

OS QUATÉRNIOS E AS ROTAÇÕES EM \mathbb{R}^3

1. A ÁLGEBRA DOS QUATÉRNIOS

Seja \mathbb{H} o espaço vetorial de dimensão 4 gerado por $1, i, j, k$. Introduzimos uma multiplicação em \mathbb{H} com a seguinte tabela de multiplicação:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Note que o conjunto $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ é um grupo para esta multiplicação. A multiplicação entre os elementos $1, i, j, k$ será estendida com a regra distributiva. Um elemento de \mathbb{H} chama-se um *quatérnio* e o conjunto \mathbb{H} chama-se a *álgebra dos quatérnios*. A seguinte lema é fácil de verificar por conta direta.

Lema 1. *A álgebra dos quatérnios é um espaço vetorial de dimensão 4 com uma multiplicação bem definida. Além disso, a multiplicação é associativa, possui elemento neutro (o elemento 1), mas não é comutativa. A estrutura satisfaz a lei distributiva:*

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3 \quad e \quad (q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3.$$

Todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ pode ser escrito unicamente na forma $q = \alpha_q + v_q$ onde $\alpha_q \in \mathbb{R}$ e $v_q \in \langle i, j, k \rangle$. Um quatérnio com $v_q = 0$ chama-se *escalar*, enquanto um quatérnio com $\alpha_q = 0$ chama-se *quatérnio puro*. Pode-se definir o produto escalar entre quatérnios como no espaço \mathbb{R}^3 pela regra

$$(p, q) = \alpha_p\alpha_q + \beta_p\beta_q + \gamma_p\gamma_q + \delta_p\delta_q$$

para todo $p = \alpha_p + \beta_pi + \gamma_pj + \delta_pk$ e $q = \alpha_q + \beta_qi + \gamma_qj + \delta_qk$. (O produto escalar será denotado por (\cdot, \cdot) para não confundir com a multiplicação.) Em relação com este produto escalar, os elementos $1, i, j, k$ formam uma base ortonormal de \mathbb{H} . A norma de um quatérnio na forma $q = \alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_k$ é definida como

$$\|q\| = \sqrt{(q, q)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2},$$

enquanto o conjugado \bar{q} está definido como

$$\bar{q} = \alpha - \beta_i - \gamma_j - \delta_k.$$

A norma e o conjugado entre quatérnios satisfaz propriedades similares que a norma e o conjugado para números complexos.

Lema 2. *As seguintes afirmações são verdadeiras para $q \in \mathbb{H}$.*

- (1) $\alpha_q = (q + \bar{q})/2$;
- (2) $v_q = (q - \bar{q})/2$;
- (3) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ e $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ (note a troca na ordem!);
- (4) $\|q\| = 0$ se e somente se $q = 0$;
- (5) $\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$;
- (6) $\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$;
- (7) $\|\alpha q\| = |\alpha| \|q\|$ para $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (8) $\|q\|^2 = q \cdot \bar{q}$.

Demonstração. Deixamos a maioria destas afirmações para exercício. Para (8), calculemos que

$$\begin{aligned} q \cdot \bar{q} &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \|q\|^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 3. *Seja $q = \alpha_q + v_q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Então q possui inverso multiplicativo e*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

Em outras palavras, $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ é grupo para a multiplicação.

Demonstração. Segue da afirmação (8) do lema anterior que

$$q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

□

Um quaternio $q \in \mathbb{H}$ chama-se *unitário* se $\|u\| = 1$.

Lema 4. *O elemento $1 \in \mathbb{H}$ é unitário, e se $q \in \mathbb{H}$ é unitário, então q^{-1} é unitário. Logo, os quaternios unitários formam um grupo para a multiplicação. Além disso, se $q \in \mathbb{H}$ é unitário, então $q^{-1} = \bar{q}$.*

Para $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, defina o comutador

$$[q_1, q_2] = \frac{1}{2}(q_1 q_2 - q_2 q_1).$$

Lema 5. *O comutador satisfaz as seguintes propriedades para todo $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$:*

- (1) $[q_1 + q_2, q_3] = [q_1, q_3] + [q_2, q_3]$ e $[q_1, q_2 + q_3] = [q_1, q_2] + [q_1, q_3]$ (distributividade);
- (2) $[q_1, q_1] = 0$ e $[q_1, q_2] = -[q_2, q_1]$ (anti-comutatividade);
- (3) $[[q_1, q_2], q_3] + [[q_2, q_3], q_1] + [[q_3, q_1], q_2] = 0$ (identidade de Jacobi).

