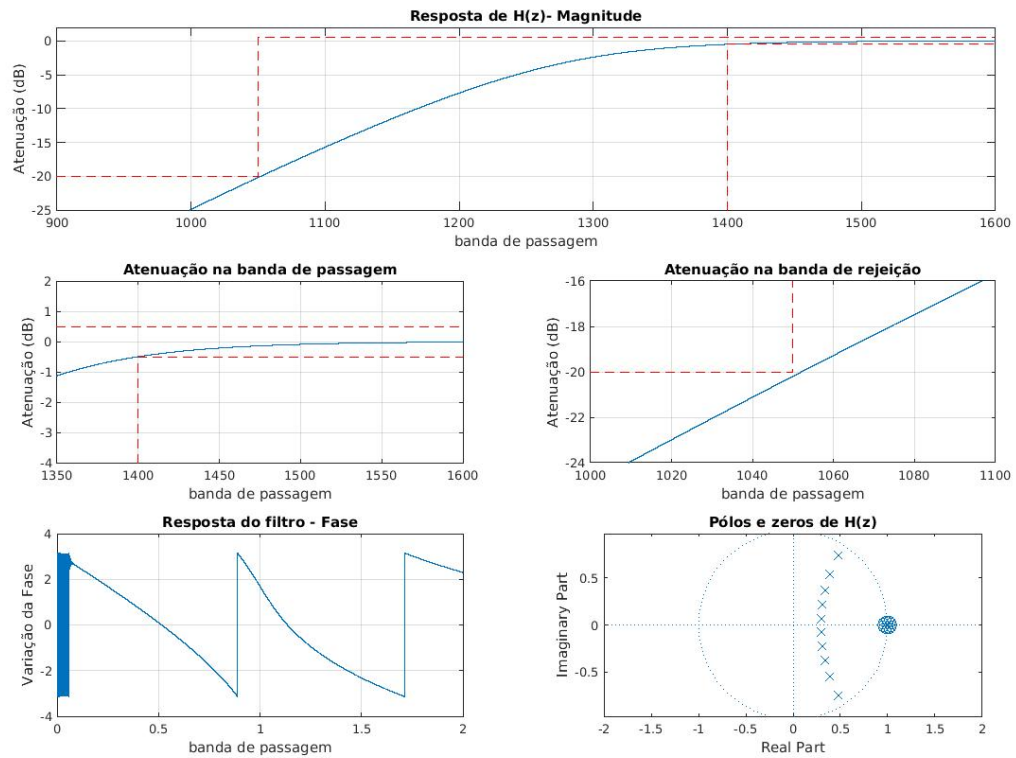


Figura 7 - Filtro 2: Função de transferência $H(z)$: elaboração própria.

Na Figura 7, observa-se o comportamento do filtro em $H(z)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros.

No caso de $H(z)$, a estabilidade do filtro só será mantida se os pólos estiverem dentro do círculo unitário do Domínio Z, confirma-se, assim, a estabilidade do filtro projetado, observando-se a Figura 7.

Observa-se, ainda na mesma figura, que as atenuações máximas das bandas de passagem e de rejeição ficaram dentro das especificações do projeto, 0.5 dB e 20 dB, respectivamente.

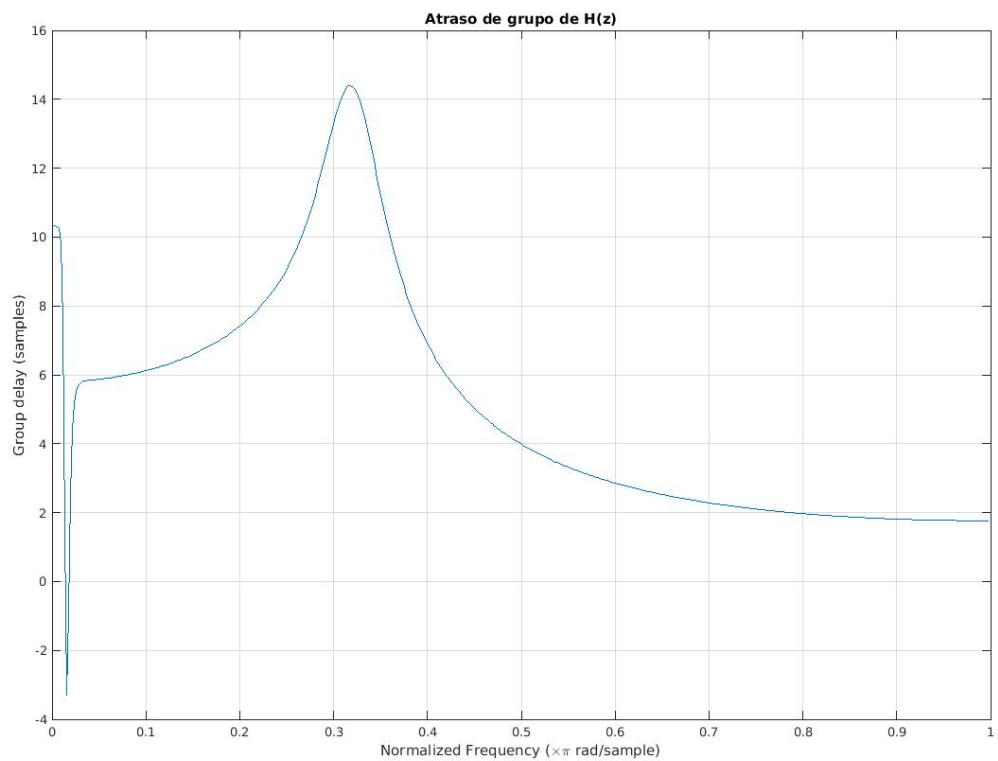


Figura 8 - Filtro 2: Atraso de grupo: elaboração própria.

