

Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Σάββας Χανλαρίδης

Σημειώσεις Μαθήματος

Σημείωση

Το εγχειρίδιο αυτό αποτελεί μία συλλογή από εδάφια παραμένα (άλλες φορές αυτούσια και άλλες φορές σε ελεύθερη μετάφραση) από την ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία, διαδικτυακές πηγές καθώς και προσωπικές σημειώσεις από πανεπιστημιακές διαλέξεις.

Το εγχειρήμα επιχειρήθηκε, αρχικά, έχοντας ως στόχο τη δημιουργία ενός αρχείου που θα λειτουργούσε ως σημειώσεις για ιδιωτική χρήση και μελέτη. Δεν υπήρχε καμία πρόθεση αυτές οι σημειώσεις να δουν το φως της δημοσιότητας — υπάρχουν πολύ καλύτερα εγχειρίδια και βιβλία που εξυπηρετούν αυτόν τον σκοπό — και γι' αυτό το λόγο δεν δώθηκε καμία έμφαση στην παράθεση πηγών.

Σε μια προσπάθεια εξευμενισμού, παρατίθεται στο τέλος μία λίστα με βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια συγγραφής αυτών των σημειώσεων.

Σ. Χ.

Περιεχόμενα

1 Παρατηρησιακά χαρακτηριστικά αστέρων	1
1.1 Μέθοδος της παράλλαξης	1
1.2 Λαμπρότητα αστέρων	3
1.3 Γωνιώδης απόσταση	5
1.4 Σχέσεις $L = f(M)$ και $R = f(M)$	6
1.5 Ακτινοβολία μέλανος σώματος	7
1.5.1 Νόμος του Planck	8
1.5.2 Νόμος του Wien	9
1.5.3 Νόμος των Stefan-Boltzmann	9
2 Φωτομετρία & Φασματοσκοπία Αστέρων	11
2.1 Βασικά στοιχεία φωτομετρίας	11
2.1.1 Ορισμός βιολομετρικών μεγεθών	11
2.1.2 Φωτομετρικά συστήματα	13
2.2 Φασματική ανάλυση	18
2.2.1 Αστρικά φάσματα	18
2.2.2 Σχηματισμός φασματικών γραφμών	19
2.2.3 Φαινόμενο Zeeman	21
2.3 Φασματική Ταξινόμηση	22
2.3.1 Ταξινόμηση κατα Harvard	23
2.3.2 Διάγραμμα Hertzsprung-Russell	25
2.3.3 Ταξινόμηση κατα Yerkes	27

3 Αστρικές ατμόσφαιρες	29
3.1 Πεδία ακτινοβολίας και ιδιότητες	29
3.1.1 Η στερεά γωνία	30
3.1.2 Η έννοια της έντασης ακτινοβολίας	33
3.1.3 Πυκνότητα ροής, μέση ένταση, πυκνότητα και πίεση ακτινοβολίας	36
3.1.4 Ισοτροπική ένταση και μέλαν σώμα	39
3.2 Απόσβεση και εκπομπή ακτινοβολίας	41
3.2.1 Εξίσωση μεταφοράς	41
3.2.2 Νόμος του Kirchhoff	48
3.3 Αδιαφάνεια και αστρικά φάσματα	48
3.3.1 Μηχανισμοί αδιαφάνειας	48
3.3.2 Η συνεχής συνιστώσα	49
3.4 Νόμοι Boltzmann & Saha	50
3.4.1 Νόμος του Boltzmann	50
3.4.2 Νόμος του Saha	51
3.5 Ο Ήλιος ως τυπικός αστέρας	52
3.5.1 Μακροσκοπικά χαρακτηριστικά	52
3.5.2 Η επιφάνεια του Ήλιου	54
3.5.3 Σύνοψη	55
4 Δομή και εξέλιξη αστέρων	57
4.1 Εσωτερική δομή αστέρων	57
4.1.1 Μηχανική ισορροπία	58
4.1.2 Θερμική ισορροπία	67
4.1.3 Πηγές ενέργειας των αστέρων	69
4.1.4 Χαρακτηριστικοί χρόνοι	75
4.1.5 Διάδοση ενέργειας στους αστέρες	77
4.1.6 Σύνοψη εξισώσεων αστρικής δομής	90
4.2 Εξέλιξη αστέρων	91

4.2.1	Αφθονία Χημικών Στοιχείων στο Σύμπαν	92
4.2.2	Δημιουργία πρωτοαστέρων	95
4.2.3	Εξέλιξη μετά την κύρια ακολουθία	97
5	Αστρικά κατάλοιπα	101
5.1	Λευκοί νάνοι	102
5.1.1	Η πίεση εκφυλισμένου αερίου	103
5.1.2	Σχέση μάζας-ακτίνας	104
5.1.3	Όριο μάζας Chandrasekhar	104
5.1.4	Ψύξη λευκών νάνων	105
5.1.5	Περίοδος περιστροφής λευκών νάνων	106
5.2	Αστέρες νετρονίων	106
5.2.1	Σχηματισμός αστέρων νετρονίων	107
5.2.2	Σχέση μάζας-ακτίνας	107
5.2.3	Όριο μάζας Tolman-Oppenheimer-Volkoff	108
5.2.4	Ψύξη αστέρων νετρονίων	108
5.2.5	Pulsars	109
5.3	Μελανές οπές	111
6	Διπλά συστήματα & Μεταβλητοί αστέρες	113
6.1	Διπλά συστήματα αστέρων	113
6.1.1	Κατηγορίες διπλών συστημάτων	114
6.1.2	Βασικοί υπολογισμοί	116
6.1.3	Στενά διπλά συστήματα & απώλεια μάζας	117
6.2	Μεταβλητοί αστέρες	120
6.2.1	Περιοδικοί	121
6.2.2	Μη-περιοδικοί	122
A	Μαθηματικές Μέθοδοι	127
A.1	Διωνυμικοί και Πολυωνυμικοί συντελεστές	127
A.1.1	Διωνυμικοί συντελεστές	127

A.1.2 Πολυωνυμικοί συντελεστές	128
A.2 Πολλαπλασιαστές Lagrange	129
B Συστήματα Συντεταγμένων	133
B.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες	133
B.1.1 Καρτεσιανές συντεγμένες στο επίπεδο	133
B.1.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες στον χώρο	133
B.2 Πολικές συντεταγμένες	135
B.3 Κυλινδρικές συντεταγμένες	136
B.4 Σφαιρικές συντεταγμένες	137
C Κινητική θεωρία αερίων	139
C.1 Γενικές έννοιες	139
C.1.1 Καταστατικές εξισώσεις αερίων	141
C.2 Νόμος του Boltzmann	148
C.3 Συνάρτηση επιμερισμού	152
C.4 Κατανομή Maxwell-Boltzmann	154
C.4.1 Χαρακτηριστικά και ιδιότητες	158
D Πυρηνική Αστροφυσική	161
D.1 Πυρηνοσύνθεση βαρέων στοιχείων	161
D.1.1 Αρπαγή νετρονίων	161
D.1.2 Αρπαγή πρωτονίων	165
D.1.3 Φωτοδιάσπαση	167
D.1.4 Η l -διεργασία	167
D.2 Ρυθμός Αντιδράσεων	168
D.3 Αστροφυσικός Παράγοντας	171
D.4 Δίκτυο πυρηνικών αντιδράσεων	172
D.5 Αντίστροφες Αντιδράσεις	173
D.6 Θεμελιώδης Διαφορική Εξίσωση	174

Παρατηρησιακά χαρακτηριστικά αστέρων

Contents

1.1	Μέθοδος της παράλλαξης	1
1.2	Λαμπρότητα αστέρων	3
1.3	Γωνιώδης απόσταση	5
1.4	Σχέσεις $L = f(M)$ και $R = f(M)$	6
1.5	Ακτινοβολία μέλανος σώματος	7
1.5.1	Νόμος του Planck	8
1.5.2	Νόμος του Wien	9
1.5.3	Νόμος των Stefan-Boltzmann	9

1.1 Μέθοδος της παράλλαξης

Η μέτρηση αποστάσεων στο Σύμπαν ήταν ανέκαθεν ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Με το πέρασμα των αιώνων και την ανάπτυξη τόσο της θεωρητικής κατανόησης του κόσμου όσο και νέων τεχνολογικών εφαρμογών, μπορέσαμε να βρούμε διάφορες τεχνικές που θα μας επέτρεπαν να λύσουμε το πρόβλημα της μέτρησης της απόστασης των αστρονομικών αντικειμένων. Η επιλογή της εκάστοτε τεχνικής μέτρησης εξαρτάται από την κλίμακα για την οποία ενδιαφερόμαστε. Για παράδειγμα, η μέτρηση της απόστασης αντικειμένων που βρίσκονται μέσα στο γηλιακό μας σύστημα γίνεται με τη βοήθεια των radar. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αποστολή μίας δέσμη φωτονίων στα ραδιαφωνικά μήκη κύματος προς το αντικείμενο το οποίο θέλουμε να βρούμε την απόστασή του. Τα φωτόνια αυτά ανακλώνται από την επιφάνεια του αντικειμένου, επιστρέφουν σε εμάς και εφόσον γνωρίζουμε το χρονικό διάστημα που παρήλθε από τη σπιγμή της εκπομπής του σήματος εώς τη λήψη του, η απόσταση θα δίνεται απλά:

$$d = c(\delta t / 2) \quad (1.1)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός και δt το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην εκπομπή και τη λήψη του σήματος.

Αυτός ο τρόπος μέτρησης αποστάσεων ισχύει μόνο για αντικείμενα μέσα στο γηλιακό μας σύστημα και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό αποστάσεων άλλων αστέρων. Λόγω των τεράστιων

αποστάσεων, το σήμα όταν έπρεπε να ταξιδεύει για χρόνια μέχρι να φτάσει (x2 μέχρι να γυρίσει) στον αστέρα. Επίσης, το σήμα όταν πολύ εξασθενημένο για να μετρηθεί πίσω στη Γη.

Μέσω αυτής της μεθόδου, ξέρουμε ότι η μέση απόσταση Γης-Ήλιου είναι:

$$1 \text{ AU} \approx 149600000 \text{ km}$$

Για να μετράμε αποστάσεις σχετικά κοντινών αστέρων, χρησιμοποιούμε την μέθοδο της τριγωνομετρικής παράλλαξης. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην φαινόμενη κίνηση ενός αντικειμένου σε σχέση με ένα πολύ πιο μακρινό υπόβαθρο (background) καθώς το κοιτάμε από διαφορετικές γωνίες. Με άλλα λόγια, η παράλλαξη είναι η φαινόμενη αλλαγή στη θέση ενός αντικειμένου βάσει μιας διαφορετικής οπτικής γωνίας.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω γεωμετρική ιδιότητα, παρατηρούμε ότι κοντινά αστέρια φαίνεται να μετατοπίζονται λόγω της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο (σχήμα 1.1).

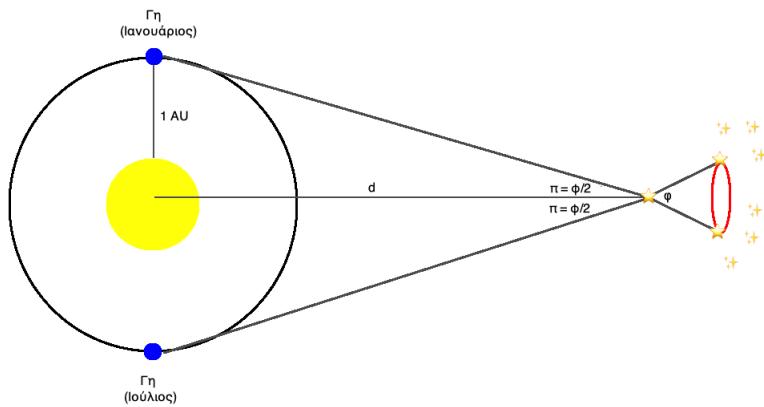


Figure 1.1: Ορισμός της ετήσιας (τριγωνομετρικής) παράλλαξης.

Μετράμε την θέση ενός στόχου-αστέρα και την ξαναμετράμε έπειτα από 6 μήνες όταν η Γη θα βρίσκεται στην αντιδιαμετρική θέση της τροχιάς της. Στη συνέχεια, μετράμε την αλλαγή στη φαινόμενη θέση του αστέρα σε σχέση με κάποια πολύ μακρινά άστρα στο υπόβαθρο που η φαινόμενη μετατόπισή τους είναι αμελητέα. Αυτή η αλλαγή περιγράφεται σε όρους "γωνία παράλλαξης", p. Για μία φαινόμενη μετατόπιση φ, η απόσταση d του στόχου δίνεται από:

$$d = \frac{1 \text{ AU}}{\tan p} \approx \frac{1 \text{ AU}}{p} \quad (1.2)$$

όπου στο δεύτερο μέρος χρησιμοποιήσαμε τη σχέση για μικρές γωνίες (small angle approximation) $\tan \theta \approx \theta$, όταν η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια (rad).

Η κόκκινη έλλειψη στο σχήμα υποδηλώνει την φαινόμενη ελλειπτική τροχιά που εκτελεί ο αστέρας πάνω στην ουράνια σφάρα, λόγω της περιστροφής της Γης γύρω από τον Ήλιο. Αυτό το γεγονός είναι και μια άμεση απόδειξη ότι η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο και όχι το ανάποδο.

Το γεγονός ότι η τροχιά της Γης δεν είναι απόλυτα σφαιρική δεν αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα καθώς οι διακυμάνσεις στην ακτίνα της τροχιάς είναι πάρα πολύ μικρές συγχριτικά με την απόσταση d των αστέρων. Άλλωστε, το σφάλμα στην μέτρηση της παράλλαξης είναι πολύ μεγαλύτερο από το σφάλμα που υπεισέρχεται εναν θεωρήσουμε ότι η ακτίνα της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο δεν παραμένει σταθερή.

Γνωρίζουμε ότι $1 \text{ rad} = 57.3^\circ = 206265 \text{ arcsec}$. Μπορούμε να ορίσουμε έτσι, ένα νέο μέγεθος για μέτρηση

μήκους, το *parsec* (pc). Ένα parsec ορίζεται ως η απόσταση ενός αντικειμένου το οποίο πρέπει να έχει ώστε να παράγει παράλλαξη (parallax shift) ίση με 1 arcsec.

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{4.85 \times 10^{-6} \text{ rad}} = 3.09 \times 10^{18} \text{ cm} = 3.26 \text{ ly} \quad (1.3)$$

Έτσι, ισχύουν οι σχέσεις:

$$d = \frac{1 \text{ AU}}{p \text{ (rad)}} = \frac{206265 \text{ AU}}{p \text{ (arcsec)}} = \frac{1 \text{ pc}}{p \text{ (arcsec)}} \quad (1.4)$$

1.2 Λαμπρότητα αστέρων

Η συντριπτική πλειοψηφία των πληροφοριών που έχουμε για τα αστέρια είναι μέσω της συλλογής φωτός σε διάφορα μήκη κύματος. Η έλλειψη φωτεινής πληροφορίας (ενώ ξέρουμε ότι έχει εκπεμφθεί) μας τροφοδοτεί με περαιτέρω πληροφορία για τις διαδικασίες απορρόφησης αυτής της μερίδας Η/Μ κυμάτων από τη μεσοαστρική ύλη.

Όταν μετράμε το φως που εκπέμπουν τα άστρα, μετράμε:

1. την ένταση
2. την πόλωση

Η προφανής και πρώτη ερώτηση που μας έρχεται στο μυαλό είναι: “Ολα τα αστέρια έχουν την ίδια λαμπρότητα, και γιατί;”. Ξερουμε ότι ενδογενώς, όλα τα αστέρια δεν έχουν την ίδια λαμπρότητα. Αλλά και την ίδια λαμπρότητα να είχαν, αυτό σημαίνει ότι θα φαινόντουσαν το ίδιο λαμπρά σε εμάς; Τι ρόλο παίζει η απόσταση σε αυτή την εικόνα; Είναι προφανές ότι πρέπει να ορίσουμε κάποιες ποσότητες που έχουν να κάνουν τόσο με την ενδογενή, όσο και με την φαινόμενη λαμπρότητα του αστέρα.

Οι λαμπρότητα (L) ορίζουμε τη συνολική ισχύς (ενέργεια/χρόνο) που ακτινοβολείται από την επιφάνεια του αστέρα. Οι ισχύς, η λαμπρότητα μετριέται σε [W, erg/s]. Με όλα λόγια, η λαμπρότητα εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο ένα αστέρι ακτινοβολεί ενέργεια. Η λαμπρότητα είναι μια ενδογενής ιδιότητα και μπορεί να υπολογισθεί από την φωτεινότητα (ροή ή φαινόμενη λαμπρότητα), την ενέργεια δηλαδή της Η/Μ ακτινοβολίας που φτάνει στη Γη, και μπορεί να μετρηθεί άμεσα. Η φωτεινότητα εξαρτάται από την απόσταση του αστέρα από εμάς και ορίζεται από τη σχέση:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (1.5)$$

όπου d η απόσταση του αστέρα από τη Γη.

Η ποσότητα $4\pi d^2$ ορίζει ουσιαστικά μία επιφάνεια σφαιράς με ακτίνα d (σχήμα 1.2), και άρα η φωτεινότητα είναι μια ποσότητα που μετριέται σε [W/m^2 , $\text{erg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-2}$]. Μπορούμε να πούμε δηλαδή ότι η φωτεινότητα ενός αστέρα είναι η ενέργεια ανα μονάδα χρόνου που διέρχεται από επιφάνεια 1 m^2 , ανεξάρτητα της διεύθυνσης διάδοσης του φωτός.

Ένας τρόπος να ταξινομήσουμε τα αστέρια είναι ανάλογα με τη φωτεινότητά τους, δηλαδή με το πόσο λαμπρά φαίνονται στο ανθρώπινο μάτι (Τππαρχος). Αργότερα, υιοθετήθηκε ένας μαθηματικός τύπος (Pogson) που μας δίνει το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα, δηλαδή του πόσο φωτεινός φαίνεται να είναι:

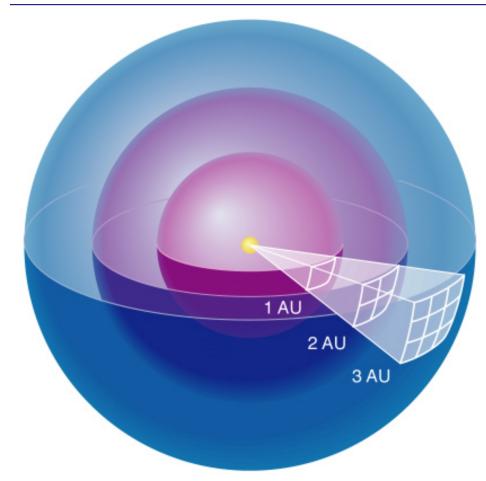


Figure 1.2: Φαινόμενη λαμπρότητα αστέρα και εξάρτησή της από την απόσταση.

$$m = -2.5 \log \left(\frac{F}{F_0} \right) \quad (1.6)$$

όπου F_0 είναι μία σταθερά.

Παρατηρούμε ότι το μέγεθος ενός αστέρα δεν είναι τίποτα άλλο παρά η φωτεινότητά του εκφρασμένη σε λογαριθμική κλίμακα. Αυτό μας δίνει ένα μέτρο για τη μείωση της ροής της ακτινοβολίας λόγω της απόστασης, σύμφωνα με τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου.

Γιατί όμως το μέγεθος ως ποσότητα υπερτερεί έναντι της χρήσης της φωτεινότητας ως μέγεθος; Γιατί η φωτεινότητα ενός αστέρα που καταγράφει ένα τηλεσκόπιο εξαρτάται από το μέγεθος του κατόπτρου (ένα τηλεσκόπιο 10 μέτρων έχει δέκα φορές μεγαλύτερη συλλεκτική επιφάνεια από ένα τηλεσκόπιο 1 μέτρου), αλλά και από την ευαισθησία του εξοπλισμού (π.χ. μία μοντέρνα κάμερα μπορεί να καταγράψει περισσότερα φωτόνια ίδιας ενέργειας). Προκύπτει άρα η ανάγκη βαθμονόμησης. Η βαθμονόμηση αυτή γίνεται βάσει της φωτεινότητας του Vega (F_0) η οποία έχει γίνει σε πραγματικές μονάδες (W/m^2). Άρα χρησιμοποιώντας τον λόγο (F/F_0) προκύπτει ένα μέγεθος που δεν εξαρτάται από τον παρατηρησιακό εξοπλισμό.

Παραμένουν όμως οι ερωτήσεις: γιατί λογάριθμος, γιατί το μείον στη σχέση (1.6), και γιατί ο συντελεστής 2.5; Γιατί να μην ορίζαμε το μέγεθος ως $m = F/F_0$ για παράδειγμα;

Λύνοντας την εξίσωση (1.6) για δύο αστέρες έχουμε:

$$m_1 = -2.5 \log \left(\frac{F_1}{F_0} \right) \Rightarrow F_1 = F_0 \cdot 10^{-m_1/2.5} = F_0 \cdot 100^{-m_1/5}$$

$$m_2 = -2.5 \log \left(\frac{F_2}{F_0} \right) \Rightarrow F_2 = F_0 \cdot 10^{-m_2/2.5} = F_0 \cdot 100^{-m_2/5}$$

και διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{(m_2 - m_1)/5} \quad (1.7)$$

Παρατηρούμε ότι:

1. αν οι δύο αστέρες διαφέρουν σε μέγεθος κατά 5, τότε η φωτεινότητά τους διαφέρει κατά έναν παράγοντα 100. Ο μαθηματικός που έκανε αυτή την παρατήρηση (Pogson), ήθελε να συνεχίσει την κλίμακα του Ίππαρχου όπου ένα αστέρι με μέγεθος 1 είναι 100 φορές πιο φωτεινό από ένα αστέρι με μέγεθος 6 ($\Delta m = 5$). Ο τρόπος για να το πετύχει αυτό ήταν να βάλει έναν παράγοντα 2.5 στη σχέση που συνδέει μέγεθος με φωτεινότητα, η οποία πρέπει να είναι λογαριθμική καθώς η ευαισθησία του ανθρώπινου ματιού στη φωτεινότητα μια πηγής είναι λογαριθμική.
2. Αν $F_1 < F_2$ τότε $m_1 > m_2$. Και πάλι, για να μην χαλάσει η ταξινόμηση του Ίππαρχου όπου τα πιο φωτεινά αστέρια είναι μικρότερου μεγέθους, προκύπτει το μείον στη σχέση (1.6).

Κατά αντιστοιχία, μπορούμε να ορίσουμε το απόλυτο μέγεθος, M , ενός αστέρα ως το φαινόμενο μέγεθος (m) αν το αστέρι βρισκόταν σε απόσταση 10pc από εμάς.

$$\begin{aligned} M &= -2.5 \log \left(\frac{F_{10\text{pc}}}{F_0} \right) \rightarrow \frac{F_{10\text{pc}}}{F} = 100^{(m-M)/5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{L/4\pi(10\text{pc})^2}{L/4\pi d^2} = 100^{(m-M)/5} \Rightarrow d^2 = 100^{(m-M+5)/5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{d = 10^{(m-M+5)/5} \text{ pc}} \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $m - M$:

$$m - M = 5(\log d - 1) \quad (1.8)$$

Η εξίσωση (1.8) είναι γνωστή ως *distance modulus* και βάσει αυτής μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση ενός αστέρα αν γνωρίζουμε το φαινόμενο και το πραγματικό μέγεθός του.

Στην περίπτωση που υπάρχει μεσοαστρική απορρόφηση, τότε η (1.8) γράφεται

$$m - M - A = 5 \log d - 5 \quad (1.9)$$

όπου A είναι το μέγεθος της μεσοαστρικής απόσβεσης.

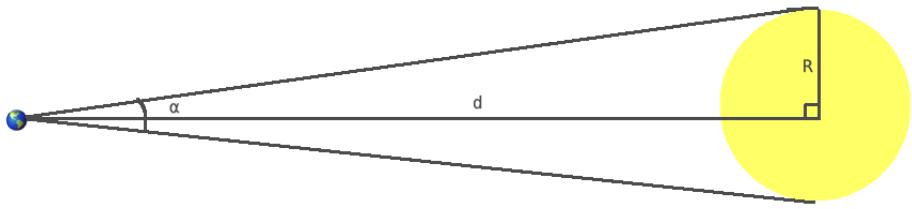
1.3 Γωνιώδης απόσταση

Την πάρχει ένας καθαρά γεωμετρικός τρόπος να υπολογίσει κανείς την ακτίνα ενός άστρου. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην γωνιακή διάμετρο του αστέρα.

Από τη γεωμετρία του σχήματος 1.3 παρατηρούμε ότι η γωνιακή διάμετρος α (κατά αναλογία, $\alpha/2$ είναι η γωνιακή ακτίνα) θα δίνεται από τη σχέση:

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{R}{d} \quad (1.10)$$

ενώ για μικρές γωνίες ισχύει: $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$, οταν η γωνία μετριέται σε ακτίνια. Γίνεται αντιληπτό ότι ο άμεσος προσδιορισμός της γωνιακής διαμέτρου των αστέρων είναι εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση λόγω της τεράστιας απόστασής τους.

Figure 1.3: Γωνιακή διάμετρος α , ενός αστέρα.

Η ακτίνα ενός αστέρα, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, είναι ένα παρατηρησιακό χαρακτηριστικό που αλλάζει κατά πολλές τάξεις μεγέθους στη διάρκεια της ζωής του αστέρα. Μπορεί να πάρει τιμές σημαντικά μικρότερες ή μεγαλύτερες συγκριτικά με αυτή του Ήλιου. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις ακτίνες από δύο πολύ διαφορετικούς αστέρες, αυτή του Betelgeuse και του Proxima Centauri.

Για τον Ήλιο: $\alpha = 1919 \text{ arcsec} = 31.98 \text{ arcmin} = 0.53^\circ = 9.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$.

$$\text{Άρα: } R_\odot = 1 \text{ AU} \times \tan\left(\frac{0.53^\circ}{2}\right) \approx 0.0046 \text{ AU}$$

Για τον Betelgeuse: $\alpha = 0.125 \text{ arcsec} = 0.0021 \text{ arcmin} = 0.000035^\circ$,
 $d = 197 \text{ pc} \approx 4 \times 10^7 \text{ AU} (\pm 45 \text{ pc})$

$$\text{Άρα: } R_B = (4 \times 10^7 \text{ AU}) \times \tan\left(\frac{0.000035}{2}\right) \approx 12 \text{ AU} \Rightarrow R_B \approx 2580 R_\odot$$

Ο Betelgeuse είναι ένας υπεργίγαντας αστέρας με ακτίνα (και λαμπρότητα) κατά πολύ μεγαλύτερη από αυτή του Ήλιου.

Για τον εγγύτατο του Κενταύρου: $\alpha = 1 \times 10^{-3} \text{ arcsec}$, $d = 1.3 \text{ pc}$

$$\text{Άρα: } R_{PC} \approx 0.14 R_\odot$$

Ο εγγύτατος του Κενταύρου είναι ένας νάνος αστέρας με ακτίνα (και λαμπρότητα) κατά πολύ μικρότερη από αυτή του Ήλιου.

1.4 Σχέσεις $L = f(M)$ και $R = f(M)$

Η πιο σημαντική θεμελιώδης ιδιότητα, η μάζα, δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα για ένα απομονωμένο αστέρι. Για να μετρήσουμε αστρικές μάζες χρειαζόμαστε διπλά συστήματα αστέρων που παρουσιάζουν διακυμάνσεις στην ακτινική τους ταχύτητα (φασματοσκοπικά διπλοί αστέρες). Οι ακτινικές ταχύτητες από μόνες τους μπορούν να προσδιορίσουν μάζες μέχρι έναν παράγοντα $\sin i$, όπου i είναι η γωνία κλίσης (inclination) της τροχιάς του διπλού συστήματος. Για τον προσδιορισμό απόλυτων τιμών της μάζας χρειαζόμαστε πληροφορίες για το i , είτε από ένα οπτικά διπλό σύστημα (visual binary) ή από την παρουσία εκλείψεων (eclipsing binary). Περισσότερα γι' αυτά τα συστήματα στο Κεφάλαιο 6.

Από παρατηρήσεις άστρων στη γειτονιά του Ήλιου έχουμε καταφέρει να μετρήσουμε με ακρίβεια τις μάζες, τις λαμπρότητες και τις ακτίνες τους (σε διπλά συστήματα). Θα περίμενε κανείς να μην υπάρχει κανένας συσχετισμός μεταξύ αυτών των ποσοτήτων (λαμπρότητα και ακτίνα σχετίζονται μέσω του νόμου Stefan-Boltzmann οπως θα δούμε παρακάτω). Παρόλα αυτά, όταν κάνουμε τη γραφική παράσταση της

λαμπρότητας με τη μάζα, και της ακτίνας με τη μάζα παρατηρούμε ότι υπάρχει ξεκάθαρα συσχετισμός μεταξύ αυτών των ποσοτήτων (σχήμα 1.4).

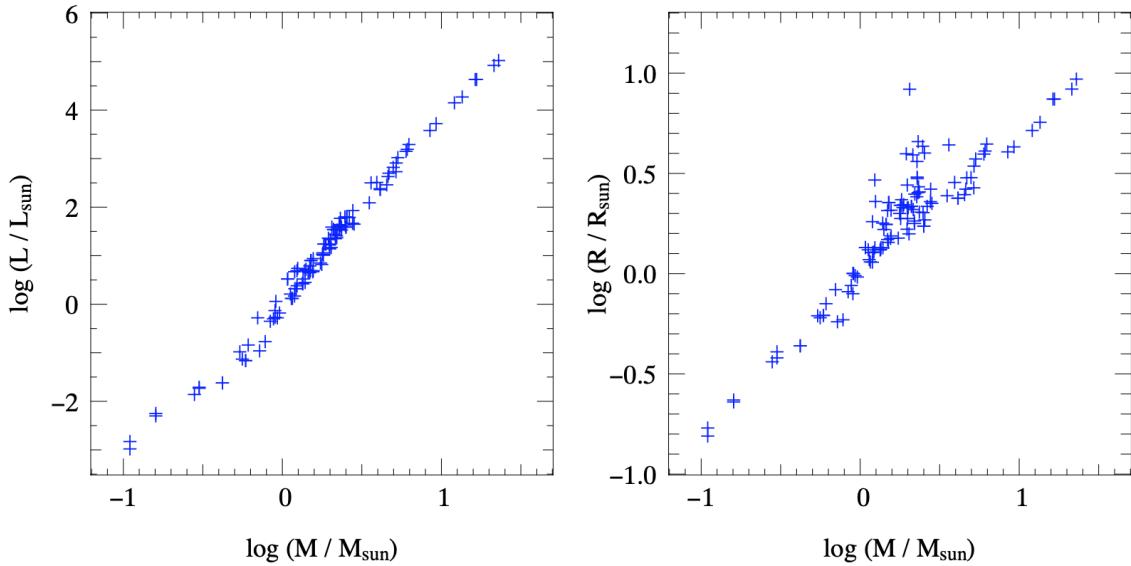


Figure 1.4: Οι μάζες, ακτίνες και λαμπρότητες έχουν μετρηθεί με ακρίβεια $\lesssim 2\%$ σε εκλειπτικά διπλούς αστέρες. Τα περισσότερα από αυτά τα αστέρια είναι αστέρες στην κύρια μαζούνθια. Η διασπορά στις ακτίνες των αστέρων μεταξύ 1 και $2 M_{\odot}$ οφείλεται στο γεγονός ότι αρκετά εξελιγμένα άστρα σε αυτό το εύρος μαζών, ικανοποιούν επίσης το κριτήριο της ακρίβειας της τάξης του 2%.

Αυτός ο παρατηρούμενος συσχετισμός μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά καλά από τους εκθετικούς νόμους (power laws) των σχέσεων (1.11) και (1.12).

$$L \propto \begin{cases} M^{2.5} & \text{εαν } M < 0.7M_{\odot} \\ M^{3.8} & \text{εαν } M > M_{\odot} \end{cases} \quad (1.11)$$

$$R \propto M^{0.7} \quad (1.12)$$

Προφανώς, χρειαζόμαστε μία θεωρία αστρικής εξέλιξης η οποία να εξηγεί την ύπαρξη και τις κλίσεις αυτών των σχέσεων.

1.5 Ακτινοβολία μέλανος σώματος

Σε καλή προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ένα αστερι ως ένα μέλαν σώμα, εννοώντας ένα αντικείμενο που απορροφά όλο το φως που πέφτει πάνω του. Τα μελανά σώματα έχουν την ιδιότητα ότι το φάσμα που εκπέμπουν εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία τους, ενώ η εκπομπή γίνεται ισοτροπικά. Το φάσμα δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα γράφημα της έντασης της Η/Μ ακτινοβολίας προς το μήκος κύματος (σχήμα 1.5).

Παρατηρώντας τα φάσματα του σχήματος 1.5 βλέπουμε ότι:

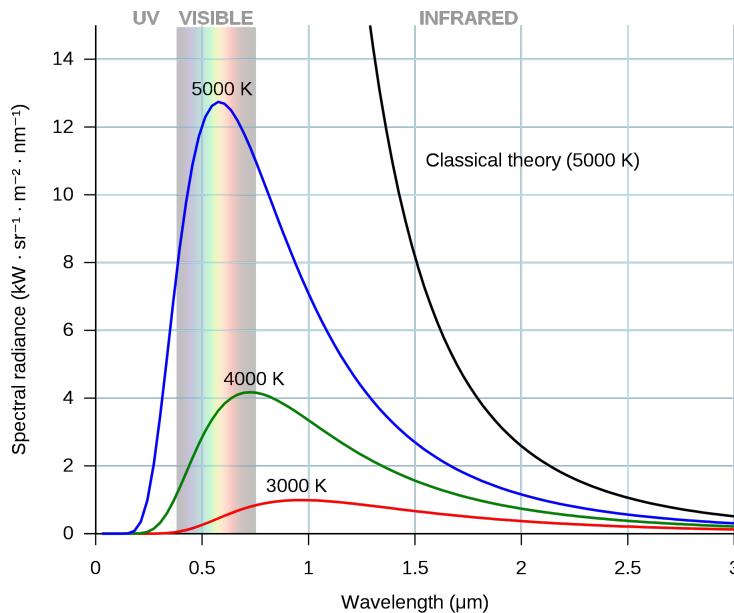


Figure 1.5: Φάσμα εκπομπής μελανών σωμάτων διαφόρων θερμοκρασιών. Στα μικρά μήκη κύματος φαίνεται η υπεριώδης καταστροφή (UV catastrophe) όπως προκύπτει με την κλασική θεωρία των Rayleigh-Jeans.

1. Η ακτινοβολία μέλανου σώματος είναι συνεχής
2. $T_1 < T_2 < T_3 \Rightarrow \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα μήκος κύματος όπου η ακτινοβολία γίνεται μέγιστη και μάλιστα, μέλανα σώματα υψηλότερης θερμοκρασίας εκπέμπουν ακτινοβολία μικρότερου μήκους κύματος.
3. Οι καμπύλες δεν τέμνονται ποτέ! Ένα μέλαν σώμα υψηλότερης θερμοκρασίας θα εκπέμπει πάντα περισσότερη ακτινοβολία συγχριτικά με ένα μέλαν σώμα χαμηλότερης θερμοκρασίας. Το μόνο που συμβαίνει είναι ότι το μέγιστο της εκπομπής μετακινείται σε υψηλότερα μήκη κύματος.

1.5.1

Νόμος του Planck

Ποιά είναι όμως η συνάρτηση που δίνει τις καμπύλες (φάσμα) ενός μέλανος σώματος; Η ένταση του φωτός που παράγει ένα μέλαν σώμα θερμοκρασίας T σε μήκος κύματος λ , δίνεται από τη σχέση του Planck:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (1.13)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως *νόμος του Planck*. Μπορούμε να εκφράσουμε το νόμο του Planck με όρους συχνότητας, αλλά δεν αρκεί η αντικατάσταση του μήκους κύματος με τη συχνότητα σύμφωνα με τη θεμελιώδη σχέση $\nu\lambda = c$. Αυτό που πρέπει να υμόδημαστε είναι ότι ο νόμος του Planck εκφράζει ενέργεια ανα μονάδα χρόνου, ανα επιφάνεια, ανα μήκος κύματος (ή συχνότητα), και ανα στερεά γωνία. Οπότε πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} B_\lambda(T) &= \frac{dE}{dt \cdot dA \cdot d\lambda \cdot d\Omega} \\ B_\nu(T) &= \frac{dE}{dt \cdot dA \cdot d\nu \cdot d\Omega} \end{aligned}$$

$\dot{\eta}$

$$|B_\lambda(T)d\lambda| = |B_\nu(T)d\nu|$$

Άρα αν ολοκληρώσουμε σε όλα τα μήκη κύματος/συχνότητες παίρνουμε την ολική ενέργεια που εκπέμφθηκε. Άλλα:

$$\nu\lambda = c \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow |d\nu| = |d(c/\lambda)| \Rightarrow |d\nu| = \left| \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \right|$$

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} B_\nu(T) &= \frac{B_\lambda(T)d\lambda}{d\nu} \Rightarrow B_\nu(T) = \frac{B_\lambda(T)d\lambda}{\frac{c}{\lambda^2} d\lambda} = \frac{\lambda^2}{c} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow B_\nu(T) = \frac{2hc}{\lambda^3} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} = \frac{2hc}{c^3/\nu^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.5.2

Νόμος του Wien

Αν διαφορίσουμε τη συνάρτηση του Planck (σχέση (1.13)) ως προς μήκος κύματος και τη θέσουμε ίση με μηδέν, παρατηρούμε ότι φτάνει ένα μέγιστο σε μήκος κύματος:

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_{\max} = 0.2 \frac{hc}{kT} = \frac{0.29}{T} \text{ cm}$$

$$\boxed{\lambda_{\max} \cdot T = 0.003 \text{ mK}} \quad (1.15)$$

Άρα το μήκος κύματος στο οποίο η εκπομπή ακτινοβολίας είναι μέγιστη εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία → άρα δεν έχουν όλα τα αστέρια την ίδια επιφανειακή θερμοκρασία.

1.5.3

Νόμος των Stefan-Boltzmann

Ολοκληρώνοντας αυτή τη φορά τον νόμο του Planck για όλες τις συχνότητες, προκύπτει ότι:

$$L = A\sigma T^4 \Rightarrow \boxed{L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4} \quad (1.16)$$

όπου A είναι η επιφάνεια μέλανος σώματος, και για αστέρα ακτίνας R ισχύει $A = 4\pi R^2$. Ο παράγοντας T_{eff}^4 ονομάζεται ενεργός θερμοκρασία του αστέρα και ορίζεται ως η θερμοκρασία που θα έπρεπε να έχει ένα μέλαν σώμα ώστε να παράγει την ίδια ροή ενέργειας που παράγει η επιφάνεια του αστέρα. Με άλλα λόγια η ενεργός θερμοκρασία προσεγγίζει ικανοποιητικά την θερμοκρασία της επιφάνειας του αστέρα.

Γίνεται αντιληπτό ότι αν γνωρίζω την απόσταση ενός αστέρα (π.χ. μέσω της παράλλαξης), την φωτεινότητά του (με φωτομετρικές παρατηρήσεις) μπορώ να υπολογίσω τη λαμπρότητά του. Γνωρίζοντας την λαμπρότητα του αστέρα και μετρώντας την T_{eff}^4 (νόμος Wien) μπορώ να έχω μία εκτίμηση για την ακτίνα του αστέρα μέσω της σχέσης (1.16).

Τέλος, η εκπεμπόμενη ροή ακτινοβολίας από την επιφάνεια του αστέρα θα είναι:

$$F_{\text{surface}} = \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi R^2} \Rightarrow F_{\text{surface}} = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (1.17)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Φωτομετρία & Φασματοσκοπία Αστέρων

Contents

2.1	Βασικά στοιχεία φωτομετρίας	11
2.1.1	Ορισμός βιολομετρικών μεγεθών	11
2.1.2	Φωτομετρικά συστήματα	13
2.2	Φασματική ανάλυση	18
2.2.1	Αστρικά φάσματα	18
2.2.2	Σχηματισμός φασματικών γραμμών	19
2.2.3	Φαινόμενο Zeeman	21
2.3	Φασματική Ταξινόμηση	22
2.3.1	Ταξινόμηση κατα Harvard	23
2.3.2	Διάγραμμα Hertzsprung-Russell	25
2.3.3	Ταξινόμηση κατα Yerkes	27

2.1 Βασικά στοιχεία φωτομετρίας

Ο όρος “φωτομετρία” αναφέρεται στην τεχνική μέτρησης της ηλεκτρομαγνητικής ροής ενός ουράνιου αντικειμένου. Συνήθως αυτή πραγματοποιείται χωρίζοντας το φάσμα του αστέρα σε διάφορες ζώνες διέλευσης (φίλτρα) και στη συνέχεια καταγράφεται η ροή σε κάθε φίλτρο χρησιμοποιώντας κάποιο φωτοευάσθητο όργανο (π.χ. κάμερα CCD). Το σύνολο των ζωνών διέλευσης, που αντιστοιχεί σε ένα πολύ μεγάλο εύρος μηχάνων κύματος της ακτινοβολίας, ονομάζεται “φωτομετρικό σύστημα”. Συνδυάζοντας φωτομετρικές μετρήσεις σε διάφορα φίλτρα μπορούμε να προσδιορίσουμε την φωτεινότητα του αστέρα (αν η απόσταση του είναι γνωστή) καθώς και άλλες φυσικές ιδιότητές του όπως η επιφανειακή του θερμοκρασία.

2.1.1

Ορισμός βιολομετρικών μεγεθών

Ακολουθώντας την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε για να εξάγουμε το φαινόμενο (απόλυτο) μέγεθος ενός αστέρα, μπορούμε να ορίσουμε και το βιολομετρικό φαινόμενο (απόλυτο) μέγεθος ως:

- Ολική (ή βολομετρική) φωτεινότητα αστέρων

$$F_{\text{bol}} = \int_0^{\infty} F(\lambda) d\lambda = \frac{L_{\text{bol}}}{4\pi d^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi d^2}$$

Το $F(\lambda)$ είναι το παρατηρούμενο φάσμα του αστέρα. Στο βαθμό που ο αστέρας συμπίπτει με μέλαν σώμα είναι ουσιαστικά το B_λ της σχέσης του Planck.

- Ολικό (ή βολομετρικό) φαινόμενο μέγεθος αστέρα

$$m_{\text{bol}} = -2.5 \log \left(\frac{F_{\text{bol}}}{F_\odot} \right) = 2.5 \log F_\odot - 2.5 \log F_{\text{bol}}$$

Στην περίπτωση που μιλάμε για βολομετρικά μεγέθη, η σταθερά βαθμονόμησης ορίζεται βάσει της φωτεινότητας του Ήλιου και όχι του Vega!

- Ολικό (ή βολομετρικό) απόλυτο μέγεθος αστέρα

$$M_{\text{bol}} = m_{\text{bol}} \text{ όταν } d = 10 \text{ pc} \longrightarrow M_{\text{bol}} = -2.5 \log \left(\frac{F_{\text{bol},10\text{pc}}}{F_\odot} \right)$$

Παράδειγμα: Γνωρίζοντας ότι το απόλυτο βολομετρικό μέγεθος του Ήλιου είναι $M_\odot^{\text{bol}} = 4.74$, βρείτε μία σχέση που να συνδέει το απόλυτο μέγεθος ενός αστέρα με την λαμπρότητά του καθώς και αυτή του Ήλιου.

Εξ' ορισμού το απόλυτο βολομετρικό μέγεθος του Ήλιου θα είναι

$$M_\odot^{\text{bol}} = -2.5 \log \left(\frac{F_{\odot,10\text{pc}}^{\text{bol}}}{F_\odot} \right) \Rightarrow 2.5 \log F_\odot - 2.5 \log F_{\odot,10\text{pc}}^{\text{bol}} = 4.74$$

Για έναν τυχαίο αστέρα, το απόλυτο βολομετρικό μέγεθός του θα είναι κατά αντιστοιχία

$$M_{\text{bol}} = 2.5 \log F_\odot - 2.5 \log F_{\text{bol}, 10\text{pc}}$$

Πρέπει να εμφανίσουμε τον όρο $F_{\odot,10\text{pc}}^{\text{bol}}$, το οποίο το καταφέρνουμε με το να τον προσθαφαίρεσουμε από τη σχέση του απόλυτου βολομετρικού μεγέθους του αστέρα μας. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{\text{bol}} &= \textcolor{blue}{2.5 \log F_\odot - 2.5 \log F_{\text{bol}, 10\text{pc}} + 2.5 \log F_{\odot,10\text{pc}}^{\text{bol}}} - \textcolor{blue}{2.5 \log F_{\odot,10\text{pc}}^{\text{bol}}} = \\ &= \textcolor{blue}{4.74} - 2.5 \log F_{\text{bol}, 10\text{pc}} + 2.5 \log F_{\odot,10\text{pc}}^{\text{bol}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4.74 - M_{\text{bol}} = 2.5 \log \left[\frac{L_{\text{bol}}}{4\pi(10\text{pc})^2} \right] - 2.5 \log \left[\frac{L_\odot}{4\pi(10\text{pc})^2} \right] = \\ &= 2.5 \log \left(\frac{L_{\text{bol}}}{L_\odot} \right) \Rightarrow 0.4(4.74 - M_{\text{bol}}) = \log \left(\frac{L_{\text{bol}}}{L_\odot} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{L_{\text{bol}}}{L_\odot} = 10^{0.4(4.74 - M_{\text{bol}})}} \end{aligned}$$

Βάσει αυτής της σχέσης, μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως πόσες φορές πιο φωτεινός είναι ένας αστέρας από τον Ήλιο, αν γνωρίζουμε το απόλυτο μέγεθός του.

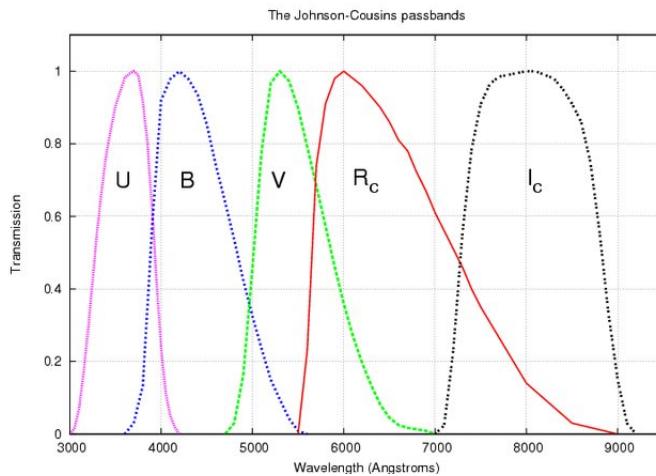


Figure 2.1: Καμπύλες διαπερατότητας για το σύστημα φίλτρων Johnson-Cousins. Ο άξονας για τη διαπερατότητα είναι η διαδικασία που αποδίδει την διαπερατότητα. Το φίλτρο V (visual) αφήνει να καταγραφούν τα ίδια φωτόνια (πάνω-κάτω) με αυτά που αντιλαμβάνονται τα μάτια μας. Δηλαδή με άλλα λόγια, η καμπύλη φασματικής ευαισθησίας του φίλτρου V είναι παρόμοια μ' εκείνη του ματιού μας.

2.1.2

Φωτομετρικά συστήματα

Ο υπολογισμός συνολικών φωτεινοτήτων είναι πολύπλοκη διαδικασία και εξαιρετικά χρονοβόρα όταν μελετάμε συστήματα με χιλιάδες αστέρια, π.χ. σφαιρωτά σμήνη. Η συλλογή φωτός σε όλα τα μήκη κύματος, η προσαρμογή τους σε μέλονα σώματα κτλ για κάθε ένα από τα μέλη ενός σμήνους είναι απαγορευτική. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε φίλτρα (ηθμούς) τα οποία μας επιτρέπουν την παρατήρηση σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων/μηχών κύματος.

Την παρατηρούμενη συνολική φωτεινότητα όπως π.χ. το "Johnson-Cousins". Σε αυτό το σύστημα υπάρχουν 5 φίλτρα, τα U, B, V, R, I. Το διάγραμμα (σχήμα 2.1) δείχνει τις καμπύλες διαπερατότητας $S(\lambda)$ αυτών των φίλτρων.

Όταν παρατηρούμε ένα αστέρι μέσω ενός φίλτρου (π.χ. το V) τότε εμείς μετράμε:

$$F_V = \int_0^\infty F(\lambda) S_V(\lambda) d\lambda \quad (2.1)$$

όπου $F(\lambda)$ είναι το φάσμα που επέμπει ο αστέρας, και $S_V(\lambda)$ είναι η καμπύλη φασματικής ευαισθησίας, του φίλτρου και του ανιχνευτή.

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε τα μεγέθη ενός αστέρα στα διάφορα φίλτρα ως εξής:

$$V \equiv m_V = -2.5 \log \left(\frac{F_V}{F_{V,0}} \right) = 2.5 \log F_{V,0} - 2.5 \log F_V = C_V - 2.5 \log F_V$$

$$B \equiv m_B = -2.5 \log \left(\frac{F_B}{F_{B,0}} \right) = 2.5 \log F_{B,0} - 2.5 \log F_B = C_B - 2.5 \log F_B$$

$$U \equiv m_U = -2.5 \log \left(\frac{F_U}{F_{U,0}} \right) = 2.5 \log F_{U,0} - 2.5 \log F_U = C_U - 2.5 \log F_U$$

όπου οι σταθερές C_V, C_B, C_U κτλ ορίζονται με βάση τη φωτεινότητα του Vega στα αντίστοιχα μήκη κύματος, δηλαδή:

$$C_V = 2.5 \log(F_{V,Vega})$$

$$C_B = 2.5 \log(F_{B,Vega})$$

$$C_U = 2.5 \log(F_{U,Vega}) \quad \text{κτλ}$$

Αυτό σημαίνει ότι εξ' ορισμού ισχύει $m_{V,Vega} = m_{B,Vega} = m_{U,Vega} = \dots = 0$

Παράδειγμα: Ποιό είναι το βολομετρικό μέγεθος ενός αστέρα αν υποθέσουμε ότι εκπέμπει μόνο στα U,B,V,R;

Αν κάποιος υποθέσει ότι το συνολικό μέγεθος m_{bol} είναι απλώς το άθροισμα των επιμέρους μεγεθών στα διάφορα φίλτρα, τότε είναι λάθος! Με άλλα λόγια:

$$m_{bol} \neq m_U + m_B + m_V + m_R$$

γιατί το μέγεθος είναι λογαριθμική ποσότητα. Αυτό που ισχύει είναι ότι η συνολική ροή θα ισούται με το άθροισμα των ροών στα αντίστοιχα φίλτρα. Έτσι, αν γνωρίζουμε τα m_U, m_B κτλ και θέλουμε να βρούμε το m_{bol} δουλεύουμε ως εξής:

$$m_B = -2.5 \log\left(\frac{F_B}{F_{B,0}}\right) \Rightarrow -0.4m_B = \log\left(\frac{F_B}{F_{B,0}}\right) \Rightarrow F_B = F_{B,0}10^{-0.4m_B}$$

Παρόμοια βρίσκουμε και τα F_U, F_V, F_R και άρα $F_{bol} = F_B + F_V + F_U + F_R$. Τελικά

$$m_{bol} = -2.5 \log\left(\frac{F_{bol}}{F_0}\right)$$

Η βολομετρική διόρθωση Ο υπολογισμός της συνολικής φωτεινότητας ενός αστέρα είναι ο λόγος που κάνουμε παρατηρήσεις με περισσότερα από ένα φίλτρα. Παρόλα αυτά, υπάρχει και ένας άλλος τρόπος υπολογισμού, μέσω του m_V και μόνο. Για αυτό τον λόγο θα πρέπει να ορίσουμε μία νέα ποσότητα η οποία είναι γνωστή ως βολομετρική διόρθωση (bolometric correction) ή αλλιώς συντελεστής συνολικής διόρθωσης ως εξής:

$$BC = m_{bol} - m_V = M_{bol} - M_V \tag{2.2}$$

Η ιδέα για το BC είναι ότι μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά. Γνωρίζοντας ότι για τα περισσότερα άστρα το φάσμα τους προσαρμόζεται αρκετά ικανοποιητικά από το φάσμα ενός μέλανος σώματος, αν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία ενός αστέρα, άρα γνωρίζουμε και το φάσμα του μέλανος σώματος που αντιστοιχεί σε αυτή τη θερμοκρασία, μπορούμε να ολοκληρώσουμε το φάσμα ως προς όλα τα μήκη κύματος για να βρούμε την ολική λαμπρότητα του αστέρα, να ολοκληρώσουμε έπειτα το φάσμα μόνο στην περιοχή του φίλτρου V, και να υπολογίσουμε θεωρητικά τη ποσότητα BC για διάφορες θερμοκρασίες. Άρα, παρατηρώντας το m_V ενός αστέρα, μπορούμε να προσθέσουμε το BC που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία του εν λόγω αστέρα (το οποίο έχει υπογισθεί θεωρητικά) και έτσι έχουμε μία εκτίμηση για το ολικό μέγεθος του αστέρα.

Βολομετρική διόρθωση μπορεί να οριστεί και σε άλλα μήκη κύματος πέρα του ορατού. Για παράδειγμα, σε μερικά ψυχρά άστρα όπου το μέγιστο της ενέργειάς τους εκπέμπεται στα υπέρυθρα μήκη κύματος, μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα διαφορετικό σύνολο βολομετρικών διορθώσεων στο απόλυτο μέγεθος στα υπέρυθρα, αντί για το απόλυτο μέγεθος στα ορατά μήκη κύματος. Έτσι, $BC_K = M_{bol} - M_K$, όπου BC_K και M_K είναι η βολομετρική διόρθωση και το απόλυτο μέγεθος στην K-band αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις

Για τον Ήλιο ισχύει ότι $M_{\text{bol}} = 4.74$ και $M_V = 4.83$. Άρα, $BC = -0.09$. Παρατηρούμε ότι ο BC πρέπει πάντα να είναι αρνητικός καθώς τα μεγέθη ορίζονται με ένα μείον (μικρότερο μέγεθος συνεπάγεται πιο φωτεινός ο αστέρας).

Για αστέρια με $T_{\text{eff}} \simeq 6700$ K έχουμε $BC \simeq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το λ_{max} που αντιστοιχεί σε αυτή τη θερμοκρασία, δηλαδή το μεγαλύτερο μέρος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας διέρχεται μέσω του φίλτρου V.

Για αστέρια με $T_{\text{eff}} > 6700$ K, το λ_{max} μετατοπίζεται σε μικρότερα μήκη κύματος και άρα “χάνουμε” φωτόνια από εκεί.

Για αστέρια με $T_{\text{eff}} < 6700$ K, αντίστοιχα, “χάνουμε” φωτόνια από τα μεγαλύτερα μήκη κύματος.

Δείκτες χρώματος Αφού λοιπόν θα μας αρκούσαν παρατηρήσεις μόνο σε ένα φίλτρο για να υπολογίσουμε τη συνολική φωτεινότητα ενός αστέρα, προκύπτει η εύλογη απορία τι μας χρειάζεται να παρατηρούμε στα άλλα φίλτρα. Η απάντηση είναι επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε την επιφανειακή θερμοκρασία, T_{eff} ενός αστέρα (χωρίς να χρειαστεί να έχουμε το συνολικό φάσμα του αστέρα), γνώση που είναι απαραίτητη για να βρούμε το BC.

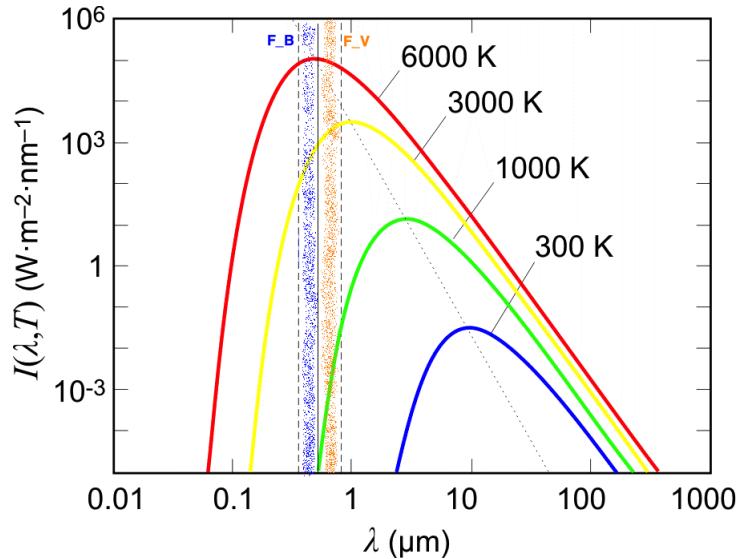


Figure 2.2: Φάσματα μέλανων σωμάτων για διάφορες θερμοκρασίες. Το διάγραμμα είναι σε λογαριθμικούς άξονες γι' αυτό η μορφή των καμπυλών είναι διαφορετική.

Στο διάγραμμα 2.2 απεικονίζεται –ποιοτικά– το εύρος των συχνοτήτων που καλύπτει το φίλτρο B (με μπλε χρώμα), ενώ με πορτοκαλί φάίνεται το εύρος συχνοτήτων που καλύπτει το φίλτρο V. Άρα, η ροή του αστέρα στο φίλτρο B θα είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται κάτω από την καμπύλη καθώς από τον ορισμό ξέρουμε ότι είναι το ολοκλήρωμα ως προς τα μήκη κύματος επι τη φασματική ευαισθησία του φίλτρου. Λόγω της μορφής των καμπυλών τα εμβαδά αυτά δεν είναι σταθερά.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το εμβαδόν (η ροή) και στα δύο φίλτρα. Αν πάρουμε ως παράδειγμα το μέλαν σώμα θερμοκρασίας 6000 K, παρατηρούμε ότι το εμβαδόν στο B φίλτρο είναι ελαφρώς μεγαλύτερο

από το εμβαδόν στο V φίλτρο. Άρα η διαφορά στα μεγέθη $B - V \equiv m_B - m_V < 0$ καθώς $F_B > F_V$. Για το μέλαν σώμα θερμοκρασίας 3000 K, το εμβαδόν στο V φίλτρο είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν στο B φίλτρο. Άρα $B - V > 0$ καθώς $F_B < F_V$. Η διαφορά στα μεγέθη των δύο φίλτρων δεν θα έχει το ίδιο πρόσημο! Έτσι, μετρώντας τη ροή του αστέρα σε δύο φίλτρα και πάροντας τη διαφορά στα μεγέθη τους, μπορούμε να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία του αστέρα.

Έχοντας κατανοήσει το πώς επηρεάζεται η παρατηρούμενη ροή, μέσα από ένα φίλτρο, από την θερμοκρασία γίνεται αντιληπτό γιατί χρειαζόμαστε παρατηρήσεις σε 2 τουλάχιστον φίλτρα. Παίρνοντας την διαφορά $B - V$, $U - V$ κτλ, βρίσκουμε τη θερμοκρασία του αστέρα. Γνωρίζοντας τη θερμοκρασία, έχουμε μία τιμή για τη βιολομετρική διόρθωση που χρειαζόμαστε και κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική λαμπρότητα του αστέρα (αν γνωρίζουμε την απόσταση).

Αυτές οι διαφορές στα μεγέθη ($\pi.\chi.$ $B - V$) ονομάζονται “δείκτες χρώματος” και συνήθως ορίζονται ως η διαφορά μεγέθους σε μικρότερο μήκος κύματος μείον το μέγεθος σε μεγαλύτερο μήκος κύματος. Συνηθισμένοι δείκτες χρώματος είναι οι

$$B - V \equiv m_B - m_V, U - B \equiv m_U - m_B, V - R \equiv m_V - m_R$$

Θεωρώντας ότι ένα αστέρι εκπέμπει ως μέλαν σώμα, μπορούμε για κάθε θερμοκρασία να υπολογίσουμε θεωρητικά τι δείκτη χρώματος περιμένουμε. Στην πράξη, χρησιμοποιούμε διάφορες εμπειρικές σχέσεις όπως την παρακάτω για τον δείκτη $B - V$:

$$T_{\text{eff}} = \frac{9000 \text{ K}}{(B - V) + 0.93} \quad (2.3)$$

που ισχύει για αστέρια με δείκτη χρώματος $-0.1 \leq B - V \leq 1.4$ ή ισοδύναμα $4000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 11000 \text{ K}$.

- Για τον Vega, $T_{\text{eff}} \approx 10000 \text{ K}$ και εξ' ορισμού $B - V = U - B = \dots = 0$.
- Για αστέρια με $T_{\text{eff}} > 10000 \text{ K} \rightarrow B - V < 0$, ενώ για αστέρια με $T_{\text{eff}} < 10000 \text{ K} \rightarrow B - V > 0$. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα αν σκεφτούμε ότι μεγαλύτερη θερμοκρασία συνεπάγεται λ_{max} σε μικρότερη μήκη κύματος και άρα $F_B > F_V \Rightarrow m_B < m_V \Rightarrow B - V < 0$. Αντίστοιχη λογική ακολουθείται και για όταν $T_{\text{eff}} < 10000 \text{ K}$.

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αστέρι φυχρότερο από τον Vega και ότι ισχύει $\frac{F_B}{F_V} < \left(\frac{F_B}{F_V}\right)_{Vega}$. Να δείξετε ότι σε αυτή την περίπτωση $B - V > 0$.

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{F_B}{F_V} &< \frac{F_{B,Vega}}{F_{V,Vega}} \Rightarrow \log\left(\frac{F_B}{F_V}\right) < \log\left(\frac{F_{B,Vega}}{F_{V,Vega}}\right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -\log\left(\frac{F_B}{F_V}\right) > -\log\left(\frac{F_{B,Vega}}{F_{V,Vega}}\right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -2.5 \log\left(\frac{F_B}{F_V}\right) > -2.5 \log\left(\frac{F_{B,Vega}}{F_{V,Vega}}\right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -2.5 \log\left(\frac{F_B}{F_V}\right) + 2.5 \log\left(\frac{F_{B,Vega}}{F_{V,Vega}}\right) > 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -2.5 \log F_B + 2.5 \log F_V + 2.5 \log F_{B,Vega} - 2.5 \log F_{V,Vega} > 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -2.5 (\log F_B - \log F_{B,Vega}) + 2.5 (\log F_V - \log F_{V,Vega}) > 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \underbrace{-2.5 \log\left(\frac{F_B}{F_{B,Vega}}\right)}_{m_B} + \underbrace{2.5 \log\left(\frac{F_V}{F_{V,Vega}}\right)}_{-m_V} > 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow m_B - m_V > 0 \Rightarrow \boxed{B - V > 0}
 \end{aligned}$$

Μεσοαστρική ερυθρή χρώση Υπάρχει όμως λόγος να μελετάμε τα άστρα σε παραπάνω από 2 φίλτρα; Η απάντηση είναι πως ναι, καθώς μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι δεν παρεμβάλεται τίποτα μεταξύ του παρατηρητή και του αστέρα. Στην πραγματικότητα, και ιδιαίτερα για τα άστρα που βρίσκονται στο γαλαξιακό επίπεδο, υπάρχουν αέρια και σκόνη που απορροφούν μέρος του φωτός.

Η απορρόφηση του οπτικού φωτός από τη μεσοαστρική σκόνη γίνεται με διαφορετικό τρόπο στα διάφορα μήκη κύματος. Η απορρόφηση είναι μεγαλύτερη στα μικρότερα μήκη κύματος (στο “μπλε” φως) οπότε τα αστέρια εμφανίζονται περισσότερο κόκκινα από τις είναι στην πραγματικότητα. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται “μεσοαστρική ερυθρή χρώση” (interstellar reddening). Αν όμως έχουμε μετρήσεις του μεγέθους των αστέρων σε διάφορα φίλτρα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την απορρόφηση στα διάφορα μήκη κύματος, να διορθώσουμε τους παρατηρούμενες δείκτες χρώματος, και άρα να υπολογίσουμε τη σωστή T_{eff} και τον συντελεστή βιολομετρικής διόρθωσης BC.

Λόγω του φαινομένου της μεσοαστρικής ερυθρής χρώσης, ένας αστέρας παρατηρείται πιο κόκκινος από ότι είναι στην πραγματικότητα, δηλαδή με αλλοιωμένο δείκτη χρώματος. Αν $(B - V)$ είναι ο παρατηρούμενος και $(B - V)_0$ ο πραγματικός δείκτης χρώματος, τότε η διαφορά τους

$$E_{(B-V)} = (B - V) - (B - V)_0 \quad (2.4)$$

ονομάζεται “υπεροχή χρώματος” (color excess). Από την υπεροχή χρώματος υπολογίζεται τελικά η απορρόφηση σε αστρικά μεγέθη (A_V για το οπτικό και A_B για το κυανό) από τις εμπειρικές σχέσεις

$$A_V = 3E_{(B-V)} \quad (2.5)$$

$$A_B = 4E_{(B-V)} \quad (2.6)$$

2.2 Φασματική ανάλυση

Στα μέσα του 19ου αιώνα οι Kirchhoff και Bunsen παρατήρησαν ότι τα φάσματα των φυσικών σωμάτων ακολουθούν τους εξής δύο γενικούς κανόνες:

1. Τα στερεά και τα υγρά σώματα εκπέμπουν συνεχές φάσμα, ενώ τα (αφαιά) αέρια εκπέμπουν γραμμικό φάσμα.
2. Όταν ένα αέριο παρεμβάλλεται μεταξύ μιας (θερμότερης από αυτό) πηγής συνεχούς φάσματος και του παρατηρητή, δημιουργούνται γραμμές απορρόφησης στο συνεχές φάσμα. Οι γραμμές αυτές έχουν το ίδιο μήκος κύματος με τις γραμμές εκπομπής του φάσματος του αερίου του κανόνα (1).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε κάποια χαρακτηριστικά των αστρικών φασμάτων δίνοντας έμφαση στο σχηματισμό της γραμμικής συνιστώσας, ενώ το πως μια αέρια μάζα –όπως ένας αστέρας– μπορεί να έχει και συνεχές φάσμα, που έρχεται σε αντίθεση με τον κανόνα (1), θα γίνει αντιληπτό στο επόμενο κεφάλαιο.

2.2.1

Αστρικά φάσματα

Μπορούμε να πάρουμε το φάσμα μιας πηγής χρησιμοποιώντας ένα πρίσμα ή ένα φράγμα περίθλασης. Παρόλο που η λειτουργία των δύο αυτών οργάνων βασίζεται σε εντελώς διαφορετικά φυσικά φαινόμενα, τα αποτελέσματα που μας δίνουν είναι τα ίδια: αναλύουν μία παράλληλη πολυχρωματική δέσμη φωτός, σε μία αποκλίνουσα δέσμη, σε κάθε διεύθυνση της οποίας αντιστοιχεί φως μια συγκεκριμένης συχνότητας. Στη συνέχεια το φάσμα καταγράφεται φωτογραφικά ή φωτοηλεκτρικά.

Το φάσμα μιας πηγής χωρίζεται σε δύο συνιστώσες: τη **συνεχής** συνιστώσα και τη **γραμμική** συνιστώσα. Η τελευταία αποτελείται από φασματικές γραμμές, δηλαδή στενές φασματικές περιοχές πλάτους $\Delta\lambda$, όπου $\Delta\lambda \ll \lambda$, στις οποίες η φωτεινή ένταση έχει τιμή πολύ μεγαλύτερη (φωτεινές γραμμές) ή πολύ μικρότερη (σκοτεινές γραμμές) από τη μέση τιμή των γειτονικών της περιοχών. Η συνεχής συνιστώσα αποτελείται από την εξομαλυμένη καμπύλη που προκύπτει αν “αφαιρέσουμε” από το φάσμα τις φασματικές γραμμές, ή αν “προσαρμόσουμε” στην πειραματική καμπύλη του φάσματος μια συνεχής “θεωρητική” καμπύλη σύμφωνα με κάποιο λογικό κριτήριο. Τέτοια θεωρητική καμπύλη μπορεί να είναι για παράδειγμα μία καμπύλη Planck (μέλανος σώματος) αν έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι το φωτοβόλο σώμα εκπέμπει θερμικά¹ και βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, ένα πολύτιμο αν πιστεύουμε ότι το σώμα εκπέμπει ακτινοβολία σύγχροτρον² ή ακόμη και αυτή που προκύπτει από μία απλή γραφική εξομάλυνση των δεδομένων.

Η συνεχής συνιστώσα των φασμάτων των αστέρων μοιάζει πολύ με το φάσμα μέλανος σώματος, εφόσον ως θερμοκρασία του αστέρα πάρουμε την ενεργό θερμοκρασία του (σχήμα 2.3). Οι αποκλίσεις της συνεχούς συνιστώσας από το μέλαν σώμα οφείλονται στο γεγονός ότι η ακτινοβολία προέρχεται από διάφορα βάθη, με διάφορες θερμοκρασίες. Αυτό σημαίνει ότι το συνεχές φάσμα μοιάζει να είναι μια σύνθεση φασμάτων πολλών μελανών σωμάτων διαφορετικών θερμοκρασιών. Επίσης, στη φωτόσφαιρα του άστρου παρουσιάζονται αποκλίσεις από τη θερμοδυναμική ισορροπία που προϋποθέτει ο νόμος του Planck και παρουσιάζει

¹ Θερμική ακτινοβολία είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ένα σώμα λόγω της θερμικής του κατάστασης και η έντασή της πειργάφεται από τον νόμο του Planck.

² Ακτινοβολία σύγχροτρον είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται όταν ηλεκτρόνια με σχετικιστικές ταχύτητες κινούνται μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Η ακτινοβολία αυτή δημιουργεί συνεχές φάσμα και εκπέμπεται μέσα στα όρια ενός στενού κώνου γωνίας $\alpha = 2m_0c^2/E$, με άξονα κάθετο στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, όπου το η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου και E η ενέργεια του.

σημαντική διαφάνεια (δεν επικρατεί θερμοδυναμική ισορροπία σε όλο το εξωτερικό στρώμα του αστέρα από το οποίο προέρχεται η ακτινοβολία).

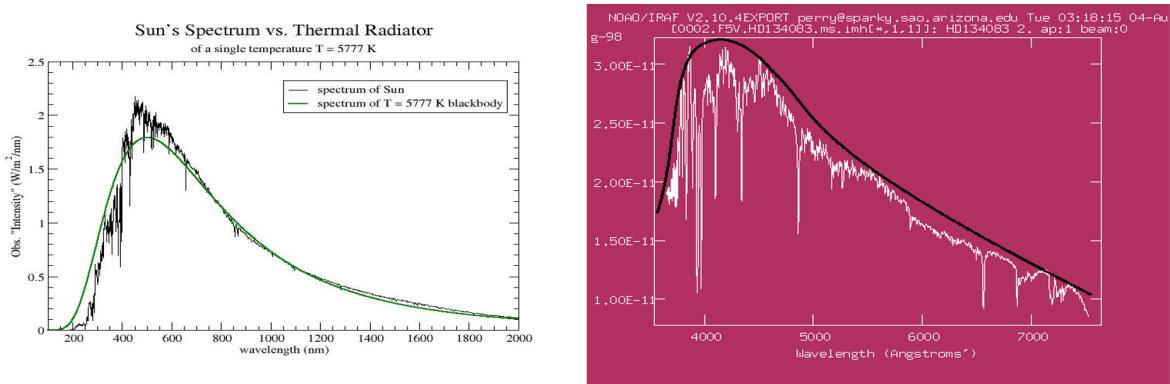


Figure 2.3: **Αριστερά:** Προσαρμογή συνεχούς φάσματος θερμοκρασίας $T \sim 5777\text{ K}$ στο φάσμα του Ήλιου. **Δεξιά:** Προσαρμογή συνεχούς φάσματος θερμοκρασίας $T \sim 6660\text{ K}$ στο φάσμα του αστέρα HD134083. Και στις δύο περιπτώσεις είναι χαρακτηριστική η παρουσία φασματικών γραμμών απορρόφησης.

Επειδή το πλάτος Δλ των φασματικών γραμμών είναι συνήθως πολύ μικρό συγχρικά με το πλάτος της οπτικής περιοχής, η φωτεινή ενέργεια που αντιστοιχεί σ' αυτές είναι πολύ μικρή, έστω κι αν η έντασή τους είναι πολύ μεγαλύτερη (ή μικρότερη) από την τιμή της συνεχούς συνιστώσας στην οπτική περιοχή. Έτσι, η ύπαρξη των φασματικών γραμμών δεν επηρεάζει σημαντικά τη φωτεινότητα ενός αστέρα και κατ' επέκταση το μέγεθός του (m_U, m_B, m_V κτλ.). Παρόλα αυτά, η ένταση και το πλάτος των φασματικών γραμμών των αστρικών φασμάτων είναι φορείς που μας μεταφέρουν τις σημαντικότερες πληροφορίες που έχουμε σήμερα στη διάλυσή μας για του αστέρες: φυσικές συνήθειες στην επιφάνεια και την ατμόσφαιρά τους (πίεση και θερμοκρασία), χημική σύσταση, ταχύτητα περιστροφής, ακτινική ταχύτητα ως προς τον παρατηρητή. Για παράδειγμα, η μέτρηση της μετατόπισης του μήκους κύματος των φασματικών γραμμών από τα διάφορα τμήματα της επιφάνειας του αστέρα, προς μικρότερα ή μεγαλύτερα μήκη κύματος (λόγω φαινομένου Doppler) μας επιτρέπει τη μέτρηση της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του αστέρα. Αντίστοιχα, η μέτρηση του εύρους των φασματικών γραμμών μας επιτρέπει τον προσδιορισμό της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του αστέρα. Γενικά πάντως, η πεπλάτυνση των φασματικών γραμμών οφείλεται σε πολλούς παράγοντες, όπως η θερμική κίνηση των συστατικών του αερίου. Σε αυτή την περίπτωση βέβαια, η πεπλάτυνση δεν είναι ίδια για όλες τις φασματικές γραμμές που αντιστοιχούν στα διάφορα χημικά στοιχεία παρόντα στην ατμόσφαιρα του αστέρα. Η ταχύτητα περιστροφής όμως επηρεάζει το εύρος όλων των φασματικών γραμμών το ίδιο.

Η δημιουργία της συνεχούς συνιστώσας του φάσματος αν και έχει θεωρητικό ενδιαφέρον, οι ιδιότητές της λίγο εξαρτώνται από το μηχανισμό παραγωγής της και κατ' επέκταση από τη χημική σύσταση του αστέρα.

2.2.2

Σχηματισμός φασματικών γραμμών

Οι φασματικές γραμμές δημιουργούνται όταν μεταβάλλεται η ενέργεια ενός ατόμου ή ενός μορίου (ή ελεύθερης ρίζας) μεταξύ κβαντισμένων ενεργειακών σταθμών. Στην περίπτωση των μορίων, αυτό συμβαίνει είτε όταν μεταβάλλεται το πλάτος της ταλάντωσης ή η σχετική θέση των ατόμων τους, είτε όταν μεταβάλλεται η στροφορμή τους. Η ενέργεια ενός ατόμου, από την άλλη μεριά, μεταβάλλεται όταν μεταβληθεί ένας από τους τέσσερις κβαντικούς αριθμούς που χαρακτηρίζουν την ενεργειακή κατάσταση ενός ηλεκτρονίου. Η μεταβολή αυτή της ενέργειας κατά ΔE μπορεί να γίνει είτε όταν το άτομο απορροφά ($\Delta E > 0$) είτε όταν εκπέμπει $\Delta E < 0$ ένα φωτόνιο συχνότητας ν , η οποία δίνεται από τη σχέση $|\Delta E| = h\nu$, όπου h η

σταθερά του Planck.

Όταν από μια δέσμη H/M ακτινονολίας, που αποτελείται από συνεχή κατανομή συχνοτήτων, απορροφώνται φωτόνια συχνότητας ν_0 , τότε στο παρατηρούμενο φάσμα της δημιουργείται μία γραμμή απορρόφησης. Όταν προστίθενται φωτόνια συχνότητας ν_0 , τότε στο φάσμα της επιπροστίθεται μία γραμμή εκπομπής. Το αν η φασματική γραμμή που δημιουργείται σε κάθε περίπτωση όταν είναι γραμμή εκπομπής ή απορρόφησης εξαρτάται από τη θερμοδυναμική κατάσταση της ύλης, δηλαδή των ίδιων των ατόμων.

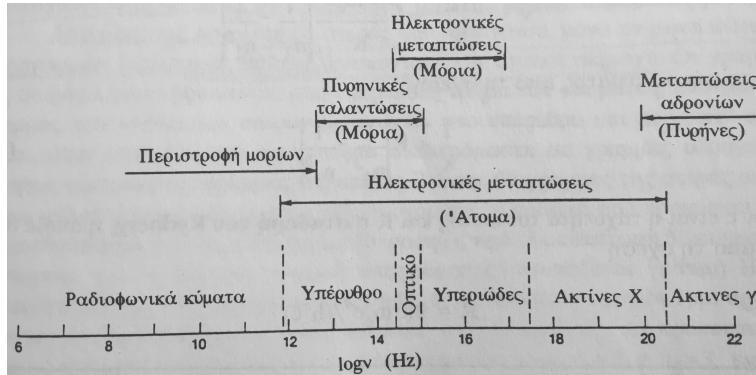


Figure 2.4: Ενεργειακές μεταπτώσεις στις οποίες οφείλονται η δημιουργία φασματικών γραμμών.

Φασματικές σειρές του Υδρογόνου

Για λόγους απλότητας, όταν θεωρήσουμε ότι η μοναδική αυτία αλλαγής της ενεργειακής κατάστασης ενός ατόμου είναι η μετάπτωση ενός ηλεκτρονίου από μία στοιβάδα σε μία άλλη, δηλαδή η αλλαγή του κύριου κβαντικού αριθμού, ($n = 1, 2, 3, \dots$). Με άλλα λόγια, δεν θα μιλήσουμε καθόλου για ενεργειακές μεταπτώσεις μορίων ή ενεργειακές μεταπτώσεις υπέρλεπτης υφής (μεταπτώσεις που προκαλούνται λόγω της αλληλεπίδρασης του πυρήνα με το ηλεκτρονιακό νέφος, π.χ. γραμμή εκπομπής 21-cm του Υδρογόνου).

Το Υδρογόνο είναι με διαφορά το στοιχείο με τη μεγαλύτερη αφθονία του στο σύμπαν όσο και στους αστέρες. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι είναι και το πιο εύκολα μελετήσιμο λόγω της απλής δομής του, τα αποτελέσματα αυτά είναι εξαιρετικά χρήσιμα.

Η ενέργεια του μοναδικού ηλεκτρονίου του ατόμου του Υδρογόνου δίνεται από τη σχέση

$$E = -\frac{1}{n^2} \frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^2} \quad (2.7)$$

όπου m_e , e και n είναι η μάζα ηρεμίας, το φορτίο και ο κύριος κβαντικός αριθμός του ηλεκτρονίου αντίστοιχα. Αν το ηλεκτρόνιο μεταβεί από μία στάθμη με κύριο κβαντικό αριθμό n_i σε μία άλλη με κύριο κβαντικό αριθμό n_f , τότε η ενέργεια του μεταβάλλεται κατά

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (2.8)$$

Όταν $n_i < n_f$ τότε $\Delta E > 0$, οπότε έχουμε απορρόφηση φωτονίου από το άτομο το οποίο μεταβαίνει από τη στάθμη χαμηλότερης ενέργειας (n_i) στη στάθμη υψηλότερης ενέργειας (n_f). Στην αντίθετη περίπτωση όπου $n_i > n_f$, έχουμε εκπομπή φωτονίου. Και στις δύο περιπτώσεις, η συχνότητα του φωτονίου δίνεται από τη σχέση

$$\nu = \frac{|\Delta E|}{h} = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^3} \left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right| \quad (2.9)$$

και το μήκος κύματος από τη σχέση του Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right| \quad (2.10)$$

όπου Z είναι ο ατομικός αριθμός του ατόμου και R η σταθερά του Rydberg η οποία δίνεται από τη σχέση

$$R = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^3 c}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.10) για το άτομο του Υδρογόνου ($Z = 1$) τότε προκύπτουν οι εξής σειρές (δες και σχήμα 2.5):

- Για $n_f = 1$ και $n_i = 2, 3, \dots$ τότε έχουμε τη σειρά **εκπομπής Lyman**. Στην περίπτωση που $n_i = 1$ και $n_f = 2, 3, \dots$ τότε έχουμε τη σειρά **απορρόφησης Lyman**.
- Για $n_f = 2$ και $n_i = 3, 4, \dots$ τότε έχουμε τη σειρά εκπομπής **Balmer**. Στην περίπτωση που $n_i = 2$ και $n_f = 3, 4, \dots$ τότε έχουμε τη σειρά **απορρόφησης Balmer**. Αυτή η σειρά είναι και η πιο σημαντική στην Οπτική Αστρονομία καθώς τα μήκη κύματος αυτής της σειράς βρίσκονται στην οπτική περιοχή. Η γραμμή που προκύπτει από την μετάπτωση $n_i = 3 \rightarrow n_f = 2$ ονομάζεται γραμμή εκπομπής H_α . Αντίστοιχα, η αντίστροφη μετάβαση $n_i = 2 \rightarrow n_f = 3$ ονομάζεται γραμμή απορρόφησης H_α . Με την ίδια λογική μπορούμε να ορίσουμε τη γραμμή H_β που αντιστοιχεί στην μετάβαση $n_i = 4 \rightarrow n_f = 2$ (ή το αντίστροφο), την γραμμή H_γ για την μετάβαση $n_i = 5 \rightarrow n_f = 2$ κτλ. Το μήκος κύματος της σειράς Balmer ξεκινάει από $\lambda(H_\alpha) = 6563\text{\AA}$ και μειώνεται όσο αυξάνει η τάξη της γραμμής τείνοντας σε μια οριακή τιμή $\lambda(H_\infty) = 3546\text{\AA}$. Στην περιοχή του οριακού αυτού μήκους κύματος οι γραμμές απορρόφησης είναι τόσο κοντά η μία με την άλλη, ώστε αλληλοεπικαλύπτονται με αποτέλεσμα το υπόβαθρο στην περιοχή αυτή να εμφανίζει μία ασυνέχεια, η οποία ονομάζεται **ασυνέχεια Balmer** και το ύψος της εξαρτάται από τη θερμοκρασία του αστέρα προσφέροντας έτσι ένα ακόμα παρατηρησιακό εργαλείο για τη μέτρησή της.
- Για $n_f = 3$ και $n_i = 4, 5, \dots$ τότε έχουμε τη σειρά **εκπομπής Paschen** (και αντίστροφα για την γραμμή απορρόφησης).
- Για $n_f = 4$ και $n_i = 5, 6, \dots$ τότε έχουμε τη σειρά **εκπομπής Brackett** (και αντίστροφα για την γραμμή απορρόφησης).
- Για $n_f = 5$ και $n_i = 6, 7, \dots$ τότε έχουμε τη σειρά **εκπομπής Pfund** (και αντίστροφα για την γραμμή απορρόφησης).
- Για $n_f = 6$ και $n_i = 7, 8, \dots$ τότε οι σειρές που προκύπτουν δεν έχουν κάποια συγκεκριμένη ονομασία.

2.2.3

Φαινόμενο Zeeman

Όταν τα άτομα στα οποία οφείλεται η δημιουργία των φασματικών γραμμών βρίσκονται σε μαγνητικό πεδίο, τότε οι ενεργειακές τους στάθμες μεταβάλλονται, έτσι ώστε κάθε φασματική γραμμή διασπάται σε δύο, ή περισσότερες, πολωμένες συνιστώσες. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται “φαινόμενο Zeeman” (το ηλεκτρικό ανάλογο αυτού του φαινομένου είναι το φαινόμενο Stark όπου οι φασματικές γραμμές διασπόνται υπό την παρουσία ηλεκτρικού πεδίου) και επειδή η απόσταση των διάφορων συνιστωσών εξαρτάται από

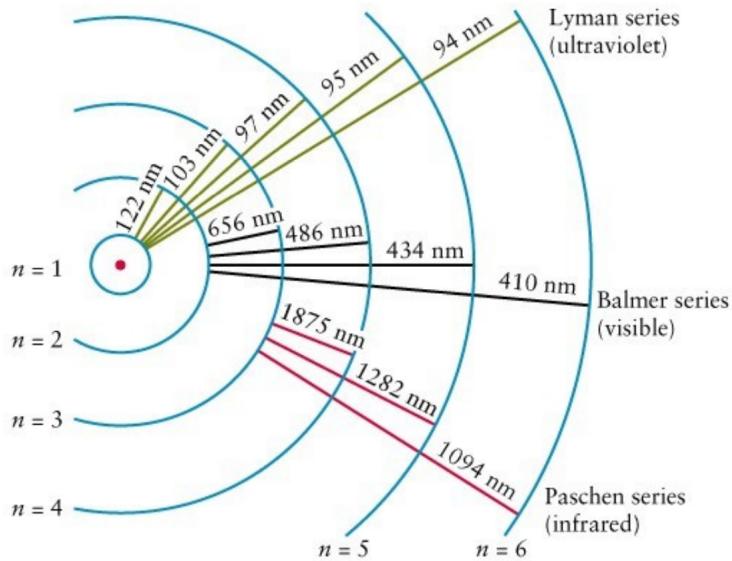


Figure 2.5: Σειρές Lyman, Balmer και Paschen για το άτομο του Ήδρογόνου. Οι σειρές Brackett και Pfund, καθώς και άλλες ανώτερες σειρές, δεν παρουσιάζονται στο συγκεκριμένο διάγραμμα.

την ένταση του μαγνητικού πεδίου, το εκμεταλλευόμαστε για την μέτρηση αστρικών, μεσοαστρικών και γαλαξιακών μαγνητικών πεδίων.

Στην απλούστερη περίπτωση (το ομαλό φαινόμενο Zeeman) μία φασματική γραμμή συχνότητας ν_0 διασπάται σε τρεις συνιστώσες με συχνότητες $\nu_0 - \Delta\nu$, ν_0 , και $\nu_0 + \Delta\nu$. Αν η ένταση του μαγνητικού πεδίου, B , μετριέται σε Gauss, τότε η διαφορά συχνότητας $\Delta\lambda$, δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\nu = \frac{eB}{4\pi mc} = 1.4 \times 10^6 B \text{ Hz} \quad (2.11)$$

Οι συσκευές μέτρησης των μαγνητικών πεδίων που βασίζονται σε παρατηρήσεις Η/Μ ακτινοβολίας ονομάζονται μαγνητογράφοι.

2.3 Φασματική Ταξινόμηση

Όπως είδαμε, Οι παράγοντες που καθορίζουν το φάσμα ενός αστέρα είναι η επιφανειακή θερμοκρασία (T_{eff}), η ταχύτητα του αστέρα (u), η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής (ω), η ένταση του μαγνητικού πεδίου (B), και η πίεση στην επιφάνεια του αστέρα. Τα αστρικά αυτά φάσματα κυριαρχούνται από γραμμές απορρόφησης (ορισμένα όστρα εμφανίζουν και αδύναμες γραμμές εκπομπής) με τις συνηθέστερες γραμμές απορρόφησης να είναι αυτές της σειράς Balmer του Ήδρογόνου. Επειδή η ένταση των γραμμών απορρόφησης εξαρτάται άμεσα από την ενεργό θερμοκρασία του αστέρα, μπορούμε να ταξινομήσουμε τα αστέρια με βάση την ένταση των γραμμών απορρόφησης του Ήδρογόνου και να καθορίσουμε με αυτό τον τρόπο την ενεργό θερμοκρασία τους.

