# Семплирование в малых размерностях.

Елена Юрьевна Шмилева

2 ноября 2018 г.

# Литература.

- Sheldon Ross, 2013, “Simulation” 5th Edition, Academic Press, 2013
- М.Б. Лагутин, “Наглядная статистика”, 2018, 6е издание
- Steven S. Skiena, “Data Science Design”, 2017, Springer
- J.E.Gentle, 2009, Computational Statistics, Springer, 720 pages
- Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев, Введение в математическую статистику, Издательство ЛКИ, Москва, 2014, 600 с.

# План

## Случайная величина

Пусть проводится некий случайный эксперимент на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Что такое случайная величина?

# Случайная величина

Пусть проводится некий случайный эксперимент на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Что такое случайная величина?

**Определение**

*Функция $X : \Omega \to \mathbf{R}$ называется случайной величиной, если для любых вещественных чисел $a$ и $b$ множество исходов $\omega$, таких что $X(\omega) \in (a, b)$, принадлежит $\mathcal{F}$.*

# Типы распределений случайных величин.

- Дискретные случайные величины.
- Абсолютно непрерывные случайные величины.
- Дискретно-непрерывные (смешанные).

# Дискретная случайная величина

**Определение**

*Случайная величина $X$ называется* **дискретной**, *если она принимает конечное или счетное множество значений.*

# Дискретные случайные величины. Примеры.

- 
- 
- 
- 
- 
- 

# Дискретные случайные величины. Примеры.

- Бернулли.
-
-
-
-
-

# Дискретные случайные величины. Примеры.

- Бернулли.
- Биномиальное.
-
-
-
-

# Дискретные случайные величины. Примеры.

- Бернулли.
- Биномиальное.
- Гипергеометрическое.
-
-
-

# Дискретные случайные величины. Примеры.

- Бернулли.
- Биномиальное.
- Гипергеометрическое.
- Пуассоновское.

# Дискретные случайные величины. Примеры.

- Бернулли.
- Биномиальное.
- Гипергеометрическое.
- Пуассоновское.
- Геометрическое.
-

# Дискретные случайные величины. Примеры.

- Бернулли.
- Биномиальное.
- Гипергеометрическое.
- Пуассоновское.
- Геометрическое.
- и т.д.

# Непрерывная случайная величина.

**Определение**

*Случайная величина $X$ называется* **(абсолютно) непрерывной**, *если $X$ принимает все значения из некоторого интервала.*

# Непрерывные случайные величины. Примеры.

# Непрерывные случайные величины. Примеры.

- Равномерная случайная величина
-
-
-
-

# Непрерывные случайные величины. Примеры.

- Равномерная случайная величина
- Экспоненциальная случайная величина
-
-
-

# Непрерывные случайные величины. Примеры.

- Равномерная случайная величина
- Экспоненциальная случайная величина
- Нормальная (гауссовская) случайная величина
-
-

# Непрерывные случайные величины. Примеры.

- Равномерная случайная величина
- Экспоненциальная случайная величина
- Нормальная (гауссовская) случайная величина
- Бета случайная величина
-

# Непрерывные случайные величины. Примеры.

- Равномерная случайная величина
- Экспоненциальная случайная величина
- Нормальная (гауссовская) случайная величина
- Бета случайная величина
- Коши, Парето и т.д.

# Задание закона случайной величины

Какой есть универсальный способ задания распределения любой случайной величины (случайного вектора)?

# Задание закона случайной величины

Какой есть универсальный способ задания распределения любой случайной величины (случайного вектора)?

через функцию распределения

# Функция распределения.

**Определение**

*Функцией распределения (cumulative distribution function) случайной величины* $X$ *называется следующая функция:* $F(a) = P(X \leq a)$.

Функция распределения есть и у дискетных, и у непрерывных случайных величин.

