Espaços compactamente gerados

Lucas H. R. de Souza

5 de dezembro de 2022

1 Definição e exemplos

Proposição 1.1. *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Um conjunto $A \subseteq X$ é aberto em X se e somente se para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é aberto em C.*

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ tal que para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é aberto em C. Seja $a \in A$. Como X é localmente compacto, existe V vizinhança aberta de a tal que $Cl(V)$ é compacto. Temos então que $A \cap Cl(V)$ é aberto em $Cl(V)$, o que implica que $A \cap V$ é aberto em V. Como V é aberto em X, segue que $A \cap V$ é aberto em X. Portanto $A \cap V$ é uma vizinhança aberta de a contida em A, o que implica que A é aberto em X. $\square$

Definição 1.2. Um espaço Hausdorff X é um k-espaço se todo subconjunto $A \subseteq X$ é aberto em X se para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é aberto em C.

É imediato que espaços Hausdorff localmente compactos são k-espaços.

Proposição 1.3. *Seja X espaço Hausdorff. são equivalentes:*

1. *X é k-espaço.*
2. *Para todo $A \subseteq X$, A é fechado se para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é fechado em C.*
3. *X é quociente de um coproduto de espaços Hausdorff compactos.*
4. *X é quociente de um espaço Hausdorff localmente compacto.*

Demonstração. ($1 \Rightarrow 2$) Seja $A \subseteq X$ tal que para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é fechado em C. O subconjunto $X - A$ é tal que se C é um compacto, então $(X - A) \cap C = C - (A \cap C)$ é aberto. Como X é k-espaço, segue que $X - A$ é aberto e portanto A é fechado.

($2 \Rightarrow 1$) É análogo à demonstração acima.

($1 \Rightarrow 3$) Seja $G = \dot{\bigcup}\{C \subseteq X : C \text{ é compacto}\}$ com a topologia de coproduto. Tome $f : G \to X$ induzida pelos mapas de inclusão dos compactos em X. Portanto f é contínua. Seja $A \subseteq X$ tal que $f^{-1}(A)$ é aberto em G. Portanto $f^{-1}(A) \cap C$ é aberto em C (visto como subespaço de G), para todo C compacto em X. Como X é k-espaço, segue que A é aberto em X. Portanto f é uma aplicação quociente.

($3 \Rightarrow 4$) Coproduto de compactos é localmente compacto.

($4 \Rightarrow 1$) Sejam Y espaço Hausdorff localmente compacto e $f : Y \to X$ aplicação quociente. Seja $A \subseteq X$ tal que para todo $C \subseteq X$ compacto, $A \cap C$ é aberto em X. Seja $V \subseteq Y$ aberto tal que $Cl(V)$ é compacto. Temos que $A \cap f(Cl(V))$ é aberto em $f(Cl(V))$. Portanto $A \cap f(Cl(V)) = U \cap f(Cl(V))$ para algum aberto U de X. Segue então que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(f(Cl(V))) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(Cl(V)))$ Tomando interseção com V dos dois lados, temos que $f^{-1}(A) \cap V = f^{-1}(U) \cap V$. Mas $f^{-1}(U) \cap V$ é aberto em Y, o que implica que $f^{-1}(A) \cap V$ é aberto em Y. Tome $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$ com V_α aberto com fecho compacto. Temos que $f^{-1}(A) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A) \cap V_\alpha$, o que implica que $f^{-1}(A)$ é aberto em Y. Como f é quociente, segue que A é aberto em X. Portanto X é k-espaço. □

Corolário 1.4. *Sejam X e Y espaços Hausdorff e $\pi : X \to Y$ um mapa quociente. Se X é k-espaço, então Y é k-espaço.*

Corolário 1.5. *Complexos celulares e complexos simpliciais são k-espaços.*

Proposição 1.6. *Se X é Hausdorff e 1-enumerável, então X é k-espaço.*

Observação. Dizemos que X é 1-enumerável se para todo $x \in X$, existe um conjunto enumerável $\mathcal{B}$ de vizinhanças abertas de x, tal que para toda vizinhança U de x, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$.

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ tal que para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é fechado em X. Seja $x \in Cl(A)$. Existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência que converge para x. Temos que o conjunto $C = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é compacto, o que implica que $A \cap C$ é fechado em C. Mas $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A \cap C$, o que implica que $x \in A \cap C \subseteq A$. Portanto A é fechado.

Logo X é um k-espaço. □

Em particular, espaços metrizáveis são k-espaços.