Ταξινόμηση κατά Harvard

Αρχικά οι αστρονόμοι ταξινόμησαν τα αστρικά φάσματα αλφαριθμητικά σε φασματικούς τύπους (spectral types, Sp) με πρώτο κριτήριο την ένταση της γραμμής H_{α} της σειράς Balmer. Έτσι τα αστέρια τύπου A είχαν την εντονότερη γραμμή H_{α} , οι τύπου B αστέρες είχαν λιγότερο έντονη γραμμή H_{α} κ.ο.κ. Για τους αστέρες που είχαν τόσο ασθενή γραμμή H_{α} , ώστε να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο ταξινόμησης, οι αστρονόμοι εισήγαγαν ως συμπληρωματικά κριτήρια την παρουσία ή την απουσία και άλλων φασματικών γραμμών (π.χ. ουδέτερα άτομα, ιόντα, μοριακές ταινίες).

Με την ανάλυση πολλών φασμάτων, διαπιστώθηκε ότι οι γραμμές απορρόφησης -εκτός του Υδρογόνου- δεν έδειχναν να μεταβάλλονται ομαλά από τον έναν φασματικό τύπο στον επόμενο. Αντίθετα, έδειχναν να εμφανίζονται και να εξαφανίζονται απότομα. Έτσι, οδηγήθηκαν στην αναδιάταξη της -αρχικά αλφαριθμητικής- ακολουθίας των φασματικών τύπων σε μία νέα ακολουθία όπου το χαρακτηριστικό της ήταν η συνεχής και μονότονη μεταβολή της ενεργού θερμοκρασίας. Η φασματική ταξινόμηση που προέκυψε ονομάστηκε ταξινόμηση κατά Harvard (σχήμα 2.6) επειδή προτάθηκε από ερευνητές του Πανεπιστημίου του Harvard.

Κάθε φασματικός τύπος της συγκεκριμένης ταξινόμησης διαιρείται σε δέκα υποκατηγορίες που χαρακτηρίζονται από τους αριθμούς 0, 1, 2, ..., 9. Ενα αστέρι φασματικού τύπου F1 είναι πιο θερμό από ένα αστέρι F3 αλλά πιο ψυχρό από ένα αστέρι A9. Έτσι, οι θερμότεροι αστέρες που έχουν παρατηρηθεί μέχρι σήμερα είναι αστέρες φασματικού τύπου O5 $T_{eff} = 50000\text{ K}$, ενώ οι ψυχρότεροι αστέρες (ερυθροί νάνοι) είναι φασματικού τύπου M9 με $T_{eff} = 2900\text{ K}$. Ένας γενικός μνημονικός κανόνας για την συγκεκριμένη ταξινόμηση είναι

Oh, Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me



Figure 2.6: Φασματική ταξινόμηση κατά Harvard βάσει την ενεργό θερμοκρασία των άστρων. Κάθε τύπος αποτελείται από 10 υποκατηγορίες από το 0 εώς το 9. Οι τύποι P και Q δεν είναι απαραίτητο να ακολουθούν την μονότονη αύξηση της επιφανειακής θερμοκρασίας βάσει της οποίας ταξινομούνται τα αστέρια στους υπόλοιπους τύπους.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.7, η ένταση των γραμμών Balmer ξεκινάει σχεδόν από το μηδεν ($Sp = O5$), φτάνει σε κάποιο μέγιστο ($Sp = A$) και καταλήγει πάλι κοντά στο μηδέν ($Sp = M$). Αυτό συμβαίνει γιατί σε αστέρια με πολύ υψηλές θερμοκρασίες ($> 10000\text{ K}$) το άτομο του Υδρογόνου έχει χάσει το μοναδικό του ηλεκτρόνιο και άρα δεν μπορεί να δώσει μετάπτωση. Τα φάσματα τέτοιων θερμών αστέρων θα περιέχουν ιόντα από σχετικά απλά άτομα που χρειάζονται πολύ ενέργεια για να διώξουν τα εξωτερικά τους ηλεκτρόνια σε σύγκριση με πιο βαριά άτομα που τα εξωτερικά τους ηλεκτρόνια είναι πιο “χαλαρά” δεμένα με το δυναμικό του πυρήνα. Στην αντίθετη περίπτωση που το άστρο είναι πολύ ψυχρό, το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη βασική του στοιβάδα οπότε πάλι δεν μπορεί να δώσει την μετάπτωση που απαιτείται για τις γραμμές Balmer. Η χαμηλή θερμοκρασία εξηγεί και την ύπαρξη μοριακών ταινιών στα φάσματα αυτών των αστέρων.

Ερμηνεία της κατάταξης κατά Harvard

Η φασματική ακολουθία O, B, \dots, M είναι στην πραγματικότητα μία μονότονη και φθίνουσα συνάρτηση της θερμοκρασίας. Κανένας η θερμοκρασία ελλατώνεται βαθμιαία από τους αστέρες τύπου O προς τους αστέρες τύπου M, η αριθμητική πυκνότητα των ιονισμένων ατόμων ελλατώνεται, ενώ αυξάνεται η αριθμητική πυκνότητα των ουδέτερων ατόμων. Έτσι, οι γραμμές των ιονισμένων ατόμων που κυριαρχούν στους αστέρες τύπου O, παραχωρούν τη θέση τους στις γραμμές των ουδέτερων ατόμων, και τελικά στις μοριακές ταινίες. Η ερμηνεία αυτή βασίζεται στον νόμο του Saha.

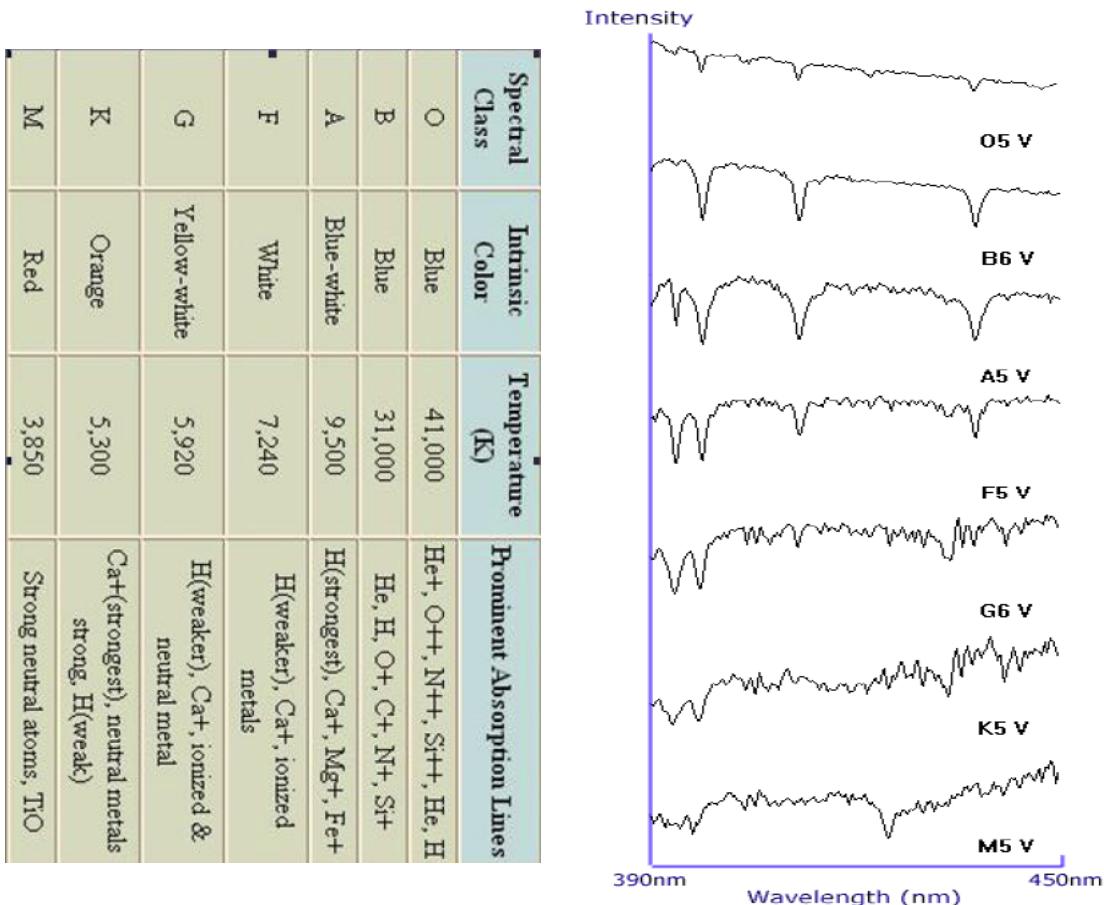


Figure 2.7: Αριστερά: Πίνακας με στοιχεία για κάθε φασματικό τύπο. Δεξιά: Σύγκριση φασμάτων αστέρων της κύριας ακολουθίας.

Οι έξι συμπληρωματικοί φασματικοί τύποι (κόκκινα γράμματα στο σχήμα 2.6) περιγρέφουν μη-συνημισμένους αστέρες. Ο τύπος W χαρακτηρίζει αστέρες τύπου **Wolf-Rayet** οι οποίοι είναι όμοιοι με αυτούς του τύπου O, αλλά με ευρείες γραμμές εκπομπής, οι οποίες οφείλονται σε ανώμαλα εκτεταμένη ατμόσφαιρα. Ο τύπος P χαρακτηρίζει πλανητικά νεφελώματα, ένα από τα τελικά στάδια της εξέλιξης ενός αστέρα μικρής μάζας, τα οποία αποτελούνται από εξαιρετικά αφριό αέριο και σκόνη. Ο τύπος Q ορίστηκε για την περιγραφή των φασμάτων **καινοφανών αστέρων** (novae), αστέρες που εμφανίζουν ξαφνική αύξηση της φωτεινότητάς τους κατά πολλά μεγένθη λόγω εκρηκτικής ανάφλεξης πυρηνικού καυσίμου. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε σε διπλό σύστημα λόγω μεταφοράς μάζας από τον ένα αστέρα στον άλλον (δες Κεφάλαιο 6), είτε και σε απλούς αστέρες όταν διάφοροι μηχανισμοί πρόσμιξης μεταφέρουν φρέσκο υλικό από ανώτερα στρώματα, στα στρώματα που γίνεται καύση βαρύτερων υλικών. Πάντως ο φασματικός τύπος Q χρησιμοποιείται σπάνια σήμερα. Τέλος, οι αστέρες φασματικού τύπου R, N και S έχουν ανώμαλη χημική σύσταση, με τα φάσματα των αστέρων R και N να περιέχουν ασυνήθιστα υψηλή περιεκτικότητα σε άνθρακα

(μοριακές ταινίες της ελεύθερης ρίζας CH και CN αντίστοιχα) και να ονομάζονται **αστέρες άνυδρακα**. Από την άλλη, τα αστέρια φασματικού τύπου S, έχουν έντονες μοριακές ταινίες των οξειδίων του τιτανίου, ζιρκονίου και άλλων σπάνιων γαιών. Αυτη η ανώμαλη χημική σύσταση αυτών των αστέρων μάλλον οφείλεται σε κάποιον μιχανισμό ανάμιξης της επιφανειακής ύλης με ύλη που προέρχεται από το εσωτερικό του αστέρα μέσω ρευμάτων μεταφοράς. Ας σημειωθεί εδώ ότι οι έξι αυτοί φασματικοί τύποι που αναλύσαμε δεν αποτελούν γνήσια επέκταση της αρχικής φασματικής ταξινόμησης, καθώς δεν παρουσιάζουν αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των φασματικών τύπων και των ενεργών θερμοκρασιών. Τα αστέρια που ανήκουν σε αυτές ή άλλες φασματικές κατηγορίες που δεν εμφανίζονται εδώ (π.χ. L και T κατηγορίας καφέ νάνων) αποτελούν πολύ μικρό ποσοτό της τάξης < 1%.

Παρόλα αυτά, υπάρχουν αστέρια που φυσικά η ενεργός τους θερμοκρασία εμπίπτει στα ώρια $3000 - 50000 K$ αλλά το φάσμα τους δεν ταιριάζει με κανέναν από τους παραπάνω φασματικούς τύπους. Γι' αυτό γενικά η χρήση της θερμοκρασίας ή του δείκτη χρώματος (που είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας) προτιμάται έναντι του φασματικού τύπου.

2.3.2

Διάγραμμα Hertzsprung-Russell

Αν τοποθετήσουμε τους αστέρες με γνωστά φάσματα σε ένα δισδιάστατο διάγραμμα που έχει τετμημένη τον φασματικό τύπο (Sp) και τεταγμένη το απόλυτο μέγεθος του αστέρα, τότε παρατηρούμε ότι οι αστέρες δεν είναι τυχαία διασκορπισμένοι στο επίπεδο, αλλά συγκεντρώνονται σε συγκεκριμένες δομές. Το διάγραμμα αυτό ονομάζεται **διάγραμμα Hertzsprung-Russel** ή για συντομία διάγραμμα H-R. Η μορφή του διαγράμματος H-R μας δείχνει ότι υπάρχουν φυσικοί νόμοι που συνδέουν τη λαμπρότητα του αστέρα (απόλυτο μέγεθος) με την ενεργό θερμοκρασία του (φασματικό τύπο) και ότι όλα τα βασικά παρατηρησιακά μεγέθη ενός αστέρα δεν έχουν τυχαίες τιμές, αλλά συνδέονται με σχέσεις που μπορούν να εξηγηθούν και θεωρητικά. Φυσικά μία σχέση της μορφής

$$L = f(T_{eff})$$

που αποκαλύπτει το διάγραμμα H-R είναι προσεγγιστική καθώς οι αστέρες χαρακτηρίζονται και από άλλες ποσότητες, όπως η χημική σύσταση, που σε πρώτη φάση αγνοούνται. Γι' αυτό άλλωστε και οι αστέρες δεν βρίσκονται στο διάγραμμα H-R κατά μήκος μονοδιάστατων καμπυλών, αλλά παρουσιάζουν μία κάποια διασπορά.

Από το σχήμα 2.8 παρατηρούμε ότι τα περισσότερα αστέρια είναι συγκεντρωμένα σε μία ζώνη, που διατρέχει το διάγραμμα διαγώνια και η οποία ονομάζεται **κύρια ακολουθία**. Πάνω από την κύρια ακολουθία υπάρχει μία άλλη ζώνη αστέρων, που ονομάζεται **κλάδος γιγάντων**. Τέλος, κάτω από τον κλάδο της κύριας ακολουθίας υπάρχει μία συγκέντρωση αστέρων, που βρίσκεται αριστερά του διαγράμματος και σε αυτή ανήκουν οι **λευκοί νάνοι**. Αν προεκτείνουμε την γραμμή του κλάδου των γιγάντων προς τα αριστερά, παρατηρούμε ότι τέμνει την κύρια ακολουθία σ' ένα σημείο που αντιστοιχεί περίπου στον φασματικό τύπο A0 και απόλυτο μέγεθος $M = +1$. Οι αστέρες που βρίσκονται αριστερά από το φασματικό τύπο A0 ονομάζονται αστέρες **προγενέστερου φασματικού τύπου** (π.χ. κυανοί γίγαντες), ενώ οι αστέρες που βρίσκονται δεξιά από τον φασματικό τύπο A0 ονομάζονται αστέρες **μεταγενέστερου φασματικού τύπου** (π.χ. ερυθροί νάνοι, νάνοι της κύριας ακολουθίας κτλ.). Οι αστέρες μεταγενέστερου φασματικού τύπου που βρίσκονται πάνω από την κύρια ακολουθία ονομάζονται **ερυθροί γίγαντες**. Η διάκριση των αστέρων σε αστέρες προγενέστερου και μεταγενέστερου φασματικού τύπου δεν έχει σήμερα καμία άλλη σημασία παρά μόνο την περιγραφή της θέσης τους στο διάγραμμα H-R. Αντίθετα, η διάκριση των αστέρων σε νάνους και γίγαντες έχει φυσική σημασία.

Αστρικά σμήνη

Μπορούμε να διαχρίνουμε δύο ειδών αστρικών σμηνών. Τα **σφαιρωτά σμήνη** είναι πυκνές συγκεντρώσεις μεγάλου αριθμού αστέρων ($10^4 - 10^6$) με σφαιρικό σχήμα, που κινούνται σε ελειπτικές τροχιές

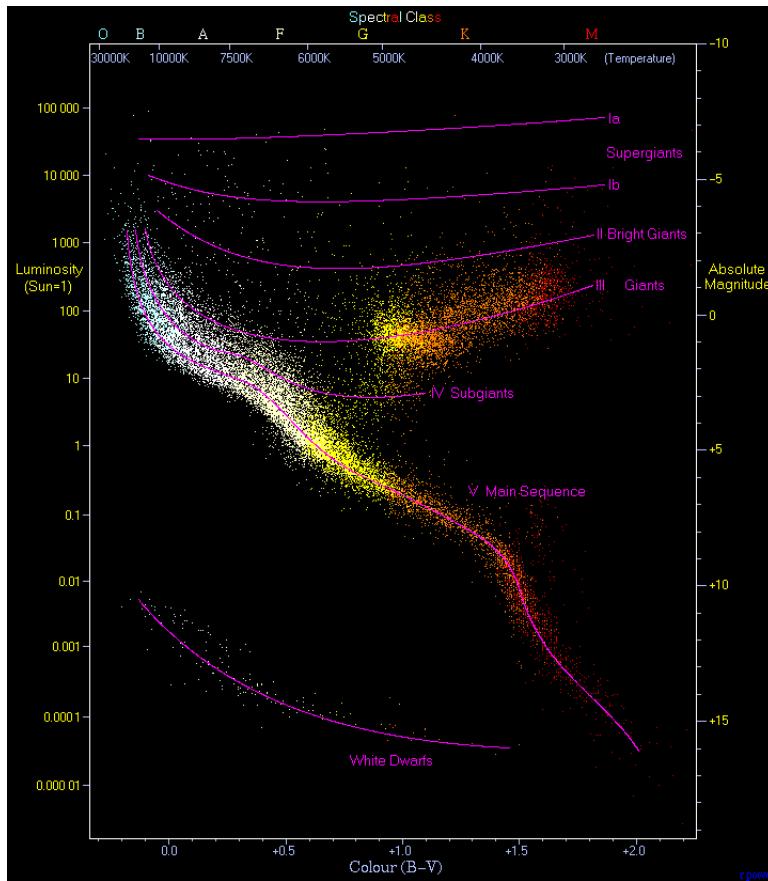


Figure 2.8: Διάγραμμα Hertzprung-Russel.

στην άλω γύρω από το κέντρου του Γαλαξία. Το χαρακτηριστικό των σφαιρωτών σμηνών είναι ότι επειδή σχηματίστηκαν από την βαρυτική κατάρρευση του ίδιου μοριακού νέφους, αποτελούνται σε πρώτη προσέγγιση από άστρα της ίδιας χημικής σύστασης (ίδια "μεταλλικότητα"), της ίδιας ηλικίας, και βρίσκονται στην ίδια απόσταση από τη Γη. Η άλλη κατηγορία αστρικών σμηνών είναι τα **ανοικτά σμήνη** τα οποία είναι συγκεντρώσεις το πολύ μερικών χιλιάδων άστρων που σχηματίστηκαν και αυτά από το ίδιο μοριακό νέφος, αλλά τα αστέρια είναι πληθυσμού Ι, και όρα πολύ νεώτερα συγχριτικά με τα αστέρια στα σφαιρωτά σμήνη που είναι πληθυσμού ΙΙ. Τα ανοικτά σμήνη βρίσκονται χυρίως στο Γαλαξιακό επίπεδο και όχι στην άλω.

Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να πάρουμε το φάσμα για κάθε ένα από τα αστέρια-μέλη ενός σμήνους. Γι' αυτό το λόγο, όταν θέλουμε να κάνουμε το διάγραμμα H-R στην περίπτωση σμήνους αστέρων, εκφράζουμε την τετμημένη σε όρους δείκτη χρώματος (που είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και μπορεί να υπολογιστεί για χιλιάδες αστέρια που βρίσκονται στο ίδιο οπτικό πεδίο) αντί για φασματικό τύπο, και την τεταγμένη σε μέγεθος αντί για λαμπρότητα. Έτσι προκύπτει το λεγόμενο **διάγραμμα χρώματος-μεγέθους** (color-magnitude diagram) που φαίνεται στο σχήμα 2.9.

Αν η συνάρτηση αρχικής μάζας (initial mass function) ενός σμήνους είναι γνωστή, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρητικά μια ισόχρονη καμπύλη για οποιαδήποτε ηλικία θέλουμε, με το να προσομειώσουμε την εξέλιξη του κάθε αστέρα του αστρικού πληθυσμού και κάνοντας το διάγραμμα H-R για αυτά τα αστέρια. Συγχρίνοντας τις θεωρητικές αυτές καμπύλες που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες ηλικίες με το παρατηρησιακό διάγραμμα χρώματος-μεγέθους, μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση για την ηλικία του σμήνους.

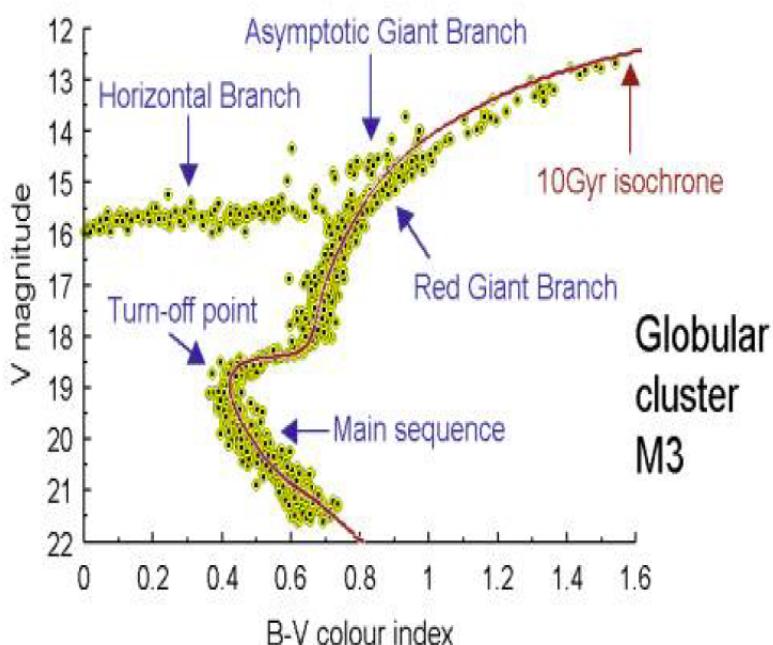


Figure 2.9: Διάγραμμα Χρώματος-Μεγέθους για το σφαιρωτό σμηνος M3. Στο διάγραμμα φαίνεται μια ισόχρονη καμπύλη των 10Gyr.

2.3.3

Ταξινόμηση κατά Yerkes

Αστέρια ίδιου φασματικού τύπου (ίδιας ενεργού θερμοκρασίας) εμφανίζουν κατανομή στις λαμπρότητές τους, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα H-R (σχήμα 2.8). Για παράδειγμα, ο εγγύτατος του Κενταύρου έχει την ίδια επιφανειακή θερμόκαρστα με αυτή του Betelgeuse, άρα ανήκουν στον ίδιο φασματικό τύπο, αλλά τελείως διαφορετικές λαμπρότητες με τον εγγύτατο να έχει 100 φορές μικρότερη λαμπρότητα από τον Ήλιο και τον Betelgeuse 100,000 φορές μεγαλύτερη λαμπρότητα.

Το 1930, οι Morgan & Keenan, πρότειναν ένα νέο σύστημα ταξινόμησης των αστέρων, το οποίο λειτουργεί συμπληρωματικά του συστήματος ταξινόμησης κατά Harvard. Το νέο σύστημα βασίζεται στην έννοια της *Κατηγορίας λαμπρότητας*. Σύμφωνα με αυτή την ταξινόμηση, αστέρια της **ίδιας ενεργού θερμοκρασίας** (ίδια φασματική τάξη), χωρίζονται σε έξι κατηγορίες λαμπρότητας, με βάση το **πλάτος** των γραμμών απορρόφησης (σχήμα 2.10).

Ερμηνεία της κατάταξης κατά Yerkes

Εφόσον μιλάμε για αστέρια ίδιου φασματικού τύπου, το εύρος της γραμμής απορρόφησης δεν οφείλεται σε διαφορές στην ενεργό θερμοκρασία (ούτε στην περιστροφή των αστέρων) αλλά στην πίεση στην επιφάνεια των αστέρων. Κάνοντας μερικές απλές παραδοχές, μπορεί να δειχτεί ότι η ατμοσφαιρική πίεση σε έναν γίγαντα αστέρα είναι μικρότερη από την πίεση σε έναν νάνο αστέρα. Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με τον νόμο του Saha που μας δίνει τον βαθμό ιονισμού ενός αερίου, μπορούμε να εξηγήσουμε τις φασματικές διαφορές ανάμεσα σε αστέρια του ίδιου φασματικού τύπου.

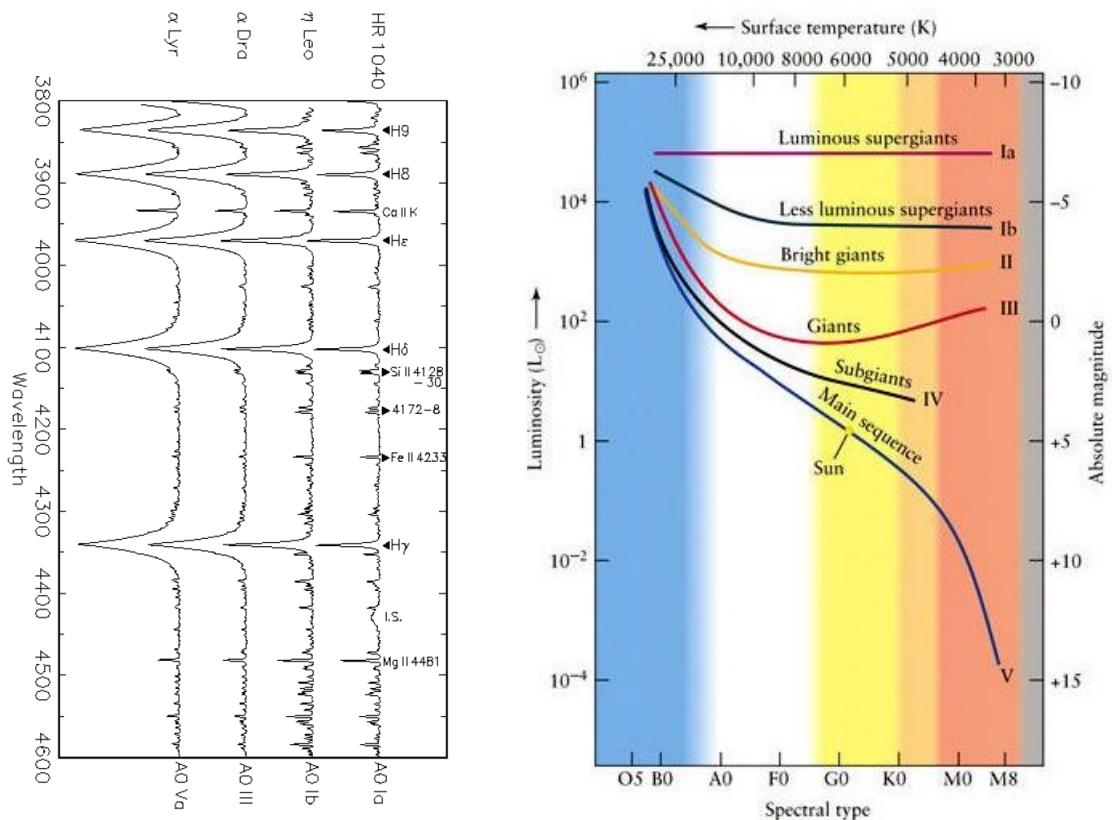


Figure 2.10: **Αριστερά:** Διαχύμανση του πλάτους των γραμμών απορρόφησης για τέσσερια αστέρια φασματικού τύπου A0 (HR 1040, η Leo, α Dra, α Lyr). **Δεξιά:** Φασματική ταξινόμηση κατά Yerkes, σε έξι κατηγορίες λαμπρότητας. Για μεγαλύτερη κατηγορία λαμπρότητας ($I, II, \dots VI$) το πλάτος της γραμμής απορρόφησης αυξάνεται, ενώ η ακτίνα και η λαμπρότητα μειώνονται. Ο Ήλιος ανήκει στην κατηγόρια G2V.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αστρικές ατμόσφαιρες

Contents

3.1 Πεδία ακτινοβολίας και ιδιότητες	29
3.1.1 Η στερεά γωνία	30
3.1.2 Η έννοια της έντασης ακτινοβολίας	33
3.1.3 Πυκνότητα ροής, μέση ένταση, πυκνότητα και πίεση ακτινοβολίας	36
3.1.4 Ισοτροπική ένταση και μέλαν σώμα	39
3.2 Απόσβεση και εκπομπή ακτινοβολίας	41
3.2.1 Εξίσωση μεταφοράς	41
3.2.2 Νόμος του Kirchhoff	48
3.3 Αδιαφάνεια και αστρικά φάσματα	48
3.3.1 Μηχανισμοί αδιαφάνειας	48
3.3.2 Η συνεχής συνιστώσα	49
3.4 Νόμοι Boltzmann & Saha	50
3.4.1 Νόμος του Boltzmann	50
3.4.2 Νόμος του Saha	51
3.5 Ο Ήλιος ως τυπικός αστέρας	52
3.5.1 Μακροσκοπικά χαρακτηριστικά	52
3.5.2 Η επιφάνεια του Ήλιου	54
3.5.3 Σύνοψη	55

3.1 Πεδία ακτινοβολίας και ιδιότητες

Στα προηγούμενα κεφάλαια μιλήσαμε για ένταση και ροή ακτινοβολίας χωρίς να έχουμε ορίσει αυστηρά τι σημαίνουν αυτά τα μεγέθη. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για τις ατμόσφαιρες των άστρων ξεκινώντας με το να δώσουμε επακριβείς ορισμούς συγκεκριμένων μεγεθών που χαρακτηρίζουν και περιγράφουν ένα πεδίο ακτινοβολίας. Όπως θα δούμε, το πιο βασικό μέγεθος είναι αυτό της έντασης της ακτινοβολίας και όλα τα υπόλοιπα προκύπτουν με φυσικό τρόπο από τον ορισμό της.

3.1.1

Η στερεά γωνία

Με λίγα λόγια: Στερεά γωνία είναι το κοινάτι της επιφάνειας που καλύπτει ένα αντικείμενο πάνω σε μία σφαίρα, όπως το βλέπει ένας παρατηρητής στο κέντρο της σφαίρας. Με άλλα λόγια, η στερεά γωνία δείχνει το οπτικό πεδίο που καταλαμβάνει το εν λόγω αντικείμενο από ένα συγκεκριμένο σημείο, είναι δηλαδή ένα μέτρο του πόσο μεγάλο φαίνεται το αντικείμενο στον παρατηρητή.

Πριν ορίσουμε το τι είναι η στερεά γωνία, ας θυμηθούμε πως ορίζουμε τις επίπεδες γωνίες (plane angles) στις δύο διαστάσεις. Η γωνία ορίζεται ως ο λόγος του μήκους τόξου (arc length) που φαίνεται από αυτή τη γωνία προς την ακτίνα του κύκλου (σχήμα 3.1).

$$\theta = \frac{l}{r} \quad (3.1)$$

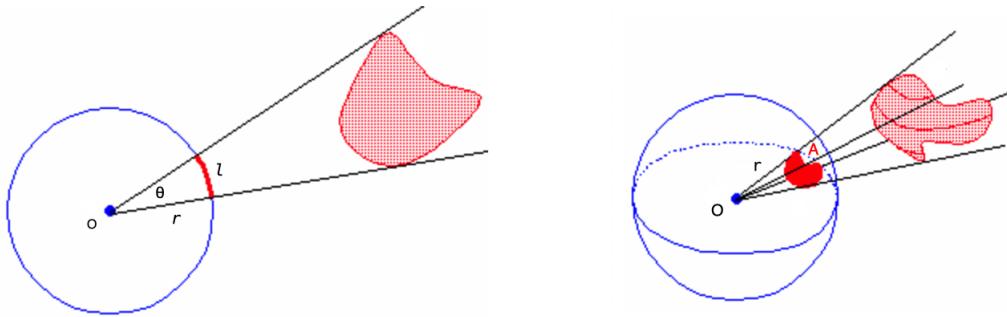


Figure 3.1: Ορισμός α) επίπεδης γωνίας και β) στερεάς γωνίας.

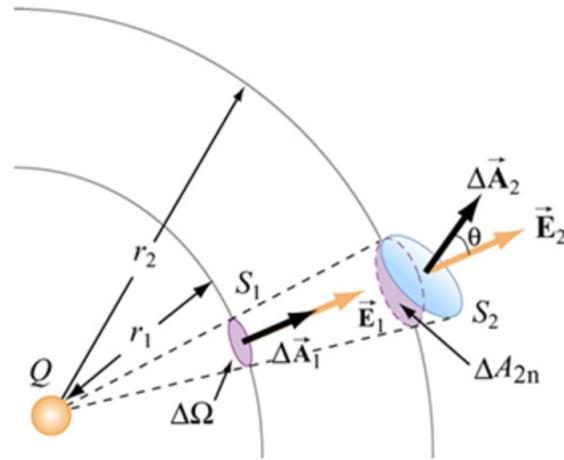
Για τον μοναδιαίο κύκλο ($r = 1$), ένας πλήρης κύκλος έχει 2π ακτίνια (rad). Κατα τα γνωστά, η επιφάνεια του κύκλου (ή πιο σωστά δίσκου) θα είναι $A = \pi r^2$ και η περιφέρειά του $C = 2\pi r$.

Κατα αντιστοιχία, η στερεά γωνία είναι η μεταφορά της επίπεδης γωνίας στον τρισδιάστατο χώρο, και όπως η επίπεδη γωνία είναι και αυτή αδιάστατο μέγεθος. Ορίζεται ως ο λόγος της επιφάνειας που προβάλλεται πάνω σε μία σφαίρα προς το τετράγωνο της ακτίνας της σφαίρας (σχήμα 3.1).

$$\Omega = \frac{\text{projected area}}{\text{distance}^2} = \frac{A}{r^2} \quad (3.2)$$

Η αδιάστατη μονάδα με την οποία μετράμε τις στερεές γωνίες, ονομάζεται στερακτίνιο ή steradian (sr). Υποθέτοντας για απλότητα ότι η επιφάνεια A είναι σφαίρα και γνωρίζοντας ότι η επιφάνεια σφαίρας δίνεται από τη σχέση $A = 4\pi r^2$, γίνεται αντίληπτό πως αν η επιφάνεια A καλύπτει όλη τη σφαίρα, τότε $\Omega = 4\pi$. Άρα μία σφαίρα έχει 4π sr.

Στο σχήμα 3.2 φαίνονται δύο διανυσματικές επιφάνειες $S_1 = S_1 \Delta A_1$ και $S_2 = S_2 \Delta A_2$, όπου ΔA_1 και ΔA_2 είναι τα διανύσματα κάθετα (normal) στις επιφάνειες S_1 και S_2 , ενώ απέχουν αποστάσεις r_1 και r_2 αντίστοιχα από κέντρο σφαίρας Q . Το διάνυσμα ΔA_1 είναι παράλληλο με το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα \hat{r} , όπου $\hat{r} = \frac{r}{r}$ και το οποίο έχει διεύθυνση τον άξονα του κώνου που σχηματίζει στερεά γωνία $\Delta\Omega$. Με άλλα λόγια, η επιφάνεια S_1 είναι κάθετη στο ακτινικό διάνυσμα \hat{r} .

Figure 3.2: Υπολογισμός στερεάς γωνίας $\Delta\Omega$ μέσω της διανυσματικής επιφάνειας S_2 .

Έτσι, η στερεά γωνία υπολογισμένη για την επιφάνεια S_1 θα είναι:

$$\Delta\Omega = \frac{S_1 \cdot \hat{r}}{r_1^2} = \frac{S_1 |\hat{r}| \cos(\Delta\mathbf{A}_1, \hat{r})}{r_1^2} = \frac{S_1}{r_1^2}$$

Το διάνυσμα $\Delta\mathbf{A}_2$ βρίσκεται υπό γωνία θ σε σχέση με το ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα \hat{r} . Γι' αυτό το λόγο, πρέπει να προβάλουμε την επιφάνεια $\Delta\mathbf{A}_2$ σε μια επιφάνεια $\Delta\mathbf{A}_{2n}$ η οποία θα έχει κατεύθυνση ίδια με αυτή του \hat{r} . Η προβολή θα είναι:

$$\Delta\mathbf{A}_{2n} = \text{proj}_{\hat{r}} S_2 = \frac{S_2 \cdot \hat{r}}{|\hat{r}|^2} \hat{r} = \frac{S_2 |\hat{r}| \cos(\Delta\mathbf{A}_2, \hat{r})}{|\hat{r}|^2} \hat{r} = S_2 \cos \theta \hat{r}$$

Άρα, η στερεά γωνία υπολογισμένη για την επιφάνεια S_2 θα είναι:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\mathbf{A}_{2n} \cdot \hat{r}}{r_2^2} = \frac{S_2 \cos \theta |\hat{r}| \cos(\hat{r}, \hat{r})}{r_2^2} = \frac{S_2 \cos \theta}{r_2^2}$$

Είναι χρήσιμο όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα στερεών γωνιών να τα μετατρέψουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες. Από το σχήμα 3.3 προκύπτει ότι η γωνία $d\theta$ βάσει του ορισμού της επίπεδης γωνίας (σχέση (3.1)) θα είναι $d\theta = \frac{s_\theta}{r}$ όπου s_θ είναι το μήκος του τόξου (μπλε γραμμή στο σχήμα) που βλεπει τη γωνία $d\theta$. Αντίστοιχα, για την αξιμούθια γωνία¹ $d\phi = \frac{s_\phi}{r \sin \theta}$. Συνεπώς η διαφορική επιφάνεια dA είναι:

$$dA = s_\theta \times s_\phi = r d\theta \times r \sin \theta d\phi = r^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

και άρα

$$d\omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.3)$$

¹Δες και Παράρτημα B αναφορικά με τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Η στερεά γωνία τότε είναι

$$\Omega = \iint_S d\omega = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta d\phi = (\phi_2 - \phi_1)(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (3.4)$$

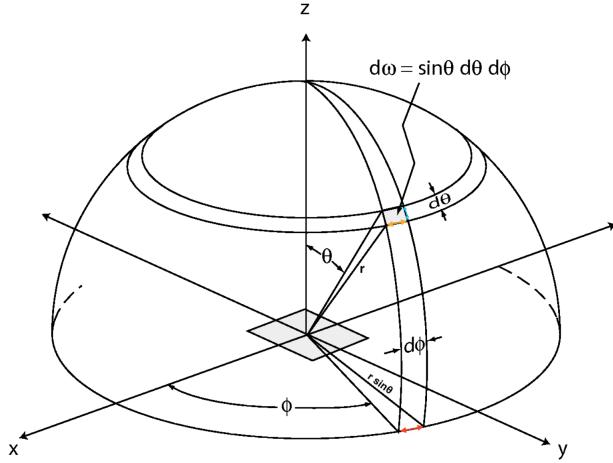


Figure 3.3: Διαφορική στερεά γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα: Έχοντας ως δεδομένα πως η μέση απόσταση Γης-Σελήνης και Γης-Ήλιου είναι $D_{EM} = 3.84 \times 10^5$ km και $D_{ES} = 1.496 \times 10^8$ km αντίστοιχα, και επιπρόσθετα $R_M = 1.74 \times 10^3$ km, $R_S = 6.96 \times 10^5$ km είναι η ακτίνα της Σελήνης και του Ήλιου αντίστοιχα, να βρείτε: α) Ποιά είναι η γωνιακή διάμετρος του Ήλιου και της Σελήνης, β) Ποιά είναι η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνονται ο Ήλιος και η Σελήνη από τη Γη, και γ) Ποιό από τα δύο αντικείμενα εμφανίζεται μεγαλύτερο;

Για το πρώτο ερώτημα, χρησιμοποιώντας της σχέση (1.10) και από το σχήμα 3.4 μπορούμε να γράψουμε:

$$\theta_{\max} = \arcsin \left(\frac{R}{D} \right)$$

από την οποία προκύπτει $2\theta_{\max}^M = 0.52^\circ$ για τη Σελήνη και $2\theta_{\max}^S = 0.53^\circ$.

Για το δεύτερο ερώτημα, η στερεά γωνία με άνοιγμα 2θ θα είναι βάσει της σχέσης (3.3):

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

από την οποία προκύπτει $\Omega_M = 6.5 \times 10^{-5}$ sr για τη Σελήνη και $\Omega_S = 6.8 \times 10^{-5}$ sr για τον Ήλιο.

Για το τρίτο ερώτημα, προκύπτει ότι ο Ήλιος καταλαμβάνει 5% μεγαλύτερη στερεά γωνία από τη Σελήνη. Το γεγονός ότι χρησιμοποίησαμε τις μέσες αποστάσεις Γης-Σελήνης και Ήλιου-Σελήνης για τους παραπάνω υπολογισμούς και ότι γενικά αυτές οι τιμές δεν είναι σταθερές, εξηγεί την ύπαρξη ολικών εκλείψεων Ήλιου.

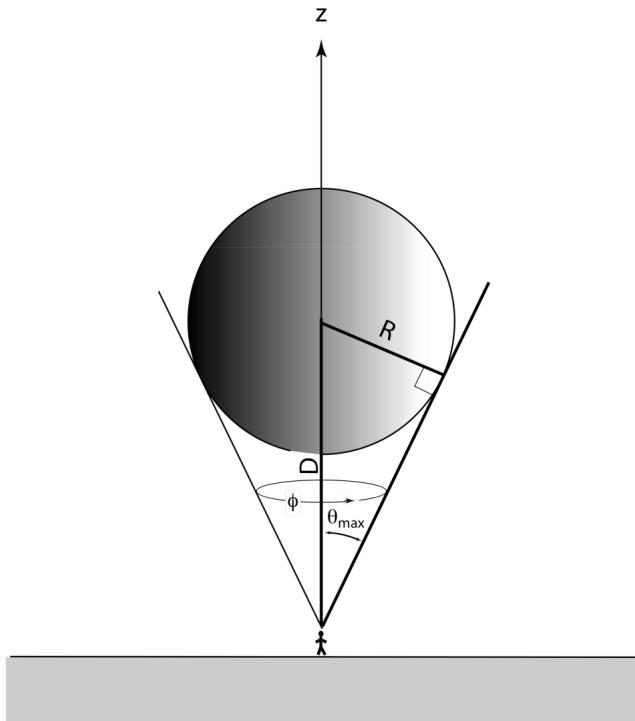


Figure 3.4: Γεωμετρικό πλαίσιο για τον υπολογισμό της στερεάς γωνίας υπό την οποία φαίνεται σφαίρα ακτίνας R της οποίας το κέντρο βρίσκεται σε απόσταση D από τον παρατηρητή.

3.1.2

Η έννοια της έντασης ακτινοβολίας

Όπως έχουμε πει, ο ρυθμός με τον οποίο τα αστέρια ακτινοβολούν ενέργεια ονομάζεται λαμπρότητα (luminosity) και μετριέται σε J/s (Watt) ή erg/s. Η λαμπρότητα είναι μία ενδογενής ιδιότητα του αστέρα.

Τι συμβαίνει όμως στο φως που ακτινοβολείται από τα αστέρια όσο αυτό κινείται προς το μέρος μας; Οι ακτίνες φωτός "ανοίγουν" με την απόσταση που σημαίνει ότι λιγότερο φως περνάει από έναν ανιχνευτή μιας συγκεκριμένης διατομής όσο μεγαλώνει η απόσταση. Με άλλα λόγια, ο αστέρας εμφανίζεται αμυδρότερος. Έτσι, ορίζουμε την ενέργεια που περνάει **ανεξαρτήτως διεύθυνσης** από μια επιφάνεια 1m^2 ανα δευτερόλεπτο ως ροή (flux, irradiance ή radiosity). Η ροή μετριέται σε W/m^2 ή $\text{ergs s}^{-1} \text{cm}^{-2}$.

Ορισμός ειδικής έντασης ακτινοβολίας Η ροή ως μέγεθος δεν μας δίνει πολλές πληροφορίες καθώς δεν μας λέει από ποιά διεύθυνση προέρχεται το φως. Γι' αυτό ορίζουμε ένα νέο μέγεθος, την ειδική ένταση ακτινοβολίας (specific intensity, spectral radiance ή spectral brightness) η οποία ορίζεται ως η ροή των φωτονίων συχνότητας $d\nu$ που διέρχονται **κάθετα** από σημείο, Ο, μιας επιφάνειας dA_{\perp} και που εμπεριέχονται σε κάποια στερεά γωνία $d\omega$ της οποίας η διεύθυνση είναι $\hat{\Omega}$. Από τον ορισμό της, η ειδική ένταση μετριέται σε $\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ή $\text{ergs s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\nu}(O, \hat{\Omega}) = \frac{dE}{dtd\nu d\omega dA_{\perp}} = \frac{dP}{d\nu d\omega dA_{\perp}} \quad (3.5)$$

Η ειδική ένταση της ακτινοβολίας χαρακτηρίζει σχεδόν πλήρως το πεδίο της ακτινοβολίας αφού η μόνο πληροφορία που δεν εμπεριέχεται είναι αυτή της πόλωσης του φωτός. Αν εξαιρέσουμε την πόλωση, η

ειδική ένταση μας δείχνει πόσα φωτόνια και με τι ενέργειες είναι παρόντα καθώς και σε ποιά συγκεκριμένη διεύθυνση κινούνται. Όλες οι άλλες ποσότητες (π.χ. η ροή μέσω κάποιας συγκεκριμένης επιφάνειας προσανατολισμένης προς κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση, η πίεση της ακτινοβολίας, η πυκνότητα ενέργειας κτλ) μπορούν να βρεθούν μέσω της έντασης (για λόγους συντομίας θα χρησιμοποιείται ο όρος "ένταση" για να εκφράσουμε την ειδική ένταση). Όταν αναφερόμαστε στην ένταση όλων των συχνοτήτων θα γίνεται χρήση του όρου "ολική ένταση").

Αν η επιφάνεια από την οποία διέρχονται τα φωτόνια βρίσκεται υπό γωνία, τότε η ροή υπολογίζεται βάσει της προβολής της επιφάνειας στο επίπεδο που βρίσκεται κάθετα στη διεύθυνση των ακτίνων ενώ ισχύει

$$dA_{\perp} = dA \cos \theta \leq dA$$

όπου θ είναι γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του κάθετος διανύσματος, $\hat{\eta}$, στην επιφάνεια dA και την κάθετη (στην πορεία των φωτονίων) επιφάνεια dA_{\perp} με κατεύθυνση αυτή του διανύσματος $\hat{\Omega}$ (νόμος συνημιτόνων Lambert, σχήμα 3.5). Άρα, η ειδική ένταση της ακτινοβολίας γράφεται γενικά:

$$I_{\nu}(O, \theta, \phi) = \frac{dE}{dt d\nu dwdA_{\perp}} = \frac{dP}{d\nu dw dA \cos \theta} \longrightarrow I_{\nu}(\theta) = I_{\nu}(0) \cos \theta \quad (3.6)$$

όπου πλέον η επιφάνεια dA είναι μία τυχαία επιφάνεια που σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη επιφάνεια κατά τη διεύθυνση της ακτινοβολίας, dA_{\perp} . Η διεύθυνση δίνεται από τις γωνίες θ (πολική) και ϕ (αζιμούθια).

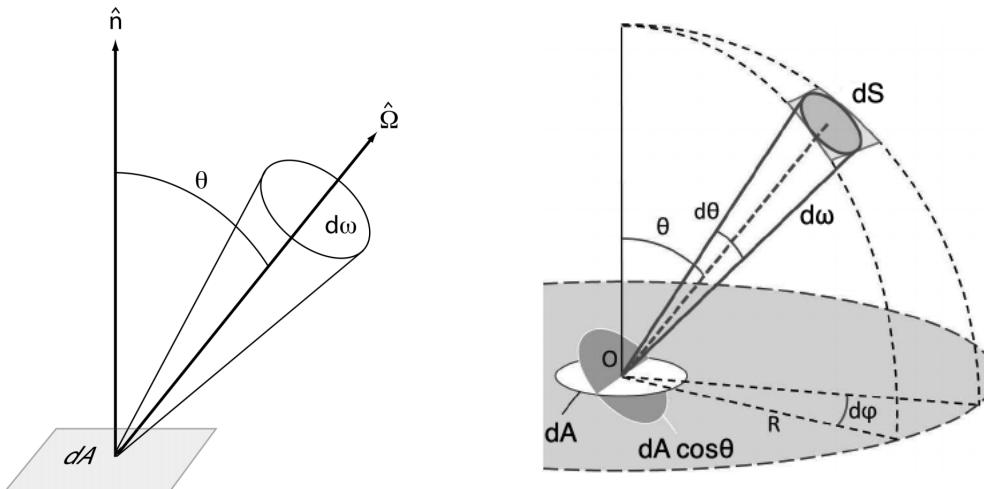


Figure 3.5: Ορισμός της ειδικής έντασης ακτινοβολίας. Η συνεισφορά της ροής φωτονίων υπό γωνία θ πρέπει να "ζυγιστεί" με το συνημίτονο της γωνίας καθώς ισχύει $\cos \theta = \hat{\eta} \cdot \hat{\Omega}$. Η προβαλλόμενη επίπεδη επιφάνεια dA_{\perp} είναι κάθετη στην διεύθυνση (θ_r, ϕ_r) , ενώ η επιφάνεια dS που "βλέπει" το σημείο Ο ορίζει τη στερεά γωνία $d\omega = dS/R^2$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας με κέντρο το σημείο Ο.

Το ότι μια τυχαία επιφάνεια dA καταλαμβάνει μεγαλύτερη έκταση από την κάθετη επιφάνεια στη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 3.6. Επειδή η ένταση της ακτινοβολίας δεν εξαρτάται από την απόσταση, το ίδιο ποσό ενέργειας μοιράζεται σε μεγαλύτερη επιφάνεια στην περίπτωση που αυτή δεν είναι κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης της δέσμης.

Ιδιότητες της ειδικής έντασης ακτινοβολίας Η ένταση της ακτινοβολίας παραμένει αναλλοιώτη (σταθερή) κατά τη διεύθυνση της δέσμης με την προϋπόθεση ότι δεν παρεμβάλλονται άλλες πηγές ή καταβόθρες μεταξύ της πηγής και του δέκτη. Αυτό αποδεικνύεται γεωμετρικά ως εξής: Έωρούμε δύο επιφάνειες dA και dS όπου η μία εκπέμπει φως ενώ ή άλλη λειτουργεί ως δέκτης (σχήμα 3.7).

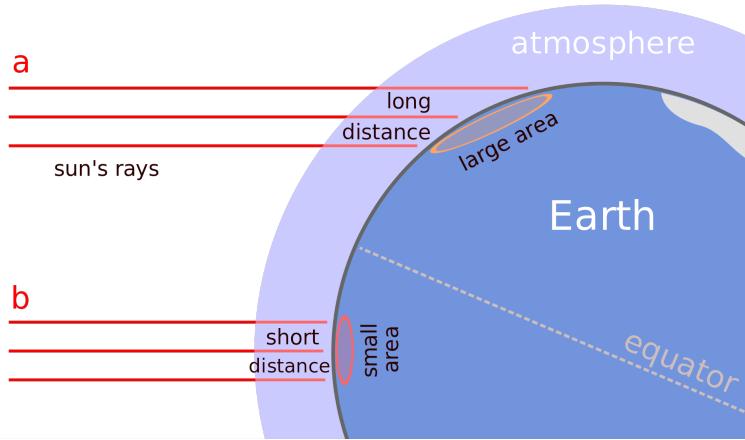


Figure 3.6: Γραφική απεικόνιση της εξάρτησης της έντασης ακτινοβολίας από τη γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια με τη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας.

Έστω ότι $d\omega$ είναι η στερεά γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια του δέκτη dS , όπως φαίνεται από το κέντρο της επιφάνειας dA (πηγή).

Αντίστοιχα, έστω ότι $d\omega'$ είναι η στερεά γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια της πηγής dA , όπως φαίνεται από το κέντρο της επιφάνειας dS (δέκτης). Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της στερεάς γωνίας (σχέση (3.2)) θα έχουμε:

$$d\omega = \frac{dS \cos \phi}{r^2}$$

$$d\omega' = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

Η ενέργεια που διέρχεται μέσα από την επιφάνεια dA με στερεά γωνία $d\omega$ σύμφωνα με τη σχέση (3.6) είναι:

$$dE = I_\nu dt d\nu d\omega dA \cos \theta = I_\nu dt d\nu \left(\frac{dS \cos \phi}{r^2} \right) dA \cos \theta$$

Αντίστοιχα, η ενέργεια που διέρχεται μέσα από την επιφάνεια του δέκτη dS με στερεά γωνία $d\omega'$ είναι:

$$dE' = I'_\nu dt d\nu d\omega' dS \cos \phi = I'_\nu dt d\nu \left(\frac{dA \cos \theta}{r^2} \right) dS \cos \phi$$

Εφόσον η ενέργεια που εκπέμπεται από την πηγή δεν απορροφήθηκε από πουθενά θα ισχύει

$$dE = dE' \longrightarrow I_\nu = I'_\nu$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες

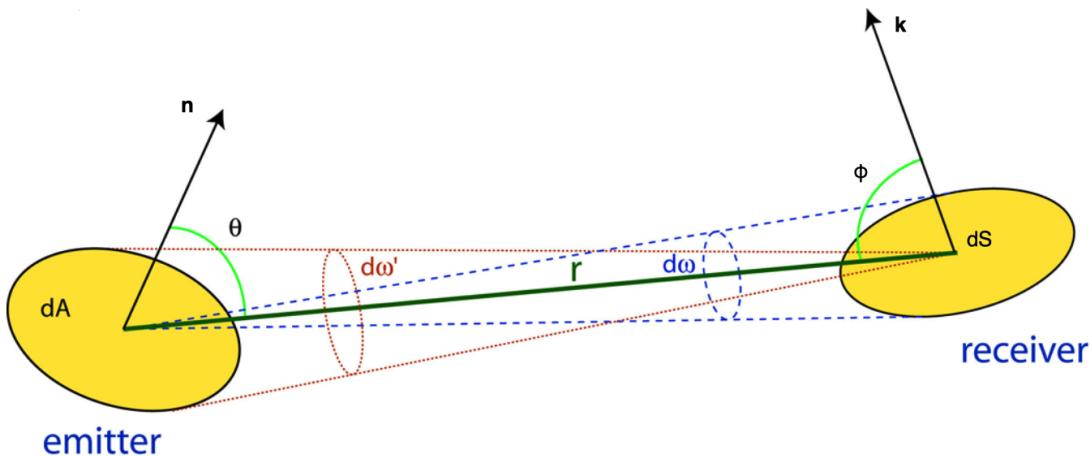


Figure 3.7: Γεωμετρική αναπαράσταση της διατήρησης της έντασης ακτινοβολίας κατα μήκος μιας ακτίνας φωτός.

- Η ένταση της ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητη της απόστασης.
- Η ένταση της ακτινοβολίας είναι ίδια και στην πηγή και στον δέκτη. Άρα μπορούμε να σκεφτούμε την ένταση με όρους ενέργειας που πηγάζει από κάπου ή ως ενέργεια που διέρχεται μέσα από έναν ανιχνευτή.

Η ολική ένταση

$$I \equiv \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \quad (3.7)$$

διατηρείται επίσης, ενώ ισχύει κατά τα γνωστά ότι $|I_\nu d\nu| = |I_\lambda d\lambda|$.

3.1.3

Πυκνότητα ροής, μέση ένταση, πυκνότητα και πίεση ακτινοβολίας

Πυκνότητα ροής Εαν η πηγή είναι διακριτή, δηλαδή καταλαμβάνει μία καλώς ορισμένη στερεά γωνία, τότε η “πυκνότητα ροής”, S_ν , είναι η ισχύς που λαμβάνει ένας ανιχνευτής ανα μονάδα προβαλλόμενης επιφάνειας και ανα συχνότητα. Από τη σχέση (3.6) προκύπτει ότι

$$\frac{dP}{d\nu dA} = I_\nu \cos \theta d\omega$$

και ολοκληρώνοντας ώστε να πάρουμε την ενέργεια ανα μονάδα χρόνου και ανα συχνότητα που διαπερνάει μία οποιαδήποτε επιφάνεια ανεξάρτητα της κατεύθυνσης καταλήγουμε:

$$S_\nu = \int I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta d\omega \quad (3.8)$$

Αν το γωνιακό μέγεθος της πηγής είναι $\ll 1 \text{ rad}$ τότε $\cos \theta \approx 1$ και η σχέση (3.8) απλοποιείται στην:

$$S_\nu = \int I_\nu(\theta, \phi) d\omega \quad (3.9)$$

κάτι το οποίο ισχύει σχεδόν πάντα καθώς δεν είμισται να χρησιμοποιούμε την πυκνότητα ροής για μεγάλους στόχους στους οποίους όχι χρειαζόταν να κρατήσουμε τον όρο του συνημιτόνου (π.χ. εκπομπή από τον

Γαλαξία).

Πότε όμως χρησιμοποιούμε την ειδική ένταση και πότε την πυκνότητα ροής για να περιγράψουμε μία πηγή;

Εάν η πηγή έχει πολύ μικρό γωνιακό μέγεθος ώστε να μπορεί να θεωρηθεί σημειακή, η πυκνότητα ροής μπορεί να μετρηθεί αλλά όχι η ειδική ένταση. Εάν η πηγή έχει πολύ μεγάλο γωνιακό μέγεθος, τότε η ειδική ένταση μπορεί να μετρηθεί απευθείας σε κάθε σημείο της πηγής, αλλά η πυκνότητα ροής πρέπει να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας την παρατηρήσιμη ένταση σε όλη τη στερεά γωνία που καταλαμβάνει η πηγή. Έτσι, η πυκνότητα ροής χρησιμοποιείται μόνο για να περιγράψει σχετικά μικρές πηγές.

Η πυκνότητα ροής μετριέται σε $\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ ή $\text{ergs s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. Επειδή όμως αυτές οι μονάδες είναι πολύ μεγάλες για τις τιμές που τυπικά μετράμε από αστρονομικά αντικείμενα, έχει υιοθετηθεί μία άλλη μονάδα, το Jansky (Jy)

$$1 \text{ Jy} \equiv 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \equiv 10^{-23} \text{ ergs s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

Σε αντίθεση με την ένταση της ακτινονομίας, η πυκνότητα ροής δεν είναι ανεξάρτητη της απόστασης. Επειδή

$$\int d\omega \propto d^{-2} \longrightarrow S_\nu \propto d^{-2}$$

το οποίο είναι γνωστό ως νόμος του αντίστροφου τετραγώνου. Άρα κάποια αστέρια φαίνονται αφυδρά επειδή καταλαμβάνουν μικρότερη στερεά γωνία στον ουράνιο θόλο (και άρα έχουν μικρότερη ροή) και όχι επειδή η ένταση της ακτινοβολίας μειώνεται με την απόσταση.

Ολοκληρώνοντας σε όλες τις συχνότητες, πάρινομε την γνωστή (ολική) ροή (ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας) ακτινοβολίας, αν και πολλές φορές ο όρος “ροή” χρησιμοποιείται έναντι του όρου “πυκνότητα ροής” για λόγους συντομίας:

$$F_{\text{rad}} \equiv S = \int_0^\infty S_\nu d\nu \quad (3.10)$$

Τέλος, η λαμπρότητα σε ένα εύρος συχνοτήτων ορίζεται ως ισχύς ανά συχνότητα (για πηγή που εκπέμπει ισοτροπικά):

$$L_\nu = 4\pi d^2 S_\nu \longrightarrow L \equiv \int_0^\infty L_\nu d\nu \quad (3.11)$$

και είναι ενδογενής ιδιότητα της πηγής καθώς δεν εξαρτάται από την απόσταση.

Μέση ένταση ακτινοβολίας Η μέση ένταση της ακτινοβολίας είναι η ροπή μηδενικής τάξης της έντασης ως προς την ποσότητα $\cos \theta$. Με άλλα λόγια, είναι η μέση τιμή της έντασης σε όλες τις στερεές γωνίες. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} J_\nu &= \frac{\oint I_\nu d\omega}{\oint d\omega}, \quad \mu\epsilon \quad \oint d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi \\ J_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε και αζημουθαϊκή συμμετρία, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\theta, \phi) d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^\pi I_\nu(\theta) \sin \theta d\theta$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\mu = \cos \theta \rightarrow d\mu = -\sin \theta d\theta$, τα όρια της ολοκλήρωσης γίνονται $\mu_1 = \cos(0) = 1$, $\mu_2 = \cos(\pi) = -1$, και έχουμε τελικά:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\theta, \phi) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \quad (3.12)$$

Παρατήρηση: Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε και την “ροή Eddington”, H_ν , η οποία είναι η ροπή πρώτης τάξης της έντασης ως προς την ποσότητα $\cos \theta$, ως εξής:

$$H_\nu = \frac{\oint I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta d\omega}{\oint d\omega} = \frac{S_\nu}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu \quad (3.13)$$

Πυκνότητα ακτινοβολίας Ένα από τα βασικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν το H/M πεδίο είναι η “πυκνότητα ακτινοβολίας”, u_ν . Το μέγεθος αυτό παριστάνει τη χρονική μέση τιμή της H/M ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας που περιέχεται στη μονάδα του όγκου. Αν σκεψτούμε την H/M ακτινοβολία σύμφωνα με το σωματιδιακό μοντέλο, η πυκνότητα ακτινοβολίας παριστάνει το γινόμενο του πλήθους των φωτονίων με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + d\nu$, τα οποία περιέχονται κατά μέσο όρο στη μονάδα του όγκου, επί την ενέργεια του κάθε φωτονίου ($h\nu$) δια το στοιχειώδες διάστημα συχνότητας $d\nu$.

Μαθηματικά αυτό αποδεικνύεται ως εξής: σε χρονικό διάστημα dt ένα φωτόνιο διανύει απόσταση $dl = cdt$, οπότε από τον ορισμό της ειδικής έντασης της ακτινοβολίας (σχέση (3.6)) έχουμε:

$$\frac{I_\nu(\theta, \phi)}{c} = \frac{dE_\nu}{dld\nu d\omega dA \cos \theta}$$

όπου το γινόμενο $dldA \cos \theta$ ισούται με το στοιχειώδη όγκο dV που καλύπτει το “μέτωπο” ενός H/M κύματος σε χρόνο dt . Έτσι, από την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε ότι η πυκνότητα ακτινοβολίας (ενέργεια ανά μονάδα συχνότητας και μονάδα όγκου), η οποία οφείλεται στη διάδοση της ακτινοβολίας κατά μία συγκεκριμένη διεύθυνση, δίνει από τη σχέση:

$$du_\nu = \frac{dE_\nu}{d\nu dV} = \frac{I_\nu(\theta, \phi)}{c} d\omega \quad (3.14)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.14) ως προς τη στερεά γωνία θα μας δώσει τη συνολική πυκνότητα ακτινοβολίας, η οποία οφείλεται στην ακτινοβολία που διαδίδεται προς όλες τις διευθύνσεις.

$$u_\nu = \frac{1}{c} \oint I_\nu(\theta, \phi) d\omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (3.15)$$

Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα της ακτινοβολίας είναι ανάλογη της μηδενικής ροπής της έντασης ως προς τον παράγοντα $\cos \theta$, με συντελεστή αναλογία $4\pi/c$.

Πίεση ακτινοβολίας Το H/M πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα (σχετικιστικό) αέριο φωτονίων. Από την θεωρία των τέλειων αερίων γνωρίζουμε ότι η πίεση ενός αερίου είναι ανάλογη της πυκνότητας ενέργειας. Έτσι, κατά αντιστοιχία, μπορούμε να ορίσουμε την πίεση ακτινοβολίας. Η πίεση γενικά ορίζεται ως η μεταβολή της ορμής, p , που διέρχεται κάθετα προς τη μονάδα της επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου, ενώ ισχύει ότι $p = E/c$. Η H/M ενέργεια που διέρχεται ανά μονάδα επιφάνειας προς τη διεύθυνση θ είναι:

$$dS_\nu = I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta d\omega$$

. Η ορμή που μεταφέρει αυτή η ενέργεια είναι

$$dp_\nu = \frac{dS_\nu}{c} = \frac{I_\nu(\theta, \phi)}{c} \cos \theta d\omega$$

ενώ η ορμή που διέρχεται κάθετα προς τη μοναδιαία επιφάνεια είναι

$$(dp_\nu)_\perp = \frac{dS_\nu}{c} \cos \theta = \frac{I_\nu(\theta, \phi)}{c} \cos^2 \theta d\omega$$

Η συνολική μεταβολή της ορμής η οποία ισούται με την πίεση, βρίσκεται με την ολοκλήρωση ως προς όλες τις δυνατές στερεές γωνίες:

$$P_\nu = \frac{1}{c} \oint I_\nu(\theta, \phi) \cos^2 \theta d\omega \quad (3.16)$$

Παρατηρούμε ότι η πίεση της ακτινοβολίας είναι ανάλογης της ροπής δεύτερης τάξης της ειδικής έντασης ως προς την ποσότητα $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} K_\nu &= \frac{\oint I_\nu(\theta, \phi) \cos^2 \theta d\omega}{\oint d\omega} = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\theta, \phi) \cos^2 \theta d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu \Rightarrow \\ &\Rightarrow K_\nu = \frac{c}{4\pi} P_\nu \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Όσον αφορά την εξάρτηση της πίεσης από τη διεύθυνση της στοιχειώδους επιφάνειας στην οποία υπολογίζεται, πρέπει να τονίσουμε ότι όταν η ένταση δεν είναι ισοτροπική, τότε η πίεση είναι τανυστικό μέγεθος και χρειάζεται γενικά ο υπολογισμός εννέα συνιστωσών για τον πλήρη προσδιορισμό της.

Επίσης, παρόλο που η ένταση είναι ανεξάρτητη της απόστασης για κάθε πεδίο ακτινοβολίας, οι τρεις παραπάνω ροπές είναι γενικά συναρτήσεις της απόστασης, όταν η ένταση δεν είναι ισοτροπική.

3.1.4

Ισοτροπική ένταση και μέλαν σώματα

Για να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα των σχέσεων (3.12), (3.13), (3.15) και (3.16), με τα οποία ορίζονται η μέση ένταση, η πυκνότητα ροής (ή ροή Eddington), η πυκνότητα ακτινοβολίας και η πίεση της ακτινοβολίας, θα πρέπει γενικά να γνωρίζουμε τη μορφή της συνάρτησης $I_\nu(\theta, \phi)$. Στην ειδική περίπτωση όμως που η ειδική ένταση είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης, όταν δηλαδή το πεδίο της ακτινοβολίας είναι ισοτροπικό, μας αρκεί το γεγονός ότι η ένταση δεν είναι συνάρτηση των θ και ϕ . Έτσι προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Η μέση ειδική ένταση θα είναι σύμφωνα με τη σχέση (3.12)

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} I_\nu \oint d\omega = I_\nu \quad (3.17)$$

- Η πυκνότητα ροής γίνεται σύμφωνα με τη σχέση (3.13)

$$H_\nu = \frac{S_\nu}{4\pi} = \frac{1}{2} I_\nu \int_{-1}^1 \mu d\mu = 0 \quad (3.18)$$

Άρα η ροή σε ένα ισοτροπικό πεδίο ακτινοβολίας είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει γιατί έχουμε ορίσει ως ροή την “καθαρή” ροή (net flux) που διέρχεται από μία επιφάνεια, ώστε

$$S_\nu = S_\nu^+ - S_\nu^-$$

Σε ένα ισοτροπικό πεδίο, η ροή S_ν^+ που διέρχεται από μία στοιχειώδη επιφάνεια προς τη θετική κατεύθυνση που έχουμε ορίσει εμείς είναι ακριβώς ίση με τη ροή S_ν^- που διέρχεται προς την αρνητική κατεύθυνση.

Αν θέλουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε τη πυκνότητα ροής στην επιφάνεια ενός αστέρα, υποθέτωντας ότι η ένταση κατευθύνεται μόνο προς τα “έξω”, τότε ολοκληρώνοντας μόνο στη μισή σφαίρα θα είχαμε:

$$S_\nu^+ = I_\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi I_\nu$$

Κάποιοι ορίζουν την αστροφυσική (πυκνότητα) ροή (astrophysical flux) ως τον λόγο

$$\mathcal{F} = \frac{S_\nu}{\pi}$$

ώστε να ισούται αριθμητικά με την ένταση.

- Για την πυκνότητα ακτινοβολίας προκύπτει αβίαστα από τη σχέση (3.15) ότι ισχύει

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \quad (3.19)$$

- Τέλος, για την πίεση της ακτινοβολίας από τη σχέση (3.16) προκύπτει

$$P_\nu = \frac{2\pi I_\nu}{c} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4\pi I_\nu}{3c} = \frac{1}{3} u_\nu \quad (3.20)$$

Άρα, στην περίπτωση ισοτροπικού πεδίου ακτινοβολίας, η πίεση της ακτινοβολίας είναι ανάλογη της πυκνότητας ακτινοβολίας με συντελεστή αναλογίας τον καθαρό αριθμό $1/3$ (σε αντιδιαστολή με την περίπτωση ενός τέλειου αερίου, όπου ο συντελεστής αναλογίας είναι $2/3$)².

Εάν μιλάμε για μέλαν σώμα, το οποίο εξ’ ορισμού εκπέμπει ισοτροπικά, τότε έχουμε και την αναλυτική έκφραση της ειδικής έντασης της ακτινοβολίας καθώς αυτή θα δίνεται από τον νόμο του Planck. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$J_\nu = I_\nu = B_\nu$$

και επομένως η ολική ένταση θα ισούται με

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (3.21)$$

όπου σ είναι η γνωστή σταθερά των Stefan-Boltzmann.

Η ολική πυκνότητα ακτινοβολίας είναι

$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \alpha T^4 \quad (3.22)$$

όπου $\alpha = \frac{4\sigma}{c}$ είναι η σταθερά της ακτινοβολίας.

²Δες και Παράρτημα C.

Αντίστοιχα, η ολική (θετική) ροή ισούται με

$$F^+ = \pi \int_0^\infty I_\nu d\nu = \pi \int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4 \quad (3.23)$$

Τέλος, για την ολική πίεση της ακτινοβολίας, χρησιμοποιώντας τη σχέση $P_\nu = u_\nu/3$ βρίσκουμε ότι

$$P = \int_0^\infty P_\nu d\nu = \frac{1}{3} \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{1}{3} \alpha T^4 \quad (3.24)$$

3.2 Απόσβεση και εκπομπή ακτινοβολίας

Αν το Σύμπαν ήταν άδειο, τότε το πρόβλημα της μεταφοράς της ακτινοβολίας θα ήταν απλό καθώς η ένταση της ακτινοβολίας στο σημείο του παρατηρητή θα ήταν ίδια με την ένταση της ακτινοβολίας στην πηγή. Με όλα λόγια η ένταση θα ήταν σταθερή. Σε ένα ρεαλιστικό σενάριο όμως, το Σύμπαν δεν είναι άδειο, αλλά αποτελείται από ύλη που εν γένει μπορεί να αποσβέσει (απορρόφηση φωτονίων από άτομα/ιόντα, σκέδαση φωτονίων σε διευθύνσεις άλλες από αυτή της γραμμής παρατήρησης) ή να εκπέμψει φωτόνια (αυθόρμητη εκπομπή ή εκπομπή laser). Η περιγραφή του πως αλλάζει η ένταση της ακτινοβολίας καθώς αυτή κινείται στον χώρο δίνεται από την εξίσωση μεταφοράς της ακτινοβολίας (radiative transfer equation). Αυτή είναι και η θεμελιώδης εξίσωση που διέπει τις αστρικές ατμόσφαιρες (και μία από τις πιο βασικές σε όλη την αστροφυσική).

3.2.1

Εξίσωση μεταφοράς

Με τον όρο απόσβεση της ακτινοβολίας (extinction or attenuation) εννοούμε το συνολικό αποτέλεσμα των μικροσκοπικών (ατομικών) μηχανισμών που ευθύνονται για την μείωση της ακτινοβολούμενης ενέργειας κατά τη διεύθυνση διάδοσής της. Αντίθετα, με τον όρο εκπομπή ακτινοβολίας θα θεωρούμε το συνολικό αποτέλεσμα μικροσκοπικών μηχανισμών που ευθύνονται για την αύξηση της ακτινοβολούμενης ενέργειας κατά τη διεύθυνση διάδοσης της.

Η σκέδαση του φωτός μπορεί απλά να να οφείλεται σε αλληλεπίδραση των φωτονίων με σωματίδια σκόνης που αλλάζουν την κατεύθυνση διάδοσης του φωτός. Παρόλα αυτά, όταν ένα άτομο απορροφά ένα φωτόνιο συγκεκριμένης ενέργειας και διεγείρεται, η αποδιέγερση του ατόμου υφίσταται σχεδόν ακαριαία (της τάξης των νανοδευτερελέπτων) μέσω της εκπομπής ενός φωτονίου με την ίδια συχνότητα του αρχικού φωτονίου που απορροφήθηκε. Σε αυτά τα πλαίσια, δηλαδή της απορρόφησης και άμεσης επανεκπομπής ενός φωτονίου σε μία άλλη κατεύθυνση, η διαδικασία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως σκέδαση. Αν όμως το διεγερμένο άτομο συγκρουστεί με κάποιο γειτονικό του πριν αποδιεγερθεί (μέσω ελαστικής κρούσης) τότε υπάρχει περίπτωση να αποδιεγερθεί μετατρέποντας την ενέργεια που θα εξέπεμπε με τη μορφή φωτονίου, σε κινητική ενέργεια των συγκρουόντων ατόμων. Αυτή η διαδικασία είναι πραγματική απορρόφηση καθώς αφαιρεί φωτόνια.

Η σκέδαση όμως μπορεί να λειτουργήσει και σαν μηχανισμός εκπομπής ακτινοβολίας στην περίπτωση που το σκεδαζόμενο φωτόνιο εισέρχεται στη διεύθυνση παρατήρησης. Η σκέδαση μαζί με την αυθόρμητη εκπομπή (spontaneous emission) είναι οι κύριοι μηχανισμοί που θεωρούμε ότι συνεισφέρουν (συλλογικά) στην αύξηση της ενέργειας της ακτινοβολίας, ενώ μηχανισμοί όπως η εξαναγκασμένη εκπομπή (stimulated emission, or laser emission) που και αυτοί συνεισφέρουν θετικά στην ενέργεια της ακτινοβολίας, θα αγνοούνται.

Σε μικροσκοπικό επίπεδο, η ύλη δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ομοιογενής. Παρόλα αυτά, μπορούμε να

Θεωρήσουμε ομοιογενή στοιχεία όγκου τα οποία εκπέμπουν και απορροφούν³ ακτινοβολούμενη ενέργεια, έτσι ώστε όλη η πληροφορία που εμπειρίζεται στο ατομικό επίπεδο να μπορεί να αποδοθεί με τη χρήση κάποιων μακροσκοπικών συντελεστών μεταφοράς.

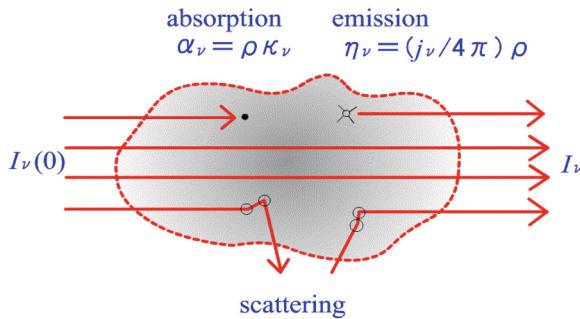


Figure 3.8: Διάδοση ακτινοβολίας μέσα από ένα οπτικό μέσο. Ο παράγοντας 4π εμφανίζεται αν λάβουμε υπόψιν ότι ο συντελεστής επομέπης (αφετική ικανότητα) j_ν ορίζεται ανά στερεά γωνία και ότι σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία, η επομέπη ακτινοβολίας είναι ισοτροπική.

Απορρόφηση & Σκέδαση Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την μείωση στην ειδική ένταση της ακτινοβολίας κατά μήκος μια διαδρομής ds , στην κατεύθυνση \hat{n} λόγω της απορρόφησης της H/M ακτινοβολίας από ένα οπτικό μέσο (σχήμα 3.8). Στην περίπτωση που έχουμε ένα αδύναμο H/M πεδίο και ένα αφαιό οπτικό μέσο, τότε η μείωση της έντασης θα είναι ανάλογη της έντασης της εισερχόμενης ακτινοβολίας

$$\frac{dI_\nu(\hat{n})}{ds} \propto I_\nu(\hat{n}) \longrightarrow \alpha_\nu(\hat{n})|_{\text{absorption}} \equiv -\frac{1}{I_\nu(\hat{n})} \frac{dI_\nu(\hat{n})}{ds} \quad (3.25)$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας $\alpha_\nu(\hat{n})|_{\text{absorption}}$, ονομάζεται γραμμικός συντελεστής απορρόφησης και εκφράζει το κλάσμα της μονοχρωματικής ακτινοβολίας που αφαιρείται από την προσπίπτουσα δέσμη κατά μήκος μιας διεύθυνσης λόγω απορρόφησης.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε και τον γραμμικό συντελεστή σκέδασης, $\alpha_\nu(\hat{n})|_{\text{scattering}}$, ο οποίος εκφράζει το κλάσμα της μονοχρωματικής ακτινοβολίας ανά μονάδα μήκους που παρεκλίνει από την διεύθυνση, \hat{n} , της προσπίπτουσας δέσμης λόγω σκέδασης. Έτσι, ορίζουμε τον γραμμικό συντελεστή απόσβεσης

$$\chi_\nu(\hat{n}) \equiv \alpha_\nu(\hat{n})|_{\text{absorption}} + \alpha_\nu(\hat{n})|_{\text{scattering}} \quad (3.26)$$

ο οποίος αναφέρεται στο συνολικό φαινόμενο της αφαίρεσης ειδικής έντασης από την προσπίπτουσα δέσμη ανά μονάδα μήκους. Από τη διαστασιακή ανάλυσης της σχέσης (3.25), προκύπτει ότι

$$[\chi_\nu(\hat{n})] = [\alpha_\nu(\hat{n})|_{\text{absorption}}] = [\alpha_\nu(\hat{n})|_{\text{scattering}}] = [L^{-1}]$$

Το νόημα των μακροσκοπικών αυτών συντελεστών γίνεται εμφανές αν σκεφτούμε τι σημαίνει μείωση της έντασης της ακτινοβολίας σε μικροσκοπικό επίπεδο. Στην ατομική χλίμακα, η μείωση της έντασης οφείλεται στην αλληλεπίδραση των φωτονίων με ηλεκτρόνια, άτομα, μόρια ή ακόμα και μεγαλύτερες δομές που ονομάζουμε σκόνη. Ο συντελεστής απόσβεσης λοιπόν εξαρτάται από δύο παράγοντες: την πιθανότητα ένα φωτόνιο να απορροφηθεί ή να σκεδαστεί από κάποιο σωματίδιο, και τον αριθμό των ατόμων που περιέχονται σε έναν στοιχειώδη όγκο τα οποία είναι ικανά να απορροφήσουν ή να σκεδάσουν το εν λόγω φωτόνιο.

³Πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε τον όρο απορρόφηση για να αναφερθούμε σε οποιοδήποτε μηχανισμό απόσβεσης της ακτινοβολίας.

Ο πρώτος παράγοντας, η πιθανότητα δηλαδή το φωτόνιο να αλληλεπιδράσει με κάποιο σωματίδιο, σχετίζεται με την **ενεργό διατομή** που είναι ο λόγος του αφιθμού των φωτονίων που απορροφούνται/σκεδάζονται προς τη ροή των εισερχόμενων φωτονίων. Η ενεργός διατομή ενός σωματιδίου μπορεί να γίνει αντιληπτή αν θεωρήσουμε πως κάθε σωματίδιο ορίζει στον χώρο μία σφαίρα επιφροής, τέτοια ώστε η διέλευση ενός φωτονίου μέσα από αυτή να συνεπάγεται αλληλεπιδραση με το σωματίδιο. Το εμβδούλιο ενός μέγιστου κύκλου μιας τέτοιας σφαίρας, είναι η ενεργός διατομή του σωματιδίου, σ_ν , η οποία γενικά εξαρτάται από τη συχνότητα και είναι μία ιδιότητα των σωματιδίων με διαστάσεις $[L^2]$. Ο δεύτερος παράγοντας, εκφράζεται από την αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων, η και εξαρτάται από την θερμοδυναμική κατάσταση του οπτικού μέσου.

Είναι σαφές ότι εν γένει υπάρχουν πολλά σωματίδια το κάθε ένα από αυτά με τη δική του ενεργό διατομή για μια συγκεκριμένη διεργασία όπως η σκέδαση ή η απορρόφηση. Για λόγους απλότητας, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μόνο είδος σωματιδίων ανά μονάδα όγκου και ότι κάθε ένα από αυτά έχει μία ενεργό διατομή για τη συλλογική απόσβεση της ακτινοβολίας ίση με σ_ν . Τότε, ο γραμμικός συντελεστής απόσβεσης θα ισούται

$$\chi_\nu = \sigma_\nu \eta \quad (3.27)$$

Από την παραπάνω έκφραση, βλέπουμε ότι ο γραμμικός συντελεστής απόσβεσης μπορεί να θεωρηθεί και ως ενεργός διατομή ανά μονάδα όγκου. Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε τον γραμμικό συντελεστή απόσβεσης ως τη μείωση της έντασης της ακτινοβολίας ανά μονάδα μάζας (ή ενεργό διατομή ανά μονάδα μάζας), ώστε

$$\chi_\nu = \kappa_\nu \rho \quad (3.28)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας του οπτικού μέσου με διαστάσεις $[ML^{-3}]$ και κ_ν ονομάζεται ο συντελεστής απόσβεσης μάζας (mass extinction coefficient) με διαστάσεις $[L^2 M^{-1}]$. Στην αστροφυσική, ο ορισμός ανά μονάδα μάζας είναι αυτός που χρησιμοποείται συνήθως στην μελέτη των αστρικών ατμοσφαιρών, με τον συντελεστή κ_ν να ονομάζεται **αδιαφάνεια** (opacity).

Βάσει των παραπάνω, η σχέση (3.25) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$$dI_\nu = -\chi_\nu I_\nu ds = -\sigma_\nu \eta I_\nu ds = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds \quad (3.29)$$

και όπως έχουμε πει εκφράζει το πόσο μειώνεται η ειδική ένταση της ακτινοβολίας όταν διέρχεται από ένα οπτικό μέσο, σε σχέση με την αρχική ένταση.

Το αντίστροφο του μακροσκοπικού συντελεστή απόσβεσης συνδέεται με τη **μέση ελεύθερη διαδρομή**, ℓ , η οποία είναι η μέση απόσταση που διανύει ένα σωματίδιο σε ένα μέσο μεταξύ δύο διαδοχικών αλληλεπιδράσεων.

$$\ell \equiv \frac{1}{\chi_\nu} = \frac{1}{\sigma_\nu \eta} = \frac{1}{\kappa_\nu \rho} \quad (3.30)$$

Εάν ο γραμμικός συντελεστής απόσβεσης μεταβάλλεται με την απόσταση, τότε το ολοκλήρωμα του γραμμικού συντελεστή απόσβεσης ως προς την απόσταση ορίζει ένα νέο (αδιάστατο) μέγεθος, το οποίο ονομάζουμε **οπτικό βάθος**, τ_ν

$$\tau_\nu \equiv \int_0^s \chi_\nu(s') ds' = \int_0^s \kappa_\nu(s') \rho(s') ds' \quad (3.31)$$

και αποτελεί ένα μέτρο της "απορροφητικότητας" ενός οπτικού μέσου μέχρι ένα συγκεκριμένο βάθος.

Εκπομή Έστω ένα μικρό στοιχείο όγκου $dV = dAds$, όπου το ds έχει την ίδια διεύθυνση με τη διεύθυνση της δέσμης της ακτινοβολίας $\hat{\eta}$, και η επιφάνεια dA είναι κάθετη σε αυτή. Τότε η ενέργεια ανά μονάδα όγκου που προστίθεται στην αρχική δέσμη της ακτινοβολίας σε χρονικό διάστημα dt , με συχνοτικό εύρος $d\nu$ και μέσα σε μια στερεά γωνία $d\omega$ προς τη διεύθυνση $\hat{\eta}$ της δέσμης θα είναι

$$dE_\nu(\hat{\eta}) = \eta_\nu(\hat{\eta}) dt d\nu dAd\omega ds \longrightarrow dI_\nu(\hat{\eta}) = \eta_\nu(\hat{\eta}) ds \quad (3.32)$$

όπου ο συντελεστής $\eta_\nu(\hat{\eta})$ ονομάζεται (μονοχρωματικός) συντελεστής εκπομπής του μέσου και στο σύστημα cgs έχει διαστάσεις $[\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{sr}^{-1}]$. Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια που προστίθεται στην αρχική δέσμη ανά μονάδα μάζας με τη βοήθεια του συντελεστή αφετικής ικανότητας, j_ν ώστε

$$\eta_\nu(\hat{\eta}) = j_\nu(\hat{\eta})\rho \quad (3.33)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας του μέσου. Η αφετική ικανότητα (emissivity) έχει διαστάσεις στο cgs $[\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{gr}^{-1}]$. Με τη βοήθεια της σχέσης (3.33), μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (3.32) ως

$$dI_\nu(\hat{\eta}) = \eta_\nu(\hat{\eta})ds = j_\nu(\hat{\eta})\rho ds \quad (3.34)$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι ο συντελεστής εκπομπής (ή αφετική ικανότητα) συμπεριλαμβάνουν τη συνεισφορά στην αύξηση της ειδικής έντασης τόσο της αυθόρυμης εκπομπής όσο και της σκέδασης των φωτονίων από μία αρχική διεύθυνση $\hat{\eta}'$ στην διεύθυνση $\hat{\eta}$ της δέσμης.

