

TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS EM 2D E 3D

1. O PLANO (2D)

1.1. Realização matricial. Lembre que a matriz da reflexão R_t pelo eixo que tem ângulo α pelo eixo x é

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal e seja e_1, e_2 a base canônica. A matriz de T tem os vetores $f_1 = T(e_1)$ e $f_2 = T(e_2)$ nas colunas. Pela ortogonalidade de T , f_1 e f_2 formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 . Assuma que $f_1 = (a, b)$ com $\|f_1\| = a^2 + b^2 = 1$. Então $f_2 = (-b, a)$ ou $f_2 = (b, -a)$. Escolha um ângulo α tal que $a = \cos \alpha$ e $b = \sin \alpha$. Então a matriz $[T]$ de T tem duas possíveis formas:

$$\text{Caso I: } [T] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{Caso II: } [T] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Seja

Lema 1. *No primeiro caso T é a rotação Rot_α pelo ângulo α . No segundo caso, T é a reflexão $Ref_{\alpha/2}$ pelo eixo que tem ângulo $\alpha/2$ com o eixo x .*

Lema 2. *Temos as seguintes regras para a composição de rotações e reflexões.*

- (1) $Rot_\alpha \circ Rot_\beta = Rot_{\alpha+\beta}$;
- (2) $Ref_\alpha \circ Ref_\beta = Rot_{2(\alpha-\beta)}$;
- (3) $Rot_\alpha \circ Ref_\beta = Ref_{\beta+\alpha/2}$;
- (4) $Ref_\alpha \circ Rot_\beta = Ref_{\alpha-\beta/2}$.

Demonstração. (1) é exercício. Demonstremos (2). Seja $v \in \mathbb{R}^2$ e calculemos que

$$\begin{aligned} Ref_\alpha \circ Ref_\beta(v) &= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} v \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\sin(2\beta) & \cos(2\alpha)\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)\cos(2\beta) \\ \sin(2\alpha)\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)\sin(2\beta) & \sin(2\alpha)\sin(2\beta) + \cos(2\alpha)\cos(2\beta) \end{pmatrix} v \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\alpha - \beta)) & -\sin(2(\alpha - \beta)) \\ \sin(2(\alpha - \beta)) & \cos(2(\alpha - \beta)) \end{pmatrix} v \\ &= Rot_{2(\alpha-\beta)}(v) \end{aligned}$$

(3) Temos que

$$Ref_{\beta+\alpha/2} \circ (Ref_\beta)^{-1} = Ref_{\beta+\alpha/2} \circ (Ref_\beta) = Rot_{2(\beta-\alpha-\beta)} = Rot_\alpha$$

que implica afirmação (3). A demonstração de (4) é similar à demonstração de (3). \square

Exemplo 3. Seja $\alpha \in [0, 2\pi)$ e considere $\text{Rot}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação por ângulo α ao redor da origem. Os autovalores de Rot_α são raízes do polinômio característico

$$\begin{aligned} \det(t \cdot \text{id} - \text{Rot}_\alpha) &= \det \begin{pmatrix} t - \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & t - \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= (t - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2t \cos \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= t^2 - 2t \cos \alpha + 1. \end{aligned}$$

As raízes deste polinômio são $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e $\bar{z} = \cos \alpha - i \sin \alpha$. Isso quer dizer que o ângulo da rotação pode ser determinado pelos autovalores da transformação. Mais precisamente o ângulo da rotação é α onde $\cos \alpha = (z + \bar{z})/2$ e $\sin \alpha = (z - \bar{z})/(2i)$.

th:recog

Teorema 4. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal com dois autovalores z, \bar{z} onde $z \in \mathbb{C}$ e $\|z\| = 1$. Então T é uma rotação por ângulo α onde $\cos \alpha = (z + \bar{z})/2$ e $\sin \alpha = (z - \bar{z})/(2i)$.*

Demonstração. Note que $\det T = z\bar{z} = 1$ e pelas considerações anteriores, T é uma rotação. Logo, a matriz de T está na forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Usando a computação no exemplo anterior, os autovalores z e \bar{z} são $\cos \alpha + i \sin \alpha$ e $\cos \alpha - i \sin \alpha$ e segue a afirmação. \square

1.2. Realização com números complexos. O vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pode ser identificado com o número complexo $\alpha + i\beta$. Cada número complexo z pode ser escrito como $z = \|z\|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ onde α é o ângulo (frequentemente chamado de argumento) que corresponde a z e $\alpha \in [0, 2\pi)$. Um número complexo z com $\|z\| = 1$ tem a forma $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Pela fórmula de Euler,

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} = \exp(i\alpha)$$

O conjugado de um número $z = \alpha + \beta i$ é $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Lema 5. (1) *Seja $z_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$. A aplicação*

$$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad T(z) = z_\alpha \cdot z$$

corresponde a rotação Rot_α pelo ângulo α (em torno da origem).