Proposição 1.7. *Seja X um k-espaço tal que todo subespaço compacto é finito. Então X é discreto.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Se $K \subseteq X$ é um compacto, então K é finito. Como X é Hausdorff (e portanto K também é), segue que todo ponto de K é aberto em K. Temos então que $\{x\} \cap K = \emptyset$ ou $\{x\}$ e ambos são abertos em K. Como X é k-espaço, segue que $\{x\}$ é aberto em X. Logo X é discreto. $\square$

Exemplo. [1] Sejam $p \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ e $X = \mathbb{N} \cup \{p\}$ com a topologia de subespaço. Repare que p é um ponto de acumulação de X, mas nenhuma sequência de pontos em $\mathbb{N}$ converge para p, pois não converge em $\beta\mathbb{N}$. Seja K um subespaço compacto de X. Se $K \subseteq \mathbb{N}$, então K é finito, pois $\mathbb{N}$ é discreto. Se $p \in K$, então X é finito ou é a compactificação de um ponto de $X - \{p\}$. Mas se X fosse a compactificação de um ponto de $X - \{p\}$, então X seria homeomorfo à compactificação de um ponto de $\mathbb{N}$, que é metrizável, e portanto existiria uma sequência de pontos convergindo para p. Portanto K é finito. Pela proposição anterior, segue que X não pode ser um k-espaço pois não é discreto (já que p é um ponto de acumulação). Observe que esse é um exemplo de espaço que não é k-espaço mas é um subespaço do k-espaço $\beta\mathbb{N}$ (que é compacto).

2 Funtorialidade

Sejam T_2Top a categoria de espaços topológicos Hausdorff e $kTop$ a subcategoria plena de k-espaços. Mostraremos que o funtor de inclusão $\mathcal{I} : kTop \to T_2Top$ possui um adjunto à direita.

Definimos $\mathcal{K} : T_2Top \to kTop$, em objetos, da seguinte forma: se X é um espaço topológico, então $\mathcal{K}(X)$ é um espaço topológico cujo conjunto subjacente é X e a topologia é dada por $\tau = \{U \subseteq X : U \cap K$ é aberto em $K,\ \forall K$ compacto em $X\}$.

Proposição 2.1. *τ é uma topologia para $\mathcal{K}(X)$.*

Demonstração. É imediato que $\emptyset, X \in \tau$. Sejam $U_1, ..., U_n \in \tau$ e $K \subseteq X$ um compacto. Então $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $U_i \cap K$ é aberto em K, o que implica que $U_1 \cap ... \cap U_n \cap K$ é aberto em K. Portanto $U_1 \cap ... \cap U_n \in \tau$. Sejam $\{U_i\}_{i\in\Gamma} \subseteq \tau$ e $K \subseteq X$ um compacto. Então $\forall i \in \Gamma$, $U_i \cap K$ é aberto em K, o que implica que $(\bigcup_{i\in\Gamma} U_i) \cap K = \bigcup_{i\in\Gamma}(U_i \cap K)$ é aberto em K. Portanto $\bigcup_{i\in\Gamma} U_i \in \tau$. Logo τ é uma topologia. $\square$

Temos que todos os abertos de X são abertos de $\mathcal{K}(X)$, o que implica que $\mathcal{K}(X)$ é Hausdorff. Além disso, segue da definição da topologia de $\mathcal{K}(X)$ que $\mathcal{K}(X)$ é um k-espaço.

[1] Thanks to Tyrone, who showed me this example and **Proposition 1.7**

Se $f : X \to Y$ é uma função contínua entre espaços Hausdorff, definimos $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ como a própria função f (do ponto de vista de conjuntos, ambas têm os mesmos domínio e contradomínio, mas atuam em espaços topológicos diferentes).

Proposição 2.2. *Se f é contínua, então $\mathcal{K}(f)$ é contínua.*

Demonstração. Sejam U aberto de $\mathcal{K}(Y)$ e K um compacto de X. Então $f(K)$ é compacto em Y, o que implica que $U \cap f(K)$ é aberto em $f(K)$. Como f é contínua, temos que $f^{-1}(U \cap f(K)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(K))$ é aberto em $f^{-1}(f(K))$, o que implica que $f^{-1}(U) \cap K$ é aberto em K. Como $\mathcal{K}(X)$ é k-espaço, segue que $f^{-1}(U)$ é aberto de $\mathcal{K}(X)$, o que implica que $\mathcal{K}(f)$ é contínua. □

Segue que $\mathcal{K}$ é um funtor covariante.

Proposição 2.3. *$\mathcal{K}$ é adjunto à direita de $\mathcal{I}$.*

Demonstração. Para $X \in T_2Top$, tome $k_X : \mathcal{K}(X) \to X$ a aplicação identidade (pela definição de $\mathcal{K}(X)$, segue que k_X é contínua).

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre espaços Hausdorff. É imediato que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}(X) \arrow[r, "k_X"] \arrow[d, "\mathcal{K}(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{K}(Y) \arrow[r, "k_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Portanto $k = \{k_X : X \in T_2Top\}$ é uma transformação natural $\mathcal{I} \circ \mathcal{K} \Rightarrow id_{T_2Top}$.

