# Teorema 2.2 das notas de Peter Scholze sobre matemática condensada

**Igor Martins Silva**

02 e 09 de dezembro de 2022

Antes de enunciarmos o Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze, e apresentarmos sua demonstração, que é o objetivo deste texto, vamos relembrar o que é uma categoria de grupos abelianos $\kappa$-condensados, definir categoria abeliana e apresentar os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3$^*$) e (AB4$^*$). Porém, antes de mais nada, vale ressaltar que uma categoria $\mathscr{C}$, a menos que se expresse o contrário, é sinônimo de categoria pequena, ou seja, $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ são conjuntos.

## 1 Categoria $\kappa$-Cond(AbGrp)

Vamos começar relembrando a definição de categoria de grupos abelianos $\kappa$-condensados, assunto discutido no seminário sobre conjuntos condensados, ministrado por Luiz Felipe Andrade Campos. Sejam

(a) HTop a categoria cujos objetos são espaços topológicos Hausdorff e os morfismos são funções contínuas, e

(b) TFinSet a categoria cujos objetos são conjuntos finitos com a topologia discreta e os morfismos são funções contínuas.

Note que TFinSet é uma subcategoria de HTop. Seja $\mathscr{D}$ um poset, isto é, uma categoria cujos objetos são elementos de um conjunto parcialmente ordenados e os morfismos são dados pela relação de ordem, $\geq$, no seguinte sentido: dados $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y) \neq \varnothing$, se, e somente se, $X \geq Y$. Suponha ainda que $\mathscr{D}$ é direcionado para cima, isto é, dados $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, existe $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ tal que $Z \geq X, Y$. Seja $F : \mathscr{D} \to$ HTop um funtor tal que $F(\mathscr{D})$ está em TFinSet. No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, ministrado pelo professor John MacQuarrie, vimos que o limite de $F$ é um cone, ou seja, é um par $\big(L, (\varphi_D)_{D\in\mathscr{D}}\big)$, onde $L \in \mathrm{Obj}(\mathsf{HTop})$ e $\varphi_D \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{HTop}}(L, F(D))$, que satisfaz uma propriedade universal. O objeto dado pelo limite de $F$ é o que chamamos de **conjunto**

**profinito**. A categoria cujos objetos são conjuntos profinitos e os morfismos são funções contínuas é denotada por $\mathsf{ProFinSet}$.

Seja $\kappa$ um cardinal limite forte não enumerável, isto é, um cardinal não enumerável tal que, para todo $\lambda < \kappa$, vale que $2^\lambda < \kappa$. Definimos $\kappa$-$\mathsf{ProFinSet}$ como sendo a categoria cujos objetos são conjuntos profinitos de cardinalidade menor do que $\kappa$ e os morfismos são funções contínuas.

Denote por $\mathsf{AbGrp}$ a categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos. Um **grupo abeliano $\kappa$-condensado** é um feixe

$$T : \ \kappa\text{-}\mathsf{ProFinSet}^{\mathrm{op}} \ \to \ \mathsf{AbGrp}$$

Como feixes são funtores, se $T$ e $S$ são grupos abelianos $\kappa$-condensados, então um morfismo de $T$ para $S$ é uma transformação natural de $T$ para $S$. Assim, podemos definir uma categoria onde os objetos são grupos abelianos $\kappa$-condensados e os morfismos são transformações naturais. Vamos denotar tal categoria por $\kappa$-$\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$. Para mais detalhes sobre feixes, ver o seminário sobre feixes e esquemas, ministrado pelo professor André Contiero.

# 2 Categoria abeliana

## 2.1 Categoria pré-aditiva

Uma categoria $\mathscr{C}$ é dita **pré-aditiva**, se,

(a) para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe uma operação binária $+$ sobre $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ tal que $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y), +)$ é grupo abeliano;

(b) para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, a composição

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$$

é bilinear, isto é, $(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$ e $f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'$, para todo $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ e todo $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$.

Denotaremos o elemento neutro do grupo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ por $0_{XY}$.

**Observação 1.** Se $\mathscr{C}$ é uma categoria pré-aditiva e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X)$, então $0_{XY} \circ f = (0_{XY} + 0_{XY}) \circ f = 0_{XY} \circ f + 0_{XY} \circ f$. Logo, $0_{XY} \circ f = 0_{ZY}$. Analogamente, se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, então $f \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$. $\square$

## 2.2 Categoria aditiva

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ é um **objeto inicial**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe um único morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,X)$. Analogamente, dizemos que $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ é um **objeto final**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe um único morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,C)$.

**Lema 1.** Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva e $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) $C$ é um objeto inicial.

(b) $C$ é um objeto final.

(c) $\mathrm{id}_C = 0_{CC} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$.

**Demonstração.** Vamos mostrar que (a) implica (c). Assim, suponha que $C$ é um objeto inicial. Então, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$ é o grupo abeliano trivial. Uma vez que $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, então $\mathrm{id}_C = 0_{CC} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$. A demonstração que (b) implica (c) é idêntica a que fizemos. Vamos mostrar, agora, que (c) implica (a). Assuma que $\mathrm{id}_C = 0_{CC} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$. Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,X)$. Como $\mathrm{id}_C = 0_{CC}$, então $f = f \circ 0_{CC}$. Mas pela Observação 1, $f = 0_{CX}$. Portanto, $C$ é um objeto inicial. Analogamente, prova-se que (c) implica (b), o que finaliza a demonstração. ⊠

Em uma categoria pré-aditiva, um objeto inicial (ou final) é chamado de **objeto zero** e é denotado por $0_{\mathscr{C}}$.

Relembre, do seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, que dadas duas categorias, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{C}$, onde os morfismos de $\mathscr{D}$ são apenas as identidades, e dado um funtor $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, definimos o *produto* de $\big(F(D)\big)_{D\in\mathrm{Obj}(\mathscr{D})}$ como sendo o limite de $F$. Analogamente, define-se o *coproduto*, usando-se o colimite.

Assim, se $\mathscr{C}$ é uma categoria e $(C_i)_{i\in I}$ é uma família de objetos de $\mathscr{C}$, definindo $\mathscr{D}$ como sendo a categoria onde $\mathrm{Obj}(\mathscr{D}) = \{C_i \mid i \in I\}$ e $\mathrm{Hom}(\mathscr{D}) = \{\mathrm{id}_{C_i} \mid i \in I\}$ e $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ o funtor que leva objetos e morfismos neles mesmos, temos que o **produto** de $(C_i)_{i\in I}$ é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\prod_{j\in I} C_j$, e a segunda coordenada é uma família de morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $(\pi_i : \prod_{j\in I} C_j \to C_i)_{i\in I}$, tal que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e toda família $(f_i : X \to C_i)_{i\in I}$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, existe único morfismo $\Psi : X \to \prod_{j\in I} C_j$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $\pi_i \circ \Psi = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] \arrow[ddl, bend right, "f_{i_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_{i_2}"] & \\ & \prod\limits_{j\in I} C_j \arrow[dl, "\pi_{i_1}"'] \arrow[dr, "\pi_{i_2}"] & \\ C_{i_1} & & C_{i_2} \end{tikzcd}$$

De maneira análoga, o **coproduto** de $(C_i)_{i\in I}$ é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\coprod\limits_{j\in I} C_j$, e a segunda coordenada é uma família de morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $(\iota_i : C_i \to \coprod\limits_{j\in I} C_j)_{i\in I}$, tal que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e toda família $(f_i : C_i \to X)_{i\in I}$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, existe único morfismo $\Psi : \coprod\limits_{j\in I} C_j \to X$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $\Psi \circ \iota_i = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} C_{i_1} \arrow[dr, "\iota_{i_1}"] \arrow[ddr, bend right, "f_{i_1}"'] & & C_{i_2} \arrow[dl, "\iota_{i_2}"'] \arrow[ddl, bend left, "f_{i_2}"] \\ & \coprod\limits_{j\in I} C_j \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] & \\ & X & \end{tikzcd}$$

**Proposição 1.** Seja $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva.

(a) Se $\Big(\prod\limits_{j\in I} C_j, (\pi_i : \prod\limits_{j\in I} C_j \to C_i)_{i\in I}\Big)$ é o produto de $(C_i)_{i\in I}$, com $|I| < \infty$, então existem $\iota_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_i, \prod\limits_{j\in I} C_j)$, para cada $i \in I$, tal que $\Big(\prod\limits_{j\in I} C_j, (\iota_i)_{i\in I}\Big)$ é o coproduto de $(C_i)_{i\in I}$.

(b) Se $\Big(\coprod\limits_{j\in I} C_j, (\iota_i : C_i \to \coprod\limits_{j\in I} C_j)_{i\in I}\Big)$ é o coproduto de $(C_i)_{i\in I}$, com $|I| < \infty$, então existem $\pi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\prod\limits_{j\in I} C_j, C_i)$, para cada $i \in I$, tal que $\Big(\coprod\limits_{j\in I} C_j, (\pi_i)_{i\in I}\Big)$ é o produto de $(C_i)_{i\in I}$.

