ESPAÇOS AFINS E PROJETIVOS

1. Espaços afins e transformações afins

Considere o espaço $\mathbb{R}^n$ mergulhado em $\mathbb{R}^{n+1}$ com a inclusão:

$$v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \overline{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$$

Lembre que o grupo AGL_n é o grupo de transformações que podemos obter pela composição de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ e uma translação em $\mathbb{R}^n$. Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear com matriz $X = [L]$ na base canônica. Seja $\bar{X}$ a matriz

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X & \underline{0}^t \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\underline{0}$ denota o vector nulo em $\mathbb{R}^n$. assum $\bar{X}$ é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$. A matriz $\bar{X}$ chama-se *matriz aumentada*. É fácil verificar que $L(v) = w$ se e somente se $\bar{X}\bar{v} = \bar{w}$.

Exemplo 1. Assuma que $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação por $\pi/4$ (por volta da origem). Então a sua matriz na base canônica é

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz aumentada que corresponde a T é

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora seja $b \in \mathbb{R}^n$ e defina a matriz

$$X_b = \begin{pmatrix} I & b^t \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere $v \in \mathbb{R}^n$. Temos que

$$X_b \bar{v} = \overline{v + b} = \overline{T_b(v)};$$

ou seja, multiplicação por X_b corresponde a translação pelo vetor b.

Exemplo 2. Seja $b = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$X_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Date: 26 de outubro de 2022.

Se $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, então $\bar{v} = (\alpha, \beta, 1)$ e

$$X_b\bar{v} = X_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta + 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{T_b(v)}.$$

Finalmente, se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear com matriz X (na base canônica) e $b \in \mathbb{R}^n$, então defina

$$X_{L,b} = \begin{pmatrix} X & b^t \\ \underline{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que

$$X_{L,b}\overline{v} = \overline{L(v) + b}.$$

Ou seja, multiplicação pela matriz $X_{L,b}$ corresponde a composição $T_b \circ L$ em AGL_n.

Exemplo 3. Assuma que $b = (-1, 2)$ e seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação por $\pi/4$ como no exemplo anterior. Então a matriz

$$X_{L,b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Então $\bar{v} = (\alpha, \beta, 1)$ e

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{L(v) + b}.$$

Sejam $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$, $L_1, L_2 \in \mathrm{GL}_n$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Então

$$(T_{b_1} \circ L_1) \circ (T_{b_2} \circ L_2)v = L_1L_2v + L_1b_2 + b_1 = T_{L_1b_2+b_1} \circ (L_1 \circ L_2).$$

Pode verificar que

$$X_{L_1,b_1}X_{L_2,b_2} = X_{L_1L_2,L_1b_2+b_1}.$$

Teorema 4. *O grupo AGL_n é isomorfo ao grupo de matrizes na forma*

$$\{X_{L,b} \mid L \in GL_n \text{ e } b \in \mathbb{R}^n\}.$$

O isomorfismo está dado por $T_b \circ L \mapsto X_{L,b}$.

2. Planos projetivos

Definição 5. A reta projetiva $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é o conjunto das retas em $\mathbb{F}^2$ que passam pela origem. Uma reta $L_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid ax+by = 0\} \subseteq \mathbb{F}^2$ é chamado de *ponto* na reta projetiva $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$. Este ponto de $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ pode ser representato com as coordenadas $[a, b]$ Estes coordenadas são chamadas de coordenadas homgêneas. Note que $[a, b]$ representa um ponto em $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ se e somente se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $[\alpha a, \alpha b]$ representa a mesmo ponto que

$[a, b]$ para todo $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Assim, todo ponto de $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ pode ser representado com as coordenadas

$$[1, b] \quad \text{ou} \quad [0, 1]$$

com algum $b \in \mathbb{F}$. O ponto $[0, 1]$ é frequentamente chamado de *ponto em infinito* e assim obtemos que $\mathbb{P}^1\mathbb{F}$ pode ser identificado com $\mathbb{F} \cup \{P_\infty\}$ onde $P_\infty = [0, 1]$ é o ponto em infinito.

Definição 6. Um plano projetivo Π consiste de um conjunto $\mathcal{P}$ de pontos, um conjunto $\mathcal{L}$ de linhas (ou retas) e uma relação de incidência $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tal que

(1) Se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ distintos, então existe uma linha única linha $L \in \mathcal{I}$ tal que $P_1 \in L$, $P_2 \in L$.
(2) Se $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, então existe um único ponto $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \in L_1$ e $P \in L_2$.
(3) Existem quatro pontos que nenhuma linha é incidente com mais que dois destes pontos.

Exemplo 7 (Plano Euclediano Estendido)**.** Considere o plano $\mathbb{R}^2$ com os pontos e linhas usuais. (Ou seja, os pontos são $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e as linhas são conjuntos $\{(x, y) \mid ax + by = c\}$ com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.) Considere a relação de equivalência $\sim$ entre linhas onde $L_1 \sim L_2$ se e somente se L_1 e L_2 são paralelas. Seja $[L]$ a classe de equivalência da linha L.

(1) Para cada classe $\ell = [L]$ introduza um novo ponto P_ℓ (ponto no infinito) e extenda a incidência em tal modo que $P_\ell \in L$ se e somente se $L \in \ell$.
(2) Introduza uma nova linha L_∞ em tal modo que L_∞ contem precisamente os pontos no infinito. A linha L_∞ chama-se a linha em infinito.

A geometria obtida por este processo chama-se *Plano Euclediano Estendido* e é denotado por $E\mathbb{R}^2$. Deixamos para o leitor a verificação que $E\mathbb{R}^2$ é um plano projetivo.

Exemplo 8. Seja $\mathbb{F}$ um corpo qualquer (pode tomar por exemplo, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$), e considere o espaço $\mathbb{F}^3$. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das retas que passam pela origem, e seja $\mathcal{L}$ o conjunto dos planos que passam pela origem. Um ponto P é incidente com uma reta L, se $P \subseteq L$. É fácil verificar que $\mathbb{P}^3_\mathbb{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ é um plano projetivo. Nós geralmente vamos considerar o plano $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^3_\mathbb{R}$.