

3

1383

farhadi@iasbs.ac.ir  
avalinch@iasbs.ac.ir

# فهرست مندرجات

۳	۱ مقدمه
۷	۲ مدل آیزینگ در یک بعد
۱۴	۳ مدل آیزینگ یک بعدی در میدان مغناطیسی
۱۹	۴ حل دقیق مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی رهیافت تابع پارش
۳۵	۵ حل دقیق مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی رهیافت تابع همبستگی

# لیست اشکال

- ۱.۱ مجموعه‌ی سه اسپین همسایه‌ی نزدیک. هیچ راهی برای چیدن اسپین‌ها به طوری که هر جفت از آن‌ها با هم پادموازی باشند وجود ندارد. . . . . ۴
- ۲.۱ زنجیره‌ی یک بعدی آیزینگ. اسپین‌ها را می‌توان به دوزیر شبکه تقسیم کرد. . . . . ۸
- ۲.۲ جفت‌های گره – پادگره بر روی زنجیره‌ی یک بعدی آیزینگ. . . . . ۱۱
- ۳.۱ مسیر نوعی RG برای آیزینگ یک بعدی در حضور میدان مغناطیسی. . . . . ۱۸
- ۴.۱ نمایش یک گراف یا مجموعه  $\mathcal{I}$  پیوند. . . . . ۲۱
- ۴.۲ نمونه‌ای از یک گراف بسته. . . . . ۲۲
- ۴.۳ نمونه‌ای از یک گراف باز. . . . . ۲۲
- ۴.۴ نمونه‌ای از یک گراف که بدون تکرار به مبدا بازگشته است. . . . . ۲۳

۲۴	.....	۴.۵
۲۵	.....	۴.۶
۲۵	.....	۴.۷
۲۶	.....	۴.۸
۲۶	.....	۴.۹
۲۷	.....	۴.۱۰
۲۷	.....	۴.۱۱
۲۸	.....	۴.۱۲
۳۶	..... گراف برای $G_{ij}$ به طوری که دارای عدد winding غیر صفر است.	۵.۱

# فصل ۱

## مقدمه

جدای از همه‌ی مدل‌هایی که در مکانیک آماری هستند، شاید هیچ مدلی ساده‌تر از مدل آیزینگ نباشد، که مطالعات بسیاری نیز روی این مدل انجام شده است. این مدل اساساً به عنوان یک مدل برای مواد مغناطیسی در نظر گرفته شده بود. هنوز هم در این مورد استفاده می‌شود و موفقیت‌های زیادی را هم به دست آورده. علاوه بر این، این مدل برای آلیاژهای دوتایی، مدل گاز شبکه‌ای ناقص، واکنش‌های شیمیایی و رفتارهای فروالکتریک نیز به کار می‌رود. یکی از دلایلی که این مدل خیلی عمومی شده است این است که هم به صورت تحلیلی و هم به صورت کامپیوتری قابل تجزیه و تحلیل است. دلیل دیگر هم این است که می‌تواند تمام رفتارهای بحرانی یک سیستم پیچیده را نشان دهد.

مدل آیزینگ یا آیزینگ – لنز<sup>۱</sup> بوسیله‌ی آیزینگ در تز دکترایش در سال ۱۹۲۰ به عنوان یک مدل فرومغناطیسی ارائه شد. لنز استاد راهنمای او در این پروژه بود. در آن زمان تنها تئوری مغناطیسی تئوری میدان مولکولی وایز بود، که در واقع گذار فاز مرتبه‌ی دوم را در هر بعدی پیش‌بینی می‌کرد. آیزینگ توانست که مسئله را در یک بعد حل کند و در آنجا به صورت ناامیدانه‌ای متوجه شد که هیچ گذار فازی در آن حالت نمی‌یابد. یک دهه بعد پیرلز<sup>۲</sup> اثبات کرد که باید بیاییم و مدل آیزینگ را برای دو بعد حل کنیم تا به نتیجه برسیم. و در نهایت در سال ۱۹۴۴ اونساجر<sup>۳</sup> حل دقیق مدل آیزینگ را به چاپ رساند. بعد از

---

<sup>۱</sup> Izng – Lenz

<sup>۲</sup> Peierls

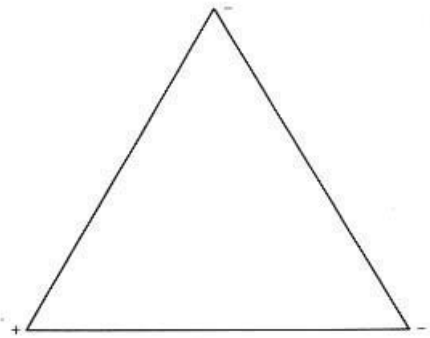
<sup>۳</sup> Onsager

حل دقیق مدل آیزینگ توسط اوناگر، چندین مدل دیگر هم برای شبکه‌های دوبعدی به صورت دقیق حل شدند ولی هنوز حل دقیقی برای سه بعد ارائه نشده است.

به طور کلی برای فرمول‌بندی مدل آیزینگ از شبکه‌ی براوه<sup>۴</sup> استفاده می‌کنند که سایت‌های آن را با اندیس‌های  $i, j, \dots$  نماد گذاری می‌کنند. متغیر دینامیکی در مدل آیزینگ اسپین<sup>۵</sup> می‌باشد که می‌تواند مقدارهای  $\pm 1$  را بگیرد که بیانگر بالا یا پایین بودن اسپین می‌باشد. گرچه در اینجا از اسپین استفاده می‌کنیم ولی مدل آیزینگ یک مدل کاملاً کلاسیکی می‌باشد. اسپین‌ها از طریق "exchange constants" که با  $J_{ij}$  نشان می‌دهیم به یکدیگر جفت<sup>۶</sup> شده‌اند. هامیلتونی سیستم شکلی به صورت زیر دارد

$$H = -\frac{1}{J} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - h \sum_i S_i \quad (1.1)$$

اگر ثابت کوپلینگ  $J$  مثبت باشد، در نتیجه حالت پایه‌ی سیستم فرومغناطیس است، بدین معنی که تمامی اسپین‌ها هم جهت هستند. از طرف دیگر اگر  $J$  منفی باشد، در پایین‌ترین حالت انرژی، همسایه‌های نزدیک هم دارای جهت مخالف یکدیگر هستند و می‌گوییم سیستم آنتی فرومغناطیس است. تمامی شبکه‌ها توانایی داشتن نظم فرومغناطیس را دارند ولی کلاس مهمی از شبکه‌ها، که به آنها می‌گوییم شبکه‌های *closed packed* نمی‌توانند نظم آنتی فرومغناطیس بگیرند. یک شبکه‌ی مثلثی در دو بعد ساده‌ترین مثال از این نوع می‌باشد.



شکل ۱.۱: مجموعه‌ی سه اسپین همسایه‌ی نزدیک. هیچ راهی برای چیدن اسپین‌ها به طوری که هر جفت از آن‌ها با هم پادموازی باشند وجود ندارد.

<sup>۴</sup> Bravais lattic

<sup>۵</sup> Spin

<sup>۶</sup> coupled

شکل (۱.۱) حلقه‌ای از سه اسپین را نشان می‌دهد که هر سه همسایه‌ی نزدیک یکدیگر هستند. همانطور که واضح است هیچ جوری نمی‌شود این سه اسپین را چید که هر سه همسایه‌ی نزدیک مختلف‌الجهت یکدیگر باشند. این پدیده پدیده‌ی *frustration* نام دارد و نقش کلیدی را در مورد تئوری *spin - glass* بازی می‌کند.

تابع پارش  $Z$  برای چنین سیستمی به صورت زیر می‌باشد

$$Z = Tre^{-\beta H[s]} \quad (1.2)$$

نماد  $Tr$  در رابطه‌ی بالا بیانگر این مطلب است که جمع را روی تمام حالت‌های سیستم انجام می‌دهیم، در واقع تمام حالت‌های ترکیب  $S_i = \pm 1$ . پارامتر  $\beta = \frac{1}{T}$  می‌باشد، که در اینجا فرض کردیم  $k_B = 1$ .

یک راه نمایش عملگر اسپین  $S_i$  استفاده از ماتریس‌های پائولی  $\sigma_z$  است. در این حالت هامیلتونی یک ماتریس مربعی از مرتبه  $2^n \times 2^n$  می‌باشد و عملگر رد در اینجا در واقع همان رد ماتریس است.

با داشتن تابع پارش تمامی مقادیر ترمودینامیکی از جمله انرژی داخلی، انتروپی، گرمای ویژه، مغناطش و ضریب گذردهی خلاء  $\chi$  را می‌توان با مشتق‌گیری به دست آورد. انرژی آزاد گیبس،  $F$ ، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$F = -T \ln Z \quad (1.3)$$

و انرژی داخلی  $E$  و انتروپی  $S$  از روابط زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ S &= \frac{\partial F}{\partial T} \end{aligned} \quad (1.4)$$

گرمای ویژه مشتق انرژی داخلی نسبت به دما می‌باشد، بنابراین داریم

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{1}{T^2} \left( \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \right) \quad (1.5)$$

اگر میدان مغناطیسی را هم مانند آنچه در (۱.۱) بود در نظر بگیریم، در این صورت مغناطش  $M$  به صورت زیر می‌باشد

$$M = T \frac{\partial}{\partial h} \ln Z \quad (1.6)$$

---

susceptibility<sup>۷</sup>

و ضریب گذردهی  $\chi$  خلاء برابر می شود با

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} = \frac{1}{T} \left( \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \right) \quad (1.7)$$

به زبان گذار فاز مغناطش پارامتر نظم برای مدل آیزینگ می باشد. توجه کنید که در غیاب میدان خارجی هامیلتونی (۱.۱) تحت تبدیل  $S_i \rightarrow -S_i$  ناورد می باشد و با توجه به بحث های مربوط به تقارن انتظار داریم که مغناطش سیستم برابر با صفر باشد. به هر حال در بعد دو و در بعد های بالاتر این تقارن شکسته می شود و سیستم دارای یک مقدار مغناطش غیر صفر می شود حتی اگر میدان خارجی اعمال نشود.

