Álgebra e Geometria com Aplicações na Computação Gráfica

Csaba Schneider

Conteúdo

CAPíTULO 1

Transformações lineares

1. Coordenadas

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Seja $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base de V e seja $v \in V$. Então v pode ser escrito unicamente como

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

O vetor $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ chama se *o vetor das coordenadas* de v na base B.

Exemplo 1.1. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ e seja $B = \{b_1 = (1, 0, -1), b_2 = (1, -1, 0)\}$ (verifique que V é espaço vetorial com base B). Ponha $v = (3, 2, -5)$. Então

$$v = 5b_1 - 2b_2,$$

e assim $[v]_B = (5, -2)$.

Exercício 1.2. *Verifique que a aplicação $V \to \mathbb{R}^n$ definida por $v \mapsto [v]_B$ é um isomorfismo linear (ou seja, uma aplicação linear injetiva e sobrejetiva)*

2. A matriz de uma transformação linear

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita. Assuma que $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ é uma base de V, enquanto $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ é uma base de W. Como $T(b_i) \in W$, o vetor $T(b_i)$ pode ser escrito como

$$T(b_i) = \alpha_{i,1}c_1 + \ldots + \alpha_{i,m}c_m$$

com $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$. Nós definimos a matriz de T relativa às bases B e C como

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,m} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix} = \left([T(b_1)]_C, \ldots, [T(b_n)]_C\right).$$

Ou seja, a matriz $[T]_C^B$ contém os vetores $[T(b_i)]_C$ nas suas colunas. A matriz $[T]_C^B$ é uma matriz $m \times n$.

Exemplo 1.3. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to V$, $T(x, y, z) = (x-y, y-z, z-x)$ onde V é o mesmo espaço que no exemplo anterior. Seja B a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e

$C = \{c_1 = (1, 0, -1), c_2 = (0, 1, -1)\}$. Então temos que

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0,-1) = c_1 \\ T(0,1,0) &= (-1,1,0) = -c_1 + c_2 \\ T(0,0,1) &= (0,-1,1) = -c_2. \end{aligned}$$

Logo

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

lem:matr LEMA 1.4. *Usando a notação no parágrafo anterior, temos que*

$$[T(v)]_C = [T]_C^B \cdot [v]_B.$$

Note que no lado direito da equação no Lema lem:matr 1.4, o vetor $[v]_B$ é visto como vetor coluna para a multiplicação fazer sentido. Isso poderia ser denotado por $[v]_B^t$, mas nós escolhemos a notação mais simples.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro assuma que $v = b_i \in B$. Então $[T(b_i)]_C$ é justamente a i-ésima coluna de $[T]_C^B$ e $[b_i]_B$ é o i-ésimo vetor na base canônica de $\mathbb{R}^m$. Logo temos obviamente que $[T(b_i)]_C = [T]_C^B \cdot [b_i]_B$. Quando $v \in V$ é arbitrário, escreva que

$$v = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n;$$

ou seja, $[v]_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Ora,

$$\begin{aligned} [T(v)]_C &= [T(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n)]_C \\ &= \beta_1 [T(b_1)]_C + \cdots + \beta_n [T(b_n)]_C \\ &= \beta_1 [T]_C^B \cdot e_1 + \cdots + \beta_n [T]_C^B \cdot e_n \\ &= [T]_C^B \cdot [v]_B \end{aligned}$$

onde $e_1, \ldots, e_n$ são os vetores (colunas) da base canônica de $\mathbb{R}^n$. □

3. Mudança de base

Seja V um espaço vetorial com duas bases $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$. A transformação $\mathrm{id} : V \to V$, $\mathrm{id}(v) = v$ é linear e podemos considerar a sua matriz $[\mathrm{id}]_B^C$. Pelo que fizemos nas seções anteriores

$$[\mathrm{id}]_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,m} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix} = ([c_1]_B, \ldots, [c_n]_B)$$

onde os coeficientes estão determinados pelas equações

$$c_i = \alpha_{i,1} b_1 + \cdots + \alpha_{i,n} b_n.$$

A matriz $[\mathrm{id}]_B^C$ chama-se *matriz mudança de base* (de B para C).

LEMA 1.5. *Usando a notação no parágrafo anterior, temos que*

$$[v]_B = [id]_B^C \cdot [v]_C.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema lem:matr 1.4. $\square$

EXERCÍCIO 1.6. *Demonstre que* $[id]_C^B = ([id]_B^C)^{-1}$.

EXEMPLO 1.7. Seja $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$ (a base canônica), e $C = \{c_1 = (1,1), c_2 = (1,-1)\}$. Logo

$$[\mathrm{id}\,]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathrm{id}\,]_C^B = \left([\mathrm{id}\,]_B^C\right)^{-1} = \frac{1}{2}[\mathrm{id}\,]_B^C.$$

Seja $v = (-1, 2)$. Então $[v]_B = (-1, 2)$ e

$$[v]_C = [\mathrm{id}\,]_C^B [v]_B = (1/2, -3/2).$$

De fato $v = (1/2)c_1 - (3/2)c_2$.

ex:comp EXERCÍCIO 1.8. *Sejam $T_1 : V \to U$ e $T_2 : U \to W$ transformações lineares, e sejam B, C, e D bases de V, U, e W, respetivamente. Mostre que*

$$[T_2 \circ T_1]_D^B = [T_2]_D^C \cdot [T_1]_C^B.$$

4. Transformações lineares e mudança de base

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre os espaços V e W de dimensão finita. Sejam B, B' bases de V e C, C' bases de W.

LEMA 1.9. *Temos que*

$$[T]_{C'}^{B'} = [id_W]_{C'}^C \cdot [T]_C^B \cdot [id_V]_B^{B'}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Aplique o Exercício ex:comp 1.8. $\square$

Quando $T : V \to V$ é um endomorfismo, nós geralmente calculamos a matriz $[T]_B^B$. Se B e C são duas bases de T, então temos que

$$[T]_C^C = [\mathrm{id}\,]_C^B \cdot [T]_B^B \cdot [\mathrm{id}\,]_B^C = [\mathrm{id}\,]_C^B \cdot [T]_B^B \cdot ([\mathrm{id}\,]_C^B)^{-1}.$$

Note que se Y é uma matriz e X é uma matriz invertível $n \times n$, então diz-se que a matriz XYX^{-1} é um conjugada de Y.

EXERCÍCIO 1.10. *Sejam Y_1 e Y_2 matrizes conjugadas. Demonstre as seguintes afirmações.*

(1) $\det Y_1 = \det Y_2$.
(2) *Y_1 e Y_2 têm os mesmos autovalores.*
(3) *Seja $Y_2 = XY_1X^{-1}$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$. Então v é um autovetor de Y_1 se e somente se Xv é autovetor de Y_2. Além disso v e Xv correspondem ao mesmo autovalor.*

5. Um exemplo detalhado: As reflexões

Assuma que $t = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ é um vetor com $||t|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Define

$$R_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad R_t(v) = v - 2(v \cdot t)t$$

onde $v \cdot t$ denota o produto escalar entre v e t. É fácil verificar que R_t é linear. Seja $t' = (b, -a)$ um vetor normal (ortoginal) ao vetor t. Então temos que $t \cdot t = 1$ e $t \cdot t' = 0$ e assim

$$R_t(t) = -t \quad \text{enquanto} \quad R_t(t') = t'.$$

Como vetores t e t' formam uma base C, faz sentido perguntar a matriz de R_t nesta base. De fato

$$[R_t]_C^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja B a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então temos que

$$[\mathrm{id}\,]_B^C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Além disso, $[\mathrm{id}\,]_B^C$ é uma matriz ortogonal simêtrica, e assim $[\mathrm{id}\,]_C^B = ([\mathrm{id}\,]_B^C)^{-1} = [\mathrm{id}\,]_B^C$. Logo

$$[R_t]_B^B = [\mathrm{id}\,]_B^C \cdot [R_t]_C^C \cdot [\mathrm{id}\,]_C^B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, podemos verificar com conta direta que

$$R_t(1, 0) = (1 - 2a^2, -2ab) \quad \text{e} \quad R_t(0, 1) = (-2ab, 1 - 2b^2)$$

e que

$$[R_t]_B^B = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}.$$

Como $a^2 + b^2 = 1$ as duas matrizes que obtivemos para $[R_t]_B^B$ são de fato iguais.

Usando que $a^2 + b^2 = 1$, podemos escrever $a = \cos\alpha$ e $b = \operatorname{sen}\alpha$ com algum ângulo $\alpha \in [0, 2\pi]$. Assim obtemos que

$$[R_t]_B^B = \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha & -2\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ -2\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha & \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\alpha) & -\operatorname{sen}(2\alpha) \\ -\operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Seja $\alpha = \alpha' + \pi/2$. Com α' podemos escrever $[R_t]_B^B$ na forma ainda mais simples como

$$[R_t]_B^B = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha') & \operatorname{sen}(2\alpha') \\ \operatorname{sen}(2\alpha') & -\cos(2\alpha'). \end{pmatrix}$$

CAPíTULO 2

Isometrias do espaço

1. Transformações

Seja Ω um conjunto. Uma aplicação $f : \Omega \to \Omega$ chama-se uma *transformação* de Ω. A transformação f é dita *injetiva* se $f(v) = f(w)$ implica $v = w$ para todo $v, w \in \Omega$; f chama-se *sobrejetiva* se para todo $w \in \Omega$ existe $v \in \Omega$ tal que $f(v) = w$. A transformação f chama-se *bijetiva* ou *invertível* se ela é injetiva e sobrejetiva. Se f é uma transformação invertível, então existe a sua inversa $f^{-1} : \Omega \to \Omega$ definida pela regra que $f(v) = w$ se e somente se $f^{-1}(w) = v$ para todo $v, w \in \Omega$.