(2) *Seja T a reflexão pelo eixo que tem ângulo α com o eixo x . Então*

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z}$$

Demonstração. (1) Seja $z = \|z\|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Então

$$\begin{aligned} z_\alpha \cdot z &= \|z\|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\ &= \|z\|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

(2) Claramente $\text{Ref}_0(z) = \bar{z}$. Então

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z} = \text{Rot}_{2\alpha} \text{Ref}_0(z) = \text{Ref}_\alpha(z).$$

□

1.3. **Os grupos** $O(\mathbb{R}^2) = O_2$ e $SO(\mathbb{R}^2) = SO_2$. Considere o círculo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} = \{\exp(i\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Temos que S^1 é um grupo para a operação de multiplicação. Considere a aplicação

$$\psi : S^1 \rightarrow SO(\mathbb{R}^2), \quad \exp(i\alpha) \mapsto \text{Rot}_\alpha.$$

Teorema 6. *Temos que ψ é uma aplicação invertível e*

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) \circ \psi(z_2).$$

Ou seja, ψ é um isomorfismo entre os grupos S^1 e SO_3 .

Demonstração. Se $\psi(\exp(i\alpha)) = \psi(\exp(i\beta))$ então $\text{Rot}_\alpha = \text{Rot}_\beta$ e, como $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\alpha = \beta$. Logo ψ é injetivo. Claramente, $\text{Rot}_\alpha = \psi(\exp(i\alpha))$ e assim ψ é sobrejetivo. Agora,

$$\begin{aligned} \psi(\exp(i\alpha) \exp(i\beta)) &= \psi(\exp(i(\alpha + \beta))) = \text{Rot}_{\alpha+\beta} = \text{Rot}_\alpha \circ \text{Rot}_\beta \\ &= \psi(\exp(i\alpha)) \circ \psi(\exp(i\beta)) \end{aligned}$$

□

Note que o grupo SO_3 pode ser identificado também com o grupo $[0, 2\pi)$ com a operação de adição feita "módulo 2π ".

Lema 7. *Seja $T \in O_2$ uma reflexão. Então $O_2 = SO_2 \cup tSO_2$. Além disso qualquer rotação pode ser escrita como uma composição de duas reflexões.*

Demonstração. Exercício.

□

2. O ESPAÇO 3D

Exercício 8. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação ortogonal e $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T . Mostre que $|\lambda| = 1$. Mostre que se v_1 é um autovetor de T com autovalor 1 e u é um autovetor de T com autovalor -1 , então u e v são ortogonais ($u \cdot v = 0$).*

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação ortogonal. Nós já vimos que $\det T = \pm 1$. A transformação T possui três autovalores (possivelmente complexos) não necessariamente distintos. Além disso, se $z \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T , então $\bar{z} \in \mathbb{C}$ é também

um autovalor de T . As possibilidades para os autovalores são os seguintes.

- Caso I : $1, 1, 1$;
- Caso II : $1, 1, -1$;
- Caso III : $1, -1, -1$;
- Caso IV : $1, z, \bar{z}$ com algum $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;
- Caso V : $-1, -1, -1$;
- Caso VI : $-1, z, \bar{z}$ com algum $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercício 9. *Dê exemplos de transformações de todos os tipos.*

2.1. Rotações em 3D.

Teorema 10. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformação ortogonal com $\det T = 1$. Então existe uma base v_1, v_2, v_3 ortonormal de \mathbb{R}^3 na qual a matriz de T está na forma*

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Logo, a transformação T é a rotação por ângulo α pelo eixo v_1 .

Demonstração. Se os autovalores são $1, 1, 1$, então a transformação é a identidade e podemos tomar a base canônica e $\alpha = 0$. Se os autovalores são $1, -1, -1$ então toma uma base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por autovetores e $\alpha = \pi$.

Agora assumamos que os autovetores de T são $1, z, \bar{z}$ com algum $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Seja v_1 um autovetor de T com autovalor 1 (ou seja $T(v_1) = v_1$). Como T preserva o subespaço $\langle v_1 \rangle$, T preserva também o subespaço $U = \langle v_1 \rangle^\perp$. Note que $\dim U = 2$ e seja v_2, v_3 uma base ortonormal de U . Então v_1, v_2, v_3 é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Seja T_1 a restrição de T para U . Então T_1 preserva o produto escalar em U e assim induz uma transformação ortogonal em U com autovalores z e \bar{z} . Pelo Teorema 4, T_1 é uma rotação com um ângulo α determinado por z e \bar{z} . A matriz de T na base v_1, v_2, v_3 é na forma desejada, e T é a rotação por ângulo α pelo eixo v_1 . \square

Uma transformação ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com determinante 1 é uma rotação. Pelas considerações anteriores, as possíveis autovetores de uma rotação são $1, 1, 1$ ou $1, -1, -1$, ou $1, z, \bar{z}$ onde $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ com $\|z\| = 1$.

Temos em particular as rotações Rot_α^x , Rot_β^y e Rot_γ^z por ângulos α , β e γ em torno dos eixos x , y , e z respetivamente. As matrizes destas rotações na base canônica são

$$[\text{Rot}_\alpha^x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$[\text{Rot}_\beta^y] = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$[\text{Rot}_\gamma^z] = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$