علاوه بر این کمیت های ترمودینامیکی، می توان تابع همبستگی اسپین - اسپین  $G_{ij}$  را به صورت زیر تعریف

کرد

$$G_{ij} := \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \quad (1.8)$$

و طول همبستگی<sup>۹</sup>، که به صورت تابعی از تابع همبستگی داده می شود به صورت زیر است

$$\xi^{-1} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial r} \ln G(r) \quad (1.9)$$

---

<sup>۸</sup> spin - spin correlation function  
<sup>۹</sup> correlation function



## فصل ۲

# مدل آیزینگ در یک بعد

در این قسمت ما مسئله‌ای را در نظر می‌گیریم که اولین بار توسط آیزینگ حل شد. در اینجا مدل آیزینگ همسایه‌ی نزدیک را در نظر می‌گیریم و شرایط مرزی تناوبی را به گونه‌ای اعمال می‌کنیم که اسپین  $S_i$  با اسپین  $S_{N+i}$  یکی باشند. در ابتدا قرا می‌دهیم  $h = 0$ ، بنابراین هامیلتونی به صورت ساده‌ی زیر در می‌آید

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} \quad (2.1)$$

تابع پارش در این حالت به راحتی قابل محاسبه است. اما بیاییم این مسئله را از دیدگاه  $RG$  بررسی کنیم. ما می‌توانیم بیاییم و اسپین‌ها را تقسیم کنیم به اون‌هایی که روی سایت با شماره‌های فرد و زوج قرار دارند و بیاییم و رد (trace) را تنها روی اسپین‌های زوج محاسبه کنیم و جمع بزنیم. به زبان  $RG$  این قسمت نابودی تبدیل  $RG$  می‌باشد. این فرایند در شکل (۲.۱) نمایش داده شده است.



شکل ۲.۱: زنجیره‌ی یک بعدی آیزینگ. اسپین‌ها را می‌توان به دو زیر شبکه تقسیم کرد.

رد روی یکی از این اسپین‌های زوج مثلاً  $S_2$  به فرم زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} Tr e^{\beta J S_2 (S_1 + S_3)} &= 2 \cosh \beta J (S_1 + S_3) \\ &= \Delta e^{\beta J' S_1 S_3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

به طوریکه  $\Delta$  ثابتی است مستقل از  $S$  ها. اثبات رابطه‌ی بالا به صورت زیر است

$$\begin{aligned} Tr e^{\beta J S_2 (S_1 + S_3)} &= e^{\beta J (S_1 + S_3)} + e^{-\beta J (S_1 + S_3)} \\ &= 2 \cosh \beta J (S_1 + S_3) \end{aligned}$$

بنابراین تابع پارش را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Z = \Delta^{\frac{N}{2}} Tr_{\{S_{odd}\}} \exp \left( \beta J' \sum_i S_i S_{i+2} \right) \quad (2.3)$$

بر خلاف مدل آیزینگ در دو بعد و بعدهای بالاتر، حذف همسایه‌ی نزدیک در مدل یک بعدی باز هم برای ما تولید همسایه‌های نزدیک دیگری با ثابت کوپلینگ نرمالایز شده می‌کند. فاصله‌ی شبکه در حالت جدید دو برابر حالت اولیه می‌باشد، بنابراین *scalar factor* برای این تبدیل  $RG$  برابر است با

$$b = \frac{a'}{a} = 2 \quad (2.4)$$

ثابت‌های کوپلینگ دوباره نرمالایز شده‌ی  $J'$  و فاکتور نرمالیزاسیون  $\Delta$  را می‌توان با قرار دادن  $S_1 = 1$  و  $S_2 = 1$  در ابتدا و سپس وارون کردن  $S_2$  بدست آورد. نتایج بدست آمده بر حسب تغییر متغیر  $v = \tanh \beta J$  برابر است با

$$\Delta = 2\sqrt{\cosh 2\beta J} \quad (2.5)$$

$$v' = v^2 \quad (2.6)$$

اثبات دو رابطه‌ی بالا به صورت زیر است

$$S_1 = S_2 = 1 \Rightarrow 2 \cosh 2\beta J = \Delta e^{\beta J'}$$

$$S_1 = -S_2 = 1 \Rightarrow 2 = \Delta e^{-\beta J'}$$

از ضرب این دو رابطه داریم

$$\Delta^2 = 4 \cosh 2\beta J \Rightarrow \Delta = 2\sqrt{\cosh 2\beta J}$$

و از رابطه‌ی دوم داریم

$$e^{\beta J'} = \frac{\Delta}{2} = \sqrt{\cosh 2\beta J}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} v' = \tanh \beta J' &= \frac{e^{2\beta J'} - 1}{e^{2\beta J'} + 1} = \frac{\cosh 2\beta J - 1}{\cosh 2\beta J + 1} \\ &= \frac{2 \sinh^2 \beta J}{2 \cosh^2 \beta J} = \tanh^2 \beta J = v^2 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید از آنجایی که  $0 < v < 1$  در نتیجه  $v^2 < v$  و هم‌چنین ثابت‌های  $exchange$  با تکرار  $RG$  به سمت صفر میل می‌کنند. بنابراین معادله‌ی  $RG$  ی (2.6) دارای دو نقطه‌ی ثابت  $v^* = 0$  و  $v^* = 1$  می‌باشد. به ازای هر مقدار اولیه برای دما که صفر نباشد، پارامتر  $v$  به سمت دومین نقطه‌ی ثابت می‌رود، که به آن نقطه‌ی ثابت دمای بالا یا نقطه‌ی ثابت پارامغناطیس می‌گویند. دمای صفر یا اصطلاحاً نقطه‌ی ثابت فرو مغناطیس ( $v^* = 1$ ) ناپایدار است و از لحاظ فیزیکی غیر قابل دسترس می‌باشد. بنابراین ما به نکته‌ای می‌رسیم که آیزینگ به آن توجه نکرد و آن این است که مدل آیزینگ در یک بعد از خود رفتارهای بحرانی نشان نمی‌دهد.

راه دیگر برای نشان دادن این مطلب در نظر گرفتن  $RG$  برای طول همبستگی می باشد. از آنجایی که سیستم اولیه و سیستم دوباره نرمالایز شده از یک نوع هستند، با این تفاوت که طول ها در یک عامل  $2$  ضرب شده است، بنابراین طول همبستگی ای که برای این سیستم ها اندازه گیری می کنیم می بایستی که بوسیله ی رابطه ی زیر به هم مربوط باشند

$$\xi(\{h_k\}) = b\xi(\{b^{y_k} h_k\}) \quad (2.7)$$

بنابراین از آنجایی که در اینجا  $b = 2$ ، در نتیجه داریم

$$\xi(v) = 2\xi(v^2) \quad (2.8)$$

اثبات رابطه ی بالا

$$\begin{aligned} \xi(v^2) &= -\frac{k}{\ln v^2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k}{\ln v} \right) = \frac{1}{2} \xi(v) \\ \Rightarrow \xi(v) &= 2\xi(v^2) \end{aligned}$$

بنابراین از این نتیجه می گیریم که  $\xi$  می بایستی که به فرم زیر باشد

$$\xi = -\frac{k}{\ln v} \quad (2.9)$$

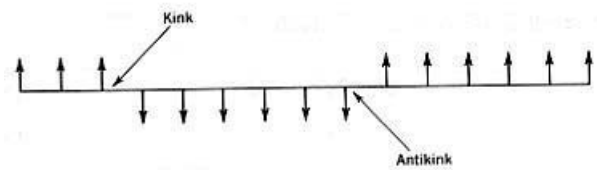
که در اینجا  $k$  یک ثابت است. عدم وجود گذار فاز در این حقیقت منعکس می شود که طول همبستگی برای تمامی دماها یک مقدار محدود است و تنها زمانی واگرا می شود که  $T \rightarrow 0$  میل کند. وقتی  $T \rightarrow 0$  میل کند،  $\beta = \frac{1}{T} \rightarrow \infty$  پس  $\tanh \beta J \rightarrow 1$  میل می کند. حال با توجه به اینکه بسط تابع  $\ln x$  حول  $x = 1$  عبارت است از  $\ln x \sim x - 1$ ، پس داریم

$$\begin{aligned} \ln(\tanh \beta J) &\sim \tanh \beta J - 1 = \frac{e^{2\beta J} - 1}{e^{2\beta J} + 1} - 1 = \frac{-2}{e^{2\beta J} + 1} \\ \lim_{T \rightarrow 0} \xi(T) &= \frac{k}{2} \left( e^{2\beta J} + 1 \right) \sim \frac{k}{2} e^{2\beta J} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{T \rightarrow 0} \xi(T) \rightarrow \frac{k}{2} \exp \frac{2J}{T} \quad (2.10)$$

از لحاظ فیزیکی، اینکه مدل یک بعدی آیزینگ در دمای غیر صفر نمی تواند منظم (*order*) شود را می توانیم به حالت های برانگیخته ای نسبت دهیم که به آن ها گره<sup>۱</sup> می گویند. گره نقطه ای است به روی زنجیره که در آنجا اسپین ها می چرخند و جهت شان را عوض می کنند، در واقع معادل یک بعدی *domain wall* در سیستم های با بعد بالاتر می باشد. شکل (۲.۲) دو گره را در یک زنجیره ی یک بعدی نشان می دهد.



شکل ۲.۲: جفت های گره - پادگره بر روی زنجیره ی یک بعدی آیزینگ.

در واقع شکل بالا دو پدیده ی گره و پادگره<sup>۲</sup> را توصیف می کند. در گره اسپین ها از حالت<sup>۱</sup> +۱ به -۱ می روند و برعکس در پادگره اسپین ها از حالت<sup>۱</sup> -۱ به +۱ می چرخند.