As transformações de Ω podem ser compostas. Se $f, g : \Omega \to \Omega$ então $f \circ g : \Omega \to \Omega$ é definida como $(f \circ g)(v) = f(g(v))$ para todo $v \in \Omega$. A composição de transformações é associativa no sentido que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para todo $f, g, h : \Omega \to \Omega$.

Nós vamos estudar principalmente as transformações do plano $\mathbb{R}^2$ e o espaço $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.1. Todo conjunto Ω tem a transformação identidade $\mathrm{id}_\Omega : \Omega \to \Omega$, $v \mapsto v$ para todo $v \in \Omega$. Se $f : \Omega \to \Omega$ é uma transformação invertível, então $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\Omega$.

Exemplo 2.2. Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$. Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita linear se

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w)$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Transformações lineares são estudadas em álgebra linear. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é invertível se e somente se

$$\ker T = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = 0\} = \{0\}.$$

Exemplo 2.3. Seja $t \in \mathbb{R}^n$ e considere a transformação $T_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido como

$$T_t(v) = v + t.$$

A transformação T_t é chamado *a translação de* $\mathbb{R}^n$ pelo vetor t. Note que se $t \neq 0$, então T_t não é linear, pois $T_t(0) = t \neq 0$. A transformação T_t é invertível e $T_t^{-1} = T_{-t}$.

2. Grupos

Seja G um conjunto não vazio com uma operação que pode ser denotada por $\cdot$ (ou por $+$, ou simplesmente por concatenação). Isso quer dizer que com cada par de elementos $a, b \in G$ associamos um elemento $a \cdot b \in G$. O conjunto G considerado com a operação $\cdot$ é dito *grupo* se as seguintes propriedades estão válidas para todo $a, b, c \in G$.

(1) A operação $\cdot$ é associativa; ou seja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(2) Existe identidade $1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
(3) Todo elemento $a \in G$ possui inverso a^{-1} que satisfaz $a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Um grupo G é dito *abeliano* ou *comutativo* se $ab = ba$ para todo $a, b \in G$.

Exemplo 2.4. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros é um grupo abeliano com a operação de adição. A mesma coisa vale para $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Se V é um espaço vetorial, então V é um grupo abeliano com a operação de adição.

Nós vamos considerar dois tipos de grupos, nomeadamente grupos de transformações e grupos de matrizes.

Exemplo 2.5. Seja $n \geq 1$, e seja G um conjunto não vazio de matrizes invertíveis $n \times n$ tal que G é fechado para multiplicação e se $X \in G$, então $X^{-1} \in G$. Então G é um grupo com a multiplicação matricial. Um tal grupo G é chamado um *grupo de matrizes* ou *grupo matricial*. Os primeiros exemplos de grupos matriciails são

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n &= \{X \text{ é matriz } n \times n \mid X \text{ é invertível}\} \\ \mathrm{SL}_n &= \{X \in \mathrm{GL}_n \mid \det X = 1\}. \end{aligned}$$

Os conjuntos GL_n e SL_n são grupos. É óbvio que $\mathrm{SL}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ e neste caso dizemos que SL_n é um subgrupo de GL_n e escrevemos que $\mathrm{SL}_n \leq \mathrm{GL}_n$.

Exemplo 2.6. Seja G um conjunto de transformações invertíveis de um conjunto Ω tal que G é fechado para a composição e $T^{-1} \in G$ sempre quando $T \in G$. Neste caso G é um grupo. Tal grupo chama-se um *grupo de transformações*. Por exemplo seja $\Omega = V$ um espaço vetorial de dimensão finita e considere

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(V) &= \{f : V \to V \mid f \text{ é invertível}\} \\ \mathrm{GL}(V) &= \{T \in \mathrm{Sym}(V) \mid T \text{ é linear}\} \\ \mathrm{SL}(V) &= \{T \in \mathrm{GL}(V) \mid \det T = 1\}. \end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{T}(V) = \{T_t \mid t \in V\}$ de um espaço vetorial V é um grupo pois $T_{t_1} \circ T_{t_2} = T_{t_1+t_2}$ e $T_t^{-1} = T_{-t}$ (ou seja este conjunto é fechado para a composição e para os inversos). Como

$$T_{t_1} \circ T_{t_2} = T_{t_1+t_2} = T_{t_2+t_1} = T_{t_2} \circ T_{t_1},$$

temos que $\mathcal{T}(V)$ é um grupo abeliano.

Lema 2.7. *Seja $t \in V$ e $X \in GL(V)$. Então $XT_tX^{-1} = T_{X(t)}$.*

Demonstração. Seja $v \in V$ e computemos que

$$XT_tX^{-1}(v) = XT_t(X^{-1}(v)) = X(X^{-1}(v) + t) = v + X(t) = T_{X(t)}(v).$$

□

Teorema 2.8. *Assuma que G é um subgrupo de transformações de $GL(V)$ e seja $\mathcal{T}$ o grupo de translações. Então o produto $\mathcal{T}G = \{T_tX \mid t \in V,\ X \in G\}$ é um subgrupo de $Sym(V)$.*

Demonstração. Seja Y o conjunto de produtos no enunciado do teorema. Precisamos provar que Y é fechado para a composição e para tomar inversos. Sejam $T_{t_1}X_1$ e $T_{t_2}X_2$. Então temos que

$$(T_{t_1}X_1)(T_{t_2}X_2) = T_{t_1}X_1T_{t_2}(X_1^{-1}X_1)X_2 = T_{t_1}(X_1T_{t_2}X_1^{-1})X_1X_2 = (T_{t_1}T_{X_1(t_2)})(X_1X_2) \in Y.$$

Além disso, temos que

$$(T_tX)^{-1} = X^{-1}T_t^{-1} = X^{-1}T_{-t} = X^{-1}T_{-t}XX^{-1} = T_{X^{-1}(-t)}X^{-1} \in Y.$$

□

3. Isometrias de $\mathbb{R}^n$

Considere o espaço $\mathbb{R}^n$. Lembre que o produto escalar (ou produto interno) de dois vetores $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $w = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é definido como

$$v \cdot w = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

O produto escalar pode ser escrito usando multiplicação matricial como

$$v \cdot w = vw^t.$$

Usando o produto escalar, podemos definir a norma $\|v\|$ de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

A distância entre dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ pode ser definida como

$$d(v, w) = \|v - w\|.$$

Alêm disso, o cosseno do ângulo ϑ entre v e w é definido como

$$\cos\vartheta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

Dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais se e somente se $v \cdot w = 0$.

Da definição da norma fica clara que a norma está determinada pelo produto escalar. De acrodo do lema seguinte, a norma determina o produto escalar.

Teorema 2.9 (Identidade de polarização). *Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$, então*

$$v \cdot w = \frac{1}{2}\left(\|v + w\| - \|v\| - \|w\|\right).$$

Demonstração. Exercício. □

Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva distância (ou seja $d(T(v), T(w)) = d(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$) chama-se *isometria* de $\mathbb{R}^n$. Se T é uma isometria e $T(v) = T(w)$, então

$$0 = d(T(v), T(w)) = d(v, w);$$

ou seja $v = w$. Isso implica que uma isometria é necessáriamente injetiva. Vamos ver que isometrias são também sobrejetivas, mas neste momento esta afirmação não é tão fácil de provar. Por outro lado, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria *linear*, então ela é injetiva e precisa ser sobrejetiva. Logo, as isometrias lineares são invertíveis.

EXEMPLO 2.10. A translação $T_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria para todo $t \in \mathbb{R}^n$. De fato, temos para $v, w \in \mathbb{R}^n$ que

$$d(v+t, w+t) = \|v+t-(w+t)\| = \|v-w\| = d(v,w).$$

4. O grupo ortogonal

TEOREMA 2.11. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. As seguintes são equivalentes para T.*

(1) *T preserva o produto escalar; ou seja $T(v) \cdot T(w) = v \cdot w$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.*
(2) *T preserva a norma; ou seja $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$;*
(3) *T preserva a distância $d(T(v), T(w)) = d(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. O fato que (1) implica (2) e que (2) implica (3) segue das definições da norma e da distância. O fato que (3) implica (1) segue dos fatos que $\|v\| = d(v, 0)$, $T(0) = 0$ (T sendo linear) e da identidade de polarização. □

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ chama se *ortogonal* se T satisfaz uma (e então todas) das propriedades no teorema anterior. Por definição, as transformações ortogonais são exatamente as isometrias lineares do espaço $\mathbb{R}^n$. Lembre que uma matriz X é dita ortogonal se $X^tX = I$.

TEOREMA 2.12. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(1) *As transformações ortogonais formam um subgrupo de $GL(V)$.*
(2) *Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é ortogonal se e somente se sua matriz na base canônica é ortogonal.*
(3) *O determinante de uma transformação ortogonal é ± 1.*

DEMONSTRAÇÃO. (1) Pode mostrar com uma conta direta que a composição de duas transformações ortogonais é ortogonal e o inverso de uma transformação ortogonal é também ortogonal.

(2) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria linear, então T preserva a norma de vetores e o ângulo entre vetores. Como os vetores $e_1, \ldots, e_n$ na base canônica formam um sistema ortonormal, os vetores $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ também formam um sistema ortonormal. Isso quer dizer que $[T]_B^B$ é uma matriz ortogonal.

Assuma agora que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear tal que a sua matriz X na base canônica é ortogonal. Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$. Então

$$v \cdot w = vw^t = vX^tXw^t = (Xv^t)^t(Xw^t) = (Xv) \cdot (Xw) = T(v) \cdot T(w).$$

Ou seja, T preserva produto escalar e T é uma isometria.