# Функция распределения. Замечание

Замечание:

# Функция распределения. Замечание

Замечание:

- непрерывная справа функция

$$F(a+0) = \lim_{x \to a+0} F(x) = F(a)$$

-
-

# Функция распределения. Замечание

Замечание:

- непрерывная справа функция

$$F(a+0) = \lim_{x \to a+0} F(x) = F(a)$$

- для дискретных случайных величин - ступенчатая cádlág функция,
-

# Функция распределения. Замечание

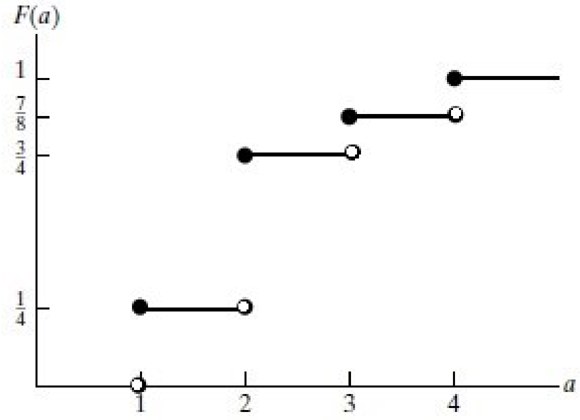
Замечание:

- непрерывная справа функция

$$F(a+0) = \lim_{x \to a+0} F(x) = F(a)$$

- для дискретных случайных величин - ступенчатая cádlág функция,
- для непрерывных случайных величин непрерывная неубывающая функция.

# Функция распределения. Пример для дискретных случайных величин.



# Симуляции

**Определение**

*Симуляции (или семплинг) - это способ определять вероятности посредством компьютерного эксперимента.*

# Симуляции сл.величин

С чего начать?

# Симуляции сл.величин

## С чего начать?

- Генерация последовательности равномерно распределенных случайных величин.

# Симуляции сл.величин

С чего начать?

- Генерация последовательности равномерно распределенных случайных величин.
- Генерация последовательности любых других случайных величин/векторов.

# Симуляции сл.величин

С чего начать?

- Генерация последовательности равномерно распределенных случайных величин.
- Генерация последовательности любых других случайных величин/векторов.
- Симуляция событий, оценка вероятностей и т.д.

# План

# Генераторы случайных чисел

## Определение

*Код, производящий последовательность псевдослучайных чисел, называется* **генератором случайных чисел***.*

# Псевдослучайные числа

## Определение

*Псевдослучайные числа - это числа похожие по своим свойствам на равномерно распределенные случайные на отрезке* $[0,1]$*, но полученные детерминистическим способом.*

# Генераторы случайных чисел. Примеры.

Генераторов случайных чисел много:

-
-
-
-

# Генераторы случайных чисел. Примеры.

Генераторов случайных чисел много:

- Метод середины квадрата.
-
-
-

# Генераторы случайных чисел. Примеры.

Генераторов случайных чисел много:

- Метод середины квадрата.
- Много других генераторов.
-
-

# Генераторы случайных чисел. Примеры.

Генераторов случайных чисел много:

- Метод середины квадрата.
- Много других генераторов.
- MT19937 используется в R по умолчанию. Mersenne twister MT19937 период - простое число Мерсенна $2^{19937} - 1$.
-

# Генераторы случайных чисел. Примеры.

Генераторов случайных чисел много:

- Метод середины квадрата.
- Много других генераторов.
- MT19937 используется в R по умолчанию. Mersenne twister MT19937 период - простое число Мерсенна $2^{19937} - 1$.
- Линейный Конгруентный Генератор (мультипликативный датчик) прост для понимания.

# Линейный Конгруентный Генератор (LCG)

Самый простой генератор случайных чисел - это Линейный Конгруентный Генератор (LCG) или мультипликативный датчик

# Линейный Конгруентный Генератор (LCG)

Самый простой генератор случайных чисел - это Линейный Конгруентный Генератор (LCG) или мультипликативный датчик

$$X_n = (aX_{n-1} + c) \mod m,$$

$$U_n = X_n/m,$$

где $a, c, m$ - целые числа

- $a > 0$;
- $c \geq 0$;
- $m \geq 0$;
- $X_1$ - seed (зерно) изначально заданное целое число;
- $X_1 < m$.

