ISOMETRIAS DE $\mathbb{R}^n$

1. Transformaes

Seja Ω um conjunto. Uma aplicao $f : \Omega \to \Omega$ chama-se uma *transformao* de Ω. A transformao f dita *injetiva* se $f(v) = f(w)$ implica $v = w$ para todo $v, w \in \Omega$; f chama-se *sobrejetiva* se para todo $w \in \Omega$ existe $v \in \Omega$ tal que $f(v) = w$. A transformao f chama-se *bijetiva* ou *invertvel* se ela injetiva e sobrejetiva. Se f uma transformao invertvel, ento existe a sua inversa $f^{-1} : \Omega \to \Omega$ definida pela regra que $f(v) = w$ se e somente se $f^{-1}(w) = v$ para todo $v, w \in \Omega$.

As transformaes de Ω podem ser compostas. Se $f, g : \Omega \to \Omega$ ento $f \circ g : \Omega \to \Omega$ definida como $(f \circ g)(v) = f(g(v))$ para todo $v \in \Omega$. A composio de transformaes associativa no sentido que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para todo $f, g, h : \Omega \to \Omega$.

Ns vamos estudar principalmente as transformaes do plano $\mathbb{R}^2$ e o espao $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1. Todo conjunto Ω tem a transformao identidade $\mathrm{id}_\Omega : \Omega \to \Omega$, $v \mapsto v$ para todo $v \in \Omega$. Se $f : \Omega \to \Omega$ uma transformao invertvel, ento $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\Omega$.

Exemplo 2. Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$. Uma transformao $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dita linear se

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w)$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Transformaes lineares so estudadas em lgebra linear. Uma transformao linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertvel se e somente se

$$\ker T = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = 0\} = \{0\}.$$

Exemplo 3. Seja $t \in \mathbb{R}^n$ e considere a transformao $T_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido como

$$T_t(v) = v + t.$$

A transformao T_t chamado *a translao de* $\mathbb{R}^n$ pelo vetor t. Note que se $t \neq 0$, ento T_t no linear, pois $T_t(0) = t \neq 0$. A transformao T_t invertvel e $T_t^{-1} = T_{-t}$.

2. Grupos

Seja G um conjunto no vazio com uma operao que pode ser denotada por $\cdot$ (ou por $+$, ou simplesmente por concatenao). Isso quer dizer que com cada par de elementos $a, b \in G$ associamos um elemento $a \cdot b \in G$. O conjunto G considerado com a operao $\cdot$ dito *grupo* se as seguintes propriedades esto vlidas para todo $a, b, c \in G$.

(1) A operao $\cdot$ associativa; ou seja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(2) Existe identidade $1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
(3) Todo elemento $a \in G$ possui inverso a^{-1} que satisfaz $a \cdot a^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Um grupo G dito *abeliano* ou *comutativo* se $ab = ba$ para todo $a, b \in G$.

Exemplo 4. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros um grupo abeliano com a operao de adio. A mesma coisa vale para $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Se V um espao vetorial, ento V um grupo abeliano com a operao de adio.

Ns vamos considerar dois tipos de grupos, nomeadamente grupos de transformaes e grupos de matrizes.

Exemplo 5. Seja $n \geq 1$, e seja G um conjunto no vazio de matrizes invertveis $n \times n$ tal que G fechado para multiplicao e se $X \in G$, ento $X^{-1} \in G$. Ento G um grupo com a multiplicao matricial. Um tal grupo G chamado um *grupo de matrizes* ou *grupo matricial*. Os primeiros exemplos de grupos matriciails so

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n &= \{X \text{ matriz } n \times n \mid X \text{ invertvel}\} \\ \mathrm{SL}_n &= \{X \in \mathrm{GL}_n \mid \det X = 1\}. \end{aligned}$$

Os conjuntos GL_n e SL_n so grupos. bvio que $\mathrm{SL}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ e neste caso dizemos que SL_n um subgrupo de GL_n e escrevemos que $\mathrm{SL}_n \leq \mathrm{GL}_n$.

Exemplo 6. Seja G um conjunto de transformaes invertveis de um conjunto Ω tal que G fechado para a composio e $T^{-1} \in G$ sempre quando $T \in G$. Neste caso G um grupo. Tal grupo chama-se um *grupo de transformaes*. Por exemplo seja $\Omega = V$ um espao vetorial de dimenso finita e considere

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(V) &= \{f : V \to V \mid f \text{ injetiva}\} \\ \mathrm{GL}(V) &= \{T : V \to V \mid T \text{ linear e invertvel}\} \\ \mathrm{SL}(V) &= \{T \in \mathrm{GL}(V) \mid \det T = 1\}. \end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{T}(V) = \{T_t \mid t \in V\}$ de um espao vetorial V um grupo pois $T_{t_1} \circ T_{t_2} = T_{t_1+t_2}$ e $T_t^{-1} = T_{-t}$ (ou seja este conjunto fechado para a composio e para os inversos). Como

$$T_{t_1} \circ T_{t_2} = T_{t_1+t_2} = T_{t_2+t_1} = T_{t_2} \circ T_{t_1},$$

temos que $\mathcal{T}(V)$ um grupo abeliano.

