OS QUATÉRNIOS E AS ROTAÇÕES EM $\mathbb{R}^3$

1. A álgebra dos quatérnios

Seja $\mathbb{H}$ o espaço vetorial de dimensão 4 gerado por $1, i, j, k$. Introduzimos uma multiplicação em $\mathbb{H}$ com a seguinte tabela de multiplicação:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Note que o conjunto $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ é um grupo para esta multiplicação. A multiplicação entre os elementos $1, i, j, k$ será estendida com a regra distributiva. Um elemento de $\mathbb{H}$ chama-se um *quatérnio* e e conjunto $\mathbb{H}$ chama-se a *álgebra dos quatérnios.* A seguinte lema é fácil de verificar por conta direta.

Lema 1. *A álgebra dos quatérnios é um espaço vetorial de dimensão* 4 *com uma multiplicação bem definida. Além disso, a multiplicação é associativa, possui elemento neutro (o elemento* 1*), mas não é comutativa. A estrutura satisfaz a lei distributiva:*

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3 \quad e \quad (q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3.$$

Todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ pode ser escrito unicamente na forma $q = \alpha_q + v_q$ onde $\alpha_q \in \mathbb{R}$ e $v_q \in \langle i, j, k\rangle$. Um quatérnio com $v_q = 0$ chama-se *escalar*, enquanto um quatérnio com $\alpha_q = 0$ chama-se *quatérnio puro.* Pode-se definir o produto escalar entre quatérnios como no espaço $\mathbb{R}^3$ pela regra

$$(p, q) = \alpha_p\alpha_q + \beta_p\beta_q + \gamma_p\gamma_q + \delta_p\delta_q$$

para todo $p = \alpha_p + \beta_p i + \gamma_p j + \delta_p k$ e $q = \alpha_q + \beta_q i + \gamma_q j + \delta_q k$. (O produto escalar será denotado por $(\cdot, \cdot)$ para não confundir com a multiplicacão.) Em relação com este produto escalar, os elementos 1, i, j, e k formam uma base ortonormal de $\mathbb{H}$. A norma de um quatérnio na forma $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ é definida como

$$\|q\| = \sqrt{(q, q)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2},$$

enquanto o conjugado $\bar{q}$ está definido como

$$\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta.$$

A norma e o conjugado entre quatérnios satisfaz propriedades similares que a norma e o conjugado para números complexos.

Date: 10 de outubro de 2022.

Lema 2. *As seguintes afirmações são verdadeiras para $q \in \mathbb{H}$.*

(1) $\alpha_q = (q + \bar{q})/2$;
(2) $v_q = (q - \bar{q})/2$;
(3) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ *e* $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ *(note a troca na ordem!)*;
(4) $\|q\| = 0$ *se e somente se* $q = 0$;
(5) $\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$;
(6) $\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$;
(7) $\|\alpha q\| = |\alpha| \|q\|$ *para* $\alpha \in \mathbb{R}$;
(8) $\|q\|^2 = q \cdot \bar{q}$.

Demonstração. Deixamos a maioria destas afirmações para exercício. Para (8), calculemos que

$$\begin{aligned} q \cdot \bar{q} &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \|q\|^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 3. *Seja $q = \alpha_q + v_q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Então q possui inverso multiplicativo e*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

Em outras palávras, $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ é grupo para a multiplicação.

Demonstração. Segue da afirmação (8) do lema anterior que

$$q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

□

Um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ chama-se *unitário* se $\|u\| = 1$.

Lema 4. *O elemento $1 \in \mathbb{H}$ é unitário, e se $q \in \mathbb{H}$ é unitário, então q^{-1} é unitário. Logo, os quatérnios unitários formam um grupo para a multiplicação. Além disso, se $q \in \mathbb{H}$ é unitário, então $q^{-1} = \bar{q}$.*

Para $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, defina o comutador

$$[q_1, q_2] = \frac{1}{2}(q_1 q_2 - q_2 q_1).$$

Lema 5. *O comutador satisfaz as seguintes propriedades para todo $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$:*

(1) $[q_1 + q_2, q_3] = [q_1, q_3] + [q_2, q_3]$ *e* $[q_1, q_2 + q_3] = [q_1, q_2] + [q_1, q_3]$ *(distributividade)*;
(2) $[q_1, q_1] = 0$ *e* $[q_1, q_2] = -[q_2, q_1]$ *(anti-comutatividade)*;
(3) $[[q_1, q_2], q_3] + [[q_2, q_3], q_1] + [[q_3, q_1], q_2] = 0$ *(identidade de Jacobi)*.