Observa-se, na Figura 8, que, em aproximadamente $0,32\pi$, há uma perda de aproximadamente 15 amostras por segundo.

3.3 Filtro 3 - Passa Faixa - Elíptico

O terceiro filtro implementado foi o filtro passa faixa com aproximação de Euler.

3.3.1 Cálculos utilizados

As especificações utilizadas nos cálculos estão ilustradas na Tabela 4

Tabela 4 - Filtro Passa Faixa: especificações

Frequência de amostragem (Fa)	8 KHz
Ganho médio na banda de passagem (Gp)	0 dB
Atenuação máxima na banda de passagem (Ap)	0.5 dB
Atenuação mínima na banda de rejeição (As)	30 dB
Frequência de Passagem (Fp1)	835 Hz
Frequência de Rejeição (Fr1)	767 Hz
Frequência de Passagem (Fp2)	869 Hz
Frequência de Rejeição (Fr2)	937 Hz
Aproximação	Euler

Neste filtro, diferentemente dos demais, uma parte do desenvolvimento foi feita através de funções do MATLAB®, *ellipord* e *ellip*. Para o cálculo da ordem do filtro e frequências de corte foi utilizada a função *ellipord* e para a montagem do filtro e criação das funções de transferência, foi utilizada a função *ellip*.

Dando início a simulação, nas Equações (33) e (34) transformamos as frequências dadas na especificação de *Hertz* para *rad/s*.

$$\theta_{s1} = \frac{2 * \pi * f_{s1}}{f_a} = 0.5443 \text{ rad/s} \quad \theta_{s2} = \frac{2 * \pi * f_{s2}}{f_a} = 0.6652 \text{ rad/s} \quad (33)$$

$$\theta_{p1} = \frac{2 * \pi * f_{p1}}{f_a} = 0.5930 \text{ rad/s} \quad \theta_{p2} = \frac{2 * \pi * f_{p2}}{f_a} = 0.6165 \text{ rad/s} \quad (34)$$

Já nas equações (35) e (36) adiciona-se a pré-distorção, para compensar a transformação bilinear que será vista em outro passo.

$$\lambda_{s1} = 2 * \tan(\theta_{s1}/2) = 0.5581 \text{ Hz} \quad \lambda_{s2} = 2 * \tan(\theta_{s2}/2) = 0.6909 \text{ Hz} \quad (35)$$

$$\lambda_{p1} = 2 * \tan(\theta_{p1}/2) = 0.6238 \text{ Hz} \quad \lambda_{p2} = 2 * \tan(\theta_{p2}/2) = 0.6368 \text{ Hz} \quad (36)$$

A Equação (37) apresenta os cálculos de Ω_p , Ω_s e da largura de banda B .

$$\Omega_p = 1 \quad \Omega_s = \left| \frac{(-\omega_s^2 + \omega_o^2)}{(B * \omega_s)} \right| = 4.94 \quad B = \lambda_{p2} - \lambda_{p1} = 0.0259 \text{ Hz} \quad (37)$$

Com os cálculos iniciais em mãos, foram utilizadas as funções (38) e (39), citadas anteriormente, para auxiliar no desenvolvimento do filtro passa baixa protótipo, no qual dará origem ao filtro passa faixa.

$$[n, Wp] = \text{ellipord}(W_{pass1}, W_{stop1}, A_{tenPass}, A_{tenStop}, s) \quad (38)$$

Com o sucesso no retorno da função da equação (38), a variável n informa a menor ordem para que o filtro seja feito nas especificações iniciais, sendo ela $n=2$. Já a função *ellip*, da equação(37), nos retorna os pólos e zeros da função transferência do filtro já realizado.

$$[b, a] = \text{ellip}(n, A_{tenPass}, A_{tenStop}, Wp, s) = [0.0316; 0; 1.4465], [1; 1.4010; 1.5322] \quad (39)$$

Através da normalização do numerador e do denominador de $H(p)$, a resposta do filtro protótipo é dada na Equação (41), através da Equação (40).

$$H(p) = \frac{Np}{Dn} \quad (40)$$

Obtendo:

$$H(p) = \frac{0.3162p^2 + 1.446}{p^2 + 1.401p + 1.532} \quad (41)$$

A próxima etapa é a transformação do filtro passa faixa protótipo para o domínio da frequência, $H(p)$ para $H(s)$, para isso, utiliza-se a Equação (42).