(3) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria. Temos que $\det T = \det X$ onde X é a matriz de T na base canônica. Como X é uma matriz ortogonal, temos que

$$1 = \det I = \det(X^tX) = \det(X^t)\det X = (\det X)^2$$

e segue que $\det T = \det X = \pm 1$. $\square$

O grupo das transformações ortogonais de $\mathbb{R}^n$ é denotado por $O(\mathbb{R}^n)$. O subgrupo das transformações ortogonais com determinante 1 é denotado por $SO(\mathbb{R}^n)$. Os grupos $O(\mathbb{R}^n)$ e $SO(\mathbb{R}^n)$ são chamados *grupo ortogonal* e *grupo especial ortogonal*. Os elementos de $SO(\mathbb{R}^n)$ são chamadas de *rotações* enquanto os demais elementos de $O(\mathbb{R}^n)$ são chamadas de *reflexões*.

LEMA 2.13. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação tal que $T(0) = 0$. T é uma isometria se e somente se T preserva o produto interno (ou seja, $T(u) \cdot T(v) = u \cdot v$).*

DEMONSTRAÇÃO. Assuma primeiro que T é uma isometria. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\|T(u) - T(v)\| = d(T(u), T(v)) = d(u, v) = \|u - v\|.$$

Note que, tomando $v = 0$, isso implica que

$$\|T(u)\| = \|u\|,$$

ou seja, T preserva norma. Ora,

$$\|T(u) - T(v)\|^2 = \|u - v\|^2$$

e assim

$$(T(u) - T(v)) \cdot (T(u) - T(v)) = (u - v) \cdot (u - v).$$

Agora segue que

$$\|T(u)\|^2 + \|T(v)\|^2 - 2T(u) \cdot T(v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u, v).$$

Considerando que $\|T(v)\| = \|v\|$ e $\|T(u)\| = \|u\|$, obtemos que

$$T(v) \cdot T(u) = u \cdot v.$$

Vice versa, assuma que T preserve a produto interno. Então

$$\begin{aligned} d(T(u), T(v))^2 &= \|T(u) - T(v)\|^2 = (T(u) - T(v)) \cdot (T(u) - T(v)) \\ &= T(u) \cdot T(u) - 2T(u) \cdot T(v) + T(v) \cdot T(v) \\ &= u \cdot u - 2u \cdot v + v \cdot v = (u - v) \cdot (u - v) = \|u - v\|^2 \\ &= d(u, v)^2. \end{aligned}$$

Logo $d(T(u), T(v)) = d(u, v)$ e d é uma isometria. $\square$

COROLÁRIO 2.14. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria tal que $T(0) = 0$. Então T é linear e consequentemente T é uma transformação ortogonal.*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro provaremos que $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Pelo lema anterior, T preserva o produto interno, e assim

$$\begin{aligned} \|T(\alpha v) - \alpha T(v)\|^2 &= (T(\alpha v) - \alpha T(v)) \cdot (T(\alpha v) - \alpha T(v)) \\ &= T(\alpha v) \cdot T(\alpha v) - 2\alpha T(\alpha v) \cdot T(v) + \alpha^2 T(v) \cdot T(v) \\ &= (\alpha v) \cdot (\alpha v) - 2\alpha(\alpha v) \cdot v + \alpha^2 v \cdot v = 0. \end{aligned}$$

Ou seja $\|T(\alpha v) - \alpha T(v)\| = 0$ que implica que $T(\alpha v) - \alpha T(v) = 0$ e que $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Provaremos agora, para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, que $T(u+v) = T(u) + T(v)$. Usamos um argumento similar e calculamos que

$$\begin{aligned}
\|T(u+v) - T(u) - T(v)\|^2 &= (T(u+v) - T(u) - T(v)) \cdot (T(u+v) - T(u) - T(v)) \\
&= T(u+v) \cdot T(u+v) + T(u) \cdot T(u) + T(v) \cdot T(v) \\
&- 2T(u+v) \cdot T(u) - 2T(u+v) \cdot T(v) - 2T(u) \cdot T(v) \\
&= (u+v) \cdot (u+v) + v \cdot v + u \cdot u \\
&- 2(u+v) \cdot u - 2(u+v) \cdot v - 2u \cdot v \\
&= ((u+v) - u - v) \cdot ((u+v) - u - v) = 0 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Logo $T(u+v) - T(u) - T(v) = 0$; ou seja, $T(u+v) = T(u) + T(v)$. $\square$

COROLÁRIO 2.15. *Assuma que* $T : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ *é uma isometria. Então* $T = T_t \circ X$ *onde* T *é uma translação e* $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é ortogonal (em particular,* X *é linear).*

DEMONSTRAÇÃO. Assuma que $T(0) = t$. Então $X = T_{-t} \circ T$ é uma isometria tal que $X(0) = 0$. Pelo corolário anterior, $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é ortogonal (e linear). Ora notamos que $T = T_t \circ X$. $\square$

COROLÁRIO 2.16. *Qualquer isometria* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é invertível.*

CAPíTULO 3

Transformações ortogonais em 2D e 3D

1. O plano (2D)

1.1. Realização matricial. Lembre que a matriz da reflexão R_t pelo eixo que tem ângulo α pelo eixo x é

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha). \end{pmatrix}$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal e seja e_1, e_2 a base canônica. A matriz de T tem os vetores $f_1 = T(e_1)$ e $f_2 = T(e_2)$ nas colunas. Pela ortogonalidade de T, f_1 e f_2 formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Assuma que $f_1 = (a, b)$ com $\|f_1\| = a^2 + b^2 = 1$. Então $f_2 = (-b, a)$ ou $b_2 = (b, -a)$. Escolha um ângulo α tal que $a = \cos\alpha$ e $b = \operatorname{sen}\alpha$. Então a matriz $[T]$ de T tem duas possíveis formas:

$$\text{Caso I: } [T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{Caso II: } [T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Seja

LEMA 3.1. *No primeiro caso T é a rotação Rot_α pelo ângulo α. No segundo caso, T é a reflexão $Ref_{\alpha/2}$ pelo eixo que tem ângulo $\alpha/2$ com o eixo x.*

LEMA 3.2. *Temos as seguintes regras para a composição de rotações e reflexões.*

(1) $Rot_\alpha \circ Rot_\beta = Rot_{\alpha+\beta}$;
(2) $Ref_\alpha \circ Ref_\beta = Rot_{2(\alpha-\beta)}$;
(3) $Rot_\alpha \circ Ref_\beta = Ref_{\beta+\alpha/2}$;
(4) $Ref_\alpha \circ Rot_\beta = Ref_{\alpha-\beta/2}$.

DEMONSTRAÇÃO. (1) é exercício. Demonstremos (2). Seja $v \in \mathbb{R}^2$ e calculemos que

$$\operatorname{Ref}_\alpha \circ \operatorname{Ref}_\beta(v) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \operatorname{sen}(2\beta) \\ \operatorname{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} v$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) & \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) - \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\beta) \\ \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) & \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) + \cos(2\alpha)\cos(2\beta) \end{pmatrix} v$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2(\alpha-\beta)) & -\operatorname{sen}(2(\alpha-\beta)) \\ \operatorname{sen}(2(\alpha-\beta)) & \cos(2(\alpha-\beta)) \end{pmatrix} v$$

$$= \operatorname{Rot}_{2(\alpha-\beta)}(v)$$

(3) Temos que

$$\mathrm{Ref}_{\beta+\alpha/2} \circ (\mathrm{Ref}_{\beta})^{-1} = \mathrm{Ref}_{\beta+\alpha/2} \circ (\mathrm{Ref}_{\beta}) = \mathrm{Rot}_{2(\beta-\alpha-\beta)} = \mathrm{Rot}_{\alpha}$$

que implica afirmação (3). A demonstração de (4) é similar à demonstração de (3). $\square$

Exemplo 3.3. Seja $\alpha \in [0, 2\pi)$ e considere $\mathrm{Rot}_{\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação por ângulo α ao redor da origem. Os autovalores de Rot_{α} são raízes do polinômio caraterístico

$$\begin{aligned}\det(t \cdot \mathrm{id} - \mathrm{Rot}_{\alpha}) &= \det \begin{pmatrix} t - \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & t - \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= (t - \cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = t^2 - 2t\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \\ &= t^2 - 2t\cos\alpha + 1.\end{aligned}$$

As raízes deste polinômio são $z = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e $\bar{z} = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$. Isso quer dizer que o ângulo da rotação pode ser determinado pelos autovalores da transformação. Mais precisamente o ãngulo da rotação é α onde $\cos\alpha = (z + \bar{z})/2$ e $\operatorname{sen}\alpha = (z - \bar{z})/(2i)$.

th:recog Teorema 3.4. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal com dois autovalores $z, \bar{z}$ onde $z \in \mathbb{C}$ e $\|z\| = 1$. Então T é uma rotação por ângulo α onde* $\cos\alpha = (z + \bar{z})/2$ *e* $\operatorname{sen}\alpha = (z - \bar{z})/(2i)$.

Demonstração. Note que $\det T = z\bar{z} = 1$ e pelas considerações anteriores, T é uma rotação. Logo, a matriz de T está na forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Usando a computação no exemplo anterior, os autovalores z e $\bar{z}$ são $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$ e segue a afirmação. $\square$

1.2. Realização com números complexos. O vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pode ser identificado com o número complexo $\alpha + i\beta$. Cada número complexo z pode ser escrito como $z = \|z\|(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$ onde α é o ângulo (frequentamente chamado de argumento) que corresponde a z e $\alpha \in [0, 2\pi)$. Um número complexo z com $\|z\| = 1$ tem a forma $z = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$. Pela fórmula de Euler,

$$\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha} = \exp(i\alpha)$$

O conjugado de um número $z = \alpha + \beta i$ é $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Lema 3.5. *(1) Seja $z_{\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$. A aplicação*

$$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad T(z) = z_{\alpha} \cdot z$$

corresponde a rotação Rot_{α} pelo ângulo α (em torno da origem).

