# Compactificação de Stone-$\check{C}$ech

Lucas H. R. de Souza

23 de outubro de 2022

## 1 Compactificações

**Definição 1.1.** Seja $X$ um espaço topológico Hausdorff. Uma compactificação de $X$ é um espaço Hausdorff compact $\bar{X}$ junto com um mergulho $f : X \to \bar{X}$ tal que $f(X)$ é denso em $\bar{X}$.

**Exemplos.**

1. Seja $X$ um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$. Então a inclusão de $X$ em seu fecho é uma compactificação de $X$.

2. Seja $X = (0, 1)$. O mapa $f : (0, 1) \to S^1$ dado por $f(x) = e^{2\pi ix}$ é uma compactificação de $(0, 1)$. Note que a inclusão de $(0, 1)$ em $[0, 1]$ é outra compactificação de $(0, 1)$.

**Definição 1.2.** Sejam $X$ um espaço Hausdorff e $f : X \to \bar{X}$, $f' : X \to \bar{X}'$ compactificações de $X$. As duas compactificações são equivalentes se existe $g : \bar{X} \to \bar{X}'$ homeomorfismo tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \bar{X} \arrow[d, "g"] \\ & \bar{X}' \end{tikzcd}$$

**Proposição 1.3.** *Seja $X$ um espaço Hausdorff localmente compacto e não compacto. Então existe, a menos de equivalência, uma única compactificação $\bar{X}$ de $X$ tal que $\#\bar{X} - X = 1$.*

*Demonstração.* Consideremos $\bar{X} = X\dot{\cup}\{\infty\}$ e $\iota : X \to X\dot{\cup}\{\infty\}$ o mapa de inclusão. Declaramos $U$ um aberto de $X\dot{\cup}\{\infty\}$ se $U$ é um aberto de $X$ ou $\infty \in U$ e $X - U$ é compacto. Com isso temos uma topologia para $X\dot{\cup}\{\infty\}$.

Se $U$ é aberto, temos que $\iota^{-1}(U) = U$ se $\infty \notin U$ e $\iota^{-1}(U) = U - \{\infty\}$ se $\infty \in U$, e ambos são abertos em $X$. Portanto $\iota$ é contínua. Como todo aberto de $X$ é aberto em $X\dot{\cup}\{\infty\}$, segue que $\iota$ é aberto. Como $\iota$ é injetivo e aberto, segue que é um mergulho. Seja $U$ uma vizinhança de $\infty$. Temos que $U \neq \{\infty\}$, já que $X$ não é compacto. Portanto $U \cap X \neq \emptyset$, o que implica que $\infty \in Cl_{X\dot{\cup}\{\infty\}}X$ (ou seja, $X$ é denso em $X\dot{\cup}\{\infty\}$).

Sejam $x, y \in X\dot{\cup}\{\infty\}$ pontos distintos. Se $y = \infty$, então tome $U$ aberto que contenha $x$ e tal que $Cl_X(U)$ é compacto (existe pois $X$ é localmente compacto). Portanto $U$ e $X\dot{\cup}\{\infty\} - Cl_X(U)$ são abertos que separam $x$ e $\infty$. Suponhamos $x, y \in X$. Como $X$ é Hausdorff, existem $U$ e $V$ abertos tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Mas U e V também são abertos em $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Portanto $X\dot{\cup}\{\infty\}$ é Hausdorff.

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ uma cobertura aberta de $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Tome $\alpha_0 \in \Gamma$ tal que $\infty \in U_{\alpha_0}$. Temos que $X - U_{\alpha_0}$ é compacto e $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ cobre $X - U_{\alpha_0}$. Portanto existe subcobertura finita $\{U_1, ..., U_n\}$ de $X - U_{\alpha_0}$. Então $\{U_{\alpha_0}, U_1, ..., U_n\}$ é uma subcobertura finita de $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Portanto $X\dot{\cup}\{\infty\}$ é compacto.

Portanto $\iota : X \to X\dot{\cup}\{\infty\}$ é uma compactificação de $X$ que satisfaz $\#(X\dot{\cup}\{\infty\}) - X = 1$.