$$fs = \left(\frac{1}{B}\right) * \left(\frac{s^2 + \lambda^2}{s}\right) = \frac{38.68(s^2 + 0.3891)}{s} \quad (42)$$

A função transferência do filtro $H(s)$ é dada na Equação (43).

$$H(s) = \frac{4.382 * 10^{79} * s^4 + 3.554 * 10^{78} * s^2 + 6.634 * 10^{78}}{1.386 * 10^{81} * s^4 + 5.02 * 10^{79} * s^3 + 1.08 * 10^{81} * s^2 + 1.953 * 10^{79} * s + 2.098 * 10^{80}} \quad (43)$$

Para transformar o filtro de analógico para digital, transforma-se $H(s)$ em $H(z)$ através da transformação bilinear, conforme ilustrado na Equação (44).

$$fs = \frac{2 * (z - 1)}{T * (z + 1)} \quad (44)$$

Após a normalização do numerador e denominador, a Equação (45) foi realizada, representando a resposta em frequência do filtro digital.

$$H(z) = \frac{0.0313z^4 - 0.1024z^3 + 0.146z^2 - 0.1024z + 0.0313}{z^4 - 3.263z^3 + 4.63z^2 - 3.21z + 0.9675} \quad (45)$$

3.3.2 Análise

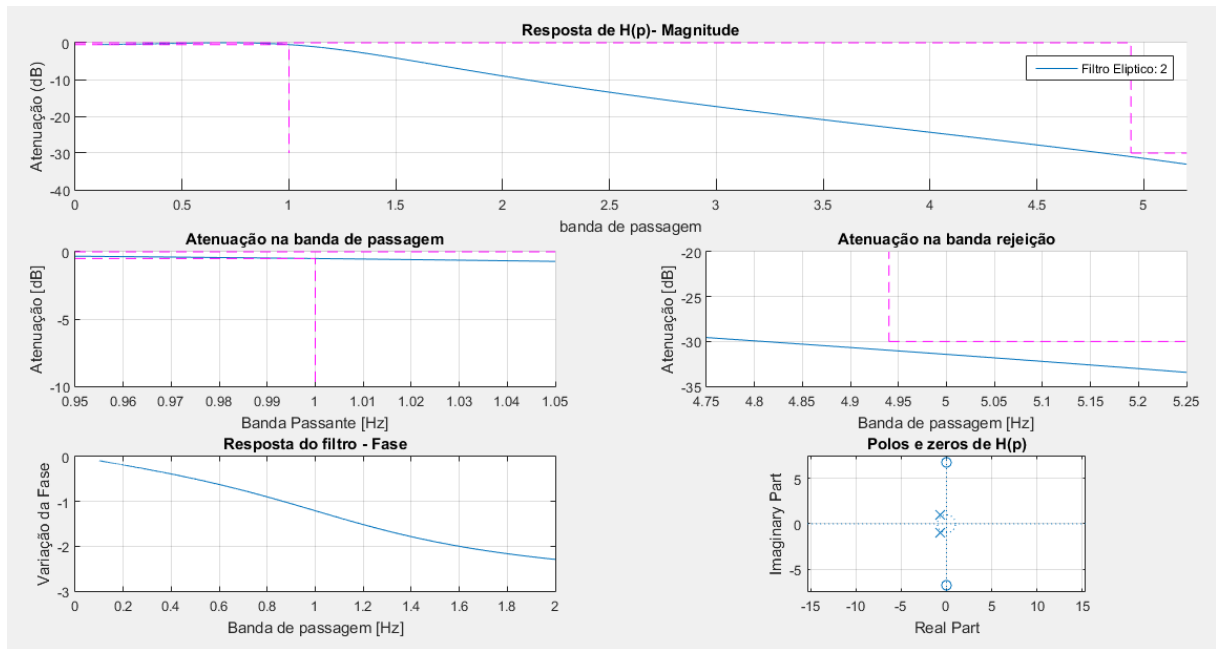


Figura 9 - Filtro 3: Função de transferência $H(p)$. Fonte: elaboração própria.

Na Figura 9, observa-se o comportamento do filtro em $H(p)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros; é possível notar que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, confirmando a estabilidade do filtro em $H(p)$.