As identidades no lema anterior implicam que a estrutura $(\mathbb{H}, +, [\cdot, \cdot])$ é uma *álgebra de Lie*. Seja Q o espaço dos quatérnios puros. Então Q é um espaço vetorial de dimensão 3 gerado por i, j, e k. Note que Q não é fechado para o produto $\cdot$ entre os quatérnios (por exemplo $i \cdot i = i^2 = -1 \notin Q$), mas ele é fechado para o comutador. De fato, temos que $[i, j] = k$, $[j, k] = i$ e $[k, i] = j$. Ou seja, o comutador no espaço k comporta-se exatamente como o produto vetorial $\times$ sobre $\mathbb{R}^3$. Além disso, $[1, q] = 0$ para todo $q \in \mathbb{H}$.

Lema 6. *As seguintes propriedades são válidas para $q = \alpha_q + v_q$ e $p = \alpha_p + v_p$:*

(1) $[p, q] = [v_p, v_q]$;
(2) $p \cdot q = \alpha_p\alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + v_p \times v_q = \alpha_p\alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + [p, q]$;
(3) *Se p e q são quatérnios puros, então $p \cdot q = -(p, q) + p \times q = -(p, q) + [p, q]$.*
(4) *Se p e q são quatérnios puros ortogonais, então $p \cdot q = p \times q$.*
(5) *Se p é puro unitário, então $p^2 = -1$.*

Demonstração. (1)–(4) Uma conta usando as definições. Para provar (5), note que item (3) implica que

$$v^2 = -(v, v) + v \times v = -(v, v) = -\|v\|^2 = -1.$$

□

Se $q = \alpha_q + v_q \in \mathbb{H}$ com $v_q \neq 0$, então

$$q = \alpha_q + \|v_q\| \frac{v_q}{\|v_q\|} = \alpha_q + \beta_q u_q$$

onde u_q é um quatérnio puro unitário. Além disso, se $\|q\| = 1$, como $\alpha_q \perp v_q$,

$$1 = \|q\| = \alpha_q^2 + \beta_q^2$$

então

$$q = \cos\vartheta_q + \operatorname{sen}\vartheta_q u_q$$

com algum ângulo $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Teorema 7. *Todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ unitário pode ser escrito na forma*

$$\cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u$$

onde u é um quatérnio puro unitário. Além disso, se $q \neq 1$, então esta expressão é única.

Demonstração. If $v_q \neq 0$, então siga o processo antes do enunciado. Se $v_q = 0$, então toma $\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$ e u arbitrário. □

Lema 8. *Seja $u \in \mathbb{H}$ um quatérnio unitário. Então as aplicações*

$$L_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ L_u(q) = uq \quad e \quad R_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ R_u(q) = qu^{-1} = q\bar{u}$$

são transformações ortogonais de $\mathbb{H}$ com determinante 1; ou seja, L_u e R_u são rotações de $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

Demonstração. Pela distributividade da multiplicação, temos que L_u e R_u são transformações lineares. Além disso

$$\|L_u(q)\| = \|uq\| = \|u\|\|q\| = \|q\|$$

e obtém-se similarmente que $\|R_u(q)\| = \|q\|$; ou seja L_u e R_u preservam a norma. Nós já provamos que para uma transformação linear isso é equivalente a ser ortogonal. Precisamos ainda provar que $\det L_u = \det R_u = 1$. Escreva $u = \cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta u_0$ onde u_0 é quatérnio puro unitário. Neste caso $1 \perp u_0$ e escolha um quatérnio puro unitário v tal que $u_0 \perp v$ e seja $w = [u_0, v] = u_0 \times v$. Então temos que a matriz de L_u na base $1, u_0, v, w$ é

$$[L_{u_0}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de $L_u = (\cos\vartheta)I + (\operatorname{sen}\vartheta)L_{u_0}$ é

$$[L_u] = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Segue que L_u pode ser realizada como a composição de duas rotações: a primeira no plano $\langle 1, u\rangle$ e a segunda no plano $\langle v, w\rangle$ com ângulo ϑ. Temos que $\det L_u = (\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta)^2 = 1$. A computação para R_u é similar. Note que $u^{-1} = \bar{u} = \cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta u_0$ e a matriz de R_u na mesma base será

$$[R_u] = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Ou seja, R_u faz uma rotação no plano $\langle 1, u\rangle$ com ângulo $-\vartheta$ e uma rotação no plano $\langle v, w\rangle$ por ângulo ϑ. □

Teorema 9. *Seja $u = \cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0 \in \mathbb{H}$ um quatérnio unitário. Defina*

$$T_u : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad T_u(q) = uqu^{-1} = (L_u \circ R_u)(q).$$

Então $T_u(1) = 1$ e T_u induz uma rotação do espaço $\mathbb{R}^3 \cong \langle i, j, k\rangle$. O eixo desta rotação é u_0 e o seu ângulo é 2ϑ.