As identidades no lema anterior implicam que a estrutura $(\mathbb{H}, +, [\cdot, \cdot])$ é uma *álgebra de Lie*. Seja Q o espaço dos quatérnios puros. Então Q é um espaço vetorial de dimensão 3 gerado por i, j , e k . Note que Q não é fechado para o produto \cdot entre os quatérnios (por exemplo $i \cdot i = i^2 = -1 \notin Q$), mas ele é fechado para o comutador. De fato, temos que $[i, j] = k$, $[j, k] = i$ e $[k, i] = j$. Ou seja, o comutador no espaço k comporta-se exatamente como o produto vetorial \times sobre \mathbb{R}^3 . Além disso, $[1, q] = 0$ para todo $q \in \mathbb{H}$.

Lema 6. *As seguintes propriedades são válidas para $q = \alpha_q + v_q$ e $p = \alpha_p + v_p$:*

- (1) $[p, q] = [v_p, v_q]$;
- (2) $p \cdot q = \alpha_p \alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + v_p \times v_q = \alpha_p \alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + [p, q]$;
- (3) *Se p e q são quatérnios puros, então $p \cdot q = -(p, q) + p \times q = -(p, q) + [p, q]$.*
- (4) *Se p e q são quatérnios puros ortogonais, então $p \cdot q = p \times q$.*
- (5) *Se p é puro unitário, então $p^2 = -1$.*

Demonstração. (1)–(4) Uma conta usando as definições. Para provar (5), note que item (3) implica que

$$v^2 = -(v, v) + v \times v = -(v, v) = -\|v\|^2 = -1.$$

□

Se $q = \alpha_q + v_q \in \mathbb{H}$ com $v_q \neq 0$, então

$$q = \alpha_q + \|v_q\| \frac{v_q}{\|v_q\|} = \alpha_q + \beta_q u_q$$

onde u_q é um quatérnio puro unitário. Além disso, se $\|q\| = 1$, como $\alpha_q \perp v_q$,

$$1 = \|q\|^2 = \alpha_q^2 + \beta_q^2$$

então

$$q = \cos \vartheta + \sin \vartheta u_q$$

com algum ângulo $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Teorema 7. *Todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ unitário pode ser escrito na forma*

$$\cos \vartheta + (\sin \vartheta)u$$

onde u é um quatérnio puro unitário. Além disso, se $q \neq 1$, então esta expressão é única.

Demonstração. If $v_q \neq 0$, então siga o processo antes do enunciado. Se $v_q = 0$, então toma $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$ e u arbitrário. □

Lema 8. *Seja $u \in \mathbb{H}$ um quatérnio unitário. Então as aplicações*

$$L_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad L_u(q) = uq \quad \text{e} \quad R_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad R_u(q) = qu^{-1} = q\bar{u}$$

são transformações ortogonais de \mathbb{H} com determinante 1; ou seja, L_u e R_u são rotações de $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

Demonstração. Pela distributividade da multiplicação, temos que L_u e R_u são transformações lineares. Além disso

$$\|L_u(q)\| = \|uq\| = \|u\|\|q\| = \|q\|$$

e obtém-se similarmente que $\|R_u(q)\| = \|q\|$; ou seja L_u e R_u preservam a norma. Nós já provamos que para uma transformação linear isso é equivalente a ser ortogonal. Precisamos ainda provar que $\det L_u = \det R_u = 1$. Escreva $u = \cos \vartheta + \operatorname{sen} \vartheta u_0$ onde u_0 é quaternião puro unitário. Neste caso $1 \perp u_0$ e escolha um quaternião puro unitário v tal que $u_0 \perp v$ e seja $w = [u_0, v] = u_0 \times v$. Então temos que a matriz de L_u na base $1, u_0, v, w$ é