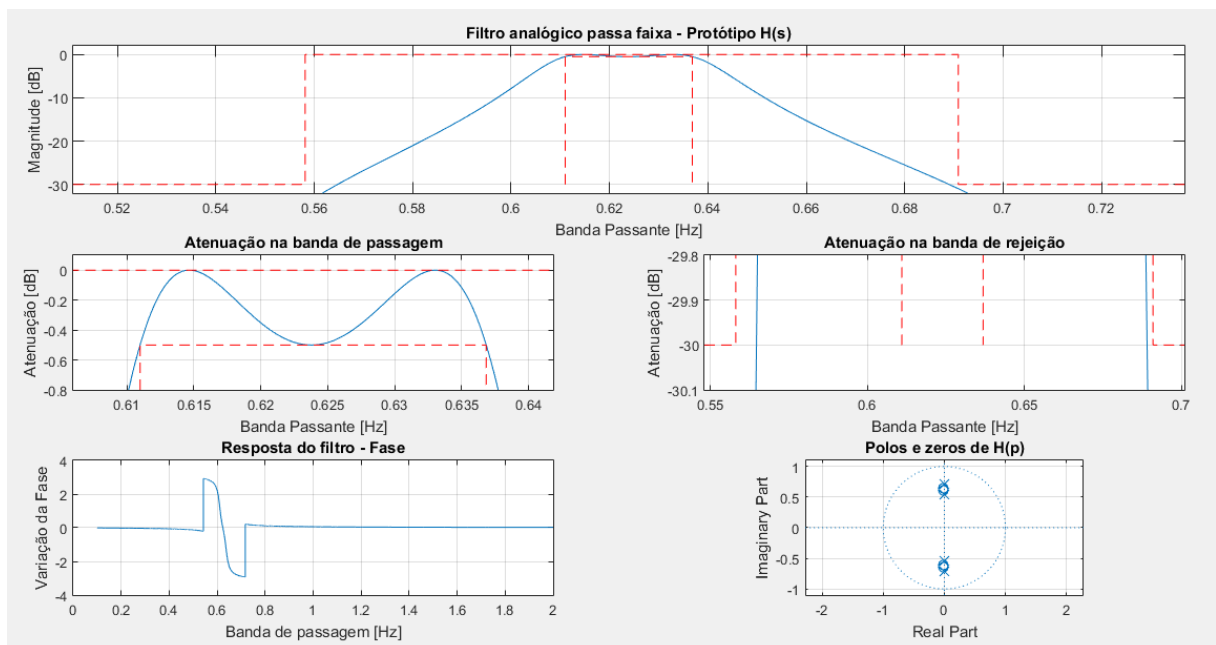


Figura 10 - Filtro 3: Função de transferência $H(s)$. Fonte: elaboração própria.

Na Figura 10, observa-se o comportamento do filtro em $H(s)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros. Como essa etapa possui o mesmo critério de estabilidade de $H(p)$, observa-se também que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, o filtro estando, assim, estável.

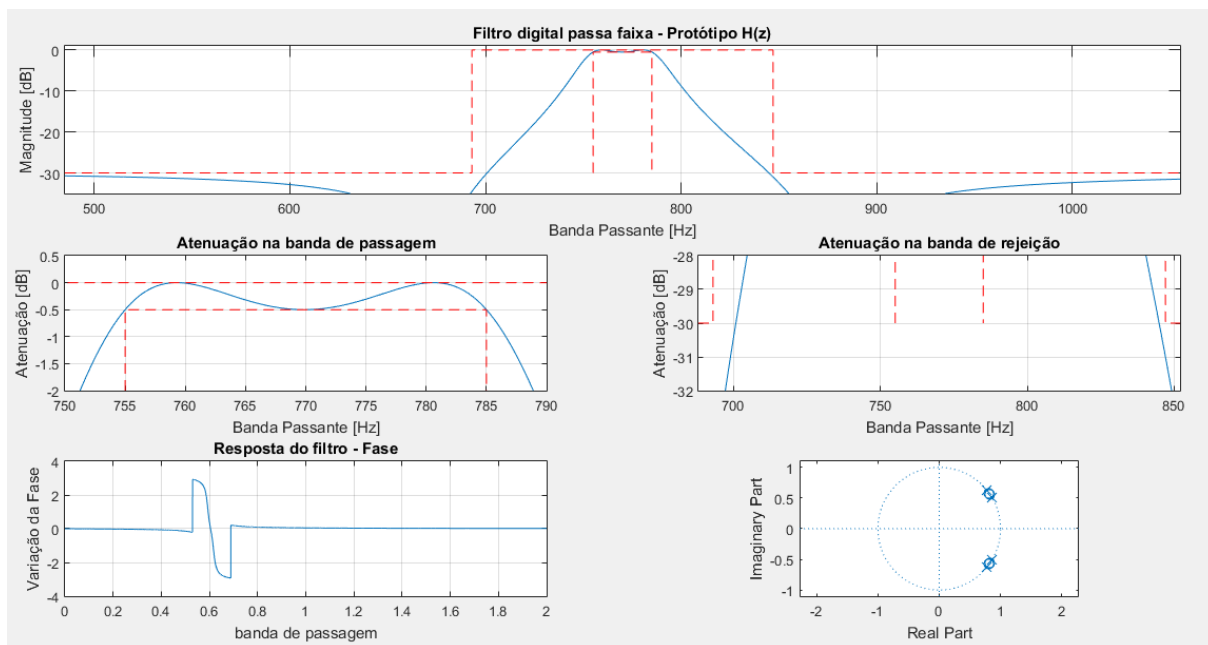


Figura 11 - Filtro 3: Função de transferência $H(z)$. Fonte: elaboração própria.

Na Figura 11, observa-se o comportamento do filtro em $H(z)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros.

No caso de $H(z)$, a estabilidade do filtro só será mantida se os pólos estiverem dentro do círculo unitário do Domínio Z, confirma-se, assim, a estabilidade do filtro projetado.

