Contents

1 Limites

Nesta seção vamos estabelecer os conceitos básicos sobre limites com definições básicas, exemplos e alguns resultados que serão úteis mais à frente.

Example 1.1. *(1) Sejam X e Y conjuntos e considere o produto cartesiano $X \times Y$. Sempre podemos considerar as projeções canônicas*

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

dadas por $\pi_X(x, y) := x$ e $\pi_Y(x, y) := y$ para todos $x \in X, y \in Y$.

Considere Z um terceiro conjunto junto com funções $p_X : Z \to X$ e $p_Y : Z \to Y$. Com isso, podemos construir uma função $p : Z \to X \times Y$ dada por $p(z) := (p_X(z), p_Y(z))$ para todo $z \in Z$. Note que assim definida temos trivialmente $\pi_X \circ p = p_X$ e $\pi_Y \circ p = p_Y$.

Afirmamos que p é a única função de Z a $X \times Y$ com essa propriedade. De fato, se $p' : Z \to X \times Y$ é tal que $\pi_X \circ p' = p_X$ e $\pi_Y \circ p' = p_Y$, então para todo $z \in Z$, $p'(z)$ é um elemento de $X \times Y$ cuja coordenada X é $p_X(z)$ e cuja coordenada Y é $p_Y(z)$ – ou seja, $p'(z) = (p_X(z), p_Y(z))$. Contudo, isso é a definição de $p(z)$ – logo $p = p'$ e p é única.

Isso nos diz que dados dois conjuntos X e Y quaisquer, o produto cartesiano deles $X \times Y$ satisfaz duas condições:

(a) Existem funções $\pi_X : X \times Y \to X$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$;

(b) Se Z é um outro conjunto qualquer com funções $p_X : Z \to X$ e $p_Y : Z \to Y$, então existe uma única função $p : Z \to X \times Y$ tal que $p_X = \pi_X \circ p$ e $p_Y = \pi_Y \circ p$.

Podemos representar isso pelo diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, dashed, "!p"] \arrow[ddl, bend right, "p_X"'] \arrow[ddr, bend left, "p_Y"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

*(2) Seja $(P, \leq)$ um poset. Dados $a, b \in P$, podemos nos perguntar se existe $c \in P$ tal que $c \leq a$ e $c \leq b$ (isso corresponde a uma flecha $c \to a$ e uma flecha $c \to b$ na categoria $(P, \leq)$). Caso exista tal $c \in P$, podemos nos perguntar se existe um **maior** tal c – ou seja, se o conjunto $\{c \in P \mid c \leq a, c \leq b\}$ possui máximo. Tal elemento é comumente chamado de **ínfimo** de a e b, e denotado por $a \wedge b$.*

Suponha que $a \wedge b$ existe (se quiser, suponha que $(P, \leq)$ é um reticulado). Assim, $a \wedge b$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Existem flechas $a \wedge b \to a$ e $a \wedge b \to b$;

(b) Se $c \in P$ é tal que existem flechas $c \to a$ e $c \to b$, então existe uma única flecha $c \to a \wedge b$.

Analogamente ao exemplo anterior, podemos representar isso pelo diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[d, dashed, "!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & a \wedge b \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

(3) *Sejam, novamente, X e Y dois conjuntos arbitrários. Suponha agora que tenhamos duas funções $f, g : X \to Y$. Faz sentido construir o conjunto*

$$E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

chamado de ***equalizador*** *de f e g.*

Note que temos duas funções naturais $i : E \to X$ e $j : E \to Y$ dadas por $i(x) := x$ e $j(x) := f(x)$ para todo $x \in E$. Claramente essas funções satisfazem $f \circ i = j = g \circ i$.

Suponha agora que tenhamos um outro conjunto, Z, junto com funções $m : Z \to X$ e $n : Z \to Y$ tais que $f \circ m = n = g \circ m$. Note que isso implica que para todo $z \in Z$ temos que $f(m(z)) = g(m(z))$. Assim, temos que para todo $z \in Z$, o elemento $m(z)$ pertence a E (por definição). Isso nos permite definir uma função $e_Z : Z \to E$ dada por $e_Z(z) := m(z)$ para todo $z \in Z$.

Assim definida, vemos que

$$
\begin{aligned}
(i \circ e_Z)(z) &= i(e_Z(z)) \\
&= e_Z(z) \\
&= m(z)
\end{aligned}
$$

para todo $z \in Z$, e portanto $i \circ e_Z = m$.

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
(j \circ e_Z)(z) &= j(e_Z(z)) \\
&= f(e_Z(z)) \\
&= f(m(z)) \\
&= n(z)
\end{aligned}
$$

para todo $z \in Z$, e portanto $j \circ e_Z = n$.

Ou seja, o conjunto E satisfaz as seguintes condições:

(a) *Existem funções $i : E \to X$ e $j : E \to Y$ tais que $f \circ i = j = g \circ i$;*

(b) *Se Z é um conjunto com funções $m : Z \to X$ e $n : Z \to Y$ tais que $f \circ m = n = g \circ m$, então existe uma única função $e_Z : Z \to E$ tal que $m = i \circ e_Z$ e $n = j \circ e_Z$.*

Em termos de diagramas, temos o seguinte:

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dashed, "!e_Z"] \arrow[ddl, bend right, "m"'] \arrow[ddr, bend left, "n"] & \\
 & E \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\
X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

(4) *Sejam G e H grupos abelianos quaisquer e considere $f, g : G \to H$ homomorfismos de grupos quaisquer. Nesse caso o subgrupo $K := \mathrm{Ker}(f - g)$ de G tem um papel similar do conjunto equalizador acima:*

(a) *Existem homomorfismos de grupos $i : K \to G$ e $j : K \to H$ tais que $f \circ i = j = g \circ i$;*

(b) *Se F é algum grupo abeliano junto com homomorfismos de grupos $m : F \to G$ e $n : F \to H$ tais que $f \circ m = n = g \circ m$, então existe um único homomorfismo de grupos $k_F : F \to K$ tal que $m = i \circ k_F$ e $n = j \circ k_F$.*

Para ver isso, basta tomar i como a inclusão canônica de K em G; j como sendo $f \circ i$ (ou $g \circ i$, tanto faz); e dados F, m e n como acima, podemos definir k_F exatamente como em conjuntos: A igualdade $f \circ m = g \circ m$ implica que para todo $a \in F$ temos $f(m(a)) = g(m(a))$ – e, portanto, $(f - g)(m(a)) = 0$, donde vemos que $m(a) \in K$ para todo $a \in F$. Assim, definimos $k_F(a) := m(a)$ para todo $a \in A$ e vemos que tudo funciona.

