Categoria Condensada

Luiz Felipe Andrade Campos

23 de setembro de 2022

Resumo

Em construção. Caveat Lector. Notas sobre um seminário apresentado sobre *Conjuntos Condensados*, introduzido nas notas de aula "Lectures on Condensed Mathematics", por Peter Scholze e Dustin Clausen.

Sumário

1 Revisão

1.1 Sites e Topoi

Definition 1.1 (Topologia de Grothendieck e Site)**.** Seja $\mathbf{C}$ uma categoria.

1. Uma **topologia de Grothendieck** sobre $\mathbf{C}$ consiste de um conjunto $\mathrm{Cov}(X)$, para cada objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, cujos elementos são coleções de morfismos $\{X_i \to X\}_{i\in\mathcal{A}}$[1] satisfazendo

   (a) (Isomorfismos) Se $U \to X$ é um isomorfismo, então $\{U \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$;

   (b) (Existência de pullbacks)

   (c) (Estabilidade por pullbacks/mudança de base) Se $\{X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ e $Y \to X$ é qualquer morfismo em $\mathbf{C}$, então a coleção

   $$\{X_i \times_X Y \to Y\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(Y).$$

   (d) (Estabilidade por refinamentos) Se $\{X_i \in X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ e para cada $i \in I$ são dados $\{U_{ij} \to X_i\}_{j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(X_i)$, então

   $$\{U_{ij} \to X_i \to X\}_{i\in I, j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(X).$$

2. Uma categoria munida de uma topologia de Grothendieck é chamada de **site**.

□

1.2 Conjuntos Profinitos

Definition 1.2. Um **conjunto profinito** é um limite inverso, na categoria **HTOP**, de um sistema inverso de conjuntos finitos discretos. □

Vamos denotar por **ProFinSet** como sendo a categoria cujos objetos são conjuntos profinitos e morfismos mapas contínuos.

[1] Aqui, $\mathcal{A}$ é um conjunto de índices que não é necessariamente o mesmo para todos os elementos de $\mathrm{Cov}(X)$.

2 O site de conjuntos profinitos

2.1 Esquemas

2.2 Site pro-étale de um esquema

2.3 ProFinSet $= \star_{\mathbf{proét}}$

Definimos uma topologia de Grothendieck em **ProfiniteSet** da seguinte forma: se X é um conjunto profinito, então $\mathrm{Cov}(X)$ são as famílias finitas de morfismos com codomínio X *conjuntamente sobrejetivas*[2], i.e.,

$$\mathrm{Cov}(X) := \{\{X_i \xrightarrow{\alpha_i} X\}_{i \in I} \mid |I| < \infty \text{ e } \amalg_{i \in I} \alpha_i(X_i) = X\}.$$

Vamos estudar esse site e essa topologia em detalhes semana que vem.

[2] Aqui, fiz uma tradução literal de *jointly surjective*.

3 Categoria Condensada

3.1 Primeira definição

Definition 3.1. Um **conjunto/anel/grupo/... condensado** é um feixe

$$T : \mathbf{ProFinSet}^{op} \to \mathbf{Set}$$
$$S \mapsto T(S).$$

Dado um conjunto condensado T, nos referimos a $T(\star)$ como o seu **conjunto subjacente**. □

Aqui temos que a condição de feixe é equivalente às seguintes condições:

1. $T(\varnothing) = \star$;

2. para quaisquer conjuntos profinitos S_1, S_2, o mapa natural

$$T(S_1 \sqcup S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$$

é uma bijeção;

3. para qualquer sobrejeção $S' \to S$ de conjuntos profinitos com produto fibrado $S' \times_S S'$ e suas duas projeções p_1, p_2 em S, o mapa

$$T(S) \to \{x \in T(S') \mid p_1^*(x) = p_2^*(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

é uma bijeção.

A condição 1. apenas diz que o funtor T mapeia objeto inicial em objeto terminal. Ela segue da condição 2. se considerar objetos inicial/terminal como colomite/limite de um diagrama vazio.

Lembre a condição de feixe: para todo objeto U e cobertura $\{U_i \to U\}_{i \in I}$,

$$TU \to \Pi_i TU_i \underset{pr_2^*}{\overset{pr_1^*}{\rightrightarrows}} \Pi_{i,j} T(U_i \times_U U_j)$$

é um equalizador. Vejamos que as condições 2. e 3. são equivalentes à condição de T ser um feixe.