(2) Seja T a reflexão pelo eixo que tem ângulo α com o eixo x. Então

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z}$$

DEMONSTRAÇÃO. (1) Seja $z = \|z\|(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta)$. Então

$$\begin{aligned} z_\alpha \cdot z &= \|z\|(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + i(\cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ &= \|z\|(\cos(\alpha+\beta) + i(\cos\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

(2) Claramente $\mathrm{Ref}_0(z) = \bar{z}$. Então

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z} = \mathrm{Rot}_{2\alpha}\mathrm{Ref}_0(z) = \mathrm{Ref}_\alpha(z).$$

$\square$

1.3. Os grupos $O(\mathbb{R}^2) = O_2$ e $SO(\mathbb{R}^2) = SO_2$. Considere o circulo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} = \{\exp(i\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Temos que S^1 é um grupo para a operação de multiplicação. Considere a aplicação

$$\psi : S^1 \to SO(\mathbb{R}^2), \quad \exp(i\alpha) \mapsto \mathrm{Rot}_\alpha.$$

TEOREMA 3.6. *Temos que ψ é uma aplicação invertível e*

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) \circ \psi(z_2).$$

Ou seja, ψ é um isomorfismo entre os grupos S^1 e SO_3.

DEMONSTRAÇÃO. Se $\psi(\exp(i\alpha)) = \psi(i\beta)$ então $\mathrm{Rot}_\alpha = \mathrm{Rot}_\beta$ e, como $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\alpha = \beta$. Logo ψ é injetivo. Claramente, $\mathrm{Rot}_\alpha = \psi(\exp(i\alpha))$ e assim ψ é sobrejetivo. Agora,

$$\begin{aligned} \psi(\exp(i\alpha)\exp(i\beta)) = \psi(\exp(i(\alpha+\beta))) &= \mathrm{Rot}_{\alpha+\beta} = \mathrm{Rot}_\alpha \circ \mathrm{Rot}_\beta \\ &= \psi(\exp(i\alpha)) \circ \psi(\exp(i\beta)) \end{aligned}$$

$\square$

Note que o grupo SO_3 pode ser identificado também com o grupo $[0, 2\pi)$ com a operação de adição feita "módulo 2π".

LEMA 3.7. *Seja $T \in O_2$ uma reflexão. Então $O_2 = SO_2 \cup tSO_2$. Além disso qualquer rotação pode ser escrita como uma composição de duas reflexões.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. $\square$

2. O espaço 3D

EXERCÍCIO 3.8. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação ortogonal e $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T. Mostre que $|\lambda| = 1$. Mostre que se v_1 é um autovetor de T com autovalor 1 e u é um autovetor de T com autovalor -1, então u e v são ortogonais ($u \cdot v = 0$).*

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação ortogonal. Nós já vimos que $\det T = \pm 1$. A transformação T possui três autovalores (possívelmente complexos) não necessáriamente distintos. Além disso, se $z \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T, então $\|z\| = 1$ e $\bar{z} \in \mathbb{C}$ é também um autovalor de T. As possibilidades para os autovalores são os seguintes.

$$\begin{aligned}
\text{Caso I} :& 1, 1, 1;\\
\text{Caso II} :& 1, 1, -1;\\
\text{Caso III} :& 1, -1, -1;\\
\text{Caso IV} :& 1, z, \bar{z} \text{ com algum } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R};\\
\text{Caso V} :& -1, -1, -1;\\
\text{Caso VI} :& -1, z, \bar{z} \text{ com algum } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

EXERCÍCIO 3.9. *Dê exemplos de transformações de todos os tipos.*

2.1. Rotações em 3D.

TEOREMA 3.10. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação ortogonal com $\det T = 1$. Então existe uma base v_1, v_2, v_3 ortonormal de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz de T está na forma*

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Logo, a transformação T é a rotação por ângulo α pelo eixo v_1.

DEMONSTRAÇÃO. Se os autovalores são $1, 1, 1$, então a transformação é a identidade e podemos tomar a base canônica e $\alpha = 0$. Se os autovalores são $1, -1, -1$ então toma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores e $\alpha = \pi$.

Agora assuma que os autovetores de T são $1, z, \bar{z}$ com algum $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Seja v_1 um autovetor de T com autovalor 1 (ou seja $T(v_1) = v_1$). Como T preserva o subespaço $\langle v_1 \rangle$, T preserva também o subespaço $U = \langle v_1 \rangle^{\perp}$. Note que $\dim U = 2$ e seja v_2, v_3 uma base ortonormal de U. Então v_1, v_2, v_3 é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Seja T_1 a restrição de T para U. Então T_1 preserva o produto escalar em U e assim induz uma transformação ortogonal em U com autovalores z e $\bar{z}$. Pelo Teorema th:recog 3.4, T_1 é uma rotação com um ângulo α determinado por z e $\bar{z}$. A matriz de T na base v_1, v_2, v_3 é na forma desejada, e T é a rotação por ângulo α pelo eixo v_1. □

Uma transformação ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com determinante 1 é uma rotação. Pelas considerações anteriores, as possíveis autovetores de uma rotação são $1, 1, 1$ ou $1, -1, -1$, ou $1, z, \bar{z}$ onde $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ com $\|z\| = 1$.

Temos em particular as rotações Rot_α^x, Rot_β^y e Rot_γ^z por ãngulos α, β e γ em torno dos eixos x, y, e z respetivamente. As matrizes destas rotações na base canônica são

$$[\mathrm{Rot}_\alpha^x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{Rot}_\beta^y] = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{Rot}_\beta^y] = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. A fórmula de Rodrigues. Seja $k \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário e $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Considere a rotação $R = R(k, \vartheta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pelo ângulo ϑ ao redor do eixo $k = (k_x, k_y, k_z)$. Seja

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 3.11. *Seja $v \in \mathbb{R}^3$. Então $k \times v = Kv$. Em particular, $Kk = 0$.*

Demonstração. Temos que

$$k \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ k_x & k_y & k_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = (k_y v_z - k_z v_y, -k_x v_z + k_z v_x, k_x v_y - k_y v_x)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Ora, $Kk = k \times k = 0$. □

Lema 3.12. *A matriz da rotação $R = R(k, \vartheta)$ na base canônica é*

$$[R] = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2 = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)k^t k$$

Demonstração. Escolha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ na forma k, u, v em tal forma que $k \times u = v$, $u \times v = k$ e $v \times k = u$ e seja $X = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2$. Como $Kk = K^2 k = 0$, temos que

$$Xk = (I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2)k = Ik = k.$$

Agora

$$Xu = (I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2)u = u + (\operatorname{sen}\vartheta)v - (1 - \cos\vartheta)u$$
$$= (\cos\vartheta)u + (\operatorname{sen}\vartheta)v$$

e

$$\begin{aligned} Xv &= (I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)K^2)v = v - (\operatorname{sen}\vartheta)u - (1-\cos\vartheta)v \\ &= -(\operatorname{sen}\vartheta)u + (\cos\vartheta)v \end{aligned}$$

Logo a matriz de R na base k, u, v é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Portanto $[R] = X$. Para provar a segunda igualdade do lema, note que $\|k\| = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$ e assim

$$\begin{aligned} K^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k_z^2 - k_y^2 & k_y k_x & k_z k_x \\ k_x k_y & -k_z^2 - k_x^2 & k_z k_y \\ k_x k_z & k_y k_z & -k_y^2 - k_x^2 \end{pmatrix} = k^t \cdot k - I \end{aligned}$$

Logo a matriz de R é

$$\begin{aligned} X &= I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos)K^2 = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)(k^t \cdot k - I) \\ &= (\cos\vartheta)I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)k^t \cdot k \end{aligned}$$

□

COROLÁRIO 3.13. *A matriz de $R(k,\vartheta)$ é*

$$\begin{pmatrix} (1-\cos\vartheta)k_x^2 + \cos\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_x k_y - k_z \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_x k_z + k_y \operatorname{sen}\vartheta \\ (1-\cos\vartheta)k_x k_y + k_z \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_y^2 + \cos\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_y k_z - k_x \operatorname{sen}\vartheta \\ (1-\cos\vartheta)k_x k_z - k_y \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_y k_z + k_x \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_z^2 + \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Apenas escreva a matriz $(\cos\vartheta)I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)k^t \cdot k$. □

COROLÁRIO 3.14. *Dada a matriz X da rotação $R(k,\vartheta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Temos que*

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arccos\frac{X_{11} + X_{22} + X_{33} - 1}{2} \\ k_x &= \frac{X_{32} - X_{23}}{2\operatorname{sen}\vartheta}; \\ k_y &= \frac{X_{13} - X_{31}}{2\operatorname{sen}\vartheta}; \\ k_z &= \frac{X_{21} - X_{12}}{2\operatorname{sen}\vartheta}. \end{aligned}$$

2.3. A decomposição ZXZ. Dada uma rotação $R = R(k, \alpha)$, ela pode ser escrita como produto de rotações elementares. Uma decomposição comum é escrever R na forma $R(z,\psi)R(y,\vartheta)R(x,\varphi)$. Escrevendo o produto matricial, obtemos que a matriz da composição $R(z,\psi)R(y,\vartheta)R(x,\varphi)$ é

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\cos\psi & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta\operatorname{sen}\psi & \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\psi \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Se temos a matriz $X_{i,j}$ de R, então os ângulos φ, ϑ, ψ podem ser obtidos.

2.4. A decomposição ZXZ. Uma outra decomposição comum de R é escrever R na forma $R = R(z,\psi)R(x,\vartheta)R(z,\varphi)$. Multiplicando as matrizes, obtemos que a matriz desta composição é

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi & -\cos\psi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\vartheta \\ \cos\psi\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi\cos\varphi & \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi & -\cos\psi\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

CAPíTULO 4

Os quatérnios e as rotações em $\mathbb{R}^3$

1. A álgebra dos quatérnios

Seja $\mathbb{H}$ o espaço vetorial de dimensão 4 gerado por $1, i, j, k$. Introduzimos uma multiplicação em $\mathbb{H}$ com a seguinte tabela de multiplicação:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Note que o conjunto $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ é um grupo para esta multiplicação. A multiplicação entre os elementos $1, i, j, k$ será estendida com a regra distributiva. Um elemento de $\mathbb{H}$ chama-se um *quatérnio* e e conjunto $\mathbb{H}$ chama-se a *álgebra dos quatérnios*. A seguinte lema é fácil de verificar por conta direta.