# Линейный Конгруентный Генератор. Примеры.

Рекурентная формула:

$$X_n = (7X_{n-1} + 7) \mod 10,$$

$X_1 = 7$

# Линейный Конгруентный Генератор. Примеры.

Рекурентная формула:

$$X_n = (7X_{n-1} + 7) \mod 10,$$

$X_1 = 7$
Получим X: 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0,...
Получим U: 0.7, 0.6, 0.9, 0, 0.7, 0.6, 0.9, 0,...
Период = 4.

# Линейный Конгруентный Генератор. Примеры.

Рекурентная формула:

$$X_n = (6X_{n-1} + 7) \mod 23,$$

$X_1 = 5$

# Линейный Конгруентный Генератор. Примеры.

Рекурентная формула:

$$X_n = (6X_{n-1} + 7) \mod 23,$$

$X_1 = 5$
Получаем X: 5, 14, 22, 1, 13, 16, 11, 4, 9, 15, 5 ...
Получаем U: 5/23, 14/23, 22/23, 1/23, 13/23, 16/23, 11/23, 4/23, 9/23, 15/23, 5/23 ...
Период = 11.

# Замечания

**Замечания:**

- Как только $X_n = seed$ все зациклится;
- Длина периода не превышает $m$;
- $m$ надо брать большим;
- "хороший" LCG помогает выбрать теория чисел.
- Генерирует лишь дробно-рациональные числа. Иррациональные числа получаются аппроксимацией.

# Длина периода. Правило выбора “хорошего” LCG

**Теорема (Hull& Dobell’1962, Knuth)**

*Длина периода равна m тогда и только тогда, когда:*

- *Числа c и m взаимно простые;*
- *b=a-1 кратно p для каждого простого p, являющегося делителем m;*
- *b кратно 4, если m кратно 4.*

- Например, $a = 16, c = 7, m = 225$ даст период 225
- Из теоремы видно, что хорошо брать m большим простым числом, с взаимно простым m, при этом a=1. Например, простое число Мерсена $m = 2^{31} - 1$.

## Замечания

- Полный период еще не гарантирует, что генератор “хороший”. Его нужно еще проверить на случайность всевозможными тестами.
- На практике действует “презумпция случайности”: алгоритм используют, если не установлено, что он “плохой”.

# Вопрос

Как генерируют все остальные случайные величины и случайные векторы?

# Вопрос

Как генерируют все остальные случайные величины и случайные векторы?

Различные вероятностные методы существуют для этого.

# План

# Метод обратного преобразования

Пусть $X$ с.в. с функцией распределения $F$

**Fact**

*Если функция распределения $F$ непрерывная и строго возрастающая (т.е. $\exists\ F^{-1}$ ), то*

$$\xi = F^{-1}(\eta),$$

*где $\eta$ равномерная с.в. на [0,1], определена и имеет такое же распределение как $X$.*

# Метод обратного преобразования (Continious Inverse Transform)

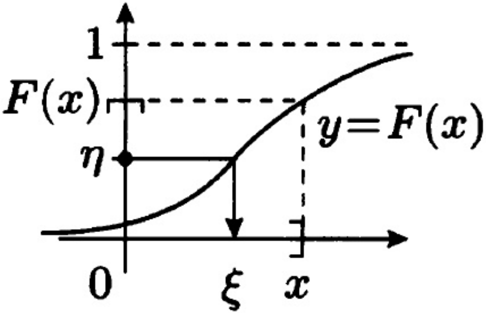



Рис.: График взят из книги Лагутин, Наглядная Статистика

$\eta$ имитирует вероятнсть

$\xi$ имитирует $\eta$-квантиль распределения F

# Метод обратного преобразования (Continuous Inverse Transform)

Доказательство.

Найдем функцию распределения $\xi$

$$P\{\xi \leq t\} = P\{F^{-1}(\eta) \leq t\} =$$

$$= P\{\eta \leq F(t)\} = F(t),$$

последнее равенство верно т.к. $\eta$ равномерная на $[0,1]$.
Значит, $Law(\xi) = F = Law(X)$. □

# Пример. Генерирование экспоненциального распределения

$X \sim Exp(\lambda)$ с функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
Найдем $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - u)$

**Алгоритм:**

- Генерируем последовательность равномерных с.в. $U_1, U_2, ...$;
- Положим $X_n = -\frac{1}{\lambda}\log U_n$;
- $X_1, X_2, ...X_n, ...$ это последовательность экспоненциальных с.в. с параметром $\lambda$.