Seja $f : X \to \bar{X}$ compactificação de $X$ tal que $\#\bar{X} - f(X) = 1$. Tome $g : \bar{X} \to X\dot{\cup}\{\infty\}$ definido por $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$ e $g(\bar{X} - f(X)) = \infty$. É imediato que g é uma bijeção que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & \bar{X} \arrow[d, "g"] \\
 & X\dot{\cup}\{\infty\}
\end{tikzcd}$$

Observe que $f(X)$ é aberto em $\bar{X}$, pois $\bar{X} - X$ é um único ponto (e portanto fechado, pois $\bar{X}$ é Hausdorff). Seja $U$ aberto em $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Se $\infty \notin U$, então $g^{-1}(U) = f(U)$, que é aberto em $\bar{X}$. Suponha $\infty \in U$. Então $K = X\dot{\cup}\{\infty\} - U$ é compacto. Temos que $g^{-1}(K) = f(K)$ é compacto, o que implica que é fechado. Portanto $g^{-1}(U) = \bar{X} - f(K)$ é aberto. Logo $g$ é contínua (e portanto um homeomorfismo, pois $\bar{X}$ é compacto e $X\dot{\cup}\{\infty\}$ é Hausdorff). Temos então a unicidade da compactificação. $\square$

**Observação.** Tal compactificação é chamada de compactificação de um ponto de $X$ ou compactificação de Alexandroff de $X$.

**Exemplo.** A projeção estereográfica nos dá uma compactificação de um ponto de $\mathbb{R}^n$. A unicidade da compactificação de um ponto mostra que a única compactificação de um ponto de $\mathbb{R}^n$ deve ser homeomorfa à esfera de dimensão $n$.

**Exemplos.** Outros exemplos de compactificações que aparecem na natureza:

1. Se $X$ é Hausdorff, localmente compacto, conexo e localmente conexo, então a compactificação de Freudenthal é a maior compactificação de X cuja fronteira é totalmente desconexa.
2. Se $X$ é um espaço métrico CAT(0), o conjunto de raios geodésicos determina a fronteira de uma compactificação para $X$.
3. Se $X$ é um grupo finitamente gerado, com a topologia discreta, então temos compactificações com as seguintes fronteiras: hiperbólica (se o grupo for hiperbólico), fronteira de Bowditch (se o grupo for relativamente hiperbólico), fronteira de Floyd, fronteira de Martin (se for fazer passeios aleatórios no grupo), $E\mathcal{Z}$-fronteira (se for usar ferramentas de teoria de homotopia) e muitas outras. Tais fronteiras dão informações importantes a respeito do grupo.

# 2 Compactificação de Stone-$\check{C}$ech

## 2.1 Definição e propriedades

**Definição 2.1.** Seja $X$ um espaço Hausdorff. A compactificação de Stone-$\check{C}$ech de $X$ é um mergulho $b : X \to \beta X$ tal que $\beta X$ é um espaço Hausdorff compacto e para toda aplicação contínua $f : X \to Y$, com $Y$ Hausdorff compacto, existe uma única aplicação contínua $\tilde{f} : \beta X \to Y$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

**Proposição 2.2.** *A compactificação de Stone-$\check{C}$ech de $X$, se existir, é única, a menos de equivalência.*

*Demonstração.* Suponha que existe outra compactificação de Stone-$\check{C}$ech $b' : X \to \beta X'$. Pelas propriedades universais de $b$ e $b'$, existem aplicações contínuas $\tilde{b}$ e $\tilde{b}'$ que comutam os diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "b'"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{b}'"] \\ & \beta X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b'"] \arrow[dr, "b"'] & \beta X' \arrow[d, "\tilde{b}"] \\ & \beta X \end{tikzcd}$$

Temos então que os mapas $id_{\beta X}$ e $\tilde{b}' \circ \tilde{b}$ comutam os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "b"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{b}\circ\tilde{b}'"] \\ & \beta X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "b"'] & \beta X \arrow[d, "id_{\beta X}"] \\ & \beta X \end{tikzcd}$$

Pela unicidade do mapa que comuta tal diagrama, temos que $\tilde{b} \circ \tilde{b}' = id_{\beta X}$. Analogamente, $\tilde{b}' \circ \tilde{b} = id_{\beta X'}$. Portanto as duas compactificações são equivalentes. $\square$

**Proposição 2.3.** *A compactificação de Stone-Čech é de fato uma compactificação.*

*Demonstração.* Basta mostrar que $b(X)$ é denso em $\beta X$. Sejam $Z = Cl_{\beta X}(b(X))$ e $b_1 : X \to Z$, $b_2 : b(X) \to \beta X$ o mapa dado pela correstrição de $b$ e o mapa de inclusão, respectivamente. Temos que $b = b_2 \circ b_1$.