**Demonstração.** Mostraremos apenas a afirmação (a), pois a (b) é similar. A demonstração é por indução sobre $|I|$. Suponha que $|I| = 2$. Pela definição de produto, tomando o objeto $C_1$ e os morfismos $\mathrm{id}_{C_1}$ e $0_{C_1C_2}$, temos que existe único $\iota_1 : C_1 \to C_1 \prod C_2$ tal que $\pi_1 \circ \iota_1 = \mathrm{id}_{C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_1 = 0_{C_1C_2}$. Novamente, pela definição de produto, tomando, agora, o objeto $C_2$ e os morfismos $\mathrm{id}_{C_2}$ e $0_{C_2C_1}$, temos que existe único $\iota_2 : C_2 \to C_1 \prod C_2$ tal que $\pi_1 \circ \iota_2 = 0_{C_2C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_2 = \mathrm{id}_{C_2}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[d, dashed, "\exists!\iota_1"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}_{C_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "0_{C_1C_2}"] & \\
\circlearrowright & C_1\prod C_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \circlearrowright \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C_2 \arrow[d, dashed, "\exists!\iota_2"] \arrow[ddl, bend right, "0_{C_2C_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}_{C_2}"] & \\
\circlearrowright & C_1\prod C_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \circlearrowright \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}
$$

Para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $j_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1,X)$ e $j_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2,X)$, defina $\varphi_{(j_1,j_2)} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1\prod C_2,X)$ como sendo $j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2$. Assim, considerando o objeto $C_1\prod C_2$ e os morfismos $\iota_1 : C_1 \to C_1\prod C_2$ e $\iota_2 : C_2 \to C_1\prod C_2$, temos que

$$\pi_1 \circ \varphi_{(\iota_1,\iota_2)} = \pi_1 \circ \iota_1 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \iota_2 \circ \pi_2 = \mathrm{id}_{C_1} \circ \pi_1 + 0_{C_1C_2} \circ \pi_2 = \pi_1.$$

Analogamente, $\pi_2 \circ \varphi_{(\iota_1,\iota_2)} = \pi_2$. Isso significa que o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1\prod C_2 \arrow[d, dashed, "\varphi_{(\iota_1,\iota_2)}"] \arrow[ddl, bend right, "\pi_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_2"] & \\
\circlearrowright & C_1\prod C_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \circlearrowright \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}
$$

Como $\mathrm{id}_{C_1\prod C_2}$ também comuta esse diagrama, pela unicidade, temos que $\varphi_{(\iota_1,\iota_2)} = \mathrm{id}_{C_1\prod C_2}$, ou seja, $\iota_1\circ\pi_1+\iota_2\circ\pi_2 = \mathrm{id}_{C_1\prod C_2}$. A partir dessa observação, vamos mostrar que o coproduto de $C_1$ e $C_2$ é o par $\big(C_1\prod C_2, (\iota_1, \iota_2)\big)$.

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & C_2 \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[ddl, bend left, "f_2"] \\
\circlearrowright & C_1\prod C_2 \arrow[d, dashed, "\varphi_{(f_1,f_2)}"] & \circlearrowright \\
 & X &
\end{tikzcd}
$$

Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1,X)$ e $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2,X)$. Considerando $\varphi_{(f_1,f_2)} = f_1 \circ$

$\pi_1 + f_2 \circ \pi_2$, temos que

$$\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_1 = f_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1 + f_2 \circ \pi_2 \circ \iota_1 = f_1 \circ \mathrm{id}_{C_1} + f_2 \circ 0_{C_1C_2} = f_1.$$

De maneira análoga, $\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_2 = f_2$. Isso quer dizer que o diagrama acima é comutativo. Suponha que $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1 \prod C_2, X)$ seja um morfismo que também comuta o diagrama acima. Então

$$\begin{aligned}
\varphi_{(f_1,f_2)} - g &= (\varphi_{(f_1,f_2)} - g) \circ \mathrm{id}_{C_1 \prod C_2} \\
&= (\varphi_{(f_1,f_2)} - g) \circ \varphi_{(\iota_1,\iota_2)} \\
&= (\varphi_{(f_1,f_2)} - g) \circ (\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2) \\
&= (\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_1 - g \circ \iota_1) \circ \pi_1 + (\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_2 - g \circ \iota_2) \circ \pi_2 \\
&= (f_1 - f_1) \circ \pi_1 + (f_2 - f_2) \circ \pi_2 \\
&= 0_{C_1 \prod C_2 X}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_{(f_1,f_2)} = g$. Isso significa que $\varphi_{(f_1,f_2)}$ é o único morfismo que comuta o diagrama acima, ou seja, o par $\left(C_1 \prod C_2, (\iota_1, \iota_2)\right)$ é o coproduto de $C_1$ e $C_2$. Para $|I| > 2$, aplica-se indução. ⊠

Uma categoria $\mathscr{C}$ é chamada de **aditiva**, se

(a) $\mathscr{C}$ é pré-aditiva,

(b) existe um objeto zero em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e

(c) existe o produto para qualquer família $(C_i)_{i \in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, com $|I| < \infty$.

## 2.3 Categoria pré-abeliana

Seja $\mathscr{D}$ a categoria com dois objetos, $D_1$ e $D_2$, e dois morfismos paralelos de um objeto para o outro, $\varphi_1$ e $\varphi_2$. Pense em $\mathscr{D}$ como sendo representada pelo diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\varphi_2"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ um morfismo. Defina $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ como sendo o funtor tal que $F(D_1) = C_1$, $F(D_2) = C_2$, $F(\varphi_1) = f$ e $F(\varphi_2) = 0_{C_1C_2}$.

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\varphi_2"'] & D_2 \arrow[r, mapsto, "F"] & C_1 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0_{C_1C_2}"'] & C_2
\end{tikzcd}$$

Definimos o **núcleo** de $f$ como sendo o limite de $F$, ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\ker(f)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $k : \ker(f) \to C_1$, tal que $f \circ k = 0_{\ker(f)C_2}$ e, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e todo $g : X \to C_1$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, que satisfazem a propriedade $f \circ g = 0_{XC_2}$, existe único morfismo $\Psi : X \to \ker(f)$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $k \circ \Psi = g$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] \arrow[ddl, bend right, "g"'] \arrow[ddr, bend left, "0_{XC_2}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \\
& \ker(f) \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)C_2}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
C_1 \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "0_{C_1C_2}"'] & & C_2
\end{tikzcd}$$

Similarmente, o **conúcleo** de $f$ é o colimite de $F$, ou seja, é um par ordenado $\big(\mathrm{coker}(f),\ q : C_2 \to \mathrm{coker}(f)\big)$, onde $\mathrm{coker}(f) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $q \in \mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, tal que $q \circ f = 0_{C_1\,\mathrm{coker}(f)}$ e, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e todo $g : C_2 \to X$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, que satisfazem a propriedade $g \circ f = 0_{C_1X}$, existe único morfismo $\Psi : \mathrm{coker}(f) \to X$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $\Psi \circ q = g$.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[rr, shift left, "0_{C_1C_2}"] \arrow[rr, shift right, "f"'] \arrow[dr, "0_{C_1\,\mathrm{coker}(f)}"'] \arrow[ddr, bend right, "0_{C_1X}"'] & & C_2 \arrow[dl, "q"] \arrow[ddl, bend left, "g"] \\
& \mathrm{coker}(f) \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Uma categoria $\mathscr{C}$ é dita **pré-abeliana**, se $\mathscr{C}$ é aditiva e se, para todo $f : X \to Y$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, existe núcleo e conúcleo de $f$.

## 2.4 Categoria abeliana

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$. Dizemos que $f$ é **monomorfismo**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, C_1)$, temos que $g_1 = g_2$, sempre que $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Dizemos que $f$ é **epimorfismo**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2, X)$, temos que $g_1 = g_2$, sempre que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.

**Lema 2.** Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$, $(\ker(f), k : \ker(f) \to C_1)$ o núcleo de $f$ e $(\mathrm{coker}(f), q : C_2 \to \mathrm{coker}(f))$ o conúcleo de $f$. Então $k$ é monomorfismo e $q$ é epimorfismo.

**Demonstração.** Mostraremos apenas que $k$ é monomorfismo, já que a demonstração que $q$ é epimorfismo é análoga. Sejam $i, j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$ tais que $k \circ i = k \circ j$. Então $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$. Pela definição de núcleo de $f$, tomando o objeto $X$ e o morfismo $0_{XC_1}$, temos que existe único morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$ tal que $k \circ \psi = 0_{XC_1}$. Uma vez que $k \circ 0_{X\ker(f)} = 0_{XC_1}$, então tal $\psi$ é, exatamente, $0_{X\ker(f)}$. Acontece que $i - j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$ também satisfaz a condição de $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "i-j"] \arrow[ddl, bend right=60, "0_{XC_1}"'] \arrow[ddr, bend left=60, "0_{XC_2}"] & \\
 & \ker(f) \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)C_2}"] & \\
C_1 \arrow[rr, bend left=10, "f"] \arrow[rr, bend right=10, "0_{C_1C_2}"'] & & C_2
\end{tikzcd}
$$

Portanto, pela unicidade, $i - j = 0_{X\ker(f)}$. Logo, $i = j$. ⊠

**Proposição 2.** Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-abeliana e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Sejam também

(a) $(\ker(f), k)$ o núcleo $f$,

(b) $(\mathrm{coker}(f), q)$ o conúcleo de $f$,

(c) $(\ker(q), k')$ o núcleo $q$ e

(d) $(\mathrm{coker}(k), q')$ o conúcleo de $k$.

