TRANSFORMAÇÕES LINEARES

1. Coordenadas

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Seja $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base de V e seja $v \in V$. Então v pode ser escrito unicamente como

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

O vetor $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ chama se *o vetor das coordenadas* de v na base B.

Exemplo 1. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ e seja $B = \{b_1 = (1, 0, -1), b_2 = (1, -1, 0)\}$ (verifique que V é espaço vetorial com base B). Ponha $v = (3, 2, -5)$. Então

$$v = 5b_1 - 2b_2,$$

e assim $[v]_B = (5, -2)$.

Exercício 2. *Verifique que a aplicação $V \to \mathbb{R}^n$ definida por $v \mapsto [v]_B$ é um isomorfismo linear (ou seja, uma aplicação linear injetiva e sobrejetiva)*

2. A matriz de uma transformação linear

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita. Assuma que $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ é uma base de V, enquanto $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ é uma base de W. Como $T(b_i) \in W$, o vetor $T(b_i)$ pode ser escrito como

$$T(b_i) = \alpha_{i,1} c_1 + \ldots + \alpha_{i,m} c_m$$

com $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$. Nós definimos a matriz de T relativa às bases B e C como

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,m} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix} = \left([T(b_1)]_C, \ldots, [T(b_n)]_C\right).$$

Ou seja, a matriz $[T]_C^B$ contém os vetores $[T(b_i)]_C$ nas suas colunas. A matriz $[T]_C^B$ é uma matriz $m \times n$.

Exemplo 3. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to V$, $T(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ onde V é o mesmo espaço que no exemplo anterior. Seja B a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $C = \{c_1 = (1, 0, -1), c_2 = (0, 1, -1)\}$. Então temos que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, -1) = c_1$$
$$T(0, 1, 0) = (-1, 1, 0) = -c_1 + c_2$$
$$T(0, 0, 1) = (0, -1, 1) = -c_2.$$

Logo

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

lem:matr

Lema 4. *Usando a notação no parágrafo anterior, temos que*

$$[T(v)]_C = [T]_C^B \cdot [v]_B.$$

Note que no lado direito da equação no Lema lem:matr 4, o vetor $[v]_B$ é visto como vetor coluna para a multiplicação fazer sentido. Isso poderia ser denotado por $[v]_B^t$, mas nós escolhemos a notação mais simples.

Demonstração. Primeiro assuma que $v = b_i \in B$. Então $[T(b_i)]_C$ é justamente a i-ésima coluna de $[T]_C^B$ e $[b_i]_B$ é o i-ésimo vetor na base canônica de $\mathbb{R}^m$. Logo temos obviamente que $[T(b_i)]_C = [T]_C^B \cdot [b_i]_B$. Quando $v \in V$ é arbitrário, escreva que

$$v = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n;$$

ou seja, $[v]_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Ora,

$$\begin{aligned} [T(v)]_C &= [T(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n)]_C \\ &= \beta_1 [T(b_1)]_C + \cdots + \beta_n [T(b_n)]_C \\ &= \beta_1 [T]_C^B \cdot e_1 + \cdots + \beta_n [T]_C^B \cdot e_n \\ &= [T]_C^B \cdot [v]_B \end{aligned}$$

onde $e_1, \ldots, e_n$ são os vetores (colunas) da base canônica de $\mathbb{R}^n$. □

3. Mudança de base

Seja V um espaço vetorial com duas bases $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$. A transformação $\mathrm{id} : V \to V$, $\mathrm{id}(v) = v$ é linear e podemos considerar a sua matriz $[\mathrm{id}]_B^C$. Pelo que fizemos nas seções anteriores

$$[\mathrm{id}]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,m} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix} = ([c_1]_B, \ldots, [c_n]_B)$$

onde os coeficientes estão determinados pelas equações

$$c_i = \alpha_{i,1} b_1 + \cdots + \alpha_{i,n} b_n.$$

A matriz $[\mathrm{id}]_B^C$ chama-se *matriz mudança de base* (de B para C).

Lema 5. *Usando a notação no parágrafo anterior, temos que*

$$[v]_B = [id]_B^C \cdot [v]_C.$$

Demonstração. Segue do Lema lem:matr 4. □

Exercício 6. *Demonstre que* $[id]_C^B = ([id]_B^C)^{-1}$.