Lema 4.1. *A álgebra dos quatérnios é um espaço vetorial de dimensão* 4 *com uma multiplicação bem definida. Além disso, a multiplicação é associativa, possui elemento neutro (o elemento* 1*), mas não é comutativa. A estrutura satisfaz a lei distributiva:*

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3 \quad e \quad (q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3.$$

Todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ pode ser escrito unicamente na forma $q = \alpha_q + v_q$ onde $\alpha_q \in \mathbb{R}$ e $v_q \in \langle i, j, k\rangle$. Um quatérnio com $v_q = 0$ chama-se *escalar*, enquanto um quatérnio com $\alpha_q = 0$ chama-se *quatérnio puro*. Pode-se definir o produto escalar entre quatérnios como no espaço $\mathbb{R}^3$ pela regra

$$(p, q) = \alpha_p\alpha_q + \beta_p\beta_q + \gamma_p\gamma_q + \delta_p\delta_q$$

para todo $p = \alpha_p + \beta_p i + \gamma_p j + \delta_p k$ e $q = \alpha_q + \beta_q i + \gamma_q j + \delta_q k$. (O produto escalar será denotado por $(\cdot, \cdot)$ para não confundir com a multiplicacão.) Em relação com este produto escalar, os elementos 1, i, j, e k formam uma base ortonormal de $\mathbb{H}$. A norma de um quatérnio na forma $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ é definida como

$$\|q\| = \sqrt{(q, q)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2},$$

enquanto o conjugado $\bar{q}$ está definido como

$$\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta.$$

A norma e o conjugado entre quatérnios satisfaz propriedades similares que a norma e o conjugado para números complexos.

Lema 4.2. *As seguintes afirmações são verdadeiras para $q \in \mathbb{H}$.*

(1) $\alpha_q = (q + \bar{q})/2$;
(2) $v_q = (q - \bar{q})/2$;
(3) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ *e* $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ *(note a troca na ordem!);*
(4) $\|q\| = 0$ *se e somente se* $q = 0$;
(5) $\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$;
(6) $\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$;
(7) $\|\alpha q\| = |\alpha| \|q\|$ *para* $\alpha \in \mathbb{R}$;
(8) $\|q\|^2 = q \cdot \bar{q}$.

Demonstração. Deixamos a maioria destas afirmações para exercício. Para (8), calculemos que

$$\begin{aligned} q \cdot \bar{q} &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \|q\|^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.3. *Seja* $q = \alpha_q + v_q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. *Então* q *possui inverso multiplicativo e*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

Em outras palávras, $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ *é grupo para a multiplicação.*

Demonstração. Segue da afirmação (8) do lema anterior que

$$q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

□

Um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ chama-se *unitário* se $\|u\| = 1$.

Lema 4.4. *O elemento* $1 \in \mathbb{H}$ *é unitário, e se* $q \in \mathbb{H}$ *é unitário, então* q^{-1} *é unitário. Logo, os quatérnios unitários formam um grupo para a multiplicação. Além disso, se* $q \in \mathbb{H}$ *é unitário, então* $q^{-1} = \bar{q}$.

Para $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, defina o comutador

$$[q_1, q_2] = \frac{1}{2}(q_1 q_2 - q_2 q_1).$$

Lema 4.5. *O comutador satisfaz as seguintes propriedades para todo* $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$:

(1) $[q_1 + q_2, q_3] = [q_1, q_3] + [q_2, q_3]$ *e* $[q_1, q_2 + q_3] = [q_1, q_2] + [q_1, q_3]$ *(distributividade);*
(2) $[q_1, q_1] = 0$ *e* $[q_1, q_2] = -[q_2, q_1]$ *(anti-comutatividade);*
(3) $[[q_1, q_2], q_3] + [[q_2, q_3], q_1] + [[q_3, q_1], q_2] = 0$ *(identidade de Jacobi).*

As identidades no lema anterior implicam que a estrutura $(\mathbb{H}, +, [\cdot, \cdot])$ é uma *álgebra de Lie*. Seja Q o espaço dos quatérnios puros. Então Q é um espaço vetorial de dimensão 3 gerado por i, j, e k. Note que Q não é fechado para o produto $\cdot$ entre os quatérnios (por exemplo $i \cdot i = i^2 = -1 \notin Q$), mas ele é fechado para o comutador. De fato, temos que $[i, j] = k$, $[j, k] = i$ e $[k, i] = j$. Ou seja, o comutador no espaço k comporta-se exatamente como o produto vetorial $\times$ sobre $\mathbb{R}^3$. Além disso, $[1, q] = 0$ para todo $q \in \mathbb{H}$.

LEMA 4.6. *As seguintes propriedades são válidas para $q = \alpha_q + v_q$ e $p = \alpha_p + v_p$:*
(1) *$[p, q] = [v_p, v_q]$;*
(2) *$p \cdot q = \alpha_p\alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + v_p \times v_q = \alpha_p\alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + [p, q]$;*
(3) *Se p e q são quatérnios puros, então $p \cdot q = -(p, q) + p \times q = -(p, q) + [p, q]$.*
(4) *Se p e q são quatérnios puros ortogonais, então $p \cdot q = p \times q$.*
(5) *Se p é puro unitário, então $p^2 = -1$.*

DEMONSTRAÇÃO. (1)–(4) Uma conta usando as definições. Para provar (5), note que item (3) implica que

$$v^2 = -(v, v) + v \times v = -(v, v) = -\|v\|^2 = -1.$$

□

Se $q = \alpha_q + v_q \in \mathbb{H}$ com $v_q \neq 0$, então

$$q = \alpha_q + \|v_q\| \frac{v_q}{\|v_q\|} = \alpha_q + \beta_q u_q$$

onde u_q é um quatérnio puro unitário. Além disso, se $\|q\| = 1$, como $\alpha_q \perp v_q$,

$$1 = \|q\| = \alpha_q^2 + \beta_q^2$$

então

$$q = \cos\vartheta_q + \operatorname{sen}\vartheta_q u_q$$

com algum ângulo $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

TEOREMA 4.7. *Todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ unitário pode ser escrito na forma*

$$\cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u$$

onde u é um quatérnio puro unitário. Além disso, se $q \neq 1$, então esta expressão é única.

DEMONSTRAÇÃO. If $v_q \neq 0$, então siga o processo antes do enunciado. Se $v_q = 0$, então toma $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$ e u arbitrário. □

LEMA 4.8. *Seja $u \in \mathbb{H}$ um quatérnio unitário. Então as aplicações*

$$L_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ L_u(q) = uq \quad e \quad R_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ R_u(q) = qu^{-1} = q\bar{u}$$

são transformações ortogonais de $\mathbb{H}$ com determinante 1; ou seja, L_u e R_u são rotações de $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

Demonstração. Pela distributividade da multiplicação, temos que L_u e R_u são transformações lineares. Além disso

$$\|L_u(q)\| = \|uq\| = \|u\|\|q\| = \|q\|$$

e obtém-se similarmente que $\|R_u(q)\| = \|q\|$; ou seja L_u e R_u preservam a norma. Nós já provamos que para uma transformação linear isso é equivalente a ser ortogonal. Precisamos ainda provar que $\det L_u = \det R_u = 1$. Escreva $u = \cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta u_0$ onde u_0 é quatérnio puro unitário. Neste caso $1 \perp u_0$ e escolha um quatérnio puro unitário v tal que $u_0 \perp v$ e seja $w = [u_0, v] = u_0 \times v$. Então temos que a matriz de L_u na base $1, u_0, v, w$ é

$$[L_{u_0}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de $L_u = (\cos\vartheta)I + (\operatorname{sen}\vartheta)L_{u_0}$ é

$$[L_u] = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Segue que L_u pode ser realizada como a composição de duas rotações: a primeira no plano $\langle 1, u\rangle$ e a segunda no plano $\langle v, w\rangle$ com ângulo ϑ. Temos que $\det L_u = (\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta)^2 = 1$. A computação para R_u é similar. Note que $u^{-1} = \bar{u} = \cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta u_0$ e a matriz de R_u na mesma base será

$$[R_u] = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Ou seja, R_u faz uma rotação no plano $\langle 1, u\rangle$ com ângulo $-\vartheta$ e uma rotação no plano $\langle v, w\rangle$ por ângulo ϑ. $\square$

Teorema 4.9. *Seja $u = \cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0 \in \mathbb{H}$ um quatérnio unitário. Defina*

$$T_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad T_u(q) = uqu^{-1} = (L_u \circ R_u)(q).$$

Então $T_u(1) = 1$ e T_u induz uma rotação do espaço $\mathbb{R}^3 \cong \langle i, j, k\rangle$. O eixo desta rotação é u_0 e o seu ângulo é 2ϑ.

Demonstração. Primeiro

$$T_u(1) = u \cdot 1 \cdot u^{-1} = u \cdot u^{-1} = 1.$$

Além disso, T_u é uma composição de duas transformações ortogonais, e ela é ortigonal e temos ainda que $\det T_u = \det L_u \cdot \det R_u = 1$. Logo T_u é uma rotação de $\mathbb{H}$. Consequentemente, T_u preserva $Q = \langle i, j, k\rangle = \langle 1\rangle^{\perp}$. Além disso, T_u preserva a norma em Q e assim a restrição de T_u para Q é uma transformação ortogonal com determinante 1. Portanto T_u induz uma rotação em $\langle i, j, k\rangle$. O eixo desta rotação pode ser calculado por determinar um autovetor de T_u em $\langle i, j, k\rangle$ que corresponde ao autovalor 1. Mas note que

$$uu_0 = (\cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0)u_0 = u_0(\cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0) = (\cos\vartheta)u_0 - \operatorname{sen}\vartheta = u_0 u$$

e assim

$$T_u(u_0) = uu_0u^{-1} = u_0uu^{-1} = u_0$$

e obtemos que o eixo de T_u em $\langle i, j, k\rangle$ é u.