Então existe único $\overline{f}$ : coker$(k) \to$ ker$(q)$ tal que $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$.

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r, "q"] & \operatorname{coker}(f) \\
 & \operatorname{coker}(k) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \ker(q) \arrow[u, "k'"'] &
\end{tikzcd}$$

**Demonstração.** Pela definição de conúcleo de $f$, temos que $q \circ f = 0_{X\,\mathrm{coker}(f)}$. Logo, pela definição de núcleo de $q$, exite único $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(q))$ tal que

$$k' \circ f' = f, \tag{1}$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "f'"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "0_{X\,\mathrm{coker}(f)}"] & \\
 & \ker(q) \arrow[dl, "k'"'] \arrow[dr, "0_{\ker(q)\,\mathrm{coker}(f)}"] & \\
Y \arrow[rr, bend left=10, "q"] \arrow[rr, bend right=10, "0_{Y\,\mathrm{coker}(f)}"'] & & \operatorname{coker}(f)
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $(\ker(f), k)$ o núcleo $f$, então $f \circ k = 0_{\ker(f)Y}$. Daí, podemos concluir que

$$k' \circ f' \circ k \overset{(1)}{=} f \circ k = 0_{\ker(f)Y} = k' \circ 0_{\ker(f)\ker(q)}.$$

Não perca de vista que temos a seguinte cadeia de morfismo:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \ker(q) \arrow[r, "k'"] & Y
\end{tikzcd}$$

Logo, como $k'$ é monomorfismo, $f' \circ k = 0_{\ker(f)\ker(q)}$. Daí, pela definição de conúcleo de $k$, exite único $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{coker}(k), \ker(q))$

$$\overline{f} \circ q' = f', \tag{2}$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[rr, shift left, "0_{\ker(f)X}"] \arrow[rr, shift right, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)\,\mathrm{coker}(k)}"'] \arrow[ddr, bend right=60, "0_{\ker(f)\ker(q)}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[dl, "q'"] \arrow[ddl, bend left=60, "f'"] \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{coker}(k) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] & \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \\
& \ker(q) &
\end{tikzcd}$$

Com isso, obtemos

$$k' \circ \overline{f} \circ q' \overset{(2)}{=} k' \circ f' \overset{(1)}{=} f.$$

o que conclui a demonstração. ⊠

Uma categoria $\mathscr{C}$ é denominada **abeliana**, se $\mathscr{C}$ é pré-abeliana e se, para todo $f : X \to Y$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, o morfismo $\overline{f}$, dado pelo Proposição 2, é um isomorfismo.

**Exemplo 1.** Vamos ver que a categoria $\mathfrak{AbGrp}$ é uma categoria abeliana. Sabemos, da Teoria de Grupos, que $\mathfrak{AbGrp}$ é pré-aditiva, já que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(G, H)$ é grupo abeliano e a composição é bilinear. O grupo trivial $\{0\}$ é o elemento zero dessa categoria e, no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos que, dados $(G_i)_{i=1}^n$ grupo abelianos, a soma direta $\bigoplus_{i=1}^n G_i$, junto das inclusões $\iota_i : G_i \to \bigoplus_{i=1}^n G_i$, é o coproduto de $(G_i)_{i=1}^n$. Portanto, $\mathfrak{AbGrp}$ é aditiva. Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(G, H)$. Afirmamos que

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = 0\}, \quad \text{junto do morfismo} \quad \begin{array}{rccc} k: & \ker(f) & \to & G \\ & g & \mapsto & g \end{array}$$

é o núcleo de $f$, e

$$\mathrm{coker}(f) = {}^{H}\!\diagup_{\mathrm{im}(f)}, \quad \text{junto do morfismo} \quad \begin{array}{rccc} q: & H & \to & \mathrm{coker}(f) \\ & h & \mapsto & h + \mathrm{im}(f) \end{array}$$

onde $\mathrm{im}(f) = \{h \in H \mid \exists\, g \in G\ f(g) = h\}$, é o conúcleo de $f$. Vamos mostrar só a afirmação para o núcleo. Note que $f \circ k = 0$, pois $f(g) = 0$, para todo $g \in \ker(f)$. Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{AbGrp})$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(X, G)$ tal que $f \circ g = 0$. Isso quer dizer que $f(g(x)) = 0$, para todo $x \in X$, ou seja, $g(x) \in \ker(f)$. Daí, podemos restringir o contradomínio de $g$ e considerá-la em $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(X, \ker(f))$. Assim, temos que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] \arrow[ddr, bend left=60, "0_{XH}"] \arrow[ddl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowright"] & \\
 & \ker(f) \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)H}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
G \arrow[rr, bend left=10, "f"] \arrow[rr, bend right=10, "0_{GH}"'] & & H
\end{tikzcd}$$

Seja $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(X, \ker(f))$ tal que $k \circ h = g$. Então, como $g = k \circ g$, temos que $k \circ h = k \circ g$. Uma vez que, por definição, $k$ é injetiva, temos que $h = g$. Portanto, $(\ker(f), k)$ é o núcleo de $f$. Logo, $\mathfrak{AbGrp}$ é pré-abeliana. Finalmente, seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(G, H)$ e sejam

- $(\ker(f), \ker(f) \xrightarrow{k} G)$ o núcleo $f$,
- $(\mathrm{coker}(f), H \xrightarrow{q} \mathrm{coker}(f))$ o conúcleo de $f$,
- $(\ker(q), \ker(q) \xrightarrow{k'} H)$ o núcleo $q$ e
- $(\mathrm{coker}(k), G \xrightarrow{q'} \mathrm{coker}(k))$ o conúcleo de $k$.

Note que $\ker(q) = \{h \in H \mid q(h) = 0\} = \{h \in H \mid h + \mathrm{im}(f) = 0\}$. Logo, $\ker(q) \subseteq \mathrm{im}(f)$. Reciprocamente, se $h \in \mathrm{im}(f)$, então $h + \mathrm{im}(f) = 0$, ou seja, $q(h) = 0$. Assim, $\ker(q) = \mathrm{im}(f)$. Agora, veja que $\mathrm{coker}(k) = {}^{G}\!/_{\mathrm{im}(k)}$. Mas $k$ é injetiva, logo $\mathrm{im}(k) = \ker(f)$. Daí, $\mathrm{coker}(k) = {}^{G}\!/_{\ker(f)}$. Pelo Teorema do Isomorfismo, o homomorfismo de grupos $\overline{f} : {}^{G}\!/_{\ker(f)} \to \mathrm{im}(f)$, $g + \ker(f) \mapsto f(g)$, é um isomorfismo. Logo,

$$\begin{array}{rrcl}
\overline{f} : & \mathrm{coker}(k) & \to & \ker(q) \\
 & g + \ker(f) & \mapsto & f(g)
\end{array}$$

é um isomorfismo. Pela definição de núcleo e conúcleo, temos que

$$k'\big(\overline{f}(q'(g))\big) = k'\big(\overline{f}(g + \underbrace{\mathrm{im}(k)}_{=\ker(f)})\big) = k'(f(g)) = f(g),$$

isto é, $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$. Portanto, $\mathfrak{AbGrp}$ é abeliana. $\square$

**Observação 2.** Seja $\mathscr{C}$ uma categoria e considere a categoria cujos objetos são funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathfrak{AbGrp}$ e cujos morfismos são transformações naturais, a qual denotaremos por $\mathfrak{Func}(\mathscr{C},\mathfrak{AbGrp})$. Vamos ver, sem muitos detalhes, que essa categoria é abeliana.

- Sejam $F, G : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores e $\eta, \nu : F \to G$ transformações naturais. Dado $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, definimos $(\eta + \nu)_C := \eta_C + \nu_C$ (note que a soma à direita da igualmente é a soma entre homomorfismos de grupos). Isso faz $\eta + \nu := (\eta_C + \nu_C)_{C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ uma transformação natural. Além disso, com tal soma, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C},\mathfrak{AbGrp})}(F, G)$ é um grupo abeliano, já que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(F(C), G(C))$ é um grupo abeliano.

- Sejam $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores e $\eta, \nu : F \to G$ e $\zeta : H \to F$ transformações naturais. Dado $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, definimos $\big((\eta + \nu) \circ \zeta\big)_C := (\eta_C + \nu_C) \circ \zeta_C$ (note que a composição à direita da igualmente é a composição entre homomorfismos de grupos). Assim, a composição em $\mathfrak{Func}(\mathscr{C},\mathfrak{AbGrp})$ herda a bilinearidade da composição em $\mathfrak{AbGrp}$.

