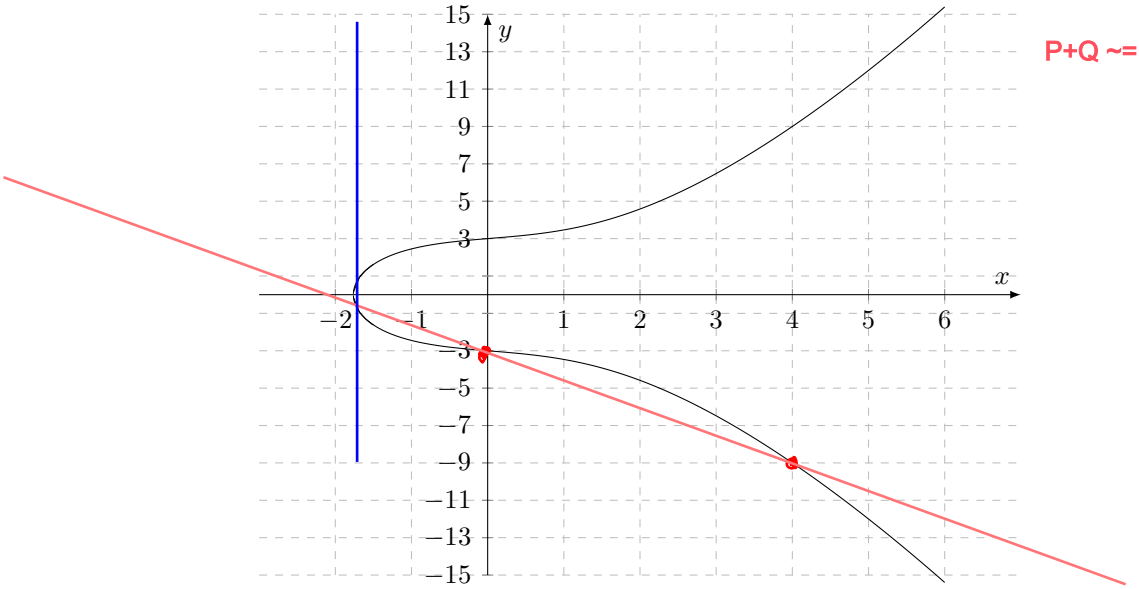
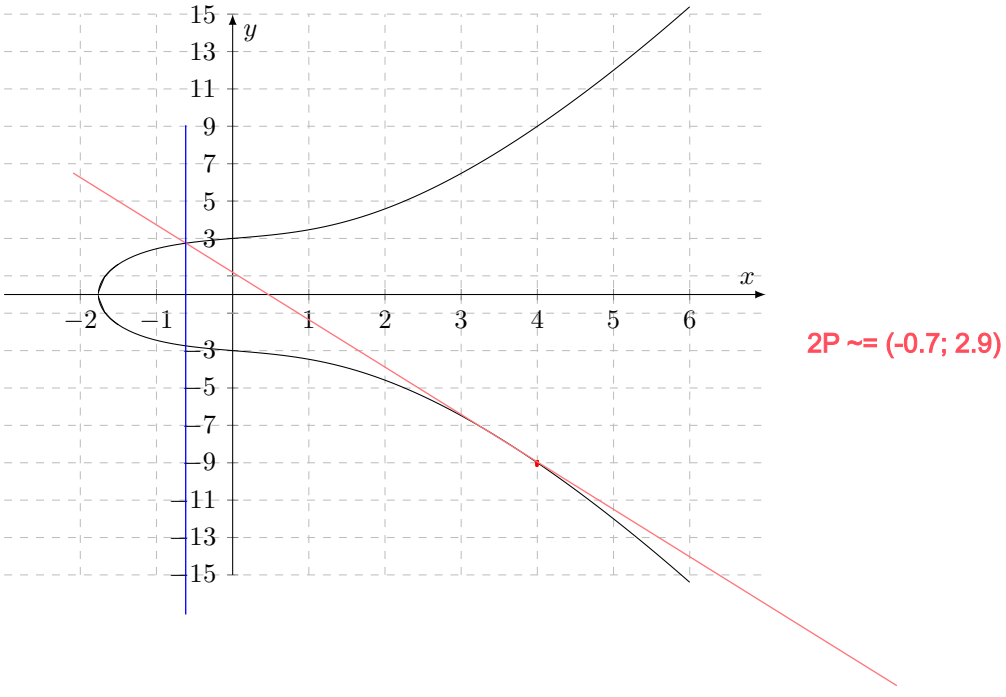
KRY: Wahlfach Kryptologie
Serie 11: Diskrete Logarithmen, elliptische Kurven

