Geometria com aplicações na gráfica computacional

Folha 1 de exercícios

csaba@mat.ufmg.br

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja B uma base de V. Demonstre que a aplicação $V \to \mathbb{R}^n$ definida por $v \mapsto [v]_B$ é um isomorfismo linear (ou seja, uma aplicação linear injetiva e sobrejetiva).

2. Seja V um espaço vetorial com bases B e C. Demonstre que $[\mathrm{id}]_C^B = ([\mathrm{id}]_B^C)^{-1}$.

3. Sejam $T_1 : V \to U$ e $T_2 : U \to W$ transformações lineares, e sejam B, C, e D bases de V, U, e W, respetivamente. Mostre que

$$[T_2 \circ T_1]_D^B = [T_2]_D^C \cdot [T_1]_C^B.$$

4. Sejam Y_1 e Y_2 matrizes conjugadas. Demonstre as seguintes afirmações.

(1) $\det Y_1 = \det Y_2$.
(2) Y_1 e Y_2 têm os mesmos autovalores.
(3) Seja $Y_2 = XY_1X^{-1}$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$. Então v é um autovetor de Y_1 se e somente se Xv é autovetor de Y_2. Além disso v e Xv correspondem ao mesmo autovalor.

5. O traço $\mathrm{Tr}\, X$ de uma matriz quadrada X é a soma dos seus elementos diagonais.

(1) Mostre que $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ para toda matriz X, Y diagonal $n \times n$.
(2) Mostre que se X e Y são matrizes conjugadas, então $\mathrm{Tr}\, X = \mathrm{Tr}\, Y$.

[Obs.: A afirmação (2) segue também do exercício anterior.]

6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma matriz nilpotente não nula (ou seja T^k é a transformação nula com algum $k \geq 1$). Mostre que $T^2 = 0$ e existe uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$