OS QUATÉRNIOS E AS ROTAÇÕES EM $\mathbb{R}^3$

1. A álgebra dos quatérnios

Seja $\mathbb{H}$ o espaço vetorial de dimensão 4 gerado por $1, i, j, k$. Introduzimos uma multiplicação em $\mathbb{H}$ com a seguinte tabela de multiplicação:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Note que o conjunto $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ é um grupo para esta multiplicação. A multiplicação entre os elementos $1, i, j, k$ será estendida com a regra distributiva. Um elemento de $\mathbb{H}$ chama-se um *quatérnio* e e conjunto $\mathbb{H}$ chama-se a *álgebra dos quatérnios.* A seguinte lema é fácil de verificar por conta direta.

Lema 1. *A álgebra dos quatérnios é um espaço vetorial de dimensão* 4 *com uma multiplicação bem definida. Além disso, a multiplicação é associativa, possui elemento neutro (o elemento* 1*), mas não é comutativa. A estrutura satisfaz a lei distributiva:*

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3 \quad e \quad (q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3.$$

Todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ pode ser escrito unicamente na forma $q = \alpha_q + v_q$ onde $\alpha_q \in \mathbb{R}$ e $v_q \in \langle i, j, k\rangle$. Um quatérnio com $v_q = 0$ chama-se *escalar*, enquanto um quatérnio com $\alpha_q = 0$ chama-se *quatérnio puro.* Pode-se definir o produto escalar entre quatérnios como no espaço $\mathbb{R}^3$ pela regra

$$(p, q) = \alpha_p\alpha_q + \beta_p\beta_q + \gamma_p\gamma_q + \delta_p\delta_q$$

para todo $p = \alpha_p + \beta_p i + \gamma_p j + \delta_p k$ e $q = \alpha_q + \beta_q i + \gamma_q j + \delta_q k$. (O produto escalar será denotado por $(\cdot, \cdot)$ para não confundir com a multiplicacão.) Em relação com este produto escalar, os elementos 1, i, j, e k formam uma base ortonormal de $\mathbb{H}$. A norma de um quatérnio na forma $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ é definida como

$$\|q\| = \sqrt{(q, q)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2},$$

enquanto o conjugado $\bar{q}$ está definido como

$$\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta.$$

A norma e o conjugado entre quatérnios satisfaz propriedades similares que a norma e o conjugado para números complexos.

Date: 3 de outubro de 2022.

Lema 2. *As seguintes afirmações são verdadeiras para $q \in \mathbb{H}$.*

(1) $\alpha_q = (q + \bar{q})/2$;
(2) $v_q = (q - \bar{q})/2$;
(3) $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ *e* $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2$;
(4) $\|q\| = 0$ *se e somente se* $q = 0$;
(5) $\|q_1 + q_2\| \leq \|q_1\| + \|q_2\|$;
(6) $\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\|\|q_2\|$;
(7) $\|\alpha q\| = |\alpha|\|q\|$ *para* $\alpha \in \mathbb{R}$;
(8) $\|q\|^2 = q \cdot \bar{q}$.

Demonstração. Deixamos a maioria destas afirmações para exercício. Para (8), calculemos que

$$\begin{aligned} q \cdot \bar{q} &= (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \|q\|^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 3. *Seja $q = \alpha_q + v_q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Então q possui inverso multiplicativo e*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.$$

Em outras palávras, $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ é grupo para a multiplicação.

Demonstração. Segue da afirmação (8) do lema anterior que

$$q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

□

Um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ chama-se *unitário* se $\|u\| = 1$.

Lema 4. *O elemento $1 \in \mathbb{H}$ é unitário, e se $q \in \mathbb{H}$ é unitário, então q^{-1} é unitário. Logo, os quatérnios unitários formam um grupo para a multiplicação. Além disso, se $q \in \mathbb{H}$ é unitário, então $q^{-1} = \bar{q}$.*

Para $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, defina o comutador

$$[q_1, q_2] = \frac{1}{2}(q_1 q_2 - q_2 q_1).$$

Lema 5. *O comutador satisfaz as seguintes propriedades para todo $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$:*

(1) $[q_1 + q_2, q_3] = [q_1, q_3] + [q_2, q_3]$ *e* $[q_1, q_2 + q_3] = [q_1, q_2] + [q_1, q_3]$ *(distributividade)*;
(2) $[q_1, q_1] = 0$ *e* $[q_1, q_2] = -[q_2, q_1]$ *(anti-comutatividade)*;
(3) $[[q_1, q_2], q_3] + [[q_2, q_3], q_1] + [[q_3, q_1], q_2] = 0$ *(identidade de Jacobi)*.

As identidades no lema anterior implicam que a estrutura $(\mathbb{H}, +, [\cdot,\cdot])$ é uma *álgebra de Lie*. Seja Q o espaço dos quatérnios puros. Então Q é um espaço vetorial de dimensão 3 gerado por i, j, e k. Note que Q não é fechado para o produto $\cdot$ entre os quatérnios, mas ele é fechado para o comutador. De fato, temos que $[i,j]=k$, $[j,k]=i$ e $[k,i]=j$. Ou seja, o comutador no espaço k comporta-se exatamente como o produto vetorial $\times$ sobre $\mathbb{R}^3$. Além disso, $[1,q]=0$ para todo $q \in \mathbb{H}$.

Lema 6. *As seguintes propriedades são válidas para $q=\alpha_q+v_q$ e $p=\alpha_p+v_p$:*

(1) $[p,q]=[v_p,v_q]$;
(2) $p\cdot q=\alpha_p\alpha_q-(v_p,v_q)+\alpha_p v_q+\alpha_q v_p+v_p\times v_q$;
(3) *Se p e q são quatérnios puros, então $p\cdot q=-(p,q)+p\times q$.*
(4) *Se p é puro unitário, então $p^2=-1$.*

Demonstração. (1)–(3) Uma conta usando as definições. Para provar (4), note que item (3) implica que

$$v^2=-(v,v)+v\times v=-(v,v)=-\|v\|^2=-1.$$

$\square$

Se $q=\alpha_q+v_q\in\mathbb{H}$ com $v_q\neq 0$, então

$$q=\alpha_q+\|v_q\|\frac{v_q}{\|v_q\|}=\alpha_q+\beta_q u_q$$

onde u_q é um quatérnio puro unitário. Além disso, como $\alpha_q\perp v_q$,

$$1=\|q\|=\alpha_q^2+\beta_q^2$$

então

$$q=\cos\vartheta_q+\sin\vartheta_q u_q$$

com algum ângulo $\vartheta\in[0,2\pi)$.

Teorema 7. *Todo quatérnio $q\in\mathbb{H}$ unitário pode ser escrito na forma*

$$\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta u$$

onde u é um quatérnio puro unitário. Além disso, se $q\neq 1$, então esta expressão é única.

Demonstração. If $v_q\neq 0$, então siga o processo antes do enunciado. Se $v_q=0$, então toma $\vartheta=0$ e u arbitrário. $\square$