Finalmente, temos que verificar a afirmação sobre o ângulo. Escreva $u = \cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0$ onde u_0 é puro e unitário. Como na demonstração anterior, considere a base $1, u_0, v, w$ onde $v \in Q$ unitário ortogonal a u e $w = u \times v$. Como T_u é a composição de L_u e R_u, temos que a matriz de T_u nesta base é o produto das matrizes de L_u e R_u e assim

$$\begin{aligned}
[T_u] &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\vartheta) & -\operatorname{sen}(2\vartheta) \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(2\vartheta) & \cos(2\vartheta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.10. *Toda rotação T de $\mathbb{R}^3 = \langle i, j, k\rangle$ pode ser realizado como T_u com algum $u \in \mathbb{H}$ unitário. Além disso, se $u, v \in \mathbb{H}$ são unitários, então $T_u = T_v$ se e somente se $u = \pm v$.*

Demonstração. Seja u_0 o eixo de T e ϑ o ângulo da rotação. Toma

$$u = \cos(\vartheta/2) + (\operatorname{sen}(\vartheta/2))u_0.$$

Pelo teorema anterior, $T = T_u$.

Para provar a segunda afirmação, primeiro provaremos que $T_u = \mathrm{id}$ se e somente se $u = \pm 1$. Primeiro, se $u = \pm 1$, então $T_u = \mathrm{id}$. Assuma que $T_u = \mathrm{id}$. Assuma que $u, v \in \mathbb{H}$ são unitários e escreva $u = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha u_0$. O ângulo da rotação é 2α. Temos que $T_u = \mathrm{id}$ se e somente se 2α é um múltiplo de 2π, ou seja $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. Obtemos nos dois casos que $u = 1$ ou $u = -1$. Assuma agora que $T_u = T_v$ com $u, v \in \mathbb{H}$ unitários. Temos que

$$\mathrm{id} = T_u T_v^{-1} = T_u T_{\bar{v}} = T_{u\bar{v}}.$$

Pelo afirmação anterior, $u\bar{v} = \pm 1$ e assim $u = \pm v$. □

Corolário 4.11. *O grupo $SO(\mathbb{R}^3)$ das rotações de $\mathbb{R}^3$ pode ser identificado com a meia esfera $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Dois elementos $u, v \in S^3$ representam a mesma rotação se e somente se $u = \pm v$.*

1.1. A composição de rotações. Sejam $u = \cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0$ e $v = \cos\beta + (\operatorname{sen}\beta)v_0$ quatérnios unitários. Note, para todo $x \in \mathbb{H}$ que

$$T_{uv}(x) = uvx(uv)^{-1} = uvxv^{-1}u^{-1} = T_u \circ T_v(x).$$

Logo,

$$T_{uv} = T_u \circ T_v.$$

Além disso, uv é quatérnio unitário e

$$\begin{aligned}
uv &= (\cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0)(\cos\beta + (\operatorname{sen}\beta)v_0)\\
&= \cos\vartheta\cos\beta + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta u_0v_0\\
&= \cos\vartheta\cos\beta + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(-(u_0,v_0) + u_0\times v_0)\\
&= \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0) + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0\times w_0\\
&= \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0) + w
\end{aligned}$$

com w puro (na útlima equação usamos que u_0, v_0 são puros e unitários). A parte constante de uv é $\cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0)$. Para escrever uv na forma $\cos\alpha + (\operatorname{sen}\alpha)w_0$, precisamos calcular $\|w\|$. Usando que u_0 e v_0 são ambos ortogonais a $u_0\times v_0$, e que u_0, v_0 e $u_0\times v_0$ são unitários, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 &= \|(\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0\times v_0\|^2\\
&= ((\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0\times v_0,\\
&= (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0\times v_0)\\
&= \operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta\operatorname{sen}^2\vartheta + 2\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\\
&= \operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta + \cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)^2 + 2\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta(\cos\varphi - 1)\\
&= \operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2(\vartheta+\beta) + \frac{\cos^2(\vartheta-\beta) - \cos^2(\vartheta+\beta)}{2}(\cos\varphi - 1)
\end{aligned}$$

Então temos que

$$uv = w = \alpha_w + \beta_w w_0$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_w &= \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0) = \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta\cos\varphi\\
\beta_w &= \left(\operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2(\vartheta+\beta) + \frac{\cos^2(\vartheta-\beta) - \cos^2(\vartheta+\beta)}{2}(\cos\varphi - 1)\right)^{1/2}\\
w_0 &= \frac{(\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0\times v_0}{\beta_w}.
\end{aligned}$$

onde $w_0 = w/\|w\|$ é um quatérnio unitário puro.

TEOREMA 4.12. *Sejam $R_1 = R(k_1, \vartheta_1)$ e $R_2 = R(k_2, \vartheta_2)$ rotações de $\mathbb{R}^3$ e assuma que $\|k_1\| = \|k_2\| = 1$ e que φ é o ângulo entre k_1 e k_2 (ou seja, $\cos\varphi = (k_1, k_2)$). Então a composição $R = R_1 \circ R_2$ é uma rotação. O eixo de R é*

$$k = (\cos\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2)k_2 + (\cos\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_1)k_1 + (\operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2)k_1 \times k_2$$

e o ângulo de R é o ângulo ϑ que satisfaz

$$\begin{aligned}
\cos(\vartheta/2) &= \cos(\vartheta_1/2)\cos(\vartheta_2/2) - \operatorname{sen}(\vartheta_1/2)\operatorname{sen}(\vartheta_2/2)\cos\varphi \\
\operatorname{sen}(\vartheta/2) &= \|k\| \\
&= \Big(\operatorname{sen}^2(\vartheta_1/2)\operatorname{sen}^2(\vartheta_2/2)\operatorname{sen}^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2((\vartheta_1\vartheta_2)/2) \\
&\quad + \frac{\cos^2((\vartheta_1-\vartheta_2)/2)) - \cos^2((\vartheta_1+\vartheta_2)/2)}{2}(\cos\varphi - 1)\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

1.2. O mapa exponencial. Lembre que para um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou complexo $\alpha \in \mathbb{C}$), temos as seguintes séries de Taylor:

$$\begin{aligned}
e^\alpha = \exp\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \\
\operatorname{sen}\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Seja $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e considere v um quatérnio puro de $\mathbb{H}$. Pondo $\alpha = \|v\|$, podemos escrever $v = \alpha v_0$ onde v_0 é um quatérnio puro unitário. Lembrando que $v_0^2 = -1$, temos que

$$v_0^0 = 1,\ v_0^1 = v_0,\ v_0^2 = -1,\ v_0^3 = -v_0,\ v_0^4 = 1,\ v_0^5 = v_0, \ldots \text{etc.}$$

Mais precisamente temos que

$$v_0^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \equiv 0 \pmod 4; \\ v_0 & \text{se } k \equiv 1 \pmod 4; \\ -1 & \text{se } k \equiv 2 \pmod 4; \\ -v_0 & \text{se } k \equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$$

Assim podemos escrever que

$$\exp(v) = \exp(\alpha v_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n v_0^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) v_0 = \cos\alpha + (\operatorname{sen}\alpha)v_0.$$

Em outras palávras, $\exp(v)$ é um quatérnio unitário. Assim obtemos um mapa

$$\exp : \mathbb{H} \to \{u \in \mathbb{H} \mid \|u\| = 1\}, \quad v \mapsto \exp(v).$$

Note que o mapa exp é sobrejetiva, mas não é injetiva, pois $\exp(\alpha v_0) = \exp((\alpha + 2\pi)v_0)$, mas podemos definir para $q = \cos\alpha + (\operatorname{sen}\alpha)v_0$ o seu logaritmo como

$$\log q = \alpha v_0$$

e assim temos que

$$\exp(\log q) = q$$

para todo $q \in \mathbb{H}$ unitário.

O exponencial e logaritmo nos permite definir para um quatérnio puro q e para um $t \in \mathbb{R}$, o exponencial q^t como

$$q^t = e^{\log q \cdot t} = \exp(t \log q).$$

1.3. Interpolação geodésica. Dados $R_1, R_2 \in SO_3$, queremos obter um caminho suave composto por rotações em SO_3 entre R_1 e R_2 com a propriedade que a "velocidade do caminho" é constante. Matematicamente, nós queremos obter uma curva suave

$$\varphi : [0,1] \to SO_3, \quad \varphi(0) = R_0 \quad \text{e} \quad \varphi(1) = R_1$$

com $(d/dt)\varphi(t)$ constante.

Sejam R_1 e R_2 representadas por quatérnions

$$p = \cos\alpha + (\operatorname{sen}\alpha)p_0 \quad \text{e} \quad q = \cos\beta + (\operatorname{sen}\beta)q_0$$

onde $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ e $p_0, q_0 \in \mathbb{H}$ são quatérnios unitários. Representando os quatérnios nesse jeito, o nosso problema pode ser visto como o problema de achar uma curva suave

$$\varphi : [0,1] \to \{v \in \mathbb{H} \mid \|v\| = 1\}$$

com $\varphi(0) = p$ e $\varphi(1) = q$ tal que $d\varphi/dt$ constante.