انرژی مورد نیاز برای ساختن یک گره از حالت پایه برابر است با  $2J$ ، بنابراین اگر  $n$  گره در زنجیره داشته باشیم انرژی برانگیختگی برابر است با

$$E(n) = 2nJ \quad (2.11)$$

انتروپی سیستم را می توانیم بوسیله ی برشمردن حالت های  $n_1$  گره و  $n_2$  پادگره بررسی کنیم. فرض کنید که گره ها ضعیف و سست (*dilute*) باشند، در واقع دما خیلی کم باشد. می توانیم فرض کنیم که  $1 \ll n \ll N$  که  $N$  تعداد سایت ها می باشد. اگر بیاییم شرایط مرزی تناوبی را در نظر بگیریم، گره ها و پادگره ها می بایستی که به صورت جفت جفت ساخته شوند. در واقع چون تناوبی است می بایستی که به ازای هر گره ای یک پادگره داشته باشیم که بنابراین می توانیم آن ها را به صورت یک جفت در نظر بگیریم. می آیم و از حالت پایه شروع می کنیم که در آن تمام اسپین ها +۱ هستند، سپس هر جفت گره - پادگره ناحیه ای از اسپین ها را تعریف می کند که در آن اسپین ها -۱ هستند (برای درک بیشتر به شکل (۲.۲) توجه کنید). برای اینکه بیاییم تعداد حالت ها جفت های گره - پادگره را بشماریم لازم است که تعداد راه های ممکن برای تقسیم بندی  $N$  سایت به  $2n$  قسمت

<sup>۱</sup> kink  
<sup>۲</sup> antikink

با مغناطش یک در میان را بدانیم. این مقدار برابر است با تعداد راه‌های توزیع  $2n$  گره و پادگره در طول  $N$  سایت. بنابراین تعداد حالت‌های ممکن  $n$  جفت گره و پادگره برابر است با ضرایب دو جمله‌ای نیوتن

$$\Omega(2n) = \binom{N}{2n} \quad (2.12)$$

با استفاده از تقریب استرلینگ<sup>۳</sup>، انرژی آزاد  $kink\ gas$  برابر می‌شود با

$$F = 2nJ - T[N \ln N - (N - 2n) \ln(N - 2n) - 2n \ln 2n] \quad (2.13)$$

تعداد گره‌ها را در حالت تعادل می‌توان از کمینه کردن انرژی آزاد به دست آورد که به ما می‌دهد

$$\frac{n}{N} = e^{(-\frac{2J}{T})} \quad (2.14)$$

توجه داشته باشید که در دماهای خیلی پایین ما هنوز تعدادی گره داریم و مغناطش به صورت میانگین صفر است. به صورت اجمالی اگر بخواهیم بگوییم، طول همبستگی برابر با میانگین طول این ناحیه‌ها می‌باشد، که می‌توان آن را بوسیله‌ی چگالی آن‌ها تقریب زد

$$\xi \sim \left(\frac{n}{N}\right)^{-1} \sim e^{(\frac{2J}{T})} \quad (2.15)$$

رفتار دمای پایین رابطه‌ی بالا در توافق کامل با آن چیزی است که در رابطه‌ی (۲.۱۰) بدست آوردیم.

از بین رفتن نظم دور برد بوسیله‌ی برانگیختگی‌های توپولوژیکی (*topological excitations*)، که در این حالت گره‌ها بودند، یک موضوع مهم در فیزیک ماده‌ی چگال و تئوری میدان می‌باشد. طبیعت برانگیختگی‌های توپولوژیکی وابسته به پارامتر نظم و بعد فضا می‌باشد.

مدل آیزینگ یک بعدی به اندازه‌ای ساده است که می‌توانیم تابع همبستگی<sup>۴</sup> را دقیقاً حل کنیم و با نتیجه‌ای که از محاسبات  $RG$  بدست آوردیم مقایسه کنیم. تابع همبستگی  $G(r)$  بوسیله‌ی رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$G(r) = \langle S_{i+r} S_i \rangle \quad (2.16)$$

که همانطور که می‌بینید از لحاظ انتقالی نسبت به سایت  $i$  ناوردا می‌باشد. برای محاسبه‌ی رابطه‌ی (۲.۱۶) ابتدا توجه کنید که از آنجایی که هر جمله در هامیلتونی جابجایی پذیر است، بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\exp \left( \beta J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \right) = \prod_{\langle ij \rangle} e^{\beta J S_i S_j} \quad (2.17)$$

<sup>۳</sup>Stirling's approximation  
<sup>۴</sup>correlation function

علاوه بر این، از آنجایی که هراسپین فقط مقادیر  $\pm 1$  را به خود می‌گیرد، قسمت‌نمایی را در رابطه‌ی بالا می‌توان به صورت زیر نوشت

$$e^{\beta J S_i S_j} = \cosh \beta J + S_i S_j \sinh \beta J \quad (2.18)$$

با فاکتورگرفتن از  $\cosh$  داریم

$$e^{\beta J S_i S_j} = \cosh \beta J (1 + v S_i S_j) \quad (2.19)$$

به طوری که  $v = \tanh \beta J$ . denominator در رابطه‌ی (2.17) را می‌توان با توجه به رابطه‌ی زیر به دست آورد.

$$Tr_{\{S_r\}} (1 + v S_1 S_2) (1 + v S_2 S_3) = 2 (1 + v^2 S_1 S_3) \quad (2.20)$$

اثبات رابطه‌ی بالا به صورت زیر است

$$\begin{aligned} Tr_{\{S_r\}} (1 + v S_1 S_2) (1 + v S_2 S_3) &= (1 + v S_1)(1 + v S_2) + (1 - v S_1)(1 - v S_2) \\ &= 1 + v^2 S_1 S_2 + v(S_1 + S_2) + 1 + v^2 S_1 S_2 - v(S_1 + S_2) \\ &= 2 (1 + v^2 S_1 S_2) \end{aligned}$$

بنابراین برای تابع همبستگی داریم

$$G(r) = v^r \quad (2.21)$$

با توجه به تعریف طول همبستگی، (1.9)، داریم

$$\xi^{-1} = -\ln v \quad (2.22)$$

که همان نتیجه‌ی بدست آمده از بحث  $RG$ ، (2.9)، می‌باشد و ثابت  $k$  را بدست آوردیم که برابر با واحد می‌باشد.

## فصل ۳

# مدل آیزینگ یک بعدی در میدان مغناطیسی

تا اینجا آمدیم و مدل آیزینگ یک بعدی را در غیاب میدان مغناطیسی حل کردیم، حال می‌آییم و میدان مغناطیسی را هم در نظر می‌گیریم. شاید فکر کنید که میدان خارجی باعث جلوگیری از بوجود آمدن گره‌ها می‌شود و در نتیجه باعث ترغیب رفتارهای بحرانی می‌شود، اما در واقع این درست نیست. خواهیم دید که در دو بعد، که در آنجا در مدل آیزینگ تقارن خود به خود می‌شکند، حضور میدان خارجی در واقع از رفتارهای بحرانی جلوگیری می‌کند. در حالت یک بعدی با حضور میدان مغناطیسی خارجی، هامیلتونی به شکل زیر است

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} - h \sum_i S_i \quad (3.1)$$

در اینجا دوباره می‌آییم و از تبدیل حذفی‌ای که در حالت بدون میدان مغناطیسی به کار بردیم استفاده می‌کنیم. حذف کردن را مانند قبل انجام می‌دهیم و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$Tr_{\{S_r\}} e^{\beta J S_r (S_1 + S_r) + \beta h S_r} = \Delta e^{\beta J' S_1 S_r + \beta h'' (S_1 + S_r)} \quad (3.2)$$

که  $J'$  exchange های کوپلینگ دوباره نرمالایز شده می‌باشند و  $h''$  نیز قسمتی از میدان دوباره نرمالایز شده است. مانند قبل اگر بیاییم سمت چپ و راست رابطه‌ی بالا را برای مقادیر ممکن اسپین، یعنی  $\pm 1$  بنویسیم، می‌توانیم  $J'$  و  $h''$  را بدست آوریم که می‌رسیم به نتایج زیر

$$h'' = \frac{1}{4\beta} \ln \left[ \frac{\cosh \beta(2J + h)}{\cosh \beta(2J - h)} \right] \quad (3.3)$$



اثبات رابطه‌ی بالا به صورت زیر است

$$\begin{aligned} e^{\beta h''} &= \frac{e^{\beta J + \beta h} + e^{-\beta J - \beta h}}{e^{\beta J - \beta h} + e^{-\beta J + \beta h}} \\ &= \frac{\cosh(\beta J + \beta h)}{\cosh(\beta J - \beta h)} \end{aligned}$$

بنابراین بدست می آوریم که

$$h'' = \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{\cosh \beta(\beta J + h)}{\cosh \beta(\beta J - h)} \right]$$

حال داریم

$$\Delta^2 = 2 \cosh \beta [\cosh \beta(\beta J + h) \cosh \beta(\beta J - h)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

$$J' = \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{\cosh \beta(\beta J + h) \cosh \beta(\beta J - h)}{\cosh^2 \beta h} \right] \quad (3.5)$$

اثبات اولین رابطه‌ی بالا به صورت زیر است

$$\begin{aligned} e^{\beta J(S_1 + S_r) + \beta h} + e^{-\beta J(S_1 + S_r) - \beta h} &= \Delta e^{\beta J' S_1 S_r + \beta h''(S_1 + S_r)} \\ S_1 = S_r = 1 &\Rightarrow e^{\beta J + \beta h} + e^{-\beta J - \beta h} = \Delta e^{\beta J' + \beta h''} \\ S_1 = -S_r = 1 &\Rightarrow e^{\beta h} + e^{-\beta h} = \Delta e^{-\beta J'} \\ S_1 = S_r = -1 &\Rightarrow e^{-\beta J + \beta h} + e^{\beta J - \beta h} = \Delta e^{\beta J' - \beta h''} \end{aligned}$$