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.29) και (3.34) για την απόσβεση και εκπομπή ακτινοβολίας αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση η ενέργεια που αφαιρείται από τη δέσμη εξαρτάται από το πόσο ισχυρή ήταν η δέσμη αρχικά (αν δεν έχουμε καθόλου ενέργεια αρχικά τότε προφανώς τίποτα δεν μπορεί να αφαιρεθεί). Αντίθετα, η ενέργεια που προστίθεται στη δέσμη είναι ανεξάρτητη της έντασης. Η μόνη εξαρεση σε αυτό αποτελεί η εξαναγκασμένη εκπομπή. Συνήθως αυτό το φαινόμενο αντιμετωπίζεται ως "αρνητική απορρόφηση" καθώς είναι εκπομπή που εξαρτάται από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Παρόλα αυτά, δεν θα ασχοληθούμε με αυτού του είδους τη συνεισφορά.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να ορίσουμε τον λόγο

$$s_\nu \equiv \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} \quad (3.35)$$

ο οποίος ονομάζεται **συνάρτηση πηγής**⁴ (source function) και ουσιαστικά αποτελεί ένα μέτρο για το πόσα φωτόνια σε μία δέσμη αφαιρούνται και προστίθονται σε αυτή καθώς διέρχεται από ένα οπτικό μέσο. Οι διαστάσεις της συνάρτησης πηγής στο σύστημα cgs είναι $[\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1}]$, ίδιες δηλαδή με αυτές τις ειδικής έντασης.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.29), (3.34) και (3.35), προκύπτει ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση της ακτινοβολίας μέσα σε ένα οπτικό μέσο είναι

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\chi_\nu I_\nu + \eta_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \rho \quad (3.36)$$

ή χρησιμοποιώντας ισοδύναμα την έκφραση για το οπτικό βάθμος (σχέση (3.31))

$$\frac{dI_\nu}{\kappa_\nu \rho ds} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = s_\nu - I_\nu \quad (3.37)$$

Γενική λύση της εξίσωσης Η εξίσωση (3.37) είναι μία μη-ομογενής, γραμμική διαφορική εξίσωση μεταφοράς

$$P_0(x)y' + P_1(x)y = G(x), \quad G(x) \neq 0$$

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση μίας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο σκέλος είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης ενώ το δεύτερο σκέλος είναι μία

⁴Οι περισσότεροι συγγραφείς αναφέρονται στη συνάρτηση πηγής με το σύμβολο S_ν . Επειδή χρησιμοποιήσαμε το συγχρημένο σύμβολο για την πυκνότητα ροής, επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε αντ' αυτού το πεζό σύμβολο s_ν προς αποψυγή σύγχησης.

μερική λύση της μη-ομογενούς σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα διαφορικών εξισώσεων

Έστω μία μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξισωση της μορφής

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Αν y_h είναι μία μη-τετριμμένη (non-trivial) λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξισωσης ($f(x) = 0$) και y_p μία μερική (particular) λύση της μη-ομογενούς, τότε η γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξισωσης είναι

$$y = y_h + y_p$$

όπου η μερική λύση y_p , σε αντίθεση με τη λύση y_h της ομογενούς, δεν περιέχει σταθερές.

Λύση της αντίστοιχης ομογενούς

Αν η συνάρτηση πηγής $s_\nu = 0$, τότε η εξισωση μεταφοράς γράφεται

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu = 0 \Rightarrow \frac{dI_\nu}{I_\nu} = -d\tau_\nu \Rightarrow \ln I_\nu + c = - \int_0^{\tau_\nu} d\tau'$$

ή

$$I_\nu = ce^{-\tau_\nu} = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} \quad (3.38)$$

όπου για τον προσδιορισμό της σταθεράς c , χρησιμοποιήσαμε την αρχική συνθήκη $\tau_{nu} = 0 \rightarrow I_\nu = I_\nu(0)$. Παρατηρούμε ότι η σχέση (3.38) δεν είναι άλλη από τη γνωστή σχέση των Beer-Lambert.

Η λύση της ομογενούς εξισωσης μεταφοράς είναι για την περίπτωση όπου η απόσβεση της ακτινοβολίας καθώς αυτή διέρχεται μέσα από ένα μέσο είναι σημαντική αλλά η εκπομπή ακτινοβολίας μπορεί να αγνοηθεί. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η διάδοση φωτός μέσα από το διαστρικό μέσο (interstellar medium). Στα οπτικά μήκη κύματος, το διαστρικό μέσο δεν συνεισφέρει τίποτα στην ακτινοβολία καθώς η ύλη είναι πολύ ψυχρή. Η σκόνη όμως που παρεμβάλλεται μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή μπορεί να προκαλέσει σημαντική απόσβεση της έντασης της ακτινοβολίας, αν το μήκος του μέσου είναι αρκετά μεγάλο.

Μερική λύση της μη-ομογενούς

Θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $y_p(\tau_\nu) = u(\tau_\nu)y_h(\tau_\nu)$, όπου y_h είναι η μη-τετριμμένη λύση της ομογενούς (σχέση (3.38)) και $u(\tau_\nu)$ πρέπει να προσδιοριστεί. Η μέθοδος αυτή που στηρίζεται σε μια λύση της ομογενούς είναι γνωστή και ως "μεταβολή των σταθερών" (variation of parameters).

Εφόσον η $y_p(\tau_\nu)$ είναι λύση της εξισωσης μεταφοράς (σχέση (3.37)), θα πρέπει να την ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_\nu} [u(\tau_\nu)y_h(\tau_\nu)] + u(\tau_\nu)y_h(\tau_\nu) &= s_\nu \Rightarrow \\ \frac{du(\tau_\nu)}{d\tau_\nu}y_h(\tau_\nu) + u(\tau_\nu)\frac{dy_h(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} + u(\tau_\nu)y_h(\tau_\nu) &= s_\nu \Rightarrow \\ \frac{du(\tau_\nu)}{d\tau_\nu}I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} - \underline{u(\tau_\nu)}I_\nu(0)\overline{e^{-\tau_\nu}} + \underline{u(\tau_\nu)}I_\nu(0)\overline{e^{-\tau_\nu}} &= s_\nu \Rightarrow \\ \frac{du(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = \frac{s_\nu}{I_\nu(0)}e^{\tau_\nu} \Rightarrow u(\tau_\nu) &= \int_0^{\tau_\nu} \frac{s_\nu}{I_\nu(0)}e^{\tau'} d\tau' \end{aligned}$$

Άρα, η μερική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης μεταφοράς είναι

$$\begin{aligned} y_p(\tau_\nu) &= u(\tau_\nu)y_h(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} \int_0^{\tau_\nu} \frac{s_\nu}{I_\nu(0)} e^{\tau'} d\tau' \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_p(\tau_\nu) = \int_0^{\tau_\nu} s_\nu e^{\tau' - \tau_\nu} d\tau' \end{aligned} \quad (3.39)$$

Τελικά, συνδυάζοντας τις λύσεις (3.38) και (3.39), καταλήγουμε ότι η γενική λύση της εξίσωσης μεταφοράς είναι

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} s_\nu e^{\tau' - \tau_\nu} d\tau' \quad (3.40)$$

όπου ο πρώτος όρος μας λέει ότι η ένταση της αρχικής δέσμης μειώθηκε κατά έναν παράγοντα e^{τ_ν} λόγω απόσβεσης. Όμως ένα οπτικό μέσο μπορεί να εκπέμπει και αυτό ακτινοβολία ή νέα στη τ' . Αυτή η διαδικασία περιγράφεται από τον δεύτερο όρο της λύσης της εξίσωσης μεταφοράς.

Επιπροσθέτως, εάν η συνάρτηση πηγής είναι ανεξάρτητη της θέσης μέσα στο οπτικό μέσο, μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.40). Τότε η λύση της εξίσωσης μεταφοράς μπορεί να γραφτεί με την απλοποιημένη μορφή

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + s_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (3.41)$$

Για να γίνει αντιληπτή η φυσική σημασία της λύσης (3.41), θα εξετάσουμε τις ακόλουθες οριακές περιπτώσεις

- Όταν $\tau_\nu = 0$, σημαίνει ότι είτε δεν υπάρχει καθόλου ύλη, οπότε $\rho = 0$, είτε η ύλη είναι εντελώς διαφανής σε ακτινοβολίας συχνότητας ν , οπότε $\kappa_\nu = 0$. Τότε, η λύση της εξίσωσης μεταφοράς μας δίνει ότι

$$I_\nu = I_\nu(0)$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο παρατηρητής βλέπει μόνο την ακτινοβολία της πηγής. Τότε ο ορισμός της συνάρτησης πηγής του οπτικού μέσου (αν υπάρχει) είναι δυνατό να ικανοποιείται μόνο αν $j_\nu = 0$. Ένα εντελώς διάφανο μέσο λοιπόν δεν εκπέμπει καθόλου ακτινοβολία.

- Στην περίπτωση που $\tau_\nu \gg 1$, τότε τα εκθετικά στη σχέση (3.41) είναι προσεγγιστικά ίσα με μηδέν, και η λύση της εξίσωσης μεταφοράς γράφεται

$$I_\nu = s_\nu$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο παρατηρητής βλέπει μόνο την επιφάνεια του οπτικού μέσου και δεν βλέπει καθόλου την φωτεινή πηγή πίσω από αυτό (δες και σχήμα 3.9). Το οπτικό μέσο δηλαδή είναι τελείως αδιαφανές και χαρακτηρίζεται ως "οπτικά παχύ" (optically thick). Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν $\tau_\nu \ll 1$, τότε λέμε ότι το μέσο είναι οπτικά λεπτό (optically thin) και υπάρχει μικρή απόσβεση της ακτινοβολίας.

- Τέλος, αν $\tau_\nu \approx 1$, τότε η φωτεινή ένταση που φτάνει στον παρατηρητή οφείλεται και στην πηγή και στο οπτικό μέσο και η λύση της εξίσωσης μεταφοράς είναι

$$I_\nu = 0.368I_\nu(0) + 0.632s_\nu$$

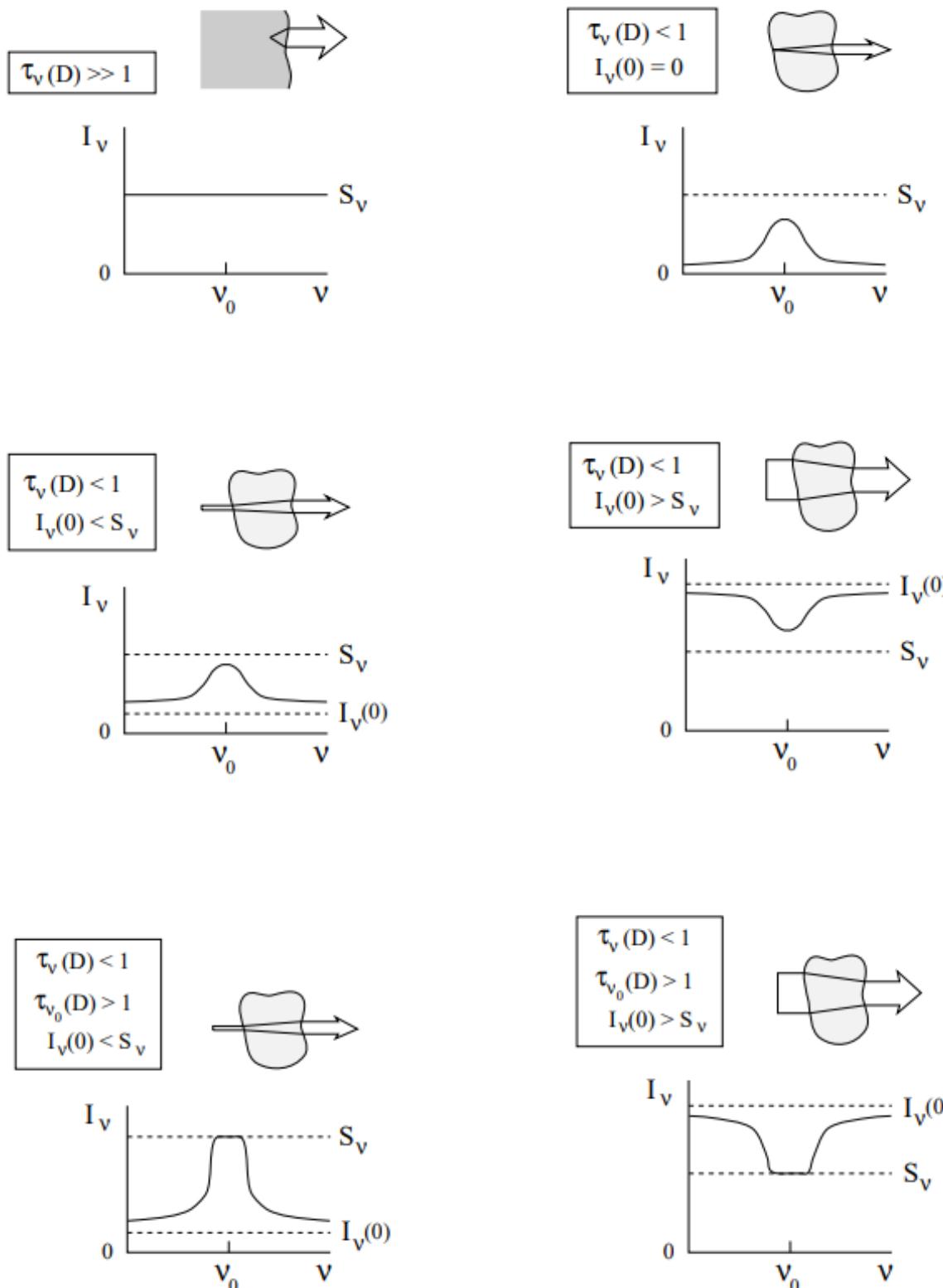


Figure 3.9: Φασματικές γραμμές από ένα ομοιογενές οπτικό μέσο με συνάρτηση πηγής s_v . Καμία γραμμή δεν εμφανίζεται όταν το μέσο είναι οπτικά παχύ (πάνω αφιστερά). Όταν είναι οπτικά λεπτό, εμφανίζονται γραμμές εκπομπής όταν δεν υπάρχει πηγή ακτινοβολίας από πίσω ($I_v(0) = 0$, πάνω αφιστερά), ή όταν προσπίπτει ακτινοβολία με $I_v(0) < s_v$. Γραμμές απορρόφησης εμφανίζονται μόνο όταν το μέσο είναι οπτικά λεπτό και ακτινοβολείται από δέσμη με ένταση $I_v(0) > s_v$. Οι εμφανιζόμενες γραμμές εμφανίζουν κορεσμό στο $I_v \approx s_v$ όταν το μέσο είναι οπτικά παχύ στη συχνότητα v_0 .

3.2.2

Νόμος του Kirchhoff

Με λίγα λόγια: Ο νόμος της φασματοσκοπίας του Kirchhoff συνδέει το ρυθμό εκπομπής ακτινοβολίας ενός σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία με το ρυθμό απορρόφησης της ακτινοβολίας από το ίδιο σώμα.

Η φυσική σημασία της συνάρτησης πηγής s_ν γίνεται φανερή, αν υποθέσουμε ότι το οπτικό μέσο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, δηλαδή ύλη και ακτινοβολία χαρακτηρίζονται από την ίδια θερμοκρασία T . Τότε η ένταση της ακτινοβολίας I_ν , εξ' ορισμού δεν μεταβάλλεται στο εσωτερικό του μέσου, δηλαδή όσο ακτινοβολία απορροφάται σε κάθε σημείο του εσωτερικού του, τόση και εκπέμπεται. Στην περίπτωση αυτή $dI_\nu/ds = 0$, οπότε από τη σχέση (3.36) προκύπτει ότι

$$I_\nu = s_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (3.42)$$

Η τελευταία ισότητα της παραπάνω σχέσης ισχύει καθώς αφού το πεδίο ακτινοβολίας βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία του οπτικού μέσου και όχι από οποιαδήποτε άλλη φυσική ιδιότητά του, και η ένταση του θα δίνεται από τον νόμο του Planck. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση που το οπτικό μέσο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, η συνάρτηση πηγής είναι ανεξάρτητη από το υλικό του οπτικού μέσου και ισούται με την ένταση της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Αυτή η πρόταση αποτελεί το νόμο της φασματοσκοπίας του Kirchhoff.

3.3 Αδιαφάνεια και αστρικά φάσματα

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, οι μικροφυσικοί μηχανισμοί των οποίων το αποτέλεσμα εκφράζεται φαινομενολογικά ως συντελεστής απόσβεσης και εκπομπής, είναι κατά βάση κβαντικά φαινόμενα, αφού σχετίζονται με απορρόφηση, σκέδαση, και εκπομπή φωτονίων. Τα κύρια κβαντικά φαινόμενα που αποτελούν πηγές αδιαφάνειας στην Αστρονομία είναι οι μεταπτώσεις ηλεκτρονίων και μορίων από μία ενεργειακή κατάσταση σε μία άλλη. Επειδή οι μοριακές μεταπτώσεις είναι σημαντικές μόνο σε χαμηλές θερμοκρασίες, όπως π.χ. στις ατμόσφαιρες των ψυχρότερων αστέρων και στα νεφελώματα, η αδιαφάνεια που οφείλεται σε τέτοιου είδους μεταπτώσεις δεν θα μας απασχολήσει σε αυτό το επίπεδο.

3.3.1

Μηχανισμοί αδιαφάνειας

Οι ηλεκτρονικές μεταπτώσεις που είναι υπεύθυνες για την αστρική αδιαφάνεια οφείλονται σε τέσσερις βασικούς μηχανισμούς:

1. **Μεταπτώσεις από δέσμια σε ελεύθερη κατάσταση** (bound-free transition ή φωτοϊονισμός) ή από ελεύθερη σε δέσμια κατάσταση (επανασύνδεση ή recombination)

Η περίπτωση της επανασύνδεσης αναφέρεται στην σύγχρονη και απορρόφηση ενός ηλεκτρονίου με ένα ιόν, εκπέμποντας ένα φωτόνιο κατά τη διαδικασία αυτή. Η ενέργεια αυτού του φωτονίου θα ισούται με την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου συν την ενέργεια σύνδεσης του ηλεκτρονίου που πλέον είναι μέρος του ιόντος. Επειδή η κινητική ενέργεια που είχε το ηλεκτρόνιο δεν οφείλει να είναι κβαντισμένη, η μετάπτωση επανασύνδεσης αποτελεί πηγή συνεχούς αδιαφάνειας (continuum spectrum). Παρόμοια λογική ισχύει και για την περίπτωση της δέσμιας-ελεύθερης μετάπτωσης.

2. Μεταπτώσεις από ελεύθερη σε ελεύθερη κατάσταση με την παρουσία ατομικών πυρήνων (free-free transition ή Bremsstrahlung)

Η ακτινοβολία πέδησης όπως αποκαλείται οφείλεται σε επιβράδυνση των ηλεκτρονίων (ή οποιουδήποτε φορτίου) τα οποία σκεδάζονται από άλλα άτομα ή ίόντα, χωρίς να συλλαμβάνονται από αυτά. Αυτή η διαδικασία αποτελεί ακόμα μία πηγή συνεχούς αδιαφάνειας.

3. Μεταπτώσεις από ελεύθερη σε ελεύθερη κατάσταση λόγω σκέδασμού φωτονίων από ηλεκτρόνια (σκέδαση Thomson και φαινόμενο Compton)

Στην σκέδαση Thomson, ένα φωτόνιο σκεδάζεται ελαστικά από ένα φορτισμένο σωματίδιο (συνήθως ηλεκτρόνιο) χωρίς να αλλάζει η κινητική ενέργεια του σωματιδίου ούτε η συχνότητα του φωτονίου. Η σκέδαση Thomson αποτελεί το όριο χαμηλών ενέργειών του πιο γενικού φαινομένου Compton.

Στη σκέδαση Compton, ένα φωτόνιο σκεδάζεται από ένα φορτισμένο σωματίδιο (συνήθως ηλεκτρόνιο) με αποτέλεσμα να μειωθεί η ενέργεια του (να αυξηθεί το μήκος κύματος). Μέρος της ενέργειας του φωτονίου μεταφέρεται στο ανακρουόμενο ηλεκτρόνιο. Το αντίστροφο φαινόμενο Compton λαμβάνει χώρα όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο μεταφέρει μέρος της ενέργειάς του σε ένα φωτόνιο.

Καθώς και τα δύο αυτά φαινόμενα σκέδασης περιλαμβάνουν ελεύθερα σωματίδια, αποτελούν πηγές συνεχούς αδιαφάνειας.

4. Μεταπτώσεις από δέσμια σε δέσμια κατάσταση (διέγερση ατόμων ή ίόντων) Η μετάπτωση από κάποια ενέργειακή στοιβάδα σε μία άλλη ενέργειακή στοιβάδα θα παράξει φωτόνιο και ιοισμένης ενέργειας και άρα αυτού του είδους η μετάπτωση δεν αποτελεί πηγή συνεχούς αδιαφάνειας.

Είναι φανερό ότι οι μηχανισμοί 1-3 προϋποθέτουν την ύπαρξη ελεύθερων ηλεκτρονίων και ιονισμένων ατόμων σε σημαντικές αριθμητικές πυκνότητες, γεγονός που προϋποθέτει υψηλές θερμοκρασίες. Δεδομένου ότι η ενέργεια ιονισμού του Υδρογόνου είναι 13.6 eV, η θερμοκρασία που πρέπει να επικρατεί είναι της τάξης των 11600 K. Τέτοιες θερμοκρασίες συναντώνται κατ' εξοχήν στο εσωτερικό των αστέρων και στις επιφάνειες αστέρων προγενέστερου φασματικού τύπου.

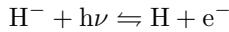
Ο τέταρτος μηχανισμός προϋποθέτει την ύπαρξη ουδέτερων ατόμων, που ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι κατ' εξοχήν σημαντικός στην επιφάνεια των αστέρων (φωτόσφαιρα) και στην ατμόσφαιρα των αστέρων, εκεί δηλαδή όπου παράγεται το συνεχές φάσμα και οι φασματικές γραμμές απορρόφησης (και ενδεχομένως εκπομπής) των αστέρων.

3.3.2

Η συνεχής συνιστώσα

Τόσο το συνεχές όσο και το γραμμικό φάσμα, δημιουργούνται ταυτόχρονα σε όλο το βάθος των εξωτερικών στρωμάτων ενός αστέρα, από τη φωτόσφαιρα μέχρι την κορυφή της ατμόσφαιρας. Από τον νόμο του Kirchhoff, γνωρίζουμε ότι ένα σώμα που εκπέμπει συνεχές φάσμα πρέπει να έχει κάποια πηγή συνεχούς αδιαφάνειας. Οι τρεις πρώτες περιπτώσεις που αναφέραμε παραπάνω αποτελούν παραδείγματα τέτοιων μηχανισμών, και επομένως καθημεία από αυτές θα μπορούσε να είναι υπεύθυνη για τη συνεχή εκπομπή. Επειδή τα αστέρια αποτελούνται κατά βάση από Υδρογόνο και Ήλιο, η ασυνεχής αδιαφάνεια θα πρέπει να είναι συνδεδεμένη με τον ιονισμό του Υδρογόνου ή/και του Ήλιου στην επιφάνεια των αστέρων. Όμως ο ιονισμός του Υδρογόνου απαιτεί θερμοκρασίες άνω των 10000 K, όπως έχουμε αναφέρει, ενώ ο ιονισμός του Ήλιου ακόμα μεγαλύτερες θερμοκρασίες. Τέτοιες θερμοκρασίες συναντώνται πραγματικά στις ατμόσφαιρες των αστέρων προγενέστερου φασματικού τύπου αλλά όχι και στις ψυχρότερες ατμόσφαιρες των αστέρων μεταγενέστερου φασματικού τύπου, όπως ο Ήλιος.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι κύρια πηγή αδιαφάνειας στην ατμόσφαιρα του Ήλιου είναι ο φωτοϊονισμός, αλλά όχι στη συνηθισμένη εκδοχή του. Είναι η μετάπτωση από δέσμια σε ελεύθερη κατάσταση του επιπλέον ηλεκτρονίου του αρνητικού ιόντος του Υδρογόνου H^-



Αυτή η διαδικασία αναφέρεται ως "φωτοδιάσπαση" γιατί δίνει ένα ουδέτερο άτομο αντί για ένα ιόν. Επομένως, όταν το ανιόν του Υδρογόνου διασπάται, απορροφά φωτόνια συνεχούς ενέργειας, και όρα είναι πηγή συνεχούς αδιαφάνειας, ενώ όταν συντίθεται εκπέμπει φωτόνια συνεχούς ενέργειας και όρα είναι πηγή συνεχούς εκπομπής.

Το H^- έχει ενέργεια σύνδεσης 0.75 eV που αντιστοιχεί σε θερμοκρασία περίπου 8700 K. Άρα, σε αστέρες με ενεργό θερμοκρασία μικρότερη από 8700 K η δημιουργία του H^- ευνοείται θερμοδυναμικά καθώς η δέσμια κατάσταση είναι κατά 0.75 eV ενεργειακά μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας ενός ατόμου Υδρογόνου και ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου. Αντίθετα, σε αστέρες με ενεργό θερμοκρασία μεγαλύτερη από 8700 K η δημιουργία του H^- δεν ευνοείται καθώς πάρα πολλά φωτόνια έχουν ενέργεια μεγαλύτερη από 0.75 eV και προκαλούν ανισορροπία στις αντιδράσεις σχηματισμού-καταστροφής του H^- , ευνοώντας τις τελευταίες. Είναι προφανές, πως αν η αριθμητική πυκνότητα των ιόντων H^- είναι μικρή, τότε η συμμετοχή τους στην παραγωγή της συνεχούς συνιστώσας του φάσματος εκπομπής είναι αμελητέα.

Αυτός ο μηχανισμός εξηγεί την δημιουργία του συνεχούς φάσματος του Ήλιου μόνο για τα μήκη κύματος για τα οποία ισχύει η σχέση $h\nu > 0.75$ eV, τα οποία περιλαμβάνουν το ορατό φάσμα και το εγγύς υπέρυθρο. Η ένταση της συνεχούς ακτινοβολίας του Ήλιου τα ραδιοφωνικά μήκη κύματος, μέρος του υπεριώδους και στις ακτίνες X είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή που προβλέπει ο νόμος του Planck και δεν μπορεί να εξηγηθεί με τον παραπάνω μηχανισμό. Αυτό συμβαίνει γιατί η ακτινοβολία στις συγχεκριμένες συχνοτικές περιοχές, δεν είναι θερμικής φύσης δηλαδή προέρχονται από υλικό που δεν είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία, και επομένως δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή ούτε ο νόμος του Planck, ούτε ο νόμος του Kirchhoff.

3.4 Νόμοι Boltzmann & Saha

3.4.1

Νόμος του Boltzmann

Η κατανομή των ατόμων ενός στοιχείου (ουδέτερων ή ιονισμένων) στις διάφορες ενέργειακές στάθμες ακολουθεί τη στατιστική Maxwell-Boltzmann, είναι συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας T της ατμόσφαιρας και δίνεται από τον νόμο του Boltzmann⁵

$$\frac{n_{i,j}}{n_{0,j}} = \frac{g_{i,j}}{g_{0,j}} e^{-E_i/(kT)} \quad (3.43)$$

όπου η τιμή 0 υποδηλώνει τη θεμελιώδη στάθμη του ατόμου. Η μεταβλητή $n_{i,j}$ παριστάνει την αριθμητική πυκνότητα (αριθμός ατόμων ανά cm^3) των ατόμων που είναι διεγερμένα στη στάθμη i ($i = 0, 1, \dots$) και βρίσκονται στην κατάσταση ιονισμού j ($j = 0$ για ουδέτερα άτομα, $j = 1$ για απλά ιονισμένα κτλ.). Η μεταβλητή E_i είναι η ενέργεια διέγερσης από τη στάθμη 0 στη στάθμη i , και κ είναι η σταθερά του Boltzmann. Τέλος, $g_{i,j}$ είναι η πολλαπλότητα (ή στατιστικό βάρος) της στάθμης i , και παριστάνει το πλήθος των ενέργειακών υποσταθμών της στάθμης i υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου (δες φαινόμενο Zeeman). Ο συντελεστής $g_{i,j}$ συνδέεται με την ολική στροφορμή J του ατόμου με τη σχέση

$$g_{i,j} = 2J + 1 \quad (3.44)$$

⁵Δες Παράρτημα C για απόδειξη της σχέσης.

Ειδικά για το άτομο του Υδρογόνου ισχύει

$$g_{i,0} = g_i = 2(i+1)^2 \quad i = 0, 1, \dots$$

αφού ο δείκτης j δεν μπορεί να πάρει τιμή διάφορη του 0 (το Υδρογόνο έχει ένα μόνο ηλεκτρόνιο και, αν ιονισθεί, δεν υπάρχει άλλο έτσι ώστε οι αλλαγές των κβαντικών αριθμών του οποίου να αλλάζουν την κβαντική κατάσταση του ιόντος του Υδρογόνου).

Είναι φανερό ότι το άθροισμα

$$n_j = \sum_{i=0}^{\infty} n_{i,j} = \frac{n_{0,j}}{g_{0,j}} \sum_{i=0}^{\infty} g_{i,j} e^{-E_i/(kT)} = \frac{n_{0,j}}{g_{0,j}} Z_j(T) \quad (3.45)$$

όπου $Z_j(T)$ η συνάρτηση επιμερισμού. Η σχέση (3.45) παριστάνει την αριθμητική πυκνότητα των ατόμων που βρίσκονται στην κατάσταση ιονισμού j , ανεξάρτητα από τη στάθμη διέγερσης.

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.43) και (3.45), προκύπτει ο νόμος του Boltzmann στη συνηθισμένη μαθηματική μορφή του

$$\frac{n_{i,j}}{n_j} = \frac{g_{i,j}}{Z_j(T)} e^{-E_i/(kT)} \quad (3.46)$$

η οποία δίνει το λόγο της αριθμητικής πυκνότητας των ατόμων ενός στοιχείου, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση διέγερσης και ιονισμού, προς την αριθμητική πυκνότητα των ατόμων του ίδιου στοιχείου, στην ίδια κατάσταση ιονισμού, ανεξάρτητα από την κατάσταση διέγερσης. Ο παράγοντας $e^{-E_i/(kT)}$ ονομάζεται και παράγοντας Boltzmann.

3.4.2

Νόμος του Saha

Η συναρτησιακή μορφή της σχέσης που μας δίνει τα ποσοστά των ιονισμένων ατόμων μπορεί να υπολογισθεί από τις βασικές αρχές των νόμων της χημικής ισορροπίας. Αν η ύλη στην ατμόσφαιρα του αστέρα βρίσκεται σε ψερμοδυναμική ισορροπία, τότε ο ρυθμός του (απλού) ιονισμού των ατόμων ενός στοιχείου είναι ίσος με το ρυθμό επανασύνδεσής τους. Αυτή η κατάσταση παριστάνεται συμβολικά με τη χημική εξίσωση



όπου A , A^+ και e^- παριστάνουν αντίστοιχα το ουδέτερο άτομο, το ιονισμένο άτομο και το ηλεκτρόνιο. Ας υποθέσουμε ότι N_0, N_i, N_e είναι ο αριθμός των ουδέτερων ατόμων, των ιονισμένων ατόμων και των ηλεκτρονίων αντίστοιχα, τα οποία βρίσκονται σε ένα κουτί όγκου V . Τότε, η εξίσωση του Saha θα είναι:

$$\frac{N_e N_i}{N_0} = S(T, P) \quad (3.47)$$

Η εξίσωση του Saha είναι συνάρτηση της πίεσης και της ψερμοκρασίας, με την υψηλή ψερμοκρασία να ευνοεί τον ιονισμό ενώ η υψηλή πίεση την επανασύνδεση (recombination). Η εξίσωση μας λέει ότι οι σχετικοί αριθμοί τριών τύπων σωματιδίων (με άλλα λόγια ο βαθμός ιονισμού) σε μια κατάσταση ισορροπίας, όταν ο ρυθμός ιονισμού είναι ίσος με τον ρυθμό επανασύνδεσης.

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των σωματιδίων σε ένα συγκεκριμένο ενεργειακό επίπεδο είναι ανάλογος του παράγοντα Boltzmann για το συγκεκριμένο επίπεδο, και ο ολικός αριθμός των σωματιδίων είναι ανάλογος του αθροίσματος των παραγόντων Boltzmann για όλα τα ενεργειακά επίπεδα — δηλαδή, ανάλογος της συνάρτησης επιμερισμού. Έτσι, η εξίσωση του Saha γράφεται

$$\frac{N_e N_i}{N_0} = \frac{Q_e Q_i}{Q_0} \quad (3.48)$$

Όπως είπαμε, η συνάρτηση επιμερισμού είναι το άθροισμα όλων των παραγόντων Boltzmann για όλες τις ενεργειακές καταστάσεις, μεταφορικές (χωρίς περιστροφή) και εσωτερικές (ηλεκτρονιακή δομή). Η ολική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι το άθροισμα της μεταφορικής και εσωτερικής ενέργειας, έτσι ώστε η ολική συνάρτηση επιμερισμού να είναι το γινόμενο των μεταφορικών και εσωτερικών συναρτήσεων επιμερισμού⁶, για τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο u . Έτσι έχουμε:

$$\frac{N_e N_i}{N_0} = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V \frac{u_e u_i}{u_0} \quad (3.49)$$

όπου $m = \frac{m_e m_i}{m_0}$, και διαφέρει πολύ λίγο από το m_e .

Η εσωτερική συνάρτηση επιμερισμού του ηλεκτρονίου ισούται με το στατιστικό του βάρος $2s + 1 = 2$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση με όρους αριθμητικής πυκνότητας ($n = N/V$) και να καταλήξουμε στη συνηθισμένη μορφή της εξίσωσης του Saha:

$$\frac{n_e n_i}{n_0} = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2u_i}{u_0} \exp \left(-\frac{\chi_i}{kT} \right) \quad (3.50)$$

όπου χ_i είναι η ενέργεια ιονισμού.

Η εξίσωση Saha έπειζε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των αστρικών φασμάτων. Όπως έχουμε αναφέρει, η φασματική ταξινόμηση O,B,A,F,G, ... είναι αποτέλεσμα του βαθμού ιονισμού και διέγερσης των χημικών στοιχείων ως συνάρτηση της θερμοκρασίας, ενώ η διαφορά στο βαθμό ιονισμού μεταξύ αστέρων της κύριας ακολουθίας και αστέρες-γίγαντες μιας συγκεκριμένης θερμοκρασίας είναι το αποτέλεσμα του υψηλότερου βαθμού ιονισμού στις σχετικά χαμηλής πίεσης ατμόσφαιρες των αστέρων-γιγάντων.

3.5 Ο Ήλιος ως τυπικός αστέρας

3.5.1

Μακροσκοπικά χαρακτηριστικά

Από τις παρατηρήσεις που έχουμε για τον Ήλιο, γνωρίζουμε πως η φαινόμενη διάμετρός του είναι

$$d = 32' = 9.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

που αντιστοιχεί σε ακτίνα

$$R_{\odot} = 1 \text{ AU} \times \sin \frac{d}{2} = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$$

και η οποία είναι σε γενικές γραμμές σταθερή (πέρα από μερικές μικρές ταλαντώσεις). Η βολομετρική φαινόμενη λαμπρότητα του Ήλιου, δηλαδή η ολική φωτεινή ροή της ακτινοβολίας του Ήλιου σε απόσταση 1 AU ονομάζεται ηλιακή σταθερά, f , και ισούται με

$$f = 1.36 \times 10^6 \text{ erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

⁶Δες σχετικό κεφάλαιο στο Παράρτημα C

Τυποθέτωντας πως ο Ήλιος ακτινοβολεί ισοτροπικά, η ηλιακή σταθερά ισούται με τη λαμπρότητα του Ήλιου (δηλαδή την ισχύ που ακτινοβολεί σε όλο το εύρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος) διαμοιρασμένη στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα την αστρονομική μονάδα

$$L_{\odot} = 4\pi f(1 \text{ AU})^2 = 3.9 \times 10^{33} \text{ erg sec}^{-1}$$

Η ενεργός θερμοκρασία του Ήλιου, όπως υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης

$$L_{\odot} = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$$

είναι $T_{\text{eff}} = 5800 \text{ K}$, ο δε φασματικός τύπος του **G2V**.

Η μάζα του Ήλιου μπορεί να υπολογιστεί είτε από τον τρίτο νόμο του Kepler

$$\frac{A^3}{P^3} = G \frac{M_{\odot} + M_{\oplus}}{4\pi^2}$$

αν θέσουμε $A = 1 \text{ AU}$, $P = 1 \text{ yr}$ και αγνοήσουμε τη μάζα της Γης σε σύγκριση με τη μάζα του Ήλιου, θέτοντας $M_{\oplus} = 0$. Έτσι βρίσκουμε $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33} \text{ gr}$. Ένας άλλος τρόπος είναι από την περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο αν εξισώσουμε την κεντρομόλο δύναμη με την δύναμη της βαρύτητας:

$$F = ma \Rightarrow G \frac{M_{\odot} M_{\oplus}}{d^2} = M_{\oplus} \frac{v^2}{d} \Rightarrow M_{\odot} = \frac{v^2 d}{G}$$

όπου d είναι η μέση απόσταση Γης-Ήλιου, και v η ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από αυτόν. Η ταχύτητα περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο βρίσκεται πολύ απλά

$$v = \frac{2\pi d}{365 \text{ days}} = 30 \text{ km s}^{-1}$$

Έτσι, προκύπτει πάλι $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33} \text{ gr}$.

Η ταχύτητα περιστροφής του Ήλιου γύρω από τον άξονά του μπορεί να μετρηθεί με περισσότερες από μία μεθόδους, λόγω της μικρής απόστασής του από τη Γη. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε τα διάφορα μακρόβια φαινόμενα της επιφάνειάς του (π.χ. κηλίδες) να επανέλθουν στο ίδιο σημείο είναι μία από αυτές. Η μέτρηση της μετατόπισης Doppler των φασματικών γραμμών του φωτός που προέρχεται από το χείλος του Ήλιου είναι μία άλλη. Όλες οι μέθοδοι δίνουν την ίδια γενική εικόνα, αλλά οι τιμές για την ταχύτητα περιστροφής μπορεί να διαφέρουν αισθητά. Οι διαφορές αυτές οφείλονται στο ότι κάθε μέθοδος μετρά την ταχύτητα περιστροφής του ηλιακού υλικού σε διαφορετικές αποστάσεις από το κέντρο του Ήλιου (ή, ισοδύναμα, σε διαφορετικά βάθη από την επιφάνειά του), και αυτές διαφέρουν επειδή ο Ήλιος δεν περιστρέφεται σαν στερεό σώμα, αλλά εκτελεί διαφορική περιστροφή (differential rotation). Ο Ήλιος περιστρέφεται διαφορικά όχι μόνο καιθ' ύψος (ως συνάρτηση δηλαδή της απόστασης από το κέντρο), αλλά και κατά ηλιογραφικό πλάτος. Η περίδος περιστροφής ενός στοιχείου της επιφάνειας του Ήλιου στην περιοχή του Ισημερινού του είναι περίπου 25 μέρες, που αντιστοιχεί σε γραμμική ταχύτητα 2 km s^{-1} , ενώ η περίοδος κοντά στους πόλους είναι μεγαλύτερη από 27 μέρες. Η διαφορά αυτή, αν και δεν έχει εξηγηθεί πλήρως, παίζει κύριο ρόλο στη δημιουργία του μαγνητικού πεδίου του Ήλιου ($\alpha - \omega$ dynamo).

Οι αστέρες μεταγενέστερου φασματικού τύπου, όπως ο Ήλιος, φαίνεται να έχουν παραπλήσιες γραμμικές ταχύτητες ($u \sim 2 \text{ km/s}$). Οι αστέρες όμως προγενέστερων φασματικών τύπων φαίνεται ότι περιστρέφονται πολύ ταχύτερα, με γραμμικές ταχύτητες της τάξης των 200 km/s , που αντιστοιχούν σε περιόδους περιστροφής της τάξης των λίγων ημερών. Η μεγάλη αυτή διαφορά στις ταχύτητες περιστροφής μεταξύ αστέρων προγενέστερων και μεταγενέστερων φασματικών τύπων δεν έχει εξηγηθεί πλήρως, αλλά πιστεύεται ότι έχει σχέση με τον τρόπο δημιουργίας των αστέρων και με την ύπαρξη ή όχι πλανητικών συστημάτων.

3.5.2

Η επιφάνεια του Ήλιου

Σε αυτό το σημείο θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα εξής ερωτήματα: Ποιό είναι το ποσοστό των φωτονίων που παράγονται και τα οποία φτάνουν σε εμάς; Γιατί ο Ήλιος φαίνεται να έχει πολύ καλά καθορισμένο περίγραμμα και γιατί στην άκρη του φαίνεται πιο αμυδρός απ' ότι στο κέντρο του;

Έστω επιφάνεια στο εσωτερικό του Ήλιου από την οποία εκπέμπονται φωτόνια στο οπτικό μήκος κύματος ($\sim 5000 \text{ Å}$) και διέρχονται από τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας του Ήλιου. Έστω ότι το οπτικό βάθος για αυτή την επιφάνεια είναι $\tau_{\nu=5000\text{Å}} \equiv \tau = 6.9$. Από τον όρο που μας δίνει την απόσβεση της ακτινοβολίας, βρίσκουμε ότι:

$$I_{\nu=5000\text{Å}} \equiv I = I(0)e^{-\tau} \Rightarrow \frac{I}{I(0)} = e^{-6.9} = 0.001$$

Άρα, μόνο το 0.1% των παραγόμενων φωτονίων σε αυτή την επιφάνεια φτάνουν σε εμάς. Με άλλα λόγια, όταν κοιτάμε τον Ήλιο, δεν βλέπουμε αυτή την επιφάνεια καθώς όλα τα φωτόνια που εκπέμπηκαν από αυτή, έχουν απορροφηθεί. Με αντίστοιχη λογική βρίσκουμε ότι

- Για επιφάνεια σε οπτικό βάθος $\tau = 4.5$, το 1% των φωτονίων φτάνουν σε εμάς.
- Για επιφάνεια σε οπτικό βάθος $\tau = 1$, το 37% των φωτονίων φτάνουν σε εμάς.
- Για επιφάνεια σε οπτικό βάθος $\tau = 0.7$, το 50% των φωτονίων φτάνουν σε εμάς.

Τελικά, τα φωτόνια που βλέπουμε εμείς, από ποιά επιφάνεια προήλθαν; Η απάντηση είναι από όλες, απλά από την επιφάνεια που αντιστοιχεί σε οπτικό βάθος $\tau = 4.5$, ο αριθμός παραγωγής φωτονίων είναι αρκετός ώστε να αρχίσουμε να τα ανιχνεύουμε.

Προσοχή: Αυτά είναι ποσοστά! Το 10 % μιας επιφάνειας μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερα φωτόνια από το 80 % μιας άλλης επιφάνειας. Πρέπει να θυμόμαστε ότι υπάρχει εξάρτηση και από τον αριθμό των φωτονίων που παράγει η κάθε επιφάνεια. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από την θερμοκρασία όπως γνωρίζουμε από τον νόμο του Planck. Όσο προχωράμε προς το κέντρο του Ήλιου, η θερμοκρασία αυξάνεται και άρα παράγονται περισσότερα φωτόνια. Το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει αβίαστα, καθώς είναι ο μόνος τρόπος για να ερμηνεύσουμε το παρατηρησιακό φαινόμενο της αμαύρωση του χείλους του Ήλιου, κατά το οποίο τα χείλη του Ήλιακου δίσκου φαίνονται στα οπτικά μήκη κύματος πιο αμυδρά (σκοτεινότερα) από το κέντρο του δίσκου. Αν δεχτούμε ότι ως παρατηρητές από τη Γη βλέπουμε φωτόνια που προέρχονται από ένα μέσο βάθος $\tau \approx 1$, τότε όταν κοιτάμε το κέντρο του Ήλιακου δίσκου, η επιφάνεια που αντιστοιχεί σε αυτό το οπτικό βάθος (επιφάνεια A) έχει θερμοκρασία T_{HI} . Όταν κοιτάμε όμως το χείλος του Ήλιακου δίσκου, η επιφάνεια που αντιστοιχεί σε οπτικό βάθος $\tau \approx 1$ (επιφάνεια B) βρίσκεται πιο πάνω από την επιφάνεια A, και έχει θερμοκρασία T_{LO} . Για να είναι λιγότερα τα φωτόνια που εκπέμπει η επιφάνεια B σε σχέση με την επιφάνεια A, θα πρέπει αναγκαστικά $T_{LO} < T_{HI}$ (σχήμα 3.10).

Κάνοντας αναλύτικά τους υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι ο μεγαλύτερος αριθμός φωτονίων με $\lambda = 5000 \text{ Å}$ προέρχονται από τον φλοιό που ορίζεται από την επιφάνεια για την οποία το οπτικό βάθος είναι $\tau = 4.5$ και την επιφάνεια για την οποία το οπτικό βάθος είναι $\tau = 0.7$. Επιφάνειες που βρίσκονται σε ακόμα μικρότερο βάθος από την επιφάνεια με $\tau = 0.7$, ουσιαστικά δεν παράγουν αρκετά οπτικά φωτόνια για να τις συμπεριλάβουμε και απλά θεωρούμε ότι τα φωτόνια που παράγονται στα κατώτερα στρώματα απλά διέρχονται από αυτές. Τον φλοιό αυτό τον ονομάζουμε **φωτόσφαιρα**.

Το ερώτημα τώρα είναι πόσο είναι το πάχος αυτού του σφαιρικού φλοιού που ορίζει τη φωτόσφαιρα του Ήλιου. Θεωρώντας τα $\kappa_{\nu=5000 \text{ Å}} \equiv \kappa, \rho$ σταθερά σε αυτό το πάχος του φλοιού, τότε

$$\Delta S = S_{4.5} - S_{0.7} = \left. \frac{\tau}{\kappa \rho} \right|_{4.5} - \left. \frac{\tau}{\kappa \rho} \right|_{0.7} = \frac{4.5 - 0.7}{\kappa \rho}$$

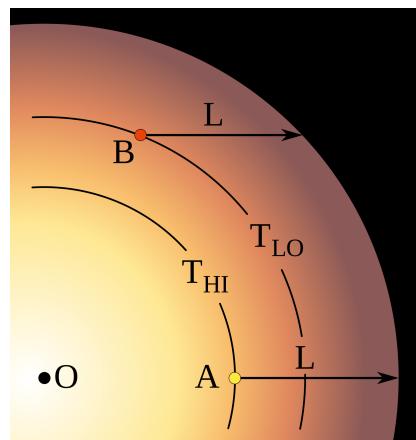


Figure 3.10: Εμηνεία του φαινομένου της αμαύρωσης του χείλους του Ήλιου σε οπτικά μήκη κύματος. Το εξωτερικό δρίο αντιστοιχεί σε ακτίνα στην οποία τα φωτόνια που εκπέμπει ο αστέρας δεν υπόκεινται σε απορρόφηση. Ο παρατηρητής βλέπει στρώματα του Ήλιου που αντιστοιχούν σε οπτικό βάθος $\tau \approx 1$ (απόσταση L). Όταν παρατηρεί προς το κέντρο του Ηλιακού δίσκου, βλέπει βαθύτερα και θερμότερα, και άρα λαμπρότερα στρώματα, απ' ότι όταν παρατηρεί προς το χείλος του Ηλιακού δίσκου.

Αντικαθιστώντας τις τιμές $\kappa = 0.03 \text{ m}^2 \text{kg}^{-1}$ και $\rho = 2.1 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$ για την αδιαφάνεια και την μέση πυκνότητα του Ήλιου, τις οποίες γνωρίζουμε από παρατηρήσεις, προκύπτει ότι το πάχος του φλοιού από τον οποίο προέρχονται η πλειοψηφία των οπτικών φωτονίων είναι

$$\Delta S \simeq 600 \text{ km}$$

Λόγω του πολύ μικρού πάχους του φλοιού αυτού, το οποίο αντιστοιχεί στο 0.1% της ηλιακής ακτίνας, η φωτόσφαιρα πολλές φορές θεωρείται ως η επιφάνεια του Ήλιου. Όι επιφάνειες (και όλες οι ενδιάμεσες) που ορίζουν την φωτόσφαιρα του Ήλιου, χαρακτηρίζονται όπως είπαμε από διαφορετικές θερμοκρασίες καιώς αντιστοιχούν σε διαφορετικά βάθη. Γίνεται αντιληπτό πως η ενεργός θερμοκρασία του Ήλιου δεν χαρακτηρίζει κάποιο συγκεκριμένο στρώμα της φωτόσφαιρας, αλλά αποτελεί έναν εύχρηστο μέσο όρο.

Το εξαιρετικά μικρό πάχος της φωτόσφαιρας απαντάει στο ερώτημα του γιατί ο Ήλιος έχει σαφώς καθορισμένο περίγραμμα καιώς τα τηλεσκόπια δεν έχουν την απαραίτητα διακριτική ικανότητα να ξεχωρίσουν τον μικρό αυτό φλοιό σε σχέση με την ακτίνα του Ήλιου. Αν μπορούσαμε να διακρίνουμε αποστάσεις 600 χιλιομέτρων στον Ήλιο, τότε σαφώς το περίγραμμά του δεν θα ήταν τόσο καθαρό.

3.5.3

Σύνοψη

Η φασματική κατανομή μέλανος σώματος θερμοκρασίας T_{eff} δίνεται από τον νόμο του Planck και σε καλή προσέγγιση συμφωνεί με την παρατηρούμενη φασματική κατανομή της ηλιακής ακτινοβολίας για $T_{\text{eff}} = 5800 \text{ K}$. Παρόλα αυτά, δεν συμπίπτουν τέλεια με τις διαφορές να οφείλονται στους εξής λόγους:

1. Η ακτινοβολία του Ήλιου που φτάνει σε εμάς προέρχεται από διαφορετικά βάθη των εξωτερικών στρωμάτων του Ήλιου, τα οποία έχουν διαφορετικές θερμοκρασίες. Έτσι, η φωτεινή ένταση σε μια φασματική περιοχή είναι το άθροισμα των εντάσεων κατανομών που αντιστοιχούν σε διαφορετικές θερμοκρασίες.
2. Στα μεγάλα (ραδιοφωνικά) και μικρά μήκη κύματος (υπεριώδες, ακτίνες-X κτλ) η ακτινοβολία του Ήλιου δεν είναι θερμικής φύσης, οπότε η έντασή της δεν έχει κανένα λόγο να ακολουθεί τον νόμο του Planck.

3. Το ηλιακό φάσμα παρουσιάζει γραμμές απορρόφησης (γνωστές και ως γραμμές Fraunhofer) οι οποίες ελαττώνουν τη μέση ένταση της ακτινοβολίας σημερινή που εμφανίζονται. Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές στην περιοχή του ορίου συσσώρευσης των γραμμών της σειράς Balmer, που ονομάζεται ασυνέχεια Balmer.
4. Τέλος, η ύλη που ακτινοβολεί θερμικά δεν βρίσκεται σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία, και άρα δεν ισχύει ακριβώς ο νόμος του Planck. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι η απόκλιση της κατανομής της έντασης της ηλιακής ακτινοβολίας από αυτή του μελανού σώματος, λόγω της μη ακριβούς θερμοδυναμικής ισορροπίας, είναι ασήμαντη σε σχέση με τις τρεις προηγούμενες αιτίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Δομή και εξέλιξη αστέρων

Contents

4.1 Εσωτερική δομή αστέρων	57
4.1.1 Μηχανική ισορροπία	58
4.1.2 Θερμική ισορροπία	67
4.1.3 Πηγές ενέργειας των αστέρων	69
4.1.4 Χαρακτηριστικοί χρόνοι	75
4.1.5 Διάδοση ενέργειας στους αστέρες	77
4.1.6 Σύνοψη εξισώσεων αστρικής δομής	90
4.2 Εξέλιξη αστέρων	91
4.2.1 Αφθονία Χημικών Στοιχείων στο Σύμπαν	92
4.2.2 Δημιουργία πρωτοαστέρων	95
4.2.3 Εξέλιξη μετά την κύρια ακολουθία	97

Όλες οι παρατηρούμενες ιδιότητες που έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής, είναι ιδιότητες της επιφάνειας του αστέρα. Γι' αυτό χρειαζόμαστε μια θεωρία αστρικής δομής για να εξάγουμε συμπεράσματα για τις “εσωτερικές” ιδιότητες των άστρων. Παρόλα αυτά, υπάρχουν μερικά παράθυρα για την άμεση παρατήρηση του τι συμβαίνει στο εσωτερικό, όπως παρατηρήσεις νετρίνων (μέχρι στιγμής αυτό ισχύει μόνο για τον Ήλιο) και ταλαντώσεις που μας δίνουν πληροφορίες για την ταχύτητα που ταξιδεύουν τα ηχητικά κύματα στο εσωτερικό και άρα για την πυκνότητα και θερμοκρασία που επικρατούν.

4.1 Εσωτερική δομή αστέρων

Το πρότυπο αστρικής δομής που είναι σήμερα αποδεκτό προτείνει ότι η ενέργεια που ακτινοβολούν οι αστέρες εκλύεται στον πυρήνα τους από θερμοπυρηνικές αντδράσεις σύντηξης. Η ενέργεια αυτή διαδίδεται προς την επιφάνεια του αστέρα είτε με τη μορφή ακτινοβολίας είτε με ρεύματα μεταφοράς ύλης, και τελικά ακτινοβολείται από την επιφάνειά του προς το διάστημα. Για να γνωρίσουμε το εσωτερικό του Ήλιου (και άλλων αστέρων) βασιζόμαστε σε θεωρητικά επιχειρήματα, από τα οποία οδηγούμαστε τελικά σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Το σύστημα αυτό αποτελείται, στην απλούστερη μορφή του, από τέσσερις διαφορικές εξισώσεις και στη μορφή αυτή περιγράφει το θεωρητικό πρότυπο ενός σφαιρικά συμμετρικού, στατικού και μη-περιστρεφόμενου αστέρα, το υλικό του οποίου βρίσκεται σε υδροστατική και τοπική θερμοδυναμική ισορροπία.

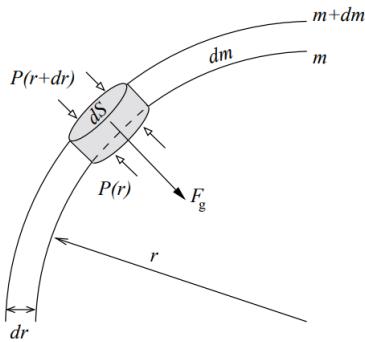


Figure 4.1: Φλοιός σε ακτίνα r και πάχος dr , μέσα σε σφαιρικά συμμετρικό αστέρι. Η μάζα του φλοιού είναι $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Στο σχήμα φαίνεται επίσης η πίεση και η βαρυτική δύναμη που ενεργούν σε ένα στοιχειώδες κυλινδρικό στοιχείο μάζας.

4.1.1

Μηχανική ισορροπία

Η υπόθεση της σφαιρικής συμμετρίας έχει ως συνέπεια ότι όλες οι εξαρτημένες μεταβλητές του προβλήματος (πίεση P , πυκνότητα ρ , θερμοκρασία T κτλ) είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής απόστασης, r , από το κέντρο του αστέρα, $r \in [0, \dots, R]$. Σε ένα αστέρι που εξελλίσεται όπως ύα δούμε με τον χρόνο, όλες οι ποσότητες εξαρτώνται από τον χρόνο αλλά αυτό δεν ύα είναι προφανές από τον τρόπο που ύα παρουσιάζουμε τις εξισώσεις: μία παράγωγος d/dr (ή d/dm) ύα πρέπει να εκλαμβάνεται ως μερική παράγωγος ως προς τη χωρική συντεταγμένη υπό σταθερό χρόνο.

Εξίσωση συνέχειας μάζας Έστω σφαιρικός φλοιός dr σε απόσταση r από το κέντρο του αστέρα (σχήμα 4.1). Η αρχή της διατήρησης μάζας μας δίνει για τη στοιχειώδη μάζα, dm :

$$dm = \rho(r) dV$$

Ο όγκος του φλοιού ύα είναι ουσιαστικά η επιφάνεια της εσωτερικής σφαίρας επί το στοιχειώδες πάχος. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα ως εξής

$$dV = \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left[(r+dr)^3 - r^3 \right] \simeq 4\pi r^2 dr$$

καθώς ο τετραγωνικός και κυβικός όρος του dr στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι περίπου μηδέν όταν $dr \ll r$. Αυτό μας οδηγεί στην πρώτη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την δομή ενός αστέρα, την **εξίσωση συνέχειας μάζας**

$$\boxed{\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)} \quad (4.1)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει το πως κατανέμεται η μάζα, και πως η κατανομή αυτή δεν έχει ασυνέχειες (δεν υπάρχουν τρύπες).

Η ολοκλήρωση της σχέσης (4.1) μας δίνει την μάζα, $m(r)$, που περικλείει ένας σφαιρικός φλοιός ακτίνας r

$$m(r) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (m \in 0, \dots, M) \quad (4.2)$$

Επειδή η μάζα $m(r)$ αυξάνεται μονοτονικά προς την επιφάνεια του αστέρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή ως ακτινική συντεταγμένη αντί του r (δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε μια Λαγκραντζιανή περιγραφή αντί της μεθόδου του Euler). Έτσι η εξίσωση (4.2) περιγράφει τη συντεταγμένη μάζας (mass coordinate), η οποία είναι γενικευμένη συντεταγμένη (Lagrange coordinates) και κινείται μάζι με ένα στοιχειώδες κομμάτι του ρευστού. Αυτή η περιγραφή είναι προτιμότερη πολλές φορές καθώς η ακτίνα του αστέρα είναι συνάρτηση του χρόνου και μεταβάλλεται πολλές τάξεις μεγέθους κατά τη διάρκεια της εξέλιξής του. Αντιθέτα, η μάζα του μπορεί να θεωρηθεί σταθερή σε πρώτη φάση, γεγονός που απλοποιεί μερικές από τις χρονικές παραγώγους στις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την χημική σύσταση του αστέρα όπως θα δούμε. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε όλες τις ποσότητες ως συνάρτηση της μάζας αντί του r ως $r = r(m), \rho = \rho(m), P = P(m)$ κτλ. Κάνοντας τον μετασχηματισμό $r \rightarrow m$, η εξίσωση (4.1) γράφεται ξανά:

$$\frac{d}{dm} = \frac{d}{dr} \cdot \frac{dr}{dm} \rightarrow \boxed{\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho(r)}} \quad (4.3)$$

Το βαρυτικό πεδίο Τα αστέρια είναι αέρια σώματα που υποστηρίζονται από την ίδια τους την βαρύτητα (self-gravitating bodies), πράγμα που σημαίνει ότι η βαρύτητα παίζει καταλυτικό ρόλο στην εξέλιξή τους. Στη γενική, μη-σφαιρική περίπτωση, η βαρυτική επιτάχυνση είναι η κλίση (gradient) του βαρυτικού δυναμικού Φ

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi$$

όπου το Φ είναι λύση της εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \Phi = \begin{cases} 0 & \text{για } r > R \\ 4\pi G \rho & \text{για } r < R \end{cases} \quad (4.4)$$

Για μία σφαιρική κατανομή μάζας M , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο στο κέντρο. Τότε, το βαρυτικό δυναμικό Φ σε απόσταση $r > R$ από το κέντρο, ισούται με το έργο ανά μονάδα μάζας που απαιτείται για να φέρουμε ένα σώμα μάζας m από το άπειρο, σε αυτό το σημείο

$$\Phi = \frac{1}{m} \int_{\infty}^r \mathbf{F}_{\text{gr}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{m} \int_{\infty}^r G \frac{M m}{r^2} dr \Rightarrow \Phi = -\frac{G M}{r} \quad (4.5)$$

Η βαρυτική επιτάχυνση γράφεται απλά $g = d\Phi/dr$ και σε ακτίνα r (ή ισοδύναμα σε συντεταγμένη μάζας m) δίνεται από

$$g = G \frac{m}{r^2} \quad (4.6)$$

Σφαιρικοί φλοιοί που βρίσκονται σε ακτίνα μεγαλύτερη από r δεν εφαρμόζουν κάποια δύναμη, άρα το g εξαρτάται μόνο από την κατανομή της μάζας μέσα στον φλοιό ακτίνας r (shell theorem). Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια του νόμου του Gauss από τον διανυσματικό λογισμό σύμφωνα με τον οποίο "το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα μια διανυσματικής συνάρτησης σε μια κλειστή επιφάνεια S ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης (divergence) της διανυσματικής αυτής συνάρτησης στον όγκο V που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια"

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV \quad (4.7)$$

Θέτωντας $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, προκύπτει ότι το αριστερό μέλος της σχέσης (4.7) γράφεται

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \oint\!\!\!\oint_S (\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = -4\pi r^2 g \quad (4.8)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει από τη σφαιρική συμμετρία του βαρυτικού πεδίου του αστέρα. Λόγω της συμμετρίας αυτής το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα, η οποία μάλιστα έχει σταθερή τιμή πάνω

στη σφαιρική επιφάνεια S . Άρα, με την ένταση του βαρυτικού πεδίου να βγαίνει εκτός ολοκληρώματος, το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισούται με την επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα r . Το μείον προκύπτει επειδή το \mathbf{g} με το διάνυσμα επιφάνειας $d\mathbf{S} = dS \cdot \hat{\mathbf{n}}$ είναι συγγραμμικά αλλά αντίρροπα.

Για το δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.7), πρέπει να βρούμε την απόκλιση της βαρυτικής επιτάχυνσης $(\nabla \mathbf{g})$. Από την εξίσωση Poisson (σχέση (4.4)), προκύπτει ότι

$$\nabla \mathbf{g} = \nabla(-\nabla \Phi) = -\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho \quad (4.9)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.7), (4.8) και (4.9), έχουμε ότι

$$-4\pi r^2 g = -4\pi G \iiint_V \rho dV \Rightarrow g = G \frac{m(r)}{r^2} \quad (4.10)$$

όπου το τριπλό ολοκλήρωμα μας δίνει απλά τη μάζα του αστέρα που περιέχεται μέσα σε μία σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r (σύμφωνα και με τη σχέση (4.2)).

Βαρυτική δυναμική ενέργεια Το να βρούμε τη συνολική βαρυτική δυναμική ενέργεια, E_{gr} , μιας μάζας όπως ο Ήλιος, φαίνεται εκ πρώτης όψεως μάταιο καθώς θα έπρεπε να ανθρίσουμε τη δυναμική ενέργεια που προκαλεί κάθε ζεύγος σωματιδίων που αποτελούν τον Ήλιο. Το πρόβλημα απλουστεύται αν θεωρήσουμε ότι "κατασκευάζουμε" τον αστέρα με το να μεταφέρουμε στοιχειώδη σωματίδια από το άπειρο, ένα προς ένα (γ' αυτό και μερικές φορές αναφέρομαστε στην συνολική βαρυτική δυναμική ενέργεια ως ενέργεια σύνδεσης του αστέρα). Με αυτόν τον τρόπο, μεταφέρουμε ένα κομμάτι ύλης dm στον μερικώς κατασκευασμένο αστέρα, που εκείνη τη στιγμή έχει μάζα m . Το κομμάτι αυτό της ύλης κατανέμεται συμμετρικά γύρω από τον αστέρα σχηματίζοντας έναν σφαιρικό φλοιό πάχους dr . Όπως είπαμε, η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο έξω από μία σφαιρική κατανομή μάζας, όπως αυτή του Ήλιου, είναι ίδια σαν η μάζα να ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο του αστέρα. Γι' αυτό το λόγο, η δυναμική ενέργεια της μάζας dm η οποία κατανέμεται συμμετρικά σε απόσταση r από το κέντρο του αστέρα, είναι ίδια με τη δυναμική ενέργεια που θα είχαμε μεταξύ δύο σημειώσων μαζών dm και m σε απόσταση r μεταξύ τους. Έτσι, η διαφορά στη δυναμική βαρυτική ενέργεια του αστέρα θα ήταν

$$dE_{\text{gr}} = E_{\text{gr}}^{dm}(r) - \overrightarrow{E_{\text{gr}}^{dm}(\infty)} = -G \frac{m(r) dm}{r} \quad (4.11)$$

Ολοκληρώνοντας για όλες τις μάζες dm μέσα στον φλοιό πάχους dr σε απόσταση r από το κέντρο έχουμε

$$dE_{\text{gr}} = -G \int \frac{m(r) dm}{r} \xrightarrow{dm = \rho(r) dV} dE_{\text{gr}} = -G \frac{m(r) \rho(r) 4\pi r^2 dr}{r} \quad (4.12)$$

όπου $dV = 4\pi r^2 dr$ ο όγκος του σφαιρικού φλοιού πάχους dr .

Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς την ακτίνα του αστέρα, παίρνουμε την ολική βαρυτική δυναμική ενέργεια

$$E_{\text{gr}} = -4\pi G \int_0^R m(r) \rho(r) r dr \quad (4.13)$$

Γενικά, πρέπει να γνωρίζουμε το $\rho(r)$ για να βρούμε τη μάζα $m(r)$ η οποία είναι κι αυτή το ολοκλήρωμα

$$m(r) = \int_0^r dm = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr$$

Υποθέτωντας ότι

$$\rho(r) \approx \langle \rho \rangle = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \longrightarrow m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \langle \rho \rangle \quad (4.14)$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{aligned}
 E_{\text{gr}} &= -4\pi G \int_0^R \frac{4}{3}\pi r^3 \langle \rho \rangle^2 r dr \\
 &= -4\pi G \left(\frac{4\pi}{3} \right) \int_0^R r^4 \left(\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{\text{gr}} &= -\frac{3Gm^2}{5R}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Τδροστατική ισορροπία Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την αρχή διατήρησης της ορμής μέσα σε ένα αστέρι, δηλαδή με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Η επιτάχυνση που δέχεται ένα στοιχειώδες κομμάτι αερίου καθορίζεται από το άνθροισμα όλων των δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό. Πέρα από την βαρυτική δύναμη, υπάρχουν και άλλες δυνάμεις που οφείλονται στην πίεση που ασκούν τα γειτονικά στρώματα αερίου πάνω στο υπό εξέταση στοιχειώδες κομμάτι. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, οι δυνάμεις πίεσης που ασκούνται οριζόντια (κάθετα στην ακτινική διεύθυνση) εξισορροπούνται μεταξύ τους και άρα μόνο η δύναμη της πίεσης που ενεργεί κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης πρέπει να ληφθεί υπόψιν. Άρα, η επιτάχυνση, \ddot{r} , που δέχεται ένα στοιχειώδες κομμάτι αερίου μάζας

$$dm = \rho dr dS \tag{4.16}$$

όπου dr, dS είναι το στοιχειώδες πάχος και η στοιχειώδης οριζόντια επιφάνεια του κυλίνδρου (σχήμα 4.1), θα είναι:

$$\begin{aligned}
 dm \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} &\equiv \ddot{\mathbf{r}} dm = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_{r+dr} = \\
 &= -g dm + P(r) dS - P(r+dr) dS = \\
 &= -g dm + dS \underbrace{[P(r) - P(r+dr)]}_{-dP} = \\
 &= -g dm - dP dS \Rightarrow \ddot{r} = -g - \frac{dP}{dm} dS \\
 \xrightarrow{(4.6), (4.16)} \ddot{r} &= -G \frac{m}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Η σχέση (4.17) είναι η εξίσωση κίνησης για ένα στοιχειώδες κομμάτι αερίου μέσα στον αστέρα.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3) στην βαθμίδα της πίεσης (pressure gradient), μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα την εξίσωση κίνησης εκφρασμένη σε συντεταγμένες μάζας ως

$$\ddot{r} = -G \frac{m}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{dP}{dm} \tag{4.18}$$

Το γεγονός ότι η ακτίνα του Ήλιου παραμένει σταθερή εδώ και εκατομμύρια χρόνια, το γνωρίζουμε τόσο από ηλιακές όσο και γεωλογικές παρατηρήσεις. Εφόσον λοιπόν ο Ήλιος ούτε συστέλλεται ούτε

διαστέλλεται, οι δυνάμεις που ασκούνται σε καθεμιά από τις δύο πλευρές κάθε επιφάνειας στο εσωτερικό του θα είναι ίσες και αντίθετες (σε αντίθετη περίπτωση η επιφάνεια αυτή δεν θα παρέμεινε ακίνητη). Με άλλα λόγια, η επιτάχυνση κατά την ακτινική διεύθυνση θα είναι μηδέν. Θέτωντας $\ddot{r} = 0$ στην εξίσωση κίνησης που δίνεται από τη σχέση (4.17), προκύπτει ότι

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \quad (4.19)$$

ή, ισοδύναμα, σε συντεταγμένες μάζας

$$\frac{dP}{dm} = -G \frac{m(r)}{4\pi r^4} \quad (4.20)$$

Η εξίσωση (4.19) αποτελεί τη δεύτερη διαφορική εξίσωση της αστρικής δομής, ονομάζεται εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας, και ισχύει όταν ο αστέρας βρίσκεται σε μηχανική ισορροπία (όταν δηλαδή οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στοιχειώδες κομμάτι αερίου, εξισορροπούνται μεταξύ τους). Μαζί με την εξίσωση συνέχειας της μάζας (σχέση (4.1)), προσδιορίζουν την μηχανική δομή (mechanical structure) ενός αστέρα.

Άμεση συνέπεια της εξίσωσης (4.19), είναι ότι η πίεση σε έναν αστέρα που βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία πρέπει να αυξάνεται όσο πλησιάζουμε το κέντρο του, ώστε να μπορεί να υποστηρίξει το βάρος των υπερεκίμενων στρωμάτων.

Παρατήρηση: Ένα αντικείμενο για να βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, πρέπει να έχει αρκετή μάζα ώστε η βαρυτική δύναμη να είναι υπολογίσιμη. Έτσι, σώματα όπως η Σελήνη ή η Γη βρίσκονται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, αλλά αντικείμενα όπως οι αστερεοιδείς όχι. Τα αντικείμενα αυτά υποστηρίζονται από τη φυσική ακαμψία τους (rigidity) η οποία οφείλεται στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις των μορίων που τα αποτελούν.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για να καταλήξουμε στην εξίσωση (4.19) δεν κάναμε καμία υπόθεση για τη φύση της πίεσης που υπεισέρχεται στην εξίσωση αυτή, δηλαδή για τους μικροφυσικούς μηχανισμούς που παρουσιάζονται μακροσκοπικά ως πίεση. Από τη βασική Φυσική είναι γνωστοί ήδη δύο τέτοιοι μηχανισμοί, που μακροσκοπικά χαρακτηρίζονται ως πίεση αερίου, P_{gas} , και πίεση ακτινοβολίας, P_{rad} . Στη συνέχεια θα συναντήσουμε και έναν τρίτο μηχανισμό, που χαρακτηρίζεται μακροσκοπικά ως πίεση εκφυλισμένης ύλης, P_{deg} . Στη γενικότερη περίπτωση λοιπόν θα πρέπει να χρησιμοποιούμε την ολική πίεση

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} + P_{\text{deg}}$$

όπου η πίεση του αερίου δίνεται από τον νόμο των τέλειων αερίων (σχέση (4.25)), και η πίεση της ακτινοβολίας, P_{rad} , από τη σχέση (3.24). Ευτυχώς στο μεγαλύτερο ποσοστό των αστέρων, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνεται και ο Ήλιος, η πίεση της ακτινοβολίας και η πίεση της εκφυλισμένης ύλης είναι αμελητέες συγχρινόμενες με την πίεση του αερίου, και μπορούμε άντετα να τις παραλέιψουμε. Οι πίεσεις P_{rad} και P_{deg} γίνονται σημαντικές στις περιπτώσεις των πολύ μεγάλων, σε μάζα, αστέρων (η πρώτη) και των πολύ μικρών, σε διαστάσεις, αστέρων (η δεύτερη). Η ολοένα και αυξανόμενη πίεση της ακτινοβολίας όσο αυξανεται η μάζα των αστέρων είναι αυτή που θέτει και ένα ανώτερο όριο στη μάζα που μπορεί να έχει ένας αστέρας. Από κάποια οριακή τιμής της μάζας και πάνω, η πίεση της ακτινοβολίας είναι τόσο μεγάλη που καταστρέφει το αστέρι.

Καταστατικές εξισώσεις Οι εξισώσεις (4.3) και (4.20) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστες συναρτήσεις του m (r, P και ρ), οπότε δεν μπορούν να λυθούν χωρίς μία τρίτη συνθήκη. Αυτή η συνθήκη είναι συνήθως μία σχέση μεταξύ της πίεσης, P , και της πυκνότητας μάζας, ρ , την οποία ονομάζουμε καταστατική εξίσωση (equation of state). Γενικά, η καταστατική εξίσωση εξαρτάται και από τη θερμοκρασία, T , οπότε η μηχανική δομή ενός αστέρα εξαρτάται

επίσης και από την κατανομή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του, δηλαδή από τη θερμική δομή του. Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, η καταστατική εξίσωση είναι ανεξάρτητη της T , και μπορεί να γραφτεί ως $P = P(\rho)$. Σε αυτές τις περιπτώσεις (γνωστές ως βαρυτροπικές ή πολυτροπικές), η μηχανική δομή ενός αστέρα γίνεται ανεξάρτητη από τη θερμική δομή του. Μία τέτοια περίπτωση είναι αυτή των λευκών νάνων όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Γίνεται αντιληπτό πως η καταστατική εξίσωση περιγράφει τις μικροσκοπικές ιδιότητες της αστρικής ύλης, για μία δεδομένη πυκνότητα μάζας ρ , θερμοκρασία T , και χημικής σύστασης X_i . Συνήθως εκφράζεται ως σχέση μεταξύ της πίεσης και αυτών των ποσοτήτων:

$$P = P(\rho, T, X_i) \quad (4.21)$$

Αν θεωρήσουμε αρχικά για λόγους απλότητας πως ένας αστέρας αποτελείται εξ' ολοκλήρου από Υδρογόνο και συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο, τότε η καταστατική εξίσωση θα δίνεται από την γνωστή καταστατική εξίσωση των τέλειων αερίων

$$P(r) = n(r)kT = \frac{\rho}{m_H}kT \quad (4.22)$$

Θεωρώντας τώρα ότι ένας αστέρας αποτελείται από διάφορα χημικά στοιχεία, η μάζα μπορεί να αντικατασταθεί από τη μέση μάζα του αέριου μείγματος, \bar{m} , ώστε

$$P = \frac{\rho}{\bar{m}}kT \quad (4.23)$$

Ορίζοντας την ποσότητα του μέσου μοριακού βάρους

$$\mu \equiv \frac{\bar{m}}{m_H} \quad (4.24)$$

η καταστατική εξίσωση για ένα μείγμα ιδανικού αερίου θα είναι

$$P = \frac{\rho}{\mu m_H}kT \quad (4.25)$$

Προφανώς ο βαθμός ιονισμού του αερίου, κβαντομηχανικά (εκφυλισμός) και σχετικιστικά φαινόμενα επηρεάζουν την μορφή της καταστατικής εξίσωσης που πρέπει να λάβουμε υπόψιν κάθε φορά που θέλουμε να μελετήσουμε τη δομή ενός αστέρα.

Η πίεση σχετίζεται και με την εσωτερική ενέργεια ενός αερίου. Για καταστατικές εξισώσεις αερίων που δεν είναι ιδανικά, υπάρχει μία σχέση μεταξύ της πίεσης και της εσωτερικής ενέργειας, την οποία μπορούμε να γράψουμε γενικά

$$E_{\text{int}} = \phi \frac{P}{\rho} \quad (4.26)$$

Για το ιδανικό αέριο, η μέση εσωτερική ενέργεια ισούται με τη μέση κινητική ενέργεια (λόγω της θερμικής κίνησης των σωματιδίων) καθώς σε ένα μονοατομικό ιδανικό αέριο, τα σωματίδια δεν δονούνται και δεν περιστέφονται. Επομένως, η συνεισφορά της θερμικής (κινητικής) ενέργειας λαμβάνεται υπόψιν ώστε

$$\frac{\langle E_{\text{int}} \rangle}{N} = \frac{\langle E_{\text{kin}} \rangle}{N} = \frac{3}{2}kT \quad (4.27)$$

όπου $N = \bar{m}/(\mu m_H)$ είναι ο αριθμός των σωματιδίων. Οπότε για την περίπτωση του ιδανικού αερίου, $\phi = 3/2$. Αποδεικνύεται ότι αυτό ισχύει όχι μόνο στην περίπτωση του ιδανικού αερίου, αλλά για όλα τα μη-σχετικιστικά σωματίδια. Αντίθετα, αν θεωρήσουμε ένα αέριο που αποτελείται από σχετικιστικά σωματίδια, κυρίως φωτόνια (πίεση ακτινοβολίας), τότε προκύπτει ότι $\phi = 3$.

Με την καταστατική εξίσωση βρήκαμε μία σχέση μεταξύ της πίεσης και της πυκνότητας μάζας, αλλά εμφανίστηκε η άγνωστη παράμετρος της θερμοκρασίας. Το ότι η θερμοκρασία δεν είναι σταθερή σε όλη τη μάζα του αστέρα το γνωρίζουμε από διάφορα παρατηρησιακά δεδομένα όπως έχουμε πει, π.χ. αμαύρωση του χείλους, γραμμές απορρόφησης, και ότι το συνεχές φάσμα δεν ταυτίζεται με αυτό του μέλανος σώματος. Χρειαζόμαστε άρα και μία εξίσωση για το πως αλλάζει η θερμοκρασία προκειμένου να κλείσει το σύστημα των εξισώσεων.

Θεώρημα virial Μία από τις συνέπεις της υδροστατικής ισορροπίας, είναι το θεώρημα virial. Το θεώρημα αυτό είναι παιζει καθοριστικό ρόλο σε διάφορα πεδία της Αστροφυσικής καθώς συνδέει δύο διαθέσιμες "δεξαμενές" ενέργειας επιτρέποντάς μας να ερμηνεύσουμε και να κάνουμε προβλέψεις για διάφορες φάσεις της αστρικής εξέλιξης.

Για να καταλήξουμε στο θεώρημα virial ξεκινάμε από την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας, (4.20). Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με τον εσώκλειστο όγκο $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ και ολοκληρώνοντας ως προς τη μάζα έχουμε

$$\int_0^M \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{dP}{dm} dm = -\frac{1}{3} \underbrace{\int_0^M \frac{Gm}{r} dm}_{=-E_{gr}} \Rightarrow \int_C^S V dP = \frac{1}{3} E_{gr}$$

όπου οι τιμές S, C δηλώνουν επιφανειακές και κεντρικές τιμές αντίστοιχα. Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος μπορεί να λυθεί κατά παράγοντες ώστε

$$\begin{aligned} V P|_C^S - \int_C^S P dV &= \frac{1}{3} E_{gr} \Rightarrow V_S \cancel{P}_S^0 - V_C \cancel{P}_C^0 - \\ - \int_C^S P dV &= \frac{1}{3} E_{gr} \xrightarrow{dV=\rho dm} \boxed{E_{gr} = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Η σχέση (4.28) αποτελεί τη γενική μορφή του θεωρήματος virial και μας δείχνει ότι η μέση πίεση που χρειάζεται για να υποστηριχτεί ένας αστέρας σε υδροστατική ισορροπία είναι ίση με το $-\frac{1}{3} \frac{E_{gr}}{V}$. Συγκεκριμένα, μας δείχνει ότι ένας αστέρας ο οποίος συστέλλεται σχεδόν στατικά (δηλαδή αρκετά αργά ώστε να παραμένει σε υδροστατική ισορροπία) πρέπει να αυξάνει την εσωτερική του πίεση, αφού η βαρυτική δυναμική ενέργεια, E_{gr} , μειώνεται όσο μικραίνει η ακτίνα του αστέρα και γίνεται πιο συμπαγές (more tightly bound).

Όπως έχουμε πει, η πίεση σχετίζεται με την εσωτερική ενέργεια ενός αερίου. Στην περίπτωση που το αέριο αυτό είναι ιδανικό, τότε από τις σχέσεις (4.25), (4.27) και (4.28), προκύπτει ότι

$$\langle E_{int} \rangle = \langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \mu m_H \longrightarrow u = \frac{\langle E_{int} \rangle}{\mu m_H}$$

όπου με u συμβολίζουμε την εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, και άρα η μορφή του θεωρήματος virial είναι

$$E_{gr} = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = -2 \underbrace{\int_0^M u dm}_{E_{int}} \rightarrow \boxed{E_{int} = -\frac{1}{2} E_{gr}} \quad (4.29)$$

Η σχέση (4.29) θεμελιώνει ένα σύνδεσμο μεταξύ της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της εσωτερικής (θερμικής) ενέργειας ενός αστέρα σε υδροστατική ισορροπία, ο οποίος αποτελείται από ιδανικό αέριο. Το θεώρημα virial μας λέει ότι όσο πιο συμπαγής γίνεται ένας αστέρας θα πρέπει να έχει και μεγαλύτερη

εσωτερική ενέργεια, δηλαδή να είναι πιο θερμός. Με άλλα λόγια, ένας αστέρας που συστέλλεται σχεδόν στατικά πρέπει να γίνεται ολοένα και θερμότερος κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Το τι συνεπάγεται αυτό θα φανεί σε λίγο όταν αναλογιστούμε την ολική ενέργεια του αστέρα.

Στην περίπτωση που το αέριο δεν μπορεί να θεωρηθεί ιδανικό, δείξαμε ότι η σχέση μεταξύ της πίεσης και της εσωτερικής ενέργειας θα δίνεται από μία σχέση της μορφής της (4.26). Για $\phi = 3/2$ το αέριο είναι ιδανικό, ενώ για $\phi = 3$ το αέριο αποτελείται από σχετικιστικά σωματίδια. Αν το ϕ είναι σταθερό, τότε ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.28), καταλήγουμε σε μια ακόμα πιο γενική μορφή του θεωρήματος virial

$$E_{\text{gr}} = -\frac{3}{\phi} \int_0^M \langle E_{\text{int}} \rangle dm \Rightarrow E_{\text{int}} = -\frac{1}{3} \phi E_{\text{gr}} \quad (4.30)$$

Ολική ενέργεια αστέρων Η ολική ενέργεια ενός αστέρα είναι το άθροισμα της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, της εσωτερικής του ενέργειας, και της κινητικής ενέργειας (λόγω της μαζικής κίνησης –bulk motion– του αερίου μέσα στον αστέρα και όχι λόγω της θερμικής κίνησης των σωματιδίων του αερίου).

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{gr}} + E_{\text{int}} + E_{\text{kin}} \quad (4.31)$$

Ένας αστέρας εξακολουθεί να είναι δέσμιος (bound) όσο η ολική του ενέργεια είναι αρνητική.

Για έναν αστέρα σε υδροστατική ισορροπία μπορούμε να θέσουμε $E_{\text{kin}} = 0$. Επίσης, για τον αστέρα που βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία ισχύει το θεώρημα virial, οπότε E_{gr} και E_{int} είναι στενά συνδεδμένες μέσω της σχέσης (4.30). Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.30) και (4.31) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{gr}} + E_{\text{int}} = \left(\frac{\phi - 3}{\phi} \right) E_{\text{int}} = \left(1 - \frac{\phi}{3} \right) E_{\text{gr}} \quad (4.32)$$

Παρατηρούμε ότι όσο το $\phi < 3$, ο αστέρας είναι δέσμιος. Αν θέσουμε $\phi = 3/2$, παίρνουμε την περίπτωση του ιδανικού αερίου οπότε η σχέση (4.32) γράφεται

$$E_{\text{tot}} = -E_{\text{int}} = \frac{1}{2} E_{\text{gr}} < 0 \quad (4.33)$$

δηλαδή βλέπουμε πως για έναν τέτοιον αστέρα, η ολική του ενέργεια ισούται με το μισό της βαρυτικής δυναμικής του ενέργειας.

Αν η κυρίαρχη πίεση στο εσωτερικό ενός αστέρα είναι η πίεση της ωκτινοβολίας ($\phi = 3$), τότε βλέπουμε ότι η ολική του ενέργεια ισούται με μηδέν, καθώς $E_{\text{int}} = -E_{\text{gr}}$. Για αυτό το λόγο, αστέρες που υποστηρίζονται από την πίεση σχετικιστικών σωματιδίων είναι οριακά δέσμιοι, και συνεπώς εξαιρετικά ευαίσθητοι σε διαταραχές που μπορούν να οδηγήσουν στην κατάρρευση ή την έκρηξη του αστέρα.

Από την σχέση (4.33) προκύπτει ότι το θεώρημα virial έχει τις εξής συνέπειες:

- Βαρυτικά δέσμιες σφαίρες αερίων πρέπει να είναι θερμές για να διατηρήσουν υδροστατική ισορροπία: η θερμότητα παρέχει την πίεση που απαιτείται για να εξισορροπιστεί η βαρύτητα. Όσο πιο συμπαγές είναι μία τέτοια σφαίρα, τόσο πιο δέσμια θεωρείται, και άρα περισσότερο θερμή.
- Μία θερμή σφαίρα αερίων ωκτινοβολεί ενέργεια στον τριγύρω χώρο σύμφωνα με τον νόμο των Stefan-Boltzmann. Άρα, ο αστέρας πρέπει να χάνει ενέργεια από την επιφάνειά του. Ο ρυθμός με τον οποίο ωκτινοβολείται αυτή η ενέργεια από την επιφάνεια είναι η λαμπρότητα του αστέρα. Αν δεν υπάρχει κάποια εσωτερική πηγή ενέργειας, τότε αυτή η απώλεια ενέργειας πρέπει να είναι ίση με την μείωση της ολικής ενέργειας του αστέρα

$$L = -\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} > 0 \quad (4.34)$$

εφόσον θεωρούμε ότι το L είναι θετικό.

- Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της σχέσης (4.33), βρίσκουμε ότι ως συνέπεια του ότι ο αστέρας χάνει ενέργεια:

$$\dot{E}_{\text{gr}} = -2L < 0 \quad (4.35)$$

δηλαδή ο αστέρας συστέλλεται (γίνεται πιο δέσμιος), καθώς επίσης

$$\dot{E}_{\text{int}} = L > 0 \quad (4.36)$$

που σημαίνει ότι ο αστέρας γίνεται πιο θερμός — σε αντίθεση με τα καθημερινά αντικείμενα όπου γίνονται πιο ψυχρά καθώς χάνουν ενέργεια. Γι' αυτό το λόγο, ένας αστέρες λέγεται ότι έχει αρνητική θερμοχωρητικότητα. Η μισή ενέργεια που απελευθερώνεται από τη συστολή του αστέρα χρησιμοποιείται για τη θέρμανση του αστέρα, ενώ η άλλη μισή ακτινοβολείται από την επιφάνεια.

- Όσο ο αστέρας είναι στην κύρια ακολουθία μετατρέποντας Τδρογόνο σε Ήλιο (όπως θα δούμε αργότερα μέσω θερμοπυρηνικής σύντηξης), το μέσο μοριακό βάρος του αυξάνεται. Αυτό οδηγεί σε μεγαλύτερη εσωτερική ενέργεια, και σύμφωνα με το θεώρημα virial ο αστέρας πρέπει να συσταλλέψει προκειμένου να διατηρήσει την πίεση που χρειάζεται ώστε να αντισταθμιστεί η βαρύτητα.