Assuma primeiro que $p = 1$. Neste caso defina

$$\varphi : [0,1] \to SO_3, \quad \varphi(t) = \cos(t\beta) + \operatorname{sen}(t\beta)q_0 = \exp(t\beta q_0) = \exp(t \log q) = q^t.$$

Claramente, $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = q$. Além disso

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = -\operatorname{sen}(t\beta)\beta + \cos(t\beta)\beta q_0$$

e assim

$$\|\frac{d}{dt}\varphi(t)\| = |\beta|.$$

Assim, $(d/dt)\varphi(t)$ é constante e assim a curva φ pode ser vista como uma curva de velocidade constante. Pode ainda verificar que φ é uma curva ao longo de uma geodésica.

Sejam agora $p, q \in \mathbb{H}$ unitários e escreva

$$p = \cos\alpha + (\operatorname{sen}\alpha)p_0 \quad \text{e} \quad q = \cos\beta + (\operatorname{sen}\beta)q_0$$

Considere a curva

$$\varphi_0 : [0,1] \to SO_3, \quad \varphi(t) = (qp^{-1})^t.$$

Ora a curva φ desejada será obtida como o produto $\varphi_0(t)p$:

$$\varphi(t) = (qp^{-1})^t p.$$

Claramente, $\varphi(0) = p$, $\varphi(1) = q$ e $|(d/dt)\varphi(t)| = |\beta|$ é constante (onde β é o ângulo entre p e q).

LEMA 4.13. *Seja φ como em cima e assuma que β é o ângulo entre p e q* ($\cos\beta = (p, q)$)*. Então*

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen}(1-t)\beta}{\operatorname{sen}\beta}p + \frac{\operatorname{sen}(t\beta)}{\operatorname{sen}\beta}q$$

DEMONSTRAÇÃO. Assuma primeiro que $p = 1$. Escrevendo $q = \cos\beta + (\operatorname{sen}\beta)q_0$, a fórmula em cima dá que

$$\varphi(t) = \cos(t\beta) + (\operatorname{sen}(t\beta))q_0.$$

Precisamos provar apenas que

$$\cos(t\beta) = \frac{\operatorname{sen}(1-t)\beta}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{\cos\beta\operatorname{sen}(t\beta)}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\operatorname{sen}(t\beta) = \frac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(t\beta)}{\operatorname{sen}\beta}.$$

A segunda afirmação está óbvia, a primeira pode ser verificada usando as identidades trigonomêtricas.

Assuma agora que q é arbitrário. Como multiplicação por q preserva ângulo, o ângulo entre p e q é o mesmo que entre 1 e pq^{-1}. Logo a interpolação esférica entre 1 e pq^{-1} está dada por

$$\varphi_0(t) = \frac{\operatorname{sen}(1-t)\beta}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{\operatorname{sen}(t\beta)}{\operatorname{sen}\beta}pq^{-1}.$$

Multplicando $\varphi_0(t)$ por q, obtemos a interpolação esférica entre p e q como

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen}(1-t)\beta}{\operatorname{sen}\beta}p + \frac{\operatorname{sen}(t\beta)}{\operatorname{sen}\beta}q.$$

$\square$

CAPíTULO 5

Espaços afins e projetivos

1. Espaços afins e transformações afins

Considere o espaço $\mathbb{R}^n$ mergulhado em $\mathbb{R}^{n+1}$ com a inclusão:

$$v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \overline{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$$

Lembre que o grupo AGL_n é o grupo de transformações que podemos obter pela composição de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ e uma translação em $\mathbb{R}^n$. Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear com matriz $X = [L]$ na base canônica. Seja $\bar{X}$ a matriz

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X & \underline{0}^t \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\underline{0}$ denota o vector nulo em $\mathbb{R}^n$. assum $\bar{X}$ é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$. A matriz $\bar{X}$ chama-se *matriz aumentada*. É fácil verificar que $L(v) = w$ se e somente se $\bar{X}\bar{v} = \bar{w}$.

Exemplo 5.1. Assuma que $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação por $\pi/4$ (por volta da origem). Então a sua matriz na base canônica é

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz aumentada que corresponde a T é

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora seja $b \in \mathbb{R}^n$ e defina a matriz

$$X_b = \begin{pmatrix} I & b^t \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere $v \in \mathbb{R}^n$. Temos que

$$X_b\bar{v} = \overline{v + b} = \overline{T_b(v)};$$

ou seja, multiplicação por X_b corresponde a translação pelo vetor b.

EXEMPLO 5.2. Seja $b = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$X_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, então $\bar{v} = (\alpha, \beta, 1)$ e

$$X_b\bar{v} = X_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta + 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{T_b(v)}.$$

Finalmente, se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear com matriz X (na base canônica) e $b \in \mathbb{R}^n$, então defina

$$X_{L,b} = \begin{pmatrix} X & b^t \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que

$$X_{L,b}\overline{v} = \overline{L(v) + b}.$$

Ou seja, multiplicação pela matriz $X_{L,b}$ corresponde a composição $T_b \circ L$ em AGL_n.

EXEMPLO 5.3. Assuma que $b = (-1, 2)$ e seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação por $\pi/4$ como no exemplo anterior. Então a matriz

$$X_{L,b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Então $\bar{v} = (\alpha, \beta, 1)$ e

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{L(v) + b}.$$

Sejam $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$, $L_1, L_2 \in \mathrm{GL}_n$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Então

$$(T_{b_1} \circ L_1) \circ (T_{b_2} \circ L_2)v = L_1L_2v + L_1b_2 + b_1 = T_{L_1b_2+b_1} \circ (L_1 \circ L_2).$$

Pode verificar que

$$X_{L_1,b_1}X_{L_2,b_2} = X_{L_1L_2,L_1b_2+b_1}.$$

TEOREMA 5.4. *O grupo AGL_n é isomorfo ao grupo de matrizes na forma*

$$\{X_{L,b} \mid L \in GL_n \text{ e } b \in \mathbb{R}^n\}.$$

O isomorfismo está dado por $T_b \circ L \mapsto X_{L,b}$.

2. Planos projetivos

DEFINIÇÃO 5.5. A reta projetiva $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é o conjunto das retas em $\mathbb{F}^2$ que passam pela origem. Uma reta $L_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{F}^2 \mid ax + by = 0\} \subseteq \mathbb{F}^2$ é chamado de *ponto* na reta projetiva $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$. Este ponto de $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ pode ser representato com as coordenadas $[a,b]$ Estes coordenadas são chamadas de coordenadas homgêneas. Note que $[a,b]$ representa um ponto em $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ se e somente se $(a,b) \neq (0,0)$ e $[\alpha a, \alpha b]$ representa a mesmo ponto que $[a,b]$ para todo $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Assim, todo ponto de $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ pode ser representado com as coordenadas

$$[1,b] \quad \text{ou} \quad [0,1]$$

com algum $b \in \mathbb{F}$. O ponto $[0,1]$ é frequentamente chamado de *ponto em infinito* e assim obtemos que $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ pode ser identificado com $\mathbb{F} \cup \{P_\infty\}$ onde $P_\infty = [0,1]$ é o ponto em infinito.

DEFINIÇÃO 5.6. Um plano projetivo Π consiste de um conjunto $\mathcal{P}$ de pontos, um conjunto $\mathcal{L}$ de linhas (ou retas) e uma relação de incidência $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tal que

(1) Se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ distintos, então existe uma linha única linha $L \in \mathcal{I}$ tal que $P_1 \in L$, $P_2 \in L$.
(2) Se $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, então existe um único ponto $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \in L_1$ e $P \in L_2$.
(3) Existem quatro pontos que nenhuma linha é incidente com mais que dois destes pontos.

EXEMPLO 5.7 (Plano Euclediano Estendido). Considere o plano $\mathbb{R}^2$ com os pontos e linhas usuais. (Ou seja, os pontos são $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e as linhas são conjuntos $\{(x,y) \mid ax + by = c\}$ com $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.) Considere a relação de equivalência $\sim$ entre linhas onde $L_1 \sim L_2$ se e somente se L_1 e L_2 são paralelas. Seja $[L]$ a classe de equivalência da linha L.

(1) Para cada classe $\ell = [L]$ introduza um novo ponto P_ℓ (ponto no infinito) e extenda a incidência em tal modo que $P_\ell \in L$ se e somente se $L \in \ell$.
(2) Introduza uma nova linha L_∞ em tal modo que L_∞ contem precisamente os pontos no infinito. A linha L_∞ chama-se a linha em infinito.

A geometria obtida por este processo chama-se *Plano Euclediano Estendido* e é denotado por $E\mathbb{R}^2$. Deixamos para o leitor a verificação que $E\mathbb{R}^2$ é um plano projetivo.

EXEMPLO 5.8. Seja $\mathbb{F}$ um corpo qualquer (pode tomar por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$), e considere o espaço $\mathbb{F}^3$. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das retas que passam pela origem, e seja $\mathcal{L}$ o conjunto dos planos que passam pela origem. Um ponto P é incidente com uma reta L, se $P \subseteq L$. É fácil verificar que $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ é um plano projetivo. Nós geralmente vamos considerar o plano $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

2.1. Coordenadas homogêneas. Considere o plano $E\mathbb{R}^2$ estendido. Introduzimos coordenadas homogêneas para pontos e retas.