با ضرب معادله‌ی دوم در معادله‌ی چهارم و مربع معادله‌ی سوم داریم

$$\begin{aligned} \Delta^4 &= (e^{\beta J + \beta h} + e^{-\beta J - \beta h})(e^{-\beta J + \beta h} + e^{\beta J - \beta h})(e^{\beta h} + e^{-\beta h})^2 \\ \Delta^2 &= (e^{\beta h} + e^{-\beta h}) \sqrt{(e^{\beta J + \beta h} + e^{-\beta J - \beta h})(e^{-\beta J + \beta h} + e^{\beta J - \beta h})} \\ &= 2 \cosh \beta h (2 \cosh(\beta J + \beta h) 2 \cosh(\beta J - \beta h))^{\frac{1}{2}} \\ &= 4 \cosh \beta h (2 \cosh \beta(\beta J + h) \cosh \beta(\beta J - h))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

اثبات دومین رابطه‌ی بالا به صورت زیر است. با استفاده از روابط بالا داریم

$$\begin{aligned} e^{\beta J'} &= \frac{\Delta}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}} = \frac{1}{2 \cosh \beta h} 2 \sqrt{\cosh \beta h (\cosh \beta(\beta J + h) \cosh \beta(\beta J - h))^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left( \frac{\cosh \beta(\beta J + h) \cosh \beta(\beta J - h)}{(\cosh \beta h)^2} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J' = \frac{1}{4\beta} \ln \left( \frac{\cosh \beta(2J + h) \cosh \beta(2J - h)}{(\cosh \beta h)^2} \right)$$

میدانِ دوباره نرمالایز شده‌ی کلی که بر روی یک سایتی که حذف نشده عمل می‌کند برابر است با  $h + 2h''$ ، زیرا توزیعِ  $h''$  از حذفِ دو همسایه‌ی چپ و راست می‌آید. بنابراین معادله‌ی  $RG$  برای میدان برابر است با

$$h' = h + \frac{1}{2\beta} \ln \left[ \frac{\cosh \beta(2J + h)}{\cosh \beta(2J - h)} \right] \quad (3.6)$$

برای  $h$  های کوچک روابطِ (3.5) و (3.6) به صورت زیر در می‌آیند

$$\tanh \beta J' = (\tanh \beta J)^2 \quad (3.7)$$

$$h' = h(1 + \tanh 2\beta J) \quad (3.8)$$

اثباتِ اولین رابطه‌ی بالا به صورت زیر است. اگر قرار دهیم  $h \sim 0$  داریم

$$J' = \frac{1}{4\beta} \ln \left( \cosh^2 2\beta J \right) = \frac{1}{2\beta} \ln (\cosh 2\beta J)$$

$$\Rightarrow 2\beta J' = \ln(\cosh 2\beta J) \Rightarrow e^{2\beta J'} = \cosh 2\beta J$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \tanh \beta J' &= \frac{e^{2\beta J'} - 1}{e^{2\beta J'} + 1} = \frac{\cosh 2\beta J - 1}{\cosh 2\beta J + 1} \\ &= \frac{e^{2\beta J} + e^{-2\beta J} - 2}{e^{2\beta J} + e^{-2\beta J} + 2} = \left( \frac{e^{\beta J} - e^{-\beta J}}{e^{\beta J} + e^{-\beta J}} \right)^2 = (\tanh \beta J)^2 \end{aligned}$$

اثباتِ دومین رابطه به صورت زیر است. اگر  $h \ll 1$ ، تابع  $\ln$  را حولِ  $h = 0$  بسط می‌دهیم و داریم

$$\begin{aligned} \ln \left[ \frac{\cosh \beta(2J + h)}{\cosh \beta(2J - h)} \right] &= \ln 1 + h \left[ \frac{\cosh \beta(2J - h)}{\cosh \beta(2J + h)} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\cosh \beta(2J + h)}{\cosh \beta(2J - h)} \right) \right] \Big|_{h=0} \\ &= h \left[ \frac{\cosh \beta(2J - h)}{\cosh \beta(2J + h)} \frac{\beta \sinh \beta(2J + h)}{\cosh \beta(2J - h)} + \frac{\cosh \beta(2J - h)}{\cosh \beta(2J + h)} \cosh \beta(2J + h) \beta \frac{\sinh \beta(2J - h)}{\cosh^2 \beta(2J - h)} \right] \Big|_{h=0} \\ &= \beta h [\tanh \beta(2J + h) + \tanh \beta(2J - h)] \Big|_{h=0} \\ &= 2\beta h \tanh 2\beta J \end{aligned}$$

بنابراین بدست می‌آوریم که

$$h' = h + \frac{1}{2\beta} (2\beta h \tanh 2\beta J) = h(1 + \tanh 2\beta J)$$

معادلات  $RG$  ی (۳.۵) و (۳.۶) دارای یک خطِ نقاطِ ثابتِ  $J^* = 0$  و  $h^*$  اختیاری، متناظر با فازِ پارامغناطیسی و یک نقطه‌ی ثابتِ فرومغناطیسِ  $h^* = 0$  و  $J^{ast} = \infty$  هستند. معادلات  $RG$  را می‌توانیم با تعریفِ جدیدی از دما و میدانِ مغناطیسی،  $(w = \tanh \beta h$  و  $v = \tanh \beta J)$ ، به صورتِ ساده‌ترِ زیر بنویسیم

$$\frac{1+w'}{1-w'} = \frac{1+w}{1-w} \frac{1+2wv+v^2}{1-2wv+v^2} \quad (3.9)$$

$$(1+v')^2 = \frac{(1+v^2) - 4v^2w^2}{(1-v^2)} \quad (3.10)$$

بر روی نقطه‌ی ثابتِ پارامغناطیس،  $v^* = 0$ ، این معادلات تبدیل می‌شوند به پایین‌ترین مرتبه در  $v$

$$w' = w \quad (3.11)$$

$$v = v^2 (1 - w^2) \quad (3.12)$$

نماهای دما و مغناطش به صورتِ زیر داده می‌شوند

$$Y_T = \frac{\ln \left[ \frac{\partial w'}{\partial v} (v^*, w^*) \right]}{\ln 2} = -\infty \quad (3.13)$$

$$Y_h = \frac{\ln \left[ \frac{\partial w'}{\partial w} (v^*, w^*) \right]}{\ln 2} = 0 \quad (3.14)$$

پارامترِ دمای  $v$  نکته‌ی خاصی ندارد، در حالی که طبقِ رابطه‌ی (۳.۱۴)، پارامترِ مغناطشِ  $w$  به جای نقطه‌ی ثابت تنها به خطِ نقاطِ ثابت میل می‌کند.

نقطه‌ی ثابتِ فرومغناطیس چیزِ جالبی است. با خطی‌سازیِ معادله‌ی  $RG$  حولِ  $v^* = 1$  و  $w^* = 0$  و با

نوشتنِ  $t - 1 = v$  به طوریکه  $1 \ll t$  در این صورت داریم

$$w' = 2w$$

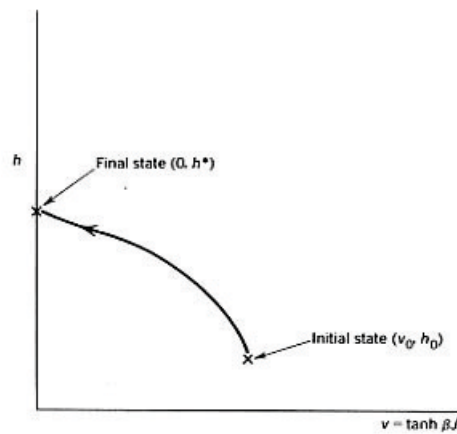
$$t' = 2t \quad (3.15)$$

به طوری که منجر می‌شود به  $Y_h = 1$  و  $Y_T = 1$ .

$$\chi \sim t^{-1} \quad (3.16)$$

به طوریکه به ما می‌دهد  $1 = \frac{1}{Y_T} = \nu$ .

علاوه بر این بوسیله‌ی رابطه‌ی (۲.۲۲)، برای  $T = T_C = 0$  داریم  $G(r)$  و بوسیله‌ی تعریفِ نمای تابعِ همبستگی  $\eta$ ، می‌بینیم که  $\eta = 1$ . توجه کنید که هم  $Y_T$  هم  $Y_h$  بیشینه‌ی مقدارِ خود یعنی  $y = d = 1$  را در نقطه‌ی ثابتِ فرومغناطیس می‌گیرند. نمودارِ نوعیِ  $RG$  در شکل (۳.۱) نمایش داده شده است.



شکل ۳.۱: مسیر نوعی  $RG$  برای آیزینگ یک بعدی در حضور میدان مغناطیسی.

## فصل ۴

# حل دقیق مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی رهیافت تابع پارش

فرض کنید یک شبکه مربعی دوبعدی با  $N$  اتم داریم. هر اتم می‌تواند مقدار  $+1$  یا  $-1$  را اختیار کند. یعنی  $i$  امین اتم انرژی  $\epsilon_i$  را دارد که  $\epsilon_i = \pm 1$ . انرژی برهمکنش همسایه‌های نزدیک  $H\epsilon_i\epsilon_j$  (در واحد  $KT$ ) است. حالت سیستم با دادن مقادیر  $\epsilon_i$  به ازای هر اتم مشخص می‌شود. مساله محاسبه انرژی آزاد سیستم است.