# Метод обратного преобразования (Discrete Inverse Transform)

Пусть $X$ дискретная с.в. с функцией распределения $F$
Определим обобщенную обратную функцию

$$F^{-1}(y) = min\{x : F(x) \geq y\}, \quad y \in [0, 1].$$

**Fact**

*Пусть $U$ равномерная с.в. на [0,1], тогда*

$$Y = F^{-1}(U)$$

*определена и имеет такое же распределение как $X$.*

# Метод обратного преобразования (Discrete Inverse Transform)

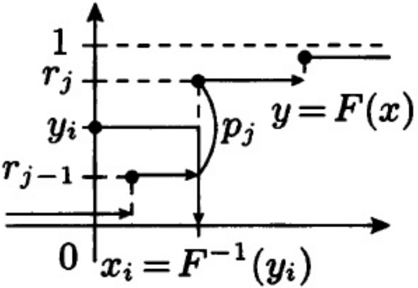



Рис.: График взят из книги Лагутин, Наглядная Статистика

Здесь $\{r_j\}$ накопленные вероятности, т.е. $r_j = p_1 + p_2 + ... + p_j$, $r_0 = 0$.

# Метод обратного преобразования (Discrete Inverse Transform)

$X \sim Pois(3)$

Алгоритм:

- Генерируем последовательность равномерных с.в. $U_1, U_2, \ldots$;
- $U_i \in (0; e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 0$

# Метод обратного преобразования (Discrete Inverse Transform)

$X \sim Pois(3)$

Алгоритм:

- Генерируем последовательность равномерных с.в. $U_1, U_2, \ldots$;
- $U_i \in (0; e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 0$
- $U_i \in (e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 1$

# Метод обратного преобразования (Discrete Inverse Transform)

$X \sim Pois(3)$

Алгоритм:

- Генерируем последовательность равномерных с.в. $U_1, U_2, \ldots$;
- $U_i \in (0; e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 0$
- $U_i \in (e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 1$
- $U_i \in (e^{-3} + 3 \cdot e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 2$

# Метод обратного преобразования (Discrete Inverse Transform)

$X \sim Pois(3)$
Алгоритм:

- Генерируем последовательность равномерных с.в. $U_1, U_2, \ldots$;
- $U_i \in (0; e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 0$
- $U_i \in (e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 1$
- $U_i \in (e^{-3} + 3 \cdot e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 2$
- $U_i \in (e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3} + \frac{3^3}{3!} e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 3$

# Метод обратного преобразования (Discrete Inverse Transform)

$X \sim Pois(3)$

Алгоритм:

- Генерируем последовательность равномерных с.в. $U_1, U_2, ...$;
- $U_i \in (0; e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 0$
- $U_i \in (e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 1$
- $U_i \in (e^{-3} + 3 \cdot e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 2$
- $U_i \in (e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3};\ e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2} e^{-3} + \frac{3^3}{3!} e^{-3}]$, то $X_i = F^{-1}(U_i) = 3$
- etc.

# Моделирование распределения Бернулли.

$X_1, X_2, ...X_n, ....$ последовательность независимых Бернуллиевских с.в.

$$P\{X_n = 0\} = p, \;\; P\{X_n = 1\} = 1 - p, \;\; p \in (0, 1).$$

- Генерируем последовательность равномерно распределенных с.в. $U_1, U_2, ..., U_n, ...$

# Моделирование распределения Бернулли.

$X_1, X_2, ...X_n, ....$ последовательность независимых Бернуллиевских с.в.

$$P\{X_n = 0\} = p,\ \ P\{X_n = 1\} = 1 - p,\ \ p \in (0, 1).$$

- Генерируем последовательность равномерно распределенных с.в. $U_1, U_2, ..., U_n, ...$
- Положим

$$X_n = \begin{cases} 0, & U_n \le p, \\ 1, & U_n > p. \end{cases}$$

# Моделирование распределения Бернулли.

$X_1, X_2, ...X_n, ....$ последовательность независимых Бернуллиевских с.в.

