Lembramos que um conjunto condensado é um feixe de conjuntos em $*$proet onde, $*$proét é a categoria de conjuntos profinitos com famílias de mapas conjuntamente sobrejetivos como coberturas. Similarmente, um anel / grupo / ... é um feixe de anéis / grupos / ... em $*$proet.

De um modo mais geral, um conjunto/anel/grupo... condensado é um funtor contravariante

$$T : \{\text{profinite sets}\} \to \{\cancel{\text{sets}}\ \text{conjuntos, anéis, grupos} \ldots\}$$

$$S \mapsto T(S)$$

que satisfaz as condições de feixe.

Ex (nosso alvo). Seja X um espaço topológico. Podemos associar a X um conjunto condensado $\underline{X}$ que é definido por levar cada conjunto profinito S ao conjunto de todos os mapas contínuos de S para X. Dado dois conjuntos profinitos S e S' e um mapa contínuo $f : S \to S'$ colocamos

$$\underline{X}(f) : X(S') \to X(S)$$
$$g \mapsto gf$$

Com essa definição $\underline{X}$ é um conjunto condensado.

A associação, $X \to \underline{X}$ é um funtor entre a categoria dos espaços topológicos e a categoria dos conjuntos condensados.

Dados dois ~~mapas~~ espaços topológicos X e Y e um mapa contínuo $f : X \to Y$ temos uma transformação natural $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ onde

$$\underline{f}_S : \underline{X}(S) \to \underline{Y}(S), \quad g \mapsto fg.$$

Se X é um espaço/anel/grupo/... topológico $\Rightarrow$ $\underline{X}$ é um conjunto/anel/grupo/...

Recordamos que um espaço topológico X é compactamente gerado se um mapa $f : X \to Y$ onde Y é um espaço topológico, é contínuo se a composição $S \to X \xrightarrow{f} Y$ é contínua para todo mapa contínuo $S \to X$ onde S é Hausdorff-compacto.

A inclusão de todos os espaços compactamente gerados em todos os espaços topológicos admite um adjunto à direita $X \mapsto X^{cg}$, onde X^{cg} é o conjunto subjacente de X equipado com a topologia em que $A \subseteq X^{cg}$ é aberto $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(A)$ é aberto $\forall\, f : S \to X$ onde S é Hausdorff-compacto. (A topologia quociente de $\bigsqcup_{S \to X} S \to X$)

Recorde que qualquer espaço S Hausdorff-compacto admite uma sobrejeção de um conjunto profinito (que é um mapa quociente), por exemplo, podemos tomar a compactificação de Stone-Čech de S tratado como conjunto discreto. Posto isto, na discussão anterior podemos trocar espaços Hausdorff-compacto por conjuntos profinitos sem alterar a definição de compactamente gerado e do funtor $X \mapsto X^{cg}$.

Daqui em diante, vamos fixar um ~~cardinal não~~ não enumerável cardinal limite forte κ e trabalharemos apenas com conjuntos profinitos S tais que $|S| < \kappa$.

def: Para qualquer não enumerável cardinal limite forte κ, a categoria de conjuntos κ-condensados é a categoria de feixes em $*_{\kappa\text{-proét}}$.

Escolhido o cardinal κ ~~como~~, vamos dizer que um espaço topológico X é κ-compactamente gerado se este está equipado com a topologia quociente de $\coprod_{S \to X} S \to X$ onde a união disjunta percorre todos os S que são ~~Pro~~ H.C mas com $|S| < \kappa$.

Qualquer ~~Haussdorff~~ espaço H-C admite uma sobrejeção de um profinito S' com $|S'| \leq 2^{2^{|S|}} < \kappa$. Desse modo também podemos trocar espaços Haussdorff-compactos por conjuntos ~~...~~ profinitos com cardinalidade menor que κ. Vamos escrever $X \to X^{\kappa\text{-}cg}$ para o adjunto à direita da inclusão dos espaços κ-cg ~~...~~ na categoria dos espaços topológicos, aqui $X^{\kappa\text{-}cg}$ é o conjunto subjacente de X com a topologia quociente de $\coprod_{S \to X} S \to X$ onde ~~...~~ S percorre sobre todos os H.C com $|S| < \kappa$.