Novamente, o diagrama fica:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, dashed, "!k_F"] \arrow[ddl, bend right, "m"'] \arrow[ddr, bend left, "n"] & \\
 & K \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\
G \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & H
\end{tikzcd}$$

(5) *Sejam, novamente, X e Y dois conjuntos, e $f : X \to Y$ uma função qualquer. Considere ainda Z um subconjunto qualquer de Y, junto com sua inclusão canônica $i : Z \to Y$. Podemos então considerar o conjunto $W := f^{-1}(Z)$.*

Esse conjunto é um subconjunto de X, então possui uma inclusão canônica $j : W \to X$. Além disso, como W é a pré-imagem de Z por f, se aplicarmos f a cada ponto de W vamos obter um ponto em Z – ou seja, podemos definir $g : W \to Z$ dada por $g(w) := f(w)$ para todo $w \in W$. Note que assim definidas essas funções, temos trivialmente que $f \circ j = i \circ g$.

Suponha agora que tenhamos um outro conjunto A, junto com funções $l : A \to X$ e $h : A \to Z$ tais que $f \circ l = i \circ h$. Nesse caso, como i é uma inclusão canônica e $f(l(a)) \in \operatorname{Im} A$, isso nos diz que $h(a) \in \operatorname{Im} f \cap Z$ para todo $a \in A$. Assim, $l(a) \in X$ é tal que $f(l(a)) \in Z$ – ou seja, $l(a) \in W$. Isso nos permite definir uma (única!) função $p_A : A \to W$ tal que $l = j \circ p_A$ e $h = g \circ p_A$ – basta tomar $p_A(a) := l(a)$ para todo $a \in A$.

Portanto, o conjunto W satisfaz as seguintes propriedades:

(a) *Existem funções $j : W \to X$ e $g : W \to Z$ tais que $f \circ j = i \circ g$;*

(b) *Se A é um conjunto junto com funções $l : A \to X$ e $h : A \to Z$ tais que $f \circ l = i \circ h$, então existe uma única função $p_A : A \to W$ tal que $l = i \circ p_A$ e $h = g \circ p_A$.*

Em termos de diagramas, temos:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "!p_A"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "l"'] & & \\
 & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & Z \arrow[d, "i"] \\
 & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(6) *Considere o conjunto $1 := \{\varnothing\}$. Como esse conjunto possui apenas um elemento, dado qualquer outro conjunto X, existe uma única função $!_X : X \to 1$ dada por $!_X(x) := \varnothing$ para todo $x \in X$.*

Em termos de diagramas, temos

$$X \underset{!_X}{\dashrightarrow} 1.$$

(7) *Considere o grupo trivial $1 = \{e\}$. Como esse grupo possui apenas a identidade, dado qualquer outro grupo G, existe um único homomorfismo de grupos $!_G : G \to 1$ dado por $!_G(g) := e$ para todo $g \in G$.*

Em diagramas, isso pode ser expresso como:

$$G \underset{!_G}{\dashrightarrow} 1.$$

Todos esses exemplos têm uma essência em comum: A gente começa com algum diagrama; a partir desse diagrama obtemos um objeto na categoria que possui flechas para cada objeto no diagrama que comuta todos os triângulos que aparecem; esse objeto que nós obtemos é "especial", no sentido em que qualquer outro objeto com flechas para todos os objetos do diagrama comutando os triângulos que aparecem "se fatora" pelo nosso objeto. Isso é o que nós vamos chamar de limite.

Definition 1.2. Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorias e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor. Nós diremos que F é um **diagrama** de formato $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$.

Example 1.3. *(1) Os diagramas*

$$X \qquad Y\ , \qquad a \qquad b$$

nos exemplos (1) e (2) acima correspondem aos funtores

$$F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}, \qquad F' : \mathscr{C} \to (P, \leq),$$

respectivamente, onde

$$\mathscr{C} := \ \bullet \qquad *,$$

F é dado por $F(\bullet) := X$ e $F(*) := Y$, e F' é dado por $F'(\bullet) := a$ e $F'(*) := b$.

(2) Os diagramas

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y\ , \qquad G \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} H$$

nos exemplos (3) e (4) acima correspondem aos funtores

$$F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}, \qquad F' : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab},$$

respectivamente, onde

$$\mathscr{C} := \ \bullet \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} *,$$

F é dado por $F(\bullet) := X$, $F(*) := Y$, $F(\alpha) := f$ e $F(\beta) := g$, e F' é dado por $F'(\bullet) := G$, $F'(*) := H$, $F'(\alpha) := f$ e $F'(\beta) := g$.

(3) O diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

no exemplo (5) acima corresponde ao funtor

$$F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$$

onde

$$\mathscr{C} := \begin{tikzcd} & \star \arrow[d, "\beta"] \\ \bullet \arrow[r, "\alpha"'] & *, \end{tikzcd}$$

e F é dado por $F(\bullet) := X$, $F(*) := Y$, $F(\star) := Z$, $F(\alpha) := f$ e $F(\beta) := i$.

(4) O diagrama vazio

nos exemplos (6) e (7) acima corresponde aos funtores

$$F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}, \qquad F' : \mathscr{C} \to \mathrm{Grp}$$

onde

$$\mathscr{C} :=$$

é a categoria vazia (sem objetos ou morfismos) e F e F' são os funtores vazios.

Definition 1.4. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria pequena, $\mathscr{D}$ uma categoria e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um diagrama de formato $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$.

Um **cone** de F é um par $(d, \{d_c\}_{c \in \mathscr{C}})$ onde:

- d é um objeto de $\mathscr{D}$;
- Para cada $c \in \mathscr{C}$, d_c é um morfismo
$$d_c : d \to Fc$$
em $\mathscr{D}$ e;
- Para cada par de objetos $c, c' \in \mathscr{C}$ e cada morfismo $f : c \to c'$ em $\mathscr{C}$, temos que $d_{c'} = F(f) \circ d_c$ – ou seja, todos os diagramas da forma
$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "d_c"'] \arrow[dr, "d_{c'}"] & \\ Fc \arrow[rr, "F(f)"'] & & Fc' \end{tikzcd}$$
comutam.