Sejam $Y$ um espaço Hausdorff compacto e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Pela propriedade universal de $\beta X$, existe aplicação contínua $\tilde{f}$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b_1"] \arrow[drr, "f"'] & Z \arrow[r, "b_2"] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Portanto $b_1$ é um mergulho de $X$ em um espaço Hausdorff compacto $Z$ e tal que para toda aplicação contínua $f$ para um espaço Hausdorff compacto $Y$, existe o mapa $\tilde{f} \circ b_2$ que comuta o diagrama acima. A unicidade segue do fato que para todo elemento de $b_1(X)$, $\tilde{f} \circ b_2(x) = f \circ b_1^{-1}(x)$ e $b_1(X)$ é denso em $Z$. Portanto $b_1 : X \to Z$ é uma compactificação de Stone-Čech de $X$.

Um argumento análogo ao da proposição anterior mostra que $b_2$ precisa ser uma bijeção. Portanto $Cl_{\beta X}(b(X)) = \beta X$, ou seja, $b(X)$ é denso em $\beta X$. $\square$

**Proposição 2.4.** *Seja $X$ espaço Hausdorff tal que exista a compactificação de Stone-Čech. Se $f : X \to \bar{X}$ é outra compactificação de $X$, então existe uma única aplicação contínua $g : \beta X \to \bar{X}$ que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \bar{X} \end{tikzcd}$$

*Demonstração.* Caso particular da propriedade universal de $\beta X$. $\square$

Ou seja, $\beta X$ é a maior compactificação de $X$, no sentido de que todas as outras compactificações são quocientes da compactificação de Stone-$\check{C}$ech.

**Proposição 2.5.** *Se $X$ é desconexo, então $\beta X$ é desconexo.*

*Demonstração.* Seja $X$ a união disjunta de dois abertos $U$ e $V$ não vazios. Temos que o mapa $f : X \to 2$, com $2 = \{0, 1\}$ com a topologia discreta, tal que $f(U) = 0$ e $f(V) = 1$, é contínuo. O mapa $f$ induz um mapa contínuo $\tilde{f} : \beta X \to 2$ tal que $f = \tilde{f} \circ \beta$. Então $\tilde{f}^{-1}(0)$ e $\tilde{f}^{-1}(1)$ separam $\beta X$. $\square$

## 2.2 Construção

**Definição 2.6.** Um espaço topológico $X$ é dito completamente regular, ou $T_{3,5}$, se é Hausdorff e para todo $x \in X$ e todo fechado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$, tal que $f(x) = 0$ e $f(F) = 1$.

**Teorema 2.7.** *A compactificação de Stone-$\check{C}$ech de $X$ existe se e somente se $X$ é completamente regular.*

**Observação.** De fato, para um espaço Hausdorff possuir alguma compactificação, ele precisa ser completamente regular. Suponha que $X$ possui uma compactificação $f : X \to \bar{X}$. Sejam $F$ um fechado de $X$ e $x \in X - F$. Temos que $f(F)$ é um fechado de $f(X)$, o que implica que $f(F) = G \cap f(X)$, para algum $G$ fechado de $\bar{X}$. Pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $g : \bar{X} \to [0, 1]$, tal que $g(f(x)) = 0$ e $g(G) = 1$. Portanto $g \circ f$ separa $F$ e $x$.

Vamos construir a compactificação de Stone-$\check{C}$ech para o caso de $X$ discreto (e infinito):

**Definição 2.8.** Um filtro $\mathcal{F}$ em $X$ é um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que satisfaz:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Um ultrafiltro é um filtro maximal.

**Exemplo.** Se $A \subseteq X$, então $\mathcal{F}_A = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ é um filtro. Se $A = \{x\}$, então $\mathcal{F}_x$ (omitimos as chaves para não carregar na notação) é um ultrafiltro. Tais ultrafiltros são chamados de ultrafiltros principais.

Todo filtro está contido em algum ultrafiltro. Tal afirmação é mais fraca que o Axioma da Escolha.

**Proposição 2.9.** *Um filtro $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro se e somente se para todo $U \subseteq X$, $U \in \mathcal{F}$ ou $X - U \in \mathcal{F}$.*

**Observação.** Note que $U$ e $X - U$ não podem pertencer simultaneamente a um filtro $\mathcal{F}$.

**Proposição 2.10.** *Sejam $X$ um conjunto, $A \subseteq X$ e $\mathcal{F}$ um ultrafiltro em $X$ tal que para todo $B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$. Então $A \in \mathcal{F}$.*

**Proposição 2.11.** *Sejam $X$ um conjunto e $\mathbb{U}$ um conjunto que possui a propriedade de interseção finita. Então existe um ultrafiltro que contém $\mathbb{U}$.*

Considere $Ult(X)$ o conjunto de ultrafiltros de $X$. Se $U \subseteq X$, definimos $U^* = \{\mathcal{F} \in Ult(X) : U \in \mathcal{F}\}$. A topologia de $Ult(X)$ será a topologia gerada pelos conjuntos da forma $U^*$, com $U \subseteq X$.