- Seja $0_{\mathfrak{AbGrp}}$ o objeto zero em $\mathfrak{AbGrp}$. Defina $0_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C},\mathfrak{AbGrp})} : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$, como sendo o funtor tal que $C \mapsto 0_{\mathfrak{AbGrp}}$ e $C_1 \xrightarrow{f} C_2 \mapsto 0_{\mathfrak{AbGrp}} \xrightarrow{0_{0_{\mathfrak{AbGrp}}0_{\mathfrak{AbGrp}}}} 0_{\mathfrak{AbGrp}}$. Tal funtor é o objeto zero em $\mathfrak{Func}(\mathscr{C},\mathfrak{AbGrp})$, porque, dado qualquer funtor $F : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$, se $\eta : 0_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C},\mathfrak{AbGrp})} \to F$ é uma transformação natural, então $\eta_C$ só pode ser o homomorfismo que leva $0_{\mathfrak{AbGrp}}$ em $0_{\mathfrak{AbGrp}}$, para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

- Sejam $F_1, \ldots, F_n : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores. Defina o funtor

$$\begin{array}{rccccc}
\bigoplus_{i=1}^{n} F_i : & \mathscr{C} & \to & \mathfrak{AbGrp} & & \\
& C & \mapsto & \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(C) & & \\
& C_1 \xrightarrow{f} C_2 & \mapsto & \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(C_1) & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{n} F_i(f)} & \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(C_2) \\
& & & (g_i)_{i=1}^{n} & \mapsto & \big(F_i(f)(g_i)\big)_{i=1}^{n}.
\end{array}$$

Para $j = 1, \dots, n$, defina a transformação natural $\eta^j : F_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, onde $\eta^j_C = \iota^j_C : F_j(C) \to \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(C)$ a inclusão. Pode-se provar que $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, junto das transformações naturais $\eta^j : G_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$, é o coproduto de $(F_i)_{i=1}^n$.

- Seja $\eta : F \to G$ uma transformação natural. Defina o funtor

$$\begin{array}{rcccl} \ker(\eta): & \mathscr{C} & \to & \mathfrak{AbGrp} & \\ & C & \mapsto & \ker(\eta_C) & \\ & C_1 \xrightarrow{f} C_2 & \mapsto & \ker(\eta_{C_1}) & \xrightarrow{\ker(\eta)(f)} \ker(\eta_{C_2}) \\ & & & g & \mapsto \quad F(f)(g). \end{array}$$

Usando a definição de núcleo de um homomorfismo de grupos e o fato de $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$, pode-se provar que esse funtor está bem definido. Defina a transformação natural $k : \ker(\eta) \to F$, onde $k_C : \ker(\eta_C) \to F(C)$, $g \mapsto g$ é a inclusão. Pode-se também provar que $(\ker(\eta), k)$ é o núcleo de $\eta$. Similarmente, defina o funtor

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{coker}(\eta): & \mathscr{C} & \to & \mathfrak{AbGrp} & \\ & C & \mapsto & \operatorname{coker}(\eta_C) = G(C)/\operatorname{im}(\eta_C) & \\ & C_1 \xrightarrow{f} C_2 & \mapsto & G(C_1)/\operatorname{im}(\eta_{C_1}) & \xrightarrow{\operatorname{coker}(\eta)(f)} G(C_2)/\operatorname{im}(\eta_{C_2}) \\ & & & g + \operatorname{im}(\eta_{C_1}) & \mapsto \quad G(f)(g) + \operatorname{im}(\eta_{C_2}). \end{array}$$

Novamente, usando que $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$, pode-se provar que esse funtor está bem definido. Definindo, agora, a transformação natural $q : G \to \operatorname{coker}(\eta)$, onde $q_C : G(C) \to \operatorname{coker}(\eta_C)$, $g \mapsto g + \operatorname{im}(\eta_C)$, pode-se também provar que $(\operatorname{coker}(\eta), q)$ é o conúcleo de $\eta$.

- Dado $\eta : F \to G$ uma transformação natural, pelo Exemplo 1, temos que $\overline{\eta}_C : \operatorname{coker}(k_C) \to \ker(q_C)$, $g + \ker(\eta_C) \mapsto \eta_C(g)$ é um isomorfismo e comuta o diagrama da Proposição 2. Isso prova que que $\overline{\eta} : \operatorname{coker}(k) \to \ker(q)$ é isomorfismo e que comuta o mesmo diagrama.

Com isso, temos que $\mathfrak{Func}(\mathscr{C}, \mathfrak{AbGrp})$ é uma categoria abeliana. $\square$

# 3 Axiomas de Grothendieck

Vamos ver os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB3$^*$), (AB4), (AB4$^*$), (AB5) e (AB6). Eles são estabelecem condições extras que categorias abelianas possuem. Assim, para essa seção, a categoria $\mathscr{C}$, a qual vale tais axiomas, é uma categoria abeliana.

## 3.1 Axiomas (AB3)

**Axioma (AB3).** Em $\mathscr{C}$, existe o coproduto para qualquer família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, com $I$ um conjunto de índices qualquer. $\square$

## 3.2 Axiomas (AB3$^*$)

**Axioma (AB3$^*$).** Em $\mathscr{C}$, existe o produto para qualquer família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, com $I$ um conjunto de índices qualquer. $\square$

**Observação 3.** Analogamente a definição de núcleo e conúcleo de um morfismo, defina $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ como sendo o funtor tal que $F(D_1) = C_1$, $F(D_2) = C_2$, $F(\varphi_1) = f$ e $F(\varphi_2) = g$.

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\varphi_2"'] & D_2 \arrow[r, mapsto, "F"] & C_1 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & C_2
\end{tikzcd}$$

Definimos o **equalizador** de $f$ e $g$ como sendo o limite de $F$, ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\mathrm{eq}(f,g)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $e : \mathrm{eq}(f,g) \to C_1$, tal que $f \circ e = g \circ e$ e, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e todo $h : X \to C_1$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, que satisfazem a propriedade $f \circ h = g \circ h$, existe único morfismo $\Psi : X \to \mathrm{eq}(f,g)$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $e \circ \Psi = h$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddl, bend right=50, "h"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] \arrow[ddr, bend left=50, "g\circ h"] & \\
 & \mathrm{eq}(f,g) \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g\circ e"] & \\
C_1 \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & C_2
\end{tikzcd}$$

Similarmente, definimos o **coequalizador** de $f$ e $g$ como sendo o colimite de $F$. Uma vez que $\mathscr{C}$ é uma categoria abeliana, temos que existem núcleo e conúcleo, para todo morfismo. Assim, pode-se mostrar que $\big(\ker(f-g), k : \ker(f-g) \to C_1\big)$ é o equalizador de $f$ e $g$ e que $\big(\operatorname{coker}(f-g), q : C_2 \to \operatorname{coker}(f-g)\big)$ é o coequalizador de $f$ e $g$.

No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos um teorema que diz: "se $\mathscr{C}$ é uma categoria que possui (co)produtos arbitrários e (co)equalizadores, então todo funtor $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ possui (co)limite". Logo, os axiomas (AB3) e (AB3$^*$) são equivalentes a dizer, respectivamente, que todo colimite existe e que todo limite existe. $\square$

## 3.3 Axiomas (AB4)

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem colimites e $(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ uma família de morfismos em $\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$. Sejam $\Big(\coprod\limits_{j\in I} X_j, (\iota_i^X : X_i \to \coprod\limits_{j\in I} X_j)_{i\in I}\Big)$ o coproduto de $(X_i)_{i\in I}$ e $\Big(\coprod\limits_{j\in I} Y_j, (\iota_i^Y : Y_i \to \coprod\limits_{j\in I} Y_j)_{i\in I}\Big)$ o coproduto de $(Y_i)_{i\in I}$. Pela propriedade universal do coproduto, existe único morfismo em $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod\limits_{j\in I} X_j, \coprod\limits_{j\in I} Y_j)$, o qual denotaremos por $\coprod\limits_{j\in I} f_j$, tal que $\coprod\limits_{j\in I} f_j \circ \iota_i^X = \iota_i^X \circ f_i$, para todo $i \in I$, ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X_{i_1} \arrow[dd, "f_{i_1}"'] \arrow[dr, "\iota_{i_1}^X"] & & X_{i_2} \arrow[dl, "\iota_{i_2}^X"'] \arrow[dd, "f_{i_2}"] \\
& \coprod\limits_{j\in I} X_j \arrow[dd, dashed, "\exists!\coprod\limits_{j\in I} f_j"] & \\
Y_{i_1} \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, "\iota_{i_1}^Y"'] & & Y_{i_2} \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dl, "\iota_{i_2}^Y"] \\
& \coprod\limits_{j\in I} Y_j &
\end{tikzcd}$$

**Axioma (AB4).** $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3) e coprodutos são exatos, isto é, se $I$ é um conjunto de índices e $0 \to X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \to 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$ e $X_i, Y_i, Z_i \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$, então a sequência

$$0 \to \coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\coprod\limits_{i\in I} f_i} \coprod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\coprod\limits_{i\in I} g_i} \coprod_{i\in I} Z_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta. $\square$

## 3.4 Axiomas (AB4*)

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem limites e $(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ uma família de morfismos em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$. Similarmente à definição de coproduto de morfismos, o **produto** de $(f_i)_{i\in I}$ é o único morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\prod\limits_{j\in I} X_j, \prod\limits_{j\in I} Y_j)$, o qual denotaremos por $\prod\limits_{j\in I} f_j$, tal que $\pi_i^Y \circ \prod\limits_{j\in I} f_j = f_i \circ \pi_i^X$, para todo $i \in I$, ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & \prod\limits_{j\in I} X_j \arrow[dl, "\pi^X_{i_1}"'] \arrow[dr, "\pi^X_{i_2}"] \arrow[dd, dashed, "\exists!\prod\limits_{j\in I} f_j"] & \\
X_{i_1} \arrow[dd, "f_{i_1}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & X_{i_2} \arrow[dd, "f_{i_2}"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"'] \\
 & \prod\limits_{j\in I} Y_j \arrow[dl, "\pi^Y_{i_1}"] \arrow[dr, "\pi^Y_{i_2}"'] & \\
Y_{i_1} & & Y_{i_2}
\end{tikzcd}$$

**Axioma (AB4*).** $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3*) e produtos são exatos, isto é, se $I$ é um conjunto de índices e $0 \to X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \to 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$ e $X_i, Y_i, Z_i \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, então a sequência

$$0 \to \prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\prod_{i\in I} f_i} \prod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\prod_{i\in I} g_i} \prod_{i\in I} Z_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta. $\square$

## 3.5 Axiomas (AB5)

Seja $\mathscr{D}$ uma categoria de índices (no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, chamamos $\mathscr{D}$ de "categoria combinatória"). Essa categoria é chamada **filtrada**, se

(a) $\mathrm{Obj}(\mathscr{D}) \neq \varnothing$,

(b) para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, existe $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Z) \neq \varnothing \neq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Y,Z)$,

(c) dados $f, g : X \to Y$, existem $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ e $h : Y \to Z$ tal que $h \circ f = h \circ g$.