Demonstração. Primeiro

$$T_u(1) = u \cdot 1 \cdot u^{-1} = u \cdot u^{-1} = 1.$$

Além disso, T_u é uma composição de duas transformações ortogonais, e ela é ortigonal e temos ainda que $\det T_u = \det L_u \cdot \det R_u = 1$. Logo T_u é uma rotação de $\mathbb{H}$. Consequentemente, T_u preserva $Q = \langle i, j, k\rangle = \langle 1\rangle^{\perp}$. Além disso, T_u preserva a norma em Q e assim a restrição de T_u para Q é uma transformação ortogonal com determinante 1. Portanto T_u induz uma rotação em $\langle i,j,k\rangle$. O eixo desta rotação pode ser calculado por determinar um autovetor de T_u em $\langle i,j,k\rangle$ que corresponde ao autovalor 1. Mas note que

$$uu_0=(\cos\vartheta+(\operatorname{sen}\vartheta)u_0)u_0=u_0(\cos\vartheta+(\operatorname{sen}\vartheta)u_0)=(\cos\vartheta)u_0-\operatorname{sen}\vartheta=u_0u$$

e assim

$$T_u(u_0)=uu_0u^{-1}=u_0uu^{-1}=u_0$$

e obtemos que o eixo de T_u em $\langle i,j,k\rangle$ é u.

Finalmente, temos que verificar a afirmação sobre o ângulo. Escreva $u=\cos\vartheta+(\operatorname{sen}\vartheta)u_0$ onde u_0 é puro e unitário. Como na demonstração anterior, considere a base $1,u_0,v,w$ onde $v\in Q$ unitário ortogonal a u e $w=u\times v$. Como T_u é a composição de L_u e R_u, temos que a matriz de T_u nesta base é o produto das matrizes de L_u e R_u e assim

$$[T_u]=\begin{pmatrix}\cos\vartheta&-\operatorname{sen}\vartheta&0&0\\ \operatorname{sen}\vartheta&\cos\vartheta&0&0\\ 0&0&\cos\vartheta&-\operatorname{sen}\vartheta\\ 0&0&\operatorname{sen}\vartheta&\cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\vartheta&\operatorname{sen}\vartheta&0&0\\ -\operatorname{sen}\vartheta&\cos\vartheta&0&0\\ 0&0&\cos\vartheta&-\operatorname{sen}\vartheta\\ 0&0&\operatorname{sen}\vartheta&\cos\vartheta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&\cos(2\vartheta)&-\operatorname{sen}(2\vartheta)\\ 0&0&\operatorname{sen}(2\vartheta)&\cos(2\vartheta)\end{pmatrix}.$$

□

Corolário 10. *Toda rotação T de $\mathbb{R}^3=\langle i,j,k\rangle$ pode ser realizado como T_u com algum $u\in\mathbb{H}$ unitário. Além disso, se $u,v\in\mathbb{H}$ são unitários, então $T_u=T_v$ se e somente se $u=\pm v$.*

Demonstração. Seja u_0 o eixo de T e ϑ o ângulo da rotação. Toma

$$u=\cos(\vartheta/2)+(\operatorname{sen}(\vartheta/2))u_0.$$

Pelo teorema anterior, $T=T_u$.

Para provar a segunda afirmação, primeiro provaremos que $T_u=\mathrm{id}$ se e somente se $u=\pm1$. Primeiro, se $u=\pm1$, então $T_u=\mathrm{id}$. Assuma que $T_u=\mathrm{id}$. Assuma que $u,v\in\mathbb{H}$ são unitários e escreva $u=\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha u_0$. O ângulo da rotação é 2α. Temos que $T_u=\mathrm{id}$ se e somente se 2α é um múltiplo de 2π, ou seja $\alpha=0$ ou $\alpha=\pi$. Obtemos nos dois casos que $u=1$ ou $u=-1$. Assuma agora que $T_u=T_v$ com $u,v\in\mathbb{H}$ unitários. Temos que

$$\mathrm{id}=T_uT_v^{-1}=T_uT_{\bar v}=T_{u\bar v}.$$

Pelo afirmação anterior, $u\bar v=\pm1$ e assim $u=\pm v$. □

Corolário 11. *O grupo $SO(\mathbb{R}^3)$ das rotações de $\mathbb{R}^3$ pode ser identificado com a meia esfera $S^3\subseteq\mathbb{R}^4$. Dois elementos $u,v\in S^3$ representam a mesma rotação se e somente se $u=\pm v$.*

