Geometria com aplicações na gráfica computacional

Folha 2 de exercícios

csaba@mat.ufmg.br

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, seja $\mathcal{T}(V)$ o grupo de translações de V, seja $\mathrm{GL}(V)$ o grupo de transformações lineares invertíveis de V e seja $\mathrm{End}(V)$ o conjunto de transformações lineares (não necessariamente invertíveis) de V.

(1) Mostre que $\mathcal{T}(V)\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(V)\mathcal{T}(V)$.
(2) Mostre que $\mathcal{T}(V)\mathrm{End}(V) \neq \mathrm{End}(V)\mathcal{T}(V)$.

[Dica: Na parte (2), considere a translação T por $(1,1)$ e a projeção $P : (x,y) \mapsto (0,y)$ sobre $\mathbb{R}^2$. Mostre que $P \circ T$ não pode ser escrito na forma $T' \circ X$ com $T' \in \mathcal{T}(V)$ e $X \in \mathrm{End}(V)$.]

2. Seja X um elemento de $\mathrm{AGL}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$X(0) = (2,3), \quad X(1,0) = (-3,3), \quad X(0,1) = (-4,2).$$

Escreva X na forma $T_{t_1}Y$ e também na forma ZT_{t_2} onde $Y, Z \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ e $T_{t_1}, T_{t_2} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$. Qual é a relação entre T_{t_1} e T_{t_2} e entre Y e Z.

3. Seja $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação em $\mathbb{R}^2$ pelo ângulo α ao redor da origem. Calcule os autovalores complexos R_α e os autovetores correspondentes.

4. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação ortogonal e seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um autovalor de T.

(1) Mostre que $\det T \in \{1, -1\}$.
(2) Mostre que $|\alpha| = 1$.
(3) Deduza que se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha \in \{1, -1\}$.
(4) Mostre que o conjugado complexo $\bar{\alpha}$ é também um autovalor de T.
(5) Deduza que se n for impar, então $\det T$ é autovalor de T.

5. Seja $T_{(1,1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a translação pelo vetor $(1,1)$ e $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação por um ângulo α ao redor da origem. Como pode caraterizar a transformação $TR_\alpha T^{-1}$?

6. Seja X a reflexão de $\mathbb{R}^2$ em torno da reta com equação $x - y + 1 = 0$. Escreva X na forma $T_{t_1}Y$ e também na forma ZT_{t_2} onde $Y, Z \in \mathrm{GL}(V)$ e $T_{t_1}, T_{t_2} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$.