Se $\mathscr{C}$ é uma categoria onde existem limites e colimites e $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ é um funtor, onde $\mathscr{D}$ é uma categoria filtrada, o colimite de $F$ é dito **colimite filtrado**.

Sejam $F, G, H : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores, com $\mathscr{D}$ sendo uma categoria de índices e $\mathscr{C}$ uma categoria abeliana. Sejam $\eta : F \to G$ e $\nu : G \to H$ transformações naturais. De maneira semelhante ao que foi feito na Observação 2, podemos definir núcleo e conúcleo de uma transformação natural, usando o núcleo e conúcleo da categoria abeliana $\mathscr{C}$. Também pode-se generalizar a definição de transformação natural zero, usando o objeto zero de $\mathscr{C}$. Assim, uma sequência $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$ é uma sequência exata curta, se $\eta$ é injetiva, $\nu$ é sobrejetiva e $\ker(\nu) = \operatorname{im}(\eta)$. Pode-se provar que, $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$ é uma sequência exata curta, se, e somente se, para todo $D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})$, a sequência $0 \to F(D) \xrightarrow{\eta_D} G(D) \xrightarrow{\nu_D} H(D) \to 0$ é uma sequência exata curta em $\mathscr{C}$.

Considere ainda $F, G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ como no parágrafo anterior e $\eta : F \to G$ uma transformação natural qualquer. Sejam $\big(\operatorname{colim}(F), (\varphi_D^F : F(D) \to \operatorname{colim}(F))_{D \in \operatorname{Obj}(D)}\big)$ e $\big(\operatorname{colim}(G), (\varphi_D^G : G(D) \to \operatorname{colim}(G))_{D \in \operatorname{Obj}(D)}\big)$ colimites de $F$ e $G$, respectivamente. Se $D_1, D_2 \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})$ e $f : D_1 \to D_2$ é um morfismo, então, pela propriedade da transformação natural $\eta$, temos que $G(f) \circ \eta_{D_1} = \eta_{D_2} \circ F(f)$. Pela propriedade do colimite de $G$, temos que $\varphi_{D_1}^G = \varphi_{D_2}^G \circ G(f)$.

$$\begin{tikzcd}
F(D_1) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_{D_1}^F"'] \arrow[dd, "\eta_{D_1}"'] & & F(D_2) \arrow[dl, "\varphi_{D_2}^F"] \arrow[dd, "\eta_{D_2}"] \\
& \operatorname{colim}(F) \arrow[dd, dashed, "\exists!\, \operatorname{colim}(\eta)"] & \\
G(D_1) \arrow[rr, "G(f)"] \arrow[dr, "\varphi_{D_1}^G"'] & & G(D_2) \arrow[dl, "\varphi_{D_2}^G"] \\
& \operatorname{colim}(G) &
\end{tikzcd}$$

Portanto,

$$\varphi_{D_2}^G \circ \eta_{D_2} \circ F(f) = \varphi_{D_2}^G \circ G(f) \circ \eta_{D_1} = \varphi_{D_1}^G \circ \eta_{D_1},$$

como se vê no diagrama anterior. Logo, pela propriedade do colimite de $F$, existe único morfismo de $\operatorname{colim}(F)$ para $\operatorname{colim}(G)$, o qual denotaremos por $\operatorname{colim}(\eta)$, tal que $\operatorname{colim}(\eta) \circ \varphi_D^F = \varphi_D^G \circ \eta_D$, para todo $D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})$.

**Axioma (AB5).** $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3) e colimites filtrados são exatos, isto é, se $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$ é uma sequência exata curta, com $F, G, H : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores, onde $\mathscr{D}$ é uma categoria filtrada, então a sequência

$$0 \to \operatorname{colim}(F) \xrightarrow{\operatorname{colim}(\eta)} \operatorname{colim}(G) \xrightarrow{\operatorname{colim}(\nu)} \operatorname{colim}(H) \to 0$$

também é uma sequência exata curta. $\square$

## 3.6 Axiomas (AB6)

Definimos o **produto** de $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$, uma família de categorias, denotado por $\prod\limits_{i\in I}\mathscr{D}_i$, como sendo a categoria cujos objetos são $\prod\limits_{i\in I} D^i = \{(D^i)_{i\in I} \mid D^i \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D}_i)\}$ e os morfismos são $\prod\limits_{i\in I} f^i = \{(f^i)_{i\in I} \mid f^i \in \operatorname{Hom}(\mathscr{D}_i)\}$. Pode-se provar que se $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ é uma família de categorias filtradas, então $\prod\limits_{i\in I}\mathscr{D}_i$ também é uma categoria filtrada. Sejam $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ uma família de categorias filtradas, $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem colimites, e $F_i : \mathscr{D}_i \to \mathscr{C}$ funtores indexados por $i \in I$. Seja $\big(\operatorname{colim}(F_i), (\psi^i_{D^i} : F_i(D^i) \to \operatorname{colim}(F_i))_{D^i\in\operatorname{Obj}(\mathscr{D}_i)}\big)$ o colimite de $F_i$. Se $f^i : D^i_1 \to D^i_2$ é um morfismo em $\operatorname{Hom}(\mathscr{D}_i)$, então, pela propriedade do colimite de $F_i$, $\psi^i_{D^i_1} = \psi^i_{D^i_2} \circ F_i(f^i)$. Defina o funtor $F : \prod\limits_{i\in I}\mathscr{D}_i \to \mathscr{C}$, onde $F(\prod\limits_{i\in I} D^i) = \prod\limits_{i\in I} F_i(D^i)$ e $F(\prod\limits_{i\in I} f^i) = \prod\limits_{i\in I} F_i(f^i)$. Seja $\big(\operatorname{colim}(F), (\varphi_{\prod_{i\in I} D^i} : F(\prod\limits_{i\in I} D^i) \to \operatorname{colim}(F))_{\prod_{i\in I} D^i\in\operatorname{Obj}(\prod_{i\in I}\mathscr{D}_i)}\big)$ o colimite de $F$. Note que, se $\prod\limits_{i\in I} f^i : \prod\limits_{i\in I} D^i_1 \to \prod\limits_{i\in I} D^i_2$ é um morfismo em $\operatorname{Hom}(\prod\limits_{i\in I}\mathscr{D}_i)$, então, temos que

$$\prod_{i\in I}\psi^i_{D^i_2} \circ \prod_{i\in I} F_i(f^i) = \prod_{i\in I}(\psi^i_{D^i_2} \circ F_i(f^i)) = \prod_{i\in I}\psi^i_{D^i_1}$$

o que quer dizer que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} F_i(D^i_1) \arrow[rr, "\prod_{i\in I} F_i(f^i)"] \arrow[dr, "\varphi_{\prod_{i\in I} D^i_1}"'] \arrow[ddr, bend right, "\prod_{i\in I}\psi^i_{D^i_1}"'] & & \prod\limits_{i\in I} F_i(D^i_2) \arrow[dl, "\varphi_{\prod_{i\in I} D^i_2}"] \arrow[ddl, bend left, "\prod_{i\in I}\psi^i_{D^i_2}"] \\
& \operatorname{colim}(F) \arrow[d, dashed, "\exists!\xi"] & \\
& \prod\limits_{i\in I}\operatorname{colim}(F_i) &
\end{tikzcd}$$

Logo, pela propriedade do colimite de $F$, existe único morfismo $\xi : \operatorname{colim}(F) \to \prod\limits_{i\in I}\operatorname{colim}(F_i)$

tal que $\xi \circ \varphi_{\prod\limits_{i\in I} D^i} = \prod\limits_{i\in I} \psi^i_{D^i}$, para todo $\prod\limits_{i\in I} D^i \in \mathrm{Obj}(\prod\limits_{i\in I} \mathscr{D}_i)$.

**Axioma (AB6).** $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3) e o morfismo $\xi : \mathrm{colim}(F) \to \prod\limits_{i\in I} \mathrm{colim}(F_i)$ é um isomorfismo. $\square$

**Exemplo 2.** Apresentaremos, sem muitos detalhes, as ideais que justificam que a categoria $\mathfrak{AbGrp}$ satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB3*), (AB4), (AB4*), (AB5) e (AB6).