Κεντρική πίεση και θερμοκρασία αστέρων Μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση για την τάξη μεγέθους της πίεσης που επικρατεί στο κέντρο των αστέρων αν θέσουμε στην εξίσωση (4.20),

$$\frac{dP}{dm} \sim \frac{\cancel{P_S}^0 - P_C}{\cancel{M_S} - \cancel{M_C}} \approx -\frac{P_C}{M} \quad (4.37)$$

όπου υποθέσαμε ότι η πίεση στην επιφάνεια και η μάζα στο κέντρο του αστέρα είναι πρακτικά μηδέν. Θέτωντας $m \sim \frac{1}{2}M$ και $r \sim \frac{1}{2}R$ στο δεύτερο μέλος της σχέσης (4.20), προκύπτει ότι

$$P_C \sim \frac{2}{\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad (4.38)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας, θεωρώντας την πυκνότητα σταθερή $\langle \rho \rangle \approx 3M/(4\pi R^3)$.

Για τον Ήλιο, η σχέση (4.38) μας δίνει

$$P_C \sim 7 \times 10^9 \text{ atm} = 7 \times 10^{15} \text{ dyn/cm}^2$$

Μπορούμε να βρούμε ένα κατώτερο όριο για την κεντρική πίεση αν γράψουμε τη σχέση (4.20) ως

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{dm}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{Gm^2}{8\pi r^4} \right) - \frac{Gm^2}{2\pi r^5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dr} \left(P + \frac{Gm^2}{8\pi r^4} \right)}_{\Psi(r)} = -\frac{Gm^2}{2\pi r^5} < 0 \end{aligned}$$

Η ποσότητα $\Psi(r) = P + \frac{Gm^2}{8\pi r^4}$, είναι λοιπόν μία συνάρτηση που μειώνεται με το r . Στο κέντρο του αστέρα, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται επειδή $m \propto r^3$ για μικρά r , οπότε $\Psi(0) = P_C$. Στην επιφάνεια του αστέρα, η πίεση είναι πρακτικά μηδέν και άρα $\Psi(R) = \frac{GM^2}{8\pi R^4}$. Αφού η ποσότητα Ψ πρέπει να μειώνεται με την απόσταση r , συνεπάγεται πως $\Psi(0) > \Psi(R)$ και άρα

$$P_C > \frac{1}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad (4.39)$$

Σε αντίθεση με την σχέση (4.38), αυτό είναι ένα αυστηρό μαθηματικό αποτέλεσμα που ισχύει για κάθε αστέρα σε υδροστατική ισορροπία, ανεξάρτητα από τις άλλες ιδιότητές του (συγκεκριμένα, ανεξάρτητα από την κατανομή της πυκνότητάς του). Για τον Ήλιο προκύπτει ότι $P_C > 4.4 \times 10^{14} \text{ dyn/cm}^2$. Και οι δύο εκτιμήσεις δείχνουν ότι χρειάζονται πολύ υψηλές τιμές της κεντρικής πίεσης για να κρατήσουν τον Ήλιο σε υδροστατική ισορροπία.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα virial μπορούμε να κάνουμε μία εκτίμηση για την μέση θερμοκρασία που επικρατεί σε έναν αστέρα που αποτελείται από ιδανικό αέριο. Η βαρυτική ενέργεια βρήκαμε από τη σχέση (4.15) ότι είναι

$$E_{\text{gr}} = -\alpha \frac{GM^2}{R}$$

όπου η σταθερά α είναι της τάξης της μονάδας και καθορίζεται από την κατανομή της μάζας στον αστέρα, δηλαδή το προφίλ της πυκνότητάς του. Η εσωτερική ενέργεια όμως είναι

$$u = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_H} = \frac{E_{\text{int}}}{\mu m_H} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \longrightarrow$$

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_H} \int T dm = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_H} \langle T \rangle M$$

όπου $\langle T \rangle$ είναι η μέση θερμοκρασία υπολογισμένη σε όλους τους φλοιούς. Έτσι, από το θεώρημα virial έχουμε

$$2E_{\text{int}} = -E_{\text{gr}} \longrightarrow \langle T \rangle = \frac{\alpha \mu m_H}{3 k} \frac{GM}{R} \quad (4.40)$$

Θέτωνας $\alpha \approx 1$ και $\mu = 0.5$ για ιονισμένο Υδρογόνο, προκύπτει ότι για τον Ήλιο $\langle T \rangle \sim 4 \times 10^6 \text{ K}$. Αυτή είναι η μέση θερμοκρασία που απαιτείται για να παρέχει την κατάλληλη πίεση ώστε να κρατάει τον Ήλιο σε υδροστατική ισορροπία. Επειδή η θερμοκρασία σε έναν αστέρα συνήθως μειώνεται όσο πλησιάζουμε την επιφάνεια, αυτή η εκτίμηση είναι επίσης και ένα κατώτερο όριο για την κεντρική θερμοκρασία του Ήλιου. Σε αυτές τις θερμοκρασίες, το Υδρογόνο και το Ήλιο είναι όντως τελείως ιονισμένα.

4.1.2

Θερμική ισορροπία

Από παρατηρήσεις γνωρίζουμε πως ο Ήλιος συνεχώς εκπέμπει ενέργεια από την επιφάνειά του αλλά T_{eff} παραμένει περίπου σταθερή. Αυτό σημαίνει πως ο Ήλιος βρίσκεται σε μία στατική κατάσταση. Εαν υπάρχουν εσωτερικές πηγές ενέργειας στους αστέρες, τότε η ενέργεια που χάνεται από την επιφάνεια μπορεί να αναπληρωθεί:

$$L = L_{\text{source}} = - \frac{dE_{\text{source}}}{dt}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ολική ενέργεια του αστέρα διατηρείται και η εξίσωση (4.33) μας λέει ότι

$$\dot{E}_{\text{tot}} = \dot{E}_{\text{int}} = \dot{E}_{\text{gr}} = 0$$

Το θεώρημα virial μας υποδεικνύει τότε πως οι $E_{\text{int}}, E_{\text{gr}}$ διατηρούνται επίσης: ο αστέρας δεν μπορεί για παράδειγμα να συσταλλεί και να ψυχθεί ενώ διατηρεί την ολική του ενέργεια σταθερή.

Σε αυτή την στατική κατάσταση, την οποία όμως ονομάζουμε **θερμική ισορροπία**, η ενέργεια ακτινοβολείται από την επιφάνεια του αστέρα με τον ίδιο ρυθμό που παράγεται στο εσωτερικό του. Ο αστέρας δεν συστέλλεται ούτε διαστάλλεται, διατηρώντας μία σταθερή εσωτερική θερμοκρασία. Όπως όμως, αυτή η θερμοκρασία ρυθμίζεται από τις πυρηνικές αντιδράσεις που συμβαίνουν στον πυρήνα του, που σε συνδυασμό με το θεώρημα virial λειτουργούν ως αστρικός θερμοστάτης. Αυτό συμβαίνει γιατί αν η ενέργεια

διαφέγγει με ταχύτερο ρυθμό απ' ότι παράγεται, τότε το εσωτερικό ψύχεται. Αυτό σημαίνει ότι ελλατώνεται η πίεση του αερίου, και ο αστέρας συστέλλεται. Άλλα όσο ο αστέρας συστέλλεται, η πυκνότητα αυξάνει και η απελευθέρωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας πηγαίνει στη θέρμανση του υλικού. Αυτή η διαδικασία αυξάνει τον ρυθμό των πυρηνικών αντιδράσεων, παράγωντας περισσότερη ενέργεια. Όταν επέλθει μία ισορροπία μεταξύ του ρυθμού παραγωγής ενέργειας και την ροή της διαφέγγουσας ενέργειας, ο αστέρας έχει φτάσει σε μία σταθερή θερμική δομή, και δεν χρειάζονται περισσότερες προσαρμογές στην δομή. Αστέρες της κύριας ακολουθίας, όπως ο Ήλιος, είναι σε θερμική ισορροπία και παραμένουν σε αυτή την κατάσταση για όσο διάστημα οι πυρηνικές αντιδράσεις μπορούν να παρέχουν την κατάλληλη ενέργεια.

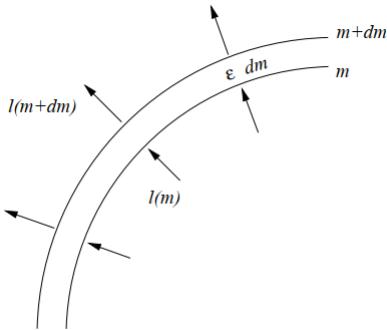


Figure 4.2: Παραγωγή ενέργειας και ροή θερμότητας προς και από σφαιρικό φλοιό μάζας dm .

Έστω ότι θεωρούμε έναν σφαιρικό, Λαγκραντζιανό φλοιό σταθερής μάζας dm μέσα σε έναν αστέρα (σχήμα 4.2). Άλλαγές στο ποσό θερμότητας ($dQ = dq dm$) μπορεί να οφείλονται σε διάφορες πηγές ή καταβόθρες:

- Θερμότητα εναποτίθεται από την ενέργεια που παράγουν οι πυρηνικές αντιδράσεις. Ο ρυθμός της ενέργειας ανά μονάδα μάζας και χρόνου είναι ϵ_{nuc} .
- Θερμότητα μπορεί να διαρρέει λόγω ακτινοβολίας νετρίνο, τα οποία δεν αλληλεπιδρούν σχεδόν καθόλου με την ύλη και διαφέγγουν από την επιφάνεια του αστέρα ανεμπόδιστα. Τα νετρίνο δημιουργούνται είτε ως παραγωγα συγκεκριμένων πυρηνικών αντιδράσεων, οπότε και συνυπολογίζονται στην ϵ_{nuc} , είτε λόγω ασθενών αλληλεπιδράσεων στην περίπτωση που έχουμε πολύ πυκνό και θερμό πλάσμα. Η ενέργεια που χάνεται (ανά μονάδα μάζας και χρόνου) λόγω των νετρίνο συμβολίζεται με ϵ_ν και παίζει μεγάλο ρόλο στην ψύξη του πυρήνα σε μεταγενέστερα στάδια της εξέλιξης ενός αστέρα.
- Απορρόφηση ή εκπομπή θερμότητας, σύμφωνα με την ισορροπία μεταξύ της θερμικής ροή που εισέρχεται στο κατώτερο μέρος του φλοιού και της θερμικής ροής που εξέρχεται από το ανώτερο στρώμα του φλοιού. Ορίζουμε έτσι ένα νέο μέγεθος, τη τοπική λαμπρότητα (local luminosity), ως τον ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια με τη μορφή θερμότητας κινείται προς τα εξωτερικά στρώματα διαμέσου μιας σφαιρικής ακτίνας r . Σε σφαιρική συμμετρία η τοπική λαμπρότητα συνδέεται με την ακτινική ροή ενέργειας F μέσω της σχέσης

$$l = 4\pi r^2 F \quad (4.41)$$

Έτσι, η τοπική λαμπρότητα στην επιφάνεια του αστέρα είναι $l(R) = L$ και στο κέντρο του $l(0) = 0$. Φυσιολογικά, η θερμότητα ρέει προς τα έξω, προς τη κατεύθυνση δηλαδή που μειώνεται η θερμοκρασία. Γι' αυτό η τοπική λαμπρότητα είναι συνήθως θετική. Παρόλα αυτά, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις (π.χ. ψύξη του πυρήνα λόγω ακτινοβολίας νετρίνο), η θερμότητα μπορεί να ρέει προς το εσωτερικό του αστέρα, πράγμα που σημαίνει ότι η τοπική λαμπρότητα είναι αρνητική.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$\delta Q = \epsilon_{nuc} dm \delta t - \epsilon_\nu dm \delta t + l(m) \delta t - l(m + dm) \delta t$$

Επειδή

$$l(m + dm) = l(m) + \frac{dl}{dm} dm$$

η παραπάνω σχέση αν διαιρέσουμε και με την μάζα dm , γράφεται και ως

$$\delta q = \epsilon_{\text{nuc}} \delta t - \epsilon_\nu \delta t - \frac{dl}{dm} \delta t = \left(\epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - \frac{dl}{dm} \right) \delta t$$

Ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής ορίζει την ειδική (specific) εντροπία, s , ενός συστήματος ως

$$dq = Tds \quad (4.42)$$

οπότε παίρνοντας το όριο $\delta t \rightarrow 0$, καταλήγουμε στην σχέση

$$\boxed{\frac{dl}{dm} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - T \frac{ds}{dt}} \quad (4.43)$$

Συνηθίζεται να γράφουμε

$$\epsilon_{\text{gr}} = -T \frac{ds}{dt}$$

οπότε αν $\epsilon_{\text{gr}} > 0$, τότε ο φλοιός απελευθερώνει ενέργεια λόγω συστολής, ενώ εάν $\epsilon_{\text{gr}} < 0$, ο φλοιός απορριφά ενέργεια λόγω διαστολής. Σε θερμική ισορροπία $\epsilon_{\text{gr}} = 0$, καθώς ο αστέρας είναι σε στατική κατάσταση και άρα η χρονική παραγωγής μηδενίζεται, οπότε έχουμε την απλοποιημένη **εξίσωση θερμικής ισορροπίας** στο σύστημα συντεταγμένων του Lagrange

$$\boxed{\frac{dl}{dm} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu} \quad (4.44)$$

ή ισοδύναμα, στο σύστημα συντεταγμένων του Euler

$$\boxed{\frac{dl}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu)} \quad (4.45)$$

και αποτελεί την τρίτη βασική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την δομή ενός αστέρα.

Ολοκληρώνοντας την σχέση (4.44) ως προς τη μάζα, έχουμε

$$L = \int_0^M \epsilon_{\text{nuc}} dm - \int_0^M \epsilon_\nu dm \equiv L_{\text{nuc}} - L_\nu \quad (4.46)$$

όπου το L_ν ορίζει την λαμπρότητα νετρίνο. Θεωρώντας ότι $L_\nu \approx 0$, τότε ισχύει $L_{\text{nuc}} = L$, όπως δηλαδή είχαμε υποθέσει ότι ισχύει στην κατάσταση θερμικής ισορροπίας.

4.1.3

Πηγές ενέργειας των αστέρων

Στις αρχές του 20ου αιώνα, η μόνη πηγή παραγωγής ενέργειας ήταν να ερμηνεύσει τη φωτεινότητα του Ήλιου, ήταν η βαρυτική συστολή (η χημική καύση είχε τότε απορρηφθεί ως ανεπαρκής). Η ίδια πίσω από αυτόν τον φυσικό μηχανισμό, γνωστός και ως μηχανισμός Kelvin-Helmholtz, είναι το θεώρημα virial. Από όσα αναφέραμε, προκύπτει το συμπέρασμα ότι όταν η ακτίνα ενός αστέρας ελλατώνεται, το ίδιο συμβαίνει και με τη δυναμική του ενέργεια. Συμφωνα όμως με το θεώρημα virial, μόνο η μισή από τη δυναμική ενέργεια που απελευθερώνεται με αυτόν τον τρόπο μένει στον αστέρα με τη μορφή άτακτης κινητικής

ενέργειας (θερμότητας). Η υπόλοιπη χάνεται από το σύστημα και ακτινοβολείται στο διάστημα. Έστω όμως ότι ο Ήλιος δεν έχει κάποια εσωτερική πηγή ενέργειας και ότι ο μηχανισμός παραγωγής ενέργειας οφείλεται στον μηχανισμό Kelvin-Helmholtz. Κατά τη γέννηση του Ήλιου από το μεσοαστρικό αέριο, είχε μάζα M και ακτίνα R αντίστοιχα. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια τότε του Ήλιου κατά τη δημουργία του θα ήταν σύμφωνα με τη σχέση (4.15)

$$\mathcal{E}_{\text{gr}} = -\frac{3GM^2}{5R}$$

ενώ η ολική ενέργεια σύμφωνα με το θεώρημα virial θα είναι

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = -\mathcal{E}_{\text{int}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\text{gr}} = -\frac{3GM^2}{10R}$$

Επειδή στο αρχικό αυτό στάδιο της δημιουργίας του αστέρα η ακτίνα $R \rightarrow \infty$, συνεπάγεται ότι $\mathcal{E}_{\text{gr}} \rightarrow \infty$, και άρα η συνολική βαρυτική ενέργεια που έχει ακτινοβολήσει κατά τη διάρκεια της ζωής του μέχρι σήμερα θα είναι

$$E_{\text{radiated}} = \mathcal{E}_{\text{gr}} - E_{\text{gr}} = \frac{3GM^2}{10R_\odot} \quad (4.47)$$

όπου τα M_\odot, R_\odot αντιστοιχούν στις σημερινές τιμές. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές προκύπτει ότι ο Ήλιος από την αρχή της δημιουργίας του μέχρι σήμερα θα είχε ακτινοβολήσει

$$E_{\text{radiated}} \sim 4 \times 10^{48} \text{ erg}$$

αποκλειστικά λόγω της βαρυτικής συστολής. Υποθέτωντας ότι ακτινοβολούσε όλο αυτό το διάστημα με την ίδια λαμπρότητα ($L_\odot = dE/dt$), μπορούμε να υπολογίσουμε την ηλικία του Ήλιου

$$t_\odot = \frac{E_{\text{radiated}}}{L_\odot} \sim 10^7 \text{ yr}$$

Οι φυσικοί του 20ου αιώνα ήδη ήξεραν, από γεωλογικές μελέτες, πως η ηλικία της Γης είναι περίπου τεσσάρων δισεκατομμυρίων ετών, άρα το παραπάνω αποτέλεσμα για την ηλικία του Ήλιου δεν μπορεί να είναι αληθές. Άρα, η βαρυτική συστολή δεν μπορεί να είναι η μοναδική πηγή ενέργειας των αστέρων.

Σήμερα γνωρίζουμε πως συγκεκριμένες πυρηνικές αντιδράσεις θα μπορούσαν να λύσουν το πρόβλημα της παραγωγής ενέργειας των αστέρων. Ειδικότερα, η θερμοπυρηνική σύντηξη βασίζεται στην απελευθέρωση της ενέργειας σύνδεσης $Q(Z, N)$, ο οποίος έχει Z πρωτόνια και N νετρόνια

$$Q(Z, N) = \underbrace{[Zm_p + Nm_n - m(Z, N)] c^2}_{\text{έλλειμα μάζας}} \quad (4.48)$$

Ο μηχανισμός Kelvin-Helmholtz προβλέπει παραγωγή ισχύος σε όλο το εσωτερικό του αστέρα, είναι όμως σημαντικός μόνο στο στάδιο της δημιουργίας του αστέρα από τη συστολή του νέφους σκόνης και αερίου, δηλαδή πριν δημιουργηθούν οι κατάληξης συνθήκες για τις απαραίτητες πυρηνικές αντιδράσεις. Σε έναν τυπικό αστέρα όπως αυτούς που έχουμε περιγράψει μέχρι στιγμής, η παραγωγή ενέργειας με βαρυτική συστολή είναι μηδενική. Παρόλα αυτά, υπάρχουν στάδια στην εξέλιξη ενός αστέρα όπου ο ρυθμός των πυρηνικών αντιδράσεων μειώνεται και ο μηχανισμός Kelvin-Helmholtz παίζει ενεργό ρόλο στην πορεία που θα ακολουθήσει ο αστέρας.

Σύντηξη Υδρογόνου Το υδρογόνο είναι το στοιχείο με την μεγαλύτερη αφθονία στο σύμπαν και, μαζί με το ήλιο, είναι τα μοναδικά στοιχεία τα οποία έχουν κοσμολογική προέλευση και όχι μόνο αστρική. Είναι λογικό λοιπόν και αναμενόμενο, αν λάβουμε υπόψιν την τεράστια συγκέντρωση του υδρογόνου στα άστρα μάζι με το γεγονός ότι το δυναμικό Coulomb που πρέπει να

ξεπεραστεί είναι το ελάχιστο δυνατό, ότι οι αντιδράσεις θα βασίζονται σε πρώτη φάση στη σύντηξη αυτού του στοιχείου. Άρα οι αντιδράσεις που περιμένουμε να δούμε σαν οι πλέον εύκολες είναι οι:



Παρατηρούμε ότι τα παράγωγα είναι ασταθή και όρα οι αντιδράσεις είναι αμφίδρομες. Άρα χρησιμοποιώντας μόνο τα στοιχεία που βρίσκονται σε αρθρονία δεν οδηγηθήκαμε πουθενά. Χρειαζόμαστε λοιπόν έναν μηχανισμό που να επιτρέπει την μετατροπή πρωτονίων σε νετρόνια προκειμένου να οδηγηθούμε σε δημιουργία ασταθερών πυρήνων. Ένας τέτοιος μηχανισμός είναι ο εξής:

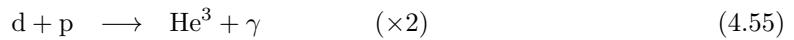
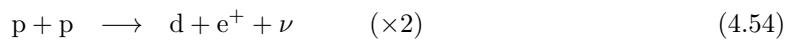


Το πρόβλημα όμως εδώ είναι ότι αυτός ο μηχανισμός απαιτεί την ταυτόχρονη αλληλεπίδραση τεσσάρων πρωτονίων, πράγμα εξαιρετικό απίθανο. Ο σκόπελος αυτός ξεπεράστηκε από τους Bethe και Critchfield (H. Bethe and C. Critchfield, *The formation of deuteron by proton combination*, Phys. Rev., 54:248–254, August 1938) όπου πρότειναν την μετατροπή ενός πρωτονίου σε νετρόνιο μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης:



Σημειώστε στο σημείο αυτό ότι, επειδή η αλληλεπίδραση αυτή γίνεται με ασθενείς δυνάμεις, η ενεργός διατομή είναι πολύ μικρή ($\sim 10^{-47} \text{ cm}^2$) –πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερη από αυτές που μπορούμε να μετρήσουμε— και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το υδρογόνο καταναλώνεται με τόσο αργό ρυθμό στα άστρα (X. Ελευθεριάδης, *Πυρηνοσύνθεση: Δημιουργία των Στοιχείων στο Σύμπαν*, Διδακτικές Σημειώσεις, Τμήμα Εκδόσεων Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, 2010, pp. 27).

Η σειρά των αντιδράσεων που ορίζονται ως **κύκλος PPI** είναι:



Για θερμοκρασία της τάξης των $T \sim 10^7 \text{ K}$, οι τυπικοί χρόνοι αντίδρασης είναι

- $14 \times 10^9 \text{ yr}$ για την (4.54)
- 6 s για την (4.55)
- 10^6 yr για την (4.56)

Ο συνολικός λοιπόν ρυθμός με τον οποίο τέσσερα πρωτόνια μετατρέπονται σε ήλιο, καθορίζεται από την αρχική αντίδραση δύο πρωτονίων προς δευτέριο (bottleneck). Προσεγγιστικά, η ενέργεια που παράγεται από τον κύκλο PPI είναι

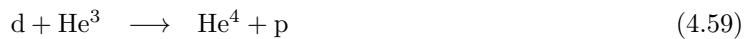
$$\epsilon_{PP} \propto \rho X_H^2 T^4 \quad (4.57)$$

Η ισχυρή εξάρτηση από την θερμοκρασία είναι ο λόγος που αυτού του είδους οι αντιδράσεις χαρακτηρίζονται ως "θερμοπυρηνικές".

Καύση Δευτέριου Είδαμε λοιπόν ότι, το δευτέριο δημιουργείται στο εσωτερικό των αστέρων κατά βάση μέσω της αντίδρασης (4.54). Η ποσότητα του δευτερίου που παράγεται είναι πολύ λίγη και το επόμενο στάδιο είναι η καύση του μέσω διάφορων αντιδράσεων είτε με πρωτόνια, είτε με άλλους πυρήνες δευτερίου είτε ακόμα και με πυρήνες ηλίου. Όμως σε ένα αστρικό περιβάλλον, η συγκέντρωση των πρωτονίων υπερτερεί κατά πολύ έναντι οποιουδήποτε άλλου είδους σωματιδίων και έχοντας κατά νου ότι ο ρυθμός αντίδρασης εξαρτάται, μεταξύ άλλων, και από το πλήθος των σωματιδίων, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η καταστροφή του δευτερίου συμβαίνει μέσω της αντίδρασης:



Οι πυρήνες 3He που δημιουργούνται με αυτό τον τρόπο, συμβάλλουν ακόμα περισσότερο στην καταστροφή του δευτερίου μέσω των αντιδράσεων:



Η συμβολή της (4.59) στην καύση του δευτερίου είναι σημαντικότερη από αυτή της (4.60) λόγω του ότι η ενεργός διατομή της είναι μεγαλύτερη¹.

Τελικώς, επειδή η καύση του δευτερίου λαμβάνει χώρα πριν το άστρο καταφέρει να φτάσει στην κύρια ακολουθία, και λόγω του ότι η συγκέντρωση του δευτερίου είναι τόσο μικρή που γρήγορα θα καταναλωθεί, η μόνη συνέπεια είναι μία επιβράδυνση της κατάρρευσης του άστρου.

Οι κύκλοι πρωτονίου-πρωτονίου Μέχρι στιγμής, αναφέραμε τον πρώτο κύκλο πρωτονίου-πρωτονίου (PPI) όπου στην τελευταία εξίσωση είχαμε την αντίδραση δύο πυρήνων He^3 . Αντί γι' αυτήν την αντίδραση, μπορούμε να έχουμε να έχουμε την:



και με τη σειρά του, το Be^7 :



Παρατηρούμε ότι ο κύκλος αυτός, που είναι γνωστός ως **κύκλος PPII**, οδηγεί ξανά στη δημιουργία He^4 , ενώ το Be^7 και το Li^7 δρουν απλά ως καταλύτες δεδομένου ότι δημιουργούνται και καταστρέφονται κατά τον κύκλο αυτό.

Τέλος, υπάρχει περίπτωση το Be^7 να αλληλεπιδράσει με ένα πρωτόνιο, πριν προλάβει να κάνει αρπαγή ηλεκτρονίου μέσω της (4.62). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τον εξής κύκλο:



¹Η ενεργός διατομή της (4.59) είναι ακόμα μεγαλύτερη και από αυτή της (4.58) όμως λόγω της ποσότητας των πρωτονίων, που είναι εξαιρετικά μεγάλος, η (4.58) είναι ο κύριος μηχανισμός καύσης του δευτερίου.

Αυτός ο κύκλος είναι γνωστός ως **κύκλος PPIII**. Παρατηρούμε ότι και εδώ το βηρύλλιο και το βόριο παίζουν το ρόλο καταλύτη.

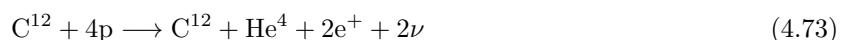
Ο κύκλος άνθρακα Θα περίμενε κανείς, ότι βαρύτερα στοιχεία όπως ο άνθρακας, το οξυγόνο κτλ., θα έπρεπε να έχουν μηδενική συγκέντρωση κατά τα πρώτα στάδια εξέλιξης ενός άστρου, της καύσης δηλαδή του υδρογόνου και του ηλίου. Σε γενικές γραφμές αυτό αληθεύει και η σύγκεντρωση αυτών των στοιχείων αρχίζει να γίνεται σημαντική μετά την ολοκλήρωση της καύσης του ηλίου, όμως πολλά άστρα περιέχουν τέτοια βαρύτερα στοιχεία τα οποία βρίσκονται σε πρωτοαστρικά νέφη προερχόμενα από την εκρηκτική κατάληξη άλλων άστρων. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να συμμετέχουν στους κύκλους των πυρηνικών καύσεων μέσω των αντιδράσεων:



και



ή συνολικά:



όπου ο άνθρακας είναι απλά καταλύτης. Αυτός ο κύκλος είναι γνωστός ως **κύκλος άνθρακα** ή κύκλος CNO, όπου χρησιμοποιώντας ισότοπα άνθρακα, αζώτου ή οξυγόνου ως καταλύτες, παίρνουμε ήλιο-4, δύο ποζιτρόνια και δύο νετρίνο. Ο ίδιος κύκλος ισχύει για οποιοδήποτε από τα στοιχεία C, N, O κι αν θεωρήσουμε ως αρχικά παρόν αν και η παρουσία οξυγόνου περιπλέκει κάπιας τα πράγματα οδηγώντας μας στον διπλό κύκλο CNO αλλά αυτό είναι ένα θέμα που δεν θα αναπτύξουμε εδώ.

Η ενέργεια που παράγεται μέσω του κύκλου άνθρακα είναι προσεγγιστικά

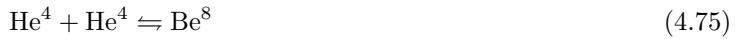
$$\epsilon_{\text{CNO}} \propto \rho X_{\text{H}} X_{\text{CNO}} T^{20} \quad (4.74)$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια που παράγεται μέσω αυτής της διαδικασίας έχει εξαιρετικά μεγάλη εξάρτηση από τη θερμοκρασία και ότι ακόμα και μικρές μεταβολές ΔT , μπορεί να οδηγήσουν στην εξάλειψη αυτής της πηγής ενέργειας.

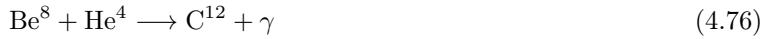
Καύση Ηλίου Το ήλιο είναι, όπως έχουμε αναφέρει, το δεύτερο σε αφθονία στοιχείο στο Σύμπαν και έχει προέλευση τόσο κοσμολογική όσο και αστρική, μέσω των αντιδράσεων που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Όταν λοιπόν τελειώσει η φάση της καύσης του υδρογόνου, η υδροστατική ισορροπία θα χαθεί λόγω της συνεχούς μείωσης της βαθμίδας της πίεσης και δεν θα υπάρχει τίποτα να αντισταθμίσει την βαρυτική κατάρρευση του άστρου. Έτσι, το άστρο θα συνεχίσει να καταρρέει μέχρις ότου η θερμοκρασία και η πίεση στο εσωτερικό του να επιτρέψουν την εκκίνηση των πυρηνικών μετασχηματισμών με βάση το ήλιο. Ο ρόλος του θεωρήματος virial και του μηχανισμού Kelvin-Helmholtz σε αυτό το στάδιο, δηλαδή μέχρι την εκκίνηση της καύσης του ηλίου, είναι προφανής.

Το πρόβλημα εδώ είναι, όπως αναφέρει ο Clayton, ότι δεν υπάρχουν σταθεροί πυρήνες με μαζικό αριθμό 5 και 8. Το γεγονός αυτό, απαγορεύει τόσο την σύντηξη δύο πυρήνων ηλίου μεταξύ τους όσο και την αντίδραση ενός άλφα σωματιδίου με κάποιο νουκλεόνιο. Επίσης, ο άνθρακας και το οξυγόνο (τα δύο στοιχεία που βρίσκονται σε μεγαλύτερη αρθρονία μετά το ήλιο) είναι συνθέσεις τριών και τεσσάρων πυρήνων ηλίου αντίστοιχα, αλλά η αντίδραση πολλών σωματιδίων ταυτόχρονα είναι εξαιρετικά απίθανη και δεν δικαιολογεί την παρατηρούμενη αναλογιά αυτών των στοιχείων.

Εν συντομία, το πρόβλημα προσεγγίστηκε μέσω της σχέσης



όπου φαίνεται ότι η αντίδραση δύο πυρήνων ηλίου δίνει το ασταθές βηρύλλιο-8. Όμως λόγω της συνεχούς δημιουργίας και καταστροφής του βηρύλλιου καθώς και του μέσου χρόνου διάσπασής του ($\sim 2.6 \times 10^{-16}$ sec, θα υπάρχει μία ισορροπία έτσι ώστε κάθε χρονική στιγμή να υπάρχει ένας ικανοποιητικός αριθμός πυρήνων Be^8 , έτσι ώστε να είναι πιθανή η αντίδραση:



η οποία παρουσιάζει κάποια χαρακτηριστικά συντονισμού.

Η διαδικασία τριών-α Η διαδικασία τριών-α είναι αυτή κατά την οποία τρεις πυρήνες ηλίου μετασχηματίζονται μέσω σύντηξης σ' ένα πυρήνα άνθρακα. Όπως αναφέρθηκε και πριν, η πιθανότητα να συμβεί μία τέτοια αντίδραση είναι εξαιρετικά μικρή και έτσι απαιτείται μεγάλο χρονικό διάστημα για να παραχθεί σημαντική ποσότητα άνθρακα μέσω αυτής. Μπορούμε εν γένει να θεωρήσουμε τις εξισώσεις (4.75) και (4.76) ως μία διαδικασία τριών-α δύο βημάτων. Η ενέργεια που παράγεται μέσω αυτής της διαδικασίας είναι προσεγγιστικά

$$\epsilon_{3\alpha} \propto \rho^2 X_{\text{He}}^3 T^{30} \quad (4.77)$$

Έχοντας λύσει το πρόβλημα της δημιουργίας του άνθρακα μέσω της τριών-α διαδικασίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το οξυγόνο σχηματίζεται μέσω της αντίδρασης:

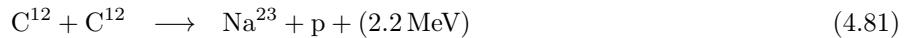
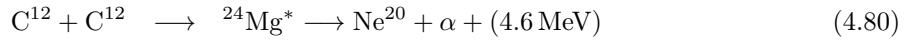


και ακόμα, με ένα βήμα παραπάνω έχουμε το σχηματισμό ενός πυρήνα νέον-20 μέσω της:



Περαιτέρω αντιδράσεις είναι σχετικά απίθανες λόγω του αυξημένου φράγματος Coulomb. Σε γενικές γραμμές, λαμβάνοντας υπόψιν τις πιθανότητες να συμβούν οι παραπάνω αντιδράσεις, είναι ασφαλές να πούμε ότι το αποτέλεσμα της καύσης του He^4 είναι ο σχηματισμός του άνθρακα και του οξυγόνου.

Καύση Άνθρακα Ο αστέρας, έχοντας εξαντλήσει και τα αποθέματα του He^4 , έχει απομείνει με τεράστιες συγκεντρώσεις άνθρακα-12 και οξυγόνο-16 στο εσωτερικό του. Για ακόμα μια φορά υπερισχύει η βαρυτική κατάρρευση του άστρου μέχρις ότου η θερμοκρασία στο κέντρο του να φτάσει την τάξη του $\sim 10^9$ K. Στο σημείο αυτό ξεκινούν οι αντιδράσεις μεταξύ πυρήνων άνθρακα και ακολουθούν αυτές που περιλαμβάνουν το οξυγόνο. Από μία πληθώρα πυρηνικών αντιδράσεων μεταξύ δύο πυρήνων άνθρακα, οι πιο πιθανές να συμβούν είναι οι:



Αντιδράσεις μεταξύ άνθρακα και άλλων στοιχείων όπως οξυγόνο ή νέον δεν αποκλείονται, ειδικά κατά το τελευταίο στάδιο καύσης του άνθρακα, αλλά δεν κατέχουν σημαντικό ρόλο. Με παρόμοιο τρόπο γίνεται και η καύση του οξυγόνου μέσω των:



Τέλος, το υπάρχον Ne^{20} μπορεί να συντελέσει στην παραγωγή ενέργειας σε έναν αστέρα, για πολύ σύντομο χρονικό διάστημα ($\sim 1 \text{ yr}$), κυρίως μέσω αντιδράσεων φωτοδιάσπασης στις οποίες θα αναφερθούμε παρακάτω.

Καύση Πυριτίου Μετά το τέλος της καύσης του οξυγόνου, ο πυρήνας του άστρου αποτελείται κυρίως από πυρίτιο-28. Φυσικά, το άστρο θα ακολουθήσει πάλι την γνωστή πορεία που περιλαμβάνει την συστόλη του με ταυτόχρονη αύξηση της θερμοκρασίας και της πίεσης στο εσωτερικό του, οπότε θα περίμενε κανείς να συναντήσει αντιδράσεις μεταξύ των πυρήνων πυριτίου. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει όμως καθώς πριν προλάβουν να αναπτυχθούν οι κατάλληλες θερμοκρασίες, ξεκινάει η διαδικασία της φωτοδιάσπασης (φωτόνια τα οποία διασπούν τους πυρήνες με τους οποίους αντιδρούν) που καταστρέφει το υπάρχον πυρίτιο και διαδραματίζει ουσιαστικό λόγο στην συγκεκριμένη φάση της πυρηνοσύνθεσης. Οι φωτοδιάσπασεις δίνουν σαν αποτέλεσμα εκπομπή σωματιδίων-α, πρωτονίων και νετρονίων και με αυτό τον τρόπο, μέσα από πολύπλοκες αντιδράσεις, οδηγούν στην δημιουργία της ονομαζόμενης **ομάδας του Fe** 56 και τις αντίστοιχες ισοτοπικές αναλογίες που συναντάμε. Φαίνεται λοιπόν πως η αλυσίδα της σύνθεσης νέων στοιχείων στην καρδιά των αστέρων σπάει με τον σχηματισμό του σιδήρου. Για τον σχηματισμό χημικών στοιχείων και τις διαδικασίες που απαιτούνται, γίνεται αναφορά στο παρότρημα D.

Να σημειώσουμε εδώ ότι, ο σχηματισμός των ελαφρών στοιχείων (Li, Be, B) καθώς και οι κοσμικές τους αναλογίες, δεν δικαιολογούνται από τους μηχανισμούς που περιγράψαμε μέχρι στιγμής. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ισότοπα αυτά καταστρέφονται στις συνθήκες που επικρατούν στο εσωτερικό των αστέρων. Στο πρόβλημα αυτό θα αναφερθούμε στο παρότρημα D, στο υποκεφάλαιο της 1-διεργασίας.

4.1.4

Χαρακτηριστικοί χρόνοι

Τηρεις σημαντικές χρονικές κλίμακες όταν συζητάμε την αστρική εξέλιξη. Αυτές οι χρονικές κλίμακες σχετίζονται με άλλαγές στη μηχανική δομή ενός αστέρα (που περιγράφεται από την εξίσωση κίνησης (4.17)), με άλλαγές στη θερμική δομή του αστέρα (που περιγράφονται από το θεώρημα virial), και άλλαγές στη χημική σύσταση του αστέρα.

Δυναμική χρονική κλίμακα Μπορούμε να αναφωτηθούμε τι θα γίνει αν η κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας παραβιαστεί: πόσο γρήγορα θα συμβούν άλλαγές στη δομή του αστέρα;

Η απάντηση δίνεται από την εξίσωση κίνησης (4.17). Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η πίεση που υποστηρίζει τον αστέρα ενάντια στην βαρύτητα ζαφνικά μηδενίζεται. Όλοι οι

σφαιρικοί φλοιοί τότε επιταχύνονται προς το κέντρο του αστέρα λόγω της βαρύτητας: ο αστέρας ξεκινάει να καταρρέει σε συνθήκες ελεύθερης πτώσης (free fall). Προσεγγιστικά μπορούμε να γράψουμε

$$|\ddot{r}| = -\frac{GM}{r^2} - \frac{1}{\rho} \cancel{\frac{dP}{dr}}^0 = -g \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = -g \longrightarrow |r| \approx \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow \tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}}$$

Θεωρώντας την πυκνότητα σταθερή, $\langle \rho \rangle = \frac{3M}{4\pi R^3}$ η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$\tau_{\text{dyn}} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} \approx \frac{1}{2}(G\langle \rho \rangle)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.86)$$

Φυσικά κάθε σφαιρικός φλοιός επιταχύνεται με διαφορετικό ρυθμό, οπότε η παραπάνω εκτίμηση πρέπει να εκλαμβάνεται ως μία μέση τιμή για την οποία ο αστέρας καταρρέει σε μία απόσταση R . Μία άλλη εκτίμηση για τον δυναμικό χρόνο μπορεί να γίνει με παρόμοιο τρόπο, θεωρώντας πως η βαρύτητα ξαφνικά εξαφανίζεται: αυτό θα μας δώσει τον χρόνο που χρειάζεται η πίεση για να διαλύσει τον αστέρα, ο οποίος είναι παρόμοιος με τον χρόνο που χρειάζεται ένα ακουστικό κύμα (άλλωστε η πίεση σχετίζεται με τα ακουστικά κύματα) να ταξιδέψει από το κέντρο μέχρι την επιφάνεια του αστέρα.

Για τον Ήλιο, προκύπτει ότι $\tau_{\text{dyn}} \approx 1600$ s, ή περίπου μισή ώρα. Το αποτέλεσμα αυτό έχει κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα:

- Οποιαδήποτε απομάκρυνση από την κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, πρέπει να οδηγήσει πολύ γρήγορα σε παρατηρήσιμα φαινόμενα: είτε συστολή είτε διαστολή στον δυναμικό χρόνο. Αν ο αστέρας δεν μπορεί να επανέλθει σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, θα οδηγηθεί είτε σε κατάρρευση είτε σε έκρηξη.
- Φυσιολογικά, η υδροστατική ισορροπία μπορεί να επανέλθει έπειτα από κάποια διαταραχή (dynamical stability). Παρόλα αυτά, διαταραχή στην υδροστατική ισορροπία μπορεί να οδηγήσει σε ταλαντώσεις μικρής κλίμακας στον δυναμικό χρόνο. Αυτές οι ταλαντώσεις έχουν παρατηρηθεί τόσο στον Ήλιο όσο και σε άλλους αστέρες, με μια περίοδο της τάξης των λεπτών στην περίπτωση του Ήλιου. Η εξίσωση (4.86) μας δείχνει ότι η περίοδος των αναπάλσεων αποτελεί ένα προσεγγιστικό μέτρο της μέσης πυκνότητας του αστέρα.
- Πέρα από τις όποιες ταλαντώσεις, οι αστέρες βρίσκονται εξαιρετικά κοντά σε μία κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας αφού οποιαδήποτε διαταραχή αποσβήνεται αμέσως. Μπορούμε λοιπόν με βεβαιότητα να θεωρήσουμε πως η εξίσωση (4.20) ισχύει για το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα της ζωής τους. Οι αστέρες εξελίσσονται και γι' αυτό το λόγο δεν μπορούν να είναι εντελώς στατικοί, αλλά οι αλλαγές συμβαίνουν εξαιρετικά αργά συγκριτικά με τον δυναμικό χρόνο. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι εξελίσσονται ημι-στατικά (quasi-statically), δηλαδή μέσω μιας σειράς σχεδόν-τέλειων καταστάσεων υδροστατικής ισορροπίας.

Θερμική χρονική κλίμακα Ο δεύτερος χαρακτηριστικός χρόνος περιγράφει το πόσο γρήγορα μπορούν να εμφανιστούν αλλαγές στην θερμική δομή ενός αστέρα. Συνεπάγεται λοιπόν πως είναι και η χρονική κλίμακα στην οποία ένας αστέρας ο οποίος βρίσκεται σε θερμική ισορροπία αντιδρά όταν αυτή η ισορροπία διαταράσσεται. Για να έχουμε μία εκτίμηση του μεγέθους αυτής της χρονικής κλίμακας, στρεφόμαστε στο θεώρημα virial. Είδαμε ότι ένας αστέρας χωρίς κάποια εσωτερική πηγή ενέργειας συστέλλεται ακτινοβολώντας την εσωτερική του ενέργεια:

$$L = \dot{E}_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\dot{E}_{\text{gr}}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει για την περίπτωση του ιδανικού αερίου. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε

$$L = \frac{dE_{\text{int}}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dE_{\text{gr}}}{dt} \longrightarrow \tau_{\text{KH}} = \frac{E_{\text{int}}}{L} = -\frac{1}{2} \frac{E_{\text{gr}}}{L}$$

και επειδή η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι, όπως έχουμε δείξει, $E_{\text{gr}} = -\frac{3GM^2}{5R}$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3GM^2}{10RL} \simeq 1.5 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-1} \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{-1} \text{ yr} \quad (4.87)$$

Η ποσότητα τ_{KH} εκφράζει την θερμική χρονική κλίμακα (ή κλίμακα Kelvin-Helmholtz), και εκφράζει τον χρόνο στον οποίο θα λάβειν χώρα μία τέτοια συστολή. Για τον Ήλιο είδαμε ότι $\tau_{\text{KH}} \sim 10^7$ yr, που σημαίνει ότι είναι πολλές τάξεις μεγαλύτερη από τον δυναμικό χρόνο. Γι' αυτό το λόγο δεν υπάρχει κάποια άμεση παρατήρηση που να αποδεικνύει ότι ένας οποιοσδήποτε αστέρας βρίσκεται όντως σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Οι πυρηνικές αντιδράσεις που συμβαίνουν στο κέντρο του αστέρα θα του επέτρεπαν παρόλα αυτά να βρεθεί όντως σε μία τέτοια κατάσταση. Πολλές φάσεις στην εξέλιξη ενός αστέρα, κατά τη διάρκεια των οποίων η ισχύς των πυρηνικών αντιδράσεων είναι είτε μηδενική είτε ελλιπής, λαμβάνουν χώρα σε αυτή τη θερμική χρονική κλίμακα.

Πυρηνική χρονική κλίμακα Ένας αστέρας μπορεί να παραμείνει σε θερμική ισορροπία για όσο διάστημα το επιτρέπει το απόθεμα των πυρηνικών καυσμάτων του. Η χρονική κλίμακα στην οποία εξαντλούνται τα αποθέματα του εκάστοτε πυρηνικού αποθέματος, ονομάζεται πυρηνική χρονική κλίμακα. Επειδή κατά τη διάρκεια αυτών των αντιδράσεων, ένα στοιχείο μετατρέπεται σε κάποιο άλλο (π.χ. υδρογόνο σε ήλιο), είναι επίσης η χρονική κλίμακα στην οποία αλλάζει η χημική σύσταση του εσωτερικού του αστέρα.

Η πηγή ενέργειας της θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι η μετατροπή μέρους της μάζας των αντιδρώντων σωματιδίων σε ενέργεια, έτσι ώστε $E_{\text{nuc}} = \Delta m c^2$, όπου Δm το έλλειμα μάζας. Σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας ισχύει

$$L = L_{\text{nuc}} = \dot{E}_{\text{nuc}} = \frac{dE_{\text{nuc}}}{dt}$$

έτσι ώστε η πυρηνική χρονική κλίμακα να ορίζεται ως

$$\tau_{\text{nuc}} = \frac{E_{\text{nuc}}}{L} = \eta f_c X \frac{Mc^2}{L} = \eta X \frac{Mc^2}{L} \quad (4.88)$$

όπου η είναι ένας παράγοντας απόδοσης της θερμοπυρηνικής σύντηξης (για το υδρογόνο $\eta \sim 0.7\%$), f_c είναι το ποσοστό της μάζας του αστέρα στο οποίο πραγματοποιούται αντιδράσεις (για άστρα σαν τον Ήλιο $\eta \sim 10\%$), X η αρθρονία του υδρογόνου, και M η συνολική μάζα του αστέρα. Με M_c συμβολίζουμε τη μάζα του πυρήνα του αστέρα, δηλαδή τη μάζα εκείνη που συμμετέχει στις πυρηνικές αντιδράσεις.

Για τον Ήλιο, $\tau_{\text{nuc}} \sim 10^{10}$ yr που είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την θερμική χρονική κλίμακα. Άρα, η υπόθεση ότι τα αστέρια μπορούν να φτάσουν μία κατάσταση θερμικής ισορροπίας είναι βάσιμη.

Γενικά λοιπόν ισχύει

$$\tau_{\text{nuc}} \gg \tau_{\text{KH}} \gg \tau_{\text{dyn}} \quad (4.89)$$

Οι αποτέλεσμα, ο ρυθμός των πυρηνικών αντιδράσεων καθορίζει το βήμα της αστρικής εξέλιξης, και οι αστέρες μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκονται σε υδροστατική και θερμική ισορροπία για το μεγαλύτερο μέρος της ζωής τους.

4.1.5

Διάδοση ενέργειας στους αστέρες

Η διάδοση της ενέργειας σε ένα φυσικό σύστημα μπορεί να γίνει γενικά με τρεις τρόπους: με **αγωγή** (conduction), με **ρεύματα μεταφοράς** (convection) ή με **ακτινοβολία** (radiation). Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας των αερίων, όταν η πίεσή τους δεν είναι εξαιρετικά μεγάλη, είναι μηδαμινός. Έτσι, με εξαίρεση τους πυρήνες των πολύ μεγάλων, σε μάζα, αστέρων, των λευκών νάνων και των αστέρων

νετρονίων, όπου η πίεση παίρνει ακραίες τιμές, θεωρούμε ότι η διάδοση ενέργειας μέσω αγωγής δεν είναι σημαντική συγκριτικά με τους άλλους δύο τρόπους. Επειδή οι μικροφυσικές διεργασίες στις οποίες βασίζονται οι δύο αυτοί τρόποι είναι εντελώς διαφορετικές, δεν πρέπει να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι και η μακροσκοπική μαθηματική τους περιγραφή οδηγεί σε δύο διαφορικές εξισώσεις με εντελώς διαφορετική μαθηματική δομή.

Τα ρεύματα μεταφοράς είναι ο κύριος τρόπος διάδοσης της ενέργειας στους ψυχρούς αστέρες φασματικού τύπου Κ και Μ, συνεισφέρει όμως λιγότερο σε αστέρες όπως ο Ήλιος και σχεδόν καθόλου σε αστέρες προγενέστερου φασματικού τύπου. Η ακτινοβολία είναι ο κύριος τρόπος διάδοσης της ενέργειας στους θερμούς αστέρες καθώς και στα βαθύτερα στρώματα των ψυχρών αστέρων.

Διάδοση ενέργειας με ακτινοβολία Η ιδέα πίσω από την διάδοση της ενέργειας με ακτινοβολία είναι ότι θερμικά φωτόνια τα οποία εκπέμπονται σε θερμές περιοχές και απορροφήθηκαν σε ψυχρότερες περιοχές, μεταφέρουν ενέργεια από την θερμή στην ψυχρή περιοχή. Η αποτελεσματικότητα αυτής της μεταφοράς ενέργειας θα είναι συνάρτηση, μεταξύ άλλων, της θερμοβαθμίδας (temperature gradient) και της ικανότητας των φωτονίων να ταξιδέψουν ελεύθερα από μία περιοχή του αστέρα σε μία άλλη. Γνωρίζουμε ότι τα φωτόνια στο εσωτερικό των αστέρων όπως ο Ήλιος, διαγράφουν μία απόσταση της τάξης του 1 cm πριν αλληλεπιδράσουν με την ύλη (μέση ελεύθερη διαδρομή, $\ell \sim 1\text{ cm}$), άρα η διάδοση ενέργειας μέσω ακτινοβολίας οφείλεται στην όποια διαφορά θερμοκρασίας υπάρχει μεταξύ κομματιών ύλης που βρίσκονται σε απόσταση περίπου ενός εκατοστού μεταξύ τους. Για τον Ήλιο, αυτή η διαφορά θερμοκρασίας είναι της τάξης $\Delta T \sim 10^{-4}\text{ K}$. Η ύπαρξη κάποιας θερμοβαθμίδας είναι απαραίτητη συνθήκη για τη διάδοση θερμικής ενέργειας μέσω ακτινοβολίας, καθώς σε αντίθετη περίπτωση, και αν η ύλη βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία, η πυκνότητα των φωτονίων σε όλες τις συχνότητες είναι ισοτροπική και άρα δεν μπορεί να υπάρξει ροή ακτινοβολίας σε καμία κατεύθυνση. Αυτή η μικρή ανισοτροπία $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-11}$ είναι υπεύθυνη για την διάδοση όλη της ενέργειας του Ήλιου μέσω ακτινοβολίας.

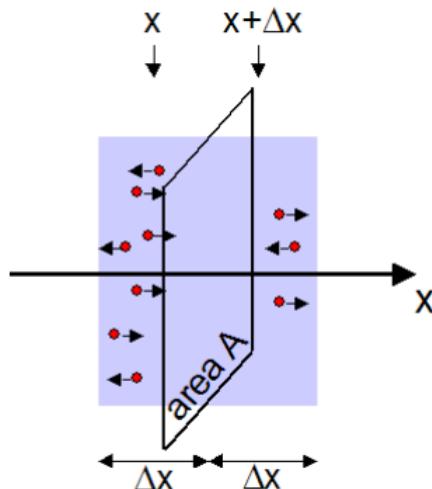


Figure 4.3: Τυχαία κίνηση σωματιδίων σε μία διάσταση, διερχόμενα από επιφάνεια A .

Η διάδοση ενέργειας με ακτινοβολία μπορεί να προσεγγιστεί ως μια διαδικασία διάχυσης (diffusion) όπως θα δείξουμε. Έστω μοναδιαία επιφάνεια και σωματίδια (π.χ. φωτόνια) τα οποία διέρχονται διαμέσου αυτής της επιφάνειας κατά μία διεύθυνση x (στην περίπτωσή μας αυτή η διεύθυνση θα ήταν η ακτινική και το $\Delta x = \ell$), όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3. Αριστερά της επιφάνειας η αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων είναι $n(x)$ και δεξιά $n(x + \Delta x)$. Υποθέτοντας ότι οι ταχύτητες στις τρεις διευθύνσεις του χώρου είναι κατανευμένες ισοτροπικά ώστε $u_x = u_y = u_z$, προκύπτει ότι για μία από τις τρεις διευθύνσεις, $u_x = \frac{1}{3}\langle u \rangle$. Το ερώτημα είναι πόσα σωματίδια διέρχονται από την επιφάνεια A . Διαστασιακά, η ροή των σωματιδίων

μπορεί να γραφτεί ως $F = n u$, και επειδή τα σωματίδια έχουν την ίδια πιθανότητα να κινούνται είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά, τα μισά σωματίδια θα κινούνται προς τη μία κατεύθυνση και τα άλλα μισά προς την άλλη. Έτσι, η ροή για τα σωματίδια που κινούνται διαφέσου της επιφάνειας A , από τα αριστερά προς τα δεξιά θα είναι

$$F(x) = \frac{1}{2}n(x) \frac{1}{3}\langle u \rangle = \frac{1}{6}n(x)\langle u \rangle$$

Αντίστοιχα, η ροή των σωματιδίων που κινούνται διαφέσου της επιφάνειας A , από τα δεξιά προς τα αριστερά θα είναι

$$F(x + \Delta x) = \frac{1}{6}n(x + \Delta x)\langle u \rangle$$

Έτσι, η θετική (net) ροή θα είναι

$$F = \frac{1}{6}\langle u \rangle [n(x + \Delta x) - n(x)]$$

Επειδή οι αριθμοί $n(x)$, $n(x + \Delta x)$ δεν είναι σταθεροί αλλά μεταβάλλονται ανάλογα με τον αριθμό των σωματιδίων που διαπερνούν την επιφάνεια και καταλήγουν είτε αριστερά είτε δεξιά, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{6}\langle u \rangle \left[n - \frac{dn}{dx}\Delta x - \left(n + \frac{dn}{dx}\Delta x \right) \right] = -\frac{1}{3}\langle u \rangle \Delta x \frac{dn}{dx} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F = -D \frac{dn}{dx} \end{aligned} \quad (4.90)$$

όπου ο συντελεστής $D = \frac{1}{3}\langle u \rangle \Delta x$ ονομάζεται "διαχυσιμότητα" (diffusivity) και αποτελεί μέτρο του ρυθμού με τον οποίο τα σωματίδια διασκορπίζονται. Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται στις τρεις διαστάσεις

$$F = -D \nabla n \quad (4.91)$$

και είναι γνωστό ως **νόμος διάχυσης του Fick**.

Αντί της αριθμητικής πυκνότητας n , μπορούμε να γράψουμε κατά αντιστοιχία ότι η ροή ενέργειας λόγω διάχυσης είναι

$$F = -D \nabla u \xrightarrow{1D} F = -D \frac{du}{dr} \quad (4.92)$$

όπου u η πυκνότητα ενέργειας. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας $\frac{du}{dT} \frac{dT}{dr}$, μπορούμε να γράψουμε την σχέση (4.92) ως

$$F = -D \underbrace{\frac{du}{dT}}_{=C_V} \frac{dT}{dr} = -K \frac{dT}{dr} \xrightarrow{3D} \boxed{F = -K \nabla T} \quad (4.93)$$

όπου ο συντελεστής

$$K = \frac{1}{3}\langle u \rangle \ell C_V = \frac{1}{3\kappa_\nu\rho}\langle u \rangle C_V \quad (4.94)$$

ονομάζεται "αγωγιμότητα" (conductivity) και

$$C_V = \left(\frac{du}{dT} \right)_V \quad (4.95)$$

η ειδική θερμοχωρητικότητα (specific heat capacity). Αυτή η περιγραφή ισχύει για όλα τα σωματίδια σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία, συμπεριλαμβανομένων και των φωτονίων.

Για ένα αέριο φωτονίων, μπορούμε να θέσουμε $\langle u \rangle = c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση (3.22) και άρα η ειδική θερμοχωρητικότητα είναι

$$C_V = \left(\frac{du}{dT} \right)_V = 4\alpha T^3$$

ενώ η μέση ελεύθερη διαδρομή σχετίζεται με την αδιαφάνεια μέσω της σχέσης (3.30), όπου αν πάρουμε την μέση τιμή για όλες τις συχνότητες ($\langle \kappa \rangle \equiv \kappa$) μπορεί να γραφτεί

$$\ell_{ph} = \frac{1}{\kappa \rho}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε τον **συντελεστή αγωγιμότητας ακτινοβολίας** (4.94) ως

$$K_{rad} = \frac{4}{3} \frac{\alpha c T^3}{\kappa \rho} \quad (4.96)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι και η διάδοση ενέργειας μέσω αγωγής μπορεί να περιγραφεί ως μία διαδικασία διάχυσης με την ίδια συναρτησιακή μορφή της σχέσης (4.93) ώστε η συνδυαστική ροή ενέργειας να είναι

$$F = -\frac{4\alpha c T^3}{3\rho} \left(\frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cd}} \right) \nabla T \quad (4.97)$$

όπου ορίσαμε την **αδιαφάνεια αγωγής**, κ_{cd} , σε αναλογία με την αδιαφάνεια ακτινοβολίας κ_{rad} . Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει απλά ότι ο μηχανισμός διάδοσης ενέργειας με τη μεγαλύτερη ροή θα είναι ο χυριάρχος, ή με άλλα λόγια, ο μηχανισμός για τον οποίο η αστρική ύλη παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διαφάνεια.

Για έναν σφαιρικά συμμετρικό αστέρα, η τοπική λαμπρότητα σχετίζεται με την ροή μέσω της σχέσης

$$F = \frac{l}{4\pi r^2}$$

και άρα η εξίσωση (4.97) γράφεται

$$\begin{aligned} F_{rad} &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha c T^3}{\kappa_{rad} \rho} \frac{dT}{dr} = \frac{l}{4\pi r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{16\pi\alpha c T^3} \frac{l}{r^2}} \end{aligned} \quad (4.98)$$

ή στο σύστημα συντεταγμένων του Lagrange

$$\boxed{\frac{dT}{dm} = -\frac{3}{64\pi^2\alpha c} \frac{\kappa l}{r^4 T^3}} \quad (4.99)$$

Αυτή είναι η θερμοβαθμίδα που απαιτείται ώστε όλη η λαμπρότητα l να μεταφερθεί μέσω ακτινοβολίας και αποτελεί την τέταρτη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη δομή ενός αστέρα στην περίπτωση που έχουμε διάδοση ενέργειας μόνο μέσω ακτινοβολίας. Ένα αστέρι ή μια περιοχή ενός αστεριού στην οποία ισχύει αυτή η εξίσωση ονομάζεται ζώνη ακτινοβολίας (radiative).

Η εξίσωση (4.99) ισχύει όσο $\ell_{ph} \ll R$, δηλαδή όσο υπάρχει τοπική θερμοδυναμική ισορροπία. Αυτή η συνθήκη σταματάει να ισχύει όσο πλησιάζουμε την επιφάνεια του αστέρα, την φωτόσφαιρα, από την οποία διαφεύγουν φωτόνια ($\ell_{ph} \gtrsim R$). Κοντά στην φωτόσφαιρα, η προσέγγιση της διάχυσης παύει να ισχύει και πρέπει να λύσουμε την πολύ πιο δύσκολη εξίσωση μεταφοράς. Ευτυχώς, συνθήκες τοπικής

θερμοδυναμικής ισορροπίας και η προσέγγιση της διάχυσης ισχύουν σχεδόν για όλο το εσωτερικό των αστέρων.

Για έναν αστέρα που βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία, μπορούμε συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.20) και (4.99) να γράψουμε την θερμοβαθμίδα ως

$$\frac{dT}{dm} = \frac{dP}{dm} \frac{dT}{dP} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \frac{d \log T}{d \log P}$$

ώστε να ορίσουμε την αδιάστατη θερμοβαθμίδα ακτινοβολίας (radiative temperature gradient)

$$\nabla_{\text{rad}} = \left(\frac{d \log T}{d \log P} \right)_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi\alpha c G} \frac{\kappa l P}{m T^4} \quad (4.100)$$

Η σχέση (4.100) περιγράφει την λογαριθμική μεταβολή της θερμοκρασίας με το βάθος (όπου το βάθος είναι εκφρασμένο μέσω της πίεσης) σε έναν αστέρα σε υδροστατική ισορροπία, αν η ενέργεια μεταφέρεται μόνο μέσω ακτινοβολίας.

Η αδιαφάνεια στο εσωτερικό των αστέρων Οι εξισώσεις που περιγράφουν την διάχυση της ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητες της συχνότητας ν , αφού η ροή F ολοκληρώνεται ως προς όλες τις συχνότητες. Γενικά όμως, ο συντελεστής αδιαφάνειας κ , εξαρτάται από την συχνότητα, οπότε η ποσότητα κ που εμφανίζεται στην σχέση (4.99) πρέπει να παριστάνει έναν μέσο όρο ως προς τη συχνότητα.

Αν με $F_\nu d\nu$ θεωρήσουμε την ροή ακτινοβολίας στο διάστημα συχνοτήτων $[\nu, \nu + d\nu]$, τότε η εξίσωση (4.91) πρέπει να αντικατασταθεί με

$$F_\nu = -D_\nu \nabla u_\nu = -D_\nu \frac{\partial u_\nu}{\partial T} \nabla T \quad (4.101)$$

όπου $D_\nu = \frac{1}{3} c l_{\text{ph}} = \frac{c}{3\kappa_n u \rho}$. Επειδή θεωρούμε ότι η ακτινοβολία βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το αέριο, η πυκνότητα ενέργειας στο ίδιο διάστημα, συνδέεται με την ένταση της ακτινοβολίας που δίνεται από τον νόμο του Planck μεσω της σχέσης

$$B_\nu(T) = \frac{u_\nu(T) c}{4\pi} \quad (4.102)$$

Η ολική ροή προκύπτει από την ολοκλήρωση της σχέσης (4.101) σε όλες τις συχνότητες

$$F = - \left[\frac{c}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial T} d\nu \right] \nabla T$$

η οποία έχει την ίδια μορφή με τη σχέση (4.93) όπου

$$K_{\text{rad}} = \frac{c}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial T} d\nu$$

Συγκρίνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με τη σχέση (4.96) καταλήγουμε ότι

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{4\alpha T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial T} d\nu \quad (4.103)$$

όπου ο παράγοντας $4\alpha T^3$ ισούται με $\int_0^\infty \frac{\partial u_\nu}{\partial T} d\nu$ ώστε η παραπάνω σχέση να γράφεται γενικά

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial u_\nu}{\partial T} d\nu} \quad (4.104)$$

Η ποσότητα και ονομάζεται **μέση αδιαφάνεια κατά Rosseland** και είναι η αρμονική μέση τιμή της αδιαφάνεια ενός αερίου συγκεκριμένης σύστασης, θερμοκρασίας και πυκνότητας, ως προς όλες τις συχνότητες της ακτινοβολίας που απορροφάται ή σκεδάζεται (σταθμισμένη με στατιστικό βάρος τη συνάρτηση $\partial\nu/\partial T$). Συχνά η μέση αδιαφάνεια κατά Rosseland εμφανίζεται με τον όρο της έντασης της ακτινοβολίας αντί της πυκνότητας ενέργειας, ώστε χρησιμοποιώντας την σχέση (4.102) να γράφεται και

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\pi}{\alpha c T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu$$

ή γενικά

$$\boxed{\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu} \quad (4.105)$$

Όταν μελετάμε το εσωτερικό των αστέρων, δεν ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την ειδική ένταση I_ν , (και την αντίστοιχη λαμπρότητα L_ν), αφού δεν είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε την κατανομή της λαμπρότητας με τη συχνότητα. Αντίθετα, ενδιαφερόμαστε για την ολική λαμπρότητα, L , η οποία συνδέεται άμεσα με το ενέργειακό ισοζύγιο του αστέρα (αφού σε κατάσταση ισορροπίας, η ενέργεια που ακτινοβολείται ως λαμπρότητα αναπληρώνεται από τις πηγές ενέργειας του αστέρα). Η μέση αδιαφάνεια κατά Rosseland είναι χρήσιμη όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική ενέργεια που απορροφήθηκε σε όλα τα μήκη κύματος, κάτι που απαιτείται στους υπολογισμούς της αστρικής δομής.

Ο συντελεστής αδιαφάνειας στο εσωτερικό των αστέρων οφείλεται στους μηχανισμούς που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 3, δηλαδή σε φωτοϊονισμό (bound-free transition), σε πέδηση (free-free transition) ή σε σκεδάσεις (Thomson και Compton). Ο συντελεστής αδιαφάνειας που οφείλεται σε σκεδάσεις φωτονίων από ηλεκτρόνια, κ_{scat} , αποδεικνύεται ότι εξαρτάται μόνο από τη χημική σύσταση της ύλης του αστέρα, και δίνεται από τη σχέση

$$\kappa_{\text{scat}} = 0.2(1 + X) \text{ cm}^2/\text{gr} \quad (4.106)$$

όπου X είναι η περιεκτικότητα της ύλης σε υδρογόνο. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής απορρόφησης λόγω σκέδασης από ηλεκτρόνια είναι ανεξάρτητος από τη συχνότητα των φωτονίων.

Οι συντελεστές απορρόφησης των δύο άλλων μηχανισμών, $\kappa_{\text{bf}}^{\text{bf}}$ και $\kappa_{\text{ff}}^{\text{ff}}$, είναι συναρτήσεις και της συχνότητας, και επομένως χρειαζόμαστε τις αντίστοιχες αδιαφάνειες κατά Rosseland, κ_{bf} και κ_{ff} . Αυτές έχουν υπολογιστεί από τον Kramer και δίνονται από τις σχέσεις

$$\kappa_{\text{bf}} = a(X, Z, g_a, t) \rho T^s \quad (4.107)$$

$$\kappa_{\text{ff}} = b(X, Z, g_b) \rho T^s \quad (4.108)$$

όπου ο εκθέτης, s , είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας. Για τις υψηλές θερμοκρασίες που επικρατούν στο εσωτερικό των αστέρων ($T \geq 10^5$) αποδεικνύεται ότι $s = -3.5$, ενώ για σχετικά χαμηλές θερμοκρασίες ($T \approx 10^4$) αποδεικνύεται ότι $s = 10$. Οι συναρτήσεις a, b , στην περίπτωση που $s = -3.5$, ορίζονται από τις σχέσεις

$$a = 4.34 \times 10^{25} \frac{g_a}{t} Z(1 + X) \quad (4.109)$$

$$b = 3.68 \times 10^{22} g_b (1 + X)(1 - Z) \quad (4.110)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, οι συντελεστές g_a, g_b και t ονομάζονται **συντελεστές Gaunt** και **συντελεστής αποκοπής** (guillotine factor) αντίστοιχα. Οι συντελεστές Gaunt διορθώνουν τις αποκλίσεις μεταξύ της κλασικής και κβαντομηχανικής λύσης, ενώ ο συντελεστής αποκοπής διορθώνει τα σφάλματα

των προσεγγίσεων κατά τον υπολογισμό της σχέσης (4.109). Συνηθισμένες τιμές για τους συντελεστές αυτούς είναι $g_a \approx g_b \approx 3$ και $t \approx 10$. Το X αντιπροσωπεύει την περιεκτικότητα (κατά μάζα) της ύλης του αστέρα σε υδρογόνο και το Z την περιεκτικότητα της ύλης του αστέρα σε στοιχεία βαρύτερα από το ήλιο ("μέταλλα"), γι' αυτό και ονομάζεται και "metallicity".

Είνισται, οποιαδήποτε σχέση για την αδιαφάνεια έχει τη μορφή

$$\kappa \propto \rho T^{-7/2} \quad (4.111)$$

να ονομάζεται **αδιαφάνεια κατά Kramer**.

Από τους ορισμούς των κ_{bf} , κ_{ff} παρατηρούμε ότι η αδιαφάνεια κατά Kramer είναι φθίνουσα συνάρτητη της θερμοκρασίας. Έτσι, σε αρκετά μεγάλες θερμοκρασίες ($T > 10^8$ K) η τιμή της τείνει στο μηδέν και επομένως γίνεται μικρότερη από την αδιαφάνεια σκέδασης από ηλεκτρόνια κ_{scat} (που είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας). Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι η αδιαφάνεια κατά Kramer (μηχανισμοί bound-free και free-free) κυριαρχεί στους (ψυχρότερους) αστέρες μεταγενέστερων φασματικών τύπων, ενώ η αδιαφάνεια σκέδασης από ηλεκτρόνια κυριαρχεί στους (θερμότερους) αστέρες των προγενέστερων φασματικών τύπων.

Το όριο Eddington Είδαμε ότι η διάδοση ενέργειας μέσω ακτινοβολίας μέσα σε έναν αστέρα απαιτεί μία θερμοβαθμίδα dT/dr , το μέγενθος της οποίας δίνεται από την εξίσωση (4.98). Η πίεση της ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση (3.24) και άρα η βαθμίδα της πίεσης της ακτινοβολίας είναι

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3}\alpha T^3 \frac{dT}{dr} = -\frac{\kappa \rho}{4\pi c} \frac{l}{r^2} \quad (4.112)$$

Αυτή η πίεση της ακτινοβολίας παριστάνει μία δύναμη που ασκείται προς το εξωτερικό του αστέρα λόγω της ροής των φωτονίων προς αυτή την κατεύθυνση. Φυσικά, για έναν αστέρα που βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία, αυτή η δύναμη πρέπει να είναι μικρότερη από τη δύναμη της βαρύτητας, όπως αυτή δίνεται από τη βαθμίδα της πίεσης που είναι απαραίτητη για την εδραίωση της υδροστατικής ισορροπίας (σχέση 4.19). Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \left| \frac{dP_{rad}}{dr} \right| &< \left| \left(\frac{dP}{dr} \right)_{HE} \right| \Rightarrow \frac{\kappa \rho}{4\pi c} \frac{l}{r^2} < \frac{Gm\rho}{r^2} \\ &\Rightarrow l < \frac{4\pi Gmc}{\kappa} = l_{Edd} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Η ποσότητα $l_{Edd} = \frac{4\pi Gmc}{\kappa}$ ονομάζεται (τοπική) **λαμπρότητα Eddington** και παριστάνει τη μέγιστη λαμπρότητα που μπορεί να μεταφερθεί από την ακτινοβολία σε έναν αστέρα που βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία.

Το όριο Eddington που παριστάνεται από την ανισότητα (4.113) μπορεί να παραβιαστεί σε περιπτώσεις πολύ μεγάλων ροών θερμότητας (μεγάλα l), οι οποίες προκαλούνται από έντονη "καύση" των πυρηνικών καυσίμων, ή από πολύ μεγάλες αδιαφάνειες κ . Όπως αναφέραμε παραπάνω, υψηλές τιμές αδιαφάνειας εμφανίζονται σε σχετικά χαμηλές θερμοκρασίες, κοντά στην θερμοκρασία ιονισμού του υδρογόνου και του ηλίου (π.χ. εξωτερικά στρώματα του Ήλιου). Σε αυτές τις περιπτώσεις, η υδροστατική ισορροπία (σχέση 4.19) και η ισορροπία λόγω της μεταφοράς ενέργειας με ακτινοβολία (radiative equilibrium, σχέση 4.98) δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα. Γι' αυτό, προκειμένου ο αστέρας να παραμείνει σε υδροστατική ισορροπία, η ενέργεια πρέπει να μεταφερθεί με άλλον τρόπο εκτός της διάχυσης ακτινοβολίας. Αυτός ο τρόπος είναι μέσω ρευμάτων μεταφοράς που θα αναλύσουμε παρακάτω. Ισχύει ότι η ανισότητα (4.113) είναι αναγκαία, όλλα όχι ικανή συνθήκη για μία ζώνη ενός αστέρα να είναι σταθερή ενάντια στα ρεύματα μεταφοράς.

Τα επιφανειακά στρώματα ενός αστέρα διαδίδουν πάντα την ενέργεια μέσω ακτινοβολίας αφού είναι εκείνη η περιοχή από την οποία η ενέργεια διαφεύγει με τη μορφή φωτονίων. Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.113) στην επιφάνεια του αστέρα όπου $m = M$ προκύπτει

$$L < L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMc}{\kappa} \quad (4.114)$$

όπου κ είναι η αδιαφάνεια της φωτόσφαιρας. Η λαμπρότητα Eddington που δίνεται από την σχέση (4.114) είναι μία κριτική τιμή λαμπρότητας που δεν μπορεί να ξεπεραστεί από έναν αστέρα σε υδροστατική ισορροπία. Παραβίαση αυτής της συνθήκης σημαίνει παραβίαση της υδροστατικής ισορροπίας: η ύλη εκδιώχνεται από τον αστέρα λόγω της πλεονότητας της ακτινοβολίας, οδηγώντας σε βίαιη απώλεια μάζας. Όπως είδαμε και παραπάνω, σε περιοχές που κυριαρχεί η σκέδαση φωτονίων από ήλεκτρόνια, η αδιαφάνεια είναι σχεδόν σταθερή και άρα η λαμπρότητα Eddington εξαρτάται μόνο από τη μάζα

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMc}{0.2(1+X)} = \frac{2.52 \times 10^{38}}{1+X} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ erg/s} \quad (4.115)$$

Επειδή η L_{Edd} είναι ανάλογη της μάζας m , ενώ οι αστέρες της κύριας ακολουθίας ακολουθούν μία σχέση λαμπρότητας-μάζας (Κεφάλαιο 1) $L \propto M^x$, $x > 1$, αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται η μάζα των αστέρων κάποια στιγμή η λαμπρότητά τους θα ξεπεράσει το όριο Eddington. Άρα, περιμένουμε να υπάρχει κάποιο ανώτερο όριο στη μάζα που μπορούν να έχουν οι αστέρες, το οποίο βρίσκεται με απαλοιφή της λαμπρότητας από τις δύο παραπάνω σχέσεις.

Τιοθετώντας μία σχέση λαμπρότητας-μάζας

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 3.013 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.91} \quad (4.116)$$

από τις σχέσεις (4.115) και (4.116) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 11.54 \times 10^{33} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.91} &= \frac{2.52 \times 10^{38}}{1+X} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1.91} &= \frac{2.16 \times 10^4}{1+X} \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{\text{max}} &= \left(\frac{2.16 \times 10^4}{1+X} \right)^{0.524} M_{\odot} \end{aligned}$$

Για μία χημική σύσταση με 70% υδρογόνο ($X = 1$), έχουμε ότι

$$M_{\text{max}} \simeq 140 M_{\odot} \quad (4.117)$$

τιμή η οποία είναι συμβατή με τις μέχρι τώρα παρατηρήσεις καθώς δεν έχουμε εντοπίσει αστέρες με μάζα μεγαλύτερη των $100 M_{\odot}$.

Σχέσεις λαμπρότητας-μάζας

Είδαμε ότι τα φωτόνια που εκπέμπονται από τις πυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στον πυρήνα ενός αστέρα, απορροφούνται σχεδόν αμέσως και επανεκπέμπονται σε μεγαλύτερα μήκη κύματος² από ανώτερα στρώματα

²Η διαφορά ενέργειας μεταξύ του φωτονίου που απορροφήθηκε και αυτού που εκπέμφθηκε πήγε στην θέρμανση του υλικού.

προς τυχαίες διευθύνσεις, μία διαδικασία που ονομάζεται "τυχαίος βηματισμός" (random walk) και μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία διάχυσης της ακτινοβολίας. Από τη θεωρία του τυχαίου βηματισμού γνωρίζουμε ότι τα βήματα που απαιτούνται για να καλύψει ένα φωτόνιο μία μέση απόσταση ίση με την ακτίνα του αστέρα είναι

$$N = \left(\frac{R}{\ell_{\text{ph}}} \right)^2 \quad (4.118)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι ο μέσος χρόνος που χρειάζονται τα φωτόνια για να διανύσουν απόσταση ℓ_{ph} λόγω διάχυσης είναι

$$t_{\text{diffusion}} = \frac{\ell_{\text{ph}}}{c} N = \frac{R^2}{\ell_{\text{ph}} c} \quad (4.119)$$

Έστω τώρα ότι η ακτίνα του πυρήνα ενός αστέρα είναι κάποιο κλάσμα της συνολικής ακτίνας του αστέρα $R_c = fR$, $f < 1$. Η πυκνότητα ενέργειας που παράγεται στον πυρήνα είναι $u = \alpha T_c^4$ και άρα η συνολική διαθέσιμη ενέργεια του πυρήνα είναι

$$E = \frac{4}{3} \pi R_c^3 \alpha T_c^4 \quad (4.120)$$

Σε πρώτη προσέγγιση, η μέση λαμπρότητα θα είναι τότε

$$L \approx \frac{E_c}{t_{\text{diffusion}}} = \frac{\frac{4\pi}{3}(fR)^3 \alpha T_c^4}{\left(\frac{R^2}{\ell_{\text{ph}} c}\right)} \Rightarrow L \propto R \ell_{\text{ph}} T_c^4 \quad (4.121)$$

Για να βρούμε μία σχέση $L = f(M)$, πρέπει να βρούμε σχέσεις που να συνδέουν τις ποσότητες R, ℓ_{ph}, T_c με τη μάζα. Από τις σχέσεις (3.30), (4.39) έχουμε ότι

$$\ell_{\text{ph}} \propto \frac{1}{\langle \rho \rangle}$$

$$\langle \rho \rangle \propto \frac{M}{R^3}$$

$$P_c \propto \frac{M^2}{R^4}$$

Έτσι, μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- Για αστέρες μεγάλης μάζας, $M > 30M_\odot$, ο κυρίαρχος μηχανισμός πίεσης είναι η πίεση ακτινοβολίας $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \alpha T_c^4$ και άρα

$$P_c \propto \frac{M^2}{R^4} \propto T_c^4$$

Συνεπώς

$$L \propto R \frac{1}{\langle \rho \rangle} T_c^4 \Rightarrow L \propto M \quad (4.122)$$

- Για αστέρες ενδιάμεσης μάζας, $3M_\odot < M < 30M_\odot$, ισχύουν οι ίδιες σχέσεις με παραπάνω αλλά τώρα ο κυρίαρχος μηχανισμός πίεσης είναι η πίεση του αερίου $P_{\text{gas}} \propto \rho T_c$ και άρα

$$P_c \propto \frac{M^2}{R^4} \propto \rho T_c \longrightarrow T_c \propto \frac{M^2}{R^4} \frac{1}{\langle \rho \rangle}$$

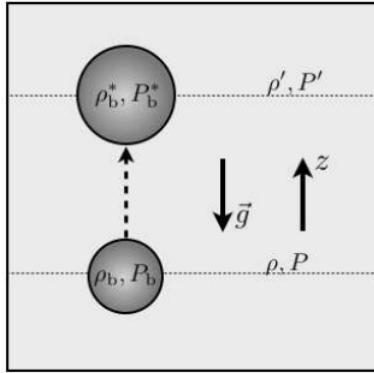


Figure 4.4: Σχηματική αναπαράσταση του κριτηρίου Schwarzschild ενάντια στην ύπαρξη ρευμάτων μεταφοράς. Ένα στοιχειώδες κομμάτι αερίου (blob) μετατοπίζεται προς την επιφάνεια του αστέρα όπου διαστέλλεται οδιαβατικά για να διατηρήσει μηχανική ισορροπία με το περιβάλλον του. Αν η πυκνότητα του στοιχειώδους κομματιού είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του υλικού που το περιβάλλει, θα βυθιστεί πίσω στην αρχική του θέση. Αν δύμας η πυκνότητά του είναι μικρότερη από την πυκνότητα του χώρου γύρω του, δυνάμεις άνωσης θα το επιταχύνουν προς τα επάνω και θα δημιουργηθεί ένα ρεύμα μεταφοράς.

Συνεπώς

$$L \propto R \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left(\frac{M^2}{R^4} \frac{1}{\langle \rho \rangle} \right)^4 \Rightarrow [L \propto M^3] \quad (4.123)$$

Διάδοση ακτινοβολίας με ρεύματα μεταφοράς

Στην Αστροφυσική συχνά συναντάμε προβλήματα όπου ένα ρευστό θερμαίνεται από "κάτω" (π.χ. αστέρες, ατμόσφαιρα της Γης όπου ο Ήλιος θερμαίνει την επιφάνεια κτλ.). Αυτό οδηγεί σε μια θερμοβαθμίδα: ζεστό στη βάση, πιο ψυχρό προς τα πάνω³. Αν η θερμοβαθμίδα γίνει πολύ μεγάλη, το αέριο αναπτύσσει ένα είδος αστάθειας (convective instability) ώστε "φυσαλίδες" αερίου που είναι πιο θερμές από το περιβάλλον στο οποίο βρίσκονται, μετακινούνται προς τα ανώτερα στρώματα μέχρι να διασκορπίσουν (dissipate) την περίσσεια θερμική ενέργεια που κουβαλούν και να ενσωματωθούν στο καινούργιο περιβάλλον, υιοθετώντας όλες τις ιδιότητες που το χαρακτηρίζουν (πίεση, θερμοχρασία κτλ.).

Έστω ένα στοιχειώδες κομμάτι αερίου με πυκνότητα ρ_b και πίεση P_b το οποίο βρίσκεται μέσα σε υλικό πυκνότητας ρ και πίεσης P . Ας υποθέσουμε ότι λόγω κάποιων μικρών διαταραχών, το στοιχειώδες αυτό κομμάτι αερίου μετατοπίζεται προς τα επάνω κατά μία μικρή απόσταση $\delta z \equiv \delta r$. Μετά την μετατόπιση, το κομμάτι αερίου θα έχει συνυψήκες (ρ_b^*, P_b^*) ενώ το καινούργιο του περιβάλλον θα χαρακτηρίζεται από συνυψήκες (ρ', P') , όπου

$$\rho' = \rho + \frac{d\rho}{dr} \delta r \quad (4.124)$$

$$P' = P + \frac{dP}{dr} \delta r \quad (4.125)$$

Αρχικά, το στοιχειώδες κομμάτι αερίου υποθέτουμε ότι βρισκόταν σε κατάσταση μηχανικής ισορροπίας με τον περιβάλλοντα χώρο, ώστε $\rho_b = \rho$ και $P_b = P$. Μετά την μετατόπιση, το κομμάτι πρέπει να επανέλθει σε μία νέα κατάσταση μηχανικής και θερμικής ισορροπίας. Γενικά, ο χρόνος που χρειάζεται για να εδραιώσει μία νέα κατάσταση μηχανικής ισορροπίας είναι ο δυναμικός χρόνος, τ_{dyn} , ενώ η θερμική ισορροπία επέρχεται πολύ πιο αργά, στον θερμικό χρόνο τ_{KH} . Επειδή ισχύει ότι $\tau_{dyn} \ll \tau_{KH}$, μπορούμε

³Εδώ ο όρος "πάνω" θα αναφέρεται στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της βαρύτητας.

να υποθέσουμε ότι η μηχανική ισορροπία επέρχεται πριν προλάβει να γίνει ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον, ώστε η διαδικασία της μετατόπισης να είναι προσεγγιστικά αδιαβατική και να ισχύει $P_b^* = P'$ αλλά γενικά $\rho_b^* \neq \rho'$. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από μία αδιαβατική καταστατική εξίσωση της μορφής $P \propto \rho^\gamma$, όπου γ ο αδιαβατικός δείκτης. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} P_b & \propto \rho_b^\gamma \\ P_b^* & \propto \rho_b^{*\gamma} \end{cases} \Rightarrow \frac{P_b^*}{P_b} \propto \left(\frac{\rho_b^*}{\rho_b}\right)^\gamma \Rightarrow \rho_b^* \propto \rho_b \left(\frac{P_b^*}{P_b}\right)^{1/\gamma} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_b^* \propto \rho_b \left(\frac{P'}{P}\right)^{1/\gamma} & \xrightarrow{(4.125)} \rho_b^* = \rho_b \left(1 + \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \delta r\right)^{1/\gamma} \end{aligned}$$

Στο όριο των μικρών μετατοπίσεων δr , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάπτυγμα Taylor για να δείξουμε ότι

$$\rho_b^* = \rho + \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \delta r \quad (4.126)$$

όπου χρησιμοποίησαμε την αρχική συνθήκη $\rho_b = \rho$, και ότι το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x) = (1+x)^{1/\gamma}$ δίνεται προσεγγιστικά από $f(x) \simeq 1 + \frac{1}{\gamma}x + \dots$

Εστω ένα στρωματοποιημένο (stratified) υλικό στο οποίο $d\rho/dr < 0$ και $dP/dr < 0$. Σε αυτή την περίπτωση, εφαρμόζουμε την σχέση (4.126) και βλέπουμε ότι $\rho_b^* > \rho'$. Τούτη η σύστημα είναι σταθερό ως προς τη δημιουργία ρεύματος μεταφοράς. Αν όμως $\rho_b^* < \rho'$, τότε δημιουργείται αστάθεια καθώς δυνάμεις άνωσης θα το επιταχύνουν προς τα επάνω. Από τις σχέσεις (4.124) και (4.126) προκύπτει ότι η ευστάθεια απαιτεί

$$\boxed{\rho_b^* > \rho' \Rightarrow \frac{d\rho}{dr} < \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dr}} \quad (4.127)$$

ή ισοδύναμα, διαφέροντας με dP/dr (το οποίο είναι αρνητικό)

$$\boxed{\frac{d \log \rho}{d \log P} > \frac{1}{\gamma}} \quad (4.128)$$

Η σχέση (4.128) ονομάζεται **χριτήριο ευστάθειας Schwarzschild**, και αν παραβιαστεί τότε έχουμε την δημιουργία ρευμάτων μεταφοράς.

Παρόλα αυτά, οι σχέσεις (4.127) και (4.128) απαιτούν τον υπολογισμό βαθμίδας πυκνότητας που δεν είναι μέρος των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την αστρική δομή. Θα προτιμούσαμε να εκφράσουμε το χριτήριο του Schwarzschild με τη μορφή θερμοβαθμίδας, όπως αυτή εμφανίζεται στην εξίσωση μεταφοράς ενέργειας με ακτινοβολίας (σχέσεις 4.98 – 4.100). Χρησιμοποιώντας ότι

$$\rho = \rho(P, T) = \frac{\mu m_H}{kT} P$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\mu m_H}{k} \left(\frac{1}{T} \frac{dP}{dr} - \frac{P}{T^2} \frac{dT}{dr} \right) = \underbrace{\frac{\mu m_H}{kT} P}_{=\rho} \left(\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \quad (4.129)$$

Από τις σχέσεις (4.124) και (4.129) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho + \frac{d\rho}{dr} \delta r = \rho + \left(\frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \right) \delta r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho' - \rho = \left(\frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \right) \delta r \xrightarrow{(4.126)} \\ &\Rightarrow \rho' - \rho_b^* + \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \delta r = \left(\frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \right) \delta r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_b^* - \rho' = \left(-\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \right) \delta r \end{aligned}$$

Η ευστάθεια απαιτεί $\rho_b^* - \rho' > 0$, άρα αφού $dP/dr < 0$ και $dT/dr < 0$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_b^* - \rho' &> 0 \Rightarrow \left(-\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) \rho \delta r > 0 \xrightarrow{\rho > 0, \delta r > 0} \\ &\Rightarrow -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\left| \frac{dT}{dr} \right| < \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right|} \quad (4.130) \end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή του κριτηρίου Schwarzschild μας δείχνει ότι όταν η θερμοβαθμίδα γίνει πολύ μεγάλη, τότε το σύστημα γίνεται ασταθές ως προς την εμφάνιση ρευμάτων μεταφοράς, και μαζί με την σχέση (4.98) για την περίπτωση μεταφοράς ενέργειας με ακτινοβολία, αποτελεί την τέταρτη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη δομή ενός αστέρα (αν αντί για ανισότητα πάρουμε ισότητα), στην περίπτωση που έχουμε μεταφορά ενέργειας μέσω δινορευμάτων.