Se X é um espaço Hausdorff, então o par $(\mathcal{K}(X), k_X)$ é uma correflexão de X pelo funtor $\mathcal{I}$. De fato, se X é um k-espaço, Y um espaço Hausdorff e $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, então $\mathcal{K}(f)$ é a única aplicação contínua que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}(X) = X \arrow[d, "\mathcal{K}(f)"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathcal{K}(Y) \arrow[r, "k_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Mas isso implica que $\mathcal{K}$ é adjunto à direita de $\mathcal{I}$ (Teorema 3.1.5 de [1]) □

3 Definição via funções

Definição 3.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é k-contínua se para todo espaço Hausdorff compacto C e aplicação contínua $t : C \to X$, a composição $f \circ t : C \to Y$ é contínua.

Proposição 3.2. *Seja X espaço Hausdorff. São equivalentes:*

1. *X é k-espaço*
2. *$\mathcal{K}(X) = X$*
3. *Para todo espaço Y, uma função $f : X \to Y$ é contínua se é k-contínua.*
4. *Para todo $A \subseteq X$, A é aberto em X se para todo C Hausdorff compacto e $t : C \to X$ contínua, $t^{-1}(A)$ é aberto em C.*

Demonstração. ($1 \Leftrightarrow 2$) Imediato.

($1 \Rightarrow 3$) Sejam F um fechado de Y, $C \subseteq X$ um compacto e $\iota : C \to X$ a aplicação de inclusão. Como f é k-contínua, temos que $f \circ \iota$ é contínua, portanto $(f \circ \iota)^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap C$ é fechado em C. Como X é k-espaço, segue que $f^{-1}(F)$ é fechado. Portanto f é contínua.

($3 \Rightarrow 2$) Considere $I : X \to \mathcal{K}(X)$ a aplicação identidade e $t : K \to X$ alguma aplicação contínua, com K um espaço Hausdorff compacto. Temos que $t(K)$ é compacto em X, o que implica que $I|_{t(K)}$ é contínua (de fato, se U é aberto de $\mathcal{K}(X)$, então $I|_{t(K)}^{-1}(U) = U \cap t(K)$ é aberto em $t(K)$), e portanto $I \circ t$ é contínua. Logo I é k-contínua, o que implica que I é contínua. Mas já vimos que $I^{-1} = k_X$ é sempre contínua, o que implica que $\mathcal{K}(X) = X$.

($1 \Rightarrow 4$) Seja $A \subseteq X$ tal que para todo C Hausdorff compacto e $t : C \to X$ contínua, $t^{-1}(A)$ é aberto em C. Tomando $C \subseteq X$ e t o mapa de inclusão, temos que para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é aberto em C. Como X é k-espaço, segue que A é aberto em X.

($4 \Rightarrow 1$) Seja $A \subseteq X$ tal que para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ é aberto em C. Sejam K um espaço Hausdorff compacto e $t : K \to X$ uma aplicação contínua. Como $t(K)$ é compacto, temos que $A \cap t(K)$ é aberto em $t(K)$, o que implica que $t^{-1}(A) = t^{-1}(A \cap t(K))$ é aberto em K. Portanto A é aberto em X. Logo X é k-espaço. □

4 Alterando as restrições sobre separabilidade e cardinalidade

Definição 4.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é compactamente gerado se para todo espaço Y e toda função $f : X \to Y$, f é contínua se e somente se é k-contínua.

Observação. Temos que a definição de espaço compactamente gerado generaliza a definição de k-espaço para espaços não Hausdorff. Várias das definições equivalentes ainda são válidas aqui, fazendo as alterações necessárias. O funtor $\mathcal{K}$ pode ser estendido a espaços não Hausdorff, e continua adjunto ao funtor de inclusão apropriado.

Definição 4.2. Sejam X um espaço topológico e κ uma cardinalidade. Dizemos que X é κ-compactamente gerado se para todo $A \subseteq X$, A é aberto em X se para todo C Hausdorff compacto com $\#C < \kappa$ e $t : C \to X$ contínua, temos que $t^{-1}(A)$ é aberto em C.

Observação. Observe que as outras definições equivalentes de espaços compactamente gerados possuem seus respectivos análogos para espaços κ- compactamente gerados, inclusive um funtor que leva um espaço qualquer em um espaço κ-compactamente gerado.

Observe também que se $\kappa \geqslant \#X$, então os conceitos de espaço compactamente gerado e κ-compactamente gerado coincidem.

Referências

[1] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1 - Basic Category Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Great Britain, 1994. Zbl 1143.18001 MR 1291599

[2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2 - Categories and Structures.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Great Britain, 1994.

[3] J. Dugundji, *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.