Observa-se, ainda na mesma figura, que as atenuações máximas das bandas de passagem e de rejeição ficaram dentro das especificações do projeto, 0.5 dB e 30 dB, respectivamente.

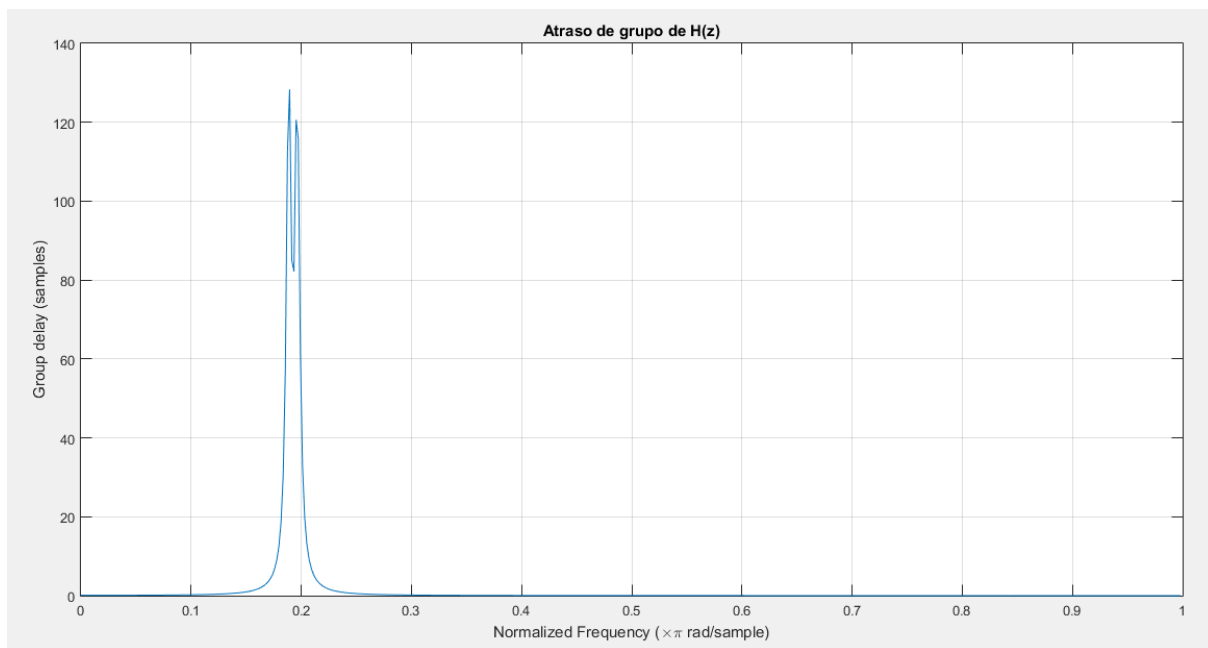


Figura 12 - Filtro 3: Atraso de grupo: elaboração própria.

Observa-se, na Figura 12, que, em aproximadamente $0,182\pi$, há uma perda de aproximadamente 130 amostras por segundo.

3.4 Filtro 4 - Rejeita Faixa - Elíptico

O quarto filtro implementado foi o filtro rejeita faixa com aproximação de Euler.

3.4.1 Cálculos utilizados

As especificações utilizadas nos cálculos estão ilustradas na Tabela 5.

Tabela 5 - Filtro Passa Faixa: especificações

Frequência de amostragem (Fa)	8 KHz
Ganho médio na banda de passagem (Gp)	0 dB
Atenuação máxima na banda de passagem (Ap)	0.5 dB
Atenuação mínima na banda de rejeição (As)	30 dB
Frequência de Passagem (Fp1)	755 Hz
Frequência de Rejeição (Fr1)	693 Hz
Frequência de Passagem (Fp2)	785 Hz
Frequência de Rejeição (Fr2)	847 Hz
Aproximação	Euler

Neste filtro, assim como no Filtro 3, uma parte do desenvolvimento foi feita através de funções do MATLAB®, *ellipord* e *ellip*.

Dando início a simulação, primeiramente transformamos as frequências dadas na especificação de *Hertz* para *rad/s*.

$$\theta_{s1} = \frac{2 * \pi * f_{s1}}{f_a} = 0.5443 \text{ rad/s} \quad \theta_{s2} = \frac{2 * \pi * f_{s2}}{f_a} = 0.6652 \text{ rad/s} \quad (46)$$

$$\theta_{p1} = \frac{2 * \pi * f_{p1}}{f_a} = 0.5930 \text{ rad/s} \quad \theta_{p2} = \frac{2 * \pi * f_{p2}}{f_a} = 0.6165 \text{ rad/s} \quad (47)$$

Já nas equações (48) e (49) adiciona-se a pré-distorção, para compensar a transformação bilinear que será vista em outro passo.