**Proposição 2.12.** *Para todo $U \subseteq X$, $(X - U)^* = Ult(X) - U^*$.*

*Demonstração.* Temos que $Ult(X) - U^* = \{\mathcal{F} \in Ult(X) : U \notin \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F} \in Ult(X) : X - U \in \mathcal{F}\} = (X - U)^*$. □

**Proposição 2.13.** *Para todo $U \subseteq X$, $U^*$ é aberto e fechado.*

*Demonstração.* Pela definição da topologia de $Ult(X)$, $U^*$ é aberto e, pela proposição anterior, seu complementar também é aberto. □

**Proposição 2.14.** *$Ult(X)$ é compacto.*

*Demonstração.* Seja $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de subconjuntos de $X$ tal que $\{U_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma cobertura de $Ult(X)$ que não admite subcobertura finita. Sejam $\mathbb{U} = \{X - U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ e $\gamma_1, .., \gamma_n \in \Gamma$. Então $\{U_{\gamma_1}^*, ..., U_{\gamma_n}^*\}$ não cobre $Ult(X)$, o que implica que existe $\mathcal{F} \in Ult(X)$ tal que $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\mathcal{F} \notin U_{\gamma_i}^*$. Portanto $X - U_{\gamma_i} \in \mathcal{F}$, o que implica que $(X - U_{\gamma_1}) \cap ... \cap (X - U_{\gamma_n}) \in \mathcal{F}$ e portanto $(X - U_{\gamma_1}) \cap ... \cap (X - U_{\gamma_n}) \neq \emptyset$. Então $\mathbb{U}$ possui a propriedade de interseção finita, o que implica que existe $\mathcal{G} \in Ult(X)$ tal que $\mathbb{U} \subseteq \mathcal{G}$. Como $X - U_\gamma \in \mathcal{G}$, segue que $\mathcal{G} \notin U_\gamma^*$. Logo $\mathcal{G} \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma^*$, contradizendo o fato que $\{U_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma cobertura de $Ult(X)$. Portanto toda cobertura de $Ult(X)$ por abertos da forma $U^*$, com $U \subseteq X$, admite subcobertura finita. Pelo Teorema da subbase de Alexander, segue que $Ult(X)$ é compacto. □

**Proposição 2.15.** *$Ult(X)$ é Hausdorff e totalmente desconexo.*

*Demonstração.* Sejam $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ ultrafiltros distintos em $X$. Então existe $U \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'$. Neste caso, $\mathcal{F} \in U^*$ e $\mathcal{F}' \notin U^*$ (e portanto $\mathcal{F}' \in (X - U)^*$). Segue então que $U^*$ e $(X - U)^*$ são abertos que separam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$. Portanto $Ult(X)$ é Hausdorff. Como $U^*$ e $(X - U)^*$ são abertos e fechados, segue que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ não estão na mesma componente conexa. Portanto $Ult(X)$ é totalmente desconexo. □

Considere a aplicação $\psi : X \to Ult(X))$ dada por $\psi(x) = \mathcal{F}_x$. O mapa $\psi$ é o nosso candidato à compactificação de Stone-Čech de $X$.

**Proposição 2.16.** *$\psi$ é um mergulho.*

*Demonstração.* Como $X$ é discreto, $\psi$ é contínua.

Temos que $\{x\}^* = \{\mathcal{F}_x\}$, o que implica que $\{\mathcal{F}_x\}$ é aberto. Portanto $\psi$ é aberta, o que implica que é um mergulho. □

**Proposição 2.17.** *$\psi(X)$ é denso em $Ult(X)$.*

*Demonstração.* Seja $U \subseteq X$ não vazio. Tome $x \in U$. Temos que $U \in \mathcal{F}_x$, o que implica que $\mathcal{F}_x \in U^*$. Portanto $\psi(X)$ é denso em $Ult(X)$. □

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, em que $Y$ é um espaço Hausdorff compacto. Definimos $\tilde{f} : Ult(X) \to Y$ como $\tilde{f}(\mathcal{F}) \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} Cl_Y(f(A))$.