(AB3) Sejam $(G_i)_{i\in I}$ uma família de grupos abelianos. Então $\Big(\bigoplus\limits_{i\in I} G_i, (\iota_i : G_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} G_i)_{i\in I}\Big)$ é o coproduto de $(G_i)_{i\in I}$, onde $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} \mid g_i \in G_i$ e $g_i \neq 0$ somente para uma quantidade finita de índices$\}$. Para ver isso, basta notar que, dados $f_i : G_i \to X$ homomorfismos de grupos indexados por $i \in I$, temos que $\psi : \bigoplus\limits_{i\in I} G_i \to X$, $(g_i)_{i\in I} \mapsto \sum\limits_{i\in I} f_i(g_i)$ é o único homomorfismo tal que $f_i = \psi \circ \iota_i$.

(AB3*) Analogamente ao que foi feito em (AB3), sejam $(G_i)_{i\in I}$ uma família de grupos abelianos. Então $\Big(\prod\limits_{i\in I} G_i, (\pi_i : \prod\limits_{i\in I} G_i \to G_i)_{i\in I}\Big)$ é o produto de $(G_i)_{i\in I}$, onde $\prod\limits_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} \mid g_i \in G_i\}$. Para ver isso, basta notar que, dados $f_i : X \to G_i$ homomorfismos de grupos indexados por $i \in I$, temos que $\psi : X \to \prod\limits_{i\in I} G_i$, $x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$ é o único homomorfismo tal que $f_i = \pi_i \circ \psi$.

(AB4) Sejam $(G_i)_{i\in I}$, $(H_i)_{i\in I}$ e $(K_i)_{i\in I}$ famílias de grupos abelianos e $(f_i : G_i \to H_i)_{i\in I}$ e $(r_i : H_i \to K_i)_{i\in I}$ famílias de homomorfismos de grupos tais que $0 \to G_i \xrightarrow{f_i} H_i \xrightarrow{r_i} K_i \to 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$. Pode-se provar que o coproduto de $(f_i)_{i\in I}$ é o homomorfismo $\bigoplus\limits_{i\in I} f_i : \bigoplus\limits_{i\in I} G_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} H_i$, $(g_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(g_i))_{i\in I}$. O mesmo vale para o coproduto de $(r_i)_{i\in I}$. Assim, usando que $f_i$ é injetiva, $r_i$ é sobrejetiva e $\mathrm{im}(f_i) = \ker(r_i)$, para todo $i \in I$, pode-se provar que

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} G_i \xrightarrow{\bigoplus\limits_{i\in I} f_i} \bigoplus_{i\in I} H_i \xrightarrow{\bigoplus\limits_{i\in I} r_i} \bigoplus_{i\in I} K_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

(AB4*) Aplica-se, nesse axioma, o mesmo raciocínio usado em (AB4), onde o produto de homomorfismos é definido igualmente ao coproduto.

(AB5) Sejam $\mathscr{D}$ uma categoria filtrada e $F, G, H : \mathscr{D} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores tais que $0 \to F \xrightarrow{\eta}$

$G \xrightarrow{\nu} H \to 0$ é uma sequência exata curta. Seja $\bigsqcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D)$ a união disjunta de todos os grupos $F(D)$, indexados por $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, isto é,

$$\bigsqcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D) = \bigcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} \{\underbrace{(x,D)}_{\substack{\shortparallel \\ x_D}} \mid x \in F(D)\} = \bigcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} \{x_D \in F(D)\}.$$

Defina a relação $\sim$ em $\bigsqcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D)$ da seguinte maneira:

$$x_{D_1} \sim x_{D_2} \iff \exists D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})\ \exists d_1 : D_1 \to D\ \exists d_2 : D_2 \to D \quad F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2})$$

Pode-se provar que essa relação é uma relação de equivalência. Assim, podemos considerar o conjunto das classes de equivalência, $\Big(\bigsqcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D)\Big)\big/\sim\, = \{[x_D] \mid x_D \in F(D)\} =: L_F$. Sejam $[x_{D_1}]$ e $[x_{D_2}]$ duas classes de equivalência e $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ tal que existe $d_1 : D_1 \to D$ e $d_2 : D_2 \to D$ (lembre-se de que $\mathscr{D}$ é uma categoria filtrada). Definimos $[x_{D_1}] + [x_{D_2}] := [F(d_1)(x_{D_1}) + F(d_2)(x_{D_2})]$. Pode-se mostrar essa operação é bem definida e que faz o conjunto $L_F$ ser um grupo abeliano. Também pode-se provar que o colimite de $F$ é o par $\big(L_F, (s_D : F(D) \to L_F)_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}\big)$, onde $s_D(x_D) = [x_D]$ (para mais detalhes ver [2], Proposição 2.13.3, e [6], seção 10.8). O mesmo se aplica aos funtores $G$ e $H$.

Pode-se provar que o colimite de $\eta$ é o morfismo $\mathrm{colim}(\eta) : L_F \to L_G$, $[x_D] \mapsto [\eta_D(x_D)]$. Vamos ver que ela está bem definida. Suponha que $[x_{D_1}] = [x_{D_2}]$. Então existem $d_1 : D_1 \to D$ e $d_2 : D_2 \to D$ tais que $F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2})$. Como $\eta$ é uma transformação natural, então

$$G(d_1)\big(\eta_{D_1}(x_{D_1})\big) = \eta_D\big(F(d_1)(x_{D_1})\big) = \eta_D\big(F(d_2)(x_{D_2})\big) = G(d_2)\big(\eta_{D_2}(x_{D_2})\big),$$

como se vê no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
x_{D_1} \arrow[d, phantom, "\Cap"] & & x_{D_2} \arrow[d, phantom, "\Cap"] \\
F(D_1) \arrow[r, "F(d_1)"] \arrow[d, "\eta_{D_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(D) \arrow[d, "\eta_D"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(D_2) \arrow[l, "F(d_2)"'] \arrow[d, "\eta_{D_2}"] \\
G(D_1) \arrow[r, "G(d_1)"'] & G(D) & G(D_2) \arrow[l, "G(d_1)"]
\end{tikzcd}$$

Logo, $[\eta_{D_1}(x_{D_1})] = [\eta_{D_2}(x_{D_2})]$. Da mesma forma define-se o colimite de $\nu$.

Finalmente, prova-se que a sequência $0 \to L_F \xrightarrow{\operatorname{colim}(\eta)} L_F \xrightarrow{\operatorname{colim}(\nu)} L_H \to 0$ é uma sequência exata curta.

(AB6) Esse axioma segue de um resultado que diz que na categoria $\mathfrak{AbGrp}$ limites finitos comutam com colimites filtrados. Veja, por exemplo, [2], Corolário 2.13.6. $\square$

# 4 Objetos compactos, projetivos e geradores

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem limites e colimites, $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ e considere o funtor

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\cdot): \quad \mathscr{C} & \to & \mathrm{Set} \\ Y & \mapsto & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \\ f: Y_1 \to Y_2 & \mapsto & f^*: \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y_1) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y_2) \\ & & \qquad\qquad\qquad g \mapsto f \circ g \end{array}$$

Seja $F: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ um funtor, com $\mathscr{D}$ sendo uma categoria filtrada, e considere a composição $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\cdot))$. Sendo $\big(\operatorname{colim}(F), (\psi_D : F(D) \to \operatorname{colim}(F))_{D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})}\big)$ o colimite de $F$, então, para todo $f: D_1 \to D_2$ em $\operatorname{Hom}(\mathscr{D})$, temos que $\psi_{D_1} = \psi_{D_2} \circ F(f)$. Assim, note que, se $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(D_1))$, então

$$(\psi_{D_2}^* \circ F(f)^*)(g) = \psi_{D_2}^*(F(f) \circ g) = \psi_{D_2} \circ F(f) \circ g = \psi_{D_1} \circ g = \psi_{D_1}^*(g),$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(D_1)) \arrow[rr, "F(f)^*"] \arrow[dr, "\varphi_{D_1}"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_{D_1}^*"'] & & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(D_2)) \arrow[dl, "\varphi_{D_2}"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_{D_2}^*"] \\
& \operatorname{colim}\big(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\cdot))\big) \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] & \\
& \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \operatorname{colim}(F)) &
\end{tikzcd}$$

Logo, existe único morfismo $\Psi : \operatorname{colim}\big(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\cdot))\big) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \operatorname{colim}(F))$, pela propriedade do colimite de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\cdot))$, tal que $\Psi \circ \varphi_D = \psi^*_D$, para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$. Se o morfismo $\Psi$ for um isomorfismo, então dizemos que $X$ é **compacto**.

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \cdot)$ preserva epimorfismos, então dizemos que $X$ é **projetivo**. Seja $G \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Se para quaisquer $f, g : C_1 \to C_2$ morfismos em $\mathscr{C}$, com $f \neq g$, existe $X \in G$ e $h : X \to C_1$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$, então dizemos que dizemos que $G$ é um **conjunto de geradores** de $\mathscr{C}$.