$$P\{X_n = 0\} = p, \ P\{X_n = 1\} = 1 - p, \ p \in (0, 1).$$

- Генерируем последовательность равномерно распределенных с.в. $U_1, U_2, ..., U_n, ...$
- Положим

$$X_n = \begin{cases} 0, & U_n \leq p, \\ 1, & U_n > p. \end{cases}$$

- $P\{X_n = 0\} = P\{U_n \leq p\} = p$
  последнее равенство из формулы для функции распределения равномерной случайной величины.

# План

# Недостатки предыдущих методов

- Обратную функцию не всегда можно явно найти (например, для нормального распределения)
- Для большинства случайных векторов сложно находить обратную функцию распределения.

# Метод выборки с отклонением

Генерируем $X \sim F$, для которого $F^{-1}$ явно не решается.

Ищем $Y \sim G$ такую, что

- Y легко генерируется
- $$\exists\, c > 0: \; f(t) \leq c \cdot g(t) \tag{1}$$

  для $t \in (-\infty, +\infty)$, где $f(\cdot) = F'(\cdot)$ и $g(\cdot) = G'(\cdot)$ плотности.

# Алгоритм выборки с отклонением

Алгоритм выборки с отклонением (Accept/Reject method):

- $U_i \sim Unif(0,1)$
- $Y_i \sim G$
- Если $U_i \leq \frac{f(Y_i)}{c \cdot g(Y_i)}$, то $X_i = Y_i$, иначе шаг 1.

# Метод выборки с отклонением. Обоснование.

**Fact**

*Если $g$ плотность $Y$, $f$ плотность $F$ и $c$ из условия (1), $U$ и $Y$ независимы, то*

$$F(t) = P\left(Y \leq t \quad | \, U \leq \frac{f(Y)}{c \cdot g(Y)}\right).$$

# Метод выборки с отклонением. Эффективность.

Какова эффективность алгоритма? Какой процент реализаций отклоняется?

# Метод выборки с отклонением. Эффективность.

Какова эффективность алгоритма? Какой процент реализаций отклоняется?

- $P(\text{успех цикла}) = P(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\frac{f(t)}{cg(t)}} ds\ g(t)dt = \frac{1}{c}$

# Метод выборки с отклонением. Эффективность.

Какова эффективность алгоритма? Какой процент реализаций отклоняется?

- $P(\text{успех цикла}) = P(U \le \frac{f(Y)}{cg(Y)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{f(t)}{cg(t)}} ds\ g(t)dt = \frac{1}{c}$
- Пусть $\xi$ - количество неудач до первого успеха, i.e. $\xi \sim Geom(p)$, $p = 1/c$. Известно, что $E\xi = c$.

# Метод выборки с отклонением. Эффективность.

Какова эффективность алгоритма? Какой процент реализаций отклоняется?

- $P(\text{успех цикла}) = P(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{f(t)}{cg(t)}} ds\ g(t)dt = \frac{1}{c}$
- Пусть $\xi$ - количество неудач до первого успеха, i.e. $\xi \sim Geom(p)$, $p = 1/c$. Известно, что $E\xi = c$.
- Т.е. в среднем происходит $c$ неудач на 1 успех.

# Генерирование нормального распределения

Сгенерировать iid из $Z \sim N(0,1)$, где плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- Начнем с $X := |Z|$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in (0, +\infty).$$

- Будем применять метод выборки с отклонением.

# Генерирование нормального распределения

Сгенерировать iid из $Z \sim N(0,1)$, где плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- Начнем с $X := |Z|$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in (0, +\infty).$$

- Будем применять метод выборки с отклонением.