Definition 1.5. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria pequena, $\mathscr{D}$ uma categoria e $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um diagrama de formato $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$.

Um **limite** de F é um cone $(\lim\limits_{c \in \mathscr{C}} Fc, \{\phi_c\}_{c \in \mathscr{C}})$ de F satisfazendo: Se $(d, \{d_c\}_{c \in \mathscr{C}})$ é um cone de F, então existe um único morfismo $d_\phi : d \to \lim\limits_{c \in \mathscr{C}} Fc$ em $\mathscr{D}$ tal que para todo $c \in \mathscr{C}$ temos $d_c = \phi_c \circ d_\phi$ – ou seja, todos os diagramas da forma
$$\begin{tikzcd} d \arrow[rr, dashed, "!d_\phi"] \arrow[dr, "d_c"'] & & \lim\limits_{c \in \mathscr{C}} Fc \arrow[dl, "\phi_c"] \\ & Fc & \end{tikzcd}$$
comutam.

Segue das considerações anteriores, que os exemplos (1) e (2) são limites do diagrama
$$\bullet \qquad *,$$
nas categorias Set e $(P, \leq)$, respectivamente; que os exemplos (3) e (4) são limites do diagrama
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & *, \end{tikzcd}$$
em Set e Ab, respectivamente; que o exemplo (5) é um limite do diagrama
$$\begin{tikzcd} & \star \arrow[d, "\beta"] \\ \bullet \arrow[r, "\alpha"'] & *, \end{tikzcd}$$
em Set; e que os exemplos (6) e (7) são limites do diagrama vazio em Set e Grp, respectivamente.

Definition 1.6. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria qualquer, c, c', c'' objetos de $\mathscr{C}$.

- O limite do diagrama
$$c \qquad c'$$
em $\mathscr{C}$ é chamado de **produto** de c e c', e denotado por $c \prod c'$.
- O limite do diagrama
$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & c' \end{tikzcd}$$
em $\mathscr{C}$ é chamado de **equalizador** de α e β, e denotado por $\mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$.

- O limite do diagrama

$$\begin{tikzcd} & c'' \arrow[d, "\beta"] \\ c \arrow[r, "\alpha"'] & c' \end{tikzcd}$$

em $\mathscr{C}$ é chamado de **pullback** de α e β (ou "de β ao longo de α"), e denotado por $c \prod_{c'} c''$. Em alguns contextos, esse limite é chamado de *produto fibrado de c e c'' sobre c'*.

- O limite do diagrama vazio em $\mathscr{C}$ é chamado de **objeto terminal** de $\mathscr{C}$, e denotado por 1, T ou $\top$.

Nessa definição usamos várias vezes o artigo definido "o" para qualificar o limite de um funtor, sendo que nossa definição não exige unicidade. Isso se deve a um motivo muito simples:

Lemma 1.7. *Seja $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor. Então se F possui limite, ele é único (a menos de isomorfismo).*

Proof. Sejam $(d, \{d_c\}_{c\in\mathscr{C}})$ e $(d', \{d'_c\}_{c\in\mathscr{C}})$ dois limites de F.

Como d é limite, em particular d é cone. Como d é cone e d' é limite, existe um único morfismo $\phi : d \to d'$ tal que para todo $c \in \mathscr{C}$, temos $d'_c \circ \phi = d_c$.

Como d' é limite, em particular d' é cone. Como d' é cone e d é limite, existe um único morfismo $\psi : d' \to d$ tal que para todo $c \in \mathscr{C}$, temos $d_c \circ \psi = d'_c$.

Como d é cone e d é limite, existe um único morfismo $\Phi : d \to d$ tal que para todo $c \in \mathscr{C}$ temos $d_c \circ \Phi = d_c$. Claramente id_d satisfaz essa propriedade – logo a unicidade de Φ nos garante $\Phi = \mathrm{id}_d$.

Afirmamos que para todo $c \in \mathscr{C}$ temos $d_c \circ (\psi \circ \phi) = d_c$ – e portanto $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_d$. De fato, dado qualquer $c \in \mathscr{C}$ temos que no diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "d_c"'] & d' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "d'_c"] & d \arrow[dl, "d_c"] \\ & Fc & \end{tikzcd}$$

todos os triângulos comutam (por definição de ψ e ϕ). Em particular, temos:

$$d_c \circ (\psi \circ \phi) = (d_c \circ \psi) \circ \phi = d'_c \circ \phi = d_c$$

mostrando que para todo $c \in \mathscr{C}$, temos que $d_c \circ (\psi \circ \phi) = d_c$ – ou seja, $\psi \circ \phi = \Phi = \mathrm{id}_d$.

Um argumento análogo mostra que para todo $c \in \mathscr{C}$ temos $d'_c \circ (\phi \circ \psi) = d'_c$ – e como d' é limite, o único morfismo que pode satisfazer isso é a identidade de d' – mostrando que $\mathrm{id}_{d'} = \phi \circ \psi$.

Com isso vemos que ψ e ϕ são inversas, e que portanto d e d' são isomorfos. $\square$

Isso resolve a unicidade do limite, mas e quanto à existência?

Example 1.8. *Seja*

$$\mathscr{C} := \begin{matrix} \star & & * \\ & \bullet & \end{matrix}$$

Essa categoria não possui quaisquer limites.

Example 1.9. *Seja $(\mathbb{N}, |)$ o poset dos naturais com a ordem da divisibilidade (i.e., $a \preceq b$ se, e somente se, $a \mid b$). Essa categoria possui produtos binários: Dados naturais $a, b \in \mathbb{N}$, o natural $\mathrm{mdc}(a, b)$ é, por definição, o produto de a e b na categoria $(\mathbb{N}, |)$: De fato, ele divide a e b, e qualquer outro divisor comum de a e b deve também dividir o mdc.*

Essa categoria também possui objeto terminal: O número 0. De fato, para todo $a \in \mathbb{N}$, temos uma única seta de a para 0 (já que todo natural divide 0).

Nessa categoria, porém, o equalizador e o pullback são degenerados: Como entre dois objetos temos (no máximo) um morfismo, dado um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

necessariamente temos que $f = g$ (e que $a \mid b$) – e portanto $\mathrm{Eq}(f,g) = a$*, com os morfismos* $\mathrm{id}_a : a \to a$ *e* $f = g : a \to b$.