تابع پارش این سیستم عبارت است از

$$Q = \sum_{\text{all states}} e^{-\beta E_k} = \sum_{\text{all states}} e^{-\sum^* H\epsilon_i\epsilon_j} = \sum_{\text{all states}} \prod^* e^{-H\epsilon_i\epsilon_j} \quad (4.1)$$

که  $\sum^*$  و  $\prod^*$  یعنی جمع و ضرب روی جفتهای  $i$  و  $j$  که همسایه نزدیک یکدیگر می‌باشند. به راحتی دیده می‌شود که اگر علامت  $H$  عوض شود،  $Q$  به همان صورت قبل باقی خواهد ماند. پس  $H$  را مثبت می‌گیریم و داریم:

$$Q = \sum_{\text{all states}} \prod^* e^{H\epsilon_i\epsilon_j} \quad (4.2)$$

با توجه به اینکه  $\epsilon_i \epsilon_j = \pm 1$  است، داریم:

$$\frac{e^H + e^{-H}}{2} + \epsilon_i \epsilon_j \frac{e^H - e^{-H}}{2} = e^{\epsilon_i \epsilon_j H} \Rightarrow e^{\epsilon_i \epsilon_j H} = \cosh H + \epsilon_i \epsilon_j \sinh H = \cosh H (1 + \epsilon_i \epsilon_j T) \quad (4.3)$$

که  $T = \tanh H$ . پس تابع پارش عبارت است از:

$$Q = \sum \prod^* [\cosh H (1 + \epsilon_i \epsilon_j T)] \quad (4.4)$$

با توجه به اینکه  $N$  اتم داریم، پس  $2^N$  پیوند انرژی وجود دارد و داریم:

$$Q = \cosh^{2^N} H \sum_{all\ states} \prod^* (1 + \epsilon_i \epsilon_j T) = 2^N Q' \cosh^{2^N} H \quad (4.5)$$

پس اکنون باید تابع پارش  $Q'$  را حساب کنیم که:

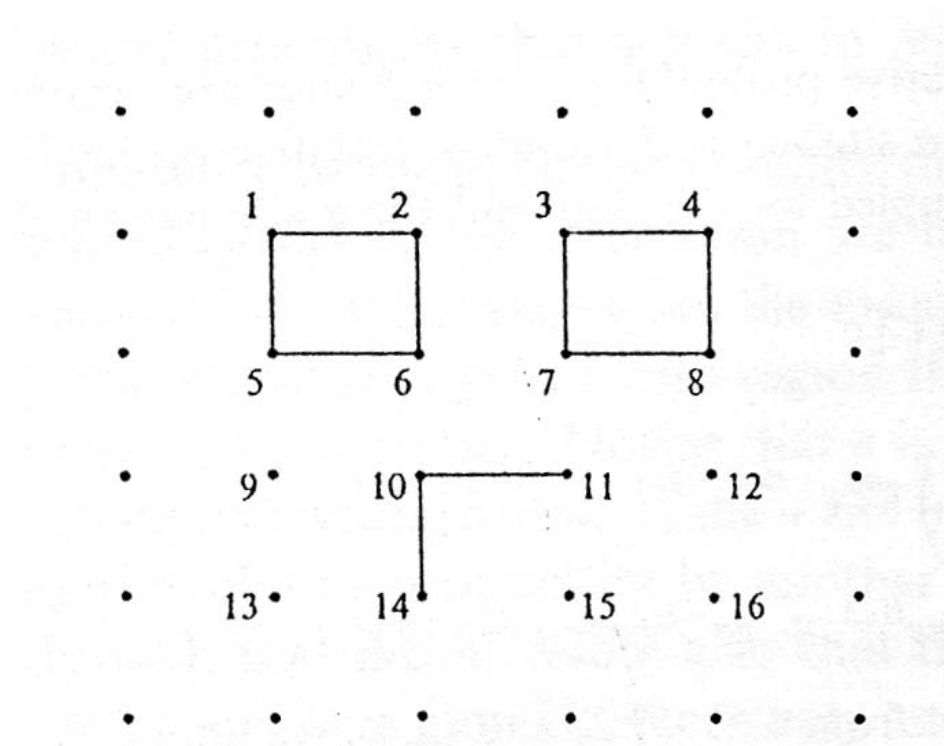
$$Q' = \frac{1}{2^N} \sum_{all\ states} \prod^* (1 + \epsilon_i \epsilon_j T) \quad (4.6)$$

حال ضرب را بسط می‌دهیم و از نماد  $\sum_l^*$  به عنوان جمع روی تمام مجموعه‌های ممکن که با  $l$  پیوند متفاوت درست شده‌اند، استفاده می‌کنیم.

$$2^N Q' = \sum_{\epsilon_1 = \pm 1} \dots \sum_{\epsilon_N = \pm 1} [1 + T \sum_1^* \epsilon_i \epsilon_j + T^2 \sum_2^* (\epsilon_i \epsilon_j)(\epsilon_{i'} \epsilon_{j'}) + \dots] \quad (4.7)$$

به این نکته توجه کنید که در هر جمله،  $\epsilon$ ها به صورت جفت ظاهر می‌شوند که این جفت همسایه‌های نزدیک هستند. همچنین ۲ تا جفت یکسان در یک ضرب تکرار نمی‌شوند. حال اگر به هر جفت یک پیوند نسبت دهیم، ضرب  $2l$  تا  $\epsilon$  شامل یک گراف با  $l$  پیوند است. به دلیل اینکه یک جفت دوبار در ضرب تکرار نمی‌شود، در گراف پیوند تکراری نداریم. به عنوان مثال شکل (۴.۱) گراف مربوط به زیر است:

$$(\epsilon_1 \epsilon_2)(\epsilon_3 \epsilon_4)(\epsilon_5 \epsilon_6)(\epsilon_1 \epsilon_5)(\epsilon_2 \epsilon_6)(\epsilon_3 \epsilon_7)(\epsilon_4 \epsilon_8)(\epsilon_7 \epsilon_8)(\epsilon_{10} \epsilon_{11})(\epsilon_{10} \epsilon_{14}) \quad (4.8)$$

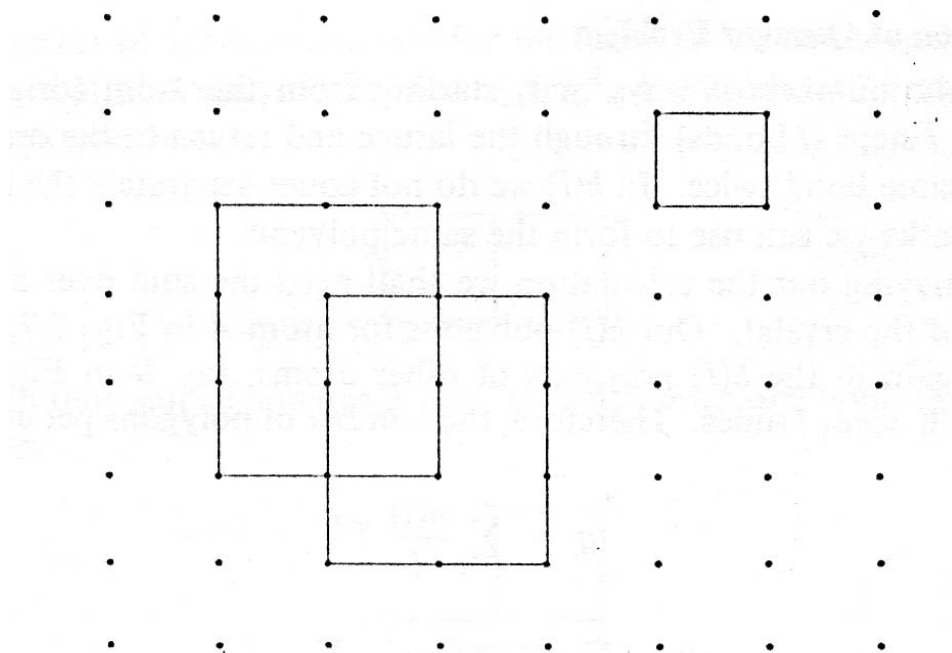


شکل ۴.۱: نمایش یک گراف یا مجموعه  $l$  پیوند.

حال داریم:

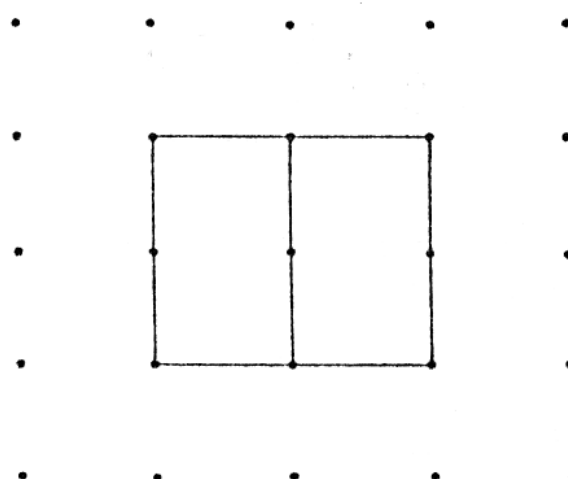
$$\sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon = 0; \sum_{\epsilon=\pm 1} \epsilon^2 = 2 \quad (4.9)$$

با توجه به این موضوع، در عبارت مربوط به  $Q'$  فقط جملاتی می‌مانند که هر  $\epsilon_i$  به تعداد زوج ظاهر شده باشد. این بدین معنی است که در عبارت  $Q'$ ، فقط گرافهایی مهم هستند که از هر نقطه شبکه تعداد زوج  $(4, 2, 0)$  پیوند خارج شده باشد. به عبارت دیگر این گرافها از برهم‌نهی چند ضلعیهای ساده بسته که ضلع مشترک نداشته باشند درست شده‌اند. به این گرافها، گرافهای بسته می‌گویند. شکل (۴.۲) نمونه یک گراف بسته است.



شکل ۴.۲: نمونه‌ای از یک گراف بسته.

شکل (۴.۳) نمونه یک گراف باز می‌باشد.



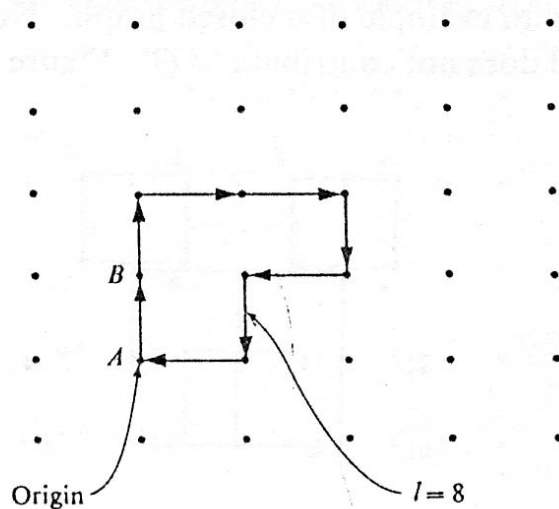
شکل ۴.۳: نمونه‌ای از یک گراف باز.