(1) Seja $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. A tripla $[\lambda x, \lambda y, \lambda]$ é coordenada homogênea para p com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(2) Seja p um ponto em infinito que corresponde a uma classe paralela de linhas $ax+by+c=0$ com $a, b \in \mathbb{R}$ fixados. A tripla $[\lambda a, \lambda b, 0]$ é coordenada homogênea de p com qualquer $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(3) Seja ℓ uma reta a equação $ax + by + c = 0$. Então a tripla $[a, b, c]$ é coordenada homegênea para ℓ.
(4) Seja ℓ a reta no infnito. Então $[0, 0, \lambda]$ é coordenada homogênea de ℓ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

LEMA 5.9. *Todo ponto e toda reta em $E\mathbb{R}^2$ possui coordenadas homogêneas. Além disso $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ e $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ representam o mesmo ponto/reta se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\beta_i = \lambda\alpha_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue as definições. □

LEMA 5.10. *Seja p um ponto e ℓ uma reta representados pelas coordenadas $[a, b, c]$ e $[u, v, w]$. Temos que $p \in \ell$ se e somente se $[a, b, c] \cdot [u, v, w] = 0$. (produto escalar)*

DEMONSTRAÇÃO. Segue as definições. □

LEMA 5.11. *Assuma que $[u_1, v_1, w_1]$ e $[u_2, v_2, w_2]$ são retas distintas em $E\mathbb{R}^2$. Temos que as coordenadas homegeneas do único ponto na interseção das duas retas são dadas pelo produto vetorial $[u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Note que o produto misto

$$[u_1, v_1, w_1] \cdot ([u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2]) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_1 & v_2 \\ w_1 & w_1 & w_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Uma conta similar mostra que $[u_2, v_2, w_2] \cdot ([u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2]) = 0$. Então o ponto com coordenadas homogêneas $[u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2]$ está nas duas linhas. Pelos axiomas do plano projetivo, este é o único ponto nas duas retas.

Note que $[u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2] \neq [0, 0, 0]$ são retas distintas, e assim $[u_1, v_1, w_1]$ e $[u_2, v_2, w_2] \neq [0, 0, 0]$. □

LEMA 5.12. *Assuma que $[a_1, b_1, c_1]$ e $[a_2, b_2, c_2]$ são pontos distintos em $E\mathbb{R}^2$. Temos que as coordenadas homegeneas da única reta que passa por estes dois pontos são dadas pelo produto vetorial $[a_1, b_1, c_1] \times [a_2, b_2, c_2]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Igual ao lema anterior. □

LEMA 5.13. *Assuma que $p_1 = [a_1, b_1, c_1]$, $p_2 = [a_2, b_2, c_2]$ e $p_3 = [a_3, b_3, c_3]$ são pontos em $E\mathbb{R}^2$. Os pontos p_1, p_2, p_3 são collineares se e somente se*

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se $p_2 = p_3$, então os três pontos são collineares e o determinante no teorema é também igual a zero. Assuma que $p_2 \neq p_3$. Os pontos p_1, p_2, e p_3 são collineares se e somente se o ponto p_1 está na reta determinada por p_2 e p_3. Isso occorre se e somente se

$$0 = p_1 \cdot (p_2 \times p_3) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

□

LEMA 5.14. *Assuma que $\ell_1 = [u_1, v_1, w_1]$, $\ell_2 = [u_2, v_2, w_2]$ e $\ell_3 = [u_3, v_3, w_3]$ são retas em $E\mathbb{R}^2$. As retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 são concorrentes se e somente se*

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

2.2. Espaço estendido $E\mathbb{R}^3$. Considere $\mathbb{R}^3$. Para cada classe C de retas paralelas, introduza um ponto em infinito P_C e $P_C \in \ell$ para todo $\ell \in C$. Para classe D de planos paralelos, introduza uma reta ℓ_D em infinito tal que $\ell_D \in \Pi$ para todo $\Pi \in D$ e ℓ_D contém os pontos em infinito que são contidos nas retas de Π. Finalmente, introduza um plano Π_∞ em infinito que contém as retas em infinito.

As coordenadas homogêneas dos pontos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ são $[\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda]$ com $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se C é uma classe de retas paralelas, paralelo ao vetor (v_1, v_2, v_3), então as coordenadas homogêneas do ponto correspondente são $[v_1, v_2, v_3, 0]$. Um plano definida pela equação $ax+by+cz+d = 0$ tem coordenadas homogêneas $[a, b, c, d]$, enquanto o plano em infinito tem coordenadas homogêneas $[0, 0, 0, \lambda]$ com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

LEMA 5.15. *Sejam $p_1 = [a_1, b_1, c_1, d_1]$, $p_2 = [a_2, b_2, c_2, d_2]$, $p_3 = [a_2, b_2, c_2, d_2]$ pontos em $E\mathbb{R}^3$. Os pontos p_1, p_2, p_3 são collineares se e somente se os vetores são linearmente dependentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

Se $p_1 = [a_1, b_1, c_1, d_1]$, $p_2 = [a_2, b_2, c_2, d_2]$ são pontos distintos em $E\mathbb{R}^3$, então os pontos da reta determinada por p_1 e p_2 são os pontos com coordenadas $[a, b, c, d]$ tal que $[a, b, c, d]$ é uma combinação linear de $[a_1, b_1, c_1, d_1]$ e $[a_2, b_2, c_2, d_2]$. Assim a reta que passa pelos pontos p_1 e p_2 pode ser representada pela seguinte representação paramétrica:

$$\alpha[a_1, b_1, c_1, d_1] + \beta[a_2, b_2, c_2, d_2] \quad \text{onde} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{com} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

2.3. Coordenadas de Plücker. Seja $p_1 = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ e $p_2 = [y_1, y_2, y_3, y_4]$ dois pontos em $E\mathbb{R}^3$. Para $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, ponha

$$p_{i,j} = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$

As coordenadas de Plücker da reta que passa pelos pontos p_1 e p_2 são definidas como

$$[p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{3,4}, p_{4,2}, p_{2,3}].$$

LEMA 5.16. *As coordenadas de Plücker de uma reta são independentes da escolha dos pontos. Além disso, as entradas de uma 6-upla $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ são coordenadas de Plücker de uma reta de $E\mathbb{R}^3$ se e somente se*

$$ad + be + df = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $p_1 = [a_1, b_1, c_1, d_1]$ e $p_2 = [a_2, b_2, c_2, d_2]$ pontos em uma reta. Seja $q = \alpha[a_1.b_1, c_1, d_1]+\beta[a_2, b_2, c_2, d_2]$ um outro ponto na reta. Calclando as coordenadas $p_{i,j}$ usando os pontos p_1 e q obtemos que

$$p_{i,j} = \det \begin{pmatrix} a_i & \alpha a_i + \beta b_i \\ a_j & \alpha a_i + \beta b_i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_i & \beta b_i \\ a_j & \beta b_i \end{pmatrix}$$

que é β vezes a coordenada calculando usando os pontos p_1 e p_2.

Considere os pontos $p_1 = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ e $p_2 = [b_1, b_2, b_3, b_4]$. Sejam $(p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{3,4}, p_{4,2}, p_{2,3})$ as coordenadas de Plücker como em cima. Temos que

$$\begin{aligned}
&p_{1,2}p_{3,4} + p_{1,3}p_{4,2} + p_{1,4}p_{2,3} = \\
&(a_1b_2 - a_2b_1) \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} + (a_1b_3 - a_3b_1) \det \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + (a_1b_4 - a_4b_1) \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \\
&a_1 \left(b_2 \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} + b_3 \det \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + b_4 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \right) - \\
&b_1 \left(a_2 \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + a_4 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \right) = \\
&a_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 & b_4 \end{pmatrix} - b_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \\ a_4 & a_4 & b_4 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Agora assuma que $[a, b, c, d, e, f] \in \mathbb{R}^6$ such that $ad+bf+cg = 0$. Sejam $p_1 = [0, a, b, c]$, $p_2 = [-a, 0, f, -e]$, $p_3 = [-b, -f, 0, d]$, e $p_4 = [-c, e, -d, 0]$. Note que, em pelo menos dois casos $p_i \neq [0, 0, 0, 0]$. Afirmanos, que as coordenadas de Plücker da reta que passa pelos pontos p_i com $i \in \{1, \ldots, 4\}$ são $[a, , b, c, d]$. Vamos verificar para p_1 e p_2, deixamos o resto para o leitor. De fato as coordenadas de Plücker da reta que passa pelos pontos p_1 e p_2 são

$$[a^2, ba, da, -be - fc, af, ag] = a[a, b, c, d, e, f, g].$$

□

2.4. A reta dual. Assuma que $R = [p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{3,4}, p_{4,2}, p_{2,3}]$ é uma reta dada com coordenadas Plücker. A reta dual está dada por

$$R' = [p_{3,4}, p_{4,2}, p_{2,3}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}].$$

LEMA 5.17. *Assuma que $P_1 = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ e $P_2 = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ são dois planos em $E\mathbb{R}^3$. As coordenadas de Plücker da reta na interseção de P_1 e P_2 são $[p_{3,4}, p_{4,2}, p_{2,3}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}]$.*

DEMONSTRAÇÃO. Computatação. □

As coordenadas de Plücker são escritas frequentamente como $[m,d]$ onde $m=[p_{1,2},p_{1,3},p_{1,4}]$ e $d=[p_{3,4},p_{4,2},p_{2,3}]$ usando as coordenadas de Plücker, dá para fazer várias contas geométricas com pontos, retas, e planos.

LEMA 5.18. *As seguintes afirmações são válidas.*

(1) *Duas retas $R_1=[m,d]$ e $R_2=[m',p']$ são coplanares se e somente se $dm'+d'm=0$.*
(2) *Caso as retas R_1 e R_2 são coplanares e distintos, a equação do plano que passa por elas é*
$$(m\cdot d)x_0+(d\times d')\cdot(x_1,x_2,x_3)=0$$
(3) *Caso R_1 e R_2 são coplanares e distintos, o ponto de interseção delas é $[d\cdot m',m\times m']$.*
(4) *Seja $\mathcal{P}$ um plano com coordenadas $[a_0,a_1,a_1,a_3]=[a_0,a]$. O ponto de interseção de P e R_1 é $[a\cdot d,a\times m-a_0d]$.*
(5) *Se $P=[a_0,a]$ é um ponto, então as coordenadas homogêneas do plano que passa por P é R_1 são $[(y\cdot m)x_0+(y\times x-y_0m)]$. As coordenadas deste plano podem ser escritas também como $[b_1,b_2,b_3,b_4]$ onde*
$$b_i=\sum a_ip_{i,j}.$$