Similarmente, dado um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[d] \\ a \arrow[r] & b, \end{tikzcd}$$

como $\mathrm{mdc}(a,c)$ *já possui setas para a e para c, e como entre dois objetos temos (no máximo) um morfismo, segue que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{mdc}(a,c) \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ a \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

já é um diagrama de pullback.

Por outro lado, se considerarmos $(\mathbb{N}, \leq)$ *o poset dos naturais com a ordem usual, então estamos numa situação um pouco diferente: Novamente, temos que em todo diagrama da forma*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

o equalizador de f e g é a. Contudo, agora, dados dois naturais $a, b \in \mathbb{N}$, para achar o produto categórico de a e b, precisamos encontrar o maior natural $c \in \mathbb{N}$ que seja menor que a e b ao mesmo tempo. Isso sempre existe, e é dado por $c := \min\{a,b\}$*. Novamente, o pullback coincide com o produto – contudo neste caso não temos objeto terminal. Afinal, um objeto terminal seria um natural c tal que $n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que não acontece.*

Note ainda que em $(\omega + 1, \leq)$, tudo acontece exatamente igual, com uma única diferença: Agora temos objeto terminal – ω.

Então podemos ver no exemplo acima que mesmo categorias muito parecidas podem diferir bastante quanto à existência de limites.

Definition 1.10. Uma categoria é dita **completa** se possui todos os seus limites.

O que precisamos, então, é de um critério para determinar se uma categoria é (ou não) completa. Para isso, vamos voltar a analizar pullbacks e objetos terminais:

Considere uma categoria $\mathscr{C}$, objetos c, c', c'' em $\mathscr{C}$ e um diagrama

$$\begin{tikzcd} & c'' \arrow[d, "\beta"] \\ c \arrow[r, "\alpha"'] & c' \end{tikzcd}$$

também em $\mathscr{C}$. Suponha que $\mathscr{C}$ possui todos os produtos finitos e equalizadores. Então podemos construir o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Eq}(\alpha \circ \pi_c, \beta \circ \pi_{c''}) \arrow[dr, "i"] & & \\ & c\Pi c'' \arrow[r, "\pi_{c''}"] \arrow[d, "\pi_c"'] & c'' \arrow[d, "\beta"] \\ & c \arrow[r, "\alpha"'] & c' \end{tikzcd}$$

Claramente $\mathrm{Eq}(\alpha \circ \pi_c, \beta \circ \pi_{c''})$ é um cone para o diagrama original, já que possui flechas para c e para c'' que comutam o diagrama (por definição).

Por outro lado, qualquer outro cone d com mapas $d_c : d \to c$ e $d_{c''} : d \to c''$ comutando o diagrama induz, por definição de produto, um único mapa $d_{c\Pi c''} : d \to c\Pi c''$ que comuta o quadrado. Por outro lado, por definição de equalizador, esse mapa induz um único mapa $d_{\text{Eq}} : d \to \text{Eq}(\alpha \circ \pi_c, \beta \circ \pi_{c''})$ – mostrando assim que $\text{Eq}(\alpha \circ \pi_c, \beta \circ \pi_{c''}) \cong c \prod_{c'} c''$.

O espírito dessa construção é claro: Usar produtos e equalizadores para construir outros limites.

Isso faz sentido, abstratamente: Se temos um diagrama F, podemos ignorar todos os morfismos em F e tomar o produto de todos os objetos de F. Feito isso, podemos, agora, "forçar" as projeções canônicas a respeitar os morfismos do diagrama – para isso usamos equalizadores.

O único problema é: Como vimos no exemplo de $(\mathbb{N}, \leq)$ acima, isso não basta. Nesse exemplo, temos equalizadores (como sendo a identidade) e produtos (como sendo o mínimo) – e de fato temos pullback (que, como a construção acima sugere, é de fato o produto), mas não temos objeto terminal.

Isso acontece porque essa categoria na verdade *não possui todos os produtos finitos*. Se o produto de $n \in \mathbb{N}$ objetos é simplesmente o limite de um funtor partindo da categoria discreta $\{0, 1, \cdots, n-1\}$, segue, por necessidade, que o produto de 0 objetos é o limite de um funtor partindo da categoria discreta com 0 objetos – a categoria vazia. Mas já vimos que o limite de qualquer funtor sobre a categoria vazia é o objeto terminal!

Portanto, quando dizemos que uma categoria possui *todos os produtos finitos* nós estamos automaticamente incluindo o produto de zero objetos – ou seja, o objeto terminal.

Dito de outra forma, o que a construção acima parece sugerir, então, é que para uma categoria ter todos os limites precisamos que ela tenha produtos; equalizadores e; objeto terminal.

Agora sim temos um resultado:

Lemma 1.11. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Então $\mathscr{C}$ possui todos os limites finitos se, e somente se, possui todos os produtos finitos (incluindo o objeto terminal) e equalizadores.*

Analogamente, para qualquer cardinal κ, a categoria $\mathscr{C}$ possui todos os limites de cardinalidade κ se, e somente se, possui todos os produtos de cardinalidade κ e equalizadores.

Para encerrar esta seção, vamos enunciar um resultado que parece mágico e que vai nos dar ferramentes muito poderosas nas seções seguintes.

Para isso, vamos precisar de mais uma construção:

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias.

Considere a categoria $\text{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ de funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$, cujos mofismos são transformações naturais e cuja composição é a composição vertical de transformações naturais.

Com isso, podemos considerar o funtor constante

$$\text{const} : \mathscr{D} \to \text{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$$

que associa a cada objeto $d \in \mathscr{D}$ o funtor const_d dado por $\text{const}_d(c) := d$ para todo $c \in \mathscr{C}$ e $\text{const}_d(f) := \text{id}_d$ para todo morfismo f em $\mathscr{C}$.

Por outro lado, se supusermos que $\mathscr{C}$ é uma categoria pequena (digamos, de cardinalidade κ) e que $\mathscr{D}$ possui todos os limites de cardinalidade κ, podemos considerar um funtor na outra direção:

$$\lim_{c \in \mathscr{C}} : \text{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \to \mathscr{D}$$

que associa a cada funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ seu limite $\lim_{c \in \mathscr{C}} Fc \in \mathscr{D}$.

