

# OS QUATÉRNIOS E AS ROTAÇÕES EM $\mathbb{R}^3$

## 1. A ÁLGEBRA DOS QUATÉRNIOS

Seja  $\mathbb{H}$  o espaço vetorial de dimensão 4 gerado por  $1, i, j, k$ . Introduzimos uma multiplicação em  $\mathbb{H}$  com a seguinte tabela de multiplicação:

	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

Note que o conjunto  $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$  é um grupo para esta multiplicação. A multiplicação entre os elementos  $1, i, j, k$  será estendida com a regra distributiva. Um elemento de  $\mathbb{H}$  chama-se um *quatérnio* e o conjunto  $\mathbb{H}$  chama-se a *álgebra dos quatérnios*. A seguinte lema é fácil de verificar por conta direta.

**Lema 1.** *A álgebra dos quatérnios é um espaço vetorial de dimensão 4 com uma multiplicação bem definida. Além disso, a multiplicação é associativa, possui elemento neutro (o elemento 1), mas não é comutativa. A estrutura satisfaz a lei distributiva:*

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3 \quad e \quad (q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3.$$

Todo quatérnio  $q \in \mathbb{H}$  pode ser escrito unicamente na forma  $q = \alpha_q + v_q$  onde  $\alpha_q \in \mathbb{R}$  e  $v_q \in \langle i, j, k \rangle$ . Um quatérnio com  $v_q = 0$  chama-se *escalar*, enquanto um quatérnio com  $\alpha_q = 0$  chama-se *quatérnio puro*. Pode-se definir o produto escalar entre quatérnios como no espaço  $\mathbb{R}^3$  pela regra

$$(p, q) = \alpha_p\alpha_q + \beta_p\beta_q + \gamma_p\gamma_q + \delta_p\delta_q$$

para todo  $p = \alpha_p + \beta_pi + \gamma_pj + \delta_pk$  e  $q = \alpha_q + \beta_qi + \gamma_qj + \delta_qk$ . (O produto escalar será denotado por  $(\cdot, \cdot)$  para não confundir com a multiplicação.) Em relação com este produto escalar, os elementos  $1, i, j, k$  formam uma base ortonormal de  $\mathbb{H}$ . A norma de um quatérnio na forma  $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$  é definida como

$$\|q\| = \sqrt{(q, q)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2},$$

enquanto o conjugado  $\bar{q}$  está definido como

$$\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k.$$

A norma e o conjugado entre quatérnios satisfaz propriedades similares que a norma e o conjugado para números complexos.

**Lema 2.** *As seguintes afirmações são verdadeiras para  $q \in \mathbb{H}$ .*

- (1)  $\alpha_q = (q + \bar{q})/2$ ;
- (2)  $v_q = (q - \bar{q})/2$ ;
- (3)  $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$  e  $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$  (note a troca na ordem!);
- (4)  $\|q\| = 0$  se e somente se  $q = 0$ ;
- (5)  $\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$ ;
- (6)  $\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$ ;
- (7)  $\|\alpha q\| = |\alpha| \|q\|$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- (8)  $\|q\|^2 = q \cdot \bar{q}$ .

*Demonstração.* Deixamos a maioria destas afirmações para exercício. Para (8), calculemos que

$$\begin{aligned} q \cdot \bar{q} &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \|q\|^2. \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.** *Seja  $q = \alpha_q + v_q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ . Então  $q$  possui inverso multiplicativo e*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

*Em outras palavras,  $\mathbb{H} \setminus \{0\}$  é grupo para a multiplicação.*

*Demonstração.* Segue da afirmação (8) do lema anterior que

$$q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

□

Um quaternio  $q \in \mathbb{H}$  chama-se *unitário* se  $\|u\| = 1$ .

**Lema 4.** *O elemento  $1 \in \mathbb{H}$  é unitário, e se  $q \in \mathbb{H}$  é unitário, então  $q^{-1}$  é unitário. Logo, os quaternios unitários formam um grupo para a multiplicação. Além disso, se  $q \in \mathbb{H}$  é unitário, então  $q^{-1} = \bar{q}$ .*

Para  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ , defina o comutador

$$[q_1, q_2] = \frac{1}{2}(q_1 q_2 - q_2 q_1).$$

**Lema 5.** *O comutador satisfaz as seguintes propriedades para todo  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ :*

- (1)  $[q_1 + q_2, q_3] = [q_1, q_3] + [q_2, q_3]$  e  $[q_1, q_2 + q_3] = [q_1, q_2] + [q_1, q_3]$  (distributividade);
- (2)  $[q_1, q_1] = 0$  e  $[q_1, q_2] = -[q_2, q_1]$  (anti-comutatividade);
- (3)  $[[q_1, q_2], q_3] + [[q_2, q_3], q_1] + [[q_3, q_1], q_2] = 0$  (identidade de Jacobi).