$$[L_{u_0}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de $L_u = (\cos \vartheta)I + (\operatorname{sen} \vartheta)L_{u_0}$ é

$$[L_u] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\operatorname{sen} \vartheta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\operatorname{sen} \vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Segue que L_u pode ser realizada como a composição de duas rotações: a primeira no plano $\langle 1, u \rangle$ e a segunda no plano $\langle v, w \rangle$ com ângulo ϑ . Temos que $\det L_u = (\cos^2 \vartheta + \operatorname{sen}^2 \vartheta)^2 = 1$. A computação para R_u é similar. Note que $u^{-1} = \bar{u} = \cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta u_0$ e a matriz de R_u na mesma base será

$$[R_u] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \operatorname{sen} \vartheta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\operatorname{sen} \vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Ou seja, R_u faz uma rotação no plano $\langle 1, u \rangle$ com ângulo $-\vartheta$ e uma rotação no plano $\langle v, w \rangle$ por ângulo ϑ . \square

Teorema 9. *Seja $u = \cos \vartheta + (\operatorname{sen} \vartheta)u_0 \in \mathbb{H}$ um quaternião unitário. Defina*

$$T_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad T_u(q) = uqu^{-1} = (L_u \circ R_u)(q).$$

Então $T_u(1) = 1$ e T_u induz uma rotação do espaço $\mathbb{R}^3 \cong \langle i, j, k \rangle$. O eixo desta rotação é u_0 e o seu ângulo é 2ϑ .

Demonstração. Primeiro

$$T_u(1) = u \cdot 1 \cdot u^{-1} = u \cdot u^{-1} = 1.$$

Além disso, T_u é uma composição de duas transformações ortogonais, e ela é ortogonal e temos ainda que $\det T_u = \det L_u \cdot \det R_u = 1$. Logo T_u é uma rotação de \mathbb{H} . Consequentemente, T_u preserva $Q = \langle i, j, k \rangle = \langle 1 \rangle^\perp$. Além disso, T_u preserva a norma em Q e assim a

restrição de T_u para Q é uma transformação ortogonal com determinante 1. Portanto T_u induz uma rotação em $\langle i, j, k \rangle$. O eixo desta rotação pode ser calculado por determinar um autovetor de T_u em $\langle i, j, k \rangle$ que corresponde ao autovalor 1. Mas note que

$$uu_0 = (\cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0)u_0 = u_0(\cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0) = (\cos \vartheta)u_0 - \sin \vartheta = u_0u$$

e assim

$$T_u(u_0) = uu_0u^{-1} = u_0uu^{-1} = u_0$$

e obtemos que o eixo de T_u em $\langle i, j, k \rangle$ é u .

Finalmente, temos que verificar a afirmação sobre o ângulo. Escreva $u = \cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0$ onde u_0 é puro e unitário. Como na demonstração anterior, considere a base $1, u_0, v, w$ onde $v \in Q$ unitário ortogonal a u e $w = u \times v$. Como T_u é a composição de L_u e R_u , temos que a matriz de T_u nesta base é o produto das matrizes de L_u e R_u e assim

$$\begin{aligned} [T_u] &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\vartheta) & -\sin(2\vartheta) \\ 0 & 0 & \sin(2\vartheta) & \cos(2\vartheta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Corolário 10. *Toda rotação T de $\mathbb{R}^3 = \langle i, j, k \rangle$ pode ser realizado como T_u com algum $u \in \mathbb{H}$ unitário. Além disso, se $u, v \in \mathbb{H}$ são unitários, então $T_u = T_v$ se e somente se $u = \pm v$.*

Demonstração. Seja u_0 o eixo de T e ϑ o ângulo da rotação. Toma

$$u = \cos(\vartheta/2) + (\sin(\vartheta/2))u_0.$$

Pelo teorema anterior, $T = T_u$.

