Geometria com aplicações na gráfica computacional

Folha 5 de exercícios

csaba@mat.ufmg.br

1. Seja p um quatérnio unitário e $t \in \mathbb{R}$. Mostre que $(qp^t\bar{q}) = (qp\bar{q})^t$ onde $\bar{q}$ é o conjugado de q.

2. Mostre, para um quatérnio unitário q e $a, b \in \mathbb{R}$ que

$$q^a q^b = q^{a+b} \quad \text{e} \quad (q^a)^b = q^{ab}.$$

3. Verifique as seguintes igualdades para quatérnios unitários p e q:

(1) $\mathrm{slerp}(p, q, t) = p(\bar{p}q)^t$;
(2) $\mathrm{slerp}(p, q, t) = (p\bar{q})^{1-t}q$;
(3) $\mathrm{slerp}(p, q, t) = (q\bar{p})^t p$;
(4) $\mathrm{slerp}(p, q, t) = q(\bar{q}p)^{1-t}q$.

Deduza que $\mathrm{slerp}(p, q, t) = \mathrm{slerp}(q, p, 1 - t)$.

4. Mostre que a multiplicação entre dois quatérnios pode ser efetuada por apanas 8 multiplicações entre números reais. [Dica: Consulte Exercício 20 na página 112 do livro ”Fundamentos da Computação Gráfica”por Gomes e Velho.]

5. Assuma que r é um quatérnio puro e unitário. Considere o mapa $R : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definido por $q \mapsto rqr$.

(1) Mostre que $\langle i, j, k\rangle$ é um subespaço R-invariante.
(2) Mostre que a restrição de R para o suespaço $\mathbb{R}^3 = \langle i, j, k\rangle$ pode ser vista como a reflexão de $\mathbb{R}^3$ em relação ao plano perpendicular a r.

6. Uma matriz quadrada A com entradas complexas e dita unitária se $A^*A = I$ onde A^* é a conjugada transposta de A (ou seja, A^* é obtida de A por tomar a conjugada complexa de cada entrada e depois tomar a transposta.) Denote por SU_2 o grupo de matrizes unitárias 2×2 com determinante 1. Para cada quatérnio unitário $q = a + bi + cj + dk$, denote por A_q a matriz

$$\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}.$$

(1) Verifique que $A_q \in SU_2$.
(2) Verifique que ψ é um homomorfismo de grupos, ou seja $\psi(q_1q_2) = \psi(q_1)\psi(q_2)$.
(3) Demonstre que o mapa $\psi : q \mapsto A_q$ é uma bijeção entre o grupo de quatérnios unitários e SU_2.