As identidades no lema anterior implicam que a estrutura  $(\mathbb{H}, +, [\cdot, \cdot])$  é uma *álgebra de Lie*. Seja  $Q$  o espaço dos quatérnios puros. Então  $Q$  é um espaço vetorial de dimensão 3 gerado por  $i, j$ , e  $k$ . Note que  $Q$  não é fechado para o produto  $\cdot$  entre os quatérnios (por exemplo  $i \cdot i = i^2 = -1 \notin Q$ ), mas ele é fechado para o comutador. De fato, temos que  $[i, j] = k$ ,  $[j, k] = i$  e  $[k, i] = j$ . Ou seja, o comutador no espaço  $k$  comporta-se exatamente como o produto vetorial  $\times$  sobre  $\mathbb{R}^3$ . Além disso,  $[1, q] = 0$  para todo  $q \in \mathbb{H}$ .

**Lema 6.** *As seguintes propriedades são válidas para  $q = \alpha_q + v_q$  e  $p = \alpha_p + v_p$ :*

- (1)  $[p, q] = [v_p, v_q]$ ;
- (2)  $p \cdot q = \alpha_p \alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + v_p \times v_q = \alpha_p \alpha_q - (v_p, v_q) + \alpha_p v_q + \alpha_q v_p + [p, q]$ ;
- (3) *Se  $p$  e  $q$  são quatérnios puros, então  $p \cdot q = -(p, q) + p \times q = -(p, q) + [p, q]$ .*
- (4) *Se  $p$  e  $q$  são quatérnios puros ortogonais, então  $p \cdot q = p \times q$ .*
- (5) *Se  $p$  é puro unitário, então  $p^2 = -1$ .*

*Demonstração.* (1)–(4) Uma conta usando as definições. Para provar (5), note que item (3) implica que

$$v^2 = -(v, v) + v \times v = -(v, v) = -\|v\|^2 = -1.$$

□

Se  $q = \alpha_q + v_q \in \mathbb{H}$  com  $v_q \neq 0$ , então

$$q = \alpha_q + \|v_q\| \frac{v_q}{\|v_q\|} = \alpha_q + \beta_q u_q$$

onde  $u_q$  é um quatérnio puro unitário. Além disso, se  $\|q\| = 1$ , como  $\alpha_q \perp v_q$ ,

$$1 = \|q\|^2 = \alpha_q^2 + \beta_q^2$$

então

$$q = \cos \vartheta_q + \sin \vartheta_q u_q$$

com algum ângulo  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ .

**Teorema 7.** *Todo quatérnio  $q \in \mathbb{H}$  unitário pode ser escrito na forma*

$$\cos \vartheta + (\sin \vartheta)u$$

*onde  $u$  é um quatérnio puro unitário. Além disso, se  $q \neq 1$ , então esta expressão é única.*

*Demonstração.* If  $v_q \neq 0$ , então siga o processo antes do enunciado. Se  $v_q = 0$ , então toma  $\vartheta = 0$  ou  $\vartheta = \pi$  e  $u$  arbitrário. □

**Lema 8.** *Seja  $u \in \mathbb{H}$  um quatérnio unitário. Então as aplicações*

$$L_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad L_u(q) = uq \quad \text{e} \quad R_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad R_u(q) = qu^{-1} = q\bar{u}$$

*são transformações ortogonais de  $\mathbb{H}$  com determinante 1; ou seja,  $L_u$  e  $R_u$  são rotações de  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ .*