Παρόλα αυτά, υπάρχει ακόμα ένας τρόπος να γράψουμε το κριτήριο του Schwarzschild και η οποία θα μας επιτρέψει να αντιληφθούμε καλύτερα το πότε η μεταφορά ενέργειας μέσω δινορευμάτων υπερισχύει αυτής της ακτινοβολίας. Γράφοντας την καταστατική εξίσωση σε διαφορική μορφή (δες Παράρτημα C), η διακύμανση της πυκνότητας ως προς την πίεση σε όλον τον αστέρα θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= \chi_\rho \frac{d\rho}{\rho} + \chi_T \frac{dT}{T} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d \log P = \chi_\rho d \log \rho + \chi_T d \log T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d \log \rho}{d \log P} = \frac{1}{\chi_\rho} (1 - \chi_T \nabla) \quad (4.131) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $d \log P = dP/P$, $d \log \rho = d\rho/\rho$ και $d \log T = dT/T$. Η ποσότητα $\nabla = \frac{d \log T}{d \log P}$ ονομάζεται **πραγματική θερμοβαθμίδα** (actual temperature gradient).

Για μια αδιαβατική μεταβολή ($dT = 0$), ισχύει

$$\frac{dP}{P} = \underbrace{\chi_\rho}_{=\gamma} \frac{d\rho}{\rho} + \chi_T \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d \log P}{d \log \rho} = \gamma \quad (4.132)$$

και άρα συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με τη σχέση (4.131), μπορούμε να γράψουμε για το στοιχειώδες κομμάτι αερίου που μετατοπίστηκε ότι

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\chi_\rho} (1 - \chi_T \nabla_{ad}) \Rightarrow \nabla_{ad} = \frac{\gamma - \chi_\rho}{\gamma \chi_T} \quad (4.133)$$

όπου η ποσότητα $\nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right)_{ad}$ είναι η **αδιαβατική θερμοβαθμίδα**. Επειδή για το ιδανικό αέριο ισχύει $\chi_\rho = \chi_T = 1$, έχουμε ότι

$$\nabla_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (4.134)$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, η έκφραση του κριτηρίου Schwarzschild (4.128) γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{d \log \rho}{d \log P} &> \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\chi_\rho} (1 - \chi_T \nabla) > \frac{1}{\chi_\rho} (1 - \chi_T \nabla_{ad}) \\ &\Rightarrow 1 - \chi_T \nabla > 1 - \chi_T \nabla_{ad} \Rightarrow \chi_T \nabla < \chi_T \nabla_{ad} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\nabla < \nabla_{ad}} \end{aligned} \quad (4.135)$$

Αν όλη η ενέργεια μεταφέρεται μέσω ακτινοβολίας, τότε $\nabla = \nabla_{rad}$, όπως δίνεται από την σχέση (4.100) και άρα καταλήγουμε στο ότι

$$\boxed{\nabla_{rad} < \nabla_{ad}} \quad (4.136)$$

Σημασία πρέπει να δούθει στα διάφορα ∇ σύμβολα που εμφανίζονται στις διάφορες μορφές του κριτηρίου Schwarzschild. Το ∇_{rad} παριστάνει την χωρική θερμοβαθμίδα, ενώ το ∇_{ad} παριστάνει την μεταβολή της θερμοκρασίας σε ένα στοιχειώδες κομμάτι αερίου που υπόκειται σε μια μεταβολή πίεσης.

Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο Schwarzschild, περιμένουμε να έχουμε μεταφορά ενέργειας μέσω δινορεμάτων εαν

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi\alpha cG} \frac{\kappa l P}{m T^4} > \nabla_{ad}$$

Αυτό προϋποθέτει ένα από τα ακόλουθα

- Μία μεγάλη τιμή του κ , δηλαδή έχουμε ρεύματα μεταφοράς σε περιοχές όπου η αδιαφόρια είναι μεγάλη. Παραδείγματα τέτοιων περιοχών είναι τα εξωτερικά στρώματα του Ήλιου και άλλων ψυχρών αστέρων, καθώς η αδιαφόρια αυξάνεται όσο μειώνεται η θερμοκρασία (δες αδιαφόρια κατά Kramer). Αφού αστέρες χαμηλής μάζας (μεταγενέστερου φασματικού τύπου) είναι πιο ψυχροί από αστέρες μεγάλης μάζας (προγενέστερου φασματικού τύπου), περιμένουμε αστέρες χαμηλής μάζας να έχουν εξωτερικά στρώματα που εμφανίζουν δινορεμάτα.
- Μία μεγάλη τιμή του l/m , δηλαδή περιοχές με μεγάλη ροή ενέργειας. Σύμφωνα με τη σχέση (4.44), προς τον πυρήνα έχουμε $l/m \approx E_{nuc}$, έτσι αστέρες που έχουν παραγωγή ενέργειας στο κέντρο τους αναμένεται να έχουν πυρήνες που εμφανίζουν δινορεμάτα. Αυτό συμβαίνει σε αστέρες σχετικά μεγάλης μάζας.

- Μία μικρή τιμή του ∇_{ad} , κάτι που συμβαίνει σε περιοχές μερικού ιονισμού σε σχετικά χαμηλές θερμοκρασίες (partial ionization zones). Έτσι, ακόμα κι αν η αδιαφράνεια δεν είναι πολύ μεγάλη, τα στρώματα της επιφάνειας ενός αστέρα μπορεί να είναι ασταθή όσον αφορά την δημιουργία δινορευμάτων. Αποδεικνύεται ότι αστέρες ανεξαρτήτου μάζας έχουν ρηχές επιφανειακές περιοχές στις οποίες εμφανίζονται δινορεύματα, σε θερμοκρασίες όπου το υδρογόνο και το ήλιο είναι μερικώς ιονισμένα.

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι δεν είναι καθόλου εύκολο να αναπτύξουμε μία αναλυτική θεωρία για τα ρεύματα μεταφοράς και ότι αποτελεί ένα πολύ ενεργό πεδίο έρευνας της Αστροφυσικής. Προκειμένου να έχουμε μία εκτίμηση για το πόση ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί μέσω των δινορευμάτων, καταφεύγουμε σε μία απλή μονοδιάστατη "θεωρία" που βασίζεται σε πολλές προσεγγίσεις και είναι γνωστή ως "mixing length theory" (MLT)⁴. Σύμφωνα με αυτή, το στοιχειώδες κοινά μεταφοράς το πέρας της οποίας το κοινά μεταφοράς έχει υιοθετήσει τα χαρακτηριστικά του μέσου που το περιβάλλει. Το χαρακτηριστικό αυτό μήκος είναι της τάξης του τοπικού pressure scale height, H_P , ($\ell_m \sim H_P$) όπου είναι η ακτινική απόσταση κατά την οποία η πίεση αλλάζει κατά έναν παράγοντα e .

$$H_P = \left| \frac{dr}{d \ln P} \right| = \frac{P}{\rho g} \quad (4.137)$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει στην περίπτωση που ο αστέρας βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Η ροή των δινορευμάτων αποδεικνύεται ότι συνδέεται με την υπεραδιαβατικότητα (superadiabaticity), $\nabla - \nabla_{\text{ad}}$, η οποία δείχνει τον βαθμό στον οποίο η πραγματική θερμοβαθμίδα ∇ , ξεπερνάει την αδιαβατική τιμή

$$F_{\text{conv}} = \rho c_P T \left(\frac{\ell_m}{H_P} \right)^2 \sqrt{\frac{1}{2} g H_P} (\nabla - \nabla_{\text{ad}})^{3/2} \quad (4.138)$$

Όσο προσεγγίζουμε την επιφάνεια του αστέρα, τα δινορεύματα γίνονται πολύ αναποτελεσματικά στην μεταφορά ενέργειας. Τότε $F_{\text{conv}} \ll F_{\text{rad}}$ ώστε η ακτινοβολία να μεταφέρει πρακτικά όλη την ενέργεια, και $\nabla \approx \nabla_{\text{rad}}$ παρά την παρουσία δινορευμάτων.

4.1.6

Σύνοψη εξισώσεων αστρικής δομής

- Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

- Εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{m(r) \rho(r)}{r^2}$$

- Εξίσωση θερμικής ισορροπίας

$$\frac{dl}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \left(\epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_{\nu} - T \frac{ds}{dt} \right)$$

⁴Συχνά η MLT προσεγγίζεται ως μία διαδικασία διάχυσης.

- Εξίσωση διάδοσης ενέργειας Γενικά, η στρωματοποίηση της θερμοκρασίας (temperature stratification) μπορεί να περιγραφεί από

$$\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \nabla \frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial r} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial r} = \nabla \frac{T}{P} \frac{G m \rho}{r^2}}$$

Αν η ενέργεια μεταφέρεται με ακτινοβολία ($\nabla = \nabla_{\text{rad}}$):

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3 \kappa(r) \rho(r) l}{16 \pi \alpha c r^2 T^3}$$

Αν η ενέργεια μεταφέρεται με ρεύματα μεταφοράς ($\nabla = \nabla_{\text{ad}}$):

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} = - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{G m(r) \rho(r)}{r^2} \frac{T}{P}$$

Σε κάθε φλοιό πρέπει να ελέγχουμε αν $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}}$, στην οποία περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση που περιγράφει την μεταφορά ενέργειας με ακτινοβολία αλλιώς πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση μεταφοράς ενέργειας με δινορεύματα. Σε περιοχές χαμηλής πυκνότητας πρέπει να υπολογίζουμε το ∇_{conv} χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ρευμάτων μεραφοράς.

Οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να συνοδεύονται από συμπληρωματικές σχέσεις, όπως η καταστική εξίσωση $P(\rho, T)$, η αδιαφόρεια $\kappa(\rho, T)$, και ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας $\epsilon(\rho, T, X_i)$, καθώς και τέσσερις συνοριωτικές συνθήκες (δύο στην επιφάνεια: $L = 4 \pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$ και $P = \frac{2GM}{3R^2\kappa}$, και δύο στο κέντρο: $M(r) = 0$ και $L(r) = 0$) ώστε να έχουμε συνολικά εφτά εξισώσεις για εφτά άγνωστες μεταβλητές ($P, \rho, T, m(r), L(r), \kappa, \epsilon$) ως συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής r (ή της m αν επιλέξουμε να εκφράσουμε τις παραπάνω σχέσεις στο σύστημα συντεταγμένων του Lagrange).

4.2 Εξέλιξη αστέρων

Ο κόσμος γύρω μας, καθώς και εμείς οι ίδιοι είμαστε φτιαγμένοι από πάνω από εκατό διαφορετικά χημικά στοιχεία. Σήμερα γνωρίζουμε ότι ζούμε σε ένα σύμπαν πλούσιο σε χημικά στοιχεία που απαρτίζουν όλες τις γνωστές κοσμικές δομές που μπορούμε να παρατηρήσουμε. Έχουμε εντοπίσει περισσότερα από 118 τέτοια στοιχεία, τα οποία από τον 19ο αιώνα κιόλας, είναι κομψά ταξινομημένα σε γραμμές και σε στήλες του περιοδικού πίνακα από τον Dmitri Mendeleev. Από αυτά όμως, λίγα είναι σε αφθονία, όπως το υδρογόνο, ο άνθρακας, το πυρίτιο και ο σίδηρος. Άλλα στοιχεία πάλι, όπως ο χρυσός και το ουράνιο είναι σπάνια και για αυτό η αξία τους είναι μεγάλη και άλλα είναι τεχνητά κι έχουν δημιουργηθεί αποκλειστικά σε εργαστήρια. Ωστόσο, το 99% της συνηθισμένης βαρυονικής ύλης του σύμπαντος αποτελείται από δύο μόνο στοιχεία: το υδρογόνο και το ήλιο. Για το υδρογόνο, όλες οι ενδείξεις καταδεικνύουν ότι δημιουργήθηκε κατά τις πρώτες στιγμές του σύμπαντος. Το ήλιο ακολούθησε μεταγενέστερα, μέσα στα πρώτα λεπτά μετά την Μεγάλη Έκρηξη. Για τα υπόλοιπα στοιχεία όμως η διαδικασία της δημιουργίας τους διαφέρει. Για πολλά χρόνια η εξήγηση της προέλευσης των βαρύτερων χημικών στοιχείων ήταν μια μεγάλη πρόκληση για την επιστημονική κοινότητα, όπως και το να εξηγήσουν την αναλογία τους. Στην αρχή αυτής της αναζήτησης, πριν την ανάπτυξη της πυρηνικής φυσικής και της κβαντικής θεωρίας, κανένας δεν γνώριζε την προέλευση τους. Όμως, από τις αρχές της δεκαετίας του 1940 γνωρίζουμε πλέον ότι σημαντικό ρόλο στη δημιουργία των χημικών στοιχείων παίζει η δημιουργία, η εξέλιξη και ο θάνατος των αστρων.

4.2.1

Αφθονία Χημικών Στοιχείων στο Σύμπαν

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη μας σχετικά με την δημιουργία των βαρέων στοιχείων στο σύμπαν αξίζει να κοιτάξουμε την κατανομή των χημικών στοιχείων σε αυτό όπως τη βλέπουμε σήμερα. Η συλλογή αυτών των πληροφοριών γίνεται με διάφορους τρόπους όπως μέσα από φασματοσκοπικές παρατηρήσεις, ανάλυση της σύστασης μετεωρίτων κ.α. και εκφράζεται από την **αφθονία** των χημικών στοιχείων στο σύμπαν. Με τον όρο αφθονία ενός στοιχείου ορίζουμε το πόσο συχνά εμφανίζεται ένα στοιχείο σε δεδομένο περιβάλλον σε σύγκριση με τα υπόλοιπα. Για να υπολογίσουμε όμως με ακρίβεια αυτή την αναλογία συνήθως χρησιμοποιούμε ως βάση μας το λόγο μάζας (mass fraction) ή τα ποσοστιαία mole αυτού του στοιχείου, δηλαδή τον λόγο της μάζας του ή τα mole του στοιχείου που θέλουμε να μελετήσουμε ως προς τη συνολική μάζα/mole του ρευστού. Αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε τον όγκο, γιατί ειδικά σε μορφές ρευστών όπως τα αέρια και το πλάσμα η συστολή - διαστολή του όγκου τους είναι συχνό φαινόμενο. Η σχετική μάζα για το μίγμα του κοσμικού ρευστού, όπως γνωρίζουμε από την Χημεία ορίζεται ως

$$X_i = \frac{m_i}{m_{\text{tot}}} \quad (4.139)$$

όπου το σύνολο των σχετικών μάζών του κοσμικού ρευστού είναι:

$$\sum_{i=1}^N m_i = m_{\text{tot}} \Rightarrow \sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad (4.140)$$

Μια ποσότητα που δεν εκφράζει την συνολική μάζα αλλά την αριθμητική πυκνότητα ενός πυρήνα είναι η αναλογία:

$$Y_i = \frac{X_i}{A_i} \quad (4.141)$$

όπου X_i ο αριθμός των πρωτονίων ή των νετρονίων και A_i ο μαζικός αριθμός του πυρήνα. Αν η πυκνότητα μάζας ενός πυρήνα ρX_i διαιρεθεί με τη μάζα ενός πυρήνα $A_i m_u$, η οποία περιέχει την αριθμητική πυκνότητα:

$$n_i = \frac{\rho}{X_i} A_i m_u = \frac{\rho Y_i}{m_u} = \rho N_A Y_i \quad (4.142)$$

όπου N_A ο αριθμός Avogadro και γνωρίζουμε ότι ισχύει: $N_A = 1/m_u$ και X_i . Η συνολική αφθονία ηλεκτρονίων (electron-fraction) εκφράζεται ακριβώς όπως εκείνη των ελεύθερων πρωτονίων σε σχέση με τους πυρήνες και είναι της μορφής:

$$Y_e = \sum_i Z_i Y_i \quad (4.143)$$

όπου Z_i το φορτίο του σωματίου. Ο λόγος των ηλεκτρονίων ανά νουκλεόνιο στην ύλη είναι καιθοριστικός παράγοντας σε πολλές αστροφυσικές και πυρηνικές μελέτες. Η τιμή αυτού του λόγου μεταβάλλεται όταν ένα πρωτόνιο "αιχμαλωτίζεται" ένα ηλεκτρόνιο για τον σχηματισμό ενός νετρονίου. Ισοδύναμα, έχουμε και τον συνολικό λόγο πρωτονίων ανά νουκλεόνιο:

$$\frac{\sum_i Z_i Y_i}{\sum_i Y_i (Z_i + N_i)} = \frac{\sum_i Z_i Y_i}{\sum_i A_i Y_i} = \frac{\sum_i Z_i Y_i}{\sum_i X_i} \quad (4.144)$$

Οι αλλαγές στην αφθονία (\dot{Y}_i) μπορούν να εκφραστούν από μια διαφορική εξίσωση για κάθε πυρηνική αναλογία Y_i , που θα εκφράζει τις διασπάσεις, πυρηνικές συντήξεις και αντιδράσεις. Σε γενικές γραμμές, η

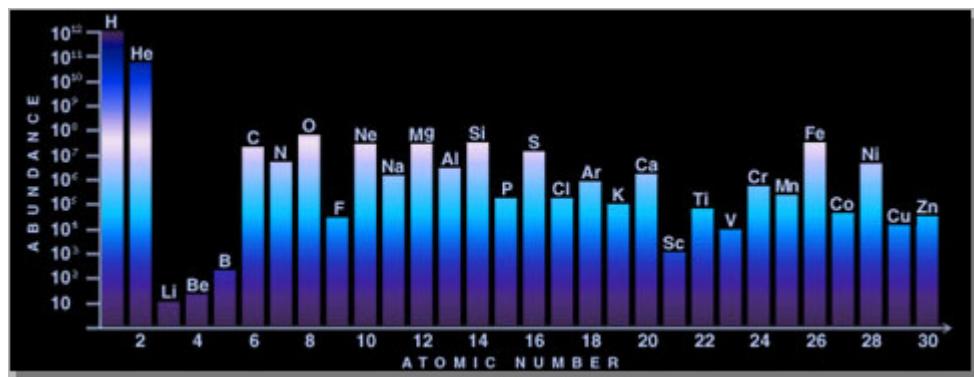


Figure 4.5: Η αφθονία των χημικών στοιχείων στο σύμπαν.

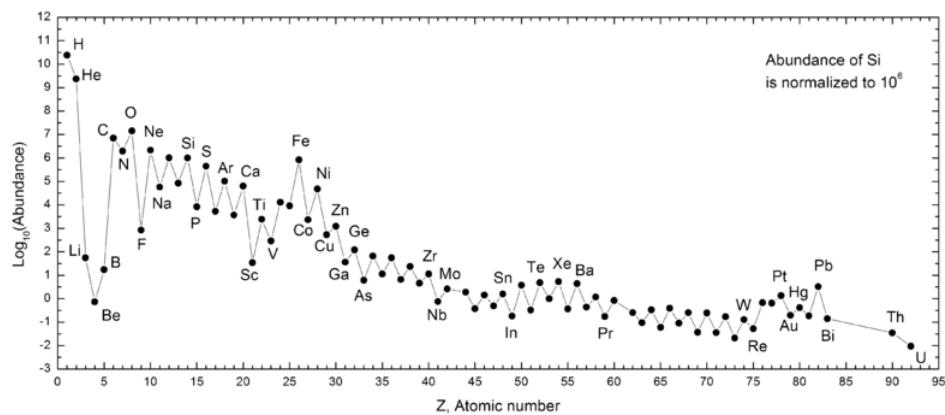


Figure 4.6: Η αφθονία των χημικών στοιχείων στο ηλιακό μας σύστημα.

διαφορική εξίσωση που μας δείχνει την αλλαγή στη χημική σύσταση ενός αστέρα μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.145)$$

όπου X_i είναι ο λόγος μάζας (mass fraction) όλων των ατομικών πυρήνων που παίρνουν μέρος στην διαδικασία της πυρηνοσύνθεσης ($i = 1, \dots, n$), με μάζα m_i . Αυτό το σύνολο διαφορικών εξισώσεων περιγράφει την εξέλιξη του αστέρα σε όρους χημικής σύστασης και έρχεται να συμπληρώσει τις τέσσερις γνωστές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την δομή του αστέρα.

Η σχετική αφθονία κάθε στοιχείου στο σύμπαν, όπως προκύπτει από τις σημερινές παρατηρήσεις, φαίνεται στο ραβδόγραμμα του σχήματος 4.5.

Το αποτύπωμα της κοσμικής πυρηνοσύνθεσης βαρέων στοιχείων βρίσκεται και μέσα στην αφθονία των στοιχείων του ηλιακού συστήματος (σχήμα 4.6). Η ηλιακή φωτόσφαιρα και οι μετεωρίτες αντικατοπτρίζουν την χημική υπογραφή του νέφους μέσα από το οποίο γεννήθηκε ο ήλιος. Αυτή η αφθονία όμως, φαίνεται να εκφράζει την γενικότερη συμπεριφορά της δημιουργίας των πυρήνων στο σύμπαν. Αξίζει να παρατηρήσουμε τις κορυφές στα στοιχεία με ατομικούς αριθμούς $A = 80, 130$ και 195 – οι οποίοι αντιστοιχούν σε μαγικούς αριθμούς – καθώς η σύνθεση αυτών των στοιχείων προέρχεται αποκλειστικά μέσω των διεργασιών που αναλύουμε στο παράτημα D.

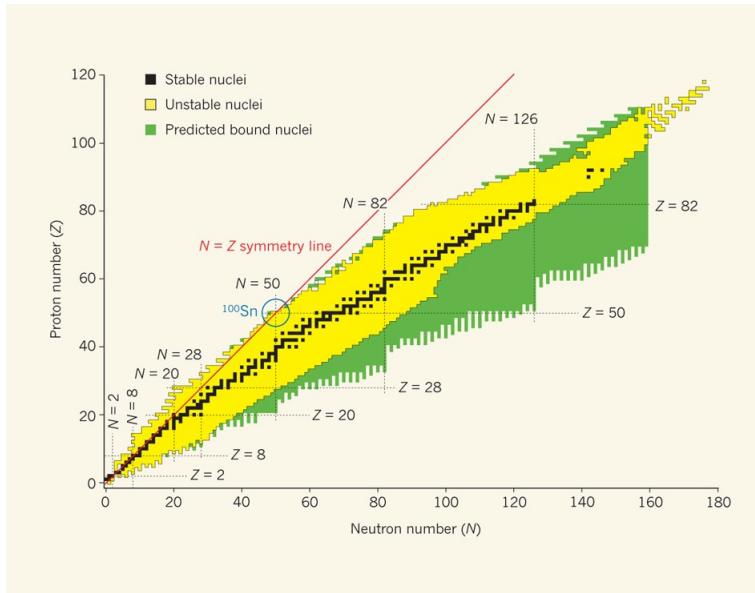


Figure 4.7: Διάγραμμα Segre. Τα στοιχεία που εμφανίζονται με μαύρες κουκκίδες είναι σταθερά ισότοπα και αποτελούν την κοιλάδα σταθερότητας.

Σχεδόν όλη μάζα των στοιχείων συγκεντρώνεται στα στοιχεία του υδρογόνου και του ηλίου, τα οποία φαίνεται να παρήγθησαν κατά τη γέννηση του σύμπαντος. Η επικράτηση των πυρήνων μικρού ατομικού αριθμού A έναντι των μεγαλυτέρων δεν είναι τυχαία και φαίνεται να οφείλεται σε δυο παράγοντες. Ο ένας παράγοντας είναι ότι σε μεγαλύτερους πυρήνες, η διαδικασία της σύντηξης απαιτεί μεγαλύτερη ενέργεια έτσι ώστε να ξεπεραστεί το απωστικό δυναμικό Coulomb καθώς η πιθανότητα μιας τέτοιας σύντηξης παρουσιάζει εκθετική εξάρτηση του προϊόντος από τα φορτισμένα αντιδρώντα. Για παράδειγμα, η σύντηξη δυο πυρήνων οξυγόνου θα μας δώσει έναν πυρήνα 64 φορές μεγαλύτερο από εκείνον που θα μας δώσει η σύντηξη δυο πυρήνων υδρογόνου. Ο άλλος παράγοντας φαίνεται να είναι ο αριθμός των νουκλεονίων του πυρήνα. Όπως έχουμε δει και στα παραπάνω διαγράμματα, ο επόμενος εμφανιζόμενος πυρήνας με μονό αριθμό νουκλεονίων μετά το ^1H είναι το ^{25}Mg που είναι πολύ χαμηλός σε ποσοστά εμφάνισης. Με μια προσεκτικότερη ματιά στις χημικές αναλογίες είναι προφανές ότι υπάρχει μια προτίμηση στη δημιουργία πυρήνων με ζυγό αριθμό νουκλεονίων έναντι σε εκείνους με μονό αριθμό. Επίσης, φαίνεται να υπάρχει σαφής προτίμηση δημιουργίας πυρήνων που έχουν ζυγό-ζυγό αριθμό νουκλεονίων. Για παράδειγμα, στα πρώτα 25 στοιχεία μόνο το ^{14}N δεν είναι ζυγός-ζυγός πυρήνας, δηλαδή δεν έχει ζυγό αριθμό πρωτονίων και ζυγό αριθμό νετρονίων. Επιπλέον εκτός από τον ^{56}Fe όλοι οι υπόλοιποι συχνά εμφανιζόμενοι πυρήνες έχουν ζυγούς-ζυγούς πυρήνες αλλά και $Z = N$. Τους πυρήνες με αυτή την ιδιότητα τους ονομάζουμε **alpha-particle nuclei** εξαιτίας της ομοιότητάς του με τον πρώτο εμφανιζόμενο ζυγό-ζυγό πυρήνα, τον πυρήνα του ^4He . Αυτό εξηγείται μέσω του πυρηνικού μοντέλου φλοιών, δηλαδή στο ότι οι ατομικοί πυρήνες αυξάνουν τις διαστάσεις τους σχηματίζοντας κελύφη γεμάτα με πρωτόνια και νετρόνια. Μόνο συγκεκριμένοι συνδυασμοί αριθμών πρωτονίων και νετρονίων φαίνεται να εμφανίζουν τους ισχυρότερους δεσμούς σύνδεσης και άρα ευσταθή στοιχεία. Τους συνδυασμούς αυτούς τους ονομάζουμε **μαγικούς αριθμούς**. Πλέον είναι προφανές ότι τα στοιχεία σε μεγαλύτερη αριθμονία είναι εκείνα που έχουν διπλά μαγικούς όπως τα: ^4He με $Z = N = 2$, ^{16}O με $Z = N = 8$, ^{40}Ca με $Z = N = 20$ και ακόμα και για τον σίδηρο ^{56}Fe φαίνεται ότι αρχικά δημιουργήθηκε ως τον alpha-particle πυρήνα ^{56}Ni με $Z = N = 28$. Μετά όμως από τη δημιουργία αυτού του στοιχείου, η διαδικασία δημιουργίας βαρύτερων στοιχείων φαίνεται να αλλάζει χαρακτήρα και να προέρχεται από μια διαφορετική διαδικασία από εκείνη της σύντηξης. Την διαδικασία αυτή θα την αναλύσουμε εκτενώς παρακάτω και δεν είναι άλλη από εκείνη της αρπαγής νετρονίων. Τέλος, στο παρακάτω διάγραμμα Segre (σχήμα 4.7) φαίνεται μια ολοκληρωμένη εικόνα της τελικής εξέλιξης της πυρηνοσύνθεσης.

4.2.2

Δημιουργία πρωτοαστέρων

Τα άστρα δημιουργούνται κατά κανόνα από τη μεσοαστρική ύλη που υπάρχει στους γαλαξίες και η οποία αποτελείται κυρίως από υδρογόνο, ήλιο, και μοριακή σκόνη. Η ύλη αυτή, όπως και στο αρχέγονο σύμπαν, συχνά σχηματίζει νέφη τεραστίων διαστάσεων και χαμηλής πυκνότητας, τα νεφελώματα. Αυτά τα νέφρη εξαιτίας της μεγάλης μάζας τους έχουν και την αντίστοιχη βαρυτική δυναμική ενέργεια, η οποία όμως λόγω της χαμηλής τους πυκνότητας, δεν είναι ικανή να υπερνικήσει τις θερμικές κινήσεις των μορίων και να προκαλέσει τη βαρυτική συστολή και συμπύκνωση. Ο Jeans έδειξε ότι η δύναμη της πίεσης παύει να αντισταθμίζει τη βαρυτική έλξη, όταν οι διαστάσεις του νέφους είναι μεγαλύτερες, σε τάξη μεγέθους, από το μήκος Jeans που δίνεται από τη σχέση

$$L_J = \left(\frac{14}{4\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{kT}{\mu m_H G \rho} \right)^{1/2} \quad (4.146)$$

Στην περίπτωση αυτή όλη η ύλη, M_J , που περιέχεται σε μία σφαίρα με ακτίνα L_J , η οποία ισούται με

$$M_J = \frac{4}{3}\pi \rho L_J^3 = \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{5kT}{\mu m_H G} \right)^{3/2} \quad (4.147)$$

συμπυκνώνεται και δημιουργεί ένα αστρικό αντικείμενο. Συμπερασματικά, η συμπύκνωση ευνοείται όταν η θερμοκρασία είναι μικρή, και η πυκνότητα μεγάλη. Ανάλογα με το μέγεθος της μάζας (το οποίο εξαρτάται από τη θερμοκρασία, την πυκνότητα και το μέσο μοριακό βάρος του αερίου), το αντικείμενο αυτό μπορεί να είναι ένας αστέρας, ένα συήνος αστέρων ή και ένας γαλαξίας.

Για να εγκαταλείψει το νεφος την ισορροπία και να αρχίσει η συστολή απαιτείται μια αρχική διαταραχή, μήκους κύματος μεγαλύτερου ή ίσου με το χαρακτηριστικό μήκος Jeans γι' αυτό το νέφος. Διάφοροι παράγοντες μπορεί να επιφέρουν την βαρυτική κατάρρευση, μερικοί από τους οποίους είναι

• Σύγκρουση Νεφών

Κατά τη σύγκρουση δύο ή περισσοτέρων νεφών η πυκνότητά τους αυξάνεται τοπικά δημιουργώντας έτσι περιοχές αστρογέννησης.

• Έκρηξη Υπερκαινοφανούς Αστέρα (supernova)

Όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω, το τέλος ενός αστέρα μεγάλης μάζας συνοδεύται από την έκρηξή του. Σε μία τέτοια έκρηξη, το μεγαλύτερο μέρος ενός αστεριού (ή και ολόκληρο το αστέρι) διαλύεται και η ύλη του εκσφενδονίζεται βίαια στο διάστημα. Το αστικό κύμα αυτής της έκρηξης συμπιέζει τα γειτονικά νέφη και δίνει το έναυσμα για τη βαρυτική συστολή.

• Ύπαρξη νεαρών αστέρων μεγάλης μάζας

Όταν στην περιοχή των νεφών έχουν ήδη σχηματισθεί νέα μεγάλα αστέρια, αυτά εκπέμπουν τεράστια ποσά ακτινοβολίας η πίεση της οποίας επιδρά πάνω στην ύλη των γειτονικών νεφών και κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες μπορεί να επιφέρει βαρυτική κατάρρευση.

• Σπειροειδή Κύματα Πυκνότητας

Σύμφωνα με τη θεωρία κυμάτων πυκνότητας (Lin και Shu, 1963), σπειροειδή κύματα πυκνότητας ξεκινούν από τον πυρήνα του γαλαξία και ξετυλίγονται προς τα έξω στον γαλαξιακό δίσκο. Τα κύματα αυτά συμπιέζουν το αέριο του δίσκου στα σημεία διεύλευσής τους προκαλώντας τη βαρυτική συστολή των μεσοαστρικών νεφών και τη δημιουργία νέων άστρων. Σε κάθε περίπτωση η παρουσία της πίεσης είναι απαραίτητη για να υπερνικήσουν οι τυχαίες θερμικές κινήσεις των μορίων.

Αυτή η βαρυτική κατάρρευση έχει ως επακόλουθο την εξώθερμη σύντηξη του υδρογόνου. Από τη στιγμή που σε ένα αστέρι ξεκινήσουν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στον πυρήνα του, αρχίζει να ακτινοβολεί

έντονα και ξεκινάει τη "ζώή" του. Αστέρια με μεγάλη μάζα έχουν μεγάλη βαρύτητα, συνεπώς μεγάλη πίεση και ψερμοκρασία στον πυρήνα τους. Έτσι, οι συγκρούσεις μεταξύ των πυρήνων υδρογόνου είναι συχνότερες με αποτέλεσμα ο ρυθμός μεταστοιχείωσης του υδρογόνου να είναι μεγάλος. Επομένως, η παραγωγή και η ακτινοβολία ενέργειας είναι επίσης μεγάλες, έτσι ώστε τα αστέρια με μεγάλη μάζα να έχουν μεγάλη επιφανειακή ψερμοκρασία και λαμπρότητα. Αντιθέτως, αστέρια με μικρή μάζα ακτινοβολούν λιγότερο. Οι μάζες των αστεριών ποικίλουν αλλά εντός συγκεκριμένων ορίων ($0.08M_{\odot} < M < 150M_{\odot}$).

Γραμμή Hayashi Η γενικά παραδεκτή σήμερα θεωρία εξέλιξης των πρωτοαστέρων είναι αυτή που πρότεινε ο Ιάπωνας αστρονόμος Hayashi. Στην αρχή το μεσοαστρικό νέφος που συστέλεται είναι οπτικά διαφανές (οπτικό βάθος $\tau \ll 1$) επειδή η πυκνότητά του είναι μικρή. Έτσι η ενέργεια που παράγεται στο εσωτερικό του, λόγω της βαρυτικής συστολής, ακτινοβολείται ελεύθερα στο μεσοαστρικό χώρο. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης η ψερμοκρασία στο εσωτερικό του νέφους παραμένει σταθερή και ίση με την αρχική, δηλαδή της τάχης των 10 K. Γρήγορα, όμως, η πυκνότητα αυξάνει σημαντικά (καταρχήν στο κέντρο και αργότερα στις υπόλοιπες περιοχές), οπότε η ύλη παύει να είναι πια διαφανής. Στις περιοχές που η πυκνότητα ξεπερνά κάποια οριακή τιμή, η ύλη γίνεται αδιαφανής ($\tau \approx 1$) και η ψερμοκρασία αυτών των περιοχών αρχίζει να αυξάνει, επειδή η παραγόμενη, λόγω συστολής, ενέργεια δεν μπορεί να ακτινοβοληθεί ελεύθερα στο μεσοαστρικό χώρο. Έτσι αυξάνει, καταρχήν, η ψερμοκρασία της επιφάνειας του "πυρήνα" του νέφους, από όπου προέρχεται και η ακτινοβολία που εκπέμπει ο πρωτοαστέρας.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, το αρχικό νέφος αρχίζει να εκπέμπει φως, ενώ έχει ακόμη μεγάλες διαστάσεις και είναι ακόμη ψυχρό. Επομένως βρίσκεται στην επάνω δεξιά γωνία του διαγράμματος H-R. Καθώς το νέφος συστέλλεται, η λαμπρότητά του ελαττώνεται (επειδή ελαττώνεται η ακτίνα του) η δε ψερμοκρασία της ακτινοβολούσας επιφάνειας παραμένει περίπου σταθερή (αρχική καθοδική πορεία στο σχήμα 4.8). Καθώς όμως η βαρυτική κατάρρευση συνεχίζεται, κάποτε η ψερμοκρασία της ακτινοβολούσας επιφάνειας αρχίζει να αυξάνει σημαντικά, οπότε μεγαλώνει και η φωτεινότητα του πρωτοαστέρα. Στο διάγραμμα H-R ο αστέρας ακολουθεί την ανοδική πορεία της καμπύλης στο σχήμα 4.8.

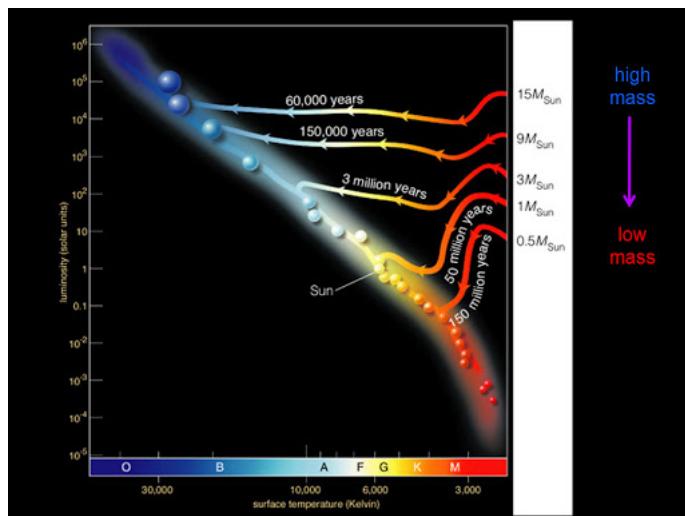


Figure 4.8: Πορείες Hayashi για πρωτοαστέρες διαφόρων μαζών και εγκατάστασή τους στην κύρια ακολουθία.

Με την πάροδο του χρόνου αυξάνει και η πυκνότητα των εξωτερικών στρωμάτων, με αποτέλεσμα να γίνουν αδιαφανή σε οπτικά μήκη κύματος, ώστε η ακτινοβολία του πυρήνα να μην μπορεί να τα διαπεράσει πλέον. Επομένως, η ακτινοβολούσα επιφάνεια τείνει να συμπέσει με την τελική επιφάνεια του αστέρα. Από τη στιγμή αυτή και μετά, συμβαίνουν δύο βασικά γεγονότα:

1. Η συστολή του πρωτοαστέρα συνεχίζεται, αν και με βραδύτερο ρυθμό, και επομένως η επιφάνειά του και η φωτεινότητά του ελλατώνονται (καινοδικό τμήμα της καμπύλης για πρωτοαστέρες με μικρή μάζα στο σχήμα 4.8).
2. Η θερμοκρασία του πυρήνα αυξάνει σημαντικά, με αποτέλεσμα να αρχίσουν οι πρώτες θερμοπυρηνικές αντιδράσεις.

Κατά τη διάρκεια της καύσης των διάφορων στοιχείων έχουμε ανάσχεση της βαρυτικής συστολής, επειδή η θερμική πίεση του αερίου αντισταθμίζει τη βαρυτική πίεση. Τα ελαφρά στοιχεία D, Li, Be, και B, τα οποία μεταστοιχειώνονται σε χαμηλές θερμοκρασίες, εξαντλούνται γρήγορα επειδή, όπως γνωρίζουμε από μετρήσεις της σχετικής αφίσης των διάφορων στοιχείων στη φύση, είναι πολύ σπάνια. Όταν η θερμοκρασία φτάσει τους $\sim 10^7$ K, αρχίζει η καύση του άφυλλου υδρογόνου σύμφωνα με τη σχέση (4.52) και επιτυγχάνεται θερμική και υδροστατική ισορροπία. Ο αστέρας αρχίζει τη σταδιοδρομία του στην κύρια ακολουθία. Όσο πιο μεγάλη μάζα έχει ένας αστέρας όταν φτάσει στην κύρια ακολουθία, τόσο πιο θερμός και πιο φωτεινός είναι. Επομένως οι αστέρες μεγάλης μάζας εγκαθίστανται στο πάνω αριστερό τμήμα της κύριας ακολουθίας, ενώ οι αστέρες μικρής μάζας στο κάτω δεξιό.

Η στιγμή της έναρξης της μεταστοιχείωσης του υδρογόνου στον πυρήνα ενός αστέρα, που συμπίπτει με την εγκατάστασή του στην κύρια ακολουθία, θεωρείται ως η αρχή της ζωής του, αντιστοιχεί δηλαδή σε μηδενική ηλικία. Η πορεία, στο διάγραμμα H-R, που ακολουθήσει ο πρωτοαστέρας από τη στιγμή της δημιουργίας του μέχρι να φτάσει στη φάση ενός αστέρα μηδενικής ηλικίας ονομάζεται **πορεία Hayashi** (Hayashi track). Ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων όλων των αστέρων μηδενικής ηλικίας στο διάγραμμα H-R ονομάζεται **κύρια ακολουθία μηδενικής ηλικίας** (zero age main sequence – ZAMS). Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή της δημιουργίας του πρωτοαστέρα μέχρι τη στιγμή εγκατάστασής του στην κύρια ακολουθία εξαρτάται από τη μάζα του: είναι μεγάλο για πρωτοαστέρες μικρής μάζας και μικρό για πρωτοαστέρες μεγάλης μάζας. Για τον Ήλιο αυτό το διάστημα υπολογίζεται ότι ήταν $\sim 2 \times 10^7$ yr. Από τα παραπάνω γίνεται σαφής και η διαφορά της ZAMS από την κύρια ακολουθία ενός σημήνους αστέρων: η ZAMS αποτελείται από τις θέσεις των αστέρων τη στιγμή της δημιουργίας τους, ενώ η κύρια ακολουθία ενός συνόλου αστέρων (π.χ. ενός σημήνους) αποτελείται από θέσεις αστέρων διάφορων ηλικιών, έστω και αν οι αστέρες αυτοί προέρχονται από πρωτοαστέρες που δημιουργήθηκαν ταυτόχρονα, αφού αστέρες διαφόρων μαζών χρειάζονται διαφορετικά χρονικά διαστήματα για να εγκατασταθούν στην κύρια ακολουθία. Επομένως, η ZAMS είναι ένα από πρότυπο χρήσιμο κυρίως για θεωρητικούς υπολογισμούς.

4.2.3

Εξέλιξη μετά την κύρια ακολουθία

Στο μεγαλύτερο μέρος της ζωής τους, οι αστέρες "καίνε" το υδρογόνο τους μετατρέποντάς το σε ήλιο σύμφωνα με τον κύκλο "πρωτονίου-πρωτονίου" (proton-proton chain) ή με τον κύκλο άνθρακα (κύκλος CNO). Όταν ένα σημαντικό ποσοστό του ^1H μεταστοιχειώνει σε ^4He , ο ρυθμός των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων ελαττώνεται και γίνεται μικρότερος από το ρυθμό ακτινοβολίας της επιφάνειας του άστρου. Έτσι, υπό την επίδραση της βαρύτητας και μέσω του μηχανισμού Kelvin-Helmholtz, η θερμοκρασία αυξάνεται και ξεκινά η καύση του ^4He προς ^{12}C , με την προϋπόθεση η μάζα του αστέρα να είναι μεγαλύτερη των 0.4 ηλιακών μαζών.

Η ενέργεια που παράγεται στον πυρήνα εξωθεί τα υπερχείμενα στρώματα με αποτέλεσμα την τεράστια διόγκωση του αστέρα και τη μετατροπή του σε ερυθρό γίγαντα. Αστέρες με μάζα ίση περίπου με την ηλιακή, κατά τη φάση του ερυθρού γίγαντα, χάνουν σε διάστημα 1000 ετών το 20% με 30% της μάζας τους σχηματίζοντας τελικά ένα πλανητικό νεφέλωμα. Από την φάση του ερυθρού γίγαντα και μετά, ανάλογα με την μάζα ενός αστέρα διαφοροποιείται και η εξέλιξή του.

Αστέρες μικρής μάζας Η συρρίκνωση του αδρανή (αστρικού) πυρήνα ${}^4\text{He}$ συνεχίζεται με ταυτόχρονη παραγωγή ενέργειας, μέσω του μηχανισμού Kelvin-Helmholtz, μέχρι τη στιγμή που η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρόνιων σε αυτόν γίνεται τόση ώστε αυτά να βρίσκονται σε κατάσταση εκφυλισμού. Για αστέρες με μάζα μικρότερη των $0.8M_{\odot}$ αυτό συμβαίνει όσο η θερμοκρασία του πυρήνα είναι μικρότερη από τη θερμοκρασία "ανάφλεξης" του ${}^4\text{He}$. Ο αστρικός πυρήνας σταθεροποιείται σε αυτή την κατάσταση και μετατρέπεται σε έναν λευκό νάνο ηλίου. Τα υπόλοιπα στρώματα του αστέρα συνεχίζουν τη διαστολή τους με επιταχυνόμενο ρυθμό, αντλώντας ενέργεια από την καύση του ${}^1\text{H}$ στον φλοιό του αστέρα. Ταυτόχρονα όμως, η βαρυτική έλξη του πυρήνα γίνεται ασθενέστερη καθώς αυτά απομακρύνονται. Σε αυτό το σημείο, ο αστέρας περνά στην φάση του ερυθρού υπεργίαντα. Κατά τη διάρκεια αυτού του σταδίου, ο αστέρας "σκορπίζεται" στην ευρύτερη περιοχή μέσω του έντονου αστρικού ανέμου που εμφανίζει, δημιουργώντας γύρω του ένα πλανητικό νεφέλωμα. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας λευκός νάνος θερμοκρασίας της τάξης των 30000 K που αποτελείται κυρίως από ${}^4\text{He}$ και λίγο ${}^1\text{H}$.

Αστέρες ενδιάμεσης μάζας Σε αυτή την κατηγορία έχουμε αστέρες με μάζα που βρίσκεται στο εύρος $0.8M_{\odot} < M < 3M_{\odot}$. Η εξέλιξη αυτών των αστέρων ακολουθεί την πορεία αυτών των μικρότερης μάζας εώς το στάδιο του ερυθρού γίγαντα. Σε αυτή την περίπτωση όμως, η δύναμη της βαρύτητας είναι σημαντικά ισχυρότερη με αποτέλεσμα τα ηλεκτρόνια του αδρανούς πυρήνα ${}^4\text{He}$ να εκφυλίζονται και η θερμοκρασία του πυρήνα να ξεπερνά τη θερμοκρασία ανάφλεξης του ${}^4\text{He}$ ($2 \times 10^8\text{ K}$). Τότε αρχίζει η καύση του ${}^4\text{He}$ μέσω της διαδικασίας τριων-α που συζητήσαμε παραπάνω. Όταν όλο το ${}^4\text{He}$ που βρίσκεται στον πυρήνα εξαντληθεί έχοντας μετατραπεί σε ${}^{12}\text{C}$ και ${}^{16}\text{O}$, ξεκινά η καύση του ${}^{12}\text{C}$ που εντοπίζεται στον εξωτερικό φλοιό του αστρικού πυρήνα, ενώ αυτός περιβάλλεται από έναν φλεγόμενο φλοιό ${}^1\text{H}$ ακολουθώντας στο διάγραμμα H-R τον ασυμπτωτικό κλάδο των ερυθρών γιγάντων. Η τελική κατάσταση ενός τέτοιου αστέρα είναι η δημιουργία ενός λευκού νάνου άνθρακα-οξυγόνου.

Αστέρες μεγάλης μάζας Η εξέλιξη αστέρων με μάζα μεγαλύτερη των $3M_{\odot}$ διαφέρει πλέον σημαντικά. Η χαρακτηριστικότερη διαφορά είναι ότι, μετά την εξάντληση των αποθεμάτων άνθρακα και οξυγόνου η θερμοκρασία του πυρήνα είναι πολύ υψηλή και ξεκινάει η μεταστοιχείωσή τους στο επόμενο βαρύτερο στοιχείο, το πυρίτιο (Si). Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του πυρήνα, οι διαδικασίες μεταστοιχείωσεις προχωρούν μέχρι τη δημιουργία του σιδήρου (Fe). Σε αυτό το σημείο, η διαδικασία διακόπτεται καθώς η περαιτέρω μεταστοιχείωση του σιδήρου είναι μια ενδόθερμη αντίδραση και έτσι η αλυσίδα των συντήξεων σταματά. Σε αυτό το στάδιο, η δομή ενός αστέρα θυμίζει αυτή ενός κρεμμυδιού (onion-like structure) καθώς αποτελείται από πολλά διαφορετικά στρώματα-φλοιοιούς.

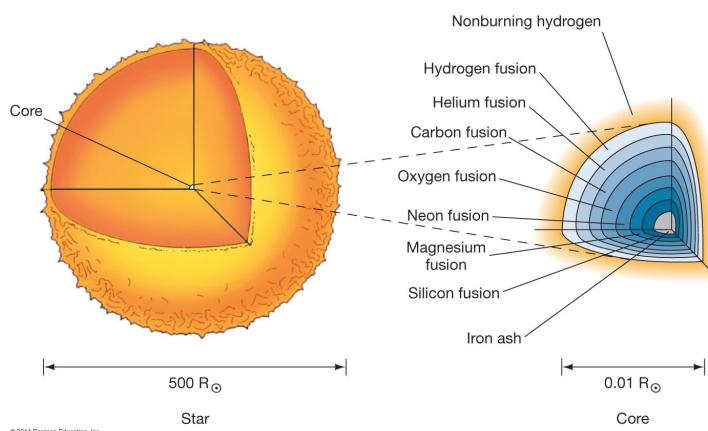


Figure 4.9: Η δομή "κρεμμυδιού" και η καύση στοιχείων ανά φλοιό κατά τα τελευταία στάδια ζωής ενός αστέρα.

Η συνέχεια είναι σε κάθε περίπτωση –κυριολεκτικά– καταστροφική για τον αστέρα. Με τις σημερινές γνώσεις που έχουμε στην αστροφυσική πιστεύουμε ότι μπορούν να υπάρξουν τέσσερις μόνο τελικές καταστά-

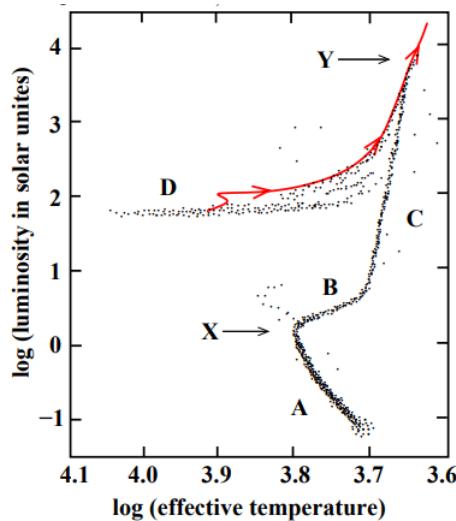


Figure 4.10: Εξέλιξη αστέρων χαμηλής μάζας σε ένα σφαιρωτό συμήνος.

σεις στις οποίες είναι δυνατόν να καταλήξει ένας αστέρας όταν σταματήσει οριστικά η παραγωγή ενέργειας στον πυρήνα του:

- Πλήρης διάλυση του αστέρα
- Δημιουργία λευκού νάνου
- Δημιουργία αστέρα νετρονίων
- Δημιουργία μελανής οπής

Η παραγωγή βαρύτερων στοιχείων του σιδήρου ξεκινά σε κάποιο από τα παραπάνω τελικά στάδια του αστέρα, με διάφορες διεργασίες που μπορούν να λάβουν χώρα και στις οποίες αναφερόμαστε εκτενώς στο παρότρημα D.

Εξέλιξη στο διάγραμμα H-R Η εξέλιξη αστέρων χαμηλής μάζας μπορεί να περιγραφεί ποιοτικά με τη βοήθεια του διαγράμματος H-R ενός σφαιρωτού συμήνους (σχήμα 4.10).

Παρόλο που το διάγραμμα H-R ενός συμήνους αποτελεί ένα στιγμιότυπο σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, παρουσιάζει όλα τα εξεικτικά στάδια στη ζωή ενός αστέρα καθώς η διάρκεια παραμονής ενός αστέρα σε κάθε εξεικτική φάση εξαρτάται από τη μάζα του.

- **Περιοχή A:** Παριστάνει την κύρια ακολουθία. Όλα τα αστέρια σε αυτή την περιοχή είναι στη φάση της κεντρικής καύσης του υδρογόνου, η οποία είναι και η μεγαλύτερη σε χρονική διάρκεια φάση στην ζωή του αστέρα. Αστέρες με χαμηλότερη λαμπρότητα κατά μήκος της κύριας ακολουθίας έχουν χαμηλότερη μάζα καθώς εγκαταστάθηκαν εκεί από διαφορετική πορεία Hayashi.
- **Σημείο στροφής X:** Αστέρες κοντά σε αυτό το σημείο έχουν (σχεδόν) εξαντλήσει το απόθεμα του υδρογόνου στον πυρήνα τους και είναι έτοιμα να αναπτύξουν, πρώτα έναν ισοθερμικό, και έπειτα έναν ηλεκτρονιακά εκφυλισμένο πυρήνα, αφήνωντας πίσω τους την κύρια ακολουθία με τα μετακινηθούν προς χαμηλότερες θερμοκρασίες (δηλαδή την περιοχή B). Παρατηρήστε ότι υπάρχουν μερικά άστρα στην προέκταση της κύριας ακολουθίας, μετά το σημείο στροφής X. Αυτοί οι αστέρες ονομάζονται "κυανοί περιπατητές" (blue stragglers) και είναι ελαφρώς πιο μεγάλοι (σε μάζα) αστέρες

που δεν έχουν εξελιχθεί ακόμα πέρα από την κύρια ακολουθία. Αυτά τα αστέρια είναι πιθανόν το αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων με κάποιο συνοδό αστέρα, ή δημιουργήθηκαν με τη σύγκρουση και συγχώνευση με κάποιο άλλο άστρο στο σφαιρωτό σμήνος (κάτι που συμβαίνει αρκετά συχνά στα πυκνά σφαιρωτά σμήνη).

- **Περιοχές Β και Σ:** Με την έξοδό τους από την κύρια ακολουθία, οι αστέρες γίνονται μεγαλύτεροι (σε διαστάσεις) και πιο λαμπροί και μεταμορφώνονται σε υπογίγαντες (περιοχή Β) και τελικά σε γίγαντες (περιοχή Σ). Στη φάση των γιγάντων, εξελίσσονται με σχεδόν σταθερή ενεργό θερμοκρασία T_{eff} . Σε αυτή τη φάση, οι αστέρες έχουν έναν εκφυλισμένο συμπαγή πυρήνα ο οποίος περιτριγυρίζεται από μία ατμόσφαιρα (convective envelope) που καταλαμβάνει τον μεγαλύτερο όγκο του αστέρα. Η καύση του υδρογόνου συνεχίζεται σε έναν φλοιό που περιβάλλει τον πυρήνα.
- **Σημείο στροφής Υ:** Σε αυτό το σημείο ξεκινάει η καύση του ηλίου στον πυρήνα του αστέρα. Επειδή ο πυρήνας αποτελείται από εκφυλισμένο αέριο ηλεκτρονίων, η ανάφλεξη του ηλίου είναι βίαιη και οδηγεί σε αναπροσαρμογή της δομής του αστέρα (έκλαμψη ηλίου – helium flash). Παρόλα αυτά, η έκλαμψη δεν είναι αρκετά εκρηκτική για να διαλύσει τον αστέρα. Αντ' αυτού, ο αστέρας επαναπροσαρμόζει τη δομή του και καταλήγει στον οριζόντιο κλάδο του διαγράμματος (περιοχή Δ). Γι' αυτό, η έκλαμψη ηλίου σηματοδοτεί μία προσωρινή αύξηση στην λαμπρότητα του αστέρα, ορίζοντας την κορυφή του κλάδου των γιγάντων.
- **Περιοχή Δ:** Αφού επανέλθει σε κατάσταση υδροστατικής και θερμικής ισορροπίας, ο αστέρας περνάει σημαντικό μέρος της ζωής του στον οριζόντιο κλάδο, όπου καίει τα αποθέματα ηλίου στον πυρήνα του, ο οποίος είναι περιτριγυρισμένος από έναν φλοιό στον όποιο πραγματοποιείται καύση υδρογόνου (αυτή είναι συνήμως και η κύρια πηγή ενέργειας). Όταν εξαντληθούν τα αποθέματα του ηλίου στο κέντρο του αστέρα, επιστρέφει στη φάση του ερυθρού γίγαντα με την πορεία που ακολουθεί να προσεγγίζει ασυμπτωτικά τον αρχικό κλάδο των γιγάντων. Σε αυτή την ασυμπτωτική φάση (AGB phase), ο αστέρας έχει έναν εκφυλισμένο πυρήνα που αποτελείται από άνθρακα και οξυγόνο, και περιτριγυρίζεται από έναν φλοιό πλούσιο σε ήλιο και μία πλούσια σε υδρογόνο ατμόσφαιρα. Η πηγή ενέργειας είναι η θερμοπυρηνική σύντηξη του υδρογόνου και του ηλίου που συμβάνουν σε λεπτούς σφαιρικούς φλοιούς γύρω από τον αδρανή εκφυλισμένο πυρήνα. Επειδή σε αυτό το στάδιο, η ένταση του αστρικού ανέμου είναι πολύ μεγάλη, ο αστέρας χάνει τα εξωτερικά του στρώματα εκνέτοντας τους φλοιούς στους οποίους έχουμε ακόμα καύση. Ο αστέρας έχει πλέον περάσει στη φάση του πλανητικού νεφελώματος στο διάγραμμα H-R και αρχίζει να κινείται προς υψηλότερες θερμοκρασίες με περίπου σταθερή λαμπρότητα. Αυτό συμβαίνει επειδή αρχίζουμε και βλέπουμε πλέον τον πυρήνα του αστέρα που είναι θερμός ενώ η παραγωγή ενέργειας στους φλοιούς παραμένει η ίδια. Σε κάποια φάση, η πυρηνική καύση στους φλοιούς θα σταματήσει και ο αστέρας θα αποτινάξει τελείως την ατμόσφαιρά του εκνέτοντας τον πυρήνα του (λευκός νάνος), ο οποίος θα συνεχίσει να ψύχεται εως ότου φτάσει σε θερμική ισορροπία με το υπόλοιπο Σύμπαν.

Αστρικά κατάλοιπα

Contents

5.1 Λευκοί νάνοι	102
5.1.1 Η πίεση εκφυλισμένου αερίου	103
5.1.2 Σχέση μάζας-ωκτίνας	104
5.1.3 Όριο μάζας Chandrasekhar	104
5.1.4 Ψύξη λευκών νάνων	105
5.1.5 Περίοδος περιστροφής λευκών νάνων	106
5.2 Αστέρες νετρονίων	106
5.2.1 Σχηματισμός αστέρων νετρονίων	107
5.2.2 Σχέση μάζας-ωκτίνας	107
5.2.3 Όριο μάζας Tolman-Oppenheimer-Volkoff	108
5.2.4 Ψύξη αστέρων νετρονίων	108
5.2.5 Pulsars	109
5.3 Μελανές οπές	111

Όταν σταματήσουν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό των άστρων, τότε ο πυρήνας αρχίζει να ψύχεται, επειδή δεν αναπληρώνονται τα ποσά της ενέργειας που ρέουν προς τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα. Η ψύξη του πυρήνα, όμως, συνεπάγεται πτώση της θερμικής πίεσης στο εσωτερικό του, οπότε η πίεση των υπερκείμενων στρωμάτων αρχίζει να υπερισχύει της θερμικής πίεσης του αερίου, με αποτέλεσμα ο πυρήνας να αρχίσει να συστέλλεται. Αν η μάζα του είναι μικρή ($M < 1 M_{\odot}$), η συστολή του δεν συνοδεύεται, συνήθως, από καταστροφικά φαινόμενα. Αντίθετα, η ύλη αστέρων μεγάλης μάζας υφίσταται καταστροφική "κατάρρευση", η οποία συνήθως ακολουθείται από έκρηξη, και η ισορροπία των δυνάμεων που διέπουν την ύπαρξη της τελικής κατάστασης, στην οποία θα περιπέσουν αυτοί οι αστέρες, είναι πολύ λεπτή.

Με τις σημερινές γνώσεις της Φυσικής πιστεύουμε ότι είναι δυνατόν να υπάρξουν τριών ειδών τελικές καταστάσεις, όταν σταματήσει οριστικά η παραγωγή ενέργειας από θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, στις οποίες γενικά αναφερόμαστε ως **συμπαγείς αστέρας** (compact stars) επειδή έχουν μικρές τυπικές διαστάσεις και μεγάλες πυκνότητες. Μία τέταρτη περίπτωση κατά την οποία ο αστέρας διαλύεται, με την ύλη να διασκορπίζεται στον μεσοαστρικό χώρο χωρίς να αφήνει πίσω κάποιο κατάλοιπο, θα συζητηθεί στο Κεφάλαιο 6.

5.1 Λευκοί νάνοι

Οι λευκοί νάνοι (white dwarfs) είναι συμπαγείς αστέρες οι οποίοι δεν εξελίσσονται πλέον, δεδομένου ότι στον πυρήνα τους δεν συμβαίνουν πια θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Στην τελική αυτή κατάσταση θα καταλήξουν όλοι οι αστέρες των οποίων η αρχική μάζα (κατά τη στιγμή της εγκατάστασής τους στην κύρια ακολουθία) δεν υπερβαίνει τις $\sim 5 M_{\odot}$. Τέτοιες μάζες έχει το μεγαλύτερο ποσοστό ($\sim 90\%$) των αστέρων, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνεται και ο Ήλιος.

Οι λευκοί νάνοι είναι το προϊόν της αναχαίτησης της βαρυτικής κατάρρευσης ενός κοινού αστέρα από την πίεση των εκφυλισμένων ηλετρονίων του πυρήνα του. Περισσότερες πληροφορίες για τις ιδιότητες της εκφυλισμένης ύλης δίνονται στο Παράρτημα C. Η κατάρρευση αυτή αρχίζει όταν εξαντληθεί όλο το διαθέσιμο “καύσιμο” του πυρήνα του αστέρα. Επομένως το εσωτερικό των λευκών νάνων αποτελείται κατά βάση είτε από ήλιο, είτε από μείγμα άνθρακα και οξυγόνου.

Το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια των λευκών νάνων είναι ιδιαίτερα ισχυρό ($\sim 10^6$ G). Αυτό οφείλεται στην διατήρηση (κατά την τελική συστολή ενός ερυθρού γίναντα προς δημιουργία λευκού νάνου) της επιφανειακής μαγνητικής ροής, $\sim BR^2$, όπου B είναι το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια του αστέρα και R η ακτίνα του.

Ο πρώτος λευκός νάνος που παρατηρήθηκε ήταν ο Σείριος B ο οποίος είναι ο συνοδός αστέρας του λαμπρού Σείριου A (Sirius, a CMi), που είναι ένας από τους κοντινότερους αστέρας. Το σύστημα αυτό αποτελεί έναν αστρομετρικό διπλό σύστημα που μας επέτρεψε να μετρήσουμε τις μάζες των δύο αστέρων (δες Κεφάλαιο 6). Για τον Σείριο B προέκυψε ότι πρέπει να έχει μάζα $M_{\text{Sb}} \simeq 0.97 M_{\odot}$, επιφανειακή θερμοκρασία $T_{\text{eff}, \text{Sb}} \simeq 27000$ K, λαμπρότητα $L_{\text{Sb}} \simeq 0.03 L_{\odot}$, και ακτίνα $R_{\text{Sb}} \simeq 0.008 R_{\odot} \simeq 0.9 R_{\oplus}$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση για την μέση πυκνότητα που επικρατεί στον Σείριο B

$$\bar{\rho}_{\text{Sb}} = \frac{3M_{\text{Sb}}}{4\pi R_{\text{Sb}}^3} = 2 \times 10^6 \rho_{\odot} = 2 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$$

η οποία είναι εξαιρετικά μεγάλη. Το αμέσως επόμενο εύλογο ερώτημα είναι ποιά είναι η απαιτούμενη πίεση ώστε να υποστηρίζει τον αστέρα. Ξέρουμε ότι ο Σείριος B είναι ευσταθής άρα θα βρίσκεται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να πάρουμε πολύ προσεγγιστικά μία τιμή για την πίεση που επικρατεί στο κέντρο του χρησιμοποιώντας την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \rightarrow \frac{P_s - P_c}{R_s - R_c} \approx -G \frac{M\bar{\rho}}{R^2} \rightarrow P_c \approx 5 \times 10^{17} \text{ atm}$$

Αυτή λοιπόν είναι προσεγγιστικά η πίεση που πρέπει να επικρατεί στο κέντρο του Σείρου B ώστε να βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία. Ποιά είναι όμως η πηγή αυτής της πίεσης;

Αν η πίεση αυτή οφείλεται στη θερμική κίνηση των σωματιδίων τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την θερμοκρασία που θα έπρεπε να επικρατεί στο κέντρο του Σείριου B χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των τέλειων αερίων (υποθέτοντας για λόγους απλότητας ότι η ύλη αποτελείται εξ’ ολοκλήρου από άνθρακα)

$$P_{\text{gas}} = nk_B T = \frac{\rho}{\mu m_H} k_B T \rightarrow T_c \approx 6 \times 10^9 \text{ K}$$

Η τιμή αυτή της θερμοκρασίας είναι πολύ μεγάλη και δεν είναι δυνατόν να αντιστοιχεί στην πραγματική τιμή της θερμοκρασίας που επικρατεί στο κέντρο του Σείριου B. Ο λόγος είναι ότι σε τέτοιες υψηλές θερμοκρασίες θα είχε ήδη ξεκινήσει η πυρηνική σύντηξη του άνθρακα και άρα ο Σείρος B θα έπρεπε να εμφανίζεται να έχει λαμπρότητα πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή που παρατηρούμε. Άρα ο μηχανισμός που παρέχει την πίεση σίγουρα δεν είναι θερμικής φύσης!

Έχοντας ως δεδομένο ότι η θερμοκρασία στο κέντρο του Σείριου B δεν μπορεί, σε καμία περίπτωση, να υπερβαίνει σημαντικά τους 10^7 K, επειδή στη θερμοκρασία των 10^8 K αρχίζουν οι θερμοπυρηνικές

αντιδράσεις καύσης των στοιχείων του πυρήνα του (ηλίου ή άνθρακα και οξυγόνου), προκύπτει ότι ούτε η πίεση της ακτινοβολίας

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \alpha T^4$$

είναι αρκετή για την δημιουργία της κατάλληλης πίεσης ωστε ο Σείριος B να είναι σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει στο εσωτερικό του μία πρόσθιη πηγή πίεσης.

5.1.1

Η πίεση εκφυλισμένου αερίου

Για να αντιληφθούμε τη φύση αυτής της πρόσθιας πηγής πίεσης, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι στην πραγματικότητα οι αστέρες δεν αποτελούνται ακριβώς από τέλειο ρευστό. Κανένας ο αστέρας συστέλλεται, η πίεση και η πυκνότητα αιγάλευνται σε τέτοιο βαθμό, ώστε τα άτομα διαμελίζονται σε ηλεκτρόνια και γυμνούς πυρήνες. Ο διαμελισμός αυτός των ατόμων εξακολουθεί να ισχύει, ακόμα και όταν ο αστέρας ψυχθεί, λόγω της απώλειας ενέργειας με ακτινοβολία, σε θερμοκρασία μικρότερη από τη θερμοκρασία ιονισμού των ατόμων και, για το λόγο αυτό, ονομάζεται ιονισμός πίεσης. Όταν ο ιονισμός πίεσης είναι πλήρης, τα ηλεκτρόνια κινούνται μέσα στο πλέγμα των βαρύτερων και, συνεπώς πρακτικά ακίνητων, πυρήνων έτσι, ώστε το υλικό του αστέρα έχεις τις ιδιότητες ενός μετάλλου. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, σε πλήρη αναλογία με τα μέταλλα, η ενέργεια η παραγόμενη στο εσωτερικό του αστέρα διαδίδεται με αγωγήμπτητα παρά με ακτινοβολία ή ρεύματα μεταφοράς. Το σύνολο των ηλεκτρονίων προσομοιάζεται με ένα αέριο, το ηλεκτρονικό αέριο, για το οποίο, η καταστατική εξίσωση είναι ανεξάρτητη από την απόλυτη θερμοκρασία (σε αντίθεση με την εξίσωση κατάστασης των τέλειων αερίων). Αυτή η οριακή μορφή της καταστατικής εξίσωσης του ηλεκτρονικού αερίου ονομάζεται κατάσταση **πλήρους εκφυλισμού**. Το βασικό χαρακτηριστικό της είναι ότι κάτω από συνθήκες υψηλής πίεσης και χαμηλής θερμοκρασίας, όπως οι παραπάνω, η ενέργεια της θερμικής κίνησης ενός ηλεκτρονίου είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας του και, επομένως, τα ηλεκτρόνια μεταπίπτουν στις χαμηλότερες δυνατές ενέργειακές στάθμες τους. Όλες οι ενέργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων, μέχρι μιας ανώτερης δυνατής, είναι κατειλημμένες, ενώ όλες οι ανώτερες απ' αυτήν είναι κενές. Η ενέργεια της ανώτερης κατειλημένης στάθμης ονομάζεται **ενέργεια Fermi** του συστήματος, ϵ_F .

Η λεπτομερής ποσοτική περιγραφή των ιδιοτήτων του εκφυλισμένου αερίου ηλεκτρονίων κάτω από συνθήκες πολύ υψηλής πίεσης και πολύ χαμηλής θερμοκρασίας απαιτεί την χρήση των αρχών της στατιστικής κβαντομηχανικής. Μία τέτοια περιγραφή επιχειρείται στο Παράρτημα C. Σύμφωνα με την ανάλυση που γίνεται εκεί, κανένας η βαρυτική κατάρρευση προχωρεί, τα ηλεκτρόνια συμπιέζονται συνεχώς, ώστε σταδιακά καταλαμβάνονται όλες οι ενέργειακές καταστάσεις με ενέργεια μικρότερη της ϵ_F . Όταν αυτό συμβεί, όλα τα ηλεκτρόνια αντιδρούν σε οποιαδήποτε συστολή του αστέρα και δημιουργούν μία πρόσθιη προς τα εξώ πίεση, την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων, η οποία είναι δυνατό να αναχαιτίσει την κατάρρευση. Κάτω από συνηθισμένες συνθήκες το κβαντομηχανικό αυτό φαινόμενο είναι αμελητέο, σε υψηλές όμως πυκνότητες γίνεται σημαντικό. Μπορεί να δειχτεί ότι για ένα (μη-σχετικιστικό) εκφυλισμένο αέριο, η πίεση εκφυλισμού θα δίνεται από την καταστατική εξίσωση

$$P_{\text{deg}} = K \rho^{5/3} \quad (5.1)$$

όπου K μία σταθερά. Στην περίπτωση του σχετικιστικού εκφυλισμένου αερίου, ο εκθέτης παίρνει την τιμή 4/3.

Θα πρέπει να τονιστεί ίδιαίτερα ότι, σύμφωνα με τη σχέση (5.1), η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων δεν είναι θερμική, δηλαδή για τη δημιουργία της δεν απαιτείται μεγάλη θερμική ενέργεια και, επομένως, η πίεση διατηρείται και όταν ο αστέρας ψυχθεί εντελώς. Πρακτικά, λοιπόν, η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία, και η ύλη θεωρείται "ψυχρή" με την έννοια ότι η ανώτερη επιτρεπόμενη θερμοκρασία δεν αρκεί, ώστε να μεταβάλλει αισθητά τις ιδιότητές της (να άρει τον εκφυλισμό).

5.1.2

Σχέση μάζας-ακτίνας

Όπως διαπιστώσαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, η πίεση στο εσωτερικό των λευκών νάνων είναι, πρακτικά, ανεξάρτητη από τη ψερμοκρασία. Εξαρτάται μόνο από το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο, $\mu_e = A/Z$ (μέσω της σταθεράς K), και την πυκνότητα, ρ . Κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορεί εύκολα να αποδείχτεί ότι ο όγκος που καταλαμβάνει ένας λευκός νάνος είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τη μάζα του.

Πράγματι, συνδυάζοντας την καταστατική εξίσωση του εκφυλισμένου αερίου με την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας πρόκυπτε

$$\left. \begin{array}{l} P \propto \frac{M}{R^2} \rho \\ P \propto \rho^{5/3} \end{array} \right\} \rho^{5/3} \propto \frac{M}{R^2} \rho \Rightarrow \rho^{2/3} \propto \frac{M}{R^2} \Rightarrow \left(\frac{M}{R^3} \right)^{2/3} \propto \frac{M}{R^2} \Rightarrow R \propto M^{-1/3}$$

Χρησιμοποιώντας παρατηρησιακά δεδομένα, καταλήγουμε στην εμπειρική σχέση

$$R_{\text{WD}} = 0.01 R_{\odot} \left(\frac{M_{\text{WD}}}{0.7 M_{\odot}} \right)^{-1/3} \quad (5.2)$$

Η σχέση (5.2) μας ξαφνιάζει, γιατί αποδεικνύει ακριβώς το αντίθετο από τις συνηθισμένες μας εμπειρίες, όπου γνωρίζουμε ότι αύξηση της μάζας ενός σώματος συνεπάγεται (για σταθερή πυκνότητα) αύξηση και των γραμμικών του διαστάσεων.

$$M^{1/3}R = \text{σταθερό} \Rightarrow MR^3 = \text{σταθερό} \Rightarrow MV = \text{σταθερό}$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι η (μέση) πυκνότητα των λευκών νάνων γίνεται τόσο μεγαλύτερη, όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα τους. Με άλλα λόγια, όσο αυξάνει η μάζα ενός λευκού νάνου τόσο θα πρέπει να μειώνεται ο όγκος του ώστε να διατηρηθεί η υδροστατική ισορροπία.

5.1.3

Όριο μάζας Chandrasekhar

Είδαμε ότι αν η μάζα ενός λευκού νάνου για κάποιον λόγο αυξάνεται (π.χ. προσάρξηση μάζας από συνοδό αστέρα σε κάποιο διπλό σύστημα), τότε θα πρέπει ο λευκός νάνος να γίνεται πιο συμπαγής, να μειώνει δηλαδή την ακτίνα του ώστε να φέρει τα ηλεκτρόνια πιο κοντά μεταξύ τους και να αυξήσει, με αυτόν τον τρόπο, την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρόνιων που παρέχει την κατάλληλη πίεση για να μην καταρρεύσει. Όσο συμπιέζεται και τα ηλεκτρόνια έρχονται πιο κοντά μεταξύ τους, τότε σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg αυξάνεται και η ορμή (ταχύτητα) των ηλεκτρονίων. Η ταχύτητα όμως των σωματιδίων δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Όσο η ταχύτητα των ηλεκτρονίων γίνεται σχετικιστική, η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρόνιων θα πρέπει να αυξάνει με συνεχώς αργότερο ρυθμό, καθώς αυξάνει η μάζα του λευκού νάνου. Αυτός είναι, άλλωστε, και ο λόγος που εκθέτησε στην καταστατική εξίσωση του σχετικιστικού εκφυλισμένου αερίου γίνεται $4/3$ από $5/3$ που είναι στην περίπτωση του μη-σχετικιστικού εκφυλισμένου αερίου. Άρα πρέπει να υπάρχει ένα ανώτατο όριο μάζας που μπορεί να υποστηρίζει ο λευκός νάνος και θα αντιστοιχεί σε ακτίνα τέτοια ώστε τα ηλεκτρόνια να κινούνται με ταχύτητα σχεδόν αυτή της ταχύτητας του φωτός.

Για έναν τυπικό (και μη-περιστρεφόμενο) λευκό νάνο που αποτελείται από άνθρακα, το ανώτατο αυτό όριο, που ονομάζεται **όριο Chandrasekhar** είναι ίσο με $M_{\text{ch}} = 1.4 M_{\odot}$. Για μάζα μεγαλύτερη από το όριο Chandrasekhar η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρόνιων δεν είναι αρκετή για να υποστηρίζει το βάρος του αντικειμένου και, ο λευκός νάνος είτε θα διαλυθεί (πιθανότατα εκρηγνυόμενος) είτε θα μεταπέσει σε αστέρα νετρονίων ή μελανή οπή (βλέπε παρακάτω).

5.1.4

Ψύξη λευκών νάνων

Γενικά οι λευκοί νάνοι έχουν μεγάλη πυκνότητα, μικρές διαστάσεις, υψηλή επιφανειακή θερμοκρασία και (λόγω των μικρών διαστάσεών τους) μικρή απόλυτη λαμπρότητα. Επομένως, καταλαμβάνουν την κάτω αριστερά γωνία του διαγράμματος Hertzsprung-Russel. Η επιφανειακή αυτή θερμοκρασία διατηρείται σε ένα επιφανειακό στρώμα, το πάχος του οποίου είναι μόλις το 1% της ακτίνας, και όπου η ύλη δεν είναι εκφυλισμένη. Κάτω από το στρώμα αυτό και μέχρι το κέντρο του λευκού νάνου η θερμοκρασία διατηρείται ομοιόμορφη. Αυτό οφείλεται στη μεγάλη μέση ελεύθερη διαδρομή των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων¹, η οποία συνεπάγεται μεγάλη θερμική αγωγιμότητα και, συνεπώς, ομοιόμορφη θερμοκρασία στο εσωτερικό του λευκού νάνου.

Η περαιτέρω εξέλιξη των λευκών νάνων δεν είναι δυνατή και αυτοί συνεχώς ψύχονται. Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι ποιά είναι η πηγή της ακτινοβολούμενης ενέργειας. Αυτή δεν μπορεί να είναι οι πυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό του καθώς ο λευκός νάνος είναι αδρανής. Επίσης δεν μπορεί να είναι ούτε η βαρυτική συστολή καθώς βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία², ούτε η εκπομπή ακτινοβολίας με τη μορφή νετρίνο καθώς αυτή είναι σημαντική μόνο στις αρχικές φάσεις σχηματισμού του λευκού νάνου όπου επικρατούν υψηλές θερμοκρασίες. Τέλος, η ακτινοβολούμενη ενέργεια δεν μπορεί να οφείλεται στην απελευθέρωση της θερμικής ενέργειας των ηλεκτρονίων καθώς αυτά δεν μπορούν να χάσουν ενέργεια λόγω του ότι όλες οι ενεργειακές στάθμες είναι κατειλημένες. Η εκπεμπόμενη ενέργεια λοιπόν γίνεται εις βάρος ποιάς πηγής; Πρέπει να υμηθούμε ότι ο λευκός νάνος δεν αποτελείται μόνο από ηλεκτρόνια, αλλά και από ιόντα τα οποία δεν είναι καθόλου εκφυλισμένα. Ο εκφυλισμός των ηλεκτρονίων συμβαίνει πολύ νωρίτερα από τον οποιοδήποτε εκφυλισμό των ιόντων λόγω της πολύ μικρότερης μάζας τους. Αυτό σημαίνει ότι το αέριο των ιόντων το οποίο χαρακτηρίζεται από μία συγκεκριμένη θερμοκρασία, περιγράφεται ικανοποιητικά από την καταστατική εξίσωση των τέλειων αερίων και άρα η κύρια πηγή ακτινοβολούμενης ενέργειας είναι η θερμική ενέργεια των ιόντων. Αποδεικνύεται ότι η εκπεμπόμενη λαμπρότητα του λευκού νάνου εξαρτάται από τη θερμοκρασία στο κέντρο του μέσω της σχέσης

$$L_{\text{WD}}^{\text{emit}} = CT_c^{7/2} \quad (5.3)$$

Εξ' ορισμού, αυτή η λαμπρότητα είναι ο ρυθμός με τον οποίο ελλατώνεται η ολική θερμική ενέργεια των ιόντων (E_{int}) οπότε

$$L_{\text{WD}} = -\frac{dE_{\text{int}}}{dt}, \quad \text{όπου } E_{\text{int}} = N_{\text{ions}} \times \frac{3}{2}k_B T_c \simeq \frac{M_{\text{WD}}}{Am_H} \frac{3}{2}k_B T_c \quad (5.4)$$

όπου A , ο ατομικός αριθμός του αερίου των ιόντων. Άρα συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.3), (5.4) προκύπτει ότι

$$CT_c^{7/2} = -\frac{dE_{\text{int}}}{dt} \Rightarrow CT_c^{7/2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{M_{\text{WD}}}{Am_H} \frac{3}{2}k_B T_c \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_c(t) = T_0 \left(1 + \frac{t}{\tau_0} \right)^{-2/5} \quad (5.5)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις αρχικές συνθήκες $t = 0 \rightarrow T_c = T_0$, και την αντικατάσταση $\frac{1}{\tau_0} = \frac{5}{3} \frac{Am_H C T_0^{5/2}}{M_{\text{WD}} k_B}$. Η σχέση (5.5) μας δείχνει πως η θερμοκρασία στο εσωτερικό ενός λευκού νάνου μειώνεται (ψύχεται) με τον

¹ Η μεγάλη μέση ελεύθερη διαδρομή των ηλεκτρονίων οφείλεται στο ότι δεν μπορούν να αλληλεπιδράσουν. Αλληλεπίδραση όχι σήμανε αλλαγή στην ενέργεια του ηλεκτρονίου αλλά λόγω του ότι όλες οι διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες είναι κατειλημένες αυτό είναι αδύνατο.

² Περαιτέρω βαρυτική συστολή του λευκού νάνου είναι πηγή ακτινοβολούμενης ενέργειας, κυρίως για λευκούς νάνους μικρής ηλικίας, το εσωτερικό των οποίων δεν έχει φτάσει ακόμα στην κατάσταση του πλήρους εκφυλισμού.

χρόνο. Με αντικατάσταση της σχέσης (5.5) στην σχέση (5.3), μπορούμε να βρούμε το πως η λαμπρότητα ενός λευκού νάνου ελλατώνεται με τον χρόνο.

Η ενέργεια της θερμικής κίνησης των ιόντων αποτελεί την κύρια πηγή της ακτινοβολούμενης ενέργειας, μόνο εφόσον η θερμοκρασία του εσωτερικού του λευκού νάνου βρίσκεται εντός κάποιων ορίων. Για χαμηλότερες θερμοκρασίες, φαινόμενα στερεάς κατάστασης γίνονται σημαντικά, όπως είναι η **χρυσταλλοποίηση** του (μεταλλικού) πλέγματος των ιόντων και όχι οι θερμικές κινήσεις τους αποτελούν την κύρια πηγή της ακτινοβολούμενης ενέργειας και, επομένως, ψύξης του λευκού νάνου. Η χαρακτηριστική θερμοκρασία, στην οποία συμβαίνει η χρυσταλλοποίηση, είναι $\sim 10^7$ K και ονομάζεται **θερμοκρασία Debye**. Λόγω της χρυσταλλοποίησης του πλέγματος, η ψύξη του λευκού νάνου είναι πολύ ταχύτερη, σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα ψύξης αμυδρών λευκών νάνων ($L \leq 10^{-3} L_\odot$).

5.1.5

Περίοδος περιστροφής λευκών νάνων

Ένα από τα εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα σχετικά με την παρατήρηση των λευκών νάνων είναι η μέτρηση της περιόδου αξιονικής περιστροφής τους. Αποδεικνύεται ότι η ελάχιστη δυνατή περιόδος περιστροφής ενός τυπικού λευκού νάνου είναι ~ 10 s. Πάρα τη δυσκολία μέτρησης της περιόδου περιστροφής, είναι γνωστό ότι η ένταση της ακτινοβολίας πολλών λευκών νάνων παρουσιάζει ορισμένες μεταβολές με τυπικές περιόδους $\sim 10^2 - 10^3$ s. Οι περίδοι των μεταβολών αυτών είναι σταθερές με διακύμανση μικρότερη από 6×10^{-14} s/s. Λευκοί νάνοι με την ίδια τητα αυτή ονομάστηκαν **παλλόμενοι** λευκοί νάνοι.

Οι δονήσεις που φαίνεται ότι παρουσιάζουν οι παλλόμενοι λευκοί νάνοι δεν μπορεί να είναι σφαιρικά συμμετρικές ακτινικές δονήσεις (όπως π.χ. στους κλασσικούς Κηφείδες και τους μεταβλητούς τύπου RR Lyrae). Είναι δυνατό να αποδειχτεί ότι η περίοδος των σφαιρικά συμμετρικών ακτινικών δονήσεων των λευκών νάνων είναι της τάξης μεγέθους του χρόνου που απαιτείται, ώστε ένα ηχητικό κύμα να διαπεράσει ολόκληρο τον αστέρα, αλλά ο χρόνος αυτός είναι σημαντικά μικρότερος από $10^2 - 10^3$ s.

Έχει αποδειχτεί ότι οι δονήσεις των λευκών νάνων είναι δυνατό να προκαλούνται από μικρά κυματίδια που διαδίδονται στην επιφάνεια του λευκού νάνου κατά τη φορά περιστροφής του και δεν προκαλούν μεταβολή της ακτίνας και της δυναμικής ενέργειάς του. Η αιτία δημιουργίας των κυματίδων είναι αστάθειες της στρωματομένης ατμόσφαιρας (stratified atmosphere) του λευκού νάνου, που οφείλονται σε μερικό ιονισμό του He της και συμβαίνουν, εφόσον η επιφανειακή θερμοκρασία του αστέρα βρίσκεται επιλεκτικά στις περιοχές $(1.6 - 1.9) \times 10^4$ K και $(2.6 - 2.9) \times 10^4$ K. Σύμφωνα με αυτά τα θεωρητικά αποτελέσματα, ένας αρκετά θερμός λευκός νάνος είναι δυνατόν, κατά τη διάρκεια ψύξης του, να περάσει από το στάδιο του παλλόμενου λευκού νάνου περισσότερες από μία φορές.

5.2 Αστέρες νετρονίων

Οι αστέρες νετρονίων αποτελούνται από την πλέον συμπαγή μορφή ύλης η οποία είναι δυνατό να περιγραφεί με γνωστούς νόμους της Φυσικής. Οι αστέρες αυτοί, όπως και οι λευκοί νάνοι, δεν εξελίσσονται πλέον, δεδομένου ότι ούτε και σ' αυτούς συμβαίνουν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Στην τελική αυτή κατάσταση είναι δυνατόν να καταλήξουν αστέρες των οποίων η αρχική μάζα (κατά την εγκατάσταση στην κύρια ακολουθία) υπερβαίνει τις $5M_\odot$ αλλά όχι τις $20M_\odot$. Η μέση τιμή της μάζας των αστέρων αυτών είναι $1 - 2M_\odot$, η μέση πυκνότητά τους είναι $\sim 10^{14}$ gr cm⁻³ και η μέση θερμοκρασία του εσωτερικού τους είναι $\sim 10^7$ K. Η πυκνότητα αυτή των αστέρων νετρονίων είναι συγχρίσιμη με την πυρηνική πυκνότητα που υπάρχει σε έναν ατομικό πυρήνα. Γι' αυτό οι αστέρες νετρονίων, θεωρούνται, πολλές φορές, ως ενιαίοι ατομικοί πυρήνες, στους οποίους οι ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις (των μεσονίων) έχουν αντικατασταθεί από

τη δύναμη της βαρύτητας.

