Geometria com aplicações na gráfica computacional

Folha 3 de exercícios

csaba@mat.ufmg.br

1. Descreva as possibilidades dos autovalores das transformações ortogonais $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Dê exemplos com justificativas para todos os casos.

2. Seja X uma matriz 3×3 representando uma reflexão de $\mathbb{R}^3$ em relação a um plano Π que passa pela origem. Seja $k = [k_x, k_y, k_z]$ um vetor normal unitário do plano. Escreva as coordenadas k_x, k_y, k_z em termos das entradas de X.

3. Seja $k \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário e seja K a matriz da transformação linear $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido como $v \mapsto k \times v$. Mostre que a exponential

$$\exp(\vartheta K) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\vartheta K)^i}{i!}$$

é igual à matriz da rotação por ângulo ϑ no redor do eixo k.

4. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ chama-se *cisalhamento* se a sua matriz na base canônica está na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

com algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ chama-se escala se a sua matriz na base canônica está na forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(1) Mostre que uma rotação $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode ser decomposta para uma composição de três cisalhamentos.
(2) Mostre que uma rotação $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode ser decomposta para uma composição de duas cisalhamentos e uma escala.

5. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação ortogonal com $\det T = -1$. Mostre que

(1) T é uma reflexão em relação a um plano que passa pela origem; ou
(2) T é uma rotoreflexão (ou seja uma rotação por um eixo k e ângulo ϑ seguida por uma reflexão em relação a um plano perpendicular a k).

6 Seja X a matriz de uma rotoreflexão em $\mathbb{R}^3$. Escreva o eixo k e o ângulo ϑ em termos das entradas de X.