Seminário: Categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados

Matheus Johnny Caetano

November 2022

1 Introdução

O objetivo deste seminário é apresentar duas categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados: a categoria Sh(CHTop) e a categoria Sh(EDSet), onde:

- CHTop é o site dos espaços Hausdorff compactos;
- EDSet é o site dos conjuntos extremamente desconexos;
- $Sh(\mathcal{C})$ é a categoria de feixes de $\mathcal{C}$.

Além disso, denotaremos por ProFinSet o site dos conjuntos profinitos e em cada site teremos como cobertura familias finitas de funções juntamente sobrejetivas.

2 Equivalência de categorias

Começaremos relembrando alguns conceitos.

Definição 3. Considere dois morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um **pullback** de (f, g) é uma tripla (P, p_1, p_2) onde:

1. P é um objeto de $\mathcal{C}$;
2. $p_1 : P \to A$ e $p_2 : P \to B$ são morfismos de $\mathcal{C}$ tais que $f \circ p_1 = g \circ p_2$ e para toda tripla (Q, q_1, q_2) onde
   (a) Q é um objeto de $\mathcal{C}$;
   (b) $q_1 : Q \to A$ e $q_2 : Q \to B$ tais que $f \circ q_1 = g \circ q_2$,

   existe um único morfismo $h : Q \to P$ tal que $q_1 = p_1 \circ h$ e $q_2 = p_2 \circ h$.

Usualmente denotamos $P = A \times_C B$.

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Observação. O pullback $P = A \times_C B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Definição 4. Considere duas flexas $f : A \to B$ e $g : A \to B$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um **equalizador** de f, g é um par (K, k) onde

1. K é um objeto de $\mathcal{C}$,
2. $k : K \to A$ é uma flexa de $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = g \circ k$ e para todo par (M, m) onde
   (a) M é um objeto de $\mathcal{C}$,
   (b) $m : M \to A$ é uma flexa de $\mathcal{C}$ tal que que $f \circ m = g \circ m$,

   existe um único morfismo $n : M \to K$ tal que $m = k \circ n$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ M \arrow[u, dashed, "\exists n"] \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Lema 5. *Se $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ são funções contínuas e Y é Hausdorff, então $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado em X.*

Proof. Sejam $y \in N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ e U, V subconjuntos abertos disjuntos de Y contendo $f(y)$ e $g(y)$ respectivamente. Temos $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de y e está contida em N. Portanto, N é uma união de conjuntos abertos, logo é aberto, e $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado. $\square$

Lema 6. *Seja $f : S' \to S$ um mapa onde S' é profinito e S é Hausdorff compacto. Então $S' \times_S S' \subset S' \times S'$ é profinito.*

Proof. Como S' é profinito, $S' \times S'$ também é. Assim, temos que $S' \times_S S' \subset S' \times S'$ é Hausdorff totalmente desconexo. Para mostrar compacidade, basta mostrar que o pullback é um subconjunto fechado do produto cartesiano.

Observe que $S' \times_S S'$ é o conjunto dos pares $(a, b) \in S' \times S'$ tais que $f \circ p_1 = f \circ p_2$, ou seja, $f(a) = f(b)$. Logo, podemos escrever

$$S' \times_S S' = \{(a, b) \in S' \times S' : p_1(a, b) = p_2(a, b)\}$$

Assim, pelo Lema 5 $S' \times_S S'$ é fechado, e consequentemente compacto. Portanto, $S' \times_S S'$ é profinito.

$\square$

Proposição 7. Seja S um espaço Hausdorff compacto. Então existe uma sobrejeção $S' \to S$, onde S' é profinito.

Proof. Seja S um espaço Hausdorff compacto e considere S^{dis} o conjunto S com a topologia discreta. Temos que $S' = \beta S^{dis}$ é um espaço compato Hausdorff totalmente desconexo, ou seja, S' é profinito. Considere, o mapa $f : S^{dis} \to S$ tal que $f(x) = x$. Observe que f é contínua e sobrejetiva. Como S é Hausdorff compacto, temos pela propriedade universal da compactificação de Stone-Cech que existe $\tilde{f} : S' \to S$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S^{dis} \arrow[r, "b"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & S' = \beta S^{dis} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Além disso, como $\tilde{f} \circ b$ é sobrejetiva, temos que $\tilde{f}$ é uma sobrejeção. $\square$

Definição 8. Um espaço Hausdorff compacto S é **extremamente desconexo** se para toda sobrejeção $f : S' \to S$ existe $g : S \to S'$ tal que $f \circ g = 1_S$. Nestas condições, dizemos que g é uma seção de f e f é uma retração de g.

Proposição 9. Sejam S_0 um espaço topológico discreto e $S = \beta S_0$ a compactificação de Stone-Čech de S_0. Então S é extremamente desconexo.