*Demonstração.* Pela distributividade da multiplicação, temos que  $L_u$  e  $R_u$  são transformações lineares. Além disso

$$\|L_u(q)\| = \|uq\| = \|u\|\|q\| = \|q\|$$

e obtém-se similarmente que  $\|R_u(q)\| = \|q\|$ ; ou seja  $L_u$  e  $R_u$  preservam a norma. Nós já provamos que para uma transformação linear isso é equivalente a ser ortogonal. Precisamos ainda provar que  $\det L_u = \det R_u = 1$ . Escreva  $u = \cos \vartheta + \operatorname{sen} \vartheta u_0$  onde  $u_0$  é quaternião puro unitário. Neste caso  $1 \perp u_0$  e escolha um quaternião puro unitário  $v$  tal que  $u_0 \perp v$  e seja  $w = [u_0, v] = u_0 \times v$ . Então temos que a matriz de  $L_u$  na base  $1, u_0, v, w$  é

$$[L_{u_0}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a matriz de  $L_u = (\cos \vartheta)I + (\operatorname{sen} \vartheta)L_{u_0}$  é

$$[L_u] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\operatorname{sen} \vartheta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\operatorname{sen} \vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Segue que  $L_u$  pode ser realizada como a composição de duas rotações: a primeira no plano  $\langle 1, u \rangle$  e a segunda no plano  $\langle v, w \rangle$  com ângulo  $\vartheta$ . Temos que  $\det L_u = (\cos^2 \vartheta + \operatorname{sen}^2 \vartheta)^2 = 1$ . A computação para  $R_u$  é similar. Note que  $u^{-1} = \bar{u} = \cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta u_0$  e a matriz de  $R_u$  na mesma base será

$$[R_u] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \operatorname{sen} \vartheta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\operatorname{sen} \vartheta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Ou seja,  $R_u$  faz uma rotação no plano  $\langle 1, u \rangle$  com ângulo  $-\vartheta$  e uma rotação no plano  $\langle v, w \rangle$  por ângulo  $\vartheta$ .  $\square$

**Teorema 9.** *Seja  $u = \cos \vartheta + (\operatorname{sen} \vartheta)u_0 \in \mathbb{H}$  um quaternião unitário. Defina*

$$T_u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad T_u(q) = uqu^{-1} = (L_u \circ R_u)(q).$$

*Então  $T_u(1) = 1$  e  $T_u$  induz uma rotação do espaço  $\mathbb{R}^3 \cong \langle i, j, k \rangle$ . O eixo desta rotação é  $u_0$  e o seu ângulo é  $2\vartheta$ .*

*Demonstração.* Primeiro

$$T_u(1) = u \cdot 1 \cdot u^{-1} = u \cdot u^{-1} = 1.$$

Além disso,  $T_u$  é uma composição de duas transformações ortogonais, e ela é ortogonal e temos ainda que  $\det T_u = \det L_u \cdot \det R_u = 1$ . Logo  $T_u$  é uma rotação de  $\mathbb{H}$ . Consequentemente,  $T_u$  preserva  $Q = \langle i, j, k \rangle = \langle 1 \rangle^\perp$ . Além disso,  $T_u$  preserva a norma em  $Q$  e assim a

restrição de  $T_u$  para  $Q$  é uma transformação ortogonal com determinante 1. Portanto  $T_u$  induz uma rotação em  $\langle i, j, k \rangle$ . O eixo desta rotação pode ser calculado por determinar um autovetor de  $T_u$  em  $\langle i, j, k \rangle$  que corresponde ao autovalor 1. Mas note que

$$uu_0 = (\cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0)u_0 = u_0(\cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0) = (\cos \vartheta)u_0 - \sin \vartheta = u_0u$$

e assim

$$T_u(u_0) = uu_0u^{-1} = u_0uu^{-1} = u_0$$

e obtemos que o eixo de  $T_u$  em  $\langle i, j, k \rangle$  é  $u$ .

Finalmente, temos que verificar a afirmação sobre o ângulo. Escreva  $u = \cos \vartheta + (\sin \vartheta)u_0$  onde  $u_0$  é puro e unitário. Como na demonstração anterior, considere a base  $1, u_0, v, w$  onde  $v \in Q$  unitário ortogonal a  $u$  e  $w = u \times v$ . Como  $T_u$  é a composição de  $L_u$  e  $R_u$ , temos que a matriz de  $T_u$  nesta base é o produto das matrizes de  $L_u$  e  $R_u$  e assim

$$\begin{aligned} [T_u] &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\vartheta) & -\sin(2\vartheta) \\ 0 & 0 & \sin(2\vartheta) & \cos(2\vartheta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Corolário 10.** *Toda rotação  $T$  de  $R^3 = \langle i, j, k \rangle$  pode ser realizado como  $T_u$  com algum  $u \in \mathbb{H}$  unitário.*

*Demonstração.* Seja  $u_0$  o eixo de  $T$  e  $\vartheta$  o ângulo da rotação. Toma

$$u = \cos(\vartheta/2) + (\sin(\vartheta/2))u_0.$$

Pelo teorema anterior,  $T = T_u$ .

□