(S com $|S| < \kappa$)

~~Dado um conjunto condensado T podemos associar a esse um espaço topológico $T(*$~~

Dado um conjunto condensado T, a esse associamos o conjunto $T(*)$. Dado um conjunto profinito S e uma transformação natural $\eta: \underline{S} \to T$ obtemos um mapa de conjuntos $\eta_{(*)}: \underline{S}(*) \to T(*)$ aqui $\underline{S}(*) = S$. Desse modo podemos tornar $T(*)$ um espaço topológico com a topologia quociente de $\coprod_{S \to T} S \to T(*)$ onde a união disjunta percorre por todos S com um mapa $\underline{S} \to T$, ao qual denotaremos por $T(*)_{top}$. Com essa definição todo mapa $\eta_{(*)}: \underline{S}(*) \to T(*)_{top}$ é contínuo e um mapa $T(*)_{top} \to X$ é contínuo $\Leftrightarrow$

é contínua a composição $S \to T(*)_{top} \to X$ onde o mapa

$S \to T(*)_{top}$ provém de uma transformação natural

$\eta : \underline{S} \to T$ na componente $*$.

Proposição: Seja X um espaço topológico, T um conjunto condensado e $\theta : T \Rightarrow \underline{X}$ uma transformação natural. O mapa $\theta_* : T(*)_{top} \to X$ é contínuo.

Prova: Seja S um conjunto profinito e $s : * \to S$.

temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T(*) & \xrightarrow{\theta_*} & X \\ {\scriptstyle T(s)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle X(s)} \\ T(S) & \xrightarrow[\theta_S]{} & \underline{X}(S) \end{array}$$

Assim, $\theta_* T(s) = \underline{X}(s)\theta_S$

$\theta_* T(s) t = \underline{X}(s)\theta_S(t) = \theta_S(t)(s) \quad \forall s \in \underline{S}(*) = S$ e $\forall t \in T(S)$.

logo $\theta_* T(\ ) t = \theta_S(t) \in X(S)$. Se mostrarmos que

$T(\ )t : S \to T(*)$ ~~provém de~~ é $\eta_{(*)}$ para

alguma $\eta : \underline{S} \to T$ teremos ~~mostrado~~ provado que θ_* é contínua pela definição da topologia de $T(*)_{top}$. Pois bem, dado $t \in T(S')$ defina

$$\eta_{S'} = T(\,)t : \underline{S}(S') \to T(S')$$
$$s \mapsto T(s)t$$

Sejam $s : S' \to S''$ e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{S}(S') \arrow[r, "\eta_{S'}"] & T(S') \\
\underline{S}(S'') \arrow[u, "\underline{S}(s)"] \arrow[r, "\eta_{S''}"'] & T(S'') \arrow[u, "T(s)"']
\end{tikzcd}$$

Temos,

$$\eta_{S'}\underline{S}(s)(f) = \eta_{S'} f \circ s = T(f \circ s)t = T(s)T(f)t \quad \text{e}$$

$$T(s)\eta_{S''}(f) = T(s)T(f)t \Rightarrow \eta_{S'}\underline{S}(s) = T(s)\eta_{S''}$$

$\Rightarrow$ η é uma transformação natural e

$$\eta_{(*)} = T(\,)t \;\cancel{A}.$$

Lema (Yoneda). Considere um funtor contravariante $F : \mathcal{A} \to set$ e um objeto $A \in \mathcal{A}$ e o correspondente funtor de representação $\mathcal{A}(-, A) : \mathcal{A} \to set$. Existe uma correspondência bijetiva $\theta_{F,A} : Nat(\mathcal{A}(-,A), F) \xrightarrow{\cong} FA$ entre transformações naturais de $\mathcal{A}(-,A)$ e F com os elementos de FA;

em particular essas transformações naturais constituem um conjunto. A bijeção $\theta_{F,A}$ constitui uma transformação natural na variável A e quando $\mathcal{A}$ é pequena, a bijeção $\theta_{F,A}$ também constitui uma transformação natural na variável F.

A bijeção $\theta_{F,A}$ é definida por $\theta_{F,A}(\alpha) = \alpha_A(1_A)$

e sua inversa τ^A é definida por $\tau^A_C(b) = F(\ )b : \mathcal{A}(C,A) \to FC$

$\forall\, b \in FA$ e $C \in |\mathcal{A}|$.

Proposição: Dado um mapa contínuo $f : T(*)_{top} \to X$, existe uma transformação natural $\eta^f : T \to \underline{X}$ tal que $\eta^f_{(*)} = f$.