5.2.1

Σχηματισμός αστέρων νετρονίων

Κατά τα τελευταία στάδια της εξέλιξης ενός αστέρα μεγάλης μάζας δημιουργείται στο κέντρο του ένας εκφυλισμένος πυρήνας που αποτελείται κυρίως από νικέλιο και σίδηρο. Ο αστέρας τότε λέμε ότι βρίσκεται στο όριο ικανότητας ισορροπίας, διότι οι πυρήνες των δύο αυτών στοιχείων είναι οι πιο ευσταθείς από όλους, δηλαδή έχουν τη μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης ανα νουκλεόνιο, και, επομένως, στον πυρήνα δεν είναι δυνατές περατιέρω αντιδράσεις παραγωγής ενέργειας. Ο κεντρικός πυρήνας θα βρίσκεται σε ισορροπία, εφόσον η μάζα του είναι αρκετά μικρή. Λόγω όμως της συνεχούς αύξησης της μάζας του (λόγω της καύσης που πραγματοποιούνται στους φλοιούς που περικλύουν τον εν λόγω πυρήνα), ο πυρήνας γίνεται βαρυτικά ασταθής και αρχίζει να καταρρέει όταν η μάζα του ξεπεράσει το όριο Chandrasekhar. Κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης του πυρήνα καταστρέφεται και η μηχανική ισορροπία του υπόλοιπου αστέρα, διότι το βάρος των υπερκείμενων στρωμάτων δεν αντισταθμίζεται από την πίεση του αερίου. Κατά συνέπεια, τα εξωτερικά στρώματα πέφτουν προς το κέντρο και σύντομα η κινητική τους ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική με αποτέλεσμα την αύξηση της θερμοκρασία σε μικρό χρονικό διάστημα και την εκτόξευση του μανδύα σε μία έκρηξη υπερκαινοφανούς τύπου II (δες και Κεφάλαιο 6).

Η κατάρρευση ενός πυρήνα σιδήρου δεν είναι ο μοναδικός τρόπος σχηματισμού ενός αστέρα νετρονίων. Ένας άλλος πολύ δημοφιλής μηχανισμός βασίζεται στην συσσώρευση μάζας στην επιφάνεια ενός λευκού νάνου -μέρος ενός διπλού συστήματος- λόγω προσαύξησης (accretion) από τον συνοδό αστέρα (δες και Κεφάλαιο 6). Λόγω της σχέσης μάζας-ακτίνας που βγάλμε για τους λευκούς νάνους, η αύξηση της μάζας συνοδεύεται από συστολή του λευκού νάνου στην προσπάθειά του να επανέλθει σε υδροστατική ισορροπία. Όταν η μάζα του λευκού νάνου ξεπεράσει το όριο Chandrasekhar, το αέριο των ηλεκτρονίων καταρρέει κάτω από την τεράστια δύναμη πίεσης που αναπτύσσεται κατά τη συστολή του αστέρα. Τα ηλεκτρόνια “εισχωρούν” στους ατομικούς πυρήνες, εξουδετερώνοντας τα πρωτόνια και δημιουργούν ένα αέριο εκφυλισμένων νετρονίων (αφού και τα νετρόνια είναι φερμιόνια και, άρα, υπακούουν στην αρχή του Pauli). Η πίεση των εκφυλισμένων νετρονίων μπορεί να υπολογιστεί ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική με αυτή που χρησιμοποιήθηκε για να υπολογίσουμε την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων. Η πολυτροπική καταστατική εξίσωση που περιγράφει το εκφυλισμένο (μη-σχετικιστικό) αέριο νετρονίων έχει την ίδια μορφή με την σχέση (5.1).

5.2.2

Σχέση μάζας-ακτίνας

Για τους αστέρες νετρονίων ισχύει μία σχέση μεταξύ μάζας και ακτίνας που, όπως και στην περίπτωση των λευκών νάνων, υιοθετεί την μορφή

$$R \propto M^{-1/3}$$

Η αντίστοιχη εμπειρική σχέση μάζας-ακτίνας για τους αστέρες νετρονίων είναι

$$R_{\text{NS}} = 11 \text{ km} \left(\frac{M_{\text{NS}}}{1.4 M_{\odot}} \right)^{-1/3} \quad (5.6)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην παραπάνω σχέση η ακτίνα μετριέται σε km ενώ στην αντίστοιχη εμπειρική σχέση για τους λευκούς νάνουν, η ακτίνα μετριέται σε όρους R_{\odot} . Αυτό υποδεικνύει και το πόσο πιο συμπαγή αντικείμενα είναι οι αστέρες νετρονίων συγχριτικά με τους λευκούς νάνους.

5.2.3

Όριο μάζας Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Όσο η μάζα ενός αστέρα νετρονίων αυξάνει, τόσο τα νετρόνια που τον αποτελούν γίνονται όλο και πιο σχετικιστικά, με αποτέλεσμα να μειώνεται (όπως και στην περίπτωση των λευκών νάνων) η τιμή της αδιαβατικής σταθερής γ (εκθέτης στην καταστατική εξίσωση), από $5/3$ προς το όριο $4/3$. Επομένως θα υπάρχει και για τη μάζα των αστέρων νετρονίων έναν ανώτατο όριο, M_{TOV} , ανάλογο με το όριο Chandrasekhar, M_{Ch} , των λευκών νάνων. Η ακριβής τιμή του ορίου αυτού δεν είναι σήμερα γνωστή, λόγω της αβεβαιότητας στη μορφή των καταστατικής εξίσωσης των σχετικιστικών νετρονίων και του μέσου μοριακού βάρους της ύλης των αστέρων νετρονίων. Οι τιμές του ορίου M_{TOV} που έχουν προταθεί βρίσκονται στο διάστημα $0.7 M_{\odot} < M_{TOV} < 3.2 M_{\odot}$.

5.2.4

Ψύξη αστέρων νετρονίων

Όπως και στην περίπτωση των λευκών νάνων, η ψύξη ενός αστέρα νετρονίων δεν μπορεί να οφείλεται στην απελευθέρωση της θερμικής ενέργειας των νετρονίων καθώς αυτά βρίσκονται σε συνθήκες πλήρους εκφυλισμού και άρα είναι αδύνατον να χάσουν ενέργεια και να μεταπέσουν σε χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη. Επίσης, ο αστέρας νετρονίων αποτελείται σχεδόν εξ' ολοκλήρου από νετρόνια και άρα δεν υπάρχει κάποιο αέριο ίσιντων –όπως στην περίπτωση των λευκών νάνων– που να απελευθέρωνει θερμική ενέργεια.

Αποδεικνύεται ότι το εσωτερικό των αστέρων νετρονίων ψύχεται λόγω ακτινοβολίας νετρίνο τα οποία παράγονται από τις ασθενείς αντιδράσεις

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu_e$$

και τα οποία διαφεύγουν στο διάστημα.

Παρόλα αυτά, οι αστέρες νετρονίων δεν αποτελούνται εξολοκλήρου από νετρόνια: στην επιφάνειά τους υπάρχει ένα λεπτό στρώμα πλάσματος, πάχους λίγων εκατοστών, που αποτελεί την “ατμόσφαιρα” του αστέρα νετρονίων (crust). Αυτή η κρούστα πλάσματος στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων έχει θερμοκρασία $T_{eff} \sim 10^6 - 10^7$ K και άρα η επιφάνεια του αστέρα νετρονίων ψύχεται μέσω εκπομπής φωτονίων.

Το πάχος της ατμόσφαιρας αυτής είναι τόσο μικρό, επειδή η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι πολύ μεγάλη. Για το λόγο αυτό, άλλωστε, και η ταχύτητα διαφυγής, v_{esc} , από έναν αστέρα νετρονίων είναι εντυπωσιακά μεγάλη. Από το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0$$

βρίσκουμε ότι η ταχύτητα διαφυγής δίνεται από τη σχέση

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (5.7)$$

Για τιμές μάζας και ακτίνας ενός τυπικού αστέρα νετρονίων βρίσκουμε ότι η ταχύτητα διαφυγής είναι 50 % – 70 % της ταχύτητας του φωτός! Αυτό έχει για συνέπεια ότι η ύλη από την επιφάνεια ενός αστέρα νετρονίων διαφεύγει πολύ δύσκολα στο διάστημα.

5.2.5

Pulsars

Ο όρος pulsar προέρχεται από τις λέξεις “pulsating star” καθώς αυτό το αντικείμενο χαρακτηρίζεται από την περιοδική επανάληψη ακτινοβολίας ραδιοφωνικών κυμάτων. Η περίοδος της επανάληψης έχει ένα μεγάλο εύρος από ~ 1.5 msec μέχρι ~ 10 sec, ενώ σύντομα μετά την παρατήρηση του πρώτου pulsar αποδείχτηκε ότι πρόκεται για αστέρες νετρονίων.

Η καταπληκτική ακρίβεια της περιόδου επανάληψης των σημάτων των pulsar δεν αφήνει πολλά περιθώρια επιλογής για την ενδεχόμενη φύση της πηγής. Η περίπτωση να συνδέεται η εκπομπή των ραδιοφωνικών κυμάτων με την περιφορά των μελών ενός διπλού συστήματος απορρίφθηκε σχεδόν ασυζητητή για τους εξής δύο λόγους:

- Η περίοδος περιφοράς ενός διπλού συστήματος αποτελούμενου από δύο λευκούς νάνους δεν είναι δύνατόν να είναι μικρότερη από 1.7 sec (γιατί;). Όπως όμως έχουμε ήδη αναφέρει, έχουν παρατηρηθεί pulsars με πολύ μικρότερη περίοδο.
- Η περίοδος περιφοράς ενός διπλού συστήματος αποτελούμενου από δύο αστέρες νετρονίων ελαττώνεται λόγω εκπομπής βαρυτικών κυμάτων, η ενέργεια της οποίας αντλείται από την ελάττωση του μεγάλου ημιάξονα της σχετικής τροχιάς του συστήματος (τρίτος νόμος του Kepler). Αν λοιπόν η περιοδικότητα της ακτινοβολίας είχε σχέση με την περιφορά των μελών του συστήματος δύο αστέρων νετρονίων, τότε θα έπρεπε να παρατηρείται ελάττωση της περιόδου επανάληψης των παλμών, πράγμα που όμως δεν συμβαίνει. Στην πραγματικότητα μάλιστα συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Η περίοδος των παλμών αυξάνει, και μάλιστα για μερικούς pulsars πολύ σημαντικά (π.χ. PSR 0531+21, που βρίσκεται στο νεφέλωμα του Καρκίνου)

Σύντομα αποκλείστηκε η περίπτωση αναπάλσεων λευκών νάνων. Το πρότυπο αυτό βασιζόταν σε κύματα πυκνότητας (ακουστικά κύματα) που δημιουργούν ένα είδος αστρικού σεισμού (star quakes). Σε αυτή την περίπτωση η περίοδος των αναπάλσεων θα ήταν απλά:

$$P = \frac{2R}{c_s}$$

όπου R η ακτίνα του αντικειμένου και c_s η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα ακουστικά κύματα (ταχύτητα του ήχου). Επειδή η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται άμεσα από την πυκνότητα ($c_s \propto (\rho)^{1/2}$) μπορούμε να δείξουμε ότι η μέση πυκνότητα αυτού του αντικειμένου είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή ενός τυπικού λευκού νάνου. Επιπλέον, δεδομένου ότι οι περίοδοι των pulsars καλύπτουν πάνω από τρεις τάξεις μεγέθους, αυτό συνεπάγεται πολύ ευρεία κατανομή πυκνοτήτων (~ 6 τάξεις μεγέθους), που δεν είναι δυνατό να δικαιολογηθεί από μία, μόνο, κατηγορία αστέρων.

Τέλος αποκλείστηκε και η περίπτωση περιστροφής λευκών νάνων, πάλι λόγω των μικρών τιμών που είχε η περίοδος ορισμένων pulsars. Πράγματι, η γραμμική ταχύτητα, v , της ύλης στον ισημερινό ενός αστέρα ακτίνας R που περιστρέφεται με περίοδο P δίνεται από την σχέση:

$$v = \frac{2\pi R}{P}$$

Αν οι pulsars ήταν όντως λευκοί νάνοι, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ακτίνα με την εμπειρική σχέση ακτίνας-μάζας που γνωρίζουμε ότι ισχύει για τους λευκούς νάνους ώστε:

$$v = \frac{2\pi}{P} 0.01 R_\odot \left(\frac{M_{WD}}{0.7 M_\odot} \right)^{-1/3}$$

Για $P \sim 0.1$ sec που είναι μία ενδιάμεση τιμή περιόδου που παρατηρούμε για τους pulsars, η παραπάνω σχέση μας δίνει γραμμική ταχύτητα $v \simeq 1.5c$.

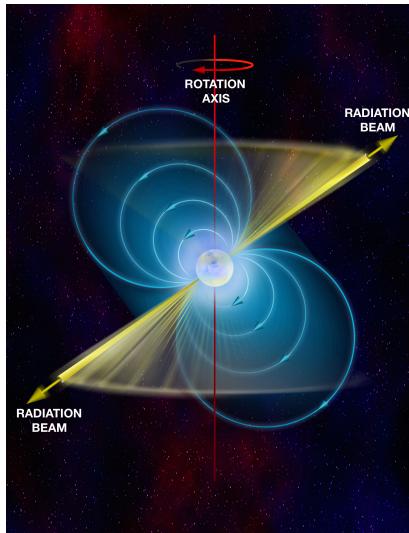


Figure 5.1: Εκπομπή ακτινοβολίας από pulsar σύμφωνα με το πρότυπο εκπομπής από τους μαγνητικούς πόλους ενός αστέρα νετρονίων. Ο άξονας του μαγνητικού πεδίου δεν συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής. Ένας παρατηρήτης βλέπει την ακτινοβολία από τον έναν πόλο μόνο.

Έτσι απέμεινε η περίπτωση να οφείλονται τα περιοδικά σήματα των pulsars σε ταχύτητα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, η ακτίνα των οποίων είναι σημαντικά μικρότερη από την ακτίνα των λευκών νάνων. Στους αστέρες νετρονίων η ακτίνα αυτή ορίζει έναν κύλινδρο, ο οποίος ονομάζεται κύλινδρος φωτός (δες σχήμα 5.1).

Το πιο διαδεδομένο πρότυπο για pulsars δέχεται ότι η περιοδική ακτινοβολία που παρατηρούμε έχει τη μορφή κωνικής δέσμης και προέρχεται από την περιοχή των μαγνητικών πόλων (polar cap model) ενός ταχέως περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων με ισχυρό διπολικό μαγνητικό πεδίο. Η εξαρετικά μικρή περίοδος περιστροφής των αστέρων νετρονίων και το ισχυρό μαγνητικό πεδίο τους οφείλονται, αντίστοιχα, στην διατήρηση της στροφορμής και της μαγνητικής ροής στην επιφάνεια του αρχικού αστέρα. Το εύρος της κωνικής δέσμης της ακτινοβολίας καθορίζεται από τη γωνιώδη απόσταση του τελευταίου ανοικτού σωλήνα μαγνητικής ροής από το μαγνητικό άξονα του αστέρα. Επειδή ο μαγνητικός άξονας των pulsars δεν συμπίπτει συνήθως με τον άξονα περιστροφής τους, η κωνική δέσμη ακτινοβολίας του κάθε πόλου του pulsar σαρώνει έναν κοίλο κώνο με κορυφή τον pulsar. Αν η Γη τυχαίνει να βρίσκεται στο εσωτερικό του κοίλου κώνου, τότε σε κάθε περίοδο περιστροφής του αστέρα παρατηρούμε έναν παλμό ακτινοβολίας η διάρκεια του οποίου είναι ανάλογη προς το εύρος της κωνικής δέσμης. Η γεωμετρία αυτή θυμίζει το μηχανισμό της περιοδικής ακτινοβολίας ενός φάρου.

Ο βασικός μηχανισμός ακτινοβολίας του παραπάνω προτύπου είναι ο εξής: το περιστρεφόμενο μαγνητικό πεδίο του αστέρα παράγει (εξ επαγωγής) διαφορά δυναμικού, όπως ακριβώς και οι γεννήτριες ηλεκτρικού ρεύματος, η οποία εμφανίζεται μεταξύ των πόλων και του ισημερινού του αστέρα. Λόγω αυτής της διαφοράς δυναμικού, φορτισμένα σωματίδια αποσπώνται από την επιφάνεια του αστέρα και δημιουργούν έναν τεράστιο “πυκνωτή” στην περιοχή του κάθε πόλου, οι οπλισμοί του οποίου αποτελούνται από δύο ετερόσημα στρώματα φορτίων: ένα στην επιφάνεια του pulsar και ένα στην περιοχή πάνω από αυτήν. Όταν η τάση μεταξύ των οπλισμών του κάθε “πυκνωτή” γίνει $10^{12} - 10^{13}$ V, τότε επέρχεται εκφρότισή τους. Η ενέργεια που παράγεται είναι πολύ μεγάλη (πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από 511 keV, που είναι η ισοδύναμη ενέργεια της μάζας ηρεμίας ενός ηλεκτρονίου) με αποτέλεσμα να συμβαίνει δίδυμη γέννηση σωματιδίων ($e^- - e^+$). Τα σωματίδια αυτά κινούμενα ελικοειδώς γύρω από τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές του πεδίου παράγουν ακτινοβολία σύγχροτρον στην περιοχή των ραδιοφωνικών κυμάτων.

Το παραπάνω πρότυπο εξηγεί ικανοποιητικά τρία βασικά παρατηρησιακά δεδομένα των pulsars:

1. Η δέσμη ακτινοβολίας είναι πολύ στενή, όπως προκύπτει από τους “στενούς” περιοδικούς παλμούς που παρατηρούμε. Η διάρκεια των μεμονομένων παλμών είναι της τάξης του $1/100$ της περιόδου επανάληψης του παλμού (που, σύμφωνα με το πρότυπο, ισούται με την περίοδο περιστροφής του αστέρα).
2. Το φάσμα της ακτινοβολίας των παλμών δεν μοιάζει με φάσμα μελανού σώματος, αλλά είναι φάσμα ακτινοβολίας σύγχροτρον.
3. Οι παλμοί είναι πολύ ισχυρά γραμμικά πολωμένοι, γεγονός που απαιτεί ισχυρό μαγνητικό πεδίο.

Τπάρχουν μερικοί pulsars που εκπέμπουν κυρίως στην περιοχή των ακτίνων-X. Οι pulsars αυτοί είναι μέλη ημιαποχωρισμένων διπλών συστημάτων (Κεφάλαιο 6). Η ακτινοβολία τους, η οποία έχει φάσμα μελανού σώματος, εκπέμπεται από ύλη η οποία “βομβαρδίζει” την επιφάνεια του αστέρα και θερμαίνεται, πέφτοντας επάνω της με μεγάλη ταχύτητα (λόγω του ισχυρού βαρυτικού πεδίου του pulsar). Η ύλη αυτή προέρχεται από το συνοδό αστέρα, ο οποίος είναι συνήθως ένας εξελιγμένος (γίγαντας) αστέρας που έχει γεμίσει το λοβό Roche (δες Κεφάλαιο 6).

Σήμερα πιστεύουμε ότι στο Γαλαξία υπάρχουν περίπου 50000 pulsars, ότι η δημιουργία τους συμβαίνει συνήθως κατά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς αστέρα με ρυθμό περίπου ίσο με 1 pulsar ανά 20 έτη και ότι ο μέσος όρος ζωής τους είναι 10^7 έτη. Ένας αστέρας νετρονίων παύει να παρατηρείται ως pulsar, είτε όταν το μαγνητικό του πεδίο εξασθενήσει σημαντικά, είτε όταν ο άξονας του (διπολικού) πεδίου γίνει παράλληλος προς τον άξονα περιστροφής. Και στις δύο περιπτώσεις το μέχρι σήμερα δεκτό πρότυπο ακτινοβολίας των pulsars (πρότυπο μαγνητικών πόλων) δεν προβλέπει περιοδική εκπομπή ακτινοβολίας.

5.3 Μελανές οπές

Η ύπαρξη ενός ανώτατου ορίου της μάζας ενός ευσταθή αστέρα νετρονίων δημιουργεί ένα δίλημμα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι γνωστό ότι υπάρχουν και αστέρες πολύ μεγάλης μάζας, που φυσικά είναι και οι ταχύτερα εξελισσόμενοι αστέρες. Προκύπτει, συνεπώς, το ερώτημα, τι θα συμβεί, αν α) ο αστέρας χάσει μεν κατά κάποιον τρόπο το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του, ήλιος η μάζα του παραμένοντος πυρήνα είναι μεγαλύτερη από $2 - 3 M_{\odot}$, ή β) επιπρόσθετη μάζα πέσει πάνω σε έναν αστέρα νετρονίων, ώστε η μάζα του να υπερβεί την οριακή μάζα των $\sim 3 M_{\odot}$. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν γνωστές φυσικές δυνάμεις, ικανές να αναχαιτίσουν την ολοκληρωτική βαρυτική κατάρρευση του αστέρα. Συνεπώς, οι διαστάσεις του αστέρα συνεχώς συμικρύνονται και η ένταση του βαρυτικού πεδίου του αστέρα αυξάνει σε υπερβολικό βαθμό, οπότε, φυσικά, η χρήση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι αναγκαστική. Η καμπύλωση του τετραδιάστατου χωροχρόνου του αστέρα δεν επιτρέπει ούτε καν φως να διαφύγει από το ισχυρότατο βαρυτικό πεδίο του και ο αστέρας φαίνεται να εξαφανίζεται από το σύμπαν. Το αποτέλεσμα αυτό της ολοκληρωτικής βαρυτικής κατάρρευσης έχει ονομαστεί μελανή οπή.

Η δημιουργία μιας μελανής οπής ως αποτέλεσμα της ολοκληρωτικής βαρυτικής κατάρρευσης ενός αστέρα αποτελεί μια από τις πιο εντυπωσιακές προβλέψεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και της σύγχρονης θεωρίας της αστρικής εξέλιξης. Η ακριβής σχετικιστική περιγραφή του φαινομένου της βαρυτικής κατάρρευσης και των μαθηματικών ιδιοτήτων των μελανών οπών, φυσικά, δεν ανήκει στους αντικείμενούς σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Σε γενικές γραμμές, όμως, μπορούμε να πούμε, στην περίπτωση ενός σφαιρικά συμμετρικά αστέρα, οτι, αν η λόγω της βαρυτικής κατάρρευσης συνεχώς ελλατούμενη ακτίνα $R(R > R_s)$ του αστέρα πάρει την οριακή τιμή

$$R = R_s$$

ο αστέρας θα γίνει μη-ορατός για κάθε παρατηρητή. Τότε η εξωτερική (πραγματική) επιφάνεια του αστέρα γίνεται μια παγιδευμένη επιφάνεια για υλικά σωματίδια και ακτίνες φωτός. Η επιφάνεια

$$r = R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.8)$$

ονομάζεται ορίζοντας γεγονότων και ορίζεται από την ακτινική απόσταση που δίνεται από τη σχέση (5.8) και που έχει ονομαστεί ακτίνα Schwarzschild. Η μορφή της σχέσης αυτής προέκυψε από την σχέση (5.7) για $v_{esc} = c$, η απόδειξη όμως αυτή δεν είναι σωστή, επειδή οι σχέσεις της κλασικής φυσικής δεν ισχύουν στο εν λόγω όριο ταχύτητας.

Η σωστή απόδειξη δόθηκε από το Γερμανό αστροφυσικό Karl Schwarzschild το 1917, με βάση τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Ο Schwarzschild έδειξε ότι το μήκος κύματος ενός φωτονίου αυξάνεται, όταν αυτό απομακρύνεται από μία πηγή βαρυτικού πεδίου. Αν λ_0 είναι το μήκος κύματος σε απόσταση $r_0 > R_s$ από ένα ομογενές, σφαιρικό, μη-περιστρεφόμενο και ηλεκτρικά ουδέτερο σώμα με μάζα M και λ είναι το μήκος κύματος σε άπειρη απόσταση από το σώμα, τότε ισχύει η σχέση

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{2GM}{r_0c^2}\right)^{-1/2} \quad (5.9)$$

Από τη σχέση (5.9) βλέπουμε ότι, όταν το r_0 γίνει ίσο με R_s , τότε το λ τείνει προς το ∞ , η ενέργεια των φωτονίων ($E = h\nu = hc/\lambda$) τείνει προς το μηδέν και επομένως αυτά παύουν να είναι αντιληπτά. Για το λόγο αυτό, αν ένα φωτόνιο περιέχεται μέσα σε σφαίρα ακτίνας $r \leq R_s$, τότε η τροχιά των φωτονίων στη θέση αυτή είναι κλειστή, και το φωτόνιο θα παραμείνει δέσμιο του βαρυτικού πεδίου. Η περιοχή $r < R_s$, λοιπόν, που περιλαμβάνεται από τον ορίζοντα γεγονότων είναι απαγορευμένη για έναν εξωτερικό παρατηρητή, με την έννοια ότι η έξοδος από αυτήν είναι αδύνατη (αν και η είσοδος σε αυτήν είναι δυνατή).

Ο ορίζοντας γεγονότων δεν είναι μία υλική επιφάνεια της μελανής οπής. Εντούτοις ένας εξωτερικός παρατηρητής που βρίσκεται σε απόσταση $r > R_s$ δεν μπορεί να πάρει άλλες πληροφορίες για την εσωτερική περιοχή ($r < R_s$) παρά μόνο για την συνολική μάζα (M), το ηλεκτρικό φορτίο (Q) και την ολική στροφορμή (J) που η περιοχή αυτή περιέχει. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι παραπάνω ποσότητες σχετίζονται με το βαρυτικό και το ηλεκτρικό πεδίο, τα οποία είναι τα μοναδικά, γνωστά στη σημερινή Φυσική, πεδία, που συνδέονται με δυνάμεις μεγάλης ακτίνας δράσης (long range forces).

Είναι φανερό ότι αν $r_0 \gg 2GM/c^2$, μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor το δεξιό μέλος της σχέσης (5.9), οπότε έχουμε

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - \frac{GM}{r_0c^2} \quad (5.10)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επί $E = hc/\lambda_0$ και θέομψμε $m = E/c^2$, τότε βρίσκουμε ότι

$$h\nu = h\nu_0 - GMm/r_0$$

Η παραπάνω σχέση υμίζει το ολοκλήρωμα της ενέργειας στο πρόβλημα των δύο σωμάτων

$$E_\infty = E_0 - GMm/r_0$$

Είναι φανερό ότι η ποσότητα GMm/r_0 αντιστοιχεί στην ενέργεια που καταναλώνει ένα φωτόνιο που βρίσκεται σε απόσταση r_0 από μία μάζα M για να διαφύγει, σε άπειρη απόσταση, από την επίδραση της μάζας αυτής.

Διπλά συστήματα & Μεταβλητοί αστέρες

Contents

6.1 Διπλά συστήματα αστέρων	113
6.1.1 Κατηγορίες διπλών συστημάτων	114
6.1.2 Βασικοί υπολογισμοί	116
6.1.3 Στενά διπλά συστήματα & απώλεια μάζας	117
6.2 Μεταβλητοί αστέρες	120
6.2.1 Περιοδικοί	121
6.2.2 Μη-περιοδικοί	122

6.1 Διπλά συστήματα αστέρων

Ένα διπλό σύστημα αστέρων αποτελείται από δύο αστέρες που αλληλεπιδρούν βαρυτικά και το σύστημα είναι δέσμιο. Αν ένας αστέρας έχει μεγάλη ταχύτητα και περάσει από την γειτονιά ενός άλλου αστέρα, τότε τα 2 αστέρια θα αλληλεπιδράσουν βαρυτικά μεν, αλλά το σύστημα δεν θα είναι δέσμιο. Το ότι το σύστημα είναι δέσμιο σημαίνει ότι η ενέργεια του συστήματος είναι αρνητική (θετική κινητική ενέργεια προφανώς, αλλά αρνητική δυναμική). Επίσης ισχύουν τα εξής:

- Οι αστέρες εκτελούν ελλειπτικές τροχιές γύρων από το κέντρο μάζας (KM) του συστήματος.
- Το επίπεδο και η περίοδος της τροχιάς είναι κοινά και για τα δύο αστέρια.
- το KM βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα δύο αστέρια, και η θέση του σ' αυτή καθορίζεται από την σχέση:

$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{M_A}{M_B} \quad (6.1)$$

όπου a_A, a_B είναι οι αποστάσεις των αστέρων από το KM.

- Για την περίοδο των τροχιών των αστέρων, P , ισχύει ο 3ος νόμος του Kepler

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G} a^3 \frac{1}{(M_A + M_B)} \quad (6.2)$$

όπου a είναι ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς της σχετικής θέσης των δύο αστέρων.

Αν γνωρίζουμε λοιπόν τα χαρακτηριστικά του συστήματος (γωνία κλίσης επιπέδου τροχιάς, P, a_B, a_A, a) τότε έχουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων (τις σχέσεις (6.1) και (6.2)) για 2 αγνώστους (M_A, M_B). Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε τις μάζες των δύο αστέρων.

6.1.1

Κατηγορίες διπλών συστημάτων

Τα διπλά συστήματα αστέρων κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την φαινόμενη απόσταση των δύο αστέρων και τη δυνατότητα διαχωρισμού τους από τα γήινα τηλεσκόπια. Έτσι προχύπτουν οι κάτωθι κατηγορίες.

Οπτικά διπλοί αστέρες Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από διπλούς αστέρες τα μέλη των οποίων είναι ορατά με γυμνό μάτι ή τηλεσκόπιο ως διακριτοί αστέρες. Είναι συνήθως κοντινά συστήματα με μεγάλες περιόδους περιστροφής και μεγάλες αποστάσεις μεταξύ των μελών του συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να αποτελεί πραγματικά διπλό σύστημα αστέρων όπως το έχουμε ορίσει, αλλά επίσης μπορεί δύο αστέρες να βρίσκονται σε τελείως διαφορετικές αποστάσεις από τη Γη και να φαίνεται σαν ένα διπλό σύστημα επειδή προβάλλεται πάνω στο επίπεδο της ουράνιας σφαίρας. Αυτοί ονομάζονται φαινομενικά διπλοί αστέρες.

Η θεωρητική διακριτική ικανότητα, ω_{\min} , ενός οπτικού οργάνου εξαρτάται από το μήκος κύματος της παρατήρησης και τη διάμετρο, D , του αντικειμενικού φακού (ή κατόπτρου) σύμφωνα με τη σχέση:

$$\omega_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (6.3)$$

Μη-οπτικά διπλοί αστέρες Η κατηγορία αυτή διπλών αστέρων είναι αυτή των οποίων το ένα μέλος δεν διακρίνεται επειδή είναι εξαιρετικά αφυδρό. Η κατηγορία αυτή χωρίζεται σε 4 υποκατηγορίες ανάλογα με τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε για να αντλήσουμε πληροφορίες από ένα τέτοιο σύστημα.

(I) Φασματοσκοπικά διπλοί αστέρες (spectroscopic binaries)

Από τον 3ο νόμο του Kepler (σχέση (6.2)) προκύπτει ότι όταν ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς των μελών του συστήματος είναι μικρός, οι ταχύτητες περιφοράς των αστεριών γύρω από το κοινό ΚΜ είναι μεγάλες, με άμεσο αποτέλεσμα να μετατοπίζονται οι φασματικές γραμμές του συστήματος λόγω του φαινομένου Doppler. Από το φάσμα που παίρνουμε, βλέπουμε ότι περιέχει γραμμές που ανήκουν σε δύο αστέρες (αν οι λαμπρότητες των μελών είναι συγχρίσιμες) ή μόνο σε έναν αστέρα (αν η λαμπρότητα του ενός είναι πολύ μεγαλύτερη από του άλλου). Κάθε φασματική γραμμή “ταλαντώνεται” περιοδικά γύρω από ένα μέσο μήκος κύματος. Προφανώς οι φασματικές γραμμές μετατοπίζονται προς το ερυθρό όταν ο αντίστοιχος αστέρας βρίσκεται στο τμήμα της τροχιάς που απομακρύνεται από τη Γη, και προς το κυανό όταν βρίσκεται στο τμήμα της τροχιάς που προσεγγίζει τη Γη (σχήμα 6.1). Επειδή οι 2 αστέρες βρίσκονται πάντα σε αντιδιαμετρική θέση ως προς το ΚΜ, όταν οι φασματικές γραμμές του ενός αστέρα είναι μετατοπισμένες προς το ερυθρό, οι φασματικές γραμμές του άλλου είναι μετατοπισμένες προς το κυανό και αντίστροφα. Οι περισσότεροι γνωστοί διπλοί αστέρες είναι φασματοσκοπικά διπλοί χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορούν να ανήκουν ταυτόχρονα και σε χάπια άλλη κατηγορία.

Από τον χρόνο που χρειάζεται για να έχουμε δύο διαδοχικές ταυτήσεις των φασματικών γραμμών, μπορούμε να βρούμε την περίοδο του συστήματος. Επίσης, ξέρουμε ότι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας (της φασματικής γραμμής) εξαρτάται από τη συνιστώσα της ταχύτητας κατά μήκος της γραμμής παρατήρησης (line of sight). Δεν έχουμε και τις 3 συνιστώσες για το διάνυσμα της ταχύτητας. Μέσω αυτής της συνιστώσας της ταχύτητας μπορούμε να βρούμε και την απόσταση των δύο σωμάτων μεταξύ τους (ανάλογα με το πως αλλάζει το πλάτος της ταχύτητας).

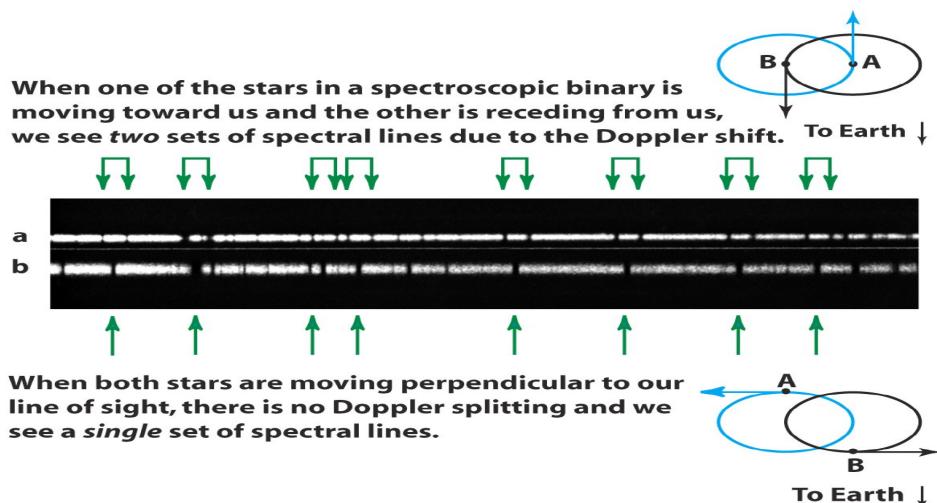
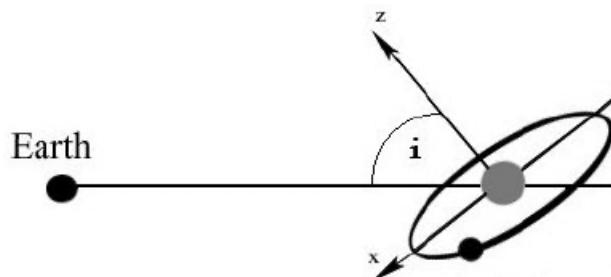


Figure 6.1: Φασματοσκοπικά διπλό σύστημα αστέρων.

Σημείωση: Τα μήκη κύματος στα οποία εμφανίζονται οι μετατοπισμένες γραμμές απορρόφησης δεν αντιστοιχούν σε κανένα χημικό στοιχείο που μπορεί να δώσει μετάπτωση από μία ενεργειακή στιβάδα σε κάποια άλλη και να παράξει αυτά τα μήκη κύματος.

Μέσω της μελέτης των φασματοσκοπικά διπλών αστέρων δεν είναι δυνατόν να υπολογισθεί η μάζα των αστέρων του συστήματος, παρά μόνο ο λόγος των μαζών τους και το γινόμενο της κάθε μάζας επί την άγνωστη ποσότητα $\sin^3 i$, όπου i είναι η γωνία κλίσης του επιπέδου της τροχιάς του διπλού συστήματος (σχήμα 6.2).

Figure 6.2: Η γωνία κλίσης i , του επιπέδου της τροχιάς ενός διπλού συστήματος αστέρων.

(II) Εκλειπτικά διπλοί αστέρες (ecliptic binaries)

Όταν το επίπεδο της τροχιάς των δύο αστέρων είναι σχεδόν παράλληλο με τη διεύθυνση παρατήρησης, δηλαδή η γωνία κλίσης $i \approx 90^\circ$, και η απόσταση μεταξύ των μελών του συστήματος είναι πολύ μικρή, τότε κατά την περιφορά τους γύρω από το ΚΜ, τα 2 μέλη διέρχονται διαδοχικά το ένα μπροστά από το άλλο έτσι ώστε το ένα να καλύπτει τμήμα (ή και το σύνολο) του φαινόμενου δίσκου του άλλου, προκαλώντας μερικές ή όλικές εκλείψεις. Η ύπαρξη του ζεύγους συνεπάγεται από τις περιοδικές μεταβολές (αυξομειώσεις) της φαινόμενης λαμπρότητας του -φαινομενικά απλού- αστέρα, η οποία μειώνεται κατά τη διάρκεια της έκλειψης.

Κατά τη διάρκεια μίας περιφοράς συμβαίνουν δύο εκλείψεις, ανάλογα με το ποιό αστέρι βρίσκεται μπροστά από το άλλο και ως εκ τούτου παρουσιάζονται δύο ελάχιστα λαμπρότητας (σχήμα 6.3). Τα

δύο αυτά ελάχιστα διαφέρουν γενικά ως προς το πλάτος και το βάθος, ανάλογα με τη λαμπρότητα των μελών του συστήματος.

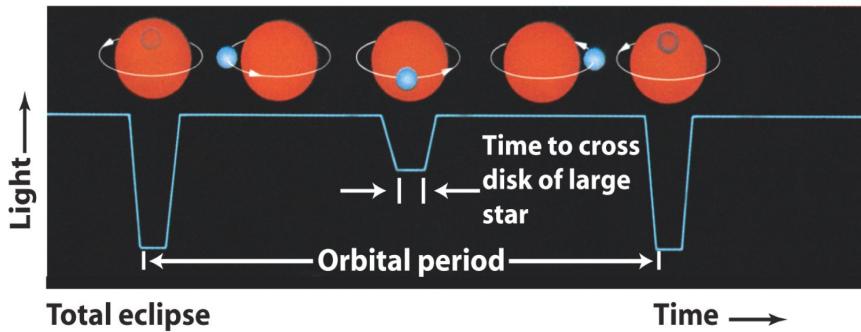


Figure 6.3: Καμπύλη φωτός για ένα εκλειπτικά διπλό σύστημα αστέρων. Όταν ο αμυδρότερος αστέρας καλύπτει τον λαμπρότερο έχουμε το πρωτεύον ελάχιστο. Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε το δευτερεύον ελάχιστο.

Και σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα κανενός από τους αστέρες του συστήματος. Από την καμπύλη φωτός όμως (σχήμα 6.3) μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση της τροχιάς, τις ακτίνες των μελών του ζεύγους και τον λόγο των φωτεινοτήτων των δύο αστέρων. Αν επιπροσθέτως τα δύο αστέρια ανήκουν στην κύρια ακολουθία μπορούμε να υπολογίσουμε και τον λόγο των μαζών από τη σχέση μάζας-φωτεινότητας.

(III) Αστρομετρικά διπλοί αστέρες (astrometric binaries)

Στη κατηγορία αυτή κατατάσσονται τα μη-οπτικώς διπλά σύστηματα αστεριών, των οποίων ο αμυδρός συνοδός αστέρας εντοπίζεται μόνο μέσω των δυναμικών επιδράσεων του πάνω στην τροχιά του πρωτεύοντος αστέρα. Ουσιαστικά παρατηρούμε μόνο ένα άστρο, επειδή όμως η κίνηση στην τροχιά του παρουσιάζει παλινδρομήσεις, συμπεράνουμε ότι υπάρχει αμυδρός συνοδός.

(IV) Φασματικά διπλοί αστέρες (spectral binaries)

Αν οι τυπικές ταχύτητες περιφοράς των μελών ενός διπλού συστήματος ή/και η γωνία κλίσης i είναι πολύ μικρή, τότε δεν είναι δύνατόν να ανιχνευθεί η μετατόπιση Doppler των φασματικών γραμμών και επομένως το σύστημα δεν αναγνωρίζεται ως φασματοσκοπικά διπλός αστέρας. Παρόλα αυτά, αν τα δύο μέλη έχουν σημαντικά διαφορετικά φάσματα (ανήκουν δηλαδή σε διαφορετικούς φασματικούς τύπους) και συγκρίσιμες λαμπρότητες (έτσι ώστε και τα δύο φάσματα να είναι ορατά), τότε το σύστημα μπορεί να αναγνωριστεί ως φασματικά διπλός αστέρας.

Είναι φανερό ότι οι φασματικά διπλοί αστέρες διαφέρουν από τους φασματοσκοπικά διπλούς στο ότι στους πρώτους δεν παρατηρείται μετατόπιση Doppler των γραμμών. Κανένα στοιχείο δεν μπορεί να βρεθεί για τους φασματικά διπλούς αστέρες αφού δεν παρατηρούμε σ' αυτούς κανένα φαινόμενο που να εμφανίζει χρονική μεταβολή.

6.1.2

Βασικοί υπολογισμοί

Υπολογισμός στοιχείων Μετατρέποντας τη σχετική φαινόμενη τροχιά σε σχετική πραγματική τροχιά, υπολογίζουμε τις εξής ποσότητες:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\pi} &= \text{εκκεντρότητα} \\ \alpha_{\pi} &= \text{μεγάλος γωνιώδης ημιάξονας σε AU} \\ i &= \text{γωνία κλίσης}\end{aligned}$$

Αν γνωρίζουμε την παραλλαξη p , τότε υπολογίζουμε τον μεγάλο ημιάξονα α σε AU

$$\alpha = \frac{\alpha_\pi}{p} \quad (6.4)$$

Υπολογισμός αυθοίσματος μαζών

Από τον 3ο νόμο του Kepler (σχέση (6.2)) έχουμε ότι

$$M_1 + M_2 \simeq \frac{\alpha^3}{P^2}$$

όπου α είναι ο μεγάλος ημιάξονας σε AU και P η περίοδος του συστήματος.

Υπολογισμός μαζών M_1, M_2 Για φωτεινά διπλά συστήματα με σχετικά μεγάλη γωνιώδη απόσταση α_π , μπορούμε να υπολογίσουμε και την απόλυτη φαινόμενη τροχιά για καθένα από τα δύο μέλη. Άρα υπολογίζουμε δύο ημιάξονες α_1, α_2 .

Από τον ορισμό του KM του συστήματος (σχέση (6.1)) και σε συνδυασμό με τον υπολογισμό του αυθοίσματος $M_1 + M_2$ προκύπτουν οι μάζες M_1, M_2 για κάθε αστέρα.

Δυναμικές παραλλάξεις Από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= \frac{\alpha^3}{P^2} \\ \alpha &= \frac{\alpha_\pi}{p} \end{aligned}$$

προκύπτει ότι:

$$\alpha_\pi = p \left[(M_1 + M_2) P^2 \right]^{1/3} \quad (6.5)$$

Αν οι δύο αστέρες ανήκουν στην κύρια ακολουθία, τότε για τον καθένα ισχύει ο νόμος μάζας-φωτεινότητας $L = f(M)$. Οπότε λύνουμε επαναληπτικά το σύστημα:

$$p = \alpha_\pi \left[(M_1 + M_2) P^2 \right]^{-1/3}$$

$$L_1 = f(M_1)$$

$$L_2 = f(M_2)$$

για π, M_1, M_2 ξεκινώντας από κάποια εκτίμηση για το $M_1 + M_2$.

6.1.3

Στενά διπλά συστήματα & απώλεια μάζας

Κατά τη διάρκεια της ζωής τους, τα αστέρια χάνουν μάζα η οποία εμπλουτίζει τον μεσοαστρικό χώρο μέσω δύο διακασιών:

- (a) **Συνεχώς**, μέσω των αστρικών ανέμων. Η μάζα που μπορεί να χαθεί με αυτόν τον τρόπο εξαρτάται από τη μάζα του αστέρα καθώς και το στάδιο της εξέλιξής του ($\dot{M}_{\text{Giant}} > \dot{M}_{MS}$).

(b) **Εκρηκτικώς**, μέσω καινοφανών και υπερκαινοφανών εκρήξεων.

Στην περίπτωση ενός στενού διπλού συστήματος, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών μπορεί να οδηγήσει σε μεταφορά μάζας από το ένα αστέρι στο άλλο, επηρεάζοντας με αυτόν τον τρόπο την δομή, την μάζα, την γωνιακή στροφορμή καθώς και την τελική κατάσταση των αστέρων του συστήματος.

Όταν έχουμε ένα διπλό σύστημα, το πρόβλημα των πολλών σωμάτων (n-body problem) εκφυλίζεται στο “περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα των τριών σωμάτων” (circular restricted three-body problem), με το ενεργό (effective) δυναμικό να δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi = -G \left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right) - \frac{1}{2} \Omega^2 r_3^2 \quad (6.6)$$

όπου r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις από το κέντρο των αστέρων M_1, M_2 αντίστοιχα, Ω είναι η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα και r_3 είναι η απόσταση του άξονα περιστροφής τους συστήματος.

Η ποσότητα $V_g = -G \left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right)$ είναι ουσιαστικά το βαρυτικό δυναμικό ενώ το $V_F = -\frac{1}{2} \Omega^2 r_3^2$ περιγράφει το “δυναμικό” της φυγόκεντρου δύναμης.

Αν απαιτήσουμε η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα δοκιμαστικό σωματίδιο, m , να είναι μηδέν:

$$\mathbf{F}_t = -\nabla \Phi = 0$$

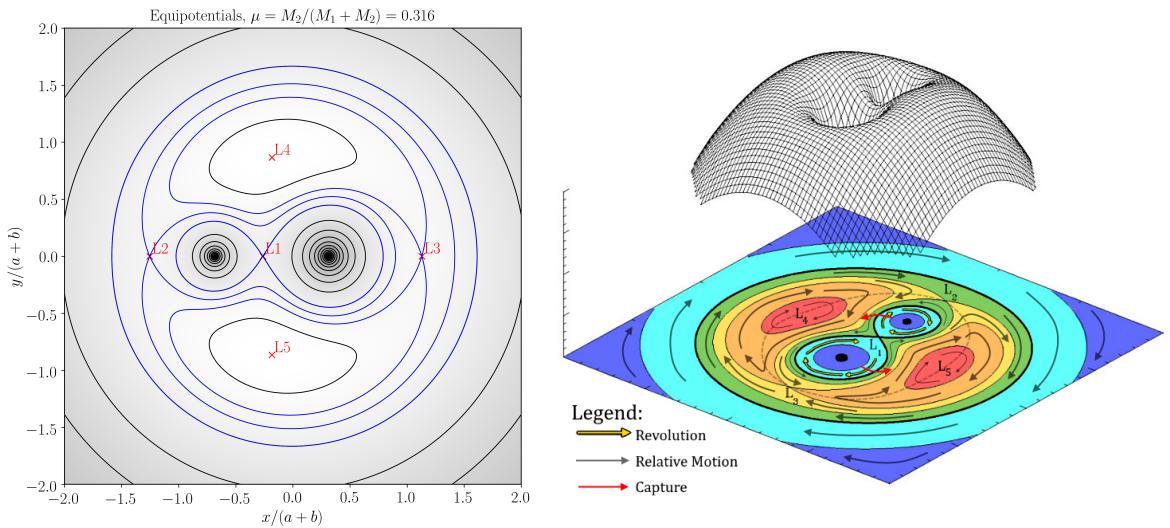
τότε η εξίσωση (6.6) δίνει πέντε λύσεις όπου η βαρυτική δύναμη εξισορροπεί την φυγόκεντρο δύναμη που προκαλείται από τη σχετική κίνηση των δύο αστέρων του ενός γύρω από τον άλλον. Τα σημεία για τα οποία ισχύει αυτό, δηλαδή τα σημεία τα οποία έχουν μηδενική στιγμιαία ταχύτητα ονομάζονται σημεία Lagrange, ($L_n, n = 1, \dots, 5$). Άρα αν το δοκιμαστικό σωματίδιο τοποθετούνταν σε κάποιο από αυτά τα σημεία, θα διατηρούσε τη θέση του σε σχέση ως προς τα δύο αστέρια.

Το σύνολο των σημείων μηδενικής ταχύτητας συγχροτεί μία ομάδα κλειστών επιφανειών, τις οποίες ονομάζουμε επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας (zero velocity surfaces) και περνούν από τα σημεία Lagrange. Η τομή μιας τέτοιας επιφάνειας μηδενικής ταχύτητας (ή ισοδυναμική επιφάνεια καθώς περιλαμβάνει όλα τα σημεία του συστήματος που μοιράζονται την ίδια τιμή του δυναμικού Φ) με κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο ονομάζεται καμπύλη μηδενικής ταχύτητας (zero velocity curve). Συνήθως σαν επίπεδο τομής επιλέγεται το επίπεδο της σχετικής τροχιάς των δύο αστέρων του συστήματος (σχήμα 6.4).

Οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας είναι σημαντικές γιατί ορίζουν τα όρια (boundaries) των περιοχών από τις οποίες το δοκιμαστικό σωματίδιο είναι δυναμικά αποκλεισμένο. Με άλλα λόγια, κάθε αστέρας ελέγχει βαρυτικά μόνο έναν περιορισμένο χώρο που καθορίζεται από μία ισοδυναμική επιφάνεια.

Στο σχήμα 6.4 κάθισε καμπύλη μηδενικής ταχύτητας έχει παρουσιαστεί με διαφορετικό χρώμα. Από τα πέντε σημεία Lagrange, το L_1 παίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των διπλών συστημάτων καθώς η ισοδυναμική επιφάνεια που περνάει από αυτό ορίζει τους (ανεξάρτητους μεταξύ τους) λοβούς Roche και κάθισε ένας από αυτούς περιβάλλει έναν αστέρα του συστήματος.

Η επιφάνεια μηδενικής ταχύτητας που περνάει από το L_1 έχει ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό: όλες οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας που περιβάλλουν ένα μόνο σώμα, βρίσκονται μέσα στον αντίστοιχο λοβό Roche, ενώ όλες οι επιφάνειες μηδενικής ταχύτητας που βρίσκονται έξω από τους λοβούς Roche περιβάλλουν και τα δύο σώματα. Ετσι, ένα δοκιμαστικό που βρίσκεται μέσα στο λοβό Roche ενός μέλους του διπλού συστήματος “ανήκει” βαρυτικά σε αυτόν τον αστέρα. Αντίθετα, ένα σωματίδιο που βρίσκεται έξω και από τους δύο λοβούς Roche “ανήκει” βαρυτικά και στους δύο αστέρες, αφού κινείται σε τροχιά που είναι δυνατόν να περιβάλλει και τους δύο. Οι τροχιές αυτές δεν είναι κωνικές τομές (κύκλοι, ελλείψεις, παραβολές, υπερβολές ή ευθείες).



Αριστερά: Ισοδυναμικές γραμμές πάνω στο τροχιακό επίπεδο ενός περιστρεφόμενου διπλού συστήματος, με ανηγμένη μάζα $\mu = 0.316$ (reduced mass ratio). Σε αυτή τη διάταξη, M_1 είναι το αστέρι με τη μεγαλύτερη μάζα και βρίσκεται στη θέση $x = +a$, ενώ το M_2 είναι το αστέρι με τη μικρότερη μάζα και βρίσκεται στη θέση $x = -b$. Η εσωτερική ισοδυναμική επιφάνεια που περνάει από το σημείο Lagrange L_1 , ορίζει τον λοβό Roche, που έχει σχήμα σταγόνας, για τον οποίο αστέρα. **Δεξιά:** 3D αναπαράσταση ισοδυναμικών επιφανειών.

Με βάση το λόγο της ακτίνας του κάθε αστέρα ως προς την ακτίνα του δικού του λοβού (R_L), τα διπλά συστήματα χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

Αποχωρισμένα (detached binaries) Είναι ένα διπλό σύστημα στο οποίο ο κάθε ένας αστέρας βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στον δικό του λοβό Roche και εξελίσσονται σχεδόν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον. Ισχύει δηλαδή ότι $r_1 < R_{L,1}$ και $r_2 < R_{L,2}$ όπου r_1, r_2 οι ακτίνες των δύο αστέρων.

Ημιαποχωρισμένα (semidetached binaries) Αυτά είναι τα συστήματα στα οποία μόνο ο ένας από τους δύο αστέρες “γεμίζει” τον λοβό Roche του (δηλαδή $r_1 < R_{L,1}$ και $r_2 \approx R_{L,2}$). Αυτό μπορεί να συμβεί σε μετεγνέστερα εξελικτικά στάδια στη διάρκεια ζωής ενός αστέρα, όταν μπει στη φάση των γιγάντων. Έκεί, η ακτίνα του μεγαλώνει σε τόσο βαθμό όπου ο όγκος του αστέρα είναι συγχρίσιμος με τον όγκο που ορίζει ο λοβός Roche του.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε εκροή μάζας από αυτόν τον αστέρα προς τον συνοδό του διαμέσου το εσωτερικό L_1 σημείο Lagrange. Η προσαύξηση του υλικού γίνεται με τον σχηματισμό ενός δίσκου επισυσώρευσης/προσαύξησης και όχι με το να πέφτει απευθείας πάνω στον συνοδό αστέρα. Αυτό συμβαίνει διότι το υλικό που εκρύεται έχει την ίδια στροφορμή με τον αστέρα-δότη και εκτός αν υπάρχουν μη-συντηρητικές μηχανισμοί για να αφαιρέσουν ένα ποσό από τη στροφορμή του αερίου που εκρύεται, αυτό θα συνεχιστεί να περιφέρεται γύρω από τον συνοδό αστέρα. Για να καταφέρει να πέσει πάνω στον αστέρα, η ύλη πρέπει να χάσει στροφορμή από την εσωτερική τριβή (ιξώδες). Αυτή η εσωτερική τριβή του αερίου το αναγκάζει να θερμανθεί και να ακτινοβολεί (X-ray binary).

Η υπερχείλιση του αστέρα μέσα από τον λοβό του Roche οδηγεί σε σημαντική μείωση της μάζας του αστέρα και επηρεάζει τη μετέπειτα εξέλιξή του. Πέρα από αυτόν τον μηχανισμό όμως, μπορούμε να έχουμε μεταφορά μάζας με προσαύξηση από τον αστρικό άνεμο του θερμότερου αστέρα προς τον ψυχρότερο. Παρόλα αυτά, η μεταφορά μάζας με αυτόν τον τρόπο δεν είναι το ίδιο αποδοτική όσο η υπερχείλιση του λοβού Roche.

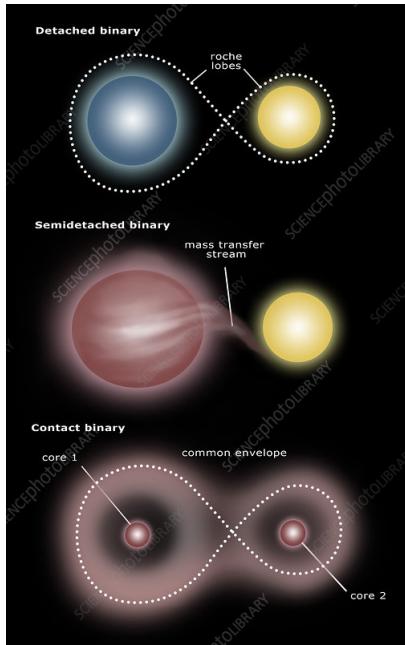


Figure 6.5: Κατηγορίες διπλών συστημάτων βάσει του ποσοστού πλήρωσης των λοβών Roche.

Εν επαφή (contact binary) Ένα διπλό σύστημα λέμε ότι είναι σε επαφή όταν και τα δύο αστέρια “γεμίζουν” τους λοβούς τους (δηλαδή $r_1 \approx R_{L,1}$ και $r_2 \approx R_{L,2}$). Σε αυτή την περίπτωση, το σύστημα μοιράζεται μία κοινή ατμόσφαιρα (common envelope, σχήμα 6.5) η οποία μπορεί να εκδιωχθεί στερώντας έτσι από το σύστημα ένα σημαντικό μέρος της μάζας του.

Σε αυτό το σημείονα διευχιρίζουμε ότι δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση για το μέγεθος του λοβού Roche σε ένα διπλό σύστημα. Παρόλα αυτά έχει προταθεί μια αριθμητική προσέγγιση της ακτίνας του λοβού Roche μέσω της σχέσης:

$$\frac{R_L}{a} = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})}$$

όπου a είναι ο τροχιακός διαχωρισμός (orbital separation) του συστήματος και $q \equiv \frac{M_{\text{donor}}}{M_{\text{accretor}}}$ είναι ο λόγος των μαζών των μελών του συστήματος. Αυτές είναι και οι δύο πιο σημαντικές παράμετροι για να ακολουθήσουμε την εξέλιξη του συστήματος.

6.2 Μεταβλητοί αστέρες

Μεταβλητοί αστέρες ονομάζονται οι αστέρες, των οποίων η λαμπρότητα μεταβάλλεται μέσα σε ένα χρονικό διάστημα σημαντικά μικρότερο από την ηλικία τους. Με τον (γενικά ασαφή) αυτό ορισμό αποφεύγει κανείς να χαρακτηρίσει μεταβλητούς όλους τους αστέρες, αφού, η λαμπρότητα ενός αστέρα μεταβάλλεται σημαντικά, και μάλιστα κατά πολλές τάξεις μεγέθους, στη διάρκεια της ζώης τους (π.χ. εγκατάσταση στην κύρια ακολουθία, άνοδος στον κλάδο των γιγάντων κτλ.).

Οι μεταβλητοί αστέρες κατατάσσονται σε κατηγορίες, ανάλογα με το φαινόμενο που προκαλεί τη μεταβολή της λαμπρότητά τους, την περιοδικότητα (ή την έλλειψη αυτής) της μεταβολής και το μέγεθός της. Καταρχάς, οι μεταβλητοί αστέρες μπορούν να χωριστούν σε γνήσιους μεταβλητούς και σε μη-γνήσιους. Στην

τελευταία περίπτωση, η μεταβολή της λαμπρότητας του αστέρα δεν οφείλεται σε κάποιον ενδογενή φυσικό μηχανισμό αλλά σε κάποιον εξωτερικό παράγοντα που επηρεάζει φυινομενικά την λαμπρότητα.

Η απλούστερη περίπτωση ενός τέτοιου μη-γνήσιου μεταβλητού αστέρα είναι εκείνη, κατά την οποία ο αστέρας είναι στην πραγματικότητα εκλειπτικά διπλός και η μεταβολή της λαμπρότητάς του οφείλεται στο γεγονός ότι, κατά την κίνησή τους, τα μέλη του διέρχονται διαδοχικά το ένα μπροστά από το άλλο, προκαλώντας εκλείψεις. Η διάρκεια των εκλειψεων, ο ρυθμός ελλάτωσης και αύξησης της λαμπρότητας του διπλού αστέρα κατά την αρχή και το τέλος των εκλειψεων, η αλλαγή του δείκτη χρώματος και η περίοδος του φαινομένου δίνουν πληροφορίες για την απόσταση μεταξύ των μελών, τη μάζα τους, τις διαστάσεις τους, το φασματικό τους τύπο κτλ. Από την άλλη μεριά, οι γνήσιοι μεταβλητοί αστέρες χωρίζονται στις κατηγορίες που θα αναλύσουμε παρακάτω.

6.2.1

Περιοδικοί

Κηφείδες Οι Κηφείδες αστέρες αποτελούν τη σημαντικότερη κατηγορία περιοδικών μεταβλητών αστέρων.

Ονομάστηκαν έτσι καθώς ο πρώτος τέτοιος αστέρας που μελετήθηκε ήταν ο “δ Κηφέως” στον αστερισμό του Κηφέα. Οι Κηφείδες είναι γίγαντες αστέρες και παρουσιάζουν περιοδικές μεταβολές στη λαμπρότητά τους, με περίοδο από 1 εως 50 ημέρες. Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, εκτός από την λαμπρότητα του αστέρα, που μεταβάλλεται κατά $\Delta m \simeq 1$ μέγεθος, μεταβάλλονται επίσης και ο δείκτης χρώματός του, και επομένως ο φασματικός του τύπος (και άρα η επιφανειακή του θερμοκρασία). Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι η θέση των αστέρων αυτών δεν μένει σταθερή στο διάγραμμα H-R αλλά μετατοπίζεται, εκτελώντας μία κλειστή τροχιά κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

Η μεταβολή της λαμπρότητας των Κηφείδων δεν οφείλεται μόνο στη μεταβολή της θερμοκρασίας των αστέρων αυτών, αλλά και σε μεταβολή της ακτίνας τους. Επομένως οι αστέρες αυτοί παρουσιάζουν αναπάλσεις (pulsations). Αυτές οι αναπάλσεις αφορούν τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα και δεν οφείλονται σε μεταβολές του ρυθμού παραγωγής ενέργειας στον πυρήνα καθώς τέτοια φαινόμενα θα εξελίσσονταν στην θερμική χρονική κλίμακα που είναι της τάξης των δεκάδων χιλιάδων ετών. Γίνεται φανερό ότι οι Κηφείδες δεν είναι γεννημένοι μεταβλητοί, αλλά αποτελούν μία φάση στην εξέλιξη ορισμένων αστέρων, μετά την έξοδό τους από την κύρια ακολουθία.

Αποδεικνύεται ότι για τους Κηφείδες αστέρες ισχύει μία σχέση μεταξύ της περιόδου και της λαμπρότητας της μορφής

$$\log P = \alpha \log L + \beta \quad (6.7)$$

όπου α και β είναι αριθμητικές σταθερές. Μερικές φορές αυτή η σχέση εκφράζεται και με όρους απόλυτου μεγέθους αντί λαμπρότητας. Σε συνδυασμό με τη παρατηρούμενη μεταβολή στο φαινόμενο μέγεθος των Κηφείδων, η σχέση (6.7) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της απόστασης μέσω του distance modulus. Μέχρι σήμερα, έχουν μετρηθεί οι αποστάσεις πολλών γαλαξιών που φιλοξενούν Κηφείδες αστέρες χρησιμοποιώντας αυτή την μέθοδο.

RR Lyrae Οι αστέρες αυτοί είναι μεταβλητοί μικρής περιόδου, η μεταβολή της φωτεινότητας των οποίων οφείλεται επίσης σε σφαιρικά συμμετρικές (ακτινικές) αναπάλσεις. Είναι κιτρινόλευκοι γίγαντες αστέρες (οριζόντιος κλάδος στο διάγραμμα H-R) ενώ έχουν μάζα και περίοδο μικρότερες από αυτές των Κηφείδων ($M \simeq 0.5 M_{\odot}$, $P \sim 0.2 - 1$ ημέρα). Η λαμπρότητά τους είναι σχεδόν ανεξάρτητη της περιόδου αναπάλσεως και αντιστοιχεί σε απόλυτο μέγεθος $M_V = 0.6$. Οι αστέρες αυτοί, πάντως, είναι αμυδρότεροι από τους Κηφείδες, και έτσι δεν είναι ορατοί σε μεγάλες αποστάσεις. Επομένως είναι χρήσιμοι για μετρήσεις αποστάσεων μέσα στο Γαλαξία, αλλά όχι για μετρήσεις αποστάσεων άλλων γαλαξιών.

Μακροπερίοδοι Κατά τα τελευταία στάδια της εξέλιξης αστέρων μικρών μάζας είναι δυνατόν να υπάρξει συντονισμός των εξωτερικών στρωμάτων ενός αστέρα με το ρυθμό παραγωγής ενέργειας κατά τις διαδοχικές εναλλαγές καύσης των φλοιών H και He. Ο αστέρας τότε παρατηρείται ως μακροπερίοδος μεταβλητός τύπου Mira (Mira variable) με περίοδο, P , μεταξύ 100 και 1000 ημερών και εύρος μεταβολής μεγέθους $\Delta m_V \simeq 2 - 6$ μεγέθη.

Οι μεταβλητοί τύπου Mira είναι ψυχροί, ερυθροί γίγαντες αστέρες μικρής μάζας και φασματικού τύπου M. Στο φάσμα τους παρατηρούνται ιδιαίτερα ισχυρές μοριακές γραμμές απορρόφησης. Το μεγάλο εύρος της μεταβολής του μεγέθους αυτών των αστέρων μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι ο συντελεστής απορρόφησης εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

6.2.2

Μη-περιοδικοί

Ανώμαλοι - T Tauri Οι αστέρες αυτοί πήραν το όνομά τους από τον τυπικό εκπρόσωπό της κατηγορίας, το μεταβλητό αστέρα T στον αστερισμό του Ταύρου. Παρατηρησιακά οι αστέρες αυτοί χαρακτηρίζονται:

1. από απότομες και βραχυχρόνιες αυξήσεις της φωτεινότητάς τους από λίγα δέκατα του μεγέθους μέχρι και 4 μεγέθη, τις οποίες διαδέχονται διαστήματα ηρεμίας που διαρκούν από λίγες ώρες μέχρι και 100 ημέρες,
2. από φασματικές γραμμές λιθίου (οι οποίες δεν εμφανίζονται σε άλλους αστέρες καθώς το λίθιο εξαντλείται πολύ γρήγορα κατά την έναρξη των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων στους αστέρες) και
3. από ισχυρούς αστρικούς ανέμους.

Από την ερυθρή χρώση του φωτός τους και από το φάσμα τους βρίσκουμε ότι περιβάλλονται από ένα νέφος αερίου και σκόνης και ότι η θέση τους στο διάγραμμα H-R είναι μεταξύ των ερυθρών γιγάντων και της κύριας ακολουθίας. Η παρουσία λιθίου και η θέση τους στο διάγραμμα H-R μας κάνουν να πιστεύουμε ότι οι αστέρες της κατηγορίας αυτής είναι αστέρες “εν τη γενέσει τους”, δηλαδή αστέρες που βρίσκονται ακόμα στο τελευταίο στάδιο της βαρυτικής συστολής τους. Επομένως οι αστέρες αυτοί δεν έχουν φτάσει ακόμα στη κύρια ακολουθία.

Ανώμαλοι - Αστέρες Οι αστέρες αυτοί είναι ψυχροί ερυθροί νάνοι της κύριας ακολουθίας, οι οποίοι παρουσιάζουν σε ακανόνιστα χρονικά διαστήματα απότομες και σύντομες αυξήσεις της φωτεινότητάς τους (κυρίως στα χρώματα B και U αλλά και στα ραδιοφωνικά μήκη κύματος) μέχρι και 6 μεγέθη, γνωστές ως **εκλάμψεις** (flares). Σήμερα πιστεύουμε ότι οι εκλάμψεις αυτών των αστέρων είναι της ίδιας φύσης με τις ηλιακές, οφείλονται δηλαδή σε απελευθέρωση μαγνητικής ενέργειας από επανασύνδεση μαγνητικών γραμμών (magnetic reconnection).

Η ενέργεια μιας τυπικής τέτοιας έκλαμψης είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την ενέργεια μιας τυπικής ηλιακής έκλαμψης. Η διαφορά αυτή αποδίδεται στο γεγονός ότι το μαγνητικό πεδίο των αστέρων εκλάμψεων είναι κατά πολύ ισχυρότερου του ηλιακού, επειδή η ζώνη μεταφοράς, στην ύπαρξη της οποίας οφείλεται το μαγνητικό πεδίο (σύμφωνα με τη θεωρία της μαγνητικής γεννήτριας του Parker), είναι πολύ μεγαλύτερη στους αστέρες εκλάμψεων. Πραγματικά, σήμερα πιστεύουμε ότι οι νάνοι της κύριας ακολουθίας φασματιών τύπων M3 - M9 δεν έχουν καθόλου ζώνη ακτινοβολίας, έτσι ώστε η ζώνη μεταφοράς καλύπτει όλο το εσωτερικό του αστέρα, εκτός από τον πυρήνα του.

Ανώμαλοι - R Coronae Borealis

Οι υπεργίγαντες αυτοί αστέρες φασματικού τύπου F χαρακτηρίζονται ως “αντίστροφοι καινοφανείς”, διότι η φωτεινότητά τους ελλατώνεται ενίστε κατά πολλά (έως και 9) μεγέθη μέσα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα (λίγες ημέρες), παραμένει χαμηλή για λίγο και στη συνέχεια επανέρχεται στην αρχική της τιμή. Γενικά το φάσμα τους είναι φτωχό σε γραμμές υδρογόνου και πλούσιο σε γραμμές άνθρακα. Η ασυνήθιστη αυτή χημική σύσταση οφείλεται είτε στη μεταφορά ύλης από τον πυρήνα προς τη φωτόσφαιρά τους (dredge up), είτε διότι κατά το στάδιο του γίγαντα έχασαν τους φλοιούς H και He που περιέβαλλαν τον πυρήνα.

Σύμφωνα με το πιο διαδεμένο πρότυπο, οι μεταβλητοί τύπου **R Coronae Borealis** (δηλαδή όμοιοι με τον μεταβλητό αστέρα R του αστερισμού του Βόρειου Στέφανου, R CBr) έχουν πολύ ισχυρούς αστρικούς ανέμους, με τους οποίους ο χώρος γύρω τους εμπλουτίζεται με ενώσεις άνθρακα. Όταν οι ενώσεις αυτές ψυχθούν, σχηματίζονται κόκκοι ανθρακούχου σκόνης οι οποίοι απορροφούν έντονα σε όλα τα μήκη κύματος. Σε αυτήν την απορρόφηση οφείλονται τα ελάχιστα της φωτεινότητας που παρατηρούμε. Η απορρόφηση όμως της ακτινοβολίας του αστέρα ανεβάζει τη θερμοκρασία των κόκκων της σκόνης, με αποτέλεσμα αυτοί να εξαγνωθούν και να επανέλθει ο αστέρας στην αρχική του φωτεινότητα.

Καταστροφικοί - Γενικά στοιχεία Στους καταστροφικούς μεταβλητούς ανήκουν οι **καινοφανείς** (novae) και **υπερκαινοφανείς** (supernovae) αστέρες, κύριο χαρακτηριστικό των οποίων είναι η απότομη (σε διάστημα ωρών ως ημερών) και μεγάλη

(πάνω από 4 και συχνά πάνω από 10 μεγέθη) αύξηση της λαμπρότητάς τους. Η κατάταξη αυτών των αστέρων βασίζεται σε παρατηρησιακά χριτήρια και δεν αντανακλά απαραίτητα τους φυσικούς μηχανισμούς που προκαλούν τις τεράστιες αυτές αναλόγουμψεις. Αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού είναι ότι αναλόγουμψεις που οφείλονται σε διαφορετικούς μηχανισμούς μπορεί να καταταγούν στην ίδια κατηγορία, ενώ αναλόγουμψεις που οφείλονται σε παρόμοιο μηχανισμό μπορεί να καταλήξουν σε διαφορετικές κατηγορίες.

Η απαίτηση που έχουμε από μια θεωρία για τη δημιουργία των καινοφανών και υπερκαινοφανών είναι να εξηγεί, τουλάχιστον, τη μορφή της καμπύλης φωτός (light curve) του αστέρα, δηλαδή να εξηγεί τον χρόνο ανόδου, τη μέγιστη λαμπρότητα, και το ρυθμό καθόδου, καθώς επίσης και το παρατηρούμενο φάσμα. Οι θεωρίες που έχουν προταθεί για την ερμηνεία των καινοφανών και υπερκαινοφανών μπορούν να καταταγούν σε δύο γενικές κατηγορίες:

1. σε αυτές που αναφέρονται στην εξέλιξη μεμονωμένων αστέρων μεγάλης μάζας και
2. σε αυτές που αναφέρονται στην εξέλιξη διπλών συστημάτων μέτριας μάζας.

Σήμερα πιστεύουμε ότι οι υπερκαινοφανείς τύπου II ακολουθούν το πρώτο σενάριο, ενώ οι υπερκαινοφανείς τύπου I και οι καινοφανείς το δεύτερο σενάριο.

Καταστροφικοί - Καινοφανείς

Σύμφωνα με το γενικά παραδεκτό σήμερα σενάριο, οι καινοφανείς αστέρες προέρχονται από την εξέλιξη διπλών συστημάτων. Σε ένα διπλό σύστημα με δύο αστέρες 1 και 2, που έχουν μάζες $M_1 > M_2$, ο αστέρας 1 εγκαταλείπει πρώτος την κύρια ακολουθία και αρχίζει να εξελίσσεται σε ερυθρό γίγαντα. Αν η απόσταση των δύο αστέρων ειναι αρκετά μικρή, τότε ο αστέρας 1 γεμίζει τον δικό του λοβό Roche, και μάζα από τα εξωτερικά του στρώματα μεταφέρεται στον αστέρα 2. Όταν τελειώσει αυτή η διαδικασία, τότε από τον αστέρα 1 δεν έχει απομείνει παρά μόνο ο πυρήνας του, ο οποίος τελικά καταλήγει (αν η μάζα του δεν υπερβαίνει το όριο Chandrasekhar) σε λευκό νάνο μάζας $M \sim 1 M_{\odot}$. Παράλληλα ο αστέρας 2 έχει γίνει ήδη πολύ μεγαλύτερος (λόγω της προσαύξησης μάζας από τον αστέρα 1) και αρχίζει να εξελίσσεται με τη σειρά του σε ερυθρό γίγαντα. Κατά την εξέλιξη αυτή γεμίζει με τη σειρά του τον δικό του λοβό Roche, και αρχίζει πλέον η αντίστροφη μεταφορά μάζας από τον αστέρα 2 στον αστέρα 1 (λευκό νάνο).

Όταν η μάζα της ύλης που συσσωρεύεται στη θερμή ατμόσφαιρα του λευκού νάνου ξεπεράσει κάποια κρίσιμη τιμή, τότε η πίεση και η θερμοκρασία στη βάση της ατμόσφαιράς του επιτρέπουν τη καύση του

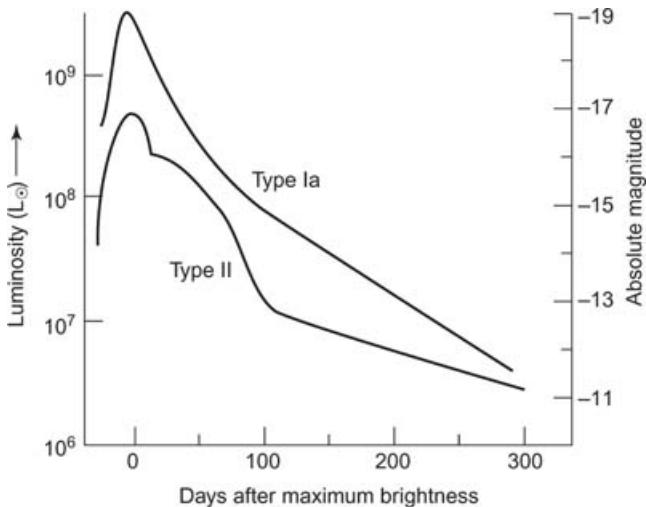


Figure 6.6: Καμπύλες φωτός υπερκαινοφανών αστέρων

υδρογόνου σε ήλιο, αντίδραση που συμβαίνει σχεδόν ακαριαία. Η ενέργεια που εκλύεται από την έναρξη της ψευδοπυρηνικής αυτής αντίδρασης απελευθερώνεται με τη μορφή μιας μεγάλης έκρηξης, που μπορεί να ανεβάσει τη λαμπρότητα του συστήματος κατά 10 μεγέθη, σε διάστημα μερικών ωρών.

Εφόσον η ροή ύλης από τον αστέρα 2 στον αστέρα 1 συνεχίζεται, μια τέτοια έκρηξη θα επαναλαμβάνεται κάθε φορά που η συσσωρευμένη μάζα ξεπερνά την κρίσιμη τιμή. Αν ο ρυθμός μεταφοράς είναι μεγάλος, τότε το πρότυπο αυτό προβλέπει ότι η κρίσιμη τιμή της μάζας είναι μικρή, επειδή η ύλη δεν προλαβαίνει να “απλωθεί” σε μεγάλη έκταση. Στην περίπτωση αυτή οι εκρήξεις αυτές επαναλαμβάνονται σε σύντομα χρονικά διαστήματα, αλλά είναι μικρές. Αντίθετα, αν ο ρυθμός μεταφοράς είναι μικρός, τότε οι εκρήξεις απέχουν χρονικά πολύ μεταξύ τους, αλλά είναι μεγάλες.

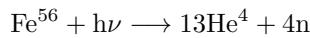
Σύμφωνα με το παραπάνω σενάριο, όλοι οι καινοφανείς πρέπει να είναι α) διπλοί και β) επαναληπτικοί. Τα μέχρι τώρα παρατηρησιακά δεδομένα υποστηρίζουν ικανοποιητικά την παραπάνω θεωρία σχηματισμού των υπερκαινοφανών. Ας σημειωθεί όμως ότι υπάρχουν και θεωρίες για την προέλευση των υπερκαινοφανών εκρήξεων που βασίζονται στην εξέλιξη απλών (μεμονωμένων) αστέρων, και δεν αποκλείεται μερικοί από τους καινοφανείς που παρατηρούμε να οφείλεται σε τέτοιες περιπτώσεις.

Καταστροφικοί - Υπερκαινοφανείς I Για τους υπερκαινοφανείς τύπου I δεν υπάρχει σήμερα μια θεωρία τόσο γενικά παραδεκτή, όσο για τους υπερκαινοφανείς τύπου II ή τους καινοφανείς. Το πιο δημοφιλές σενάριο είναι παρόμοιο με αυτό των καινοφανών. Υπάρχει δηλαδή ένα διπλό σύστημα, το ένα μέλος του οποίου είναι ένας λευκός νάνος άνθρακα-οξυγόνου. Μάζα μεταφέρεται από τον συνοδό αστέρα στον λευκό νάνο και, έτσι, η μάζα του τελευταίου συνεχώς αυξάνει χωρίς την παρουσία εκρηκτικών αναλάμψεων αυτή το φορά. Όταν η μάζα του λευκού νάνου πλησιάζει το όριο Chandrasekhar, προκαλείται ανάφλεξη του άνθρακα στο εσωτερικό του λευκού νάνου και η παραγόμενη ενέργεια θερμαίνει και εκτινάσσει τα ανώτερα στρώματα του αστέρα στο διάστημα. Η έκρηξη αυτή που ονομάζεται υπερκαινοφανής τύπου I είναι τόσο σφοδρή ώστε διαλύει το σύστημα και δεν αφήνει πίσω κάποιο συμπαγές αστρικό αντικείμενο, όπως π.χ. έναν αστέρα νετρονίων.

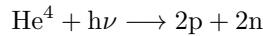
Το γεγονός ότι η έκρηξη συμβαίνει πάντα κοντά στην ίδια τιμή μάζας (όριο Chandrasekhar) σημαίνει ότι η ενέργεια από μία τέτοια έκρηξη (συγκεκριμένα από υπερκαινοφανείς τύπου Ia) είναι γνωστή (της τάξης των 10^{51} erg). Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις εκρήξεις ως “σταθερά κεριά” (standard candles) των οποίων γνωρίζουμε την λαμπρότητα, και άρα μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε ως δείκτες για την μέτρηση αποστάσεων.

Καταστροφικοί - Υπερκαινοφανείς II Σύμφωνα με την επιχρατούσα σήμερα άποψη, η κατάληξη ενός αστέρα μεγάλης μάζας ($M > 5 M_{\odot}$) είναι ένας υπερκαινοφανής τύπου II. Για αστέρες με μάζα στο διάστημα $5 < M/M_{\odot} < 10$ ο μηχανισμός του φαινομένου οφείλεται στην **έκρηξη άνθρωπα** (carbon detonation) η οποία είναι παρόμοια με την λάμψη ηλίου που έχουμε περιγράψει αλλά πολύ πιο βίαιη. Για αστέρες με μάζα $M > 10 M_{\odot}$ ο μηχανισμός του φαινομένου οφείλεται στην καταστροφική κατάρρευση ενός αδρανούς πυρήνα σιδήρου.

Ένας αστέρας που έχει εξαντλήσει όλα τα πυρηνικά του καύσιμα (έχει δηλαδή δημιουργήσει έναν πυρήνα από σίδηρο), αρχίζει να καταρρέει, αφού δεν υπάρχει εσωτερική πηγή πίεσης που να αντισταθμίζει το βάρος των υπερκείμενων στρωμάτων. Επειδή η μάζα του πυρήνα είναι μεγαλύτερη από το όριο Chandrasekhar, η κατάρρευση δεν μπορεί να σταματήσει με τη δημιουργία ενός λευκού νάνου, και έτσι η κατάρρευση συνεχίζεται προς κατάστασεις που χαρακτηρίζονται από ολοένα και μεγαλύτερη πυκνότητα. Η αδιαβατική συμπίεση του πυρήνα, που οφείλεται στη συνεχιζόμενη κατάρρευση, προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας του, η οποία ευνοεί τις ενδόθερμες πυρηνικές αντιδράσεις. Έτσι ο σίδηρος φωτοδιασπάται από τα φωτόνια υψηλών ενέργειών σύμφωνα με την αντίδραση



ενώ στη συνέχεια διασπάται και το παραγόμενο ήλιο



Οι αντιδράσεις αυτές απορροφούν ενέργεια, ανακόπτουν την αύξηση της θερμοκρασίας και της πίεσης του πυρήνα και επιταχύνουν την κατάρρευση. Στα τελευταία στάδια η κατάρρευση επιταχύνεται ακόμη περισσότερο από τις πυρηνικές αντιδράσεις σύλληψης ηλεκτρονίου



Τα νετρίνα που παράγονται από τις παραπάνω αντιδράσεις διαφεύγουν έξω από τον πυρήνα, λόγω της μικρής ενεργού διατομής της αλληλεπίδρασης των νετρίνων με την ύλη (αδιαφάνεια ύλης στα νετρίνα $\kappa \approx 0$). Με τη διαφυγή τους μεταφέρουν μεγάλα ποσά ενέργειας εκτός του πυρήνα και έτσι μετριάζουν ακόμα περισσότερο την πίεση και τη θερμοκρασία του. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η δύναμη της βαρύτητας σε κάθε στρώμα του αστέρα είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δύναμη της πίεσης και η κατάρρευση των διάφορων στρωμάτων του αστέρα μοιάζει με ελεύθερη πτώση, η οποία για τον πυρήνα διαρκεί μερικά δευτερόλεπτα. Φυσικά η κατάρρευση αυτή, κατά την οποία η δυναμική βαρυτική ενέργεια της ύλης του αστέρα μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια, δεν μπορεί να συνεχισθεί επ' άπειρο. Όταν η πυκνότητα του αστρικού πυρήνα φτάσει τα όρια της πυρηνικής πυκνότητας ($\sim 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$), η αδιαφάνεια των νετρίνων αυξάνει απότομα (η μέση ελεύθερη διαδρομή τους μειώνεται), έτσι ώστε να μην μπορούν πλέον να διαφύγουν ελεύθερα, μεταφέροντας ενέργεια έξω από τον πυρήνα. Επειδή ο πυρήνας δεν μπορεί να ψυχθεί μέσω της διαφυγής νετρίνων, η θερμοκρασία του αρχίζει να αυξάνει αδιαβατικά, προκαλώντας την αλματώδη αύξηση της πίεσης του αερίου στον πυρήνα, αλλά κυρίως την σχεδόν εκρηκτική αύξηση της πίεσης της ακτινοβολίας. Στο σημείο αυτό υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

1. Η αρχική μάζα του αστέρα να ήταν εξαιρετικά μεγάλη. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη της βαρύτητας παραμένει πάντα μεγαλύτερη της δύναμης της πίεσης, με αποτέλεσμα ο αστέρας να υποστεί ολοκληρωτική βαρυτική κατάρρευση και να καταλήξει σε μια μελανή οπή.
2. Η αρχική μάζα του αστέρα δεν ήταν τόσο μεγάλη ώστε να μιλάμε για ολοκληρωτική νίκη της βαρύτητας. Στην περίπτωση αυτή η αύξηση της πίεσης δεν είναι δυνατόν να συνεχίζεται επ' άπειρον: φτάνει κάποια στιγμή, που η δύναμη της πίεσης προς τα έξω υπερισχύει κατά πολύ της δύναμης της βαρύτητας οπότε τα εξωτερικά στρώματα του πυρήνα “αναπηδούν”, όπως μια ελαστική σφαίρα που προσκρούει σε μια σκληρή επιφάνεια, και αρχίζουν να διαστέλλονται με υπερηχητική ταχύτητα. Κατά την διαστολή τους δημιουργούν ένα χρονιστικό κύμα το οποίο θερμαίνει και παρασύρει προς τα έξω τα υπόλοιπα

στρώματα του αστέρα, που συνέχιζαν να καταρρέουν, και τα εκτινάσσει στο διάστημα. Ταυτόχρονα, τα άφθονα νετρόνια που είχαν δημιουργηθεί από τη φωτοδιάσπαση του σιδήρου και του ηλίου απορροφούνται από πυρήνες μεσαίου ατομικού αριθμού και σχηματίζουν όλα τα χημικά στοιχεία βαρύτερα του σιδήρου, τα οποία δεν είναι δυνατόν να σχηματιστούν με εξώθερμες θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Ένας υπερκαινοφανής τύπου II έχει μόλις δημιουργηθεί. Το μόνο που είναι δυνατόν αν απομείνει από την τεράστια αυτή έκρηξη είναι το κεντρικό τμήμα του αστρικού πυρήνα, που πιστεύουμε ότι σταύρωσης ισχύει στην κατάσταση ενός αστέρα νετρονίων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A

Μαθηματικές Μέθοδοι

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζονται μερικά απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη βασικών νόμων.

A.1 Διωνυμικοί και Πολυωνυμικοί συντελεστές

A.1.1

Διωνυμικοί συντελεστές

Στην βασική άλγεβρα, το διωνυμικό θεώρημα περιγράφει την ανάπτυξη ενός πολυωνύμου της μορφής $(x+y)^n$, σε άθροισμα όρων της μορφής $ax^b y^c$, όπου οι εκθέτες b, c είναι μη-αρνητικοί αριθμοί και $b+c = n$. Ο συντελεστής a ονομάζεται διωνυμικός συντελεστής (binomial coefficient) και εξαρτάται από το n και το b (ή το c , καθώς όπως θα δούμε δεν αλλάζει το αποτέλεσμα).