Note que existe um único jeito de fazer isso funcionar como um funtor: Se $\alpha : F \to G$ é uma transformação natural entre os funtores F e G, então podemos encarar α como um conjunto de morfismos $\{\alpha_c : Fc \to Gc\}_{c \in \mathscr{C}}$ em $\mathscr{D}$. Além disso, "naturalidade" nos garante que $\lim_{c \in \mathscr{C}} Fc$ é um cone de G – e portanto induz um único mapa de $\lim_{c \in \mathscr{C}} Fc$ para $\lim_{c \in \mathscr{C}} Gc$, que nós vamos chamar de $\lim_{c \in \mathscr{C}} \alpha$. Isso torna $\lim_{c \in \mathscr{C}}$ um funtor, de fato.

A pergunta natural, então, é se tem alguma relação entre esses funtores. E a resposta é – sim!

Lemma 1.12. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pequena (de cardinalidade κ) e $\mathscr{D}$ uma categoria que possui todos os limites de cardinalidade κ. Então o funtor* const *é adjunto esquerdo do funtor* $\lim_{c \in \mathscr{C}}$.

Além disso, a counidade dessa adjunção é naturalmente isomorfa à identidade, enquanto a unidade é a transformação natural cujas componentes são exatamente as coordenadas do limite.

Para ver isso, suponha que $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ são como no enunciado do lema. Nesse caso, a counidade da adjunção do lema é da forma

$$\epsilon : \mathrm{id}_{\mathscr{D}} \to \lim_{c\in\mathscr{C}} \circ\, \mathrm{const}$$

que possui componentes da forma

$$\epsilon_d : d \to \lim_{c\in\mathscr{C}}(\mathrm{const}_d(c))$$

para todo $d \in \mathscr{D}$. Note que como $\mathrm{const}_d(c) = d$ para todo $c \in \mathscr{C}$ e todo $d \in \mathscr{D}$, temos que

$$\lim_{c\in\mathscr{C}}(\mathrm{const}_d(c)) = \lim_{c\in\mathscr{C}} d.$$

Precisamos então achar um objeto de $\mathscr{D}$ que tenha uma flecha terminando em d, e que qualquer outro objeto com uma flecha terminando em d se fatore por ele. Não é difícil se convencer de que isso só pode ser o objeto d. Logo, $\lim_{c\in\mathscr{C}}(\mathrm{const}_d(c)) \cong d$, e ϵ_d é exatamente esse isomorfismo.

Por outro lado, a unidade é dada por

$$\eta : \mathrm{const} \circ \lim_{c\in\mathscr{C}} \to \mathrm{id}_{\mathrm{Fun}(\mathscr{C},\mathscr{D})}$$

com componentes da forma

$$\eta_F : \mathrm{const}_{\lim_{c\in\mathscr{C}} Fc} \to F.$$

Isso, por sua vez, é uma transformação natural com componentes

$$\eta_{F\,c} := \mathrm{const}_{\lim_{c\in\mathscr{C}} Fc}(c) \to Fc,$$

que, por definição do funtor const, é simplesmente

$$\eta_{F\,c} := \lim_{c\in\mathscr{C}} Fc \to Fc.$$

Novamente, não é difícil ver que esses morfismos em $\mathscr{D}$ vão ser exatamente os morfismos que apresentam $\lim_{c\in\mathscr{C}} Fc$ como um cone de F.

Proof. Vamos mostrar que a identidade $\mathrm{id} : \mathrm{id}_{\mathscr{D}} \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ é uma counidade.

Para isso, dados $d \in \mathscr{D}$, $F \in \mathrm{Fun}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ e $f : d \to \lim_{c\in\mathscr{C}} Fc$, temos que mostrar que existe um único $\varphi : \mathrm{const}_d \to F$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\lim_{c\in\mathscr{C}} \varphi"] & \lim_{c\in\mathscr{C}} Fc \\ d \arrow[u, "\mathrm{id}_d"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Mas isso é fácil: Por definição, o limite de F é um cone $(\lim_{c\in\mathscr{C}} Fc, \{\phi_c\}_{c\in\mathscr{C}})$.

Pré-compondo cada φ_c com f, obtemos um conjunto de morfismos $\{\phi_c \circ f : d \to Fc\}_{c\in\mathscr{C}}$. Esse conjunto representa a transformação natural $\varphi : \mathrm{const}_d \to F$ – simplesmente tomamos $\varphi_c : \mathrm{const}_d(c) \to Fc$ como sendo $\phi_c \circ f$ para todo $c \in \mathscr{C}$ (isso faz sentido, já que $\mathrm{const}_d(c) = d$ para todo $c \in \mathscr{C}$).

Por definição, $\lim_{c\in\mathscr{C}} \varphi$ é o único morfismo de d em $\lim_{c\in\mathscr{C}} Fc$ induzido pelos morfismos $\{\varphi_c\}_{c\in\mathscr{C}}$. Contudo, como $\varphi_c = \phi_c \circ f$ para todo $c \in \mathscr{C}$, por definição, temos que f é um morfismo de d em $\lim_{c\in\mathscr{C}} Fc$ induzido pelos morfismos $\{\varphi_c\}_{c\in\mathscr{C}}$. Segue que $\lim_{c\in\mathscr{C}} \varphi = f$, e que $\mathrm{id} : \mathrm{id}_{\mathscr{D}} \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ é a counidade de uma adjunção. $\square$

2 Limites inversos e Espaços Profinitos

Nesta seção vamos falar de limites inversos e de espaços e conjuntos profinitos.

Definition 2.1. Seja $(P, \leq)$ um poset. Diremos que $(P, \leq)$ é um **conjunto direcionado** se para quaisquer $a, b \in P$ existe algum $c \in P$ tal que $a \leq c$ e $b \leq c$.

Exemplos imediatos de conjuntos direcionados incluem, claramente, conjuntos totalmente ordenados e join-semirreticulados (i.e., posets nos quais todo conjunto finito não-vazio possui um supremo). Então os posets $(\mathbb{N}, |)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$, exemplos da seção anterior, são conjuntos direcionados.

Também está claro que se $(P, \leq)$ é um poset, $(S, \leq)$ é um subposet de P e $(S, \leq)^{op}$ é um conjunto direcionado, então o fecho superior de $(S, \leq)$ é um filtro em $(P, \leq)$.

Com isso, vamos finalmente apresentar um dos tipos de limites mais importantes que vamos encontrar: Limites inversos.