هر جمله در فرمول (۴.۷) که مربوط به یک گراف ساده است، دارای  $\epsilon_i$  است که با توان زوج (۰ و ۲ و ۴ و ...) ظاهر شده و مقدار آن  $T^l$  است که  $l$  تعداد پیوندها است. جمع روی تمام  $\epsilon_i$  ها، یک عامل  $2^N$  به ما می دهد که با  $2^N$  سمت چپ ساده می شود. پس اگر هر گراف بسته طول  $L$  داشته باشد مقدار  $Q'$  عبارت است از:

$$Q' = \sum_l g(l) T^l \quad (4.10)$$

که  $g(l)$  تعداد گرافهای بسته به طول  $l$  است که می توان روی شبکه رسم کرد. توجه کنید که اگر  $l$  زوج نباشد،  $g(l) = 0$  است. بنابراین همانطور که انتظار داشتیم علامت  $T$  ( و در نتیجه علامت  $H$  ) مهم نیست. حال  $h(l)$  را به عنوان تعداد راههایی در نظر می گیریم که می توان از یک اتم (مبدا) شروع کرد و با  $l$  پیوند، دوباره به مبدا بازگشت، بدون اینکه یک پیوند دوبار تکرار شود. در  $h(l)$ ، مسیرهای متفاوتی که می توان یک چندضلعی را ساخت حساب نمی کنیم. برای انجام محاسبه ما نیاز داریم روی تمام  $l$ هایی که چندضلعی می سازند جمع بزنیم. در شکل (۴.۴) می بینیم که چندضلعی  $h(l)$  برای اتم  $A$  با چندضلعی اتم  $B$  یکسان است. هر چندضلعی  $l$  بار ظاهر می شود. بنابراین تعداد چندضلعی بر واحد اتم،  $\frac{h(l)}{l}$  است.



شکل ۴.۴: نمونه ای از یک گراف که بدون تکرار به مبدا بازگشته است.

فرض کنید:

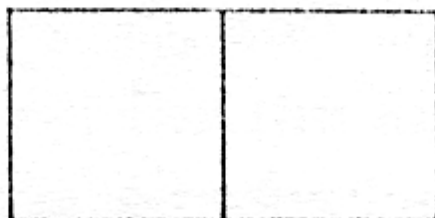
$$q = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h(l)}{l} T^l \quad (4.11)$$

$Q'$  عبارت است از  $Q' = \sum_L g(L) T^L = \sum_{closed\ loop} T^L$ . ولی ما برای  $Q'$  به عبارتی نیاز داریم که بتوانیم آن را محاسبه کنیم. برای محاسبه آن یک عبارت تقریبی برای  $Q'$  بدست می آوریم و با ترفندهایی آن را به مقدار واقعی نزدیک می کنیم.

یک جمله مربوط به یک دیاگرام بسته را می توان به صورت ضرب جمله هایی از گرافهایی که با چندضلعیها ساخته شده در نظر گرفت. قسمتی از  $Q'$  که شامل هیچ چندضلعی نیست، ۱ است. قسمتی که از گرافهایی با یک چندضلعی ساخته شده،  $Nq$  است که تعداد گرافهایی که از یک چندضلعی با طول  $l$  ساخته شده  $\frac{Nh(l)}{l}$  است. قسمتی که مربوط به دو چندضلعی با طول های  $l$  و  $l'$  است،  $(\frac{Nh(l)}{l})(\frac{Nh(l')}{l'}) T^{l+l'}$  می باشد. بنابراین سهم مربوط به دو چندضلعی با طولهای مختلف عبارت است از:

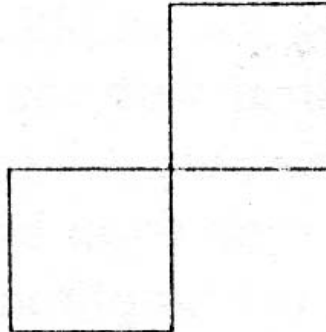
$$\frac{1}{2} \sum_{l,l'} (\frac{Nh(l)}{l})(\frac{Nh(l')}{l'}) T^{l+l'} \quad (4.12)$$

ضریب  $\frac{1}{2}$  به این دلیل است که هر جفت را دو بار شمارده ایم. پس سهم دوتایی ها تقریباً  $\frac{1}{2} N^2 q^2$  است. به این دلیل می گوئیم تقریباً، زیرا گرافهایی مانند زیر را نیز می شماریم:



شکل ۴.۵:

با وجود اینکه این جفت بسته نیست زیرا یک پیوند ۲ بار ظاهر شده است. همچنین

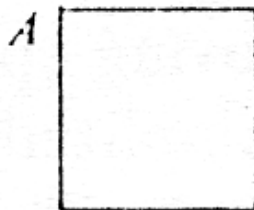


شکل ۴.۶:

یک چندضلعی با طول ۸ نیز می‌باشد. بنابراین آن را دوبار می‌شماریم. اگر به همین ترتیب عمل کنیم، داریم:

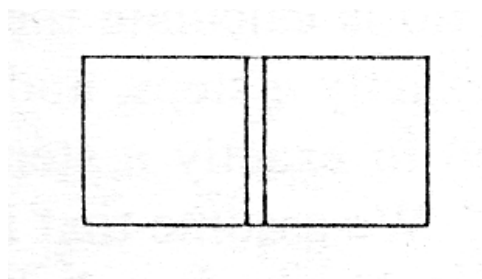
$$Q' \simeq 1 + Nq + \frac{1}{2!}(Nq)^2 + \frac{1}{3!}(Nq)^3 + \dots = e^{Nq} \quad (4.13)$$

پس قدم بعدی این است که  $q$  را تصحیح کنیم تا  $Q'$  درست شود.  $q$  را می‌توانیم با تصحیح  $h(l)$  تصحیح کنیم. چند تا از این جمله‌های تصحیح شده را می‌نویسیم. به علت وجود چندضلعی شکل (۴.۷)



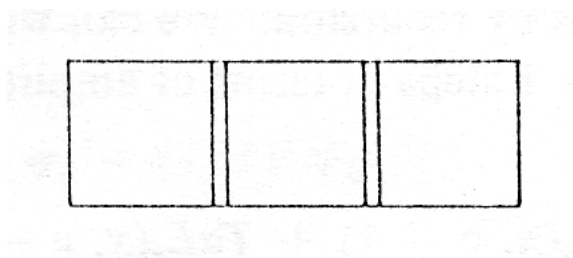
شکل ۴.۷:

در مرتبه اول  $Q$ ، ما گراف غیر مجاز شکل (۴.۸) را



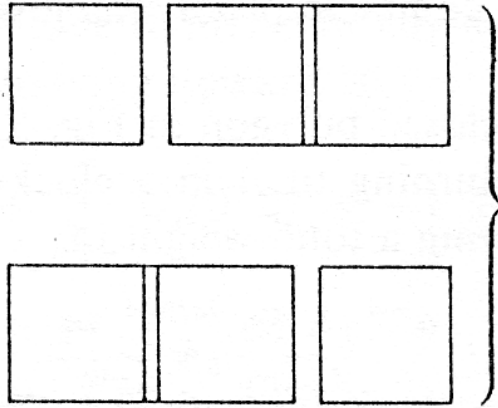
شکل ۴.۸:

در مرتبه دوم بدست می آوریم (که ضرب دو چندضلعی است). ( برای حذف شکل (۴.۸) آن را در  $h(8)$  با علامت منفی قرار می دهیم



شکل ۴.۹:

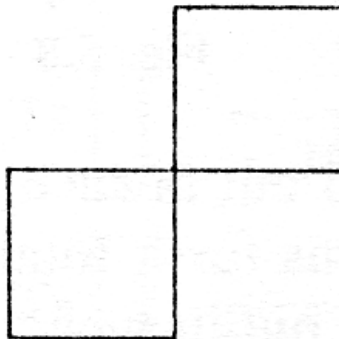
را در مرتبه دوم و سوم بدست می آوریم. در مرتبه دوم ۲ ترم وجود دارد که در شکل (۴.۱۰) نشان داده شده است و هر دو علامت منفی دارند.



شکل ۴.۱۰:

یعنی دو راه برای نوشتن شکل (۴.۱۰) به صورت ضرب شکل (۴.۸) و (۴.۹) وجود دارد. در مرتبه سوم یکی از دو جمله مرتبه دوم با ضرب مثبت سه نوع از جملات شکل (۴.۸) حذف می‌شود. برای حذف جمله دیگر مرتبه دوم نوع ۱۰ باید آن را در  $h(۱۲)$  قرار داد.

در فرمول (۴.۱۳) ما چندضلعی شکل (۴.۱۱) را دو بار می‌شماریم. بنابراین، یک قانون برای اینکه چه جملاتی در  $h(l)$  تصحیح شده بوجود می‌آید، بدست می‌آوریم و همچنین قانونی برای علامت آنها بدست می‌آید. ما باید از اینکه شکل (۴.۱۱) را در  $h(l)$  نشمارده‌ایم، معذرت بخواهیم.