Prova. Dada $f \in Hom(T(*)_{top}, X)$ defina

$$\eta^f_S : T(S) \to \underline{X}(S)$$

da seguinte maneira: dado $t \in T(S)$ existe uma transformação natural $\tau^S(t) : \underline{S} \to T$, então colocamos

$\eta^f_s(t) = f \circ \tau^s_{*}(t) : \underline{S}(*) \longrightarrow \underline{X}(*) = X$, Com essa

definição $\eta^f_s(t) \in \underline{X}(s)$.

Agora, dada $g : s \to s'$ considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} T(s) \arrow[r, "\eta^f_s"] & \underline{X}(s) \\ T(s') \arrow[u, "T(g)"] \arrow[r, "\eta^f_{s'}"'] & \underline{X}(s') \arrow[u, "\underline{X}(g)"'] \end{tikzcd}$$

temos $\forall t \in T(s')$

$$\eta^f_s T(g) t = f \tau_*^s (T(g)t) = f T(\ ) T(g) t \Rightarrow$$

se $s \in \underline{S}(*) = S \Rightarrow (\eta^f_s T(g) t) s = f T(s) T(g) t$. Por outro lado

$$(\underline{X}(g) \eta^f_{s'}) t = \cancel{X(g) T(s) t \in \ }$$
$$= \eta^f_{s'}(t) g \cancel{(t) f T(g)(s)} \Rightarrow$$

$(\eta^f_{s'}(t) g) s = \eta^f_{s'}(t) g(s) = f T(g(s)) t = f T(s) T(g) t$, assim,

$\eta^f_s T(g) = \underline{X}(g) \eta^f_{s'}$ $\forall s, s'$ e $g : S \to S'$, resultado

ηf é uma transformação natural. ~~Portanto~~, Portanto lado

$\eta^{f,X}_{*} : T(*) \longrightarrow \underline{X}(*) = X$ satisfaz $\forall\, t \in T(*)$

$\eta^{f,X}_{*}(t) = f\,\tau^{*}_{*}(t)$; mas

$$\tau^{*}_{*}(t) : \underline{*}(*) \longrightarrow T(\{*\})$$
$$1_{*} \longmapsto T(1_{*})t = t$$

pois $T(1_{*}) = 1_{T(*)}$, assim, $f\,\tau^{*}_{*}(t) = f(t)$. ∎

Proposição: Sejam X um espaço topológico e T um conjunto condensado. O mapa

$$\gamma_{X,T} : \mathrm{Hom}(T(*)_{top}, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, \underline{X})$$
$$f \longmapsto \eta^{f,X}$$

é uma bijeção natural, em particular, o funtor $T \mapsto T(*)_{top}$ é um adjunto a esquerda do funtor $X \mapsto \underline{X}$.

Prova: Considere a função $\Phi_{X,T} : \mathrm{Hom}(T, \underline{X}) \to \mathrm{Hom}(T(*)_{top}, X)$ dada por $\Phi_{X,T}(\theta) = \theta_{*} : T(*)_{top} \to X$, vamos mostrar que $\Phi_{X,T}$ é a inversa de $\gamma_{X,T}$. Com efeito, dado $\theta \in Hom(T, \underline{X})$, temos

$$(\gamma_{X,T} \circ \Phi_{X,T})(\theta) = \gamma_{X,T}(\theta_*) = \eta^{\theta_*, X}$$ e

$$\eta^{\theta_*, X}_S : T(S) \to \underline{X}(S)$$. Dado $s \in S = \underline{S}(*)$

$$t \mapsto \theta_* \tau^S_*(t)$$

$(\theta_* \tau^S_*(t))s = (\theta_* T(s))t = (\underline{X}(s)\theta_S)t$, pois o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
T(*) \arrow[r, "\theta_*"] & \underline{X}(*) = X \\
T(S) \arrow[u, "T(s)"] \arrow[r, "\theta_S"'] & X(S) \arrow[u, "\underline{X}(s)"']
\end{tikzcd}$$

Agora, $(\underline{X}(s)\theta_S)t = \underline{X}(s)\theta_S(t) = (\theta_S(t))(s)$ $\forall t \in T(S)$ e $s \in S = \underline{S}(*)$,

assim,

$$\theta_* \tau^S_*(t) = \theta_S(t) \ \forall t \in T(S) \Rightarrow \eta^{\theta_*, X}_S = \theta_S \ \forall S \text{ profinito} \Rightarrow$$

$$\theta = \eta^{\theta_*, X}_S = (\gamma_{X,T} \circ \Phi_{X,T})(\theta).$$

Por outro lado,

$$(\Phi_{X,T} \circ \gamma_{X,T})(f) = \Phi_{X,T}(\eta^{f,X}) =$$

$$= \eta^{f,X}_{*} = f.$$

Para provar a naturalidade de $\gamma_{X,T}$, precisamos verificar que o diagrama abaixo é comutativo.