**Proposição 2.18.** $\# \bigcap_{A \in \mathcal{F}} Cl_Y(f(A)) = 1$.

*Demonstração.* Sejam $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$. Temos que para todo $i \in \{1, ., , n\}$, $A_i \neq \emptyset$, o que implica que $Cl_Y(f(A_i)) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ é filtro, $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{F}$, o que implica que $Cl_Y(f(A_1 \cap ... \cap A_n)) \neq \emptyset$. Mas $Cl_Y(f(A_1 \cap ... \cap A_n)) \subseteq Cl_Y(f(A_1)) \cap ... \cap Cl_Y(f(A_n))$, o que implica que $Cl_Y(f(A_1)) \cap ... \cap Cl_Y(f(A_n)) \neq \emptyset$. Portanto $\{Cl_Y(f(A)) : A \in \mathcal{F}\}$ é um conjunto de fechados e possui a propriedade de interseção finita. Como $Y$ é compacto, segue que $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} Cl_Y(f(A)) \neq \emptyset$.

Sejam $x, y \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} Cl_Y(f(A))$ distintos. Como $Y$ é Hausdorff, existem abertos disjuntos $U$ e $V$ tais que $x \in U$ e $y \in V$. Temos que para todo $A \in \mathcal{F}$, $f(A) \cap U \neq \emptyset$. Então para todo $A \in \mathcal{F}$, $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F}$ é ultrafiltro, segue que $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$. Analogamente, $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, absurdo, pois $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Portanto $\# \bigcap_{A \in \mathcal{F}} Cl_Y(f(A)) = 1$. □

Portanto $\tilde{f}$ está bem definida.

**Proposição 2.19.** *O diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & Ult(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

*Demonstração.* Seja $x \in X$. Então $\psi(x) = \mathcal{F}_x$, e portanto $\tilde{f} \circ \psi(x) = \tilde{f}(\mathcal{F}_x)$. Temos que $\{x\} \in \mathcal{F}_x$, o que implica que $\tilde{f}(\mathcal{F}_x) \in \{f(x)\}$. Portanto $\tilde{f}(\mathcal{F}_x) = f(x)$, ou seja, o diagrama comuta. □

**Lema 2.20.** *Sejam $X$ um espaço topológico, $U$ um aberto de $X$ e $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ uma família de fechados de $X$, com pelo menos um deles compacto, tal que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} F_\alpha \subseteq U$. Então existem $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma$ tais que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \subseteq U$.*

*Demonstração.* Sejam $\alpha_0 \in \Gamma$ tal que $F_{\alpha_0}$ é compacto, $U_0 = F_{\alpha_0} \cap U$ e $F'_\alpha = F_{\alpha_0} \cap F_\alpha$. Basta mostrar o lema para $X = F_{\alpha_0}$ (que é compacto), a família de compactos $\{F'_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ e o aberto $U_0$.

Seja $F = F_{\alpha_0} - U_0$. Temos que $F$ é fechado. Como $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} F'_\alpha \subseteq U_0$, segue que $F \cap \bigcap_{\alpha\in\Gamma} F'_\alpha = \emptyset$. Como $F_{\alpha_0}$ é compacto, temos que $\{F\} \cup \{F'_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ não pode ter a propriedade de interseção finita. Portanto que existem $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma$ tais que $\bigcap_{i=1}^n F'_{\alpha_i} \subseteq U_0$. □

**Proposição 2.21.** *$\tilde{f}$ é contínua.*

*Demonstração.* Seja $U$ aberto em $Y$ e $\mathcal{F} \in \tilde{f}^{-1}(U)$. Então $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} Cl_Y(f(A)) \subseteq U$. Pelo lema anterior, existem $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ tais que $Cl_Y(f(A_1)) \cap ... \cap Cl_Y(f(A_n)) \subseteq U$. Seja $\mathcal{F}' \in (A_1 \cap ... \cap A_n)^*$. Então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{F}'$, o que implica que $\tilde{f}(\mathcal{F}') \in Cl_Y(f(A_1 \cap ... \cap A_n)) \subseteq Cl_Y(f(A_1)) \cap ... \cap Cl_Y(f(A_n)) \subseteq U$. Temos então que $(A_1 \cap ... \cap A_n)^*$ é uma vizinhança aberta de $\mathcal{F}$ contida em $\tilde{f}^{-1}(U)$. Segue então que $\tilde{f}^{-1}(U)$ é aberto, o que implica que $\tilde{f}$ é contínua. □

Como $\psi(X)$ é denso em $Ult(X)$, segue que $\tilde{f}$ é a única aplicação contínua que comuta o diagrama acima.

Portanto $\psi : X \to Ult(X)$ é a compactificação de Stone-Čech de $X$.