Exemplo 7. Seja $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$ (a base canônica), e $C = \{c_1 = (1,1), c_2 = (1,-1)\}$. Logo

$$[\mathrm{id}\,]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathrm{id}\,]_C^B = \left([\mathrm{id}\,]_B^C\right)^{-1} = \frac{1}{2}[\mathrm{id}\,]_B^C.$$

Seja $v = (-1,2)$. Então $[v]_B = (-1,2)$ e

$$[v]_C = [\mathrm{id}\,]_C^B [v]_B = (1/2, -3/2).$$

De fato $v = (1/2)c_1 - (3/2)c_2$.

ex:comp **Exercício 8.** *Sejam $T_1 : V \to U$ e $T_2 : U \to W$ transformações lineares, e sejam B, C, e D bases de V, U, e W, respetivamente. Mostre que*

$$[T_2 \circ T_1]_D^B = [T_2]_D^C \cdot [T_1]_C^B.$$

4. Transformações lineares e mudança de base

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre os espaços V e W de dimensão finita. Sejam B, B' bases de V e C, C' bases de W.

Lema 9. *Temos que*

$$[T]_{C'}^{B'} = [id_W]_{C'}^{C} \cdot [T]_C^B \cdot [id_V]_B^{B'}.$$

Demonstração. Aplique o Exercício ex:comp 8. □

Quando $T : V \to V$ é um endomorfismo, nós geralmente calculamos a matriz $[T]_B^B$. Se B e C são duas bases de T, então temos que

$$[T]_C^C = [\mathrm{id}\,]_C^B \cdot [T]_B^B \cdot [\mathrm{id}\,]_B^C = [\mathrm{id}\,]_C^B \cdot [T]_B^B \cdot ([\mathrm{id}\,]_C^B)^{-1}.$$

Note que se Y é uma matriz e X é uma matriz invertível $n \times n$, então diz-se que a matriz XYX^{-1} é um conjugada de Y.

Exercício 10. *Sejam Y_1 e Y_2 matrizes conjugadas. Demonstre as seguintes afirmações.*

(1) $\det Y_1 = \det Y_2$.
(2) *Y_1 e Y_2 têm os mesmos autovalores.*
(3) *Seja $Y_2 = XY_1X^{-1}$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$. Então v é um autovetor de Y_1 se e somente se Xv é autovetor de Y_2. Além disso v e Xv correspondem ao mesmo autovalor.*

5. Um exemplo detalhado: As reflexões

Assuma que $t = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ é um vetor com $||t|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Define

$$R_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad R_t(v) = v - 2(v \cdot t)t$$

onde $v \cdot t$ denota o produto escalar entre v e t. É fácil verificar que R_t é linear. Seja $t' = (b, -a)$ um vetor normal (ortoginal) ao vetor t. Então temos que $t \cdot t = 1$ e $t \cdot t' = 0$ e assim

$$R_t(t) = -t \quad \text{enquanto} \quad R_t(t') = t'.$$

Como vetores t e t' formam uma base C, faz sentido perguntar a matriz de R_t nesta base. De fato
$$[R_t]_C^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Seja B a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então temos que
$$[\mathrm{id}\,]_B^C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$
Além disso, $[\mathrm{id}\,]_B^C$ é uma matriz ortogonal simêtrica, e assim $[\mathrm{id}\,]_C^B = ([\mathrm{id}\,]_B^C)^{-1} = [\mathrm{id}\,]_B^C$. Logo
$$[R_t]_B^B = [\mathrm{id}\,]_B^C \cdot [R_t]_C^C \cdot [\mathrm{id}\,]_C^B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2+b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$
Alternativamente, podemos verificar com conta direta que
$$R_t(1,0) = (1-2a^2, -2ab) \quad \text{e} \quad R_t(0,1) = (-2ab, 1-2b^2)$$
e que
$$[R_t]_B^B = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1-2b^2 \end{pmatrix}.$$
Como $a^2+b^2=1$ as duas matrizes que obtivemos para $[R_t]_B^B$ são de fato iguais.

Usando que $a^2+b^2=1$, podemos escrever $a = \cos\alpha$ e $b = \operatorname{sen}\alpha$ com algum ângulo $\alpha \in [0, 2\pi]$. Assim obtemos que
$$[R_t]_B^B = \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & -2\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha \\ -2\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha & \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) & -\operatorname{sen}(2\alpha) \\ -\operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$
Seja $\alpha = \alpha' + \pi/2$. Com α' podemos escrever $[R_t]_B^B$ na forma ainda mais simples como
$$[R_t]_B^B = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha') & \operatorname{sen}(2\alpha') \\ \operatorname{sen}(2\alpha') & -\cos(2\alpha'). \end{pmatrix}$$