Proof. Temos pela proposição 7 que S é um espaço Hausdorff compacto. Seja $f : S' \to S$ uma sobrejeção contínua, onde S' é compacto Hausdorff e considere a inclusão $i : S_0 \to S$. Como f é sobrejetiva e S_0 é discreto, existe $g : S_0 \to S'$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads, "f"] & S \\ S_0 \arrow[u, "g"] \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Agora, considere $b : S_0 \to S$ o mapa da compactificação de Stone-Cech. Temos que b induz o mapa $\tilde{g}$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\tilde{g}"] & S' \arrow[r, two heads, "f"] & S \\ & S_0 \arrow[ul, "b"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Observe que $f \circ \tilde{g} \circ i = i$, logo pela unicidade da propriedade universal da compactificação de Stone-Cech, $f \circ \tilde{g} = 1_S$. $\square$

Corolário 10. *Seja S um espaço Hausdorff compacto. Então existe uma sobrejeção $f : \tilde{S} \to S$, onde $\tilde{S}$ é extremamente desconexo.*

Definição 11. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com a topologia de Grothendieck. Dizemos que uma subcategoria cheia $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ é uma **base** para $\mathcal{C}$ se para todo objeot X de $\mathcal{C}$, existe uma cobertura $f_i : D_i \to X_{i \in I}$, onde I é um conjunto pequeno e D_i é objeto de $\mathcal{D}$.

A categoria EDSet é uma subcategoria cheia de ProFinSet e, pelo corolário 10, para todo profinito existe uma sobrejeção com domínio extremamente desconexo, logo, EDSet é uma base para ProFinSet. Analogamente, ProFinSet e EDSet são bases para CHTop.

A seguir temos duas proposições que serão fundamentais para demonstração da proposição principal deste seminário.

Proposição 12. Sejam $\mathcal{C}$ um site e $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base. Então, existe uma única topologia de Grothendieck na categoria $\mathcal{D}$ tal que a coleção de morfismos $\{D_i \to D\}_{i \in I}$ em $\mathcal{D}$ é uma cobertura se, e somente se, é uma cobertura em $\mathcal{C}$. Além disso, precomposição com a inclusão $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ induz uma equivalência de categorias:

$$Sh(\mathcal{C}) \to Sh(\mathcal{D}), \ \ F \to F|_{\mathcal{D}^{op}}.$$

Proof. Referência [3], apêndice B, proposição B.6.3. □

Proposição 13. Sejam $\mathcal{C}$ um site, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base equipada com a topologia de Grothendieck da proposição 12 e $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$ um funtor. Então, F é um feixe se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

1. A restrição $F|_{\mathcal{D}^{op}} : \mathcal{D}^{op} \to \mathrm{Set}$ é um feixe;

2. O funtor F é uma extensão de Kan à direita da sua restrição $F|_{\mathcal{D}^{op}}$.

Proof. Referência [3], apêndice B, proposição B.6.4. □

Observação. É importante lembrar que um **conjunto condensado** é um feixe $T : \mathrm{ProFinSet}^{op} \to \mathrm{Set}, \ \ S \mapsto T(S)$ tal que $T(\emptyset) = *$ e as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para todo par de conjuntos profinitos S_1 e S_2, o mapa natural

$$T(S_1 \amalg S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$$

é uma bijeção.

(ii) Para toda sobrejeção $S' \to S$ entre profinitos com o pullback $S' \times_S S'$ e suas projeções p_1 e p_2, o mapa

$$T(S) \to \{x \in T(S') | T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

é uma bijeção.

Proposição 14. A categoria de conjuntos condensados é equivalente à:

1. A categoria Sh(CHTop) de feixes sobre o site CHTop com coberturas dadas por famílias finitas de mapas juntamente sobrejetivos:

$$T : \mathrm{CHTop}^{op} \to \mathrm{Set}, \;\; S \mapsto T(S)$$

satisfazendo $T(\emptyset) = *$ e as condições (i) e (ii) para espaços compactos Hausdorff.

2. A categoria de funtores contravariantes sobre o site EDSet com coberturas dadas por famílias finitas de mapas juntamente sobrejetivos:

$$T : \mathrm{EDSet}^{op} \to \mathrm{Set}, \;\; S \mapsto T(S)$$

satisfazendo $T(\emptyset) = *$ e a condição (i) para conjuntos extremamente desconexos.

Proof. A categoria EDSet é uma base para ProFinSet e CHTop, logo, pela proposição 12 obtemos uma equivalência de categoria de feixes via restrição de conjuntos profinitos. A direção inversa da equivalência é obtida pela proposição 13 tomando a extensão de Kan à direita.

Agora, veremos porque no item 2. é omitida a condição (ii) de feixe. Seja $f : S' \to S$ uma sobrejeção entre conjuntos extremamentes desconexos, então existe $g : S \to S'$ tal que $f \circ g = 1_S$. Então, aplicando um feixe T, obtemos

$$T(g) \circ T(f) = 1_{T(S)}$$

e o mapa $T(f)$ é injetivo. Além disso,

$$Im(T(f)) \subset \{x \in T(S') | T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_X S')\} = E$$

pois $f \circ p_1 = f \circ p_2$. Veremos que $E \subset Im(T(f))$ e todo funtor contravariante entre conjuntos extremamente desconexo satisfaz a condição (ii) automaticamente.

Seja $x \in E$ e considere o mapa $(g \circ f) \times_S 1_{S'} : S' \times_S S' \to S' \times_S S'$. Temos que

$$T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(p_1)(x) = T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(p_2)(x)$$

logo,

$$T(p_1 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x) = T(p_2 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x)$$

isto é,

$$T(g \circ f)(x) = T(1_{S'})(x).$$

Assim, $T(f)(T(g)(x)) = x$, ou seja, $x \in Im(T(f))$. Portanto $T(S)$ está em bijeção com E.

$\square$

References

[1] P. Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics* Lecture notes for a course taught at the University of Bonn. Summer term 2019.

[2] Catrin Mair. *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups* 2021

[3] J. Lurie. *Ultracategories* Preprint version. 2018.

[4] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra I - Basic Category Theory* Cambridge University Press. 2002.