**Observação.** Considere o anel $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$. Tal anel é booleano (i.e. $\forall U \subseteq X$, $U \cap U = U$). Temos que $Spec\mathcal{P}(X) \cong Ult(X)$. Dado um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}$, o conjunto $\mathcal{F}^c = \{A \subseteq X : X - A \in \mathcal{F}\}$ é um ideal maximal se e somente se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro. Além disso, em anéis booleanos, todo ideal primo é maximal. Tal homeomorfismo é dado associando a cada ultrafiltro o ideal dado pelos complementares.

Note que espectros de anéis com unidade são sempre compactos e espectros de anéis booleanos são Hausdorff e totalmente desconexos.

Não construiremos aqui o caso geral. Tal construção pode ser vista em [5] (para uma construção que generaliza a que usa ultrafiltros) e [4] (para uma construção que mergulha a compactificação de Stone-Čech em algum produto grande de cópias de $[0, 1]$).

**Exemplo.** Considere $X = S_\Omega$ (o primeiro ordinal não enumerável). Então $\#\beta S_\Omega - S_\Omega = 1$.

## 2.3 Consequências

**Proposição 2.22.** *Se $X$ é discreto, então $\beta X$ é totalmente desconexo.*

*Demonstração.* Temos que $Ult(X)$ é totalmente desconexo e $Ult(X) \cong \beta X$. $\square$

**Lema 2.23.** $\mathbb{N}^{[0,1]}$*, com a topologia produto, é separável (i.e. possui subconjunto enumerável denso).*

*Demonstração.* Sejam $\mathbb{B} = \{(p,q) \subseteq \mathbb{R} : p,q \in \mathbb{Q}\}$ e $\mathbb{B}_n$ o conjunto de $n$ subconjuntos de $\mathbb{B}$ que sejam dois a dois disjuntos. Para $\{I_1, ... I_n\} \in \mathbb{B}_n$, e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$, defina $f^{a_1,...,a_n}_{I_1,...,I_n} : [0,1] \to \mathbb{N}$ por $f^{a_1,...,a_n}_{I_1,...,I_n}(x) = a_i$ se $x \in I_i$, para algum $i \in \{1,...,n\}$, e $f^{a_1,...,a_n}_{I_1,...,I_n}(x) = 0$, caso contrário. Considere $D = \{f^{a_1,...,a_n}_{I_1,...,I_n}(x) : a_i \in \mathbb{N}, \{I_1,...,I_n\} \in \mathbb{B}_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $D$ é enumerável, pois cada $\mathbb{B}_n$ é enumerável. Seja U um aberto básico de $\mathbb{N}^{[0,1]}$. Por ser aberto básico, existem $S_1, ..., S_n \subseteq \mathbb{N}$ e $r_1, ..., r_n \in [0,1]$ distintos e tais que $U = \{f : [0,1] \to \mathbb{N} : f(r_i) \in S_i\}$. Sejam $s_i \in S_i$ e $\{I_1, ..., I_n\} \in \mathbb{B}_n$ tal que $r_i \in I_i$. Então $f^{s_1,...,s_n}_{I_1,...,I_n} \in U$. Portanto $D$ é denso em $\mathbb{N}^{[0,1]}$, ou seja, $\mathbb{N}^{[0,1]}$ é separável. $\square$

**Lema 2.24.** $[0,1]^{[0,1]}$*, com a topologia produto, é separável.*

*Demonstração.* Seja $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ tal que $Im\ f = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Como $f$ é contínua, $f^{[0,1]} : \mathbb{N}^{[0,1]} \to [0,1]^{[0,1]}$, definida por $f^{[0,1]}((a_i)_{i\in[0,1]}) = (f(a_i))_{i\in[0,1]}$, é contínua e $Im\ f^{[0,1]} = ([0,1] \cap \mathbb{Q})^{[0,1]}$, que é denso em $[0,1]^{[0,1]}$. Seja $D$ enumerável e denso em $\mathbb{N}^{[0,1]}$. Segue que $f^{[0,1]}(D)$ é enumerável e denso em $([0,1] \cap \mathbb{Q})^{[0,1]}$, o que implica que é denso em $[0,1]^{[0,1]}$. Portanto $[0,1]^{[0,1]}$ é separável. $\square$

**Proposição 2.25.** *(Pospišil)* $\#\beta\mathbb{N} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

*Demonstração.* Temos que $Ult(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, o que implica que $\#\beta\mathbb{N} \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

