TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS EM 2D E 3D

1. O plano (2D)

1.1. **Realização matricial.** Lembre que a matriz da reflexão R_t pelo eixo que tem ângulo α pelo eixo x é

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha). \end{pmatrix}$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal e seja e_1, e_2 a base canônica. A matriz de T tem os vetores $f_1 = T(e_1)$ e $f_2 = T(e_2)$ nas colunas. Pela ortogonalidade de T, f_1 e f_2 formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Assuma que $f_1 = (a, b)$ com $\|f_1\| = a^2 + b^2 = 1$. Então $f_2 = (-b, a)$ ou $b_2 = (b, -a)$. Escolha um ângulo α tal que $a = \cos\alpha$ e $b = \operatorname{sen}\alpha$. Então a matriz $[T]$ de T tem duas possíveis formas:

$$\text{Caso I: } [T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{Caso II: } [T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Seja

Lema 1. *No primeiro caso T é a rotação Rot_α pelo ângulo α. No segundo caso, T é a reflexão $Ref_{\alpha/2}$ pelo eixo que tem ângulo $\alpha/2$ com o eixo x.*

Lema 2. *Temos as seguintes regras para a composição de rotações e reflexões.*

(1) $Rot_\alpha \circ Rot_\beta = Rot_{\alpha+\beta}$;
(2) $Ref_\alpha \circ Ref_\beta = Rot_{2(\alpha-\beta)}$;
(3) $Rot_\alpha \circ Ref_\beta = Ref_{\beta+\alpha/2}$;
(4) $Ref_\alpha \circ Rot_\beta = Ref_{\alpha-\beta/2}$.

Demonstração. (1) é exercício. Demonstremos (2). Seja $v \in \mathbb{R}^2$ e calculemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ref}_\alpha \circ \mathrm{Ref}_\beta(v) &= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \operatorname{sen}(2\beta) \\ \operatorname{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} v \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) & \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) - \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\beta) \\ \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) & \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) + \cos(2\alpha)\cos(2\beta) \end{pmatrix} v \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2(\alpha-\beta)) & -\operatorname{sen}(2(\alpha-\beta)) \\ \operatorname{sen}(2(\alpha-\beta)) & \cos(2(\alpha-\beta)) \end{pmatrix} v \\
&= \mathrm{Rot}_{2(\alpha-\beta)}(v)
\end{aligned}$$

(3) Temos que

$$\mathrm{Ref}_{\beta+\alpha/2} \circ (\mathrm{Ref}_\beta)^{-1} = \mathrm{Ref}_{\beta+\alpha/2} \circ (\mathrm{Ref}_\beta) = \mathrm{Rot}_{2(\beta-\alpha-\beta)} = \mathrm{Rot}_\alpha$$

que implica afirmação (3). A demonstração de (4) é similar à demonstração de (3). $\square$

Exemplo 3. Seja $\alpha \in [0, 2\pi)$ e considere $\mathrm{Rot}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação por ângulo α ao redor da origem. Os autovalores de Rot_α são raízes do polinômio caraterístico

$$\begin{aligned}\det(t \cdot \mathrm{id} - \mathrm{Rot}_\alpha) &= \det \begin{pmatrix} t - \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & t - \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= (t - \cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = t^2 - 2t\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \\ &= t^2 - 2t\cos\alpha + 1.\end{aligned}$$

As raízes deste polinômio são $z = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e $\bar{z} = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$. Isso quer dizer que o ângulo da rotação pode ser determinado pelos autovalores da transformação. Mais precisamente o ãngulo da rotação é α onde $\cos\alpha = (z + \bar{z})/2$ e $\operatorname{sen}\alpha = (z - \bar{z})/(2i)$.

th:recog **Teorema 4.** *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal com dois autovalores $z, \bar{z}$ onde $z \in \mathbb{C}$ e $\|z\| = 1$. Então T é uma rotação por ângulo α onde $\cos\alpha = (z + \bar{z})/2$ e $\operatorname{sen}\alpha = (z - \bar{z})/(2i)$.*

Demonstração. Note que $\det T = z\bar{z} = 1$ e pelas considerações anteriores, T é uma rotação. Logo, a matriz de T está na forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Usando a computação no exemplo anterior, os autovalores z e $\bar{z}$ são $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$ e segue a afirmação. $\square$

1.2. **Realização com números complexos.** O vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pode ser identificado com o número complexo $\alpha + i\beta$. Cada número complexo z pode ser escrito como $z = \|z\|(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$ onde α é o ângulo (frequentamente chamado de argumento) que corresponde a z e $\alpha \in [0, 2\pi)$. Um número complexo z com $\|z\| = 1$ tem a forma $z = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$. Pela fórmula de Euler,

$$\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha} = \exp(i\alpha)$$

O conjugado de um número $z = \alpha + \beta i$ é $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Lema 5. *(1) Seja $z_\alpha = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$. A aplicação*

$$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad T(z) = z_\alpha \cdot z$$

corresponde a rotação Rot_α pelo ângulo α (em torno da origem).