$$\lambda_{s1} = 2 * \tan(\theta_{s1}/2) = 0.6804 \text{ Hz} \quad \lambda_{s2} = 2 * \tan(\theta_{s2}/2) = 0.7103 \text{ Hz} \quad (48)$$

$$\lambda_{p1} = 2 * \tan(\theta_{p1}/2) = 0.6213 \text{ Hz} \quad \lambda_{p2} = 2 * \tan(\theta_{p2}/2) = 0.7710 \text{ Hz} \quad (49)$$

A Equação(50) apresenta os cálculos de Ω_p , Ω_s e da largura de banda B.

$$\Omega_p = 1 \quad \Omega_s = \left| \frac{(-\omega_s^2 + \omega_o^2)}{(B * \omega_s)} \right| = 4.1740 \quad B = \lambda_{p2} - \lambda_{p1} = 0.1497 \quad (50)$$

A partir desses cálculos iniciais, foram utilizadas as Equações (51) e (52), também utilizadas no filtro passa faixa, para auxiliar no desenvolvimento do filtro passa baixas protótipo, no qual dará origem ao filtro rejeita faixa.

$$[n, Wp] = \text{ellipord}(W_{pass1}, W_{stop1}, AtenPass, AtenStop, s) \quad (51)$$

$$[b, a] = \text{ellip}(n, \text{AtenPass}, \text{AtenStop}, Wp, s) \quad (52)$$

Através da normalização do numerador e do denominador de $H(p)$, a resposta do filtro é dada na Equação (53).

$$H(p) = \frac{N_p}{D_p} = \frac{0.169 * p^2 - 1.876 * 10^{-17} p + 0.8027}{p^3 + 1.228 p^2 + 1.519 p + 0.8027} \quad (53)$$

A próxima etapa é a transformação do filtro passa baixas protótipo para o domínio da frequência, $H(p)$ para $H(s)$, para isso, utiliza-se a Equação (54).

$$f_s = \frac{B * s}{s^2 + \lambda^2} = \frac{0.1497s}{s^2 + 0.479} \quad (54)$$

A função transferência do filtro $H(s)$ é dada na Equação (55).

$$H(s) = \frac{s^6 - 3.5 * 10^{-18} s^5 + 1.4 s^4 - 3.53 * 10^{-18} s^3 + 0.7 s^2 - 8.03 * 10^{-19} s + 0.11}{s^6 + 0.28 s^5 + 1.47 s^4 + 0.27 s^3 + 0.7 s^2 + 0.065 s + 0.11} \quad (55)$$

Enfim, análogo aos demais filtros, a resposta em frequência do filtro digital $H(z)$ é realizada e apresentada na Equação (56).

$$H(z) = \frac{0.8829 z^6 - 4.162 z^5 + 9.186 z^4 - 11.75 z^3 + 9.186 z^2 - 4.162 z + 0.8829}{z^6 - 4.521 z^5 + 9.567 z^4 - 11.73 z^3 + 8.794 z^2 - 3.819 z + 0.7762} \quad (56)$$

3.4.2 Análise

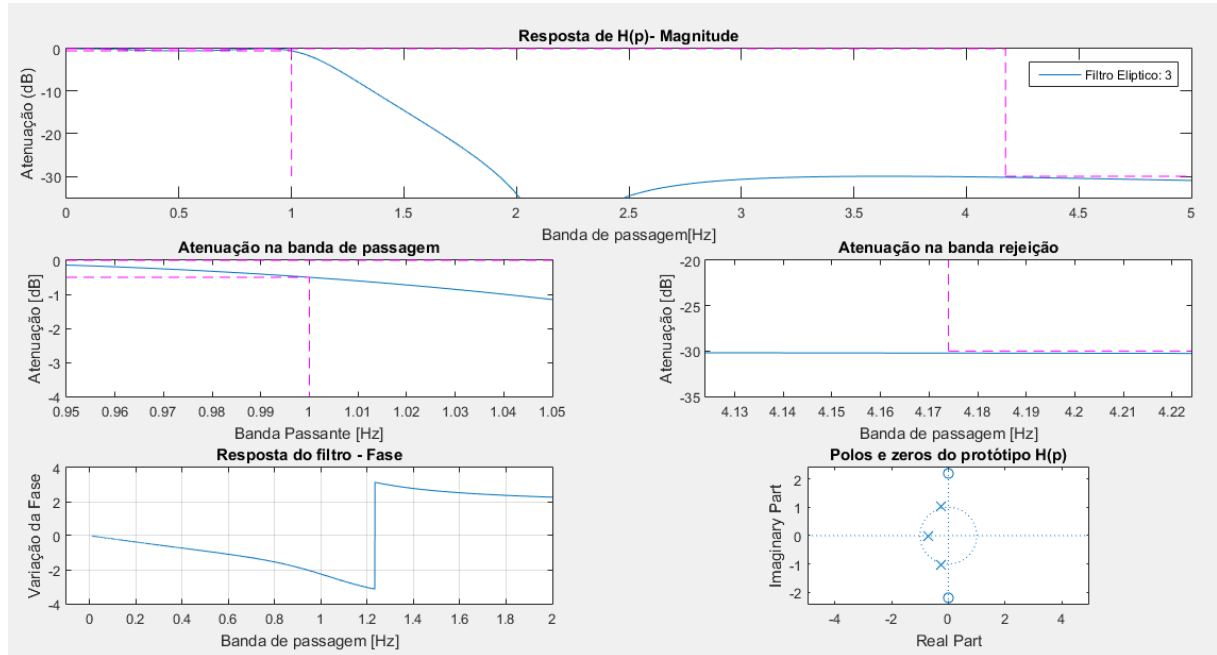


Figura 13 - Filtro 4: Função de transferência $H(p)$. Fonte: elaboração própria.