Por outro lado, temos que $[0,1]^{[0,1]}$, é separável. Seja D um subconjunto enumerável denso de $[0,1]^{[0,1]}$. Uma bijeção qualquer $f : \mathbb{N} \to D$ (que é contínua, pois $\mathbb{N}$ é discreto) induz uma aplicação contínua $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \to [0,1]^{[0,1]}$ (observe que $[0,1]^{[0,1]}$ é compacto pelo Teorema de Tychonoff). Como $\beta\mathbb{N}$ é compacto e D é denso, segue que $\tilde{f}$ é sobrejetiva. Logo $\#\beta\mathbb{N} \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

Portanto $\#\beta\mathbb{N} = 2^{2^{\aleph_0}}$. $\square$

**Proposição 2.26.** *Sejam $X$ um espaço Hausdorff compacto, $D$ um subconjunto denso de $X$ e $|D|$ o conjunto $D$ com a topologia discreta. Então existe aplicação quociente $\beta|D| \to X$.*

*Demonstração.* A aplicação de inclusão $\iota : |D| \to X$ é contínua pois $|D|$ possui a topologia discreta. Portanto induz uma aplicação contínua $\tilde{\iota} : \beta|D| \to X$ tal que $\tilde{\iota} \circ b = \iota$. Segue então que $D = Im(\iota) \subseteq Im(\tilde{\iota})$ e $Im(\tilde{\iota})$ é compacto. Como $D$ é denso em $X$, segue que $Im(\tilde{\iota}) = X$. Portanto $\tilde{\iota}$ é sobrejetiva. Como $\beta|D|$ é compacto e $X$ é Hausdorff, segue que $\tilde{\iota}$ é fechada. Portanto $\tilde{\iota}$ é a aplicação quociente procurada. □

**Corolário 2.27.** *Todo espaço Hausdorff compacto é quociente de um espaço Hausdorff, compacto e totalmente desconexo.*

*Demonstração.* Segue da proposição anterior e do fato que se $D$ é discreto, então $\beta D$ é totalmente desconexo. □

Apesar de que tal aplicação quociente sempre existe, o domínio tende a ter cardinalidade muito maior que o contradomínio. Por exemplo, se $X$ possui base enumerável (equivalentemente se $X$ é metrizável), é separável, e portanto é um quociente de $\beta\mathbb{N}$. Mas $\#\beta\mathbb{N} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Para Hausdorff compactos com base enumerável, temos a seguinte proposição (que não demonstraremos):

**Proposição 2.28.** *(Teorema 30.7 de [5]) Seja $X$ um espaço Hausdorff, compacto e com base enumerável. Então existe uma aplicação quociente $K \to X$, em que $K$ é o Conjunto de Cantor.*

**Corolário 2.29.** *Seja $X$ um espaço Hausdorff, compacto e com base enumerável. Então $\#X \leqslant 2^{\aleph_0}$.*

*Demonstração.* Imediato. □

Repare também que se $X$ é um espaço Hausdorff compacto, então base enumerável implica separabilidade. Mas a recíproca é falsa. Como contra-exemplo temos $\beta\mathbb{N}$ que é separável ($\mathbb{N}$ é denso em $\beta\mathbb{N}$) mas não possui base enumerável.

**Lema 2.30.** *Sejam $X$ um espaço Hausdorff, $f : X \to \bar{X}$ uma compactificação de $X$ e $\tilde{f} : \beta X \to \bar{X}$ o mapa induzido por $f$. Então $\tilde{f}(\beta X - b(X)) = \bar{X} - f(X)$.*

*Demonstração.* Seja $x \in \beta X$ tal que $\tilde{f}(x) \in f(X)$. Existe uma rede $\{b(x_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ de pontos em $b(X)$ que converge para $x$. Como $\tilde{f}$ é contínua, segue que $\{\tilde{f}(b(x_\gamma))\}_{\gamma \in \Gamma}$ converge para $\tilde{f}(x)$ em $\bar{X}$. Mas temos que $\{\tilde{f}(b(x_\gamma))\}_{\gamma \in \Gamma} = \{f(x_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ e $f$ é um mergulho, o que implica que $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ converge em $X$ e portanto $x \in b(X)$. Logo $\tilde{f}(\beta X - b(X)) \subseteq \bar{X} - f(X)$. Como $\tilde{f}(b(X)) = f(X)$ e $\tilde{f}$ é sobrejetiva, segue que $\tilde{f}(\beta X - b(X)) = \bar{X} - f(X)$. □

**Proposição 2.31.** *Sejam $X$ um espaço Hausdorff e $f : X \to \bar{X}$ uma compactificação de $X$. Então $f(X)$ é aberto em $\bar{X}$ se e somente se $X$ é localmente compacto.*

*Demonstração.* Temos que aberto de espaço localmente compacto é localmente compacto. Portanto, se $X$ é aberto de um compacto, então $X$ é localmente compacto.