Ο διωνυμικός συντελεστής $a = \binom{n}{b} = \binom{n}{c}$ προκύπτει από το πεδίο της Συνδυαστικής και εκφράζει τον αριθμό των διαφορετικών συνδυασμών b στοιχείων που μπορεί να προκύψουν από ένα σύνολο n στοιχείων. Ο διωνυμικός συντελεστής διαβάζεται ως " n ανά b " επειδή υπάρχουν $\binom{n}{b}$ δυνατοί τρόποι για να επιλεγούν b στοιχεία από ένα σύνολο n στοιχείων. Με τη χρήση παραγοντικών, ο διωνυμικός συντελεστής γράφεται

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{A.1})$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \\ &+ \binom{n}{n-2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{n} x^n y^0 \end{aligned}$$

ή, σε πιο συμπαγή μορφή

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (\text{A.2})$$

Παράδειγμα

Έστω ένα σύνολο τεσσάρων αριθμών $\{1, 2, 3, 4\}$. Θέλουμε να βρούμε πόσους συνδυασμούς των δύο μπορούμε να επιλέξουμε. Αυτός ο αριθμός των 2-υποσυνόλων θα είναι

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \quad (\text{A.3})$$

Άρα δωθέντος τεσσάρων αριθμών, υπάρχουν έξι δυνατοί συνδυασμοί υποσυνόλων των δύο, τα οποία είναι $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

A.1.2

Πολυωνυμικοί συντελεστές

Έχουμε δεί ότι αν θέλουμε να επιλέξουμε k αντικείμενα από n , χωρίς επανάθεση, το πλήθος των τρόπων να γίνει αυτό είναι

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Τι γίνεται αν θέλουμε να επιλέξουμε, πάλι χωρίς επανάθεση, μια ομάδα στοιχείων του $\{1, \dots, n\}$ μεγέθους k_1 , μια ομάδα μεγέθους k_2 , κλπ, και τέλος μια ομάδα μεγέθους k_r , όπου για $j = 1, \dots, r$ έχουμε $0 \leq k_j \leq n$ και επιτέλον ισχύει $k_1 + \dots + k_r = n$; Με πόσους τρόπους δηλ. μπορούμε να διαμερίσουμε το $\{1, \dots, n\}$ σε ένα σύνολο μεγέθους k_1 , σε ένα σύνολο μεγέθους k_2 και τέλος σε ένα σύνολο μεγέθους k_r ;

Θεώρημα:

Το πλήθος τρόπων να διαμερίσουμε ένα σύνολο με n στοιχεία σε r σύνολα με μεγέθη k_1, \dots, k_r , με $k_1 + \dots + k_r = n$, δταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων μέσα στα σύνολα αυτά, είναι

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!} \quad (\text{A.4})$$

Απόδειξη:

Το πρώτο σύνολο μπορεί να επιλεγεί με

$$\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$$

τρόπους. Μετά από την επιλογή του πρώτου συνόλου απομένουν $n - k_1$ στοιχεία αχρησιμοποίητα, άρα το δεύτερο σύνολο μπορεί να επιλεγεί με

$$\binom{n - k_1}{k_2} = \frac{(n - k_1)!}{n_2!(n - k_1 - k_2)!}$$

τρόπους. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ότι η επιλογή του προτελευταίου συνόλου (με k_{r-1} στοιχεία) μπορεί να γίνει με

$$\begin{aligned} \binom{n - k_1 - \dots - k_{r-2}}{k_{r-1}} &= \frac{(n - k_1 - \dots - k_{r-2})!}{k_{r-1}!(n - k_1 - \dots - k_{r-2} - k_{r-1})!} = \\ &= \frac{(n - k_1 - \dots - k_{r-2})!}{k_{r-1}!k_r!} \end{aligned}$$

τρόπους. Επίσης, αφού έχουν επιλεγεί τα $r - 1$ πρώτα σύνολα δεν υπάρχει πλέον καμιά επιλογή να γίνει αφού τα υπόλοιπα k_r στοιχεία που απομένουν ακόμη αχρησιμοποίητα αναγκαστικά πάνε στο τελευταίο σύνολο που πρέπει να επιλέξουμε. Έτσι πολλαπλασιάζοντας τις δυνατότητες επιλογών μας για τα πρώτα $r - 1$ σύνολα, και κάνοντας τις απλοποιήσεις πάρνουμε τον τύπο (A.4).

Το σύμβολο $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ ονομάζεται πολυωνυμικός συντελεστής (χατ' αναλογία με τα $\binom{n}{k}$ που ονομάζονται διωνυμικοί συντελεστές). Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Παρατήρηση 1: Ο πολυωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ δεν αλλάζει αν τα k_1, \dots, k_r αντικατασταθούν από μια μετάθεσή τους (αν αλλάζει δηλ. απλώς η σειρά τους).

Παρατήρηση 2: Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι, αν και δε μας ενδιαφέρει η εσωτερική σειρά των συνόλων των στοιχείων που επιλέγουμε, η σειρά των ίδιων των συνόλων είναι προκαθορισμένη. Αυτό είναι ίσως φανερό όταν όλα τα k_1, k_2, \dots, k_m είναι μεταξύ τους διαφορετικά αλλά δημιουργεί κάποια σύγχυση όταν μερικά από αυτά είναι μεταξύ τους ίσα. Μια ακραία περίπτωση αυτού είναι όταν όλα είναι ίδια. Για παράδειγμα, ο πολυωνυμικός συντελεστής

$$\binom{9}{3, 3, 3}$$

μετράει με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε τους αριθμούς 1, 2, ..., 9 σε τρείς ομάδες. Αν δύο τρόποι διαφέρουν μόνο ως προς τον εσωτερικό τρόπο γραφής της κάθε ομάδας τότε δε θεωρούνται διαφορετικοί. Έτσι οι τρόποι

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\} \text{ και } \{3, 2, 1\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}$$

θεωρούνται ίδιοι και μετράνε ως ένα. Αν όμως δύο τρόποι διαφέρουν ως προς τον τρόπο γραφής των ομάδων τότε μετράνε ως διαφορετικοί. Οι τρόποι, π.χ.,

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\} \text{ και } \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{7, 8, 9\}$$

μετράνε ως διαφορετικοί τρόποι.

A.2 Πολλαπλασιαστές Lagrange

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange χρησιμοποιείται για την εύρεση ακρότατων μίας συνάρτησης $f(x, y, z)$ των οποίων οι μεταβλητές υπόκεινται σε περιορισμούς της μορφής $g_i(x, y, z) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. Τα τοπικά ακρότατα προκύπτουν επιλύοντας το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla g_i \\ g_i(x, y, z) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, r \end{cases}$$

ως προς $x, y, z, \lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Παραδείγματα

1. Βρείτε τα μέγιστα και ελάχιστα της $f(x, y) = x^2 + y^2$ που βρίσκονται στην καμπύλη $g(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.

Ισχύει ότι:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y \implies \nabla f = (f_x, f_y) = (2x, 2y)$$

$$\nabla g = (g_x, g_y) = (2x - 2, 2y - 4)$$

Άρα, σύμφωνα με τη μέθοδο των πολλαπλασιστών Lagrange πρέπει να λύσω το σύστημα:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda(x - 1) \\ 2y = 2\lambda(y - 2) \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ y = \frac{2\lambda}{\lambda-1} \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις παραμετρικές τιμές x, y στην συνάρτηση $g(x, y) = 0$ καταλήγουμε ότι:

$$\frac{-5\lambda^2 + 10\lambda}{(\lambda - 1)^2} = 0, \quad \lambda \neq 1 \Rightarrow$$

$$-5\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Άρα, για $\lambda = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 0)$, η συνάρτηση f παρουσιάζει πάνω στην $g(x, y) = 0$ ελάχιστο $f(0, 0) = 0$. Για $\lambda = 2 \rightarrow (x, y) = (2, 4)$ και η συνάρτηση f παρουσιάζει πάνω στην $g(x, y) = 0$ ελάχιστο $f(2, 4) = 20$.

2. Βρείτε το μέγιστο της $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ με τους περιορισμούς $2x - y = 0$ και $y + z = 0$.

Έστω $g_1(x, y) = 2x - y = 0$, $g_2(y, z) = y + z = 0$ οι δύο συναρτήσεις που δίνουν τους περιορισμούς. Εχουμε λοιπόν:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2, -2z)$$

$$\nabla g_1 = (g_{1x}, g_{1y}) = (2, -1) \implies \lambda_1 \nabla g_1 = (2\lambda_1, -\lambda_1)$$

$$\nabla g_2 = (g_{2y}, g_{2z}) = (1, 1) \implies \lambda_2 \nabla g_2 = (\lambda_2, \lambda_2)$$

Ισχύει ότι:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \nabla g_i = (2\lambda_1, -\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (2x, 2, -2z)$$

Ετσι, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda_1 \\ 2 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ -2z = \lambda_2 \\ 2x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2/3 \\ \lambda_2 = 8/3 \\ x = 2/3 \\ y = 4/3 \\ z = -4/3 \end{cases}$$

Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της f υπό τους δοθέντες περιορισμούς είναι $f(2/3, 4/3, -4/3) = 4/3$

3. Σχεδιάστε ένα μεταλλικό κυλινδρικό δοχείο (με καπάκι) 1 λίτρου, χρησιμοποιώντας την ελάχιστη δυνατή ποσότητα μετάλλου.

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τη συνάρτηση

$$V(\rho, v) = \pi \rho^2 v$$

και η συνολική του επιφάνεια (παράπλευρη επιφάνεια και βάσεις) δίνεται από τη συνάρτηση

$$S(\rho, v) = 2\pi\rho v + 2\pi\rho^2$$

όπου ρ και v είναι η ακτίνα της βάσης και το ύψος του κυλίνδρου, αντίστοιχα. Άρα, καλούμαι να βρω το ελάχιστο της $S(\rho, v)$ υπό τον περιορισμό $g(\rho, v) = V(\rho, v) - 1 = \pi\rho^2v - 1 = 0$.

Ετσι έχουμε:

$$\nabla S = (S_\rho, S_v) = (2\pi v + 4\pi\rho, 2\pi\rho)$$

$$\nabla V = (V_\rho, V_v) = (2\pi\rho v, \pi\rho^2) \longrightarrow \lambda \nabla V = (2\lambda\pi\rho v, \lambda\pi\rho^2)$$

και το σύστημα που πρέπει να λύσω είναι:

$$\begin{cases} \nabla S = \lambda \nabla V \\ \pi\rho^2v - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v + 2\rho = \lambda\rho v \\ \lambda\rho = 2 \\ \pi\rho^2v - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \\ v = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} \\ \lambda = 2\sqrt[3]{2\pi} \end{cases}$$

δηλαδή το ζητούμενο κυλινδρικό δοχείο πρέπει να έχει ακτίνα βάσης $\rho = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ και ύψος $v = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Συστήματα Συντεταγμένων

B.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο, ή στον τριδιάστατο χώρο¹. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες (ή επίπεδες συντεταγμένες) ενός σημείου αποτελούνται από ένα ζεύγος αριθμών (στις δύο διαστάσεις) ή μια τριπλέτα αριθμών (στις τρεις διαστάσεις) που καθορίζουν την διανυσματική απόσταση από τον άξονα των συντεταγμένων.

B.1.1

Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο προσδιορίζονται με όρους των συντεταγμένων στους άξονες x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα B.1). Η αρχή των άξονων ορίζεται ως το σημείο τομής των άξονων x και y . Οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου του επιπέδου γράφονται ως (x,y) . Ο πρώτος αριθμός (x) ονομάζεται συνήθως ως x -συνιστώσα, ή x -συντεταγμένη, καθώς ορίζει την απόσταση από την αρχή των άξονων στην διεύθυνση του άξονα x . Η x -συνιστώσα καθορίζει, με άλλα λόγια, την απόσταση προς τα δεξιά (αν το x είναι θετικό) ή προς τα αριστερά (αν το x είναι αρνητικό) του άξονα x . Παρόμοια, ο δεύτερος αριθμός (y) ονομάζεται συνήθως y -συνιστώσα, ή y -συντεταγμένη, και ορίζει την απόσταση από την αρχή των άξονων στην διεύθυνση του άξονα y . Η y -συνιστώσα καθορίζει, με άλλα λόγια, την απόσταση προς τα πάνω (αν το y είναι θετικό) ή προς τα κάτω (αν το y είναι αρνητικό) του άξονα x . Στο σχήμα που ακολουθεί, το σημείο έχει συντεταγμένες $(-3,2)$, καθώς βρίσκεται τρεις μονάδες προς τα αριστερά και δύο μονάδες πάνω από την αρχή των άξονων.

B.1.2

Καρτεσιανές συντεταγμένες στον χώρο

Στον τριδιάστατο χώρο, το σύστημα των καρτεσιανών συντεταγμένων βασίζεται σε τρεις –κάθετους μεταξύ τους– άξονες: τον άξονα x , τον άξονα y και τον άξονα z , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι τρεις άξονες τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο αποτελεί την αρχή των άξονων. Μπορεί κανείς να φανταστεί την

¹Όλο το παράρτημα είναι μετάφραση της σελίδας https://mathinsight.org/spherical_coordinates, η οποία περέχει και διάφορα applets για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

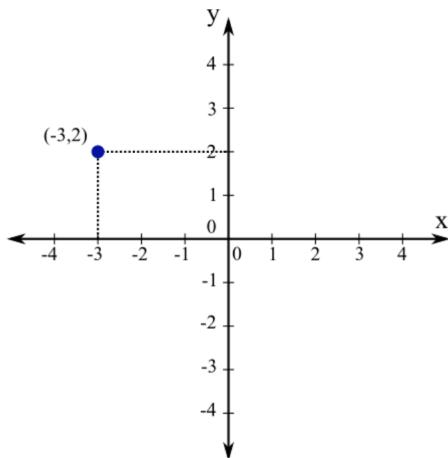


Figure B.1: Καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) του μπλε σημείου ορίζουν την θέση του σε σχέση με την αρχή των αξόνων, η οποία είναι η τομή των αξόνων x και y .

αρχή των αξόνων στον τριδιάστατο χώρο ως το σημείο που τέμνονται οι τοίχοι και το πάτωμα σε μια γωνία ενός σπιτιού. Ο αξόνας x είναι η οριζόντια γραμμή κατά τη διεύθυνση της οποίας ο τοίχος στα αριστερά και το πάτωμα συναντιούνται. Ο αξόνας y είναι η οριζόντια γραμμή κατά τη διεύθυνση της οποίας ο τοίχος στα δεξιά και το πάτωμα συναντιούνται. Τέλος, ο αξόνας z είναι η κάθετη γραμμή κατά τη διεύθυνση της οποίας οι δύο τοίχοι ενώνονται.

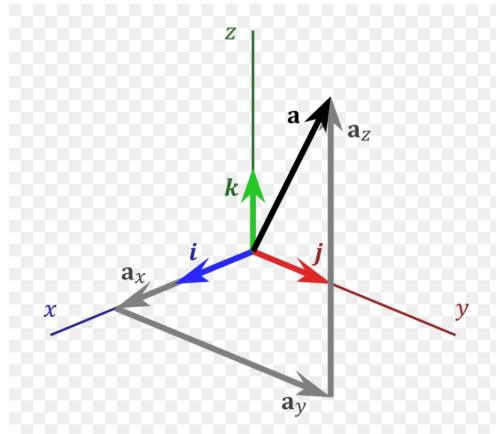


Figure B.2: Καρτεσιανές συντεταγμένες στον χώρο.

Βάσει αυτών των ορισμών για τους θετικούς x , y και z αξόνες, το σύστημα συντεταγμένων που προκύπτει ονομάζεται δεξιόστροφο και είναι σύμφωνο με τον κανόνα του δεξιού χεριού (ο αντίχειρας του δεξιού χεριού δείχνει προς την κατεύθυνση του θετικού αξόνα z). Αλλάζοντας τις θέσεις των θετικών αξόνων x και y , κατασκευάζουμε το αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Το δεξιόστροφο και αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων αναπαριστούν δύο ισοδύναμα μαθηματικά συστήματα. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται όταν χρησιμοποιούμε το ένα σύστημα έναντι του άλλου καθώς η διαφορετική θεώρηση θα αλλάξει το πρόσημο σε κάποιες μαθηματικές σχέσεις. Γενικά, πάντως, το πιο σύνηθες είναι το δεξιόστροφο σύστημα.

Επιπρόσθετα των τριών αξόνων συντεταγμένων, συχνά αναφερόμαστε και σε τρία επίπεδα συντεταγμένων. Το επίπεδο xy είναι το οριζόντιο επίπεδο που ορίζεται από τους αξόνες x και y . Είναι πανομοιότυπο με το διδιάστατο επίπεδο και αντιστοιχεί στο πάτωμα αν αναλογιστούμε το παράδειγμα του δωματίου που δώσαμε προηγουμένως. Παρόμοια, το επίπεδο xz είναι το κάθετο επίπεδο που ορίζεται από τους αξόνες x

και z , και αντιστοιχεί στον αριστερό τοίχο του παραδείγματος του δωματίου. Τέλος, το επίπεδο για είναι το κάθετο επίπεδο που ορίζεται από τους άξονες y και z , και αντιστοιχεί στον δεξιό τοίχο του παραδείγματος του δωματίου.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνο για να ορίζουμε την θέση σημείων στο επίπεδο (ή στο χώρο), αλλά για να ορίσουμε και τις συνιστώσες διανυσμάτων. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες διδιάστατων ή τριδιάστατων διανυσμάτων έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με τις συντεταγμένες σημείων στο επίπεδο ή στον τριδιάστατο χώρο.

Από το σχήμα B.2 προκύπτει ότι το διάνυσμα θέσεως \mathbf{a} , θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Δεν υπάρχει λόγος να σταματήσει κανείς στις τρεις διαστάσεις. Μπορούμε να ορίσουμε διανύσματα σε τέσσερις, πέντε, ή και ακόμα υψηλότερες διαστάσεις απλά με το να ορίσουμε τέσσερα, πέντε ή περισσότερες καρτεσιανές συντεταγμένες. Δεν μπορούμε να οπτικοποιήσουμε, φυσικά, αυτές τις ανώτερες διαστάσεις, αλλά μπορούμε εύκολα να γράψουμε τη σειρά των αριθμών που αποτελούν τις συντεταγμένες.

B.2 Πολικές συντεταγμένες

Στις δύο διαστάσεις, οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) καθορίζουν τη θέση ενός σημείου P πάνω στο επίπεδο. Ένα διαφορετικό διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων είναι το σύστημα των πολικών συντεταγμένων. Σε αυτό το σύστημα, αντί της χρήσης των αποστάσεων κατά μήκος δύο αξόνων για τον προσδιορισμό της θέσης του σημείου P στο επίπεδο, χρησιμοποιείται η απόσταση r από την αρχή των αξόνων και η γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο P με την αρχή των αξόνων και τον θετικό άξονα x . Οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) ενός σημείου P φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα B.3).

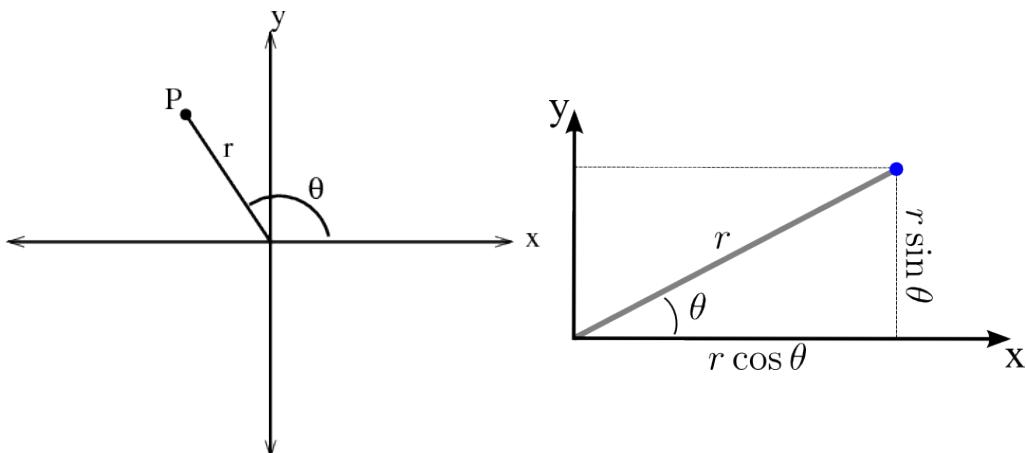


Figure B.3: Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο.

Καθώς η παράμετρος r παίρνει τιμές από το μηδέν μέχρι το άπειρο, και η γωνία θ παίρνει τιμές από 0 έως 2π , το σημείο P που ορίζεται από τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) καλύπτει κάθε πιθανό σημείο στο επίπεδο. Προσθέτοντας 2π στη γωνία θ επιστρέφουμε ξανά στο ίδιο σημείο από το οποίο ξεκινήσαμε, οπότε αν αφήσουμε τη γωνία θ να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 2π , κάθε σημείο θα είχε πολλαπλές πολικές συντεταγμένες. Άρα, περιορίζουμε το εύρος τιμών που μπορεί να πάρει η γωνία θ στο διάστημα

$0 \leq \theta \leq 2\pi$. Όμως, παρόλα αυτά, ακόμα και με αυτόν τον περιορισμό, υπάρχει μια ιδιαιτερότητα στις πολικές συντεταγμένες: όταν $r = 0$, το σημείο P βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και είναι ανεξάρτητο της γωνίας θ .

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) φτιάχνοντας το τρίγωνο που φαίνεται στα δεξιά του Σχήματος B.3. Η υποτείνουσα είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο ενδιαφέροντος, και το μήκος του είναι ίσο με r. Η προβολή αυτού του ευθύγραμμου τμήματος πάνω στον άξονα x είναι εκείνη η πλευρά του τριγώνου που είναι προσκείμενη στην γωνία θ , έτσι ώστε $x = r \cos \theta$. Η y-συνιστώσα καθορίζεται από την κάθετη πλευρά, ώστε $y = r \sin \theta$. Οι σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων δίνονται από:

$$x = r \cos \theta \quad (B.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (B.2)$$

Για τους αντίστροφους μετασχηματισμούς προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις ότι:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (B.3)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad (B.4)$$

Παρατηρούμε ότι με βάση τη σχέση A.4 για το σημείο $(x, y) = (0, 0)$, η γωνία θ δεν ορίζεται. Σε αυτή την περίπτωση όμως παίρνουμε ότι $\theta = 0$.

B.3 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι απλά μία προέκταση των διδιάστατων πολικών συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις. Πολύ απλά, συνδυάζουν τις πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο xy με την συνηθισμένη z-συνιστώσα που συναντάμε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Για να σχηματίσουμε το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ενός σημείου P, απλά προβάλουμε το εν λόγω σημείο σε ένα καινούργιο σημείο Q το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο xy (Σχήμα B.4). Στη συνέχεια, παίρνουμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) του σημείου Q, δηλαδή, r είναι η απόσταση του σημείου Q από την αρχή των αξόνων και θ η γωνία μεταξύ του θετικού άξονα x και του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο Q με την αρχή των αξόνων. Η τρίτη κυλινδρική συντεταγμένη είναι ίδια με την συντεταγμένη z. Είναι, δηλαδή, η απόσταση του σημείου P από το επίπεδο xy (αρνητική τιμή σημαίνει ότι το σημείο P είναι κάτω από το επίπεδο xy). Το σχήμα που ακολουθεί αναπαριστά τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) του σημειού P.

Οι μετασχηματισμοί δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = r \cos \theta \quad (B.5)$$

$$y = r \sin \theta \quad (B.6)$$

$$z = z \quad (B.7)$$

ενώ για τους αντίστροφους μετασχηματισμούς, ισχύουν οι σχέσεις A.3 και A.4.

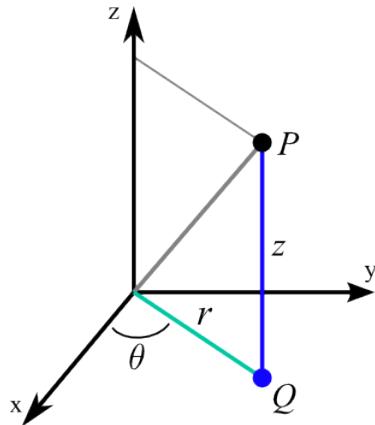


Figure B.4: Κυλινδρικές συντεταγμένες στον χώρο.

B.4 Σφαιρικές συντεταγμένες

Οι σφαιρικές συντεταγμένες μπορεί να είναι αρχικά λίγο απαιτητικές ως προς την κατανόησή τους. Οι σφαιρικές συντεταγμένες καθορίζουν την θέση ενός σημειού στον τριδιάστατο χώρο, βάσει της απόστασης r από την αρχή των αξόνων και δύο γωνιών θ και ϕ . Αν κάποιος είναι εξοικιωμένος με τις πολικές συντεταγμένες, τότε η γωνία θ δεν είναι τόσο δύσκολο να την κατανοήσει καθώς αποτελεί ουσιαστικά την ίδια γωνία θ που συναντάμε και στις πολικές συντεταγμένες. Γι' αυτό το λόγο αυτή η γωνία ονομάζεται και πολική γωνία. Μερικοί άνθρωποι όμως αντιμετωπίζουν κάποιες δυσκολίες όσον αφορά την κατανόηση της ύπαρξης της γωνίας ϕ . Στη συνέχεια θα εξάγουμε τις σχέσεις μεταξύ Καρτεσιανών και σφαιρικών συντεταγμένων.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες ορίζονται βάσει του σχήματος B.5, το οποίο δείχνει τις σφαιρικές συντεταγμένες στο σημείο P.

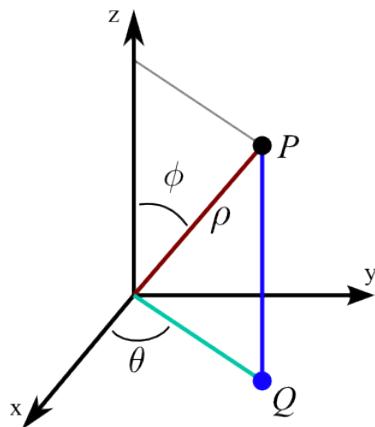


Figure B.5: Σφαιρικές συντεταγμένες στον χώρο.

Η συντεταγμένη ρ είναι η απόσταση του σημείου P από την αρχή των αξόνων. Αν το σημείο Q είναι η προβολή του σημείου P πάνω στο επίπεδο xy, τότε θ είναι η γωνία μεταξύ του θετικού άξονα-x και του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο Q με την αρχή των αξόνων. Τέλος, ϕ είναι η γωνία μεταξύ του θετικού άξονα-z και του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο P με την αρχή των αξόνων και ονομάζεται αζιμούθια γωνία.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) ενός σημείου P με τις σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ) χρησιμοποιώντας βασική τριγωνομετρία. Το ροζ σκιασμένο τρίγωνο του Σχήματος B.6 έχει κορυφές την αρχή των αξόνων, το σημείο P και την προβολή αυτού του σημείου πάνω στον άξονα- z . Καθώς το μήκος της υποτείνουσας είναι ρ και ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει η υποτείνουσα με τον άξονα- z , η z -συνιστώσα του σημείου P (δηλαδή το ύψος του τριγώνου) είναι $z = \rho \cos \phi$. Το μήκος της άλλης πλευράς του τριγώνου είναι η απόσταση από το P μέχρι τον άξονα- z , η οποία είναι $r = \rho \sin \phi$. Η απόσταση του σημείου Q από την αρχή των αξόνων δίνεται από την ίδια σχέση.

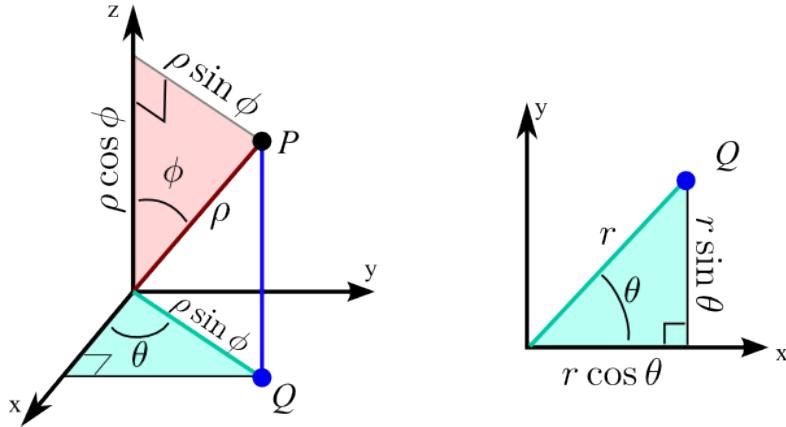


Figure B.6: Σχέση Καρτεσιανών και σφαιρικών συντεταγμένων.

Το κυανό σκιασμένο τρίγωνο που φαίνεται και στο αρχικό τριδιάστατο σύστημα συντεταγμένων στα αριστερά, και στο επίπεδο xy στα δεξιά, είναι το τρίγωνο εκείνο του οποίου οι κορυφές είναι η αρχή των αξόνων, το σημείο Q , καθώς και η προβολή του πάνω στον άξονα- x . Στο δεξιό σχήμα, η απόσταση του σημείου Q από την αρχή των αξόνων αποτελεί την υποτείνουσα του τριγώνου και συμβολίζεται με r . Με θ συμβολίζεται η γωνία που σχηματίζει η υποτείνουσα με τον άξονα- x . Οι x - και y -συνιστώσες του σημείου Q (που είναι οι ίδιες με τις x - και y -συνιστώσες του σημείου P) δίνονται από τις σχέσεις $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$. Επειδή $r = \rho \sin \phi$, αυτές οι συνιστώσες μπορούν να γραφτούν και ως $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ και $y = \rho \sin \phi \sin \theta$. Συνοπτικά, οι σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ καρτεσιανού και σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων είναι:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad (\text{B.8})$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad (\text{B.9})$$

$$z = \rho \cos \phi \quad (\text{B.10})$$

όπου $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$.

Δυστυχώς, η σύμβαση για τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων δεν είναι η ίδια σε όλα τα επιστημονικά πεδία. Για παράδειγμα, στη Φυσική, οι ρόλοι των γωνιών θ και ϕ είναι συνήθως ανεστραμμένοι, έτσι ώστε η γωνία θ να παριστάνει την αξιούσια γωνία, και η γωνία ϕ την πολική. Προκειμένου να γίνει κατανοητή η χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων, πρέπει πρώτα να ελέγξουμε ποια συμβατική ορολογία χρησιμοποιείται. Σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να εννοείται ότι οποιαδήποτε χρήση σφαιρικών συντεταγμένων θα ακολουθεί την ίδια σύμβαση με αυτή που παρουσιάστηκε σε αυτό το Παράρτημα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ C

Κινητική θεωρία αερίων

C.1 Γενικές έννοιες

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δώσουμε συνοπτικά κάποιες βασικές έννοιες Θερμοδυναμικής και Στατιστικής Φυσικής που θα χρησιμοποιηθούν τόσο για την κλασική όσο και για την κβαντική περιγραφή των αερίων.

1ος θερμοδυναμικός νόμος: Το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: "Η θερμότητα είναι μια μορφή ενέργειας, και η ενέργεια διατηρείται". Αν σε ένα αέριο προσθέσουμε θερμότητα, dQ , τότε στη γενικότερη περίπτωση, θα αυξηθεί ταυτόχρονα και η εσωτερική του ενέργεια κατά dU και θα μεταβληθεί ο όγκος του κατά dV καταναλώνοντας ενέργεια $dW = PdV$. Με άλλα λόγια, το ποσό θερμότητας που απορροφά ή αποβάλλεται από ένα θερμοδυναμικό σύστημα είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας και του έργου που δαπανά ή παράγει το σύστημα. Το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα με βάση τα παραπάνω μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση¹

$$dQ = dU + dW = dU + PdV \quad (\text{C.1})$$

2ος θερμοδυναμικός νόμος: Για μία αντιστρεπτή μεταβολή, η αλλαγή στην εντροπία ισούται με την αλλαγή στο ποσό θερμότητας δια την θερμοκρασία

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{C.2})$$

Εσωτερική ενέργεια: Ονομάζεται το άθροισμα της ενέργειας όλων των ατόμων, μορίων και ιόντων ενός συστήματος. Η εσωτερική ενέργεια περιλαμβάνει πάντα τους παρακάτω όρους:

- Κινητική ενέργεια λόγω της άταχτης κίνησης των σωματιδίων (γνωστή και ως θερμική κίνηση) — translational energy
- Ενέργεια λόγω της περιστροφικής κίνησης των μορίων — rotational energy
- Ενέργεια δόνησης των ατόμων στο μόριο — vibrational energy

¹Προσέξτε ότι τα dQ και dW είναι μη-τέλεια διαφορικά (inexact differentials). Αυτό σημαίνει ότι οι ποσότητες Q, W δεν είναι καταστατικές συναρτήσεις αλλά εξαρτώνται από την διαδρομή (path functions) και άρα και τα διαφορικά τους εξαρτώνται και αυτά από τη διαδρομή.

- Δυναμική ενέργεια λόγω των ελκτικών ή απωσικών δυνάμεων ανάμεσα στα άτομα, μόρια ή ιόντα του συστήματος — potential energy

Ιδανικό αέριο: Ένα υποθετικό αέριο που αποτελείται από μη-διαχωρίσιμα σημειακά σωματίδια τα οποία συγκρούονται ελαστικά και για τα οποία οι διασωματιδιακές δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν. Ένα ιδανικό αέριο υπακούει στο **νόμο των ιδανικών αερίων**

$$PV = NkT \Rightarrow P = \frac{\rho}{\mu m_H} kT \quad (\text{C.3})$$

Για το ιδανικό αέριο, θεωρούμε ότι τα σωματίδια που το αποτελούν δεν έχουν εσωτερική δομή, άρα εσωτερικοί μηχανισμοί όπως η δόνηση και η περιστροφή δεν συνεισφέρουν στην εσωτερική ενέργεια. Επίσης, η ενέργεια του σωματιδίου δεν εξαρτάται από τη θέση του, άρα δεν υπάρχει και συνεισφορά από "συντεταγμένες". Αυτό μας αφήνει μόνο με την κινητική ενέργεια. Δηλαδή, για ένα ιδανικό αέριο, η εσωτερική του ενέργεια ισούται με την κινητική ενέργεια και χαρακτηρίζεται πλήρως από αυτήν.

$$\langle U \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} NkT \quad (\text{C.4})$$

όπου N ο αριθμός των σωματιδίων.

Στις τρεις διαστάσεις, υπάρχουν 3 ανεξάρτητες διευθύνσεις για την ορμή: p_x, p_y, p_z . Σύμφωνα με το θεώρημα της ισοχατανομής (equipartition theorem) η μέση ενέργεια ανά σωματίδιο

$$\frac{\langle U \rangle}{N} = \frac{3}{2} kT \quad (\text{C.5})$$

μοιράζεται ισόποσα σε κάθε βαθμό ελευθερίας, ώστε σε κάθε διεύθυνση να αντιστοιχεί $\frac{1}{2} kT$

Αδιαβατικές διεργασίες: Συχνά ερχόμαστε αντικέωποι με διεργασίες οι οποίες συμβαίνουν σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα (π.χ. σε δυναμικό χρόνο) ώστε δεν υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον ($dQ = dS = 0$). Αυτές οι διεργασίες ονομάζονται "αδιαβατικές" και υπακούουν σε μία σχέση της μορφής

$$P \propto \rho^\gamma \quad (\text{C.6})$$

όπου το γ ονομάζεται "αδιαβατικός δείκτης" (adiabatic index)

$$\gamma = \frac{q+5}{q+3} \quad (\text{C.7})$$

όπου q ο αριθμός των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας (για ιδανικό αέριο που τα σωματίδια είναι σημειακά έχουμε $q = 0 \rightarrow \gamma = 5/3$).

Θερμοδυναμική ισορροπία: Ένα σύστημα λέγεται ότι βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας όταν βρίσκεται σε

- **μηχανική ισορροπία:** το διανυσματικό άθροισμα όλων των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.
- **θερμική ισορροπία:** ένα σύστημα είναι σε θερμική ισορροπία με τον εαυτό του όταν δεν υπάρχουν θερμοβαθμίδες. Δύο συστήματα βρίσκονται σε θερμική ισορροπία μεταξύ τους όταν δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας. Για ένα αέριο συγκεκριμένης θερμοκρασίας που βρίσκεται σε θερμική ισορροπία, ισχύει η κατανομή Maxwell-Boltzmann για την κατανομή των ταχυτήτων των σωματιδίων που το αποτελούν.

- **χημική ισορροπία:** σε μια χημική αντίδραση, η κατάσταση χημικής ισορροπίας είναι αυτή κατά την οποία τόσο τα αντιδρώντα όσο και τα προϊόντα βρίσκονται σε συγκεντρώσεις που δεν υπάρχει η τάση για αλλαγή με τον χρόνο. Συνήθως αυτή η κατάσταση επέρχεται όταν ο ρυθμός παραγωγής των προϊόντων ισούται με τον ρυθμό της αντίστροφης διαδικασίας κατά την οποία τα προϊόντα σχηματίζουν ξανά τα αντιδρώντα από τα οποία προήλθαν.
- **στατιστική ισορροπία:** ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας όταν ο πληθυσμός των ατόμων και των ιόντων που το αποτελούν δεν αλλάζει με τον χρόνο. Σε ένα τέτοιο σύστημα, ο πληθυσμός των καταστάσεων δίνεται από τον νόμο του Boltzmann.

Σε μία κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, δεν υπάρχει ροή ενέργειας ή ύλης, δεν υπάρχουν αλλαγές φάσης ή δυναμικά που θα οδηγήσουν σε αλλαγές μέσα στο σύστημα. Ένα τέτοιο σύστημα δεν υπόκειται σε καμία αλλαγή όταν βρίσκεται απομονωμένο από το περιβάλλον του. Αν το σύστημα είναι απομονωμένο τόσο για την ύλη όσο και για την ακτινοβολία, και βρίσκεται σε κατάσταση μηχανικής ισορροπίας, τότε σταδιακά θα επέλθει σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Τέλος, για ένα σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, η θερμοκρασία ακτινοβολίας T_R , η θερμοκρασία λόγω της κινητικής ενέργειας των σωματιδίων T , καθώς και η θερμοκρασία διέγερσης T_{ex} είναι ίσες μεταξύ τους.

Τοπική θερμοδυναμική ισορροπία: Πραγματική θερμοδυναμική ισορροπία είναι δύσκολο να επιτευχθεί (σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις ενέργεια διαφέρει από το σύστημα με τη μορφή ακτινοβολίας, δηλαδή το σύστημα ψύχεται), και συχνά υπάρχουν θερμοβαθμίδες. Παρόλα αυτά, σε πολλά συστήματα (π.χ. αστέρες, μεσοαστρικό μέσο) μπορούμε να εφαρμόσουμε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία, που σημαίνει ότι το σύστημα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία αλλά μόνο σε μια πολύ μικρή περιοχή ενδιαφέροντος. Σε ένα σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας, υπάρχουν βαθμίδες θερμοκρασίας, πυκνότητας, πίεσης κτλ, αλλά θα είναι αρκετά μικρές στο διάστημα που ορίζεται από τη μέση ελεύθερη διαδρομή ενός σωματιδίου του αερίου. Το γεγονός ότι τα φωτόνια στο εσωτερικό του Ήλιου κάνουν πολλές χιλιάδες χρόνια να φτάσουν στην επιφάνεια και άρα είναι τοπικώς "παγιδευμένα" είναι αποτέλεσμα της κατάστασης τοπικής θερμοδυναμικής ισορροπίας που επικρατεί στο εσωτερικό του Ήλιου.

C.1.1

Καταστατικές εξισώσεις αερίων

Ως καταστατική εξίσωση εννοούμε μία θερμοδυναμική εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση της ύλης υπό συγκεκριμένες φυσικές συνθήκες. Συνήθως είναι της μορφής $P = P(\rho, T)$. Πολλές φορές είναι χρήσιμο να γράψουμε την καταστατική εξίσωση σε διαφορική μορφή. Η διαφορική μορφή μπορεί να βρεθεί αν ξεκινήσουμε γράφοντας την καταστατική εξίσωση γενικά ως έναν εκθετικό νόμο (power law)

$$P = \rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T} \quad (C.8)$$

και άρα το ολικό διαφορικό είναι

$$\begin{aligned}
 dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT \Rightarrow \\
 \Rightarrow dP &= \chi_\rho T^{\chi_T} \rho^{\chi_\rho - 1} d\rho + \chi_T \rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T - 1} dT \Rightarrow \\
 \Rightarrow dP &= \underbrace{\rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T}}_P \left(\chi_\rho \rho^{-1} d\rho + \chi_T T^{-1} dT \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{P} = \chi_\rho \frac{d\rho}{\rho} + \chi_T \frac{dT}{T}}
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Αντιπαραβάλοντας τις σχέσεις

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT$$

$$\frac{dP}{P} = \chi_\rho \frac{d\rho}{\rho} + \chi_T \frac{dT}{T}$$

βρίσκουμε ότι τα εκθετικά χ_ρ, χ_T δίνονται από τις σχέσεις

$$\chi_\rho = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T$$

$$\chi_T = \frac{T}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho$$

Μπορεί κανείς όμως να βρει μία ακόμα πιο κομψή έκφραση των παραπάνω εκθετών ως εξής:

$$\begin{aligned}
 P &= \rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T} \Rightarrow \log P = \log (\rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T}) = \log \rho^{\chi_\rho} + \log T^{\chi_T} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \log P &= \chi_\rho \log \rho + \chi_T \log T
 \end{aligned}$$

Το ολικό διαφορικό άρα είναι

$$d \log P = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_T d \log \rho + \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log T} \right)_\rho d \log T$$

ώστε

$$d \log P = \chi_\rho d \log \rho + \chi_T d \log T$$

και με αντιπαραβολή των δύο τελευταίων σχέσεων προκύπτει τελικά ότι

$$\chi_\rho = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_T \tag{C.10}$$

$$\chi_T = \frac{T}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log T} \right)_\rho \tag{C.11}$$

Στην πιο γενική περίπτωση, τα χ_ρ, χ_T εξαρτώνται και τα ίδια από τα ρ, T αλλά αν είναι (προσεγγιστικά) σταθερά, η καταστατική εξίσωση γράφεται

$$P = P_0 \rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T} \quad (\text{C.12})$$

Στην συνέχεια θα εξάγουμε την καταστατική εξίσωση για ένα τέλειο αέριο από τις αρχές της στατιστικής μηχανικής. Έστω $n(p)$ η κατανομή των ορμών των σωματιδίων του αερίου, δηλαδή με άλλα λόγια, το $n(p)dp$ αναπαριστά τον αριθμό των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου που έχουν ορμή $p \in [p, p+dp]$. Αν η $n(p)$ είναι γνωστή, τότε η αριθμητική πυκνότητα, η πυκνότητα (εσωτερικής) ενέργειας, και η πίεση θα δίνονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$n = \int_0^\infty n(p)dp \quad (\text{C.13})$$

$$u = \int_0^\infty E_{\text{kin}} n(p)dp = n \langle E_{\text{kin}} \rangle \quad (\text{C.14})$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v_p n(p)dp = \frac{1}{3} n \langle p v_p \rangle \quad (\text{C.15})$$

όπου E_{kin} η κινητική ενέργεια σωματιδίου με ορμή p και ταχύτητα v_p . Η σχέση (C.13) είναι τετριμμένη ενώ η σχέση (C.14) προκύπτει από τον ορισμό του ιδανικού αερίου. Όμως η σχέση (C.15) χρειάζεται εξήγηση.

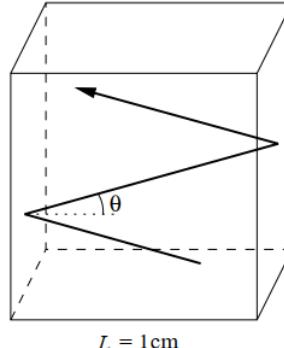


Figure C.1: Σωματίδιο αερίου μέσα σε ένα κυβικό κουτί όγκου 1 cm^3 . Κάθε σύγκρουση με τα τοιχώματα του κουτιού οδηγεί σε μεταφορά ορμής. Η πίεση μέσα στο κουτί είναι το αποτέλεσμα της συνολικής μεταφοράς ορμής από όλα τα σωματίδια μέσα στο κουτί.

Ας υποθέσουμε ένα αέριο που αποτελείται από N σωματίδια και το οποίο περιέχεται σε κυβικό κουτί με μήκος πλευρών $L = 1 \text{ cm}$. Κάθε σωματίδιο ανακλάται από τα τοιχώματα του κουτιού και η πίεση στην συγκεκριμένη επιφάνεια είναι το αποτέλεσμα της μεταφοράς της ορμής από όλα τα σωματίδια που συγκρούονται με αυτή. Έστω ένα σωματίδιο με ορμή p και αντίστοιχη ταχύτητα v_p το οποίο πλησιάζει την μία πλευρά του κουτιού υπό γωνία θ , όπως φαίνεται στο σχήμα C.1. Ο χρόνος μεταξύ δύο συγκρούσεων στην ίδια επιφάνεια του κουτιού είναι

$$\Delta t = \frac{2L}{v_p \cos \theta} = \frac{2}{v_p \cos \theta}$$

Επειδή οι συγκρούσεις είναι ελαστικές ($p_f = -p_i$) η μεταφορά ορμής είναι διπλάσια από τη συνιστώσα της ορμής που είναι κάθετη στην επιφάνεια

$$\Delta p = p_f - p_i = 2p \cos \theta$$

Άρα, ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ορμή ανά σωματίδιο είναι

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = p v_p \cos^2 \theta$$

Ο αριθμός των σωματιδίων με $p \in [p, p+dp]$ και $\theta \in [\theta, \theta+d\theta]$ συμβολίζεται με $n(p, \theta) dp d\theta$. Η συνεισφορά αυτών των σωματιδίων στην πίεση τότε είναι

$$dP = p v_p \cos^2 \theta n(p, \theta) dp d\theta$$

Επειδή οι ορμές είναι κατανεμημένες ισοτροπικά σε όλες τις διευθύνσεις μέσα σε μια στερεά γωνία 2π , και η στερεά γωνία $d\omega$ που αντιστοιχεί σε αυτά τα σωματίδια με $\theta \in [\theta, \theta + d\theta]$ ισούται με $2\pi \sin \theta d\theta$ έχουμε ότι $n(p, \theta) = n(p) \sin \theta d\theta$ και άρα

$$dP = p v_p \cos^2 \theta n(p) \sin \theta d\theta dp$$

Η συνολική πίεση βρίσκεται με ολοκλήρωση σε όλες τις γωνίες ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) και ορμές ώστε

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} p v_p \cos^2 \theta n(p) \sin \theta d\theta dp = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} p v_p n(p) dp = \\ &= \int_0^1 \cos^2 \theta d(\cos \theta) \int_0^{\infty} p v_p n(p) dp \Rightarrow \\ \Rightarrow P &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v_p n(p) dp = \frac{1}{3} n \langle p v_p \rangle \end{aligned}$$

Έχοντας ξεκαθαρίσει τα παραπάνω, θέλουμε τώρα να βρούμε μία σχέση μεταξύ της πίεσης και της εσωτερικής ενέργειας. Σύμφωνα με την ειδική σχετικότητα, η ορμή και η ταχύτητα των σωματιδίων σχετίζονται με την ενέργειά τους σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial p} (\epsilon^2) = \frac{\partial}{\partial p} (p^2 c^2 + m^2 c^4) \Rightarrow 2\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = 2pc^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \equiv v_p = \frac{pc^2}{\epsilon} \quad (\text{C.17})$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις μπορούμε να βρούμε σχέσεις μεταξύ της πίεσης και της εσωτερικής ενέργειας ενός ιδανικού αερίου στο μη-σχετικιστικό (NR) όριο και στο εξαιρετικά σχετικιστικό (ER) όριο:

- **NR όριο:** σε αυτή την περίπτωση οι ορμές είναι $p \ll mc$

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \epsilon^2 = c^2 (p^2 + m^2 c^2)$$

Επειδή ισχύει ότι $p \ll mc$, άρα $\epsilon \simeq mc^2$ και συνεπώς

$$v_p = \frac{pc^2}{\epsilon} = \frac{p}{m}$$

Η κινητική ενέργεια είναι όπως περιμένουμε $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$ οπότε $\langle pv_p \rangle = \langle \frac{p^2}{m} \rangle = 2\langle E_{\text{kin}} \rangle$.

Τελικά, από τις σχέσεις (C.14), (C.15), προκύπτει

$$\boxed{P = \frac{2}{3}u} \quad (\text{C.18})$$

- **ΕΡ όριο:** σε αυτή την περίπτωση έχουμε $p \gg mc$

Αυτό σημαίνει ότι $\epsilon = pc$ και άρα $v_p = c \rightarrow \langle pv_p \rangle = \langle pc \rangle = \langle \epsilon \rangle$.

Τελικά, από τις σχέσεις (C.14), (C.15), προκύπτει

$$\boxed{P = \frac{1}{3}u} \quad (\text{C.19})$$

Γενικά μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P = \zeta n \langle E \rangle \quad (\text{C.20})$$

όπου $\zeta = 2/3$ ή $\zeta = 1/3$ για το μη-σχετικιστικό και το σχετικιστικό όριο αντίστοιχα. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με την διαίσθησή μας καθώς θα περιμέναμε η πίεση που προέρχεται από την σύγκρουση (λόγω ταχυτήτων) σωματιδίων να είναι ανάλογη της πυκνότητας των σωματιδίων και της κινητικής τους ενέργειας

$$P \sim nmv^2 \sim nE_{\text{kin}}$$

Το κλασικό ιδανικό αέριο Σε ένα ιδανικό αέριο η κατανομή των οριμών δίνεται από την κατανομή Maxwell-Boltzmann

$$n(p)dp = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) 4\pi p^2 dp \quad (\text{C.21})$$

με την οποία θα ασχοληθούμε εκτενώς παρακάτω. Θα αποδείξουμε τότε ότι $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2}kT$ και άρα σύμφωνα με τη σχέση (C.18) ισχύει ότι η καταστατική εξίσωση ενός ιδανικού αερίου είναι

$$\boxed{P_{\text{gas}} = \frac{2}{3}u = \frac{2}{3}n\langle E_{\text{kin}} \rangle = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H}kT} \quad (\text{C.22})$$

που είναι ο γνωστός νόμος των ιδανικών αερίων. Αυτό το αποτέλεσμα προήλθε θεωρώντας μη-σχετικιστικά κλασικά σωματίδια αλλά μπορεί να δειχτεί ότι η ίδια σχέση ισχύει και για σχετικιστικά κλασικά σωματίδια.

Παρατηρούμε ότι ο νόμος των ιδανικών αερίων προκύπτει από τη σχέση (C.12) για $\chi_\rho = \chi_T = 1$

Το αέριο φωτονίων Στο Κεφάλαιο 3, αποδείξαμε ότι η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας είναι

$$u = \alpha T^4 \quad (\text{C.23})$$

Επειδή το αέριο φωτονίων είναι εξ' ορισμού σχετικιστικό, χρησιμοποιούμε τη σχέση (C.19) για να βρούμε την καταστατική εξίσωση ενός αερίου φωτονίων

$$\boxed{P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}\alpha T^4} \quad (\text{C.24})$$

Παρατηρούμε ότι η καταστατική εξίσωση ενός αερίου φωτονίων προκύπτει από τη σχέση (C.12) για $\chi_\rho = 0$ και $\chi_T = 4$.

Το κβαντικό ιδανικό αέριο Σύμφωνα με την στατιστική κβαντική φυσική, μία συλλογή από πολλά μη-διαχωρίσιμα σωματίδια που βρίσκονται σε θερμική ισορροπία έχουν μία κατανομή ορμών που δίνεται

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{E(p)-\mu/k_B T} \pm 1} \quad (\text{C.25})$$

όπου η “υπογραφή” \pm παίρνει το θετική πρόσημο για φερμιόνια και το αρνητικό για μποζόνια. Στην πρώτη περίπτωση η κατανομή ονομάζεται **κατανομή Fermi-Dirac** ενώ στη δεύτερη **κατανομή Bose-Einstein**. Το μ ονομάζεται “χημικό δυναμικό” και είναι μιας μορφής δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με την αριθμητική πυκνότητα και την θερμοκρασία των σωματιδίων.

Στο κλασικό όριο, δηλαδή στο όριο που η μέση απόσταση των σωματιδίων μεταξύ τους είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος De Broglie των σωματιδίων, η παραπάνω συνάρτηση κατανομής των ορμών μπορεί να προσεγγιστεί από την κατανομή Maxwell-Boltzmann. Στην αντίθετη περίπτωση τα κβαντομηχανικά φαινόμενα δεν μπορούν να αγνοηθούν. Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να αναφερθούμε σε δύο θεμελίωδεις αρχές της κβαντομηχανικής. Η πρώτη είναι η **αρχή της απροσδιοριστίας** του Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq h \longrightarrow (\Delta x)^3 (\Delta p)^3 \geq h^3 \equiv V_x V_p \geq h^3 \quad (\text{C.26})$$

όπου V_x είναι ο γνωστός μας γεωμετρικός όγκος και V_p ο όγκος στον χώρο των ορμών. Μία ερμηνεία αυτής της θεμελιώδους αρχής της κβαντομηχανικής είναι ότι ο χώρος των φάσεων είναι κβαντωμένος, δηλαδή με άλλα λόγια ο ελάχιστος όγκος που μπορεί να καταλάβει ένα φερμιόνιο είναι

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3$$

το οποίο ονομάζεται “κβαντικό κελί” και ορίζεται στον 6D χώρο των φάσεων.

Η δεύτερη αρχή της κβαντομηχανικής που θα μας απασχολήσει είναι η **απαγορευτική αρχή** του Pauli. Σύμφωνα με αυτή την αρχή δεν μπορούν να υπάρχουν δύο ή περισσότερα φερμιόνια με όλους τους κβαντικούς αριθμούς ίδιους σε ένα κβαντικό κελί. Ως συνέπεια της απαγορευτικής αρχής και της αρχής απροσδιοριστίας, το πλήθος των ενεργειακών καταστάσεων που αντιστοιχούν σε ορμές μεταξύ p και $p + dp$ θα είναι

$$V_x V_p \geq h^3 \longrightarrow g(s) = g \frac{V_x V_p}{h^3}$$

όπου g είναι ο εκφυλισμός των ενεργειακών καταστάσεων ανά κβαντικό κελί στον χώρο των φάσεων και $V_x V_p = h^3$ ο ελάχιστος όγκος σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας. Το $g(s)$ ονομάζεται και **πυκνότητα καταστάσεων** ενώ για τα φερμιόνια ισχύει ότι $g = 2$ ώστε η πυκνότητα καταστάσεων να είναι

$$\frac{V_x}{h^3} 8\pi p^2 dp$$

. Συνεπάγεται ότι το πλήθος (αριθμός) των φερμιονίων, $N(p)dp$, θα είναι

$$N(p)dp \leq \frac{V_x}{h^3} 8\pi p^2 dp$$

με την ιστότητα να ισχύει όταν έχουμε όλες τις χαμηλότερες δυνατές ενεργειακές καταστάσεις κατηλειμμένες. Πράγματι, αυτό συμβαίνει σε ένα πλήρως εκφυλισμένο αέριο φερμιονίων όπως θα δούμε στη συνέχεια και για το οποίο μπορούμε να γράψουμε απλά

$$N(p) = g \frac{V_x V_p}{h^3} = 2 \frac{V_x V_p}{h^3}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, και επειδή $N = nV_x$, ο αριθμός των φερμιονίων σε ένα δεδομένο χώρο των φάσεων με ορμές μεταξύ p και $p + dp$ θα είναι

$$n(p)dp = fg \frac{V_p}{h^3} = fg \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{g}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \frac{4\pi p^2}{h^3} dp \quad (\text{C.27})$$

Έστω ότι έχουμε μία κατανομή ηλεκτρονίων (φερμιονίων), τότε η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων θα είναι σύμφωνα με τη σχέση (C.13):

$$n_e = \int_0^\infty n_e(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (\text{C.28})$$

Κάτω από συνθήκες υψηλής πίεσης και χαμηλής θερμοκρασίας, η ενέργεια της θερμικής κίνησης ενός ηλεκτρονίου είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας του και, επομένως, τα ηλεκτρόνια μεταπίπτουν στις χαμηλότερες δυνατές ενεργειακές τους στάθμες. Όλες οι ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων, μέχρι μιας ανώτερης δυνατής, είναι κατειλημμένες, ενώ όλες οι ανώτερες από αυτήν είναι κενές. Η ανώτερη ενεργειακή αυτή στάθμη που έχει το κβαντικό μας σύστημα ονομάζεται **ενέργεια Fermi**, ϵ_F , η οποία ορίζεται ως:

$$\mu = mc^2 + \epsilon_F$$

Έτσι λοιπόν, όταν $k_B T \ll \mu \rightarrow k_B T \ll \epsilon_F$, τότε λέμε ότι το αέριο ηλεκτρονίων είναι **πλήρως εκφυλισμένο**.

Αντί του όρου “ενέργεια Fermi” θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχει μία ανώτερη τιμή οριμής σε ένα πλήρως εκφυλισμένο αέριο φερμιονίων την οποία κατά αντιστοιχία ονομάζουμε **οριμή Fermi**, p_F . Η οριμή Fermi συνδέεται με την ενέργεια Fermi ως $\epsilon_F = p_F^2/2m_e$ για ένα μη-σχετικιστικό αέριο και $\epsilon_F = cp_F$ για ένα σχετικιστικό αέριο.

Για τις συνθήκες λοιπόν $E \ll \mu$ και $T = 0$, η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων θα είναι

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 dp}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad (\text{C.29})$$

καθώς $e^{(E-\mu)/k_B T} \rightarrow 0$. Το άνω όριο ολοκλήρωσης για ένα πλήρως εκφυλισμένο αέριο είναι η οριμή Fermi καθώς εξ' ορισμού τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να έχουν οριμή (ενέργεια) μεγαλύτερη από αυτό το όριο. Φαίνεται λοιπόν ότι

$$p_F = h \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{1/3} \longrightarrow p_F \propto n_e^{1/3} \quad (\text{C.30})$$

Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που έχουμε αναφέρει μέχρι αυτό το σημείο, μπορούμε εύκολα να βρούμε την έκφραση της καταστασικής εξίσωσης που περιγράφει ένα μη-σχετικιστικό και ένα σχετικιστικό εκφυλισμένο αέριο. Για την πρώτη περίπτωση όπου τα ηλεκτρόνια δεν κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες, ισχύει ότι $E_{\text{kin}} = p^2/2m$ και $P = \frac{2}{3}n\langle E_{\text{kin}} \rangle$, ενώ ο εκφυλισμός μας οδηγεί στο να γράψουμε

$$\begin{aligned} \langle E_{\text{kin}} \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} EN(E) dE = \frac{1}{N} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} \frac{2}{h^3} V_x 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{4\pi V_x}{mNh^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{4\pi V_x}{mNh^3} \frac{p_F^5}{5} = \frac{p_F^2}{2m} \frac{8\pi V_x}{5Nh^3} p_F^3 \\ &= \frac{p_F^2}{2m} \frac{8\pi V_x}{5Nh^3} \frac{3V_p}{4\pi} = \frac{p_F^2}{2m} \frac{2V_x V_p}{Nh^3} \frac{3}{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle E_{\text{kin}} \rangle &= \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} = \frac{3}{5} \epsilon_F \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση των $V_p = \frac{4}{3}\pi p_F^3$ και $V_x V_p = Nh^3/2$.

Η πίεση που θα ασκεί το εκφυλισμένο αέριο ηλεκτρονίων θα είναι τότε

$$P_{\text{deg}} = \frac{2}{3} n_e \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{2}{3} \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{16\pi}{30m_e h^3} p_F^5$$

Όμως η ορμή Fermi μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με τη σχέση (C.30) ως

$$p_F = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h n_e^{1/3} = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h \left(\frac{\rho}{\mu m_H} \right)^{1/3}$$

όπου ρ η πυκνότητα μάζας ενώ το μ αναφέρεται στο μέσο μοριακό βάρος και όχι στο χημικό δυναμικό. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι η πίεση είναι

$$P_{\text{deg}}^{\text{NR}} = \frac{16\pi h^2}{30m_e} \left[\frac{3}{8\pi m_H} \left(\frac{Z}{A} \right) \right]^{5/3} \rho^{5/3} \longrightarrow P_{\text{deg}}^{\text{NR}} = K_{\text{NR}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} \rho^{5/3} \quad (\text{C.31})$$

Αυτή είναι η καταστική εξίσωση που περιγράφει ένα **μη-σχετικιστικό, εκφυλισμένο αέριο** ηλεκτρονίων. Ο όρος K_{NR} είναι μία σταθερά ο οποίος εξαφτάται από τη μάζα των φερμιονίων (στη δική μας περίπτωση των ηλεκτρονίων) ενώ ισχύει ότι $\frac{Z}{A} = \frac{1}{\mu}$ για το μέσο μοριακό βάρος.

Αντίστοιχα μπορούμε να βρούμε την καταστατική εξίσωση που περιγράφει ένα **σχετικιστικό, εκφυλισμένο αέριο** αν χρησιμοποιήσουμε ότι $P = \frac{1}{3}n\langle E \rangle$ και $E = pc$

$$P_{\text{deg}}^{\text{ER}} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{c h}{m^{4/3}} \rho^{4/3} \longrightarrow P_{\text{deg}}^{\text{ER}} = K_{\text{ER}} \rho^{4/3} \quad (\text{C.32})$$

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι ενώ η πίεση ενός εκφυλισμένου αερίου είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας (δηλαδή δεν είναι θερμικής φύσης), η συνθήκη για τον εκφυλισμό ενός αερίου εξαφτάται τόσο από την πυκνότητα όσο και από τη θερμοκρασία. Πράγματι τα παραπάνω αποτελέσματα προέκυψαν από την κβαντομηχανική μελέτη των φερμιονίων στο απόλυτο μηδέν ($T = 0$), ενώ είναι εύκολο να δείξουμε ότι για την περίπτωση ενός μη-σχετικιστικού αερίου, η ενέργεια Fermi είναι

$$\epsilon_F = \frac{3\hbar^2}{m} \left[\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{2/3} \longrightarrow \epsilon_F \propto n_e^{2/3} \propto \rho_e^{2/3}$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη για τον εκφυλισμό² μπορεί να γραφτεί ως

$$k_B T \ll \epsilon_F \Rightarrow \frac{T}{\rho^{2/3}} \ll D$$

όπου D μία σταθερά. Αυτό σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές της θερμοκρασίας, ο εκφυλισμός ενός αερίου μπορεί να αρθεί και να επιστρέψει στην κατάσταση του ιδανικού αερίου.

Η περίπτωση του μερικώς εκφυλισμένου ιδανικού αερίου ($k_B T \sim \epsilon_F$) είναι σημαντικά πιο πολύπλοκη όσον αφορά τον υπολογισμό των απαιτούμενων φυσικών ποσοτήτων καθώς πλέον δεν απαιτείται όλες οι ενεργειακές στοιβάδες να είναι κατηλειμμένες, και άρα η κατανομή των ορμών δεν έχει ανώτατη τιμή την ορμή Fermi. Γι' αυτό το λόγο δεν θα αναφερθούμε σε αυτήν την περίπτωση.

C.2 Νόμος του Boltzmann

Εαν έχουμε έναν μεγάλο αριθμό ατόμων σε ένα ζεστό, πυκνό αέριο, τα άτομα αυτά συνεχώς θα συγκρούονται μεταξύ τους με αποτέλεσμα να διεγείρονται σε διάφορα πιθανά ενεργειακά επίπεδα. Η διέγερση λόγω

²Θα μπορούσαμε να ορίσουμε και την **θερμοκρασία Fermi** ως $\epsilon_F = k_B T_F$ και να την χρησιμοποιήσουμε στην συνθήκη για τον εκφυλισμό αντί της ενέργειας Fermi.

συγχρούσεων θα ακολουθηθεί από την αποδιέγερση των ατόμων με εκπομπή ακτινοβολίας (σε χρονική κλίμακα της τάξης των νανοδευτερολέπτων). Αν η θερμοκρασία και η πίεση παραμείνουν σταθερά, θα υπάρχει κάποιους είδους δυναμικής ισορροπίας μεταξύ των διεγέρσεων από τις συγχρούσεις και τις αποδιέγέρσεις, οδηγώντας σε μια συγχεκμένη κατανομή των ατόμων στα διάφορα ενεργειακά επίπεδα. Όσο χαμηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο πιο γρήγορα θα μειώνεται ο πληθυσμός των ατόμων που καταλαμβάνουν υψηλές ενεργειακές στάθμες. Μόνο στις πολύ υψηλές θερμοκρασίες θα μπορούν οι υψηλές ενεργειακές στάθμες να καταλαμβάνονται από έναν σημαντικό αριθμό ατόμων. Η εξίσωση Boltzmann περιγράφει ποιά θα είναι η κατανομή των ατόμων ανάμεσα σε διάφορα ενεργειακά επίπεδα, ως συνάρτηση της ενέργειας και της θερμοκρασίας³.

Ας φανταστούμε ένα κουτί (σταθερός όγκος) το οποίο περιέχει N άτομα, το καθένα από τα οποία έχει m δυνατά ενεργειακά επίπεδα. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν N_j άτομα στο ενεργειακό επίπεδο E_j . Ο συνολικός αριθμός N των ατόμων δίνεται από τη σχέση

$$N = \sum_{i=1}^m N_i \quad (\text{C.33})$$

όπου ο ακέραιος θετικός δείκτης i τρέχει από το 1 μέχρι το m , συμπεριλαμβάνοντας την τιμή j .

Η συνολική εσωτερική ενέργεια του συστήματος U θα δίνεται από τη σχέση

$$U = \sum_{i=1}^m N_i E_i \quad (\text{C.34})$$

Τώρα, πρέπει να βρούμε πόσοι τρόποι υπάρχουν να κατανείμουμε N άτομα έτσι ώστε να υπάρχουν N_1 στο πρώτο ενεργειακό επίπεδο, N_2 στο δεύτερο κ.ο.κ. Θα συμβολίσουμε αυτόν τον αριθμό με Ω . Στην στατιστική φυσική το μέγεθος αυτό ονομάζεται στατιστικό βάρος και είναι ο αριθμός των (τρόπων) μικροκαταστάσεων που αντιστοιχούν στην ίδια (ενέργεια) μακροκατάσταση.

$$\Omega = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots N_j! \dots N_m!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^m N_i!} \quad (\text{C.35})$$

Η σχέση αυτή δεν είναι προφανής, γι' αυτό θα επιχειρησούμε να τη δικαιολογήσουμε εν μέρει. Ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να διαλέξουμε N_1 άτομα από ένα σύνολο N ατόμων ώστε να καταλάβουν το πρώτο ενεργειακό επίπεδο, θα δίνεται από τον διωνυμικό συντελεστή $\Omega_1 = \binom{N}{N_1}$. Για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους, πρέπει να ξέρουμε με πόσους τρόπους μπορούν να διαμοιραστούν N_2 άτομα από τα εναπομένα $N - N_1$ τα οποία θα καταλαμβάνουν την δεύτερη ενεργειακή στοιβάδα, οι οποίοι είναι $\Omega_2 = \binom{N - N_1}{N_2}$. Άρα, ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να κατανείμουμε τα άτομα στις δύο πρώτες ενεργειακές στοιβάδες, είναι το γινόμενο

$$\begin{aligned} \Omega &= \binom{N}{N_1} \binom{N - N_1}{N_2} = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} \frac{(N - N_1)!}{N_2!(N - N_1 - N_2)!} \\ &= \frac{N!}{N_1!} \frac{1}{N_2!(N_2! - N_2!)} = \frac{N!}{N_1! N_2!} \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας αυτή τη λογική, καταλήγουμε στον πολυωνυμικό συντελεστή

$$\Omega = \prod_{i=1}^m \Omega_i = \binom{N}{N_1} \binom{N - N_1}{N_2} \dots = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!}$$

³Οι πληροφορίες αντλήθηκαν από [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Astronomy__Cosmology/Book%3A_Stellar_Atmospheres_\(Tatum\)](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Astronomy__Cosmology/Book%3A_Stellar_Atmospheres_(Tatum))

Τισως ο παραπάνω συλλογισμός γίνεται πιο αντιληπτός αν έχουμε στο μυαλό μας πως ο διωνυμικός συντελεστής μας δίνει τον αριθμό των υπαρκτών τρόπων να χωρίσουμε τις ποσότητες N_1 και $N - N_1$ από ένα σύνολο N , σε δύο διακριτές καταστάσεις (two distinct bins). Ο πολυωνυμικός συντελεστής αντίστοιχα μας δίνει τον αριθμό των υπαρκτών τρόπων να χωρίσουμε τις ποσότητες N_1, N_2, \dots, N_m από ένα σύνολο N , σε N διακριτές καταστάσεις (N distinct bins).

Τώρα πρέπει να βρούμε τους πιο πιθανούς διαμερισμούς, δηλαδή τους πιο πιθανούς αριθμούς N_1, N_2, \dots, N_m . Ο πιο πιθανός καταμερισμός θα είναι αυτός που μεγιστοποιεί το Ω ως προς το κάθε N_j , και που υπόκειται στους περιορισμούς των σχέσεων (C.33) και (C.34). Η εύρεση ακροτάτων μιας συνάρτησης υπό περιορισμούς, μας οδηγεί στην χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange. Επειδή όμως ο χειρισμός του παραγοντικού ($N!$) είναι δύσκολος στην ανάλυση, θα βρούμε το μέγιστο του λογαρίθμου $\ln \Omega$, χωρίς καμία ποιοτική διαφορά στο αποτέλεσμα. Πάιρνοντας τον λογάριθμο της σχέσης (C.35), προκύπτει ότι

$$\ln \Omega = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! - \dots \quad (\text{C.36})$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling:

$$\ln X! = X \ln X - X \quad (\text{C.37})$$

στη σχέση (C.36), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= N \ln N - \mathcal{N} - (N_1 \ln N_1 - \mathcal{N}_1) - (N_2 \ln N_2 - \mathcal{N}_2) - \dots \\ &= N \ln N - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2 - \dots \\ &= N \ln N - \sum_{i=1}^m N_i \ln N_i \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε με την εύρεση του μεγίστου της συνάρτησης (C.38), ως προς μία από τις μεταβλητές, για παράδειγμα την N_j , με τρόπο τέτοιο ώστε να είναι συνεπής με τους περιορισμούς των σχέσεων (C.33) και (C.34). Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, έχουμε ότι για τον πιθανό αριθμό κατάληψης (most probable occupation number) του j ενεργειακού επιπέδου, ισχύει η σχέση:

$$\frac{\partial \ln \omega}{\partial N_j} = \lambda \frac{\partial N}{\partial N_j} + \mu \frac{\partial U}{\partial N_j} \quad (\text{C.39})$$

Αναπτύσσοντας τους όρους έχουμε:

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial N_j} = \frac{\partial}{\partial N_j} (-N_j \ln N_j) = -\cancel{\frac{\partial N_j}{\partial N_j}}^1 \ln N_j - N_j \cancel{\frac{\partial \ln N_j}{\partial N_j}}^1 = -\ln N_j - 1$$

$$\lambda \frac{\partial N}{\partial N_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial N_j} \left(\sum_{i=1}^m N_i \right) = \lambda \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial N_j} = \lambda$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial U}{\partial N_j} &= \mu \frac{\partial}{\partial N_j} \left(\sum_{i=1}^m N_i E_i \right) = \mu \sum_{i=1}^m \frac{\partial (N_i E_i)}{\partial N_j} = \mu \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial N_i}{\partial N_j} E_i + N_i \cancel{\frac{\partial E_i}{\partial N_j}}^0 \right) \\ &= \mu \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial N_j} E_i = \mu E_j \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην σχέση (C.39), προκύπτει

$$-\ln N_j - 1 = \lambda + \mu E_j \Rightarrow N_j = C e^{-\mu E_j} \quad (\text{C.40})$$

Το μόνο που μένει να κάνουμε, είναι να προσδιορίσουμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange λ (ή ισοδύναμα $C = e^{-\lambda-1}$) και μ . Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (C.40) με N_j , ενώ ταυτόχρονα αλλάζοντας τον δείκτη από j σε i και παίρνοντας το άθροισμα, έχουμε

$$N_j \ln N_j + \lambda N_j + N_j \mu E_j + N_j = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m N_i \ln N_i + \lambda \sum_{i=1}^m N_i + \mu \sum_{i=1}^m N_i E_i + \sum_{i=1}^m N_i = 0$$

$$= \sum_{i=1}^m N_i \ln N_i + \lambda N + \mu U + N = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N \ln N - \ln \Omega + \lambda N + \mu U + N = 0 \quad (\text{C.41})$$

όπου στο τελευταίο βήμα κάναμε χρήση της σχέσης (C.38). Από τη Θερμοδυναμική και τη Στατιστική Φυσική γνωρίζουμε ότι ισχύουν για την εντροπία τα εξής:

$$dU = T dS - P dV \longrightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = \frac{1}{T} \quad (\text{C.42})$$

$$S = k \ln \Omega \quad (\text{C.43})$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (C.42) και (C.43) με την (C.41), προκύπτει ότι:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = k \mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{kT} \quad (\text{C.44})$$

Τέλος, αυθορίζοντας τους όρους της σχέσης (C.40), βρίσκουμε τον δεύτερο πολλαπλασιαστή Lagrange:

$$\sum_{i=1}^m N_i = C \sum_{i=1}^m e^{-E_i/(kT)} \Rightarrow C = \frac{N}{\sum_{i=1}^m e^{-E_i/(kT)}} \quad (\text{C.45})$$

που μας οδηγεί στην έκφραση:

$$\frac{N_j}{N} = \frac{e^{-E_j/(kT)}}{\sum_{i=1}^m e^{-E_i/(kT)}} \quad (\text{C.46})$$

Παρόλα αυτά, μας μένει να λάβουμε υπόψιν ένα ακόμα πράγμα. Τα περισσότερα ενεργειακά επίπεδα σε ένα άτομο είναι εξφυλισμένα, δηλαδή υπάρχουν πολλές καταστάσεις με την ίδια ενέργεια. Γι' αυτό το λογο, για να βρούμε τον πληθυσμό ενός επιπέδου, πρέπει να προσθέσουμε τους πληθυσμούς των επιμέρους καταστάσεων. Έτσι, η εξίσωση (C.46) πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το στατιστικό βάρος g του επιπέδου

$$\boxed{\frac{N_j}{N} = \frac{g_j e^{-E_j/(kT)}}{\sum_{i=1}^m g_i e^{-E_i/(kT)}} = \frac{g_j}{Z} e^{-E_j/(kT)}} \quad (\text{C.47})$$

Η εξίσωση (C.47) είναι γνωστή ως *εξίσωση Boltzmann* ή κατανομή Boltzmann και μας δίνει την πιθανότητα να βρούμε N_j άτομα στο ενεργειακό επίπεδο j , με ενέργεια E_j . Ο όρος $Z = \sum_{i=1}^m g_i e^{-E_i/(kT)}$ ονομάζεται συνάρτηση επιμερισμού (partition function). Ο υπολογισμός της, αν και πολύπλοκος, είναι καταρχήν δυνατός, αφού από τη θεωρία και το πείραμα είναι γνωστά τόσο το στατιστικό βάρος g_i , όσο και η ενέργεια διέγερσης E_i , κάθε στάθμης.

Το στατιστικό βάρος ενός ενεργειακού επιπέδου ενός ατόμου με μηδενικό πυρηνικό σπιν είναι $2J+1$, όπου το J συμβολίζει την ολική στροφορμή του ατόμου. Αν το πυρηνικό σπιν είναι I , το στατιστικό βάρος του επιπέδου θα είναι $(2I+1)(2J+1)$. Παρόλα αυτά, ο παράγοντας $2J+1$ εμφανίζεται τόσο στον αριθμητή όσο και σε κάθε όρο του παρονομαστή της σχέσης (C.47), όφει μπορεί να εξαλειφθεί. Άρα, όταν δουλεύουμε με την κατανομή Boltzmann, στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι απαραίτητο να ανησυχούμε για το αν το άτομο έχει κάποιο συγκεκριμένο πυρηνικό σπιν, και το στατιστικό βάρος του κάθε επιπέδου στην εξίσωση (C.47) μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι $g_j = 2J+1$.

Στην εξίσωση (C.47) συγχρίναμε τον αριθμό των ατόμων στο ενεργειακό επίπεδο j με τον αριθμό των ατόμων σε όλα τα υπόλοιπα επίπεδα. Μπορούμε το ίδιο εύκολα να συγχρίνουμε τον αριθμό των ατόμων στο επίπεδο j με τον αριθμό των ατόμων στη βασική στάθμη 0:

$$\frac{N_j}{N_0} = \frac{g_j}{g_0} e^{-E_j/(kT)} \quad (\text{C.48})$$

ή ακόμα μπορούμε να συγχρίνουμε τους πληθυσμούς δύο οποιοδήποτε ενεργειακών επιπέδων i, j με $j > i$:

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-(E_j - E_i)/(kT)} = \frac{g_j}{g_i} e^{-h\nu/(kT)} \quad (\text{C.49})$$

C.3 Συνάρτηση επιμερισμού

Σε κάποια συστήματα, η ολική ενέργεια μπορεί να αποτελείται από διάφορες πηγές ενέργειας. Ας αναλογιστούμε, ως παράδειγμα, το απλό διατομικό μόριο. Η ενέργειά του μπορεί να είναι το άνθροισμα της ενέργειας διέγερσης (λόγω ηλεκτρονίων), ενέργεια δόνησης, κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, αλλά και ενέργειας λόγω μεταφοράς. Αν αυτές οι πηγές ενέργειας είναι ανεξάρτητες η μία από τις άλλες, η ολική ενέργεια θα είναι το άνθροισμα αυτών των συνεισφορών:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{tran}} + E_{\text{el}} + E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}} \quad (\text{C.50})$$

Στην πράξη, για πραγματικά μόρια, αυτό είναι απλά μία πρώτη προσέγγιση — στην πραγματικότητα, υπάρχει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των διάφορων συνεισφορών στην ολική ενέργεια, αλλά η πρόθεσή μας εδώ δεν είναι να επικεντρωθούμε στις λεπτομέρειες της μοριακής δομής αλλά να επισημάνουμε ένα μικρό σημείο που αφορά τις συναρτήσεις επιμερισμού. Δεδομένου λοιπόν ότι οι διάφορες ενεργειακές συνεισφορές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και δεν αλληλεπιδρούν σημαντικά, η ολική ενέργεια όπως είπαμε είναι το άθροισμα των επιμέρους ενεργειακών συνεισφορών. Η ολική κυματοσυνάρτηση σε αυτή την περίπτωση είναι το γινόμενο των τριών επιμέρους κυματοσυναρτήσεων

$$\psi = \psi_{el}\psi_{vib}\psi_{rot} \quad (\text{C.51})$$

Οι ποσότητες ψ_{vib} και E_{vib} είναι οι κυματοσυναρτήσεις και τα ενεργειακά επίπεδα για έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή, ενώ ψ_{rot} και E_{rot} είναι οι κυματοσυναρτήσεις και τα ενεργειακά επίπεδα ενός στερεού ρότορα. Είναι αντιληπτό ότι ένα μόριο δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα στερεός ρότορας και αρμονικός ταλαντωτής, γι' αυτό οι εξισώσεις (C.50) και (C.51) είναι απλά προσεγγιστικές. Παρόλα αυτά, σε γενικές γραμμές, οι ενεργειακές διαφορές μεταξύ ηλεκτρονιακών ενεργειακών επιπέδων είναι οι μεγαλύτερες, οι διαφορές μεταξύ επιπέδων δονήσεων είναι ενδιάμεσες, και οι διαφορές μεταξύ ενεργειακών επιπέδων λόγω περιστροφής είναι οι μικρότερες, έτσι ωστε αυτή η πρώτη προσέγγιση είναι μια καλή αρχή. Ενεργειακά επίπεδα λόγω μεταφορικής κίνησης είναι πρακτικά συνεχή και μπορούν να υπολογισθούν ως κινητική ενέργεια. Επικεντρώνοντας την προσοχή μας γύρω από το σημείο ενδιαφέροντος για αυτό το κεφάλαιο, κάθε όρος της συνάρτησης επιμερισμού είναι της μορφής $e^{-E/(kT)}$, και άρα αν η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών, όπως δείχνει η εξίσωση (C.50), τότε η ολική (εσωτερική) συνάρτηση επιμερισμού είναι το γινόμενο των συναρτήσεων επιμερισμού των διάφορων συνεισφορών:

$$u = u_{el}u_{vib}u_{rot} \quad (\text{C.52})$$

Σε εισαγωγικά μαθήματα κβαντομηχανικής, διδασκόμαστε —χωρίς ίσως να ξέρουμε γιατί— το παράδειγμα "σωματίδιο σε κουτί". Αυτό ήταν χρήσιμο και θα το χρειαστούμε σε ό,τι ακολουθεί. Ισως ήταν καλύτερο να ονομαζόταν "κύματα σε κουτί" καθώς αύτο που αναλύουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι οι κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν την κυματική φύση ενός σωματίδιου. Αν το σωματίδιο (και το αντίστοιχο κύμα του) είναι περιορισμένο σε ένα κουτί, οι κυματοσυναρτήσεις περιορίζονται σε συναρτήσεις που έχουν έναν ακέραιο αριθμό αντι-κόμβων (antinodes) ανάμεσα σε δύο τοίχους, και κατά συνέπεια τα ενεργειακά επίπεδα μπορούν να έχουν μόνο διακριτές τιμές —ένα ακόμα παράδειγμα της μη-αποφυγής των διακριτών ενεργειακών επιπέδων που προκύπτουν από συνοριακούς περιορισμούς. Αν το κουτί είναι ένας κύβος με πλευρά a , τότε τα ενεργειακά επίπεδα δίνονται από:

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right) \quad (\text{C.53})$$

Αν έχουμε πολλά σωματίδια μέσα στο κουτί, μπορεί να ενδιαφερόμαστε για το πως τα διάφορα σωματίδια είναι κατενεμημένα (διαμοιρασμένα) μεταξύ των ενεργειακών επιπέδων. Με άλλα λόγια, πρέπει να ξέρουμε τη συνάρτηση επιμερισμού, η οποία είναι απλά:

$$\sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{\hbar^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}{8ma^2 kT} \right] \quad (\text{C.54})$$

Αν το κουτί είναι πολύ μεγάλο, τα ενεργειακά επίπεδα είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και σχεδόν συνεχή (αν το κουτί είναι απείρων διαστάσεων, δεν υπάρχουν συνοριακοί περιορισμοί και γι' αυτό υπάρχει ένα συνεχές φάσμα δύνατών ενεργειών). Αν τα επίπεδα είναι σχεδόν συνεχή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα ανθροίσματα με ολοκληρώματα και να πάρουμε το μεταφορικό κοινάτι της συνάρτησης επιμερισμού (που

οφείλεται σε κίνηση του κέντρου μάζας):

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\frac{h^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}{8ma^2 kT} \right] dn_x dn_y dn_z \\
 &= \left[\int_0^\infty \exp \left(-\frac{h^2 n^2}{8ma^2 kT} \right) dn \right]^3 \\
 &= \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} V
 \end{aligned} \tag{C.55}$$

όπου $V = a^3$ είναι ο όγκος του κουτιού και $Z = Qu$ είναι η συνολική συνάρτηση επιμερισμού που περιλαμβάνει και το μεταφορικό αλλά και το "εσωτερικό" κομμάτι.

C.4 Κατανομή Maxwell-Boltzmann

Όπως είδαμε, η κατανομή Boltzmann μας δείχνει ότι η πιθανότητα ένα σωματίδιο να βρεθεί σε μία ενεργειακή κατάσταση E , μειώνεται εκθετικά όσο η ενέργεια αυξάνει. Μαθηματικά, η κατανομή Boltzmann γράφεται

$$f(E) = A e^{-E/(kT)} \tag{C.56}$$

Εάν αυτή η κατανομή εφαρμοστεί σε μία διάσταση για την ταχύτητα ενός σωματιδίου σε ένα αέριο, τότε επειδή $E = mu_x^2/2$, προκύπτει ότι

$$f(u_x) = A e^{-mu_x^2/(2kT)} \tag{C.57}$$

Για να βρούμε τον συντελεστή κανονικοποίησης A , πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι η πιθανότητα να βρούμε ο σωματίδιο σε κάποια τιμή της ταχύτητας είναι ίση με τη μονάδα. Έτσι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_x) du_x = 1 \Rightarrow A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mu_x^2/(2kT)} du_x = 1 \tag{C.58}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση

$$x^2 = \frac{mu_x^2}{2kT} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{2kT}} u_x \longrightarrow dx = \sqrt{\frac{m}{2kT}} du_x$$

από τη σχέση (C.58) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 A \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mu_x^2/(2kT)} \sqrt{\frac{m}{2kT}} du_x &= 1 \Rightarrow \\
 A \sqrt{\frac{2kT}{m}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi} e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi}} &= 1 \\
 A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}
 \end{aligned} \tag{C.59}$$

ώστε η σχέση (C.57) να γράφεται τελικά:

$$f(u_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mu_x^2/(2kT)} \quad (\text{C.60})$$

Η σχέση (C.60) ονομάζεται γραμμική πυκνότητα πιθανότητας (εφόσον μιλάμε για μία διάσταση). Έτσι, η πιθανότητα $dp(u_x)$ του να έχει ένα σωματίδιο ταχύτητα κατά τον άξονα x μεταξύ των τιμών u_x και $u_x + du_x$ είναι:

$$dp(u_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mu_x^2/(2kT)} du_x = f(u_x) du_x \quad (\text{C.61})$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που δίνει τη γραμμική πυκνότητα πιθανότητας $f(u_x)$ είναι συνάρτηση κατανομής Gauss, η οποία έχει τη μορφή

$$G = Ce^{-b^2 u^2} \quad (\text{C.62})$$

όπου ο συντελεστής κανονικοποίησης $C = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$ καθορίζει το ύψος της καμπύλης, ενώ ο παράγοντας $b^2 = m/(2kT)$ καθορίζει το εύρος της κατανομής. Η κατανομή είναι κεντραρισμένη γύρω από το σημείο $u_x = 0$ καθώς λόγω των τυχαίων κινήσεων, η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι μηδέν.

Επειδή ο ολικός αριθμός των σωματιδίων N , παραμένει σταθερός το ποσοστό dN_x/N (ή ισοδύναμα η αριθμητική πυκνότητα $n = N/V$) των σωματιδίων που έχουν ταχύτητες κατά τον άξονα x στο διάστημα μεταξύ u_x και $u_x + du_x$, όταν ισούται με την πιθανότητα που υπολογίσαμε στη σχέση (C.61). Επομένως, ο αριθμός των μορίων που έχουν ταχύτητες στο διάστημα $[u_x, u_x + du_x]$ θα είναι:

$$dN_x = N dp(u_x) \longrightarrow dn_x = ndp(u_x) \Rightarrow$$

$$dn_x = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mu_x^2/(2kT)} du_x = nf(u_x) du_x \quad (\text{C.63})$$

Είναι προφανές ότι οι αντίστοιχες σχέσεις που δίνουν την πιθανότητα και την αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων με ταχύτητες κατά τη διεύθυνση y και z στα διαστήματα $[u_y, u_y + du_y]$ και $[u_z, u_z + du_z]$ αντίστοιχα, βρίσκονται αν αντικαταστήσουμε το σύμβολο x με τα σύμβολα y και z .