(2) Seja T a reflexão pelo eixo que tem ângulo α com o eixo x. Então

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z}$$

Demonstração. (1) Seja $z = \|z\|(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta)$. Então

$$\begin{aligned} z_\alpha \cdot z &= \|z\|(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + i(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ &= \|z\|(\cos(\alpha + \beta) + i(\cos\alpha + \beta)).\end{aligned}$$

(2) Claramente $\mathrm{Ref}_0(z) = \bar{z}$. Então

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z} = \mathrm{Rot}_{2\alpha}\mathrm{Ref}_0(z) = \mathrm{Ref}_\alpha(z).$$

$\square$

1.3. **Os grupos $O(\mathbb{R}^2) = O_2$ e $SO(\mathbb{R}^2) = SO_2$.** Considere o circulo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} = \{\exp(i\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Temos que S^1 é um grupo para a operação de multiplicação. Considere a aplicação

$$\psi : S^1 \to SO(\mathbb{R}^2), \quad \exp(i\alpha) \mapsto \mathrm{Rot}_\alpha.$$

Teorema 6. *Temos que ψ é uma aplicação invertível e*

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) \circ \psi(z_2).$$

Ou seja, ψ é um isomorfismo entre os grupos S^1 e SO_3.

Demonstração. Se $\psi(\exp(i\alpha)) = \psi(i\beta)$ então $\mathrm{Rot}_\alpha = \mathrm{Rot}_\beta$ e, como $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\alpha = \beta$. Logo ψ é injetivo. Claramente, $\mathrm{Rot}_\alpha = \psi(\exp(i\alpha))$ e assim ψ é sobrejetivo. Agora,

$$\begin{aligned}\psi(\exp(i\alpha)\exp(i\beta)) &= \psi(\exp(i(\alpha+\beta))) = \mathrm{Rot}_{\alpha+\beta} = \mathrm{Rot}_\alpha \circ \mathrm{Rot}_\beta \\ &= \psi(\exp(i\alpha)) \circ \psi(\exp(i\beta))\end{aligned}$$

$\square$

Note que o grupo SO_3 pode ser identificado também com o grupo $[0, 2\pi)$ com a operação de adição feita "módulo 2π".

Lema 7. *Seja $T \in O_2$ uma reflexão. Então $O_2 = SO_2 \cup tSO_2$. Além disso qualquer rotação pode ser escrita como uma composição de duas reflexões.*

Demonstração. Exercício. $\square$

2. O espaço 3D

Exercício 8. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação ortogonal e $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T. Mostre que $|\lambda| = 1$. Mostre que se v_1 é um autovetor de T com autovalor 1 e u é um autovetor de T com autovalor -1, então u e v são ortogonais ($u \cdot v = 0$).*

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação ortogonal. Nós já vimos que $\det T = \pm 1$. A transformação T possui três autovalores (possívelmente complexos) não necessáriamente distintos. Além disso, se $z \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T, então $\|z\| = 1$ e $\bar{z} \in \mathbb{C}$ é também um autovalor de T. As possibilidades para os autovalores são os seguintes.

$$\begin{aligned}
\text{Caso I :} & 1, 1, 1;\\
\text{Caso II :} & 1, 1, -1;\\
\text{Caso III :} & 1, -1, -1;\\
\text{Caso IV :} & 1, z, \bar{z} \text{ com algum } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R};\\
\text{Caso V :} & -1, -1, -1;\\
\text{Caso VI :} & -1, z, \bar{z} \text{ com algum } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercício 9. *Dê exemplos de transformações de todos os tipos.*

2.1. **Rotações em 3D.**

Teorema 10. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação ortogonal com $\det T = 1$. Então existe uma base v_1, v_2, v_3 ortonormal de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz de T está na forma*

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Logo, a transformação T é a rotação por ângulo α pelo eixo v_1.

Demonstração. Se os autovalores são $1, 1, 1$, então a transformação é a identidade e podemos tomar a base canônica e $\alpha = 0$. Se os autovalores são $1, -1, -1$ então toma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores e $\alpha = \pi$.

Agora assuma que os autovetores de T são $1, z, \bar{z}$ com algum $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Seja v_1 um autovetor de T com autovalor 1 (ou seja $T(v_1) = v_1$). Como T preserva o subespaço $\langle v_1 \rangle$, T preserva também o subespaço $U = \langle v_1 \rangle^\perp$. Note que $\dim U = 2$ e seja v_2, v_3 uma base ortonormal de U. Então v_1, v_2, v_3 é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Seja T_1 a restrição de T para U. Então T_1 preserva o produto escalar em U e assim induz uma transformação ortogonal em U com autovalores z e $\bar{z}$. Pelo Teorema th:recog 4, T_1 é uma rotação com um ângulo α determinado por z e $\bar{z}$. A matriz de T na base v_1, v_2, v_3 é na forma desejada, e T é a rotação por ângulo α pelo eixo v_1. □

Uma transformação ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com determinante 1 é uma rotação. Pelas considerações anteriores, as possíveis autovetores de uma rotação são $1, 1, 1$ ou $1, -1, -1$, ou $1, z, \bar{z}$ onde $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ com $\|z\| = 1$.