Lema 7. *Seja $t \in V$ e $X \in GL(V)$. Ento $XT_tX^{-1} = T_{X(t)}$.*

Demonstração. Seja $v \in V$ e computemos que

$$XT_tX^{-1}(v) = XT_t(X^{-1}(v)) = X(X^{-1}(v) + t) = v + X(t) = T_{X(t)}(v).$$

$\square$

Teorema 8. *Assuma que G um subgrupo de transformaes de $GL(V)$ e seja $\mathcal{T}$ o grupo de translaes. Ento o produto $\mathcal{T}G = \{T_tX \mid t \in V,\ X \in G\}$ um subgrupo de $Sym(V)$.*

Demonstração. Seja Y o conjunto de produtos no enunciado do teorema. Precisamos provar que Y fechado para a composio e para tomar inversos. Sejam $T_{t_1}X_1$ e $T_{t_2}X_2$. Ento temos que

$$(T_{t_1}X_1)(T_{t_2}X_2) = T_{t_1}X_1T_{t_2}(X_1^{-1}X_1)X_2 = T_{t_1}(X_1T_{t_2}X_1^{-1})X_1X_2 = (T_{t_1}T_{X_1(t_2)})(X_1X_2) \in Y.$$

Alm disso, temos que

$$(T_tX)^{-1} = X^{-1}T_t^{-1} = X^{-1}T_{-t} = X^{-1}T_{-t}XX^{-1} = T_{X^{-1}(-t)}X^{-1} \in Y.$$

□

3. Isometrias de $\mathbb{R}^n$

Considere o espao $\mathbb{R}^n$. Lembre que o produto escalar (ou produto interno) de dois vetores $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $w = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ definido como

$$v \cdot w = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

O produto escalar pode ser escrita usando multiplicao matricial como

$$v \cdot w = vw^t.$$

Usando o produto escalar, podemos definir a norma $\|v\|$ de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

A distncia entre dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ pode ser definida como

$$d(v, w) = \|v - w\|.$$

Alm disso, o cosseno do ngulo ϑ entre v e w definido como

$$\cos\vartheta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

Dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ so ortogonais se e somente se $v \cdot w = 0$.

Da definio da norma fica clara que a norma est determinada pelo produto escalar. De acrodo do lema seguinte, a norma determina o produto escalar.

Teorema 9 (Identidade de polarizao)**.** *Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$, ento*

$$v \cdot w = \frac{1}{2}\left(\|v + w\| - \|v\| - \|w\|\right).$$

Demonstração. Exerccio. □

Uma transformao $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preserva distncia (ou seja $d(T(v), T(w)) = d(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$) chama-se *isometria* de $\mathbb{R}^n$. Se T uma isometria e $T(v) = T(w)$, ento

$$0 = d(T(v), T(w)) = d(v, w);$$

ou seja $v = w$. Isso implica que uma isometria necessriamente injetiva. Vamos ver que isometrias so tambm sobrejetivas, mas neste momenta esta afirmao no to fcil de provar. Por outro lado, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria *linear*, ento ela injetiva e precisa ser sobrejetiva. Logo, as isometrias lineares so invertveis.

Exemplo 10. A translao $T_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria para todo $t \in \mathbb{R}^n$. De fato, temos para $v, w \in \mathbb{R}^n$ que

$$d(v + t, w + t) = \|v + t - (w + t)\| = \|v - w\| = d(v, w).$$

4. O grupo ortogonal

Teorema 11. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformao linear. As seguintes so equivalentes para T.*

(1) *T preserva o produto escalar; ou seja $T(v) \cdot T(w) = v \cdot w$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.*
(2) *T preserva a norma; ou seja $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$;*
(3) *T preserva a distncia $d(T(v), T(w)) = d(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. O fato que (1) implica (2) e que (2) implica (3) segue das definies da norma e da distncia. O fato que (3) implica (1) segue dos fatos que $\|v\| = d(v, 0)$, $T(0) = 0$ (T sendo linear) e da identidade de polarizao. □

Uma transformao linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ chama se *ortogonal* se T satisfaz uma (e ento todas) das propriedades no teorema anterior. Por definio, as transformaes ortogonais so exatamente as isometrias lineares do espao $\mathbb{R}^n$. Lembre que uma matriz X dita ortogonal se $X^t X = I$.

Teorema 12. *As seguintes afirmaes so verdadeiras.*

(1) *As transformaes ortogonais formam um subgrupo de $GL(V)$.*
(2) *Uma transformao $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal se e somente se sua matriz na base cannica ortogonal.*
(3) *O determinante de uma transformao ortogonal ± 1.*

Demonstração. (1) Pode mostrar com uma conta direta que a composio de duas transformaes ortogonais ortogonal e o inverso de uma transformao ortogonal tambm ortogonal.

(2) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria linear, ento T preserva a norma de vetores e o ngulo entre vetores. Como os vetores $e_1, \ldots, e_n$ na base cannica formam um sistema ortonormal, os vetores $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ tambm formam um sistema ortonormal. Isso quer dizer que $[T]_B^B$ uma matriz ortogonal.

Assuma agora que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformao linear tal que a sua matriz X na base cannica ortogonal. Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$. Ento

$$v \cdot w = vw^t = vX^t X w^t = (Xv^t)^t (Xw^t) = (Xv) \cdot (Xw) = T(v) \cdot T(w).$$

Ou seja, T preserva produto escalar e T uma isometria.

(3) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria. Temos que $\det T = \det X$ onde X a matriz de T na base cannica. Como X uma matriz ortogonal, temos que

$$1 = \det I = \det(X^t X) = \det(X^t) \det X = (\det X)^2$$

e segue que $\det T = \det X = \pm 1$. □

O grupo das transformaes ortogonais de $\mathbb{R}^n$ denotado por O_n. O subgrupo das transformaes ortogonais com determinante 1 denotado por SO_n. Os grupos O_n e SO_n so chamados *grupo ortogonal* e *grupo especial ortogonal*. Os elementos de SO_n so chamadas de *rotaes* enquanto os demais elementos de O_n so chamadas de *reflexes*.