Семинар 1.

2.11.2018

1. (LCG). Пусть $X_0 = 5$ и $X_n = 3X_{n-1}\ mod\ 150$. Найдите $X_1, ...X_{10}$.

2. (LCG). Пусть $X_0 = 3$ и $X_n = (5X_{n-1} + 7)\ mod\ 200$. Найдите $X_1, ...X_{10}$.

3. (LCG). Пусть $X_1 = 23$, $X_2 = 66$ и $X_n = 3X_{n-1} + 5X_{n-2}\ mod\ 100$. Найдите $X_1/100, ...X_{14}/100$.

4. (LCG). Запрограммируйте мультипликативный датчик из лекций
$X_n = (6X_{n-1} + 7)\ mod\ 23, X_0 = 15$
$X_n = (16X_{n-1} + 7)\ mod\ 225, X_0 = 2$
а) Будут ли эти датчики иметь полный период? б) Примените подходящие стат.критерии, чтобы проверить, что датчики "хорошие". с) Предложите оптимальный датчик.

5. (Равномерная дискретная случайная величина). Приведите эффективный алгоритм генерирования с.в. $P\{X = 1\} = 0.2, P\{X = 2\} = 0.2, P\{X = 3\} = 0.2, P\{X = 4\} = 0.2, P\{X = 5\} = 0.2$.

6. (LCG)*. Пусть случайная величина ξ равномерная дискретная на $\{1, 2, ..., n\}$. Рассмотрим случайную величину $r = n\ mod\ \xi$. Найдите $\lim_{n\to\infty} P(r \geq \xi/2)$. Hint: предел 1/2 не равен.

7. (Дискретное обратное преобразование). Приведите эффективный алгоритм генерирования с.в. $P\{X = 1\} = 0.3, P\{X = 2\} = 0.2, P\{X = 3\} = 0.35, P\{X = 4\} = 0.15$.

8. (Дискретное обратное преобразование). Приведите эффективный алгоритм генерирования геометрической с.в. с параметром 0.3.

9. (Непрерывное обратное преобразование). Сгенерите 100 независимых с.в. с распределением Коши, плотность которого имеет вид $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$.

10. (Непрерывное обратное преобразование) Сгенерите 100 независимых с.в. с логистическим распределением: $f(x) = e^{-x}/(1 + e^{-x})^2$, $x \in \mathbf{R}$.

11. (Непрерывное обратное преобразование). Случайная величина X распределена по Парето с параметрами $k > 0$ и $\alpha > 0$. Плотность такова $f(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x > k$. С помощью метода обратного преобразования сгенерируйте 1000 реализаций X.

12. (Выборка с отклонением). Сгенерируйте $X \sim Be(a, b)$ с плотностью
$$f(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad x \in [0, 1].$$

13. (Выборка с отклонением). Пусть X стандартная нормальная случайная величина. Определите мажорирующую константу и методом выборки с отклонением сгенерируйте X с помощью стандартного распределения Коши, плотность которого имеет вид $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$. Продемонстрируйте, что этот метод не сработает, если нужно будет генерировать Коши распределение, используя нормальное как вспомогательное.

14. (Выборка с отклонением). Сгенерите 100 независимых стандартных нормальных с.в. из равномерных и экспоненциальных сл.величин. Покажите, что оптимально будет использовать $Y \sim Exp(\lambda)$, $\lambda = 1$.

15. (Выборка с отклонением). Сгенерите 100 независимых случайных величин с законом $X \sim Gamma(2, 1)$ при условии, что $X > 5$. Оцените $E(X|X > 5)$.

16. (Равномерное распределение). Две независимые равномерно распределенные с.в. делят отрезок [0;1] на три части. Проведите подобный эксперимент по разделению отрезка 1000 раз. а) Постройте эмпирические функции плотности длин левой, средней и правой частей. б) Каков (эмпирический) вывод? в) Подтвердите полученный эмпирический вывод теоретическими расчетами функций распределений.

17. (Дискретное обратное преобразование). Лаборатория, сопровождающая донорские операции, использует новые разработки. Известно, что из 142 операций лишь 9 прошли с осложнениями. В медицине считается, что в среднем 10% подобных операций проходят с осложнениями. Можно ли считать, что разработки лаборатории снижают ранее известный риск или же низкий процент осложнений это случайность. Предложите процедуру проверки гипотезы и оценки P-значения (можно использовать симуляции).