Suponha que $X$ é localmente compacto. Temos que a aplicação de inclusão $\iota : X \to X \cup \{\infty\}$ induz uma aplicação contínua $\tilde{\iota} : \beta X \to X \cup \{\infty\}$. Pelo lema anterior, temos que $\beta X - b(X) = \tilde{\iota}^{-1}(\infty)$, o que implica que $\beta X - b(X)$ é fechado em $\beta X$. Temos que a compactificação $f$ induz uma aplicação contínua $\tilde{f} : \beta X \to \tilde{X}$. Como $\beta X - b(X)$ é fechado, e portanto compacto, e $\tilde{f}(\beta X - b(X)) = \bar{X} - f(X)$, segue que $\bar{X} - f(X)$ é compacto, e portanto fechado. Segue então que $f(X)$ é aberto. $\square$

**Observação.** Provavelmente existe uma forma mais simples de demonstrar essa proposição, sem usar a compactificação de Stone-$\check{C}$ech.

## 2.4 Funtorialidade

Sejam $T_{3,5}Top$ a categoria de espaços completamente regulares e funções contínuas e $T_2Comp$ a categoria de espaços Hausdorff compactos. Temos uma inclusão entre as categorias $\mathcal{I} : T_2Comp \to T_{3,5}Top$. Construiremos um funtor na outra direção:

Seja $\mathcal{B} : T_{3,5}Top \to T_2Comp$ dado por $\mathcal{B}(X) = \beta X$. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua entre espaços completamente regulares. Tomemos a inclusão $b_Y : Y \to \beta Y$. Então a função $b_Y \circ f : X \to \beta Y$ induz uma função contínua $\tilde{f} : \beta X \to \beta X$ que é a única que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "b_Y"] & \beta Y
\end{tikzcd}$$

Definimos então $\mathcal{B}(f) = \tilde{f}$.

**Proposição 2.32.** *$\mathcal{B}$ é um funtor covariante.*

*Demonstração.* Se $X$ é um espaço completamente regular, então o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "id_X"'] & \beta X \arrow[d, "id_{\beta X}"] \\
X \arrow[r, "b_X"] & \beta X
\end{tikzcd}
$$

Pela unicidade de $\tilde{id_X}$, segue que $\mathcal{B}(id_X) = id_{\beta X}$.

Sejam $X$, $Y$ e $Z$ espaços completamente regulares e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicações contínuas. Temos que os dois diagramas comutam:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
Y \arrow[r, "b_Y"] \arrow[d, "g"'] & \beta Y \arrow[d, "\tilde{g}"] \\
Z \arrow[r, "b_Z"] & \beta Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "g \circ f"'] & \beta X \arrow[d, "g \tilde{\circ} f"] \\
Z \arrow[r, "b_Z"] & \beta Z
\end{tikzcd}
$$

Pela unicidade de $g \tilde{\circ} f$, segue que $\mathcal{B}(g \circ f) = \mathcal{B}(g) \circ \mathcal{B}(f)$.

Portanto $\mathcal{B}$ é um funtor covariante. $\square$

**Proposição 2.33.** *$\mathcal{B}$ é adjunto à esquerda de $\mathcal{I}$.*

*Demonstração.* Se $X$ é um espaço completamente regular, então o par $(\beta X, b_X)$, com $b_X : X \to \beta X$ a compactificação de Stone-$\check{C}$ech, é uma reflexão de $X$ pelo funtor $\mathcal{I}$ (devido à própria definição de compactificação de Stone-$\check{C}$ech). Temos também que $b = \{b_X : X \in T_{3,5}Top\}$ é uma transformação natural $id_{T_{3,5}Top} \Rightarrow \mathcal{I} \circ \mathcal{B}$. Mas essas são condições necessárias e suficientes para que $\mathcal{B}$ seja adjunto à esquerda de $\mathcal{I}$ (Teorema 3.1.5 de [2]). $\square$

# Referências


[1] L. F. Alrichi, *Notas de aula.* Notas de aula de curso de Aplicações de teoria de conjuntos no ICMC na USP, 2020.

[2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1 - Basic Category Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Great Britain, 1994. Zbl 1143.18001 MR 1291599

[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General Topology. Part 1.* Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966. Zbl 0301.54001 MR 0205210

[4] J. R. Munkres, *Topology* $2^{nd}$ ed. Prentice Hall, 2000.

[5] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1968. Zbl 0205.26601 MR 0264581