TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS EM 2D E 3D

1. O plano (2D)

1.1. **Realização matricial.** Lembre que a matriz da reflexão R_t pelo eixo que tem ângulo α pelo eixo x é

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha). \end{pmatrix}$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação ortogonal e seja e_1, e_2 a base canônica. A matriz de T tem os vetores $f_1 = T(e_1)$ e $f_2 = T(e_2)$ nas colunas. Pela ortogonalidade de T, f_1 e f_2 formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Assuma que $f_1 = (a, b)$ com $\|f_1\| = a^2 + b^2 = 1$. Então $f_2 = (-b, a)$ ou $b_2 = (b, -a)$. Escolha um ângulo α tal que $a = \cos\alpha$ e $b = \operatorname{sen}\alpha$. Então a matriz $[T]$ de T tem duas possíveis formas:

$$\text{Caso I: } [T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{Caso II: } [T] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Seja

Lema 1. *No primeiro caso T é a rotação Rot_α pelo ângulo α. No segundo caso, T é a reflexão $Ref_{\alpha/2}$ pelo eixo que tem ângulo $\alpha/2$ com o eixo x.*

Lema 2. *Temos as seguintes regras para a composição de rotações e reflexões.*
(1) $Rot_\alpha \circ Rot_\beta = Rot_{\alpha+\beta}$;
(2) $Ref_\alpha \circ Ref_\beta = Rot_{2(\alpha-\beta)}$;
(3) $Rot_\alpha \circ Ref_\beta = Ref_{\beta+\alpha/2}$;
(4) $Ref_\alpha \circ Rot_\beta = Ref_{\alpha-\beta/2}$.

Demonstração. (1) é exercício. Demonstremos (2). Seja $v \in \mathbb{R}^2$ e calculemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ref}_\alpha \circ \mathrm{Ref}_\beta(v) &= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \operatorname{sen}(2\beta) \\ \operatorname{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} v \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) & \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) - \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\beta) \\ \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) & \operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(2\beta) + \cos(2\alpha)\cos(2\beta) \end{pmatrix} v \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2(\alpha-\beta)) & -\operatorname{sen}(2(\alpha-\beta)) \\ \operatorname{sen}(2(\alpha-\beta)) & \cos(2(\alpha-\beta)) \end{pmatrix} v \\
&= \mathrm{Rot}_{2(\alpha-\beta)}(v)
\end{aligned}$$

(3) Temos que

$$\mathrm{Ref}_{\beta+\alpha/2} \circ (\mathrm{Ref}_\beta)^{-1} = \mathrm{Ref}_{\beta+\alpha/2} \circ (\mathrm{Ref}_\beta) = \mathrm{Rot}_{2(\beta-\alpha-\beta)} = \mathrm{Rot}_\alpha$$

que implica afirmação (3). A demonstração de (4) é similar à demonstração de (3). □

1.2. **Realização com números complexos.** O vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pode ser identificado com o número complexo $\alpha + i\beta$. Cada número complexo z pode ser escrito como $z = \|z\|(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$ onde α é o ângulo (frequentamente chamado de argumento) que corresponde a z e $\alpha \in [0, 2\pi)$. Um número complexo z com $\|z\| = 1$ tem a forma $z = \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$. Pela fórmula de Euler,

$$\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha} = \exp(i\alpha)$$

O conjugado de um número $z = \alpha + \beta i$ é $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Lema 3. *(1) Seja $z_\alpha = \cos\alpha + i\,sen\,\alpha$. A aplicação*

$$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad T(z) = z_\alpha \cdot z$$

corresponde a rotação Rot_α pelo ângulo α (em torno da origem).

(2) Seja T a reflexão pelo eixo que tem ângulo α com o eixo x. Então

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z}$$

Demonstração. (1) Seja $z = \|z\|(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta)$. Então

$$\begin{aligned} z_\alpha \cdot z &= \|z\|(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + i(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ &= \|z\|(\cos(\alpha+\beta) + i(\cos\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

(2) Claramente $\mathrm{Ref}_0(z) = \bar{z}$. Então

$$T(z) = z_{2\alpha} \cdot \bar{z} = \mathrm{Rot}_{2\alpha}\mathrm{Ref}_0(z) = \mathrm{Ref}_\alpha(z).$$

□