# 5 Lema de Yoneda e Teorema da Função Adjunta

**Teorema 1** (Lema de Yoneda)**.** Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Defina o funtor $h^C := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, C) : \mathscr{C}^{op} \to \mathfrak{Set}$. Sejam os funtores

- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C}^{op}, \mathfrak{Set})}(h^C, \cdot) : \mathfrak{Func}(\mathscr{C}^{op}, \mathfrak{Set}) \to \mathfrak{Set}$,
- $(\cdot)(C) : \mathfrak{Func}(\mathscr{C}^{op}, \mathfrak{Set}) \to \mathfrak{Set}$, $F \mapsto F(C)$ e $F_1 \xrightarrow{\eta} F_2 \mapsto F_1(C) \xrightarrow{\eta_C} F_2(C)$.

Então existe um isomorfismo natural

$$\Psi(C) : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C}^{op}, \mathfrak{Set})}(h^C, \cdot) \to (\cdot)(C)$$

onde $\Psi(C)_F : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C}^{op}, \mathfrak{Set})}(h^C, F) \to F(C)$, $\alpha \mapsto \alpha_C(\mathrm{id}_C)$. $\square$

Sejam $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ e $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores. Dizemos que $L$ é **adjunta à esquerda** de $R$ ($R$ é *adjunta à direita* de $L$), se, para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ e para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$,

$$\begin{array}{rccc} \sigma(D): & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(\cdot), D) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, R(D)) \\ \theta(C): & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), \cdot) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(\cdot)) \end{array}$$

são isomorfismos naturais. Note que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(\cdot), D)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, R(D))$ são funtores de $\mathscr{C}^{op}$ para Set e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), \cdot)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(\cdot))$ são funtores de $\mathscr{D}$ para Set.

**Teorema 2** (Teorema da Função Adjunta)**.** Seja $\mathscr{C}$ uma categoria (não necessariamente pequena) tal que, para todo $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ um funtor, com $\mathscr{D}$ sendo uma categoria índice, o limite existe (isto é, $\mathscr{C}$ é completa). Seja também $R : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ um funtor. Então as seguintes condições são equivalentes.

(a) Existe um funtor adjunto à esquerda de $R$.

(b) Valem as afirmações a seguir:

(i) se $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ é um funtor, onde $(\lim(F), (\varphi_D)_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})})$ é seu limite e $\mathscr{D}$ é uma categoria índice, então $(R(\lim(F)), (R(\varphi_D))_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})})$ é o limite de $RF$ (ou seja, $R$ preserva limites pequenos).

(ii) para todo $E \in \mathrm{Obj}(\mathscr{E})$, existe um *conjunto* $S_E \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tal que

$$\forall\, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) \ \ \forall\, e : E \to R(C)\ \exists\, C' \in S_E\ \exists\, c : C' \to C\ \ \exists\, e' : E \to R(C') \quad R(c) \circ e' = e. \quad \square$$

**Observação 4.** No Teorema 2, se $\mathscr{C}$ é uma categoria pequena, então o item (b), subitem (ii) é sempre satisfeito, pois basta tomarmos o conjunto $S_E = \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e fazermos $C' = C$, $c = \mathrm{id}_C$ e $e' = e$. $\square$

# 6 Teorema 2.2

**Teorema 3** (Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze)**.** A categoria $\kappa$-$\mathbf{Cond}(\mathfrak{AbGrp})$ é uma categoria abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB3*), (AB4), (AB4*), (AB5) e (AB6). Além disso, tal categoria é gerada por objetos projetivos compactos.

**Demonstração.** Seja $\kappa$-$\mathfrak{EDSet}$ a categoria dos conjuntos $\kappa$-pequenos extremamente desconexos. Seja também $\mathrm{Sh}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})$ a categoria cujos objetos são feixes de grupos abelianos sobre $\kappa$-$\mathfrak{EDSet}$. Para simplificar a notação, vamos denotar $\kappa$-$\mathbf{Cond}(\mathfrak{AbGrp})$ por $\mathscr{C}_1$ e $\mathrm{Sh}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})$ por $\mathscr{C}_2$. Vimos no seminário "Categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados", ministrado por Matheus Johnny Caetano, que $\mathscr{C}_1$ é equivalente a $\mathscr{C}_2$. Assim, mostrando que $\mathscr{C}_2$ é uma categoria abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck do enunciado, temos que $\mathscr{C}_1$ também é abeliana e satisfaz os mesmos axiomas. Portanto, vamos nos concentrar em $\mathscr{C}_2$. A ideia é usar que $\mathfrak{AbGrp}$ é abeliana e satisfaz os axiomas enunciados. Para isso, considere um funtor

$$\begin{array}{rcccl} F: & \mathscr{D} & \to & \mathscr{C}_2 & \\ & D & \mapsto & F(D): & \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}^{op} \to \mathfrak{AbGrp} \\ & & & & \qquad S \mapsto F(D)(S) \\ & & & & \qquad S_1 \xrightarrow{f} S_2 \mapsto F(D)(S_1) \xrightarrow{F(D)(f)} F(D)(S_2) \\ & D_1 \xrightarrow{d} D_2 & \mapsto & F(D_1) \xrightarrow{F(d)} F(D_2), & \end{array}$$

onde $\mathscr{D}$ é uma categoria de índices. Para cada $S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})$, defina o funtor

$$\begin{array}{rccl} F_S: & \mathscr{D} & \to & \mathfrak{AbGrp} \\ & D & \mapsto & F(D)(S) \\ & D_1 \xrightarrow{d} D_2 & \mapsto & F(D_1)(S) \xrightarrow{F(d)_S} F(D_2)(S). \end{array}$$

Seja $\left(\lim(F_S), (\varphi_S^D : \lim(F_S) \to F(D)(S))\right)$ o limite de $F_S$. Dado $f : S_1 \to S_2$ um morfismo em $\mathrm{Hom}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})$, usando a propriedade de $\lim(F_{S_1})$, juntamente com a comutatividade de transformações naturais, temos que existe único morfismo $\psi_{S_1S_2} : \lim(F_{S_1}) \to \lim(F_{S_2})$, conforme se vê no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & \lim(F_{S_1}) \arrow[dl, "\varphi_{S_1}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_{S_1}^{D_2}"] \arrow[dd, dashed, "\exists!\ \psi_{S_1S_2}"] & \\
F(D_1)(S_1) \arrow[rr, "F(d)_{S_1}"] \arrow[dd, "F(D_1)(f)"'] & & F(D_2)(S_1) \arrow[dd, "F(D_2)(f)"] \\
 & \lim(F_{S_2}) \arrow[dl, "\varphi_{S_2}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_{S_2}^{D_2}"] & \\
F(D_1)(S_2) \arrow[rr, "F(d)_{S_2}"'] & & F(D_2)(S_2)
\end{tikzcd}$$

Assim, defina o funtor

$$\begin{array}{rccl} L: & \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}^{op} & \to & \mathfrak{AbGrp} \\ & S & \mapsto & \lim(F_S) \\ & S_1 \xrightarrow{f} S_2 & \mapsto & \lim(F_{S_1}) \xrightarrow{\psi_{S_1S_2}} \lim(F_{S_2}). \end{array}$$

Vamos mostrar que $L \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}_2)$ e que $\left(L, (\varphi^D : L \to F(D))_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}\right)$ é o limite do funtor $F$, onde $\varphi^D = (\varphi_S^D)_{S \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathfrak{EDSet})}$. Primeiro, vamos mostrar que $L \in \mathscr{C}_2$. Para isso, precisamos ver que $L(S_1 \sqcup S_2) = L(S_1) \times L(S_2)$. Mas, como $L(S) = \lim(F_S)$, temos que mostrar que $\lim(F_{S_1 \sqcup S_2}) = \lim(F_{S_1}) \times \lim(F_{S_2})$. Assim, considere os diagramas abaixo, onde $G$ é um grupo abeliano qualquer e $f_S^D : G \to F(D)(S)$ é um homomorfismo de grupos.

$$
\begin{tikzcd}
& G \arrow[ddl, bend right, "f_{S_1}^{D_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_{S_1}^{D_2}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_{S_1}"] & \\
& \lim(F_{S_1}) \arrow[dl, "\varphi_{S_1}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_{S_1}^{D_2}"] & \\
F(D_1)(S_1) \arrow[rr, "F(d)_{S_1}"'] \arrow[d, equal] & & F(D_2)(S_1) \arrow[d, equal] \\
F_{S_1}(D_1) & & F_{S_1}(D_2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& G \arrow[ddl, bend right, "f_{S_2}^{D_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_{S_2}^{D_2}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_{S_2}"] & \\
& \lim(F_{S_2}) \arrow[dl, "\varphi_{S_2}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_{S_2}^{D_2}"] & \\
F(D_1)(S_2) \arrow[rr, "F(d)_{S_2}"'] \arrow[d, equal] & & F(D_2)(S_2) \arrow[d, equal] \\
F_{S_2}(D_1) & & F_{S_2}(D_2)
\end{tikzcd}
$$