Na Figura 13, observa-se o comportamento do filtro em $H(p)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros; é possível notar que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, confirmando a estabilidade do filtro em $H(p)$.

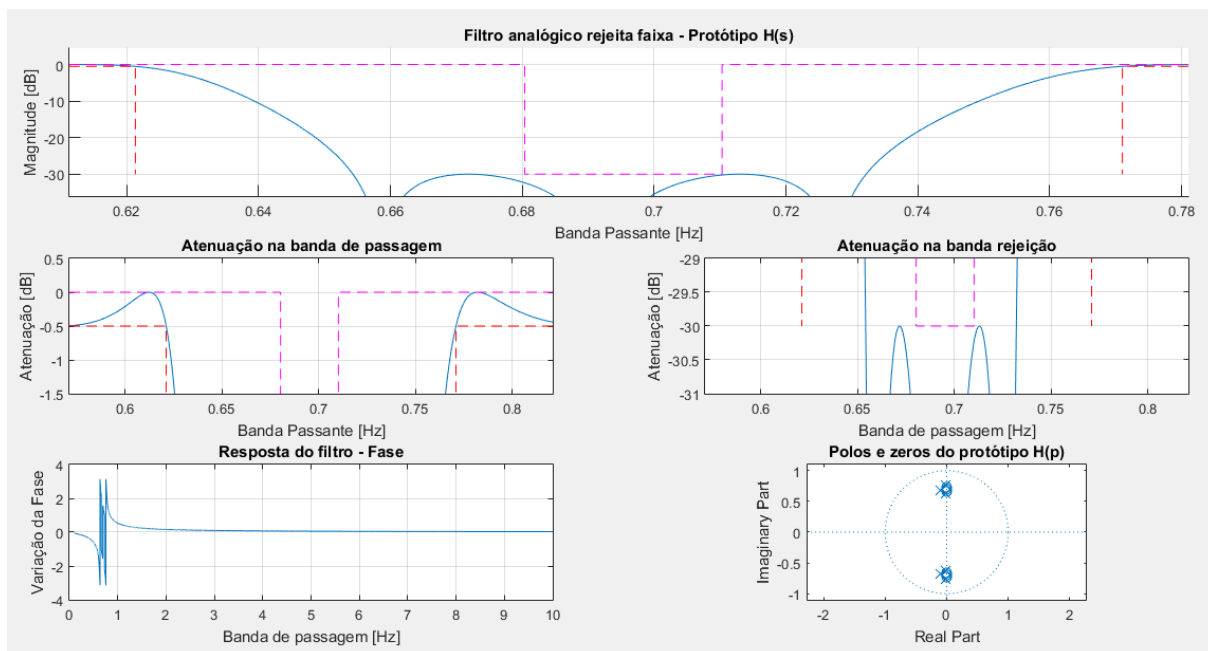


Figura 14 - Filtro 4: Função de transferência $H(s)$. Fonte: elaboração própria.

Na Figura 14, observa-se o comportamento do filtro em $H(s)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros. Como essa etapa possui o mesmo critério de estabilidade de $H(p)$, observa-se também que os pólos se encontram do lado esquerdo do plano, o filtro estando, assim, estável.