شکل ۴.۱۱:

حال ببینیم کجا هستیم. در محاسبه  $h(l)$  به مشکلی برخورد کردیم زیرا روی چندضلعی مجاز محدودیت داشتیم. در تصحیح  $h(l)$  فهمیدیم که چندضلعی‌های دیگری وجود دارند که سهم آنها لزوماً مثبت نیست و

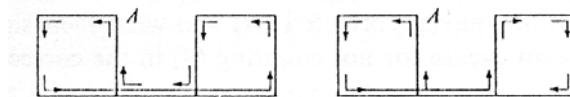
بعضی از چندضلعی‌ها مجاز شماره نمی‌شوند. طبیعی‌ترین راه این است که به هر چندضلعی یک وزن مناسب بدهیم و از هیچ چندضلعی در جمع صرف نظر نکنیم. به خاطر بیاورید که در ابتدا ما دویا چند راه ممکن برای تشکیل یک چندضلعی را وقتی از یک اتم خاص شروع می‌کردیم، نمی‌شماردیم. اما اکنون ما تمام راههای ممکن را می‌شماریم، اما وزن هر راه را طوری انتخاب می‌کنیم که  $q$  تصحیح شده، وقتی  $Q'$  را محاسبه می‌کنیم، مقدار صحیح بدهد.

### تئوری توپولوژیکی

به یک گردش به چپ وزن  $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}}$  و به یک گردش به راست وزن  $\alpha = e^{-i\frac{\pi}{4}}$  را می‌دهیم، و روی یک مسیر بسته گردشهای به چپ و راست را دنبال می‌کنیم. گذاره توپولوژیکی  $Kac$  و  $Ward$  عبارت است از: گرافهای بسته، شماره می‌شوند و گرافهای غیر مجاز، حذف می‌شوند وقتی راههای مختلف تشکیل آنها در نظر گرفته شود. درست بودن این تئوری برای حالات ساده با مثالهایی نشان داده می‌شود. اثبات کامل این تئوری در مقاله <sup>۱</sup> *Sherman* آمده است.

چندضلعی ساده بسته شکل ۷ را در نظر بگیرید. اگر از  $A$  شروع کنیم و در جهت گردش عقربه‌های ساعت به  $A$  برگردیم ۴ گردش به راست انجام داده‌ایم که وزن زیر را می‌دهد:  $\alpha^{-4} = (e^{-i\frac{\pi}{4}})^4 = -1$ . اگر در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت این کار را بکنیم وزن زیر را به ما می‌دهد:  $\alpha^4 = (e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = -1$ . پس وزن کل این منحنی ۲- است و این چندضلعی ساده شماره شده است. برای بدست آوردن وزن صحیح همه چیز را در  $\frac{1}{4}$  ضرب می‌کنیم.

حال چندضلعی شکل (۴.۱۲) را در نظر بگیرید.



شکل ۴.۱۲:

<sup>۱</sup> *Sherman, S., J. Math. Phys.*, ۲۰۲ (۱۹۶۰); ۴, ۱۲۱۳ (۱۹۶۳)

در شکل (۴.۱۲) سمت چپ، مسیر طوری از  $A$  پیموده می‌شود که ۶ گردش چپ و ۲ گردش راست داشته باشیم. پس وزن کل  $(\alpha^6)(\alpha^{-2}) = (\alpha^4) = -1$  است. در شکل (۴.۱۲) سمت راست مسیر طوری پیموده می‌شود که ۴ گردش چپ و ۴ گردش راست داشته باشیم. پس وزن کل  $(\alpha^4)(\alpha^{-4}) = 1$  است. پس وزن کل دو مسیر مورد نظر که در جهت گردش عقربه‌های ساعت بودند،  $1 + (-1) = 0$  است. بدیهی است که دو مسیری که در خلاف گردش عقربه‌های ساعت هستند نیز وزن صفر دارند.

می‌توان به راحتی نشان داد که شکل‌های قبل هم وزن درست می‌دهند. (یادمان باشد که همه چیز را در  $\frac{1}{3}$  ضرب کنیم.)

### روش محاسبه تابع پارش

اگر  $q$  مقدار تصحیح شده  $q$  را نشان دهد، داریم:

$$q = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{corrected } h(l)}{l} T^l$$

$$(4.14) \quad Q' = e^{Nq} - 2T \frac{dq}{dT} = -2 \sum_{l=1}^{\infty} [\text{corrected } h(l)] T^l$$

که مجموع تمام مسیرهایی است که از مبدا شروع شده و به مبدا ختم می‌شود و وزن مختلطی برای هر مسیر وجود دارد. این وزن، حاصلضرب وزن هر نقطه از شبکه که از آن عبور شود، می‌باشد:

$T$  اگر به سمت جلو حرکت کنیم.

$T\alpha$  اگر در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت حرکت کنیم.

$T\alpha^{-1}$  اگر در جهت گردش عقربه‌های ساعت حرکت کنیم.

• اگر  $180^\circ$  درجه گردش کنیم.

در این قانون که برای دامنه هر نقطه عبوری شبکه نوشته شده است، در مورد حرکت اول که دامنه آن به حرکت آخر بستگی دارد هیچ حرفی نزدیم. در زیر دامنه‌ای که برای شروع از مبدا و برگشت به آن از پایین، یعنی حرکت به سمت بالا، است را حساب می‌کنیم. به عنوان قانون شروع برای دامنه حرکت اول به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$T$  اگر به سمت بالا برویم.

$T\alpha$  اگر به سمت چپ برویم.

$T\alpha^{-1}$  اگر به سمت راست برویم.

• اگر به سمت پایین برویم.

به طور کلی، از قانون بالا استفاده می‌کنیم و دامنه اینکه از مبدا شروع کنیم و به نقطه  $(x, y)$  از شبکه برسیم را حساب می‌کنیم. این دامنه را با دادن چهار جزء تعیین می‌کنیم.  $U(x, y)$  دامنه اینکه با حرکت به سمت بالا به  $(x, y)$  برسیم،  $D(x, y)$  دامنه اینکه با حرکت به سمت پایین به  $(x, y)$  برسیم،  $L(x, y)$  دامنه اینکه از سمت چپ به  $(x, y)$  برسیم و  $R(x, y)$  دامنه اینکه از راست به  $(x, y)$  برسیم.

این، همانطور که قبلا به آن توجه کردیم، به این دلیل است که قدم بعدی به جهت قدم قبلی بستگی دارد، بنابراین باید نحوه پیموده شدن مسیر را دنبال کنیم.

تقریبا چیزی که ما می‌خواهیم حساب کنیم، دامنه رسیدن به نقطه  $(x, y)$  در دقیقه  $n$  قدم، است. سپس روی تمام  $n$ ها جمع می‌زنیم.  $U_n(x, y)$  دامنه این است که در  $n$  قدم و در حالیکه مرحله آخر به سمت بالا باشد، به نقطه  $(x, y)$  برسیم.  $D_n, R_n$  و  $L_n$  نیز معانی مشابهی دارند. فرض می‌کنیم در صفر مرحله در حال حرکت به بالا به مبدا برسیم، یعنی:  $U_\circ(x, y) = \delta_{x,\circ} \delta_{y,\circ}, D_\circ = R_\circ = L_\circ = \circ$ . به بیان دیگر، دامنه در صفر قدم وقتی یک است که در جهت بالا رفتن به مبدا برسیم در غیر اینصورت در باقی جهات و باقی نقاط این دامنه صفر است. با این دامنه در صفر قدم، می‌توانیم با روش بازگشتی دامنه را برای هر تعداد مرحله بدست آورد. می‌توانیم دامنه رسیدن به نقطه  $(x, y)$  به سمت بالا در  $n + 1$  مرحله را بر حسب دامنه‌های رسیدن به  $(x, y - 1)$  در  $n$  مرحله بدست آورد.

$$U_{n+1}(x, y) = TU_n(x, y - 1) + T\alpha L_n(x, y - 1) + T\alpha^{-1} R_n(x, y - 1) \quad (4.15)$$

اگر در حال بالا رفتن به  $(x, y - 1)$  برسیم، یک جمله اضافی  $T$  هم داریم. اگر از چپ به  $(x, y - 1)$  برسیم، باید در خلاف عقربه‌های ساعت بچرخیم و جمله  $T\alpha$  را اضافه کنیم. نمی‌توانیم در حال بالا رفتن به  $(x, y)$  برسیم در حالیکه در حال پایین رفتن به  $(x, y - 1)$  رسیده باشیم، زیرا اجازه نداریم مسیری را که طی کرده‌ایم برگردیم. به همین ترتیب می‌توانیم عباراتی برای  $R_n(x, y)$ ،  $L_n(x, y)$  و  $D_n(x, y)$  بدست آوریم.

بنابراین می‌بینیم که فرضیات ما در مورد دامنه مسیر در مرحله صفرم، برای مرحله اول، جواب درست می‌دهد. وقتی روی  $n$  جمع می‌زنیم، باید مرحله صفرم را کم کنیم، زیرا چند ضلعی با طول صفر نداریم، گرچه از



مبدأ شروع شده و به مبدأ ختم شده است. برای ساده کردن جمع روی  $n$ ، تبدیل زیر برای  $U_n(x, y)$  را در نظر می گیریم:

$$U_n(x, y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} = U_n(x, y) e^{-i\xi x} e^{-i\eta y} \quad (4.16)$$

بنابراین

$$U_n(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\xi x} e^{i\eta y} U_n(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \quad (4.17)$$

به عنوان مثال، تبدیل  $U_n(x, y - 1)$  عبارت است از  $e^{-i\eta} u_n(\xi, \eta)$ ، و تبدیل  $U_n(x, y)$ ،  $1$  است. بنابراین معادله مربوط به تبدیل به صورت زیر در می آید.

$$U_{n+1}(\xi, \eta) = T e^{-i\eta} U_n(\xi, \eta) + \circ \cdot e^{i\eta} D_n(\xi, \eta) + T \alpha e^{-i\eta} L_n(\xi, \eta) + T \alpha^{-1} e^{-i\eta} R_n(\xi, \eta) \quad (4.18)$$

