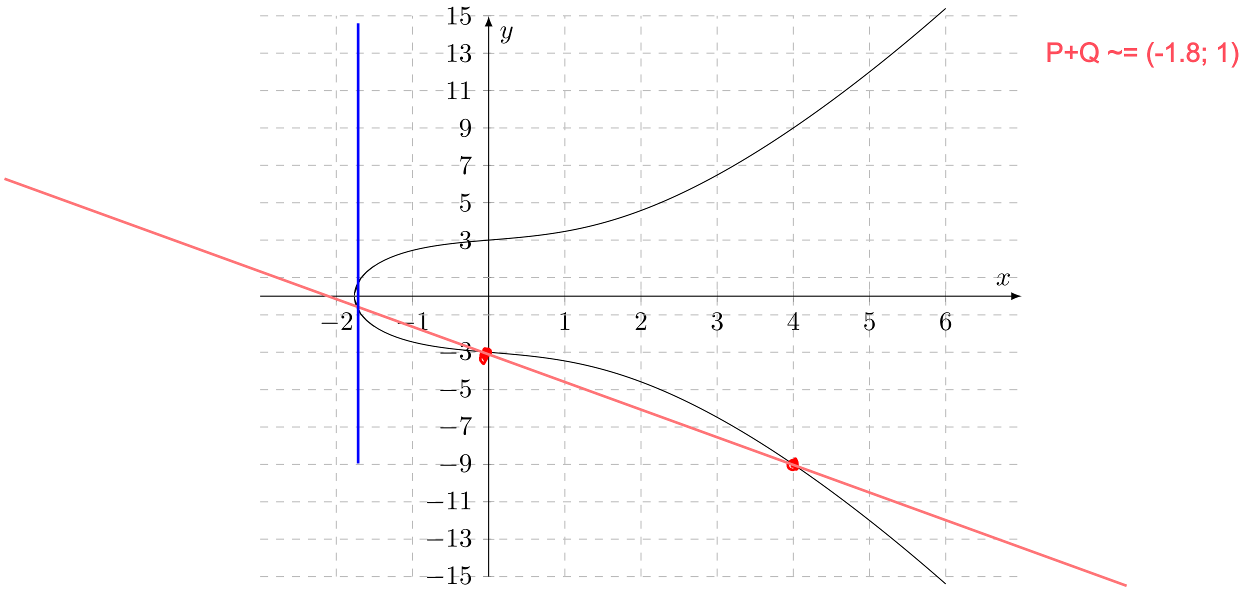
KRY: Wahlfach Kryptologie
Serie 11: Diskrete Logarithmen, elliptische Kurven

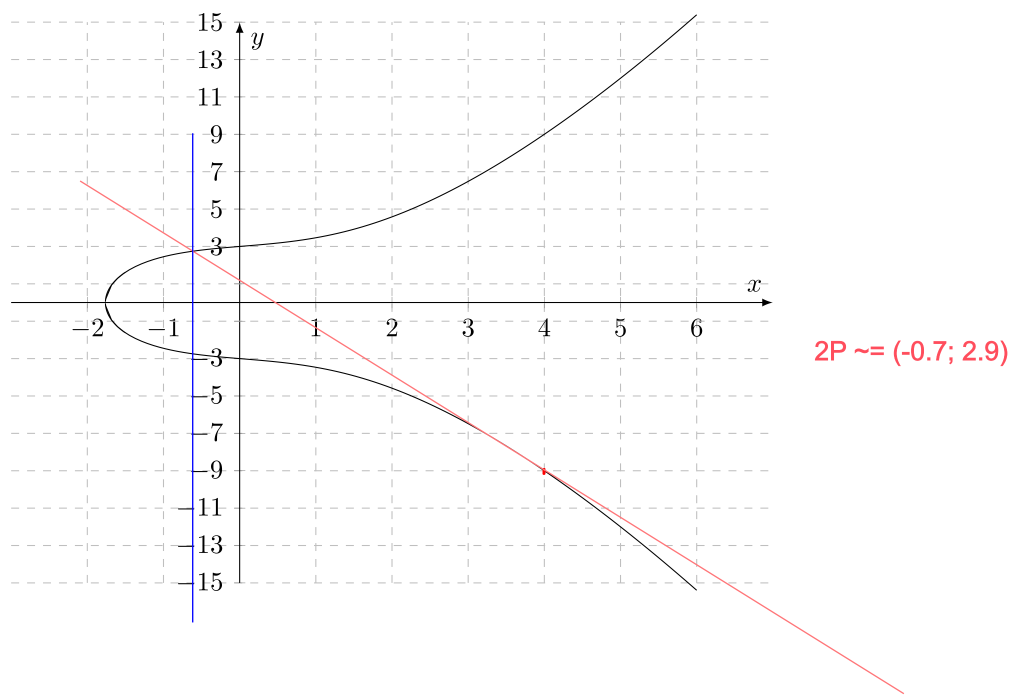
Aufgabe 1 (T)