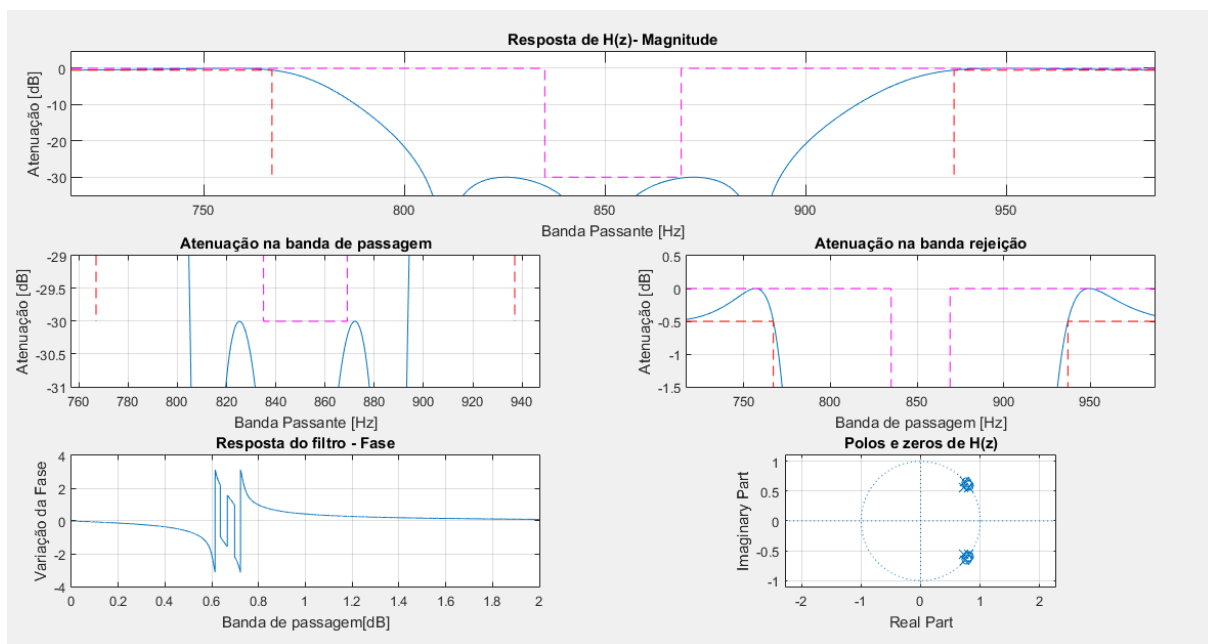


Figura 15 - Filtro 4: Função de transferência $H(z)$. Fonte: elaboração própria.

Na Figura 15, observa-se o comportamento do filtro em $H(z)$, com suas atenuações, fase, pólos e zeros.

No caso de $H(z)$, a estabilidade do filtro só será mantida se os pólos estiverem dentro do círculo unitário do Domínio Z, confirma-se, assim, a estabilidade do filtro projetado.

Observa-se, ainda na mesma figura, que as atenuações máximas das bandas de passagem e de rejeição ficaram dentro das especificações do projeto, 0.5 dB e 30 dB, respectivamente.

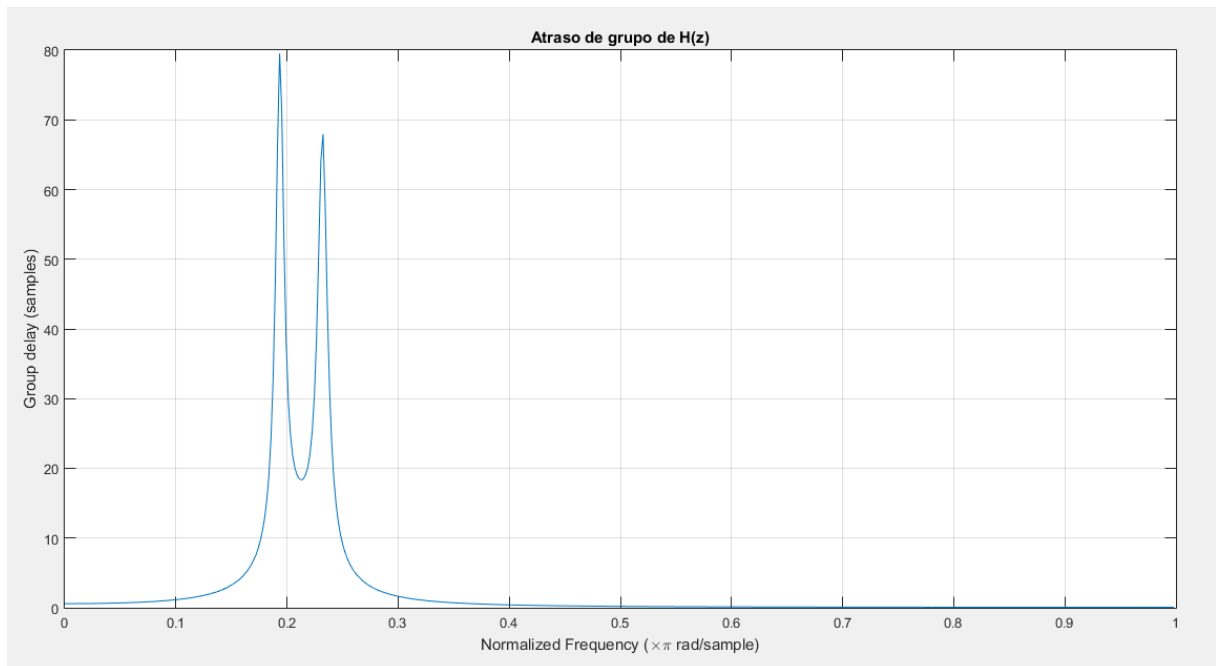


Figura 16 - Filtro 4: Atraso de grupo: elaboração própria.

Observa-se, na Figura 16, que, em aproximadamente $0,182\pi$, há uma perda de aproximadamente 80 amostras por segundo.

4 Considerações Finais

Após as quatro implementações utilizando a metodologia de projeto de filtros digitais *IIR* que, devido a sua característica de resposta ao impulso infinita, possibilita a transformação de filtros analógicos em digitais, comprovou-se a característica de estabilidade, se comparada à implementação do filtro FIR (do inglês Finite Impulse Response), pois todas as implementações ficaram nas faixas de frequência e de atenuações solicitadas.