Τις περισσότερες φορές όμως δεν ενδιαφερόμαστε για τον αριθμό των σωματιδίων με ορισμένες ταχύτητες ως προς κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση, κυρίως μάλιστα όταν δεν υπάρχει προτιμητέα κατεύθυνση στον χώρο από τη φυσική ή τη γεωμετρία του προβλήματος που μελετούμε. Συνήθως μας ενδιαφέρει η πιθανότητα $dp(u)$ ή το ποσοστό των σωματιδίων $dn(u)/n$ με συνολική ταχύτητα μεταξύ των τιμών u και $u + du$, η οποία ταχύτητα προφανώς συνδέεται με τις ταχύτητες u_x, u_y και u_z μέσω της σχέσης:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad (\text{C.64})$$

Η πιθανότητα αυτή μπορεί να υπολογιστεί από τις σχέσεις (C.61), (C.63) και (C.64), αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή του μοριακού χάους, σύμφωνα με την οποία οι ταχύτητες (άρα και οι κατανομές) κατά τις τρεις διευθύνσεις x, y, z είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τότε, σύμφωνα με την θεωρία των πιθανοτήτων, η κοινή συνάρτηση κατανομής $f(u_x, u_y, u_z)$ που δίνει την πιθανότητα $dp(u)$ του να έχει ένα σωματίδιο ταχύτητες στα διαστήματα $[u_x, u_x + du_x], [u_y, u_y + du_y], [u_z, u_z + du_z]$, ισούται με το γινόμενο των $f(u_x), f(u_y)$ και $f(u_z)$. Έτσι, στις 3 διαστάσεις η πυκνότητα πιθανότητας είναι:

$$f(\mathbf{u}) = f(u_x, u_y, u_z) = f(u_x)f(u_y)f(u_z) \quad (\text{C.65})$$

και επομένως η πιθανότητα $dp(u)$ δίνεται από τη σχέση:

$$dp(u) = dp(u_x, u_y, u_z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{m^3}{(2\pi kT)^3}} \exp\left(-\frac{m(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{2kT}\right) du_x du_y du_z \Rightarrow \\
&\Rightarrow dp(u) = \sqrt{\frac{m^3}{(2\pi kT)^3}} e^{-mu^2/(2kT)} du_x du_y du_z
\end{aligned} \tag{C.66}$$

όπου το γινόμενο $dV(u) = du_x du_y du_z$ εκφράζει τον στοιχειώδη όγκο στον χώρο των ταχυτήτων. Η σχέση (C.66) απλοποιείται σημαντικά αν, αντί για καρτεσιανές, χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες. Στην περίπτωση αυτή, ορίζεται έναν σφαιρικό κέλυφος με "ακτίνα" u και συνιστώσες που δίνονται από τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned}
u_x &= u \sin \theta \cos \phi \\
u_y &= u \sin \theta \sin \phi \\
u_z &= u \cos \theta
\end{aligned}$$

ενώ ο στοιχειώδης όγκος στο χώρο των ταχυτήτων μετασχηματίζεται βάσει της σχέσης

$$dV = du_x du_y du_z = \left[\frac{\partial(u_x, u_y, u_z)}{\partial(u, \theta, \phi)} \right] dud\theta d\phi$$

Η Ιακωβιανή υπολογίζεται ως:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial u} & \frac{\partial u_x}{\partial \theta} & \frac{\partial u_x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u_y}{\partial u} & \frac{\partial u_y}{\partial \theta} & \frac{\partial u_y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u_z}{\partial u} & \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \dots = u^2 \sin \theta$$

και άρα ο στοιχειώδης όγκος στο χώρο των ταχυτήτων εκφρασμένος σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $dV = u^2 \sin \theta du d\theta d\phi$ και, επειδή δεν μας ενδιαφέρει η διεύθυνση της ταχύτητας των σωματιδίων, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την πιθανότητα ως προς τις γωνίες κατεύθυνσης

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\phi \sin \theta d\theta = 4\pi$$

Έτσι τελικά το ποσοστό των σωματιδίων με ταχύτητες μεταξύ u και $u+du$ ανεξαρτήτως διεύθυνσης είναι:

$$\frac{dn(u)}{n} = f(u)du = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2 du \tag{C.67}$$

Η συνάρτηση $f(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της πυκνότητας πιθανότητας (πιθανότητα ανά μονάδα ταχύτητας) των ταχυτήτων και ονομάζεται κατανομή Maxwell-Boltzmann. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι η συνάρτηση κατανομής

$$f(u) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2$$

που εμφανίζεται στη σχέση (C.67), αναφέρεται στην κατανομή των μέτρων των ταχυτήτων (Maxwell-Boltzmann speed distribution) και όχι στην κατανομή των διανυσματικών ταχυτήτων (Maxwell-Boltzmann velocity distribution) που δίνεται από τη συνάρτηση κατανομής της σχέσης (C.65):

$$f(\mathbf{u}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}}$$

Παρατηρώντας τις δύο εκφράσεις, βλέπουμε ότι η συνάρτηση κατανομής των διανυσματικών ταχυτήτων είναι Γκαουσιανής φύσης (ως το γινόμενο των τριών επιμέρους Γκαουσιανών για την κάθε συνιστώσα), ενώ η συνάρτηση κατανομής των μέτρων των ταχυτήτων είναι κατανομή χ^2 (chi square distribution) ως γινόμενο του Γκαουσιανού όρου και του πολυωνυμικού όρου u^2 . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατανομή των μέτρων των ταχυτήτων να παρουσιάζει μια ασυμμετρία προς μεγάλες ταχύτητες (right-skewed) όπως φαίνεται και στο σχήμα C.2. Επίσης, ενώ η κατανομή των διανυσματικών ταχυτήτων είναι κεντραρισμένη γύρω από το μηδέν, η κατανομή των μέτρων των ταχυτήτων ξεκινάει από το μηδέν λόγω του όρου u^2 . Αυτό είναι λογικό καθώς δεν νοείται αρνητικό μέτρο της ταχύτητας.

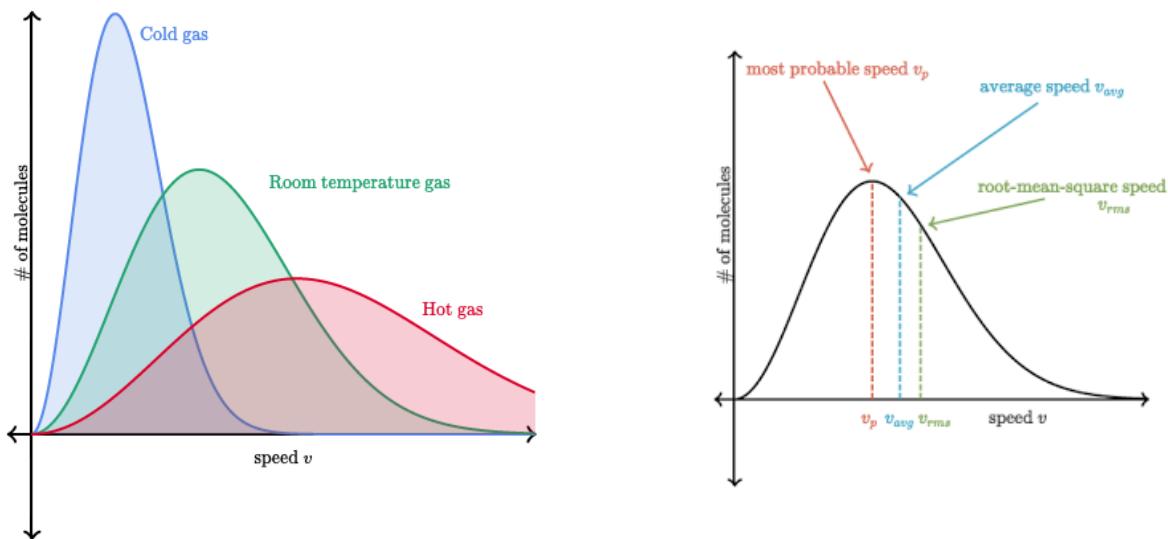


Figure C.2: Κατανομή Maxwell-Boltzmann των μέτρων ταχυτήτων. Ο κάθετος άξονας εκφράζει τον αριθμό των σωματίδιων, αν και πολλές φορές επιλέγεται να δείχνει την πυκνότητα πιθανότητας αντ' αυτού η οποία είναι η πιθανότητα ανά μονάδα ταχύτητας να βρούμε ένα σωματίδιο με ταχύτητα κοντά στην u . **Left Panel:** Εξάρτηση της κατανομής από τη θερμοκρασία. **Right Panel:** Ορισμός της πιο πιθανής ταχύτητας, της μέσης ταχύτητας, και της ταχύτητας v_{rms} .

Το ότι δεν υπάρχει προτιμητέα διεύθυνση στον χώρο και άρα η κατανομή των διανυσματικών ταχυτήτων ακολουθεί τη συμμετρική Γκαουσιανή κατανομή είναι εύκολα αντιληπτό. Γιατί όμως η συνάρτηση κατανομής των μέτρων των ταχυτήτων να είναι ασύμμετρη προς τα δεξιά, δηλαδή προς τις μεγάλες ταχύτητες; Η απάντηση είναι γιατί υπάρχουν πολλοί τρόποι να πάρουμε το μέτρο μιας μεγάλης ταχύτητας όταν συνυπολογίζουμε όλες τις κατευθύνσεις. Θα προσπαθήσουμε να το εξηγήσουμε δίνοντας ένα απλό παράδειγμα στον 2D χώρο:

Έστω δύο διανύσματα ταχύτητας $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ με συνιστώσες $u_{1x} = 1, u_{1y} = 2$ και $u_{2x} = 2, u_{2y} = 1$ αντίστοιχα, ώστε:

$$\mathbf{u}_1 = u_{1x}\hat{i} + u_{1y}\hat{j} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\mathbf{u}_2 = u_{2x}\hat{i} + u_{2y}\hat{j} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

Και τα δύο διανύσματα της ταχύτητας έχουν το ίδιο μέτρο:

$$u_x = u_y = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Γενικεύοντας σε όλο το χώρο, γίνεται αντιληπτό ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο της ταχύτητας, τόσο περισσότεροι συνδυασμοί των συνιστωσών u_x, u_y, u_z (δηλαδή τόσο περισσότερα διανύσματα) υπάρχουν

που θα δίνουν το ίδιο μέτρο. Άρα, ναι μεν όλες οι διευθύνσεις των ταχυτήτων είναι ισοπίθανες και άρα η συνάρτηση κατανομής τους θα είναι Γκαουσιανή, αλλά υπάρχουν περισσότερες καταστάσεις υψηλής ταχύτητας γεγονός που δίνει στην κατανομή την χαρακτηριστική ασυμμετρία προς τα δεξιά. Ο παράγοντας $4\pi u^2$ που υπάρχει στη σχέση (C.67), λαμβάνει υπόψιν ακριβώς τη πυκνότητα καταστάσεων της ταχύτητας που είναι διανέσιμη για τα σωματίδια.

C.4.1

Χαρακτηριστικά και ιδιότητες

Το ύψος (amplitude) της κατανομής Maxwell-Boltzmann δίνεται από τον συντελεστή κανονικοποίησης για τον οποίο γενικά ισχύει:

$$A \propto T^{-3/2}$$

Αντίστοιχα, για το εύρος της κατανομής ισχύει:

$$b^2 \propto T^{-1}$$

Άρα, υπό σταθερή μάζα, αν αυξάνεται η θερμοκρασία τότε ελλατώνεται το ύψος της καμπύλης ενώ παράλληλα φαρδάνει όπως φαίνεται στο σχήμα C.2. Αυτό είναι λογικό καθώς το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της κατανομής μας δίνει τον συνολικό αριθμό των σωματιδίων. Έτσι, αν μειώσουμε τη θερμοκρασία του αερίου, η καμπύλη θα μετακινηθεί προς τα αριστερά και το ύψος θα αυξηθεί ώστε το εμβαδόν να παραμείνει σταθερό.

Εύρεση πιθανότερης ταχύτητας Αν u_p είναι η πιθανότερη ταχύτητα, τότε η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστο στο u_p . Δηλαδή αφεί

$$u_p = \frac{df(u)}{du} = 0 \Rightarrow \frac{d}{du} \left(Ae^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow A \left[\left(-\frac{mu}{kT} \right) e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2 + 2ue^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow 2uAe^{-\frac{mu^2}{2kT}} \left(1 - \frac{mu^2}{2kT} \right) = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει τρεις λύσεις:

- Αν $u = 0$, τότε η κατανομή παρουσιάζει ελάχιστο.
- Αν $e^{-\frac{mu^2}{2kT}} = 0$, τότε $u \rightarrow \infty$ οπότε η κατανομή πάλι παρουσιάζει ελάχιστο.
- Αν $\frac{mu^2}{2kT} = 1$, τότε η κατανομή παρουσιάζει μέγιστο.

Έτσι, και σύμφωνα με το σχήμα C.2, η πιο πιθανή ταχύτητα είναι η

$$u_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

(C.68)

και εκφράζει την πιο πιθανή τιμή της ταχύτητας που μπορεί να έχει ένα σωματίδιο στο αέριο.

Στατιστικές ροπές Η συνάρτηση κατανομής Maxwell-Boltzmann περιέχει όλες τις πληροφορίες για τις στατιστικές ιδιότητες ενός τέλειου αερίου, δεν είναι όμως εύχρηστη επειδή ο υπολογισμός των πιθανοτήτων απαιτεί την ολοκλήρωση της σχέσης (C.67), η οποία δεν είναι δυνατόν να γίνει αναλυτικά. Στην πράξη χρησιμοποιούμε συνήθως τις **στατιστικές ροπές** (moments) της σχέσης (C.67), οι οποίες προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση κατανομής επί της διάφορες δυνάμεις της ταχύτητας u και ολοκληρώνοντας ως προς u . Η ροπή **μηδενικής τάξης** (μονοπολική/monopole) της σχέσης (C.67)

$$\int_0^\infty f(u)u^0 du = \int_0^\infty f(u)du = 1 \quad (\text{C.69})$$

είναι εξ' ορισμού μονάδα, αφού παριστάνει την πιθανότητα του να έχει ένα σωματίδιο ταχύτητα $0 < u < \infty$, γεγονός που είναι προφανώς βέβαιο. Η ροπή **πρώτης τάξης** (διπολική/dipole moment) μας δίνει, σύμφωνα με την θεωρία των πιθανοτήτων, τη **μέση ταχύτητα** $\langle u \rangle$ των σωματιδίων του αερίου

$$\langle u \rangle = \int_0^\infty f(u)udu = A \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^3 du \quad (\text{C.70})$$

όπου $A = 4\pi \frac{m}{2\pi kT}^{3/2}$. Από πίνακες ολοκληρωμάτων γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

Χωρίς τη χρήση αυτού του τύπου, το ολοκλήρωμα της σχέσης (C.70) λύνεται με την διαδοχική ολοκλήρωση κατά μέρη ως εξής:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= A \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^3 du = A \left(-\frac{kT}{m} \right) \underbrace{\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{mu^2}{2kT}} d \left(-\frac{mu^2}{2kT} \right)}_{d \left(e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right)} = \\ &= A \left(-\frac{kT}{m} \right) \int_0^\infty u^2 d \left(e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right) = A \left(-\frac{kT}{m} \right) \left[u^2 e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right]_0^\infty - \\ &\quad - \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 2udu \Big] = 2A \left(\frac{kT}{m} \right) \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u du = \\ &= -2A \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} d \left(-\frac{mu^2}{2kT} \right) = -2A \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \int_0^\infty d \left(e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right) = \\ &= -2A \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \left[e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right]_0^\infty = 2A \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της σταθεράς A προκύπτει ότι η μέση ταχύτητα είναι

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

(C.71)

Από το σχήμα C.2 φαίνεται ότι η μέση ταχύτητα βρίσκεται πιο δεξιά από την πιο πιθανή τιμή της ταχύτητας. Αυτό συμβαίνει γιατί η κατανομή παρουσιάζει μια "ουρά" προς τα δεξιά, η οποία "τραβάει" την μέση τιμή προς τα δεξιά της κορυφής. Με άλλα λόγια, υπάρχουν περισσότερες υψηλές από χαμηλές ταχύτητες.

Τέλος, η ροπή δεύτερης τάξης (τετραπολική ροπή/quadruple moment) μας δίνει τη μέση τετραγωνική ταχύτητα των σωματιδίων του αερίου

$$\langle u^2 \rangle = u_{\text{rms}} = \int_0^\infty f(u) u^2 du = A \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^4 du \quad (\text{C.72})$$

Η λύση του ολοκληρώματος έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} u_{\text{rms}} &= A \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^4 du = -A \left(\frac{kT}{m} \right) \int_0^\infty e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^3 d \left(-\frac{mu^2}{2kT} \right) = \\ &= -A \left(\frac{kT}{m} \right) \int_0^\infty u^3 d \left(e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right) = -A \left(\frac{kT}{m} \right) \left[u^3 e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \right]_0^\infty - \\ &\quad - 3 \int_0^\infty u^2 e^{-\frac{mu^2}{2kT}} du = \frac{3kT}{m} \int_0^\infty A e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2 du = \\ &= \frac{3kT}{m} \int_0^\infty f(u) du = \frac{3kT}{m} \end{aligned}$$

Άρα, η μέση τετραγωνική ταχύτητα των σωματιδίων είναι

$$u_{\text{rms}} = \boxed{\frac{3kT}{m}} \quad (\text{C.73})$$

Από τη σχέση (C.73) προκύπτει και ότι η μέση κινητική ενέργεια των σωματιδίων ενός τέλειου αερίου δίνεται από τη σχέση

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (\text{C.74})$$

που συνδέει την μέση κινητική ενέργεια με τη θερμοκρασία του αερίου. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι η τιμή της συνάρτησης κατανομής Maxwell-Boltzmann πέφτει πολύ γρήγορα με την ταχύτητα. Έτσι συνήθως δεχόμαστε πως υπάρχει "αισθητή" αριθμητική πυκνότητα σωματιδίων μέχρι ταχύτητα ίση με $3\sqrt{u_{\text{rms}}}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ D

Πυρηνική Αστροφυσική

D.1 Πυρηνοσύνθεση βαρέων στοιχείων

Στην πυρηνική αστροφυσική, ο όρος "βαρέα στοιχεία" αναφέρεται στους πυρήνες που εντοπίζονται μετά την ομάδα του σιδήρου καθώς γι' αυτούς τους πυρήνες τα πράγματα αλλάζουν δραματικά. Γνωρίζουμε από παρατηρήσεις ότι ο σίδηρος¹ έχει την μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης ανα νουκλεόνιο και από εκεί και πέρα μειώνεται συνεχώς (σχήμα D.1) καθιστώντας έτσι την διαδικασία της φωτοδιάσπασης -χρησιμοποιώντας ενεργειακά κριτήρια- μη-ευνοϊκή. Επιπρόσθετα, το συνεχώς αυξανόμενο φράγμα Coulomb μειώνει την πιθανότητα εμφάνισης του φαινομένου σήραγγος και άρα η πυρηνοσύνθεση που οφείλεται σε επαγγαγή φορτισμένων σωματιδίων σταματά με την καύση του πυριτίου. Σε αντίθετη περίπτωση, οι αναμενόμενες πυρηνικές αναλογίες θα ήταν πολύ μικρότερες από αυτές που παρατηρούμε (X. Eλευθεριάδης, *Πυρηνοσύνθεση: Δημιουργία των Στοιχείων στο Σύμπαν*, pp. 46). Με λίγα λόγια, όσον αφορά την αστρική πυρηνοσύνθεση, πυρήνες με μαζικό αριθμό μεγαλύτερο του 56 δεν μπορούν να σχηματιστούν μέσω θερμοπυρηνικών αντιδράσεων (π.χ. πυρηνική σύντηξη) και άλλοι μηχανισμοί πρέπει να ληφθούν υπόψιν.

Για την πυρηνοσύνθεση των βαρέων στοιχείων (βαρύτερων του σιδήρου) και την ερμηνεία των παρατηρούμενων ισοτοπικών αναλογιών οι Burbidge, Burbidge, Fowler και Hoyle πρότειναν το 1957 (το περίφημο B²FH paper) ότι τα στοιχεία αυτά πρέπει να παράγονται κυρίως με αντιδράσεις αρπαγής νετρονίων και συνεπακόλουθες β-διασπάσεις (E. Margaret Burbidge, G. R. Burbidge, William A. Fowler, and F. Hoyle. *Synthesis of the elements in stars*. Rev. Mod. Phys., 29:547–650, Oct 1957).

D.1.1

Αρπαγή νετρονίων

Με τον όρο "αρπαγή νετρονίων" εννοούμε την πυρηνική αντίδραση κατά την οποία ένα ή περισσότερα νετρόνια συγκρούονται και "απορροφούνται" από τον πυρήνα προς σχηματισμό ενός βαρύτερου πυρήνα. Η αρπαγή νετρονίων αποτελεί την πιο απλή περίπτωση περιγραφής πυρηνικών αντιδράσεων λόγω της απουσίας δυνάμεων Coulomb. Η αντίδραση αυτή παίζει σημαντικότατο ρόλο, όπως θα δούμε παρακάτω, στην πυρηνοσύνθεση βαρέων στοιχείων στα άστρα μέσω δύο βασικών διεργασιών, την αργή διαδικασία

¹Στην πραγματικότητα, το ⁶²Ni είναι αυτό με τη μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης (M. P. Fewell. "The atomic nuclide with the highest mean binding energy". American Journal of Physics, 63:653–658, July 1995). Ο Fe⁵⁶ όμως έχει μικρότερη μάζα ανα νουκλεόνιο, σε σχέση με το νικέλιο, λόγω του ότι έχει λιγότερα νετρόνια και αυτό του δίνει το "προβάδισμα" έναντι του Ni⁶² όσον αφορά την ευστάθεια του πυρήνα.

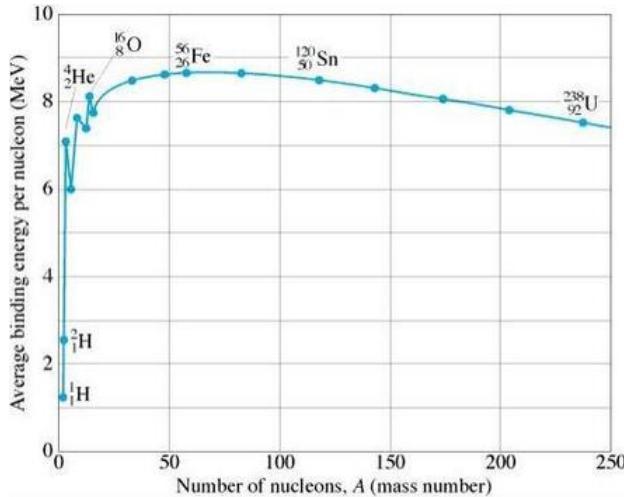


Figure D.1: Ενέργεια σύνδεσης ανα νουκλεόνιο συναρτήσει του μαζικού αριθμού Α.

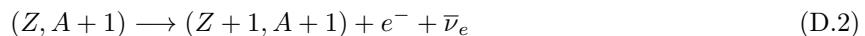
(slow-process) και την γρήγορη διαδικασία (rapid-process). Οι όροι προέρχονται από την συσχέτιση του μέσου χρόνου που απαιτείται σε δεδομένο αστρικό περιβάλλον για αρπαγή νετρονίου, με το μέσο χρόνο ζωής του υπάρχοντος πυρήνος με β-διάσπαση (X. Ελευθεριάδης, *Πυρηνοσύνθεση: Δημιουργία των Στοιχείων στο Σύμπαν*, pp. 47).

Την θεώρηση έχουμε ότι η ενεργός διατομή για αρπαγή νετρονίου είναι ανεξάρτητη της ενέργειας, τότε ο μέσος χρόνος που απαιτείται για να γίνει η αρπαγή είναι:

$$\tau_n = \frac{1}{N_n \langle \sigma u \rangle} \approx \frac{1}{N_n \langle \sigma \rangle u_T} = \frac{1}{N_n \langle \sigma \rangle} \left(\frac{\mu_n}{2kT} \right)^{1/2} \quad (\text{D.1})$$

όπου N_n το πλήθος των νετρονίων, $\langle \sigma \rangle$ η μέση ενεργός διατομή για σύλληψη νετρονίων, u_T η ταχύτητα των θερμικών νετρονίων και μ_n η ανηγμένη μάζα των νετρονίων. Για μια τυπική ενεργό διατομή νετρονίων της τάξης των $\langle \sigma \rangle \sim 10^{-25} \text{ cm}^2$ και θερμοκρασίας των $5 \times 10^8 \text{ K}$, προκύπτει ότι $\tau_n \approx 10^9 / N_n$ χρόνια.

Ακόμα, ο μέσος χρόνος για μία β-διάσπαση όπως φαίνεται στην εξίσωση (D.2), είναι της τάξης των μερικών ωρών.



Η s-διεργασία Ας υποθέσουμε ένα αστρικό περιβάλλον στο οποίο η πυκνότητα των νετρονίων είναι χαμηλή, $N_n \sim 10^5 \text{ cm}^{-3}$, και άρα ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει σύλληψη νετρονίου από έναν πυρήνα είναι μεγάλος. Μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα, ο πυρήνας θα κάνει αρπαγή ενός νετρονίου και ταυτόχρονα θα εκπέμψει ένα φωτόνιο σύμφωνα με την αντίδραση



Το ισότοπο που θα προκύψει μπορεί να είναι είτε σταθερό, είτε ασταθές. Εάν είναι σταθερό τότε, μέσω της ίδιας διαδικασίας, θα δημιουργηθεί ένα νέο ισότοπο $(Z, A + 2)$ κοκ. Στην περίπτωση όμως που το

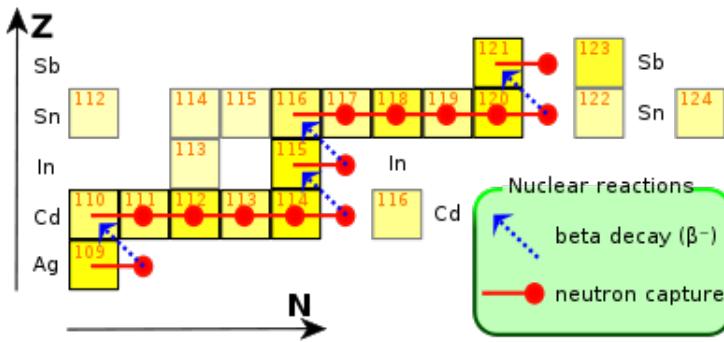


Figure D.2: Η διαδρομή της s-διεργασίας.

ισότοπο που δημιουργείται είναι ασταθές όσον αφορά τη β-διάσπαση (λόγω περισσείας νετρονίων), τότε θα διασπαστεί πριν προλάβει να λάβει χώρα η επόμενη αρπαγή νετρονίου και το ισότοπο που θα δημιουργηθεί θα είναι το $(Z + 1, A + 1)$ οδεύοντας με αυτό τον τρόπο προς την κοιλάδα σταθερότητας. Αυτή είναι η λεγόμενη **s-διεργασία** και συμβαίνει όταν ο χρόνος διάσπασης ενός ασταθούς πυρήνα είναι μικρότερος από τον χρόνο που απαιτείται για να κάνει αρπαγή νετρονίου. Τα ισότοπα που εξελίσσονται βάσει αυτής της διεργασίας βρίσκονται επάνω ή πολύ κοντά στην κοιλάδα σταθερότητας, οπότε η s-διεργασία είναι υπεύθυνη για την παραγωγή της πλειονότητας των στοιχείων με μαζικό αριθμό από 63 έως 209 καθώς ο ^{209}Bi είναι ο πιο βαρύς σταθερός πυρήνας. Το ισότοπο με $A = 210$ παραγέται με νετρονική αρπαγή από το ^{209}Bi και διασπάται με α-εκπομπή στο ^{206}Pb , έτσι ένας μικρός κύκλος που αποτελείται από μια αρπαγή νετρονίου και μια εκπομπή σωματιδίου άλφα τερματίζει την s-διεργασία² (D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968, pp. 560).

H r-διεργασία Στη συνέχεια ας αναλογιστούμε ένα διαφορετικό περιβάλλον όπου η ροή των νετρονίων είναι πολύ υψηλή, $N_n \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$. Τόσο υψηλές ροές νετρονίων παρατηρούνται κατά την έκρηξη υπερκαινοφανών αστέρων (supernovae). Σε αυτό το σενάριο, έχουμε διαδοχικές συλλήψεις νετρονίων σε πολύ μικρή χρονική κλίμακα, της τάξης των millisecond, και έτσι τα ενδιάμεσα ισότοπα δεν προλαβαίνουν να διασπασθούν οπότε δημιουργούνται πυρήνες εξαιρετικά πλούσιοι σε νετρόνια. Οι πυρήνες αυτοί εντοπίζονται μακριά από την κοιλάδα σταθερότητας και συνεπώς αυξάνεται η αστάθεια τους όσο αυξάνεται ο αριθμός των νετρονίων που συλλαμβάνονται. Φυσικά υπάρχει ένα ανώτατο όριο στο πόσο μπορεί να αυξήθει ο αριθμός των νετρονίων στα διάφορα στοιχεία. Το όριο αυτό ονομάζεται **neutron drip line** και είναι το όριο στο οποίο η ενέργεια σύνδεσης του τελευταίου νετρονίου μηδενίζεται. Όσο πλησιάζουμε αυτό το όριο, οι πυρήνες γίνονται όλο και πιο ασταθείς και ο μέσος χρόνος που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί μία β-διάσπαση γίνεται συγχρίσιμος με τον μέσο χρόνο που απαιτείται για να γίνει μία αρπαγή νετρονίου. Έτσι, καθίσταται δυνατόν να προηγηθεί μία β-διάσπαση από μία σύλληψη νετρονίου οπότε ο πυρήνας κάνει ένα βήμα προς την κοιλάδα σταθερότητας. Το στοιχείο όμως που δημιουργήθηκε από την β-διάσπαση δεν προχωράει περαιτέρω καθώς είναι πιο σταθερό από το μητρικό του και άρα ο μέσος χρόνος διάσπασης του είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της αρπαγής νετρονίων. Πρέπει να περιμένουμε λοιπόν μέχρι να δημιουργηθεί ξανά ένα εξόχως βραχύβιο ισότοπο το οποίο με την σειρά του θα κάνει το δικό του βήμα προς τη κοιλάδα σταθερότητας κοκ. Στην περίπτωση που δημιουργηθεί ένα ισότοπο με μαγικό αριθμό νετρονίων (χλειστοί νετρονικοί φλοιοί), εμφανίζει μεγάλη αντίσταση στην αρπαγή νετρονίων καθώς τείνει να διασπαστεί αμέσως. Όταν όμως υπάρχει μεγάλη ροή νετρονίων δεν είναι απίθανο να γίνουν διαδοχικές συλλήψεις πριν προλάβει να διασπαστεί και έτσι να συνεχιστεί η r-διεργασία. Οι κορυφές όπου δημιουργούνται στοιχεία με χλειστούς νετρονικούς φλοιούς καθώς και η επίδραση που έχουν στην εξέλιξη της r-διεργασίας φάνεται στο σχήμα D.3. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **r-διεργασία** και συμβαίνει όταν ο μέσος χρόνος διάσπασης ενός πυρήνα είναι μεγαλύτερος από τον μέσο χρόνο στον οποίο κάνει αρπαγή νετρονίων. Ο τερματισμός της διεργασίας αυτής πραγματοποιείται μέσω φαινομένων

²Πλήρης ανάλυση για τον τερματισμό της s-διεργασίας μπορεί να βρεθεί στο paper των Clayton και Rassbach, *Termination of the s-Process, The Astrophysical Journal, Vol. 148, April 1967*.

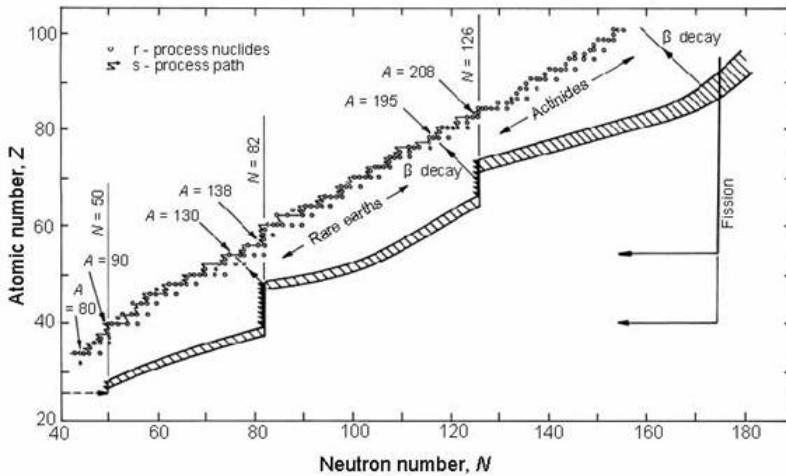


Figure D.3: Η διαδρομή της r-διεργασίας. Η διαφορά της με την s-διεργασία είναι εμφανής καθώς φαίνεται ο τρόπος που απομακρύνεται από την κοιλάδα σταθερότητας. Τα κάθετα "σκαλοπατάκια" που εμφανίζονται στο διάγραμμα αντιστοιχούν σε μαγικούς αριθμούς όπου η r-διεργασία εμφανίζει ισχυρή αντίσταση.

σχάσης.

Είναι φανερό ότι, μόλις σταματήσει η ακτινοβόληση με νετρόνια, τα r-ισότοπα που έχουν δημιουργηθεί θα αρχίσουν να υπόκεινται σε β-διασπάσεις –όντας ασταθή– λόγω του δυσανάλογα μεγάλου αριθμού νετρονίων που έχουν. Γενικά, μπορούμε να έχουμε την παραγωγή ισοτόπων και με τις δύο διεργασίες που έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής, όπως επίσης και ισότοπα που προέρχονται αποκλειστικά μόνο από μία από αυτές. Αν για παράδειγμα, ένας r-πυρήνας καταλήξει μετά από τις διαδοχικές β-διασπάσεις σε σταθερό ισότοπο (Z, A), τότε αν το επόμενο ισότοπο ($Z + 1, A$) είναι επίσης σταθερό, πρέπει αναγκαστικά να έχει δημιουργηθεί με την s-διεργασία και όχι με την r. Το τελικό αποτέλεσμα στις αναλογίες των στοιχείων είναι να έχουμε ισότοπα που προέρχονται στην πλειοψηφία τους από την s-διεργασία αλλά και ισότοπα που προέρχονται αποκλειστικά από την r-διεργασία. Οι κοσμικές αναλογίες των βαρέων στοιχείων φαίνονται στο σχήμα D.4.

Έχοντας εξασφαλίσει μία βασική γνώση για τον τρόπο δημιουργίας των βαρέων στοιχείων σε διάφορες αστρικές συνθήκες, μπορούμε να κάνουμε κάποιες βασικές παρατηρήσεις. Όπως αναφέρει ο Clayton στο βιβλίο του *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, η σύνθεση βαρέων στοιχείων μέσω της s-διεργασίας μπορεί να ξεκινήσει από οποιονδήποτε πυρήνα με $A > 8$. Όμως η ενεργός διατομή για αρπαγή νετρονίου στους ελαφρείς πυρήνες είναι κατά μέσο όρο πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη ενεργό διατομή για πυρήνες μετά την ομάδα του σιδήρου. Έτσι, απαιτείται πολύ μεγαλύτερη ροή νετρονίων για την δημιουργία ενός βαρέως πυρήνα ξεκινώντας από το πυρίτιο, για παράδειγμα, απ' ότι ξεκινώντας από το σιδηρο. Γίνεται αντιληπτό λοιπόν ότι λόγω του περιορισμένου αριθμού ελεύθερων νετρονίων που είναι διαθέσιμα, είναι πολύ πιο ωφέλιμο να έχουμε σύνθεση βαρέων στοιχείων χρησιμοποιώντας την ομάδα του σιδήρου σαν "δότες" (seed nuclei) αντί τα ελαφρύτερα στοιχεία.

Στο σημείο αυτό, γίνεται ξεκάθαρο ότι οι αντιδράσεις και οι μηχανισμοί παραγωγής ελεύθερων νετρονίων σε ένα δεδομένο αστρικό περιβάλλον είναι μείζωνος σημασίας για την εξέλιξη της s-διεργασίας. Γενικά, τα ελεύθερα νετρόνια δεν βρίσκονται σε αριθμούς κατά την διάρκεια των φάσεων καύσης των πυρηνικών καυσίμων ενός αστέρα όπως περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3. Γι' αυτό το λόγο είναι σημαντική η ύπαρξη αναλυτικών μοντέλων αστρικής εξέλιξης ώστε να γίνει κατανοητή η πηγή αυτών των νετρονίων. Σήμερα, θεωρείται παραδεκτό ότι η κύρια πηγή ελεύθερων νετρονίων προέρχεται από αρπαγές σωματιδίων-α στα διάφορα στρώματα φλοιών ενός αστέρα σύμφωνα με τις αντιδράσεις:



όπου η (D.5) είναι η πιο πολλά υποσχόμενη από αυτές, απλά γιατί το O^{17} φαίνεται να παράγεται και να υπάρχει σε μεγαλύτερη αφθονία σε σχέση με τα άλλα δύο.

Το τελικό συμπέρασμα που πρέπει να κρατήσουμε για την s-διεργασία είναι ότι:

- γίνεται στο εσωτερικό των άστρων.
- απαιτεί μικρή ροή ελεύθερων νετρονίων ώστε τα ασταθή ισότοπα που προκύπτουν να προλαβαίνουν να υποστούν β -διάσπαση.
- μπορούμε να υποθέσουμε ρεαλιστικά ότι τροφοδοτείται από την ομάδα του σιδήρου.
- λαμβάνει χώρα κοντά στη κοιλάδα σταθερότητας και δημιουργεί ισότοπα με κλειστούς νετρονικούς φλοιούς.

Αντίστοιχα τα βασικά σημεία που πρέπει να μας μείνουν σχετικά με την r-διεργασία είναι:

- γίνεται κατά τα τελευταία στάδια πριν την καταστρεπτική έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς αστέρα (supernova).
- απαιτεί πολύ μεγάλη ροή ελεύθερων νετρονίων ώστε τα ασταθή ισότοπα που προκύπτουν να μην προλαβαίνουν να υποστούν β -διάσπαση. Τέτοιες συνθήκες χυριαρχούν στα supernovae.
- λαμβάνει χώρα μακριά από τη κοιλάδα σταθερότητας και είναι υπεύθυνη για ισότοπα ιδαιτέρως πλούσια σε νετρόνια.
- Τα τελικά σταθερά ισότοπα που δημιουργούνται έχουν νετρονικό αριθμό μικρότερο του αντιστοιχούντος σε κλειστό νετρονικό φλοιό.

D.1.2

Αρπαγή πρωτονίων

Μέχρι στιγμής είδαμε το πως μπορούν να δημιουργηθούν πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια, μέσω της αρπαγής νετρονίων. Υπάρχουν όμως και κάποιοι πυρήνες, πλούσιοι σε πρωτόνια, η παρουσία των οποίων δεν μπορεί να ερμηνευθεί με καμία διαδικασία σύλληψης νετρονίων. Ένας τρόπος δημιουργίας τέτοιων πυρήνων είναι η αρπαγή πρωτονίου προς σχηματισμό βαρύτερων ισοτόπων για την οποία θα μιλήσουμε σε αυτό το υποκεφάλαιο. Οι πυρήνες οι οποίοι είναι πλούσιοι σε πρωτόνια και δεν μπορούν να παραχθούν μέσω της s ή της r-διεργασίας, ονομάζονται **p-πυρήνες**.

H p-διεργασία Ο όρος p-διεργασία παρουσιάζεται για πρώτη φορά στο διάσημο B²FH paper στο οποίο προτείνεται σαν ο μοναδικός μηχανισμός παραγωγής p-πυρήνων σε υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου II (type-II supernovae). Αργότερα, αποδείχτηκε ότι δεν πληρούνται οι συνθήκες σε τέτοιου είδους υπερκαινοφανών. Η διεργασία έχει ως αφετηρία τα βαρέα ισότοπα τα οποία προήλθαν από την s ή την r διεργασία. Στη συνέχεια, ένα πρωτόνιο συλλαμβάνεται μέσω της γενικής αντίδρασης (p, γ),

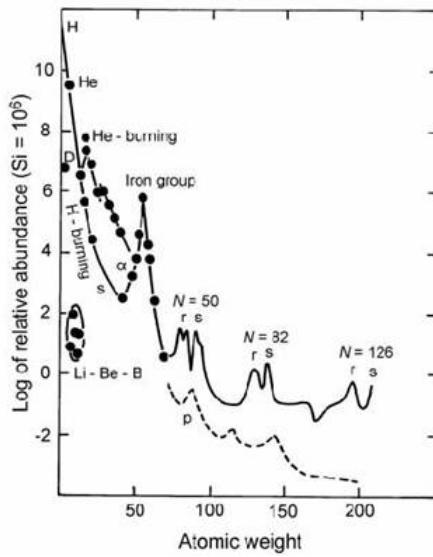


Figure D.4: Κοσμικές αναλογίες των βαρέων στοιχείων συναρτήσει του μαζικού αριθμού. Σημαντική λεπτομέρεια ότι οι κορυφές αριστερά των αντιστοιχουσών σε κλειστούς νετρονικούς φλοιούς ($N=50, 82, 126$) οφείλονται σε ισότοπα προερχόμενα από την r -διεργασία.

αλλάζοντας έτσι το ισότοπο σ' ένα καινουργιο χημικό στοιχείο ενώ ταυτόχρονα, αλλάζει και ο λόγος νετρονίων-πρωτονίων οδηγώντας μας έτσι σε πυρήνες πλούσιους σε πρωτόνια.

Είναι φανερό ότι η λογική αυτή δεν θα οδηγήσει σε πολύ βαρείς πυρήνες λόγω του ότι η θερμοκρασία του πλάσματος δεν αυξάνει αυθαίρετα με αποτέλεσμα τα πρωτόνια να μην έχουν την κατάλληλη ενέργεια για να ξεπεράσουν το συνεχώς αυξανόμενο φράγμα Coulomb. Άλλα ακόμα κι αν η θερμοκρασία αυξάνονται με αυθαίρετο τρόπο, οι επικείμενες φωτοδιασπάσεις δεν θα επέτρεπαν τον σχηματισμό βαρέων πυρήνων επειδή θα αφαιρούσαν πρωτόνια με πιο γρήγορο ρυθμό από τις αρπαγές πρωτονίων. Ένας εναλλακτικός τρόπος από την r -διεργασία θα μπορούσε να γίνει σ' ένα περιβάλλον όπου υπάρχει υπερβολικά μεγάλη ροή πρωτονίων με αποτέλεσμα να αυξάνεται ο ρυθμός των αρπαγών χωρίς να χρειαστεί να αυξηθεί σημαντικά η θερμοκρασία του πλάσματος. Τέτοιους μηχανισμούς θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Η r -διεργασία Η συγκεκριμένη διαδικασία παίρνει το όνομά της από τον όρο "ταχεία σύλληψη πρωτονίου" (rapid proton capture process) και είναι προφανές ότι απαιτεί συγκεκριμένες συνθήκες ροής πρωτονίων και θερμοκρασίας προκειμένου να ξεπράστει το φράγμα Coulomb. Τέτοιες συνθήκες πιστεύεται ότι υπάρχουν σε διπλά συστήματα αστέρων, που αποτελούνται συνήθως από έναν αστέρα νετρονίων και έναν συνοδό αστέρα³. Σ' ένα τέτοιο σύστημα, αστρική ύλη από το συνοδό αστέρα έλκεται από το έντονο βαρυτικό πεδίο του αστέρα νετρονίων και δημιουργείται έτσι ένας περιστρεφόμενος δίσκος συσσώρευσης (accretion disk). Με αυτό τον τρόπο ενεργοποιείται μία εκρηκτική καύση υδρογόνου στα πλαίσια της οποίας εξελίσσεται και η r -διεργασία. Δεν είναι απίθανο να έχουμε παρόμοια φαινόμενα και στον δίσκο συσσώρευσης γύρω από μία μαύρη τρύπα (R. Surman ,et.al., *Heavy element synthesis in neutrino-processed black hole accretion disk ejecta*, Proceedings of Science, XIII Nuclei in the Cosmos, 7-11 July 2014, Debrecen, Hungary). Λόγω της συνεχούς αύξησης των πρωτονίων, η διαδικασία αυτή οδηγεί σε παραγωγή ισοτόπων που απομακρύνονται από την κοιλάδα σταθερότητας και πλησιάζουν προς την λεγόμενη **proton drip line** η οποία ορίζεται σε αντιστοιχία με την neutron drip line. Όσο πλησιάζουμε σε αυτό το όριο, οι άλφα διασπάσεις, η β^+ διάσπαση καθώς και η εκπομπή πρωτονίου γίνονται όλο και πιο συχνές και οδηγούν τα ασταυτή ισότοπα πίσω προς την κοιλάδα σταθερότητας. Το τελευταίο ισότοπο το οποίο μπορεί να παράγει αυτή η διεργασία είναι το Te^{107} το οποίο τείνει να διασπαστεί με

³Τα συστήματα αυτά ονομάζονται αλλιώς και x-ray bursters.

α-διάσπαση, οπότε κλείνει με αυτόν τον τρόπο ο κύκλος της rp-διεργασίας.

Η pn-διεργασία Μία ακόμα διεργασία η οποία μπορεί να συμβαίνει παράλληλα με την rp-process είναι η λεγόμενη **pn-διεργασία** (neutron-rich rapid proton capture) και πρόκειται ουσιαστικά για αντιδράσεις τύπου (n, p). Μέσω των αντιδράσων αυτών μπορεί εύκολα να ξεπεραστούν τα σημεία αναμονής (waiting points)⁴ της rp-διεργασίας καθώς ο χρόνος για μια τέτοια αντιδραση είναι μικρότερος τόσο από τον μέσο χρόνο αρπαγής πρωτονίου/φωτοδιάσπασης όσο και από τον μέσο χρόνο β-διάσπασης στα σημεία αυτά. Φυσικά, αυτός ο μηχανισμός απαιτεί μία πηγή ελεύθερων νετρονίων τα οποία δεν είναι συνήθως παρόντα σε περιβάλλον με τόσο πυκνό πλάσμα πρωτονίων.

Η np-διεργασία Το 2006 προτάθηκε από την Fröhlich και άλλους (C. Fröhlich, et.al., *Neutrino-induced nucleosynthesis of $A \geq 64$ nuclei: The np process*, Phys. Rev. Lett., 96:142502, Apr 2006) ένας καινούργιος μηχανισμός παραγωγής νετρονίων σε περιβάλλον πλούσιο σε πρωτόνια μέσω της αντιδρασης:



Αυτός ο μηχανισμός ομάστηκε np-διεργασία και θα μπορούσε να παρέχει τα απαραίτητα νετρόνια για την εξέλιξη της pn-διεργασίας σε ένα περιβάλλον όπου εκτός από την παρουσία πλάσματος με μεγάλη πυκνότητα πρωτονίων, θα υπάρχει επίσης και μεγάλη ροή (αντι)-νετρίνων καθώς τα τελευταία αλληλεπιδρούν εξαιρετικά ασθενώς με την ύλη. Τέτοιες συνήθηκες πιστεύεται ότι επικρατούν σε υπερκαινοφανείς αστέρες και σε εκλάμψεις ακτίνων γαμμα (gamma-ray bursts).

D.1.3

Φωτοδιάσπαση

Είδαμε πως μπορεί να δημιουργηθεί ένας πυρήνας πλούσιος σε πρωτόνια μέσω της συλλήψης πρωτονίου. Ένας δεύτερος τρόπος δημιουργίας τέτοιων πυρήνων είναι η φωτοδιάσπαση ή αλλιώς γ -διεργασία, κατά την οποία έχουμε μείωση του αριθμού των νετρονίων από έναν πυρήνα μέσω αντιδράσεων τύπου (γ, n). Γενικά, στις συνήθηκες υψηλής ενέργειας που μελετάμε, το φαινόμενο της φωτοδιάσπασης εμφανίζεται πολύ συχνά και εμποδίζει κατά κάποιον τρόπο τους πυρήνες να φτάσουν στις drip lines. Φαίνεται ότι η φωτοδιάσπαση και η αρπαγή πρωτονίου είναι ανταγωνιστικοί μεταξύ τους μηχανισμοί δημιουργίας βαρέων πυρήνων και σήμερα είναι γενικά αποδεκτό ότι η φωτοδιάσπαση είναι η βασική διαδικασία σύνθεσης rp-πυρήνων.

D.1.4

Η I-διεργασία

Όπως έχει αναφερθεί, η ύπαρξη των ελαφρών στοιχείων όπως το λίθιο, το δευτέριο, το βόριο και το βηρύλλιο, δεν δικαιολογείται λόγω των συνήθηκών που επικρατούν στο εσωτερικό των άστρων. Σε αυτές τις συνήθηκες, τα στοιχεία αυτά θα έπρεπε να καταστρέφονται πολύ γρήγορα και άρα να μην παρατηρούνται σε αυτές τις κοσμικές αναλογίες, έστω κι αν αυτές είναι πολύ μικρές. Άρα, είτε πρέπει να δημιουργήθηκαν σε ψυχρό περιβάλλον, είτε να απομακρύνθηκαν από το αστρικό περιβάλλον αμέσως μετά την δημιουργία τους. Ένας μηχανισμός που μπορεί να εξηγήσει τη σύνθεση αυτών των στοιχείων στο μεσοαστρικό

⁴Όταν ένας πυρήνας δεν μπορεί να προχωρήσει παρακάτω προς σχηματισμό βαρύτερου ισοτόπου είτε λόγω φωτοδιάσπασης, είτε λόγω προσέγγισης στη drip line, τότε πρέπει να περιμένει μέχρι να βρεθεί τρόπος να "ξεφύγει" από αυτό το σημείο μέσω κάποιας διαδικασίας. Τα σημεία αυτά στα οποία κάποια ισότοπα φύλανται να "περιμένουν" για την εξέλιξη της πυρηνοσύνθεσης ονομάζονται σημεία αναμονής.

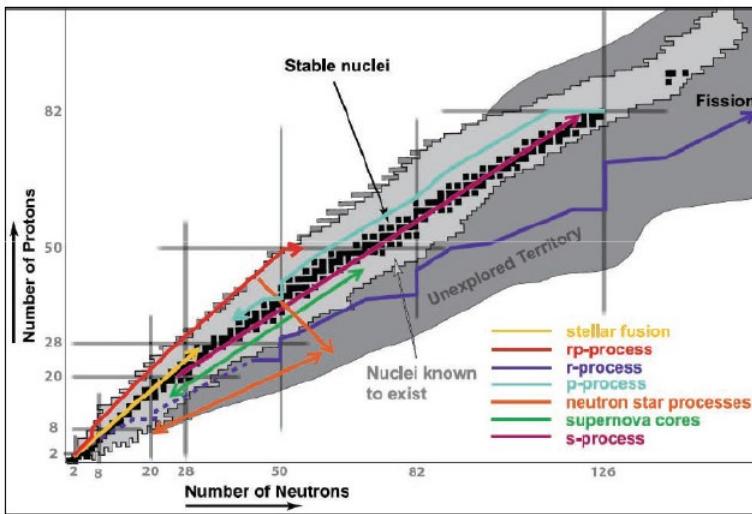


Figure D.5: Διάγραμμα Segre και συσχέτιση των χημικών στοιχείων με τους μηχανισμούς παραγωγής τους.

χώρο (άρα σε ψυχρή περιοχή) είναι η **1-διεργασία**⁵ η οποία πρόκειται ουσιαστικά για μία αντιδραση θρυμματισμού (spallation). Κατά την διαδικασία αυτή, κοσμικές ακτίνες προσπίπτουν σε στοιχεία με σημαντική κοσμική αναλογία (C, N, O) και τα διασπούν με κυρίως παράγωγα τα Li, Be και B.

Στο περιβάλλον στο οποίο λαμβάνουν χώρα οι διαδικασίες πυρηνοσύνθεσης, δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε κάποιον ανιχνευτή και να πάρουμε πρωτογενή δεδομένα. Γι' αυτό το λόγο δημιουργείται η ανάγκη να μπορέσουμε με κάποιο τρόπο να τις εκφράσουμε μέσω των μαθηματικών και στη συνέχεια να μπορέσουμε με την βοήθεια αριθμητικών μεθόδων να τις προσομοιώσουμε, να τις αξιολογήσουμε και να τις συγχρίνουμε με τα παρατηρησιακά μας δεδομένα. Αν θέλουμε να προσομοιώσουμε όμως την δημιουργία όλων των στοιχείων, θα πρέπει να γνωρίζουμε αρχικά όλα εκείνα τα φυσικά χαρακτηριστικά που μπορούν να την περιγράψουν. Για παράδειγμα, θα πρέπει να γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά των πυρήνων που μπορεί να λαμβάνουν μέρος στην πυρηνοσύνθεση, τον χρόνο ημιζωής τους, το σπιν τους, τα ενεργειακά τους επίπεδα κ.α. Πρέπει να ξέρουμε επίσης και τα χαρακτηριστικά των αντιδράσεων μεταξύ πυρήνων, νουκλεονίων, λεπτονίων, φωτονίων ή νετρίνων.

Παρακάτω θα περιγράψουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε τη διαφορική εξίσωση, που στην συνέχεια κάποιος πρέπει να επιλύσει αριθμητικά με σκοπό να προσομοιώσει τις διαδικασίες της πυρηνοσύνθεσης.

D.2 Ρυθμός Αντιδράσεων

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε στο εργαστήριό μας ένα αέριο που αποτελείται από δύο σωματίδια i και j τα οποία έχουν αριθμητικές πυκνότητες n_i (cm^{-3}) και n_j (cm^{-3}) με n να είναι ο αριθμός των σωματιδίων στον όγκο και την ενεργό διατομή μεταξύ αυτών των δύο σ (cm^2). Αρχικά και για λόγους απλότητας, ωστερούμε το ένα σωματίδιο ακίνητο, ως στόχο (έστω το σωμάτιο j), και αυτόν τον στόχο θα τον "βομβαρδίσουμε" με το άλλο σωμάτιο, το οποίο θα κινείται με γνωστή ταχύτητα.

Αυτό που θα μετρήσουμε πειραματικά είναι η ενεργός διατομή μεταξύ αυτών των σωματιδίων. Οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν ωστόσο από αυτή την διαδικασία είναι το πόσες αντιδράσεις γίνονται στη μονάδα του χρόνου και στη μονάδα του όγκου. Η πληροφορία αυτή όμως, σχετίζεται με την σχετική ροή των

⁵Στη διεύθυνη βιβλιογραφία μπορεί να συναντήσει κάποιος και τον όρο x-διεργασία αντί του όρου 1-διεργασία.

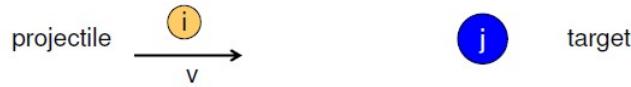


Figure D.6: Διάταξη βλήματος-στόχου.

σωματιδίων i , των αριθμό των σωματιδίων j και την μετρούμενη ενεργό διατομή μεταξύ τους. Συνδυάζοντας τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τις αντιδράσεις που θα πραγματοποιηθούν από αυτή την σύγκρουση των δύο σωματιδίων με τη μορφή:

$$r = n_i \cdot u \cdot n_j \cdot \sigma(u) \text{ cm}^{-3}/\text{s} \quad (\text{D.8})$$

Στη Φύση όμως είναι σχεδόν απίθανο να βρεθεί ένα σωματίδιο ακίνητο. Το πιθανότερο σενάριο είναι και τα δύο σωμάτια να βρίσκονται σε κίνηση τη στιγμή της μεταξύ τους σύγκρουσης. Έτσι, για να εκφράσουμε και αυτή την κίνηση του δεύτερου σωματίου θα πρέπει να υπολογίσουμε την σχετική ταχύτητα μεταξύ τους. Πλέον λοιπόν, οι αντιδράσεις ανά μονάδα χρόνου και όγκου θα είναι:

$$r_{i,j} = \int \sigma \cdot |\vec{u}_i - \vec{u}_j| dn_i dn_j \quad (\text{D.9})$$

Γενικά όμως, τα σωματίδια δεν έχουν σταθερή ταχύτητα κατά τη διάρκεια της κίνησής τους αλλά παρουσιάζουν μια κατανομή ταχυτήτων, έτσι είναι αναγκαίο να συμπειλάθουμε και αυτή την παράμετρο γράφοντας:

$$r_{i,j} = \int \sigma(|\vec{u}_i - \vec{u}_j|) \cdot |\vec{u}_i - \vec{u}_j| \cdot \phi(\vec{u}_i) \cdot \phi(\vec{u}_j) d^3 u_i d^3 u_j \quad (\text{D.10})$$

όπου το $r_{i,j}$ εκφράζει τον ρυθμό των αντιδράσεων, το $\sigma(|\vec{u}_i - \vec{u}_j|)$ την ενεργό διατομή συναρτήσει της σχετικής ταχύτητας μεταξύ των δύο σωματιδίων, το $|\vec{u}_i - \vec{u}_j|$ την σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο σωματιδίων και τέλος τα $\phi(\vec{u}_i), \phi(\vec{u}_j)$ την κατανομή των ταχυτήτων με τις οποίες κινούνται τα σωματίδια. Το πρόβλημά μας όμως ακόμα δεν έχει παραμετροποιηθεί πλήρως. Οι πυρήνες που βρίσκονται μέσα στο αστροφυσικό πλάσμα ενός αστέρα για παραδειγμα, δεν έχουν όλοι την ίδια ενέργεια. Ακολουθούν μια κατανομή ενέργειών και πιο συγκεκριμένα μπορούμε να εκφράσουμε αυτή την πληθώρα ενέργειών μεσω της γνωστής μας κατανομής Maxwell-Boltzmann.

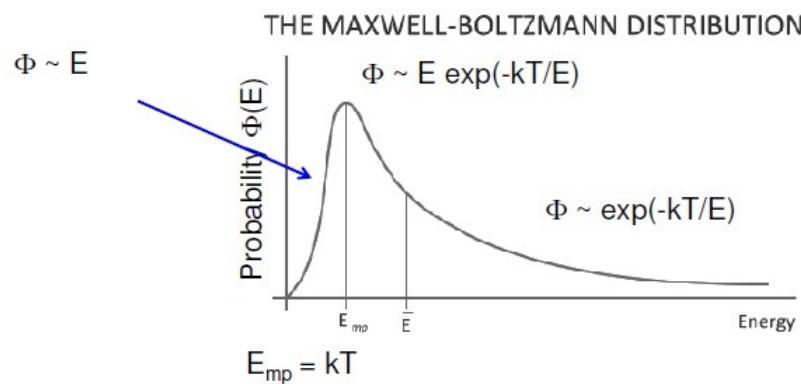


Figure D.7: Κατανομή Maxwell-Boltzmann.

Η κατανομή Maxwell-Boltzmann όπως βλέπουμε και στο σχήμα D.7, στον οριζόντιο άξονα εκφράζει την ενέργεια και στον κάθετο άξονα εκφράζει την πιθανότητα να συναντήσουμε αυτή την ενέργεια στο σύστημα

που μελετάμε. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο της κατανομής εμφανίζεται σε περιοχή χαμηλών ενεργειών ενώ μια μακριά και φθίνουσα ουρά αντιστοιχεί σε μεγαλύτερες τιμές ενέργειας. Για να μπορέσουμε να κάνουμε ένα βήμα παραπέρα πάνω στην προσομοίωση της πυρηνοσύνθεσης, θα πρέπει να κάνουμε κάποιες απαραίτητες απλοποιήσεις. Ορίζουμε λοιπόν ως κέντρο αυτού του συστήματος το κέντρο μάζας του σωματιδίου που μελετάμε λαμβάνοντας υπόψιν ότι η κατανομή των ταχυτήτων κανονικοποιείται στη μονάδα

$$\int \phi(\vec{u}) d^3u = 1 \quad (\text{D.11})$$

και κανονικοποιούμε την κατανομή πιθανότητας ενεργειών συναρτήσει του όγκου. Έπειτα από τα παραπάνω ο ρυθμός αντίδρασης έχει πλέον την μορφή

$$r_{i,j} = n_i n_j \langle \sigma u \rangle_{i,j} \quad (\text{D.12})$$

όπου ο όρος $\langle \sigma u \rangle_{i,j}$ εκφράζει την μέση θερμοπυρηνική ενεργό διατομή. Αν θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την θερμοπυρηνική ενεργό διατομή για σωματίδια που ανήκουν σε όλο το ενεργειακό φάσμα που φαίνεται στην κατανομή Maxwell-Boltzmann, λαμβάνοντας υπόψιν τα προηγούμενα βήματα, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\langle \sigma u \rangle(T) = \left(\frac{8}{\mu \pi} \right)^{1/2} \frac{1}{k T^{3/2}} \int_0^\infty E \sigma(E) \exp(-E/kT) dE \quad (\text{D.13})$$

όπου μια το χημικό δυναμικό του συστήματος που μελετάμε, T η θερμοκρασία, $\sigma(E)$ η ενεργός διατομή των ταχυτήτων συναρτήσει της ενέργειας και k η σταθερά Maxwell-Boltzmann. Η σχέση μας τώρα εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία. Αυτό σημαίνει για εμάς ότι αν ξέρουμε την ενεργό διατομή $\sigma(E)$ για όλες τις ενέργειες, αν δηλαδή μπορέσουμε και την μετρήσουμε πειραματικά, τότε μπορούμε να βρούμε εύκολα και τον ρυθμό των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων. Όμως, στο εργαστήριο μπορούμε να μετρήσουμε ένα μικρό εύρος ενέργειών και μόνο, ενώ στο εσωτερικό ενός αστέρα υπάρχει μια ολόχληρη κατανομή ενέργειών. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που εκφράζει αυτή την δυσκολία είναι το παραδειγμα της p-process. Αν θέλουμε να μελετήσουμε αυτή την διαδικασία πειραματικά, θα πρέπει να ξεπεράσουμε το δυναμικό Coulomb του πυρήνα-στόχου. Για τον σκοπό αυτό τον "χτυπάμε" με πρωτόνια συγκεχριμένης ενέργειας, ώστε να γίνει η αρπαγή του πρωτονίου, ενώ ο πυρήνας-στόχος είναι ακίνητος. Για να είναι τα αποτελέσματά μας ρεαλιστικά όμως, θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι σε ένα φυσικό αστρικό περιβάλλον, όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι διαλέσιμοι πυρήνες καλύπτουν ένα μεγάλο φάσμα ταχυτήτων, όπως και τα ελεύθερα πρωτόνια. Συνεπώς και στο εργαστήριο θα πρέπει να δημιουργήσουμε μια παρόμοια κατανομή πρωτονίων και στη συνέχεια να μετρήσουμε την ενεργό διατομή μεταξύ αυτών και των πυρήνων, κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο.

Για να μπορέσουμε να προσομοιώσουμε όλη εκείνη την μπάντα των ενέργειών και στη συνέχεια τον ρυθμό των αντιδράσεων, θα πρέπει να ξαναγράψουμε τον όρο $\sigma(E)$ με κάποιον άλλο τρόπο, χρησιμοποιώντας όλες τις πληροφορίες που έχουμε γι' αυτόν. Ένα χαρακτηριστικό που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμα είναι το φορτίο των σωματίδων που μελετάμε. Μπορεί για τα φορτισμένα σωματίδια η ενεργός διατομή να έχει εξάρτηση από αρκετούς παράγοντες, ωστόσο όμως ξέρουμε με σιγουριά ότι το φορτίο Z εξαρτάται από:

- Το δυναμικό Coulomb με μια εξάρτηση της μορφής: $\sim \exp(-E^{1/2})$
- Το μέγεθος του πυρήνα με μια εξάρτηση της μορφής: $\sim 1/E$

Για να διευκολύνουμε τις πράξεις, θεωρούμε ότι η ενεργός διατομή εξαρτάται μόνο από αυτούς τους δύο παράγοντες. Όλες τις άλλες εξαρτήσεις τις αθροίζουμε και τις εκφράζουμε με έναν παράγοντα που ονομάζουμε αστροφυσικό παράγοντα, S (astrophysical factor S).

D.3 Αστροφυσικός Παράγοντας

Για non-resonant αντιδράσεις, δηλαδή για αντιδράσεις που δεν εμφανίζουν μέγιστο σε κάποιο ενεργειακό επίπεδο, όλες οι υπόλοιπες επιδράσεις εκτός από τις δύο που αναφέραμε μεταβάλλονται με πολύ αργό ρυθμό συναρτήσει των ενεργειακών μεταβολών. Έτσι, σε τέτοιες περιπτώσεις ο αστροφυσικός παράγοντας S μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν ως σταθερός. Εύχολα λοιπόν μπορούμε να εκφράσουμε την συνεισφορά αυτών των παραγόντων. Με αυτόν τον τρόπο, η ενεργός διατομή πάρνει τη μορφή:

$$\sigma = E^{-1} \cdot \exp(-E^{1/2}) \cdot S(E) \quad (\text{D.14})$$

και ο ρυθμός αντιδράσεων γίνεται:

$$\langle \sigma u \rangle = \left(\frac{8}{\mu \pi} \right)^{1/2} \frac{1}{kT^{3/2}} \int_0^\infty E \sigma(E) \exp(-E/kT) dE \iff$$

$$\langle \sigma u \rangle = \left(\frac{8}{\mu \pi} \right)^{1/2} \frac{1}{kT^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp(-bE^{-1/2}) \exp(-E/kT) dE \quad (\text{D.15})$$

Στην τελευταία σχέση, όπως αναφέραμε, ο αστροφυσικός παράγοντας S μεταβάλλεται πολύ αργά με την ενέργεια, έτσι οι κυρίαρχοι όροι μέσα στο ολοκλήρωμα είναι οι δύο εκθετικοί οροί. Αν κάνουμε γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης θα πάρουμε το διάγραμμα που φαίνεται στο σχήμα D.8. Αν συνδυάσουμε

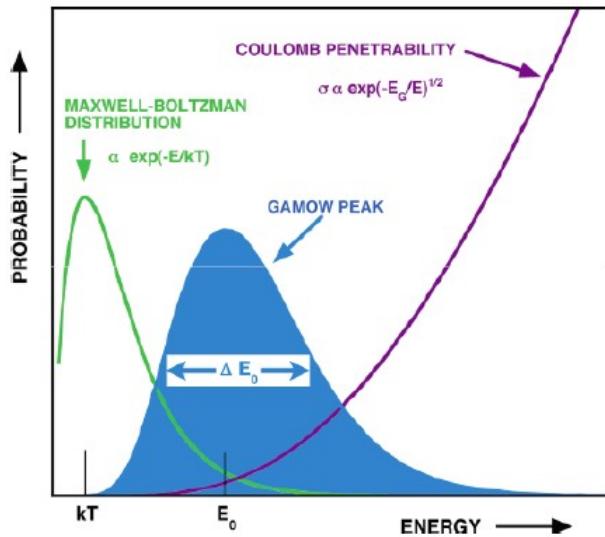


Figure D.8: Κορυφή Gamow.

αυτές τις δύο καμπύλες, η ενεργός διατομή γίνεται μέγιστη για τιμές ενέργειας που βρίσκονται μέσα στην μπλε περιοχή. Η καμπύλη που οριοθετεί την μπλε περιοχή ονομάζεται κορυφή *Gamow* και το μέγιστο εύρος αυτής της περιοχής ονομάζεται παράμυρο ενέργειών *Gamow*. Ο ρυθμός των αντιδράσεων φαίνεται, μέσα από αυτό το διάγραμμα, να είναι πιο δραστικός (effective) όταν τα σωματίδια παίρνουν τιμές ενέργειας που βρίσκονται μέσα στην μπλε περιοχή. Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε εύχολα να διαχρίνουμε ποιές τιμές ενέργειών είναι οι πιο δραστικές. Παρατηρούμε ότι τυπικά αυτές οι τιμές είναι σχετικά χαμηλές.

D.4 Δίκτυο πυρηνικών αντιδράσεων

Ο αρχικός μας σκοπός ήταν να κατασκευάσουμε μια διαφορική εξίσωση, η αριθμητική επίλυση της οποίας θα μας προσομοιώνει την διαδικασία της πυρηνοσύνθεσης. Έτσι το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε τα παραπάνω ως μια διαφορική εξίσωση της μεταβολής των αριθμητικών πυκνοτήτων συναρτήσει της χρονικής τους μεταβολής. Η ποσότητα που θέλουμε να δούμε πως μεταβάλλεται και είναι και η πιο εύκολα μετρήσιμη παρατηρησιακά, είναι η μεταβολή της αφθονίας (abundance) ενός στοιχείου, πυρήνα, σωματίου ή ισοτόπου με το χρόνο. Για να φτάσουμε όμως σε αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε κάποιες παραδοχές. Εκφράζουμε λοιπόν τον αριθμό των αντιδράσεων ανά μονάδα χρόνου και όγκου μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης και βλέπουμε το πως μεταβάλλεται με τον χρόνο η αριθμητική πυκνότητα του i -σωματίου για μια αντίδραση $i(j, o)m$, δηλαδή για μια αντίδραση των $i + j$ όπου θα μας δώσει $o + m$ σωμάτια. Θεωρώντας ότι τα i, j μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό, έχουμε:

$$r_{i,j} = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} n_i n_j \langle \sigma u \rangle \longrightarrow \quad (\text{D.16})$$

$$\left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_\rho = \left(\frac{\partial n_j}{\partial t} \right)_\rho = -r_{i,j} \quad (\text{D.17})$$

$$\left(\frac{\partial n_o}{\partial t} \right)_\rho = \left(\frac{\partial n_m}{\partial t} \right)_\rho = +r_{i,j} \quad (\text{D.18})$$

Δηλαδή για κάθε αντίδραση μεταξύ των i και j , έχουμε καταστροφή των i , j και δημιουργία των o , m . Ο όρος $\frac{1}{1 + \delta_{ij}}$ είναι απαραίτητος στην περίπτωση που μελετάμε αντιδράσεις μεταξύ δύο ίδιων σωματιδίων και μας βοηθά να μην μετρήσουμε αυτή την αντίδραση δύο φορές. Η ποσότητα δ_{ij} δεν είναι άλλη από το δέλτα του Kronecker. Ένας πολύ σημαντικός παράγοντας όμως σε αυτόν τον συλλογισμό που πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψιν είναι ότι η αριθμητική πυκνότητα ενός σωματίου εξαρτάται άμεσα από την πυκνότητα της ύλης. Έτσι, η πλήρης έκφραση της αριθμητικής πυκνότητας μιας ποσότητας είναι αυτή που δίνεται από την σχέση

$$\dot{n}_i = \left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_\rho + n_i \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (\text{D.19})$$

Βλέπουμε ότι η \dot{n}_i εκφράζεται από δύο όρους. Έναν όρο στον οποίο η παράμετρος της πυκνότητας ύλης είναι σταθερή και έναν στον οποίο εκφράζεται η μεταβολή της. Στη μελέτη μας όμως των διαδικασιών της πυρηνοσύνθεσης, η μεταβολή της αριθμητικής πυκνότητας ως προς την πυκνότητα ύλης δεν έχει μεγάλη συμβολή. Η μεταβολή που επηρεάζει σημαντικά τη μελέτη μας είναι εκείνη η οποία μας δίνει την αλλαγή της αριθμητικής πυκνότητας, του αριθμού δηλαδή των σωματιδίων i, j κατά τη διάρκεια των αντιδράσεων. Συνεπώς, προς το παρόν θα αγνοήσουμε την ποσότητα $n_i \frac{\dot{\rho}}{\rho}$ και να επικεντρώσουμε την μελέτη μας στην μεταβολή των αντιδράσεων, δηλαδή του όρου $\left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_\rho$. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε την ποσότητα της αφθονίας ($Y = n / \rho N_A$) ή του λόγου μάζας ($X_i = A_i Y_i$). Σχετικά με τον λόγο μάζας, γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όλων των μαζών κανονικοποιείται στην μονάδα. Έτσι, ελέγχοντας τον λόγο μάζας κατά τη διάρκεια προσομοίωσης των αντιδράσεων, βλέπουμε τις μεταβολές που έχουμε στην μάζα. Έτσι λοιπόν, όταν το άθροισμα αυτό γίνεται μικρότερο από μονάδα ξέρουμε ότι έχουμε απώλεια μάζας και μετατροπή της κατά πάσα πιθανότητα σε ενέργεια. Τώρα πλέον, μπορούμε να συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς μας και την μικρή συνεισφορά που προέρχεται από την μεταβολή της αφθονίας του σωματίου που μας ενδιαφέρει συναρτήσει της πυκνότητας ύλης. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αφθονίας έχουμε

$$\frac{dY_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{n_i}{\rho N_A} \Rightarrow \dot{Y}_i = \frac{\dot{n}_i}{\rho N_A} - \frac{n_i}{\rho N_A} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (\text{D.20})$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε το n_i από το πρώτο μέλος της σχέσης (D.19) και αν θέλουμε να το εκφράσουμε με όρους σχετικούς με την θερμοπυρηνική ενεργό διατομή, θα αντικαταστήσουμε τις αριθμητικές πυκνότητες των i, j με τις αριθμονίες τους. Έτσι, σε συνδυασμό με τη σχέση (D.17) προκύπτει ότι

$$\dot{Y}_i = \frac{1}{\rho N_A} \left(\frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_\rho = -\frac{r_{i,j}}{\rho N_A} = -\frac{1}{1 + \delta_{ij}} \rho N_A \langle \sigma u \rangle_{i,j} Y_i Y_j \quad (\text{D.21})$$

Μέχρι τώρα στη μελέτη μας θεωρήσαμε αντιδράσεις που γίνονται μεταξύ νουκλεονίων. Στη Φύση όμως, έχουμε και αντιδράσεις που γίνονται από αλληλεπίδρασεις νουκλεονίων ή πυρήνων με φωτόνια, λεπτόνια ή νετρίνα. Επιπλέον, μέχρι τώρα δεν λάβαμε υπόψιν μας τις διασπάσεις των πυρήνων. Για να λάβουμε και αυτές τις αλληλεπιδράσεις και διεργασίες υπόψιν, ορίζουμε μια ειδική παράμετρο, την παράμετρο λ . Η παράμετρος αυτή θα πάρει τη θέση του όρου $r_{i,j}$ και η χρονική παράγωγος της αριθμονίας θα έχει τη μορφή

$$\dot{Y}_i = -\lambda_i Y_i \quad (\text{D.22})$$

Έτσι λοιπόν, μέσω αυτής της παραμέτρου μπορούμε να εκφράσουμε τον ρυθμό των διασπάσεων (decay rates) ή αν έχουμε αντιδράσεις με λεπτόνια, φωτόνια ή νετρίνα με μια αντίστοιχη παράμετρο λ . Για παράδειγμα, αν έχουμε μια φωτοδιάσπαση ατόμων οξυγόνου ^{16}O από φωτόνια, ο ρυθμός με τον οποίο θα γίνονται αυτές οι διασπάσεις θα εκφραστούν μέσω της λ . Αξίζει να αναφέρουμε ότι υπολογιστικά, για έναν κώδικα οι αντιδράσεις που γίνονται από την αλληλεπίδραση νουκλεονίων με φωτόνια, λεπτόνια ή νετρίνα αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο και επηρεάζουν την αριθμονία όπως φαίνεται στη σχέση (D.22). Σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται σαφές ότι οι αλληλεπιδράσεις που μπορούν να λάβουν χώρα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες

- Μεταξύ δύο πυρήνων ή νουκλεονίων.
- Μεταξύ πυρήνων/νουκλεονίων και φωτονίων, λεπτονίων, νετρίνων - διασπάσεων.

Φτάνοντας πλέον πολύ κοντά στην τελική γραφή της ζητούμενης διαφορικής εξίσωσης που θέλουμε να λύσουμε έχουμε να κάνουμε λίγες σκέψεις ακόμα.

D.5 Αντίστροφες Αντιδράσεις

Αντίστροφες (inverse) είναι οι χημικές αντιδράσεις κατά τις οποίες τα αντιδρώντα μετασχηματίζονται σε προϊόντα σε έναν χρόνο t αλλά αν αντιστρέψουμε αυτόν το χρόνο και πάμε να δούμε τι αντίδραση γίνεται σε $-t$, η αλληλεπίδραση των προϊόντων θα μας δώσει σαν αποτέλεσμα τα αρχικώς αντιδρώντα. Για παράδειγμα, αν μέσα στον αστέρα αντιδράσεις ένας ^{12}C με ένα σωμάτιο α (^4He) θα δώσει ένα οξυγόνο (^{16}O) και ένα φωτόνιο-γ αλλά και το αντίστροφο. Για να μελετήσουμε αυτές τις αντιδράσεις, θα πρέπει να ξαναγράψουμε την ενεργό διατομή για μια αντίστροφη αντίδραση η οποία θα έχει τη μορφή:

$$\langle \sigma u \rangle_{i,j,o} = \frac{1 + \delta_{ij}}{1 + \delta_{om}} \frac{G_m g_o}{G_i g_j} \left(\frac{\mu_{om}}{\mu_{ij}} \right)^{3/2} \exp(-Q_{o,j}/kT) \langle \sigma u \rangle_{m,o,j} \quad (\text{D.23})$$

Στην τελευταία σχέση βλέπουμε τον τύπο της θερμοπυρηνικής ενεργού διατομής για την κατεύθυνση $\langle \sigma u \rangle_{i,j,o}$ και στο τέλος, την θερμοπυρηνική ενεργό διατομή για την αντίστροφη κατεύθυνση $\langle \sigma u \rangle_{m,o,j}$. Όπως παρατηρούμε, αυτές οι δύο διατομές σχετίζονται. Ο εκθετικός όρος Q εκφράζει την ενεργειακή διαφορά μεταξύ αντιδρώντων και προϊόντων (άρα και το είδος της αντίδρασης, αν είναι δηλαδή ενδόθερμη ή εξώθερμη) και ο πρώτος όρος εκφράζει την πυκνότητα καταστάσεων και τη συνάρτηση επιμερισμού του

συστήματος που μελετάμε. Αυτό σημαίνει για τους υπολογισμούς μας ότι αν μετρήσουμε την ενεργό διατομή για μια κατεύθυνση –πειραματικά ή και θεωρητικά μέσω κάποιου μοντέλου– και αν γνωρίζουμε επίσης την συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος και την τιμή της Q , μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή της αντίστροφης κατεύθυνσης μέσω της τελευταίας σχέσης.

D.6 Θεμελιώδης Διαφορική Εξίσωση

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, είμαστε πλέον σε θέση να γράψουμε με σαφήνεια και λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις σημαντικές παραμέτρους, την θεμελιώδη διαφορική εξίσωση που μπορεί στη συνέχεια να μας βοηθήσει να προσομοιώσουμε τις διαδικασίες της πυρηνοσύνθεσης, η μορφή της οποίας είναι

$$\begin{aligned} \dot{Y} = & \sum_j N_j^i \lambda_j Y_j + \sum_{j,k} N_{jk}^i \rho N_A \langle \sigma u \rangle_{jk} Y_j Y_k + \\ & + \sum_{j,k,l} N_{jkl}^i \rho^2 N_A^2 \langle \sigma u \rangle_{jkl} Y_j Y_k Y_l \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Έτσι, για κάθε πυρηνικό είδος που θέλουμε να μελετήσουμε, έχουμε μια διαφορική εξίσωση που μπορεί να μας βοηθήσει η οποία μοιάζει με την σχέση (D.24). Καθώς λοπόν μεταβάλλεται με το χρόνο η αφθονία ενός είδους, βλέπουμε ότι αυτή η μεταβολή εξαρτάται απ' όλες τις αλληλεπιδράσεις που εμπλέκονται και συμβάλλουν στην δημιουργία ή την καταστροφή του i-στοιχείου. Συνήθως, ομαδοποιούμε τους όρους ανά είδος αντιδράσεων. Έτσι, στην εξίσωση (D.24) ο πρώτος όρος εκφράζει τις αλληλεπιδράσεις του i-στοιχείου με φωτόνια, λεπτόνια, νετρίνα ή πιθανές διασπάσεις, ο δεύτερος εκφράζει τις αντιδράσεις μεταξύ των i-στοιχείων. Οι όροι N , είναι ουσιαστικά μετρητές σωματιδίων και μας πληροφορούν για το πόσα σωματίδια δημιουργούνται ή καταστρέφονται από την κάθε αλληλεπίδραση. Ο τρίτος όρος τώρα, εκφράζει την περίπτωση εκείνη όπου στην αντίδραση συμμετέχουν περισσότερα από δύο σωμάτια, όπως είναι η περίπτωση της αντίδρασης τρία-α. Σε μια τέτοια αντίδραση πρέπει να μετρήσουμε την θερμοπυρηνική ενεργό διατομή και του τρίτου σωματίου καθώς και την αφθονία του. Εξαιτίας τώρα των 3 αφθονιών έχουμε τους όρους της πυκνότητας και του αριθμού Avogadro υψηλέντων στο τετράγωνο. Απ' αυτό το σημείο και μετά, είμαστε σε θέση, λαμβάνοντας υπόψιν μερικές παραμέτρους ακόμα σχετικά με τα αστροφυσικά φαινόμενα στα οποία έχουμε πυρηνοσύνθεση καθώς και τα επιμέρους χαρακτηριστικά της κάθε διαδικασίας, να μελετήσουμε υπολογιστικά την πιθανή εξέλιξη και προέλευση των διαφόρων βαρέων –και όχι μόνο– χημικών στοιχείων.

Βιβλιογραφία

Διεθνής βιβλιογραφία

- Arcones A., Thielemann F. K., Neutrino-Driven Wind Simulations and Nucleosynthesis of Heavy Elements, arXiv:1207.2527v1 [astro-ph.SR], 11 July 2012.
- Arnett D., Supernovae and Nucleosynthesis, Princeton University Press, New Jersey, 1996.
- Bethe H. and Critchfield C., The Formation of Deuteron by Proton Combination, Phys. Rev., 54:248–254, August 1938.
- BlattM.J., and Weisskopf F.V.,Theoretical Nuclear Physics, Springer-Verlag, New York, 1979.
- Branch, D., & Wheeler, J. C. 2017, Supernova Explosions (Springer).
- Burbidge B. M., et.al., Synthesis of the Elements in Stars, Rev. Mod. Phys., 29:547-650, October 1957.
- Cameron A., Stellar Evolution, Nuclear Astrophysics and Nucleogenesis, Dover Publications, 2013.
- Cameron A., Some Nucleosynthesis Effects Associated with r-Process Jets, The Astrophysical Journal, 587:327–340, 10 April 2003.
- Clayton D., Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
- Clayton D., and RassbachM.E., Termination of the s-Process, The Astrophysical Journal, Vol. 148, April 1967.
- Cox, J. P., & Giuli, R. T. 1968, Principles of stellar structure.
- Cruz M.A., Nucleosynthesis in Extremely Metal-Poor and Zero Metallicity Stars, Academic Dissertation, Ludwig-Maximilian University of Munich, 2012, Munich.
- Eggleton, P. 2006, Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars (Cambridge University Press).
- Fewell M. P., The Atomic Nuclide with the Highest Mean Binding Energy, American Journal of Physics, 63:653-658, July 1995.
- Freiburghaus C., Rosswog S., and Thielemann F.,r-Process in Neutron Star Mergers, ApJ, Vol. 525, pp. L121-L124.
- Fröhlich C., et.al., Neutrino-Induced Nucleosynthesis of $A \geq 64$ Nuclei: The νp -Process, Phys. Rev. Lett., 96:142502, Apr 2006.
- Fujimoto S., et.al., Heavy-Element Nucleosynthesis in a Collapsar, The Astrophysical Journal, 656:382-392, 10 February 2007.
- Gribbin J., Stardust, Yale University Press, 11 August 2001.
- Jaikumar P., et.al., Nucleosynthesis in neutron-rich ejecta from quark-novae, <http://arxiv.org/abs/nucl-th/0610013>, 04 October 2006.
- Käppeler F., The Origin of the Heavy Elements: The s-Process, Progress in Particle and Nuclear Physics, Volume 43, 1999, pp. 419–483.

- Kippenhahn R., Weigert A., and Weiss, A., *Stellar Structure and Evolution*, 2nd. edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- Korobkin O., et.al., On the Astrophysical Robustness of Neutron Star Merger r-Process, arXiv:1206.2379v2 [astro-ph.SR], 4 August 2012.
- Lamers, H., & Cassinelli, J. 1999, Introduction to Stellar Winds (Cambridge University Press).
- Langer, N. 2012, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 50, 107.
- Lodders K., Solar System Abundances of the Elements, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 379-417 (ISBN 978-3-642-10351-3), 2010.
- Nishimura S., et.al., r-Process Nucleosynthesis in Magnetohydrodynamic Jet Explosions of Core - Collapse Supernovae, *The Astrophysical Journal*, 642:410-419, 01 May 2006.
- Podsiadlowski, P. 2014, The evolution of binary systems, ed. I. Gonzlez Martnez-Pas, T. Shahbaz, & J. Casares Velzquez, Canary Islands Winter School of Astrophysics (Cambridge University Press), 4588.
- Prialnik, D. 2000, An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution (Cambridge University Press)
- Surman R., et.al. Heavy Element Synthesis in Neutrino-Processed Black Hole Accretion Disk Ejecta, *Proceedings of Science*, XIII Nuclei in the Cosmos, 7-11 July 2014, Debrecen, Hungary.
- Tauris, T. M., & van den Heuvel, E. P. J. 2006, in Compact stellar X-ray sources, ed. W. H. G. Lewin & M. van der Klis, 623.
- Wanajo S., et.al., The r-Process in Neutrino-Driven Winds from Nascent, "Compact" Neutron Stars of Core-Collapse Supernovae, *The Astrophysical Journal*, 554 : 578È586, 10 June 2001.
- Woosley S., Macfadyen A., and Heger A., Collapsars, Gamma-Ray Bursts, and Supernovae, arXiv:astro-ph/9909034, 199.
- Witti J., et.al., Nucleosynthesis in Neutrino-Driven Winds from Protoneutron Stars, I.The α -process, *Astronomy and Astrophysics* 286, 841-856, 1994.

Ελληνική βιβλιογραφία

- Βάρβογλης Χ., Σειραδάκης Γ., Εισαγωγή στη Σύγχρονη Αστρονομία, Εκδόσεις Γαρταγάνη, 1994
- Δανέζης Μ., Θεοδοσίου Σ., Το Σύμπαν που Αγάπησα - Εισαγωγή στην Αστροφυσική, Τόμος Α, Εκδόσεις Δίαυλος, 1999.
- Δανέζης Μ., Θεοδοσίου Σ., Το Σύμπαν που Αγάπησα - Εισαγωγή στην Αστροφυσική, Τόμος Β, Εκδόσεις Δίαυλος, 1999.
- Ελευθεριάδης Χ., Πυρηνική Φυσική: Βασικές Αρχές και Πυρηνοσύνθεση, Publish City, 2014.
- Shu F., Αστροφυσική - Δομή και Εξέλιξη του Σύμπαντος, Τόμος Ι: Αστέρες, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009.
- Shu F., Αστροφυσική - Δομή και Εξέλιξη του Σύμπαντος, Τόμος ΙΙ: Γαλαξίες - Ήλιακό Σύστημα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009.
- Σπύρου Ν., Αρχές Αστρικής Εξέλιξης, 3η έκδοση, Εκδόσεις Παφατηρητής, 2003.
- Χριστοπούλου - Μαυρομιχαλάκη Ε., Κοσμική ακτινοβολία, Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.