Para provar a segunda afirmação, primeiro provaremos que $T_u = \text{id}$ se e somente se $u = \pm 1$. Primeiro, se $u = \pm 1$, então $T_u = \text{id}$. Assuma que $T_u = \text{id}$. Assuma que $u, v \in \mathbb{H}$ são unitários e escreva $u = \cos \alpha + \sin \alpha u_0$. O ângulo da rotação é 2α . Temos que $T_u = \text{id}$ se e somente se 2α é um múltiplo de 2π , ou seja $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. Obtemos nos dois casos que $u = 1$ ou $u = -1$. Assuma agora que $T_u = T_v$ com $u, v \in \mathbb{H}$ unitários. Temos que

$$\text{id} = T_u T_v^{-1} = T_u T_{\bar{v}} = T_{u\bar{v}}.$$

Pelo afirmação anterior, $u\bar{v} = \pm 1$ e assim $u = \pm v$. □

Corolário 11. *O grupo $SO(\mathbb{R}^3)$ das rotações de \mathbb{R}^3 pode ser identificado com a meia esfera $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Dois elementos $u, v \in S^3$ representam a mesma rotação se e somente se $u = \pm v$.*

1.1. A composição de rotações. Sejam $u = \cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0$ e $v = \cos \beta + (\sin \beta)v_0$ quatérnios unitários. Note, para todo $x \in \mathbb{H}$ que

$$T_{uv}(x) = uvx(uv)^{-1} = uvxv^{-1}u^{-1} = T_u \circ T_v(x).$$

Logo,

$$T_{uv} = T_u \circ T_v.$$

Além disso, uv é quatérnio unitário e

$$\begin{aligned} uv &= (\cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0)(\cos \beta + (\sin \beta)v_0) \\ &= \cos \vartheta \cos \beta + (\cos \vartheta \sin \beta)v_0 + (\cos \beta \sin \vartheta)u_0 + \sin \vartheta \sin \beta u_0 v_0 \\ &= \cos \vartheta \cos \beta + (\cos \vartheta \sin \beta)v_0 + (\cos \beta \sin \vartheta)u_0 + \sin \vartheta \sin \beta (-(u_0, v_0) + u_0 \times v_0) \\ &= \cos \vartheta \cos \beta - \sin \vartheta \sin \beta (u_0, v_0) + (\cos \vartheta \sin \beta)v_0 + (\cos \beta \sin \vartheta)u_0 + (\sin \vartheta \sin \beta)u_0 \times v_0 \\ &= \cos \vartheta \cos \beta - \sin \vartheta \sin \beta (u_0, v_0) + w \end{aligned}$$

com w puro (na última equação usamos que u_0, v_0 são puros e unitários). A parte constante de uv é $\cos \vartheta \cos \beta - \sin \vartheta \sin \beta (u_0, v_0)$. Para escrever uv na forma $\cos \alpha + (\sin \alpha)w_0$, precisamos calcular $\|w\|$. Usando que u_0 e v_0 são ambos ortogonais a $u_0 \times v_0$, e que u_0, v_0 e $u_0 \times v_0$ são unitários, obtemos que

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(\cos \vartheta \sin \beta)v_0 + (\cos \beta \sin \vartheta)u_0 + (\sin \vartheta \sin \beta)u_0 \times v_0\|^2 \\ &= ((\cos \vartheta \sin \beta)v_0 + (\cos \beta \sin \vartheta)u_0 + (\sin \vartheta \sin \beta)u_0 \times v_0, \\ &= (\cos \vartheta \sin \beta)v_0 + (\cos \beta \sin \vartheta)u_0 + (\sin \vartheta \sin \beta)u_0 \times v_0) \\ &= \sin^2 \vartheta \sin^2 \beta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta \sin \beta \cos \beta \sin \vartheta \cos \varphi \\ &= \sin^2 \vartheta \sin^2 \beta \sin^2 \varphi + (\cos \vartheta \sin \beta + \cos \beta \sin \vartheta)^2 + 2 \cos \vartheta \sin \beta \cos \beta \sin \vartheta (\cos \varphi - 1) \\ &= \sin^2 \vartheta \sin^2 \beta \sin^2 \varphi + \sin^2(\vartheta + \beta) + \frac{\cos^2(\vartheta - \beta) - \cos^2(\vartheta + \beta)}{2}(\cos \varphi - 1) \end{aligned}$$