$\forall f \in Hom(T(*)_{top}, X)$:

$$\begin{tikzcd}
Hom(T(*)_{top}, T(*)_{top}) \arrow[r, "\gamma_{T(*)_{top}, T}"] \arrow[d, "(T_{*top}, f)"'] & Hom(T, \underline{T(*)_{top}}) \arrow[d, "(T, \underline{f})"] \\
Hom(T(*)_{top}, X) \arrow[r, "\gamma_{X,T}"'] & Hom(T, \underline{X})
\end{tikzcd}$$

Onde: $(T, \underline{f})(\theta) = \underline{f}\,\theta \;\; \forall \theta \in Hom(T, \underline{T(*)_{top}})$

$(T_{*top}, f)(g) = f g \;\; \forall g \in Hom(T(*)_{top}, T(*)_{top})$.

Dada $g \in Hom(T(*)_{top}, T(X)_{top})$, temos

$(\gamma_{X,T} \circ (T(*)_{top}, f))(g) = \gamma_{X,T}(fg) = \eta^{fg, X}$. Por outro lado,

$((T, \underline{f}) \circ \gamma_{T(*)_{top}, T})(g) = (T, \underline{f})(\eta^{g, T(*)_{top}}) =$

$= \underline{f} \circ \eta^{g, T(*)_{top}}$ e dado S profinito temos:

$(\underline{f} \circ \eta^{g, T(*)_{top}})_S = \underline{f}_S \circ \eta_S^{g, T(*)_{top}} : T(S) \to \underline{T(X)_{top}}(S)$.

Dado $t \in T(S)$, tem-se

$\left(\underline{f}_S \circ \eta_S^{g, T(*)_{top}}\right) t = \underline{f}_S(g \, \tau_*^S(t)) = f g \, \tau_*^S(t) = \eta_S^{fg, X}(t)$

portanto, $\gamma_{X,T} \circ (T(*)_{top}, f) = (T, \underline{f}) \circ \gamma_{T(X)_{top}, T}$ e segue

que $\gamma_{X,T}$ é uma bijeção natural, donde

$T \mapsto T(X)_{top}$ é um adjunto à esquerda de $X \mapsto \underline{X}$.

Proposição: O funtor $X \mapsto \underline{X}$ é pleno e fiel quando restrito à subcategoria plena de todos os X que são $\mathcal{X}$-compactamente gerados como espaços topológicos.

Como vimos na proposição anterior o funtor $F: X \mapsto \underline{X}$ admite um adjunto à esquerda $G: T \mapsto T(*)_{top}$. Além disso, dado T, colocando $\alpha_T = \gamma_{T(*)_{top},T}(1_{T(*)_{top}})$ o por, $(T(*)_{top}, \alpha_T)$ é uma reflexão de T ao longo de $X \mapsto \underline{X}$ e $\alpha: 1_{CC} \Rightarrow FG$.

Para encontrar a counidade de F, ou seja, uma transformação natural $\xi: GF \to 1_{top}$, precisamos encontrar, fixado X, o único morfismo $\xi_X: \underline{X}(*)_{top} \to X$ tal que

$$F(\xi_X)\alpha_{\underline{X}} = 1_{\underline{X}}$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{\underline{X}}{\overset{FX}{\parallel}} \arrow[r, "\alpha_{\underline{X}}"] \arrow[dr, equal, "1_{FX}"'] & \underset{\underline{X(*)_{top}}}{\overset{F(GFX)}{\parallel}} \arrow[d, "F(\xi_X)"] \\
 & \underset{FX}{\overset{\underline{X}}{\parallel}}
\end{tikzcd}$$

Temos $F(\xi_X)\alpha_{\underline{X}} = \underline{\xi_X}\,\alpha_{\underline{X}}$ e dado S profinito temos

$$(\underline{\xi}_{\underline{X}} \circ \alpha_X)_S : \underline{X}(S) \to \underline{X}(S) .$$

$$(\underline{\xi}_{\underline{X},S} \circ \alpha_{X,S})(s) = \underline{\xi}_{X,S} \circ (\alpha_{X,S}(s)) =$$

$$= \underline{\xi}_{X,S} \circ (\qquad\qquad) = \underline{\xi}_{X,S}(\tau^S_*(s)) =$$

$$= \xi_X \tau^S_*(s)$$