# Генерирование нормального распределения

- $Y \sim Exp(1)$ с плотностью $g(x) = e^{-x}, x > 0$ (легко генерируется с помощью Непрерывного Обратного Преобразования).
- $$\frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \exp\{-(x-1)^2/2\} \leq \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$$
- Значит, $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \approx 1.32$

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \exp\{-(x-1)^2/2\}$$

# Генерация модуля нормальной с.в.

Далее алгоритм выборки с отклонением (Accept/Reject method):

- $U_i \sim Unif(0,1)$
- $Y_i \sim Exp(1)$
- Если $U_i \leq \exp\{-(Y_i-1)^2/2\}$, то $X_i = Y_i$,
  иначе шаг 1.

# Генерирование нормального распределения

Умея генерировать $|Z|$, как сгенерировать $Z \sim N(0, 1)$?

# Генерирование нормального распределения

Умея генерировать $|Z|$, как сгенерировать $Z \sim N(0,1)$?

- Генерируем $U \sim Unif(0,1)$
- $$Z_i = \begin{cases} X_i & U \leq 1/2, \\ -X_i, & U > 1/2. \end{cases}$$

# Замечания

- Вероятность принятия: $\frac{1}{C}$ (т.е. 1 из C= 1,32 реализаций будут приняты).
- $T \sim N(a, \sigma^2)$ получается преобразованием $T = \sigma Z + a$.
- Вспомогательное распределение должно
  - иметь такой же носитель,
  - хвосты того же порядка,
  - хорошо повторять пики (иначе моды не будут заметны),
  - константа $C$ должна быть минимально возможной.

# Замечания еще.

- В гауссовском случае хорошо работает для генерирования случайных векторов.
- Однако это сложная задача для векторов большой размерности (процент отклонения растет экспоненциально с увеличением размерности).

# Гауссовские векторы

Пусть случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ имеет вектор средних $\mathbf{a} = E\xi$ и невырожденную матрицу ковариаций $\Sigma$, составленную из элементов $\Sigma_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$.

## Определение

*Говорят, что вектор $\xi$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(a, \Sigma)$ в $\mathbf{R}^d$, если плотность этого вектора равна*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d \sqrt{|det\Sigma|}} \exp\{-(1/2)(x-a)^T \Sigma^{-1}(x-a)\},$$

*где $x \in \mathbf{R}^d$.*

# Гауссовский вектор с независимыми компонентами.

Компоненты вектора независимы, если $\Sigma = E$, где E - это единичная матрица.

Вектор $\xi$ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, E)$ в $\mathbf{R}^d$, если плотность этого вектора равна

$$f_\xi(x_1, \ldots x_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x_1^2/2\} \ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x_d^2/2\}.$$

# Моделирование гауссовского вектора с независимыми компонентами

- Генерировать $|\xi| = (|\xi_1|, |\xi_2|, ..., |\xi_d|)$

$$f_{|\xi|}(x_1, ...x_d) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x_1^2/2\} ... \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x_d^2/2\}, \ x_i > 0.$$

- Многомерное экспоненциальное с независимыми компонентами

$$g(x_1, ...x_d) = \exp\{-x_1\} ... \exp\{-x_d\}, \ x_i > 0$$

легко генерируется покомпонентно.

- $$c_d = max_{x \in (\mathbf{R}^+)^d} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2^{d/2}}{\pi^{d/2}} e^{d/2} = (1.32)^d \to_{d \to \infty} \infty$$

- Процент отклонения растет экспоненциально с увеличением размерности.

# Заключение

Что мы сегодня изучили?

- 
- 
- 
- 

# Заключение

Что мы сегодня изучили?

- Линейные Конгруентные генераторы равномерных сл.в.
-
-
-

# Заключение

Что мы сегодня изучили?

- Линейные Конгруентные генераторы равномерных сл.в.
- Метод обратной функции для непрерывных сл.в.
-
-

# Заключение

Что мы сегодня изучили?

- Линейные Конгруентные генераторы равномерных сл.в.
- Метод обратной функции для непрерывных сл.в.
- Метод обратной функции для дискретных сл.в.
-

# Заключение

Что мы сегодня изучили?

- Линейные Конгруентные генераторы равномерных сл.в.
- Метод обратной функции для непрерывных сл.в.
- Метод обратной функции для дискретных сл.в.
- Метод выборки с отклонением.

Спасибо за внимание!