Então temos que

$$uv = w = \alpha_w + \beta_w w_0$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_w &= \cos \vartheta \cos \beta - \sin \vartheta \sin \beta (u_0, v_0) = \cos \vartheta \cos \beta - \sin \vartheta \sin \beta \cos \varphi \\ \beta_w &= \left(\sin^2 \vartheta \sin^2 \beta \sin^2 \varphi + \sin^2(\vartheta + \beta) + \frac{\cos^2(\vartheta - \beta) - \cos^2(\vartheta + \beta)}{2}(\cos \varphi - 1) \right)^{1/2} \\ w_0 &= \frac{(\cos \vartheta \sin \beta)v_0 + (\cos \beta \sin \vartheta)u_0 + (\sin \vartheta \sin \beta)u_0 \times v_0}{\beta_w}. \end{aligned}$$

onde $w_0 = w/\|w\|$ é um quatérnio unitário puro.

Teorema 12. *Sejam $R_1 = R(k_1, \vartheta_1)$ e $R_2 = R(k_2, \vartheta_2)$ rotações de \mathbb{R}^3 e assumamos que $\|k_1\| = \|k_2\| = 1$ e que φ é o ângulo entre k_1 e k_2 (ou seja, $\cos \varphi = (k_1, k_2)$). Então a composição $R = R_1 \circ R_2$ é uma rotação. O eixo de R é*

$$k = (\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2)k_2 + (\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1)k_1 + (\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2)k_1 \times k_2$$

e o ângulo de R é o ângulo ϑ que satisfaz

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta/2) &= \cos(\vartheta_1/2) \cos(\vartheta_2/2) - \sin(\vartheta_1/2) \sin(\vartheta_2/2) \cos \varphi \\ \sin(\vartheta/2) &= \|k\| \\ &= \left(\sin^2(\vartheta_1/2) \sin^2(\vartheta_2/2) \sin^2(\varphi) + \sin^2((\vartheta_1 \vartheta_2)/2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos^2((\vartheta_1 - \vartheta_2)/2) - \cos^2((\vartheta_1 + \vartheta_2)/2)}{2} (\cos \varphi - 1) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

1.2. O mapa exponencial. Lembre que para um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou complexo $\alpha \in \mathbb{C}$), temos as seguintes séries de Taylor:

$$\begin{aligned} e^\alpha &= \exp \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \\ \sin \alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos \alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Seja $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e considere v um quaternião puro de \mathbb{H} . Pondo $\alpha = \|v\|$, podemos escrever $v = \alpha v_0$ onde v_0 é um quaternião puro unitário. Lembrando que $v_0^2 = -1$, temos que

$$v_0^0 = 1, \quad v_0^1 = v_0, \quad v_0^2 = -1, \quad v_0^3 = -v_0, \quad v_0^4 = 1, \quad v_0^5 = v_0, \dots \text{etc.}$$

Mais precisamente temos que

$$v_0^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \equiv 0 \pmod{4}; \\ v_0 & \text{se } k \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1 & \text{se } k \equiv 2 \pmod{4}; \\ -v_0 & \text{se } k \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases}$$

Assim podemos escrever que

$$\exp(v) = \exp(\alpha v_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n v_0^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) v_0 = \cos \alpha + (\sin \alpha) v_0.$$

Em outras palavras, $\exp(v)$ é um quaternião unitário. Assim obtemos um mapa

$$\exp : \mathbb{H} \rightarrow \{u \in \mathbb{H} \mid \|u\| = 1\}, \quad v \mapsto \exp(v).$$

Note que o mapa \exp é sobrejetiva, mas não é injetiva, pois $\exp(\alpha v_0) = \exp((\alpha + 2\pi)v_0)$, mas podemos definir para $q = \cos \alpha + (\sin \alpha)v_0$ o seu logaritmo como

$$\log q = \alpha v_0$$

e assim temos que

$$\exp(\log q) = q$$

para todo $q \in \mathbb{H}$ unitário.