Temos em particular as rotações Rot^x_α, Rot^y_β e Rot^z_γ por ãngulos α, β e γ em torno dos eixos x, y, e z respetivamente. As matrizes destas rotações na base canônica são

$$[\mathrm{Rot}^x_\alpha] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{Rot}^y_\beta] = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{Rot}^y_\beta] = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma & 0 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. **A fórmula de Rodrigues.** Seja $k \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário e $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Considere a rotação $R = R(k, \vartheta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pelo ângulo ϑ ao redor do eixo $k = (k_x, k_y, k_z)$. Seja

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 11. *Seja $v \in \mathbb{R}^3$. Então $k \times v = Kv$. Em particular, $Kk = 0$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} k \times v &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ k_x & k_y & k_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = (k_y v_z - k_z v_y, -k_x v_z + k_z v_x, k_x v_y - k_y v_x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ora, $Kk = k \times k = 0$. ☐

Lema 12. *A matriz da rotação $R = R(k, \vartheta)$ na base canônica é*

$$[R] = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2 = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)k^t k$$

Demonstração. Escolha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ na forma k, u, v em tal forma que $k \times u = v$, $u \times v = k$ e $v \times k = u$ e seja $X = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2$. Como $Kk = K^2 k = 0$, temos que

$$Xk = (I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2)k = Ik = k.$$

Agora

$$\begin{aligned} Xu &= (I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1 - \cos\vartheta)K^2)u = u + (\operatorname{sen}\vartheta)v - (1 - \cos\vartheta)u \\ &= (\cos\vartheta)u + (\operatorname{sen}\vartheta)v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Xv &= (I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)K^2)v = v - (\operatorname{sen}\vartheta)u - (1-\cos\vartheta)v \\ &= -(\operatorname{sen}\vartheta)u + (\cos\vartheta)v \end{aligned}$$

Logo a matriz de R na base k, u, v é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Portanto $[R] = X$. Para provar a segunda igualdade do lema, note que $\|k\| = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$ e assim

$$\begin{aligned} K^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k_z^2 - k_y^2 & k_y k_x & k_z k_x \\ k_x k_y & -k_z^2 - k_x^2 & k_z k_y \\ k_x k_z & k_y k_z & -k_y^2 - k_x^2 \end{pmatrix} = k^t \cdot k - I \end{aligned}$$

Logo a matriz de R é

$$\begin{aligned} X &= I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos)K^2 = I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)(k^t \cdot k - I) \\ &= (\cos\vartheta)I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)k^t \cdot k \end{aligned}$$

□

Corolário 13. *A matriz de $R(k, \vartheta)$ é*

$$\begin{pmatrix} (1-\cos\vartheta)k_x^2 + \cos\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_x k_y - k_z \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_x k_z + k_y \operatorname{sen}\vartheta \\ (1-\cos\vartheta)k_x k_y + k_z \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_y^2 + \cos\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_y k_z - k_x \operatorname{sen}\vartheta \\ (1-\cos\vartheta)k_x k_z - k_y \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_y k_z + k_x \operatorname{sen}\vartheta & (1-\cos\vartheta)k_z^2 + \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Apenas escreva a matriz $(\cos\vartheta)I + (\operatorname{sen}\vartheta)K + (1-\cos\vartheta)k^t \cdot k$. □

Corolário 14. *Dada a matriz X da rotação $R(k, \vartheta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Temos que*

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arccos \frac{X_{11} + X_{22} + X_{33} - 1}{2} \\ k_x &= \frac{X_{32} - X_{23}}{2 \operatorname{sen}\vartheta}; \\ k_y &= \frac{X_{13} - X_{31}}{2 \operatorname{sen}\vartheta}; \\ k_z &= \frac{X_{21} - X_{12}}{2 \operatorname{sen}\vartheta}. \end{aligned}$$

2.3. **A decomposição ZXZ.** Dada uma rotação $R = R(k, \alpha)$, ela pode ser escrita como produto de rotações elementares. Uma decomposição comum é escrever R na forma $R(z, \psi)R(y, \vartheta)R(x, \varphi)$. Escrevendo o produto matricial, obtemos que a matriz da composição $R(z, \psi)R(y, \vartheta)R(x, \varphi)$ é

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\cos\psi & \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta\operatorname{sen}\psi & \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\psi \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Se temos a matriz $X_{i,j}$ de R, então os ângulos φ, ϑ, ψ podem ser obtidos.

2.4. **A decomposição ZXZ.** Uma outra decomposição comum de R é escrever R na forma $R = R(z, \psi)R(x, \vartheta)R(z, \varphi)$. Multiplicando as matrizes, obtemos que a matriz desta composição é

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi & -\cos\psi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\vartheta \\ \cos\psi\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi\cos\varphi & \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi & -\cos\psi\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$