Aufgabe 1 (T)
Elliptische Kurven Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Untenstehend ist die elliptische Kurve $E : y^2 = x^3 + 2x + 9$ je einmal abgebildet. Die Punkte $P(4; -9)$ und $Q(0; -3)$ liegen auf der Kurve.

(a) Bestimmen Sie zeichnerisch die ungefähren Werte von $P + Q$ und $2P$.

(b) Bestimmen Sie $P + Q$ und $2P$ exakt mithilfe der Rechengesetze.





1.b) Kurve E : y^2 = x^3 + 2x + 9 / P(4; −9) / Q(0; −3)
a=2
b=9
x1=4
x2=0
y1=-9
y2=-3

Falls x1 != x2:

m := y2−y1/x2−x1 = -3+9/-4 = -3/2 = -1.5

x3 := m^2 − x1 − x2 = (-1.5)^2 - 4 = -1.75

y3 := −m(x3 − x1) − y1 = 1.5 * ((-1.75) - 4) + 9 = 0.375

P+Q := (x3; y3) = (-1.75; 0.375)

Falls x1 = x2 und y1 = y2 != 0:

m := 3x1^2+a/2y1 = 3*4^2 + 2 / 2*(-9) = -25/9

x3 := m^2 − 2x1 = (-25/9)^2 - 2*4 = -23/81

y3 := −m(x3 − x1) − y1 = 25/9 * ((-23/81) - 4) + 9 = −2114/729

2P := (x3; y3) = (-23/81 ; −2114/729)

Aufgabe 2 (T)
Wir betrachten den Körper $K = \mathrm{GF}(11)$ und die elliptische Kurve über K mit der Gleichung

$$E : y^2 = x^3 + 4x + 1.$$

(a) Erstellen Sie eine Tabelle, die jedem $x \in K$ den Wert $s_x = x^3 + 4x + 1$ zuordnet.

(b) Bestimmen Sie für jedes $s_x = x^3 + 4x + 1$, das quadratischer Rest modulo 11 ist, die Wurzeln $y_{1,2}$ und bestimmen Sie so die Menge der Punkte der elliptischen Kurve.
Hinweis: Berechnen Sie die Wurzeln mithilfe von PARI-GP.

(c) Berechnen Sie $P(5;5) - Q(7;3)$ mit Angabe der Zwischenschritte.

(d) Berechnen Sie $2P(7;3)$ mit Angabe der Zwischenschritte.

Aufgabe 3 (T)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Baby Step – Giant Step Algorithmus in $\mathbb{Z}_{61}^*$ den diskreten Logarithmus $\log_{17}(42)$.

Aufgabe 4 (T)
Lösen Sie die Gleichung $78x = 246 \pmod{264}$.

Aufgabe 5 (T)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Pollard ρ - Methode in $\mathbb{Z}_{23}^*$ den diskreten Logarithmus $\log_5(10)$.
Hinweis: Wählen Sie die folgende Zerlegung von $\mathbb{Z}_{23}^*$: $G_1 = \{1, 2, \ldots, 7\}$, $G_2 = \{8, 9, \ldots, 15\}$, $G_3 = \{16, 17, \ldots, 22\}$.

2. K = GF(11) / E : y2 = x^3 + 4x + 1 -> a=4; b=1