Definition 2.2. Seja $\mathscr{P} := (P, \leq)$ um conjunto direcionado, $\mathscr{C}$ uma categoria e $F : \mathscr{P}^{op} \to \mathscr{C}$ um diagrama. O limite de F, se existir, será chamado de um **limite inverso** e denotado por

$$\varprojlim_{p \in P} Fp.$$

Além disso, um funtor dessa forma é chamado de um **sistema inverso**.

Vamos esclarecer essa definição.

Primeiro, exibir um tal funtor $F : \mathscr{P}^{op} \to \mathscr{C}$ corresponde a exibir um conjunto de objetos $\{F_p\}_{p \in P}$ em $\mathscr{C}$ e, para cada $p \leq q \in P$, um morfismo $\phi_{p,q} : Fq \to Fp$ satisfazendo:

(i.) $\phi_{p,p} = \mathrm{id}_{Fp}$ para todo $p \in P$;

(ii.) Se $p \leq q \leq r$, então $\phi_{p,r} = \phi_{p,q} \circ \phi_{q,r}$.

Feito isso, exibir um limite para esse funtor significa exibir um objeto $\varprojlim_{p \in P} Fp \in \mathscr{C}$ e um conjunto de morfismos $\{\phi_q : \varprojlim_{p \in P} Fp \to Fq\}_{q \in P}$ satisfazendo

$$\phi_q = \phi_{q,r} \circ \phi_r$$

sempre que $q \leq r$. E não só isso – precisamos também garantir que se tivermos qualquer outro objeto $c \in \mathscr{C}$ junto com um conjunto de morfismos $\{c_p : c \to Fp\}_{p \in P}$ satisfazendo

$$c_q = \phi_{q,r} \circ c_r$$

sempre que $q \leq r$, então deve existir um único morfismo $c_\phi : c \to \varprojlim_{p \in P} Fp$ tal que para todo $q \in P$ temos

$$c_q = \phi_q \circ c_\phi.$$

Pelo que vimos na seção anterior, isso pode ser construído explicitamente, contanto que $\mathscr{C}$ tenha suficientes produtos e equalizadores (pelo menos da cardinalidade de P):

Example 2.3. *Seja $\mathscr{P} := (P, \leq)$ um conjunto direcionado e $F : \mathscr{P}^{op} \to \mathrm{Set}$ um sistema inverso de conjuntos. Vamos construir o limite inverso desse sistema.*

Para isso, primeiro tomamos o produto

$$\prod_{p \in P} Fp.$$

Em seguida, construímos o seguinte subconjunto (que é um equalizador)

$$L := \left\{ x \in \prod_{p \in P} Fp \mid \textit{para todos } q \leq r \in P, \pi_q(x) = (\phi_{q,r} \circ \pi_r)(x) \right\}.$$

Afirmamos que esse subconjunto é o limite inverso de F.

Primeiro, vamos ver que ele é um cone:

Para isso precisamos de funções $\{\phi_p : L \to Fp\}_{p\in P}$. Mas isso é fácil: Defina $\phi_p := \pi_p \circ \iota$ para todo $p \in P$, onde $\iota : L \to \prod_{p\in P} Fp$ é a inclusão canônica.

Em seguida precisamos ver que essas funções comutam os triângulos – i.e., que se $q \leq r$ em P, então $\phi_q = \phi_{q,r} \circ \phi_r$. Isso novamente é imediato: Tomando $x \in L$ temos:

$$\begin{aligned}(\phi_{q,r} \circ \phi_r)(x) &= \phi_{q,r}(\phi_r(x)) \\ &= \phi_{q,r}(\pi_r(\iota(x))) \\ &= \phi_{q,r}(\pi_r(x)) \\ &= (\phi_{q,r} \circ \pi_r)(x) \\ &= \pi_q(x) \\ &= \pi_q(\iota(x)) \\ &= \phi_q(x).\end{aligned}$$

Com isso mostramos que $(L, \{\phi_p\}_{p\in P})$ é um cone para F.

Suponha agora que tenhamos outro cone para F – digamos $(M, \{\psi_p\}_{p\in P})$. Temos que mostrar que existe um único $\psi_\phi : M \to L$ tal que $\psi_p = \phi_p \circ \psi_\phi$ para todo $p \in P$.

Por definição de produto, os mapas $\{\psi_p\}_{p\in P}$ induzem um único mapa $\tilde{\psi} : M \to \prod_{p\in P} Fp$ tal que $\psi_p = \pi_p \circ \tilde{\psi}$ para todo $p \in P$. Isso implica que as equações $\psi_q = \phi_{q,r} \circ \psi_r$ viram $\pi_q \circ \tilde{\psi} = \phi_{q,r} \circ \pi_r \circ \tilde{\psi}$, para todo $q \leq r$ em P.

Por definição de equalizador, isso nos diz que $\tilde{\psi}$ se fatora unicamente por L através de um morfismo $\psi_\phi : M \to L$ tal que $\tilde{\psi} = \iota \circ \psi_\phi$.

Assim temos, para todo $p \in P$:

$$\begin{aligned}\phi_p \circ \psi_\phi &= (\pi_p \circ \iota) \circ \psi_\phi \\ &= \pi_p \circ (\iota \circ \psi_\phi) \\ &= \pi_p \circ \tilde{\psi} \\ &= \psi_p,\end{aligned}$$

como queríamos.

Vamos agora para um exemplo mais concreto:

Example 2.4. *Seja $X_0 := \{0\}$ e $X_{n+1} := X_n \cup \{n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $\mathscr{N} := (\mathbb{N}, \leq)$ o poset dos naturais com a ordem natural.*

Com isso definimos o seguinte funtor:

$$\begin{aligned}F : \mathscr{N}^{op} &\to \mathrm{Set} \\ n &\mapsto X_n \\ n \to m &\mapsto \phi_{n,m} : X_m \to X_n,\end{aligned}$$

onde

$$\phi_{n,m}(l) := \begin{cases} l, & se\ l \in X_n \\ n, & se\ l \in X_m \setminus X_n \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $n \leq m$ em $\mathbb{N}$. Note que isso de fato é um funtor: $\phi_{n,n}(l) = l$ para todo $l \in X_n$ e todo $n \in \mathbb{N}$; e se $n \leq m \leq l$ em $\mathbb{N}$, então para todo $i \leq l$ temos:

- *Se $i \in X_n$, temos:*

$$\begin{aligned}(\phi_{n,m} \circ \phi_{m,l})(i) &= \phi_{n,m}(\phi_{m,l}(i)) \\ &= \phi_{n,m}(i) \\ &= i \\ &= \phi_{n,l}(i).\end{aligned}$$

- *Se* $i \in X_m \setminus X_n$, *temos:*

$$\begin{aligned}(\phi_{n,m} \circ \phi_{m,l})(i) &= \phi_{n,m}(\phi_{m,l}(i)) \\ &= \phi_{n,m}(i) \\ &= n \\ &= \phi_{n,l}(i).\end{aligned}$$

- *Se* $i \in X_l \setminus X_m$, *temos:*

$$\begin{aligned}(\phi_{n,m} \circ \phi_{m,l})(i) &= \phi_{n,m}(\phi_{m,l}(i)) \\ &= \phi_{n,m}(m) \\ &= n \\ &= \phi_{n,l}(i).\end{aligned}$$

Em todo caso, vemos que $\phi_{n,m} \circ \phi_{m,l} = \phi_{n,l}$ *– mostrando que* F *é de fato funtor.*

Como $\mathscr{N}$ *é um poset direcionado, vemos que* F *é um sistema inverso. Como* Set *possui produtos enumeráveis e equalizadores, sabemos que esse sistema inverso possui um limite.*

Pela construção acima, temos um jeito de obter esse conjunto:

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n \cong \left\{ x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid \text{ se } i \leq j, \text{ então } \pi_i(x) = (\phi_{i,j} \circ \pi_j)(x) \right\}.$$

Pegue um $x \in \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$. *Então, em particular* $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *e, portanto,* x *é uma sequência de números naturais –* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Mais do que isso: A condição "*$i \leq j$ implica $x_i = \phi_{i,j}(x_j)$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$*" nos diz que ou* x *é uma sequência estritamente crescente; ou* x *é uma sequência que cresce até um termo* x_n*, para algum* $n \in \mathbb{N}$*, e depois é constante igual a* x_n.

Dito de outra maneira, esse limite está em bijeção natural com $\omega + 1$*:*

$$\begin{aligned}\psi : \omega + 1 &\to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n \\ \omega &\mapsto (0, 1, 2, \cdots, i-1, i, i+1, \cdots) \\ n &\mapsto (0, 1, 2, \cdots, n-1, n, n, n, \cdots)\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como em Set *as bijeções são exatamente os isomorfismos, isso nos diz que o limite inverso do sistema* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é exatamente* $\omega + 1$.

Por fim, usando a representação $0 := \varnothing$, $n + 1 := n \cup \{n\}$ *(ou seja, estamos trocando* X_n *por* $n + 1$*) o nosso diagrama fica:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \omega+1 \arrow[dll, "\phi_{n+1}"'] \arrow[dl, "\phi_n"] \arrow[dr, "\phi_2"'] \arrow[drr, "\phi_1"] & & \\
\cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[r, "\phi_{n,n+1}"'] & n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 2 \arrow[r, "\phi_{1,2}"'] & 1
\end{tikzcd}$$

O curioso desse exemplo é como ele é enganador: Meu palpite natural seria que o limite inverso dos números naturais seria $\mathbb{N}$ – e não $\omega + 1$.

Contudo, como veremos mais à frente, tem um motivo muito simples pelo qual isso não pode ser verdade: Cada número natural é um conjunto finito, e limites inversos de conjuntos finitos são sempre compactos em uma topologia natural induzida pela construção do limite inverso. Contudo, temos um resultado bastante famoso da teoria de conjuntos que nos diz que ordinais limites (exceto pelo 0) nunca são compactos, então $\mathbb{N}$ (representado aqui pelo ordinal limite ω) não poderia ser esse limite inverso.

Antes disso, vamos dar mais exemplos:

Example 2.5. *Seja k um corpo qualquer, seja Vect_k a categoria dos espaços vetoriais sobre k e, como antes, $\mathscr{N} := (\mathbb{N}, \leq)$ a categoria dos naturais com a ordem natural. Com isso, considere o funtor:*

$$\begin{aligned} F : \mathscr{N}^{op} &\to \mathrm{Vec}_k \\ n &\mapsto k^n \\ n \to m &\mapsto \phi_{n,m} : k^m \to k^n \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada par $n \leq m \in \mathbb{N}$, onde $\phi_{n,m}$ é dada por:

$$\phi_{n,m}(a_i)_{i \leq m} := (a_i)_{i \leq n}$$

para cada $(a_i)_{i \leq m} \in k^m$.

Isso é trivialmente um funtor, e, portanto, define um sistema inverso em Vect_k. Como Vect_k possui produtos enumeráveis e equalizadores, sabemos que esse sistema possui um limite:

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} k^n \cong \left\{ x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} k^n \mid \text{ se } i \leq j, \text{ então } \pi_i(x) = (\phi_{i,j} \circ \pi_j)(x) \right\}.$$

Novamente, vamos interpretar o que seria um vetor nesse espaço vetorial. Se $x \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} k^n$, então, em particular, $x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} k^n$ – e portanto podemos escrever $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $x_n \in k^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora a condição "$i \leq j$ implica $x_i = \phi_{i,j}(x_j)$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$" nos diz que escrevendo $x_i = (x_{i,l})_{l \leq i}$ e $x_j = (a_{j,l})_{l \leq j}$, temos que $l \leq i$ implica $x_{i,l} = x_{j,l}$.

Ou seja, um ponto do limite inverso é uma sequência de sequências finitas de forma que a $n+1$-ésima sequência finita é obtida da n-ésima sequência finita simplesmente adicionando um novo escalar ao final.

Claramente, então, isso induz uma bijeção:

$$\begin{aligned} \phi : \prod_{n \in \mathbb{N}} k &\to \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} k^n \\ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto \left(\sum_{j=0}^{i} x_j \right)_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

que é trivialmente linear – ou seja, um isomorfismo em Vect_k.

Usando então a notação $k^{\mathbb{N}} := \prod_{n \in \mathbb{N}} k$, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & & k^{\mathbb{N}} \arrow[dll, "\phi_{n+1}"'] \arrow[dl, "\phi_n"] \arrow[dr, "\phi_1"] \arrow[drr, "\phi_0"] & & \\ \cdots \arrow[r] & k^{n+1} \arrow[r, "\phi_{n,n+1}"'] & k^n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & k^1 \arrow[r, "\phi_{0,1}"'] & k^0 \end{tikzcd}$$

Agora vamos finalmente começar a trabalhar com os espaços que serão centrais para nossos estudos: Espaços profinitos.