Elliptische Kurven Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Untenstehend ist die elliptische Kurve $E : y^2 = x^3 + 2x + 9$ je einmal abgebildet. Die Punkte $P(4; -9)$ und $Q(0; -3)$ liegen auf der Kurve.

(a) Bestimmen Sie zeichnerisch die ungefähren Werte von $P + Q$ und $2P$.

(b) Bestimmen Sie $P + Q$ und $2P$ exakt mithilfe der Rechengesetze.





1.b) Kurve E : $y^2 = x^3 + 2x + 9$ / $P(4; -9)$ / $Q(0; -3)$
$a=2$
$b=9$
$x_1=4$
$x_2=0$
$y_1=-9$
$y_2=-3$

Falls $x_1 \neq x_2$:

$m := y_2 - y_1 / x_2 - x_1 = -3+9/-4 = -3/2 = -1.5$

$x_3 := m^2 - x_1 - x_2 = (-1.5)^2 - 4 = -1.75$

$y_3 := -m(x_3 - x_1) - y_1 = 1.5 * ((-1.75) - 4) + 9 = 0.375$

$P+Q := (x_3; y_3) = (-1.75; 0.375)$

Falls $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2 \neq 0$:

$m := 3x_1^2+a/2y_1 = 3*4^2 + 2 / 2*(-9) = -25/9$

$x_3 := m^2 - 2x_1 = (-25/9)^2 - 2*4 = -23/81$

$y_3 := -m(x_3 - x_1) - y_1 = 25/9 * ((-23/81) - 4) + 9 = -2114/729$

$2P := (x_3; y_3) = (-23/81 ; -2114/729)$

Aufgabe 2 (T)
Wir betrachten den Körper $K = \mathrm{GF}(11)$ und die elliptische Kurve über K mit der Gleichung

$$E : y^2 = x^3 + 4x + 1.$$

(a) Erstellen Sie eine Tabelle, die jedem $x \in K$ den Wert $s_x = x^3 + 4x + 1$ zuordnet.

(b) Bestimmen Sie für jedes $s_x = x^3 + 4x + 1$, das quadratischer Rest modulo 11 ist, die Wurzeln $y_{1,2}$ und bestimmen Sie so die Menge der Punkte der elliptischen Kurve.
Hinweis: Berechnen Sie die Wurzeln mithilfe von PARI-GP.

(c) Berechnen Sie $P(5; 5) - Q(7; 3)$ mit Angabe der Zwischenschritte.

(d) Berechnen Sie $2P(7; 3)$ mit Angabe der Zwischenschritte.

Aufgabe 3 (T)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Baby Step – Giant Step Algorithmus in $\mathbb{Z}_{61}^*$ den diskreten Logarithmus $\log_{17}(42)$.

Aufgabe 4 (T)
Lösen Sie die Gleichung $78x = 246 \pmod{264}$.

Aufgabe 5 (T)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Pollard ρ - Methode in $\mathbb{Z}_{23}^*$ den diskreten Logarithmus $\log_5(10)$.
Hinweis: Wählen Sie die folgende Zerlegung von $\mathbb{Z}_{23}^*$: $G_1 = \{1, 2, \ldots, 7\}$, $G_2 = \{8, 9, \ldots, 15\}$, $G_3 = \{16, 17, \ldots, 22\}$.

2. K = GF(11) / E : y2 = x^3 + 4x + 1 -> a=4; b=1

$a \in \mathbb{Z}_p$ hat eine Quadratwurzel $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} = 1 \pmod{p}$