و به همین ترتیب می توانیم عباراتی را برای  $D_{n+1}(\xi, \eta)$ ،  $L_{n+1}(\xi, \eta)$  و  $R_{n+1}(\xi, \eta)$  بدست آوریم. اگر  $\psi_n$  معرف یک بردار چهار بعدی باشد (بردار ستونی) که اعضای آن  $(U_n, D_n, L_n, R_n)$  باشند، می توانیم معادله ماتریسی زیر را بنویسیم:

$$\psi_{n+1}(\xi, \eta) = T M(\xi, \eta) \psi_n(\xi, \eta) \quad (4.19)$$

که ماتریس  $M(\xi, \eta)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$M(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} e^{-i\eta} & \circ & \alpha e^{-i\eta} & \alpha^{-1} e^{-i\eta} \\ \circ & e^{i\eta} & \alpha^{-1} e^{i\eta} & \alpha e^{i\eta} \\ \alpha^{-1} e^{-i\xi} & \alpha e^{-i\xi} & e^{-i\xi} & \circ \\ \alpha e^{i\xi} & \alpha^{-1} e^{i\xi} & \circ & e^{i\xi} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\circ}(\xi, \eta) = (1, \circ, \circ, \circ)$$

$$\psi_1(\xi, \eta) = T M \psi_{\circ}$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = (TM)^2 \psi_0$$

$\vdots$

$$(4.20) \quad \psi_n(\xi, \eta) = (TM)^n \psi_0$$

بنابراین

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (TM)^n \psi_0 = \frac{1}{1-TM} \psi_0 \quad (4.21)$$

تبدیل دامنه برای رسیدن با هر تعداد مرحله است. دامنه اینکه در حال بالا رفتن به مبدا برسیم عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0, 0) &= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} U_n(0, 0) = -1 + \psi_0 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\xi_0} e^{i\eta_0} \frac{1}{1-TM} \psi_0 \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \\ (4.22) \quad &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi_0 \frac{1}{1-TM} \psi_0 - 1) \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \end{aligned}$$

ما بدون پیمودن جهت خاصی به مبدا می‌رسیم، بنابراین باید روی چهار مقدار ممکن  $\psi_0$  جمع بزنیم. یعنی باید روی  $\psi_0 = (0, 0, 0, 1)$  و  $\psi_0 = (0, 0, 1, 0)$ ،  $\psi_0 = (0, 1, 0, 0)$ ،  $\psi_0 = (1, 0, 0, 0)$  جمع بزنیم. نتیجه فقط یک رد است. بنابراین،

$$-2T \frac{dq}{dT} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Tr[\frac{1}{1-TM} - 1] \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2}$$

$$q = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} Tr[\int_0^T -\frac{1}{2t(1-tM)} + \frac{1}{2t}] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} Tr \left[ \int_0^T \frac{-M}{2(1-tM)} dt \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} Tr [\log(1 - TM)] \\
(4.23) \quad &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2} \log \det(1 - TM)
\end{aligned}$$

در این محاسبات ما از قضیه زیر استفاده کردیم:

$$Tr \log A = \log \det A \quad (4.24)$$

برای اثبات این قضیه داریم:

$$\begin{aligned}
\det e^B &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\det e^{\frac{B}{N}})^N = \lim_{N \rightarrow \infty} [\det(1 + \frac{B}{N})]^N \\
(4.25) \quad &= \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{N} Tr B)^N = e^{Tr B}
\end{aligned}$$

بنابراین  $\log \det e^B = Tr B$  و اگر  $B = \log A$  باشد داریم  $Tr \log A = \log \det A$ .

با توجه به ماتریس  $M$  دترمینان آن عبارت است از:

$$\det[1 - TM] = (T^2 + 1)^2 - 2T(1 - T^2)(\cos \xi + \cos \eta) \quad (4.26)$$

به طور خلاصه نتایج عبارتند از:

$$\frac{BF}{N} = -\ln \frac{Q}{N}$$

$$Q = \mathfrak{V}^N (\cosh^{\mathfrak{V}N} H) Q'$$

$$Q' = e^{Nq}$$

$$q = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}} \int_{\circ}^{\mathfrak{V}\pi} \int_{\circ}^{\mathfrak{V}\pi} \frac{d\xi d\eta}{(\mathfrak{V}\pi)^{\mathfrak{V}}} \log \det(\mathfrak{V} - TM)$$

$$\det(\mathfrak{V} - TM) = (T^{\mathfrak{V}} + \mathfrak{V})^{\mathfrak{V}} - \mathfrak{V} T(\mathfrak{V} - T^{\mathfrak{V}})(\cos \xi + \cos \eta)$$

$$(4.27) \qquad T = \tanh H$$

اگر تمام این مقادیر را در یکدیگر بگذاریم، داریم:

$$\frac{BF}{N} = -\ln \mathfrak{V} - \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}} \int_{\circ}^{\mathfrak{V}\pi} \int_{\circ}^{\mathfrak{V}\pi} \frac{d\xi d\eta}{(\mathfrak{V}\pi)^{\mathfrak{V}}} \ln [\cosh^{\mathfrak{V}} \mathfrak{V} H - \sinh \mathfrak{V} H (\cos \xi + \cos \eta)] \quad (4.28)$$

## فصل ۵

# حل دقیق مدل آیزینگ روی شبکه‌ی مربعی رهیافت تابع همبستگی

روشی را که در قسمت قبل مورد استفاده قرار گرفت را می‌توانیم برای تعیین تابع همبستگی بسط و تعمیم دهیم و به کار ببریم

$$G_{ij} = \frac{Tr \prod_{\langle pq \rangle} (1 + v S_p S_q) S_i S_j}{Tr \prod_{\langle pq \rangle} (1 + v S_p S_q)} \quad (5.1)$$

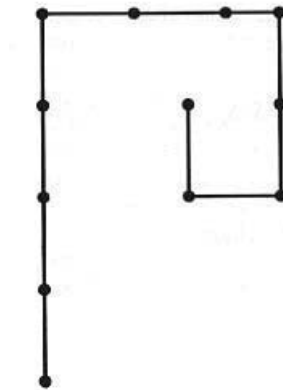
صورت رابطه‌ی (۵.۱) را می‌توانیم به صورت جمع روی گراف‌ها نمایش دهیم، با این تفاوت که در اینجا این گراف‌ها در سایت‌های  $i$  و  $j$  ثابت شده‌اند. در اینجا از اصطلاحی به نام *rooted* استفاده می‌شود. در واقع گراف‌ها در سایت‌های  $i$  و  $j$  *rooted* هستند. این بدین معنا است که سایت‌های *rooted* سایت‌هایی هستند که از آنها تعداد فردی باند خارج شده (۱ یا ۳) و از بقیه‌ی سایت‌ها تعداد زوجی خارج شده است (۰ یا ۲ یا ۴). به طور مثال در شکل (۵.۱) فقط دو نقطه‌ی انتهایی نقاط *rooted* هستند.

در اینجا نیز می‌آییم و با نسبت دادن فاکتور  $(-1)$  به هر مسیر خود متقاطع <sup>۱</sup> (جایی که تقاطع داریم و مسیر خودش را قطع کرده)، یک تناظر چند به یک <sup>۲</sup> بین مسیرهای *rooted* و گراف‌های *rooted* برقرار می‌کنیم. در قبل می‌آمدیم و برای شمارش تقاطع‌ها با ضرب عبارت  $e^{\frac{i\theta}{4}}$  برای هر مسیر یک وزنی در نظر می‌گرفتیم، به طوری

<sup>۱</sup> self – intersection

<sup>۲</sup> many – to – one

که  $\theta$  زاویه‌ای است که مسیر در هر  $vertex$  می‌چرخد. متأسفانه، در حالتِ گراف‌های  $rooted$  دیگر نمی‌توانیم به این شکل تقاطع‌ها را بشماریم. به طورِ مثال گرافی را که در شکل (۵.۱) آمده است را در نظر بگیرید. این گراف هیچ تقاطعی ندارد بنابراین تنها یک مسیر را به آن نسبت می‌دهیم. گرچه، اگر ما بیاییم و عددِ  $winding$  مربوط به مسیر را محاسبه کنیم، عددِ  $2\pi$  را به دست می‌آوریم و بنابراین فاز به طور اشتباهی  $(-1)$  به دست می‌آید.



شکل ۵.۱: گراف برای  $G_{ij}$  به طوری که دارای عدد  $winding$  غیر صفر است.

مشکلی که در اینجا وجود دارد برطرف شدنی است؛ یک رشته‌ای از سایت‌ها را به صورت  $1, 2, 3, \dots, l+1$  تعریف می‌کنیم، به طوری که یک زنجیره‌ی پیوسته را از  $i$  تا  $j$  تشکیل می‌دهد، بنابراین  $S_1 = S_i$  و  $S_{l+1} = S_j$ . از آنجایی که برای هر  $k$  داریم،  $S_k^2 = 1$ ، بنابراین خواهیم داشت

$$(S_1 S_2)(S_2 S_3) \cdots (S_l S_{l+1}) = S_1 S_{l+1} \quad (5.2)$$

صورتِ رابطه‌ی (۵.۱)،  $G_{ij}$ ، را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Gamma_{ij} = Tr \prod_{\langle pq \rangle} (1 + v S_p S_q) \prod_{k=1}^l S_k S_{k+1} \quad (5.3)$$

از آنجایی که سایت‌های  $k$  و  $k+1$  همسایه‌ی نزدیک محسوب می‌شوند، جملاتی از این نوع در اولین

عبارت رابطه ی (۵.۳) ظاهر می شوند، و ما داریم

$$(\mathbb{1} + vS_kS_{k+1}) = v \left( \mathbb{1} + \frac{1}{v}S_kS_{k+1} \right) \quad (5.4)$$

با در نظر گرفتن تعریف زیر

$$\tilde{v}_{pq} = \begin{cases} v & \text{if } (pq) \text{ is not in the chain} \\ \frac{1}{v} & \text{if } (pq) \text{ is in the chain} \end{cases} \quad (5.5)$$

می توانیم بنویسیم

$$\Gamma_{ij} = v^l Tr \prod_{\langle pq \rangle} (\mathbb{1} - \tilde{v}_{pq}S_pS_q) \quad (5.6)$$

ردی که