Definition 2.6. Seja $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ um sistema inverso tal que para todo $c \in \mathscr{C}$ temos que Fc é um conjunto finito. Nesse caso, dizemos que o limite $\varprojlim_{c \in \mathscr{C}} Fc$ é um **conjunto profinito**.

Equivalentemente, um conjunto X será dito **profinito** se existe algum sistema inverso de conjuntos finitos cujo limite é X.

Nosso primeiro exemplo acima nos diz que $\omega + 1$ é um conjunto profinito.

O que vamos fazer agora é dar uma topologia que vamos argumentar é "natural" para conjuntos profinitos.

Lemma 2.7. *Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma coleção de espaços topológicos indexados por algum conjunto I. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i.) Se X_i é compacto para todo $i \in I$, então $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto.

(ii.) Se X_i é Hausdorff para todo $i \in I$, então $\prod_{i\in I} X_i$ é Hausdorff.

(iii.) Se X_i é totalmente desconexo para todo $i \in I$, então $\prod_{i\in I} X_i$ é totalmente desconexo.

Lemma 2.8. *Seja X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i.) Se X é compacto e Y é fechado, então Y também é compacto.

(ii.) Se X é Hausdorff, então Y também é Hausdorff.

(iii.) Se X é totalmente desconexo, então Y também é totalmente desconexo.

Um corolário imediato desses lemas, e da construção do limite inverso acima, é:

Corollary 2.9. *Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ um sistema inverso de espaços topológicos indexados por um conjunto direcionado $(I, \leq)$. Se para todo $i \in I$ o espaço X_i for Hausdorff, compacto, totalmente desconexo, então o limite inverso $\varprojlim_{i\in I} X_i$ também será Hausdorff, compacto, totalmente desconexo.*

Para justificar porquê estamos interessados nessas três propriedades topológicas, vamos dar um exemplo:

Example 2.10. *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais com a topologia discreta e $2 := \{0, 1\}$, também com a topologia discreta. Considere os sequintes isomorfismos naturais:*

$$\begin{aligned} \Phi : \prod_{n\in\mathbb{N}} 2 &\to \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto \{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathbb{N}, 2) &\to \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ f &\mapsto \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) = 1\} \end{aligned}$$

onde $\mathscr{P}(X)$ denota o conjunto das partes do conjunto X, para qualquer conjunto X. Como esses três conjuntos são isomorfos, vamos usar o símbolo $2^{\mathbb{N}}$ para denotar esses conjuntos.

Como 2 é espaço topológico (discreto), isso induz uma topologia em $\prod_{n\in\mathbb{N}} 2$ – a topologia produto. Vamos usar essa topologia e os isomorfismos Φ e Ψ acima para induzir topologias em $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathbb{N}, 2)$ – e vamos chamar todas essas topologias de uma topologia induzida em $2^{\mathbb{N}}$.

Note que por definição $2^{\mathbb{N}}$ não pode ser discreto: De fato, a topologia produto de $\prod_{n\in\mathbb{N}} 2$ tem como subbase o conjunto

$$\{\{\pi_n^{-1}(0)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\pi_n^{-1}(1)\}_{n\in\mathbb{N}}\}$$

e portanto pontos não podem ser abertos (já que pontos não contém uma interseção finita de elementos da subbase acima).

Contudo, como 2 é discreto, ele é, em particular, Hausdorff, compacto (já que é finito) e totalmente desconexo. Assim, temos imediatamente que $2^{\mathbb{N}}$ também é Hausdorff, compacto e totalmente desconexo.

Então as propriedades "Hausdorff, compacto, totalmente desconexo" são propriedades padrão de espaços finitos com a topologia discreta que são preservadas por limites arbitrários – enquanto a discretude desses espaços não é. Vamos dar um nome para essas propriedades:

Definition 2.11. Um espaço topológico Hausdorff, compacto, totalmente desconexo é chamado de um **espaço de Stone**.

Um exemplo da utilidade de espaços de Stone é a Dualidade de Stone:

Theorem 2.12. *Seja* Stone *a categoria dos espaços de Stone e mapas contínuos e* BoolAlg *a categoria das álgebras booleanas com homomorfismos de álgebras booleanas. Então existem funtores*

$$\mathscr{A} : \mathrm{Stone} \leftrightarrows \mathrm{BoolAlg} : S$$

dados por:

- *Para cada espaço de Stone X, a álgebra booleana $\mathscr{A}(X)$ é a álgebra booleana dos clopens de X com $\leq := \subseteq$, $Y \wedge Z := Y \cap Z$, $Y \vee Z := Y \cup Z$, $\neg Y := X \setminus Y$, $\min \mathscr{A}(X) = \varnothing$ e $\max \mathscr{A}(X) = X$ para todos $Y, Z \in \mathscr{A}(X)$.*

- *Para cada álgebra booleana R, o espaço $S(R)$ é o espaço topológico dos átomos de R, cujos elementos são átomos de R e com topologia dada por declarar $\{\{a \in S(R) \mid a \leq r\}\}_{r \in R}$ como uma subbase para a topologia.*

Além disso, esses funtores são uma dualidade – ou seja, $S \circ \mathscr{A} \cong \mathrm{id}_{\mathrm{Stone}}$ e $\mathscr{A} \circ S \cong \mathrm{id}_{\mathrm{BoolAlg}}$.

Não vamos mostrar essa dualidade (isso requereria um outro seminário...), mas vamos utilizá-la para mostrar que as categorias ProFinSet de conjuntos profinitos e Stone de espaços de Stone são equivalentes.

Para isso vamos lançar mão do seguinte lema:

Lemma 2.13. *Toda álgebra booleana é um limite direto de subálgebras booleanas finitas.*

E portanto:

Corollary 2.14. *Todo espaço de Stone é um limite inverso de espaços topológicos discretos finitos.*

Corollary 2.15. *As categorias* ProFinSet *de conjuntos profinitos e* Stone *de espaços de Stone são equivalentes.*

Com isso, vemos que conjuntos profinitos têm, de maneira natural, uma topologia especial: Eles são naturalmente Hausdorff, compactos e totalmente desconexos. Por causa disso, muitas vezes usamos o termo **espaço profinito** para nos referir simultaneamente aos conceitos de conjuntos profinito e espaços de Stone.