O exponencial e logaritmo nos permite definir para um quatérnio puro q e para um $t \in \mathbb{R}$, o exponencial q^t como

$$q^t = e^{\log q \cdot t} = \exp(t \log q).$$

1.3. Interpolação geodésica. Dados $R_1, R_2 \in SO_3$, queremos obter um caminho suave composto por rotações em SO_3 entre R_1 e R_2 com a propriedade que a “velocidade do caminho” é constante. Matematicamente, nós queremos obter uma curva suave

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow SO_3, \quad \varphi(0) = R_0 \quad \text{e} \quad \varphi(1) = R_1$$

com $(d/dt)\varphi(t)$ constante.

Sejam R_1 e R_2 representadas por quatérnions

$$p = \cos \alpha + (\sin \alpha)p_0 \quad \text{e} \quad q = \cos \beta + (\sin \beta)q_0$$

onde $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ e $p_0, q_0 \in \mathbb{H}$ são quatérnions unitários. Representando os quatérnions nesse jeito, o nosso problema pode ser visto como o problema de achar uma curva suave

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \{v \in \mathbb{H} \mid \|v\| = 1\}$$

com $\varphi(0) = p$ e $\varphi(1) = q$ tal que $d\varphi/dt$ constante.

Assuma primeiro que $p = 1$. Neste caso defina

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow SO_3, \quad \varphi(t) = \cos(t\beta) + \sin(t\beta)q_0 = \exp(t\beta q_0) = \exp(t \log q) = q^t.$$

Claramente, $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = q$. Além disso

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\sin(t\beta)\beta + \cos(t\beta)\beta q_0$$

e assim

$$\left\| \frac{d}{dt}\varphi(t) \right\| = |\beta|.$$

Assim, $(d/dt)\varphi(t)$ é constante e assim a curva φ pode ser vista como uma curva de velocidade constante. Pode ainda verificar que φ é uma curva ao longo de uma geodésica.

Sejam agora $p, q \in \mathbb{H}$ unitários e escreva

$$p = \cos \alpha + (\sin \alpha)p_0 \quad \text{e} \quad q = \cos \beta + (\sin \beta)q_0$$

Considere a curva

$$\varphi_0 : [0, 1] \rightarrow SO_3, \quad \varphi_0(t) = (qp^{-1})^t.$$

Ora a curva φ desejada será obtida como o produto $\varphi_0(t)p$:

$$\varphi(t) = (qp^{-1})^t p.$$

Claramente, $\varphi(0) = p$, $\varphi(1) = q$ e $|(d/dt)\varphi(t)| = |\beta|$ é constante (onde β é o ângulo entre p e q).

Lema 13. *Seja φ como em cima e assuma que β é o ângulo entre p e q ($\cos \beta = (p, q)$). Então*

$$\varphi(t) = \frac{\sin(1-t)\beta}{\sin \beta} p + \frac{\sin(t\beta)}{\sin \beta} q$$

Demonstração. Assuma primeiro que $p = 1$. Escrevendo $q = \cos \beta + (\sin \beta)q_0$, a fórmula em cima dá que

$$\varphi(t) = \cos(t\beta) + (\sin(t\beta))q_0.$$

Precisamos provar apenas que

$$\begin{aligned} \cos(t\beta) &= \frac{\sin(1-t)\beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \beta \sin(t\beta)}{\sin \beta} \\ \sin(t\beta) &= \frac{\sin \beta \sin(t\beta)}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

A segunda afirmação está óbvia, a primeira pode ser verificada usando as identidades trigonométricas.

Assuma agora que q é arbitrário. Como multiplicação por q preserva ângulo, o ângulo entre p e q é o mesmo que entre 1 e pq^{-1} . Logo a interpolação esférica entre 1 e pq^{-1} está dada por

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin(1-t)\beta}{\sin \beta} + \frac{\sin(t\beta)}{\sin \beta} pq^{-1}.$$

Multiplicando $\varphi_0(t)$ por q , obtemos a interpolação esférica entre p e q como

$$\varphi(t) = \frac{\sin(1-t)\beta}{\sin \beta} p + \frac{\sin(t\beta)}{\sin \beta} q.$$

□