1.1. **A composição de rotações.** Sejam $u = \cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0$ e $v = \cos\beta + (\operatorname{sen}\beta)v_0$ quatérnios unitários. Note, para todo $x \in \mathbb{H}$ que

$$T_{uv}(x) = uvx(uv)^{-1} = uvxv^{-1}u^{-1} = T_u \circ T_v(x).$$

Logo,

$$T_{uv} = T_u \circ T_v.$$

Além disso, uv é quatérnio unitário e

$$\begin{aligned}
uv &= (\cos\vartheta + (\operatorname{sen}\vartheta)u_0)(\cos\beta + (\operatorname{sen}\beta)v_0)\\
&= \cos\vartheta\cos\beta + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta u_0v_0\\
&= \cos\vartheta\cos\beta + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(-(u_0,v_0) + u_0 \times v_0)\\
&= \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0) + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0 \times w_0\\
&= \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0) + w
\end{aligned}$$

com w puro (na útlima equação usamos que u_0, v_0 são puros e unitários). A parte constante de uv é $\cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0)$. Para escrever uv na forma $\cos\alpha + (\operatorname{sen}\alpha)w_0$, precisamos calcular $\|w\|$. Usando que u_0 e v_0 são ambos ortogonais a $u_0 \times v_0$, e que u_0, v_0 e $u_0 \times v_0$ são unitários, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 &= \|(\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0 \times v_0\|^2\\
&= ((\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0 \times v_0,\\
&= (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0 \times v_0)\\
&= \operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta\operatorname{sen}^2\vartheta + 2\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\\
&= \operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + (\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta + \cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)^2 + 2\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta(\cos\varphi - 1)\\
&= \operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2(\vartheta+\beta) + \frac{\cos^2(\vartheta-\beta) - \cos^2(\vartheta+\beta)}{2}(\cos\varphi - 1)
\end{aligned}$$

Então temos que

$$uv = w = \alpha_w + \beta_w w_0$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_w &= \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta(u_0,v_0) = \cos\vartheta\cos\beta - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta\cos\varphi\\
\beta_w &= \left(\operatorname{sen}^2\vartheta\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2(\vartheta+\beta) + \frac{\cos^2(\vartheta-\beta) - \cos^2(\vartheta+\beta)}{2}(\cos\varphi - 1)\right)^{1/2}\\
w_0 &= \frac{(\cos\vartheta\operatorname{sen}\beta)v_0 + (\cos\beta\operatorname{sen}\vartheta)u_0 + (\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\beta)u_0 \times v_0}{\beta_w}.
\end{aligned}$$

onde $w_0 = w/\|w\|$ é um quatérnio unitário puro.

Teorema 12. *Sejam* $R_1 = R(k_1, \vartheta_1)$ *e* $R_2 = R(k_2, \vartheta_2)$ *rotações de* $\mathbb{R}^3$ *e assuma que* $\|k_1\| = \|k_2\| = 1$ *e que* φ *é o ângulo entre* k_1 *e* k_2 *(ou seja,* $\cos\varphi = (k_1, k_2)$*). Então a composição* $R = R_1 \circ R_2$ *é uma rotação. O eixo de* R *é*

$$k = (\cos\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2)k_2 + (\cos\vartheta_2 \operatorname{sen}\vartheta_1)k_1 + (\operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2)k_1 \times k_2$$

e o ângulo de R *é o ângulo* ϑ *que satisfaz*

$$\begin{aligned}
\cos(\vartheta/2) &= \cos(\vartheta_1/2)\cos(\vartheta_2/2) - \operatorname{sen}(\vartheta_1/2)\operatorname{sen}(\vartheta_2/2)\cos\varphi \\
\operatorname{sen}(\vartheta/2) &= \|k\| \\
&= \Big(\operatorname{sen}^2(\vartheta_1/2)\operatorname{sen}^2(\vartheta_2/2)\operatorname{sen}^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2((\vartheta_1\vartheta_2)/2) \\
&\quad + \frac{\cos^2((\vartheta_1 - \vartheta_2)/2)) - \cos^2((\vartheta_1 + \vartheta_2)/2)}{2}(\cos\varphi - 1)\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$