Logo, podemos formar o seguinte diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
& G \arrow[ddl, bend right, "f_{S_1}^{D_1} \times f_{S_2}^{D_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_{S_1}^{D_2} \times f_{S_2}^{D_2}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_{S_1} \times \psi_{S_2}"] & \\
& \lim(F_{S_1}) \times \lim(F_{S_2}) \arrow[dl, "\varphi_{S_1}^{D_1} \times \varphi_{S_2}^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_{S_1}^{D_2} \times \varphi_{S_2}^{D_2}"] & \\
F(D_1)(S_1) \times F(D_1)(S_2) \arrow[rr, "F(d)_{S_1} \times F(d)_{S_2}"'] \arrow[d, equal] & & F(D_2)(S_1) \times F(D_2)(S_2) \arrow[d, equal] \\
F_{S_1 \sqcup S_2}(D_1) & & F_{S_1 \sqcup S_2}(D_2)
\end{tikzcd}
$$

Dessa forma, $\lim(F_{S_1}) \times \lim(F_{S_2})$ satisfaz a propriedade universal de limite de $F_{S_1 \sqcup S_2}$, logo, $\lim(F_{S_1 \sqcup S_2}) = \lim(F_{S_1}) \times \lim(F_{S_2})$, o que mostra que $L \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}_2)$. Agora, vamos mostrar que $\big(L, (\varphi^D : L \to F(D))_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}\big)$ é o limite do funtor $F$. Para isso, considere $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}_2)$ e seja, para cada $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, $f^D : X \to F(D)$ morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}_2)$, ou seja, uma transformação natural. Uma vez que $F(D)(S) = F_S(D)$, pela propriedade universal do limite de $F_S$, temos que o seguinte diagrama comuta, para cada $S \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}_2)$.

$$
\begin{tikzcd}
& X(S) \arrow[ddl, bend right, "f_S^{D_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_S^{D_2}"] \arrow[d, dashed, "\exists!\psi_S"] & \\
& \lim(F_S) = L(S) \arrow[dl, "\varphi_S^{D_1}"'] \arrow[dr, "\varphi_S^{D_2}"] & \\
F(D_1)(S) \arrow[rr, "F(d)_S"'] \arrow[d, equal] & & F(D_2)(S) \arrow[d, equal] \\
F_S(D_1) & & F_S(D_2)
\end{tikzcd}
$$

Portanto, $\left(L, (\varphi^D : L \to F(D))_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}\right)$ é o limite do funtor $F$. Uma construção análoga pode ser feita para o colimite de $F$. Feito isso, basta checar que $\mathscr{C}_2$ herda as propriedades de $\mathsf{AbGrp}$. Por exemplo, vamos ver que núcleo existe. Se $\eta : T_1 \to T_2$ é um morfismo em $\mathscr{C}_2$, então $\ker(\eta) = \lim(F)$, onde

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, "F"] & \mathscr{C}_2 \\
\bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r, mapsto] & T_1 \arrow[r, bend left, "\eta"] \arrow[r, bend right, "0_{T_1T_2}"'] & T_2
\end{tikzcd}$$

Mas o limite de $F$ é dado pelo limite $L$ que, por sua vez, é dado pelo limite de $F_S$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, "F_S"] & \mathsf{AbGrp} \\
\bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[r, mapsto] & T_1(S) \arrow[r, bend left, "\eta_S"] \arrow[r, bend right, "0_{T_1(S)T_2(S)}"'] & T_2(S)
\end{tikzcd}$$

Uma vez que o limite de $F_S$ é o núcleo de $\eta_S$, então o limite de $F$ existe, pois $\mathsf{AbGrp}$ é abeliana. A verificação das demais propriedades que definem categoria abeliana e também os axiomas de Grothendieck são feitas analogamente.

Vamos ver, agora, que $\mathscr{C}_1 = \kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$ é gerada por objetos projetivos compactos. Vamos começar considerando o funtor esquecimento $R : \mathscr{C}_1 \to \kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})$. Pode-se provar que $R$ preserva limites pequenos. Como $\mathscr{C}_1$ é uma categoria pequena, então, pela Observação 4 e pelo Teorema da Função Adjunta (Teorema 2), temos que $R$ possui uma adjunta à esquerda $L : \kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathsf{Set}) \to \mathscr{C}_1$. Seja $S$ um conjunto $\kappa$-pequeno extremamente desconexo e considere $\underline{S} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\cdot, S) \in \mathrm{Obj}(\kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathsf{Set}))$. Pela adjunção, temos que $\theta(\underline{S}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), \cdot) \to \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, \cdot)$ é um isomorfismo natural. Pelo Lema de Yoneda (Teorema 1), temos que $\Psi(\underline{S}) : \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathsf{Set})}(\underline{S}, \cdot) \to (\cdot)(S)$ também é um isomorfismo natural, onde $(\cdot)(S) : \kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathsf{Set}) \to \mathsf{Set}$, $X \mapsto X(S)$, $X_1 \xrightarrow{\gamma} X_2 \mapsto X_1(S) \xrightarrow{\gamma_S} X_2(S)$. Seja $\eta : M_1 \to M_2$ um epimorfismo em $\mathscr{C}_1$. Então $\eta_S : M_1(S) \to M_2(S)$ também é um epimorfismo. Como também $\Psi(\underline{S})$ e $\theta(\underline{S})$ são bijeções, temos que qualquer $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), M_2)$ está associado a um só elemento em $g \in M_2(S)$. Pela sobrejeção de $\eta_S$, existe $x \in M_1(S)$ tal que $\eta_S(x) = g$. Novamente, pela bijeções de $\Psi(\underline{S})$ e $\theta(\underline{S})$, $x$ está associado a um único $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), M_1)$. Uma vez que o diagrama abaixo é comutativo, temos que $\eta^*(\beta) = \alpha$, ou seja, $\eta^*$ é epimorfismo. Isso significa que $L(\underline{S})$ é um objeto projetivo em $\mathscr{C}_1$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), M_1) \arrow[rr, "\eta^*"] \arrow[d, shift right, "\theta(\underline{S})_{M_1}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), M_2) \arrow[d, shift left, "\theta(\underline{S})_{M_2}"] \\
\mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathsf{Cond(Set)}}(\underline{S}, M_1) \arrow[u, shift right, "\theta(\underline{S})^{-1}_{M_1}"'] \arrow[d, shift right, "\Psi(\underline{S})_{M_1}"'] & & \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathsf{Cond(Set)}}(\underline{S}, M_2) \arrow[u, shift left, "\theta(\underline{S})^{-1}_{M_2}"] \arrow[d, shift left, "\Psi(\underline{S})_{M_2}"] \\
M_1(S) \arrow[u, shift right, "\Psi(\underline{S})^{-1}_{M_1}"'] \arrow[rr, "\eta_S"'] & & M_2(S) \arrow[u, shift left, "\Psi(\underline{S})^{-1}_{M_2}"]
\end{tikzcd}$$

Agora, vamos mostrar que $L(\underline{S})$ é compacto, isto é, dado $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}_1$, com $\mathscr{D}$ filtrada, o morfismo natural $\varphi : \mathrm{colim}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), F(\cdot))\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), \mathrm{colim}(F))$ é uma bijeção. Compondo os isomorfismos naturais $\theta(\underline{S})$ com $\Psi(\underline{S})$, temos um isomorfismo natural entre $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), \cdot)$ e $(\cdot)(S)$. Assim, se $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}_1$ é um funtor, com $\mathscr{D}$ filtrada, então teremos ainda um isomorfismo natural entre $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), F(\cdot))$ e $F(\cdot)(S)$. Desse modo, se mostrarmos que $\mathrm{colim}\big(F(\cdot)(S)\big)$ é isomorfo a $\mathrm{colim}(F)(S)$, teremos

$$\mathrm{colim}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), F(\cdot))\big) \cong \mathrm{colim}\big(F(\cdot)(S)\big) \cong \mathrm{colim}(F)(S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), \mathrm{colim}(F)),$$

o que provaria que $L(\underline{S})$ é compacto. Assim, é suficiente provarmos que $(\cdot)(S)$ preserva colimites (exercício).

Finalmente, vamos ver que o conjunto formado por todos $L(\underline{S})$ é um conjunto gerador. Sejam $\eta, \nu : M_1 \to M_2$ morfismos diferentes em $\mathscr{C}_1$. Então, existe algum $S$, conjunto $\kappa$-pequeno extremamente desconexo, tal que $\eta_S \neq \nu_S$, ou seja, $\eta_S(m) \neq \nu_S(m)$, para algum $m \in M_1(S)$. Pelas bijeções dadas pela adjunção e pelo Lema de Yoneda, temos que existe $\gamma : L(\underline{S}) \to M_1$ e $N \in L(\underline{S})$ tal que $\gamma_S(N) = m$. Logo, $\eta_S(\gamma_S(N)) = \eta_S(m) \neq \nu_S(m) = \nu_S(\gamma_S(N))$. Portanto, $\eta \circ \gamma \neq \nu \circ \gamma$. ⊠

# Referências


[1] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWROŃSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge Univerity Press, 2006. Apêndice A.

[2] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra I*. Cambridge Univerity Press, 1994.

[3] nLab. *Separator*. Website.

[4] ROCH, S. *A Brief Introduction to Abelian Categories*. Notas de aula. Website.

[5] SCHOLZE, P. *Lectures on Condensed Mathematics*. Notas de aula. Website.

[6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. Seções 4.19, 4.21, 10.8, 12.3, 12.5 e 19.10. Website.

[7] Wikipedia. *Abelian Category*. Website.

[8] Wikipedia. *Compact Object*. Website.

[9] Wikipedia. *Projective Object*. Website.