3.2 Problemas com tamanho

A definição apresentada acima é problemática do ponto de vista da teoria de conjuntos, uma vez que a categoria de conjuntos profinitos é *grande*. Mais precisamente, a coleção de conjuntos profinitos **não** é um conjunto. Vejamos a seguir algumas propriedades de pre-feixes sobre sites que dependem da categoria domínio ser pequena:

- Existência de feixeficação: não é tão problemática pois estamos definimos a categoria condensada como uma categoria de feixes.
- Existência de colimites na categoria de feixes:
- Categpria de Feixes ser cartesiana fechada: ainda mais, a bijeção entre hom-sets
$$hom(X \times Y, Z) \simeq hom(X, Z^Y)$$
só faz sentido para categorias localmente pequenas.
- Categoria de feixes ser um topos:

3.3 Cardinais de limite forte

Uma forma de resolver o problema de tamanho da definição 3.1 é primeiro considerar uma versão truncada dela, nos restringindo a conjuntos profinitos de cardinalidade limitada. Vamos antes revisar alguns conceitos sobre cardinais.

Definition 3.2.

1. Um cardinal κ é um **cardinal de limite forte** se

$$\lambda < \kappa \implies 2^{\lambda} < k$$

   Em palavras, a cardinalidade κ não pode ser alcançada por tomadas sucessivas de potências de conjuntos.

$\square$

Barwick e Heine usam *cardinais inacessíveis*. Um cardinal κ é inacessível se é um cardinais de limite forte é não pode ser obtido por somas de uma quantidade menor que κ cardinais menores que κ. Eles chamam a construção de Pyknotic sets.

Example 3.1. O primeiro cardinal infinito $\aleph_0$, aleph-zero, é um cardinal de limite forte. $\square$

Example 3.2. Defina $\beth_\alpha$ indutivamente para todos os ordinais α por

- $\beth_0 = \aleph_0$,
- $\beth_{\alpha^+} = 2^{\beth_\alpha}$ para um ordinal sucessor.
- união de todos os $\beth_\alpha$'s menores, para um ordinal limite.

3.4 Segunda definição

Se κ é um cardinal denotaremos por $\kappa-$**ProFinSet** a categoria de conjuntos profinitos de cardinalidade menor que κ.

Definition 3.3. Seja κ um cadinal de limite forte não enumerável. Um **κ-conjunto/anel/grupo/... condensado** é um feixe

$$\begin{aligned} T : \kappa - \mathbf{ProFinSet}^{op} &\to \mathbf{Set} \\ S &\mapsto T(S) \end{aligned}$$

□

Agora, é preciso uma definição que independa da escolha de um cardinal auxiliar κ. O primeiro passo

Proposition 3.1. *Sejam $k' > k$ cardinal de limite forte não enumeráveis. Então existe um funtor natural*

$$\begin{aligned} \{K\text{-}conjuntos\ condensados\} &\to \{K'\text{-}conjuntos\ condensados\} \\ T &\mapsto T_{k'}, \end{aligned}$$

onde

$$T_{k'} := \left(\tilde{S} \mapsto \varinjlim_{\tilde{S} \to S} T(S) \right)^{sh}$$

Este funtor é fully faithful.

Ideia da Prova:

1. Primeiro, precisamos de uma caracterização dos κ-conjuntos condensados como sendo feixes

   $$T : \{\kappa\text{-conjuntos extremamente desconexos}\}^{op} \to \mathbf{Set}.$$

   Um espaço é *extremamente desconexo* se o fecho de um conjunto aberto é aberto. Para entender isso bem, precisaríamos saber antes sobre a compactificação de Stone-Cech. Essa equivalência ainda será abordada em outros seminários, pois é usada pra provar que a categoria de κ-conjuntos condensados é uma categoria abeliana.

2. Agora, o funtor $T \mapsto T_{\kappa'}$ corresponde à extensão de Kan à esquerda ao longo da inclusão plena da categoria de κ-conjuntos extremamente desconexos em κ'-conjuntos extremamente desconexos e, consequentemente, é a adjunta à esquerda do funtor de esquecimento da categoria de κ'-conjuntos extremamente desconexos para κ-conjuntos extremamente desconexos.

3. Conclui-se que of funtor $T \mapsto T_{\kappa'}$ é fully faithful e comuta com todos os colimites.

4. O fato anterior é um argumento comum e não exclusivo para esse caso. Se $\alpha : C_2 \to C_1$ é qualquer funtor entre categorias pequenas, então $\alpha_* : \hat{C}_1 \to \hat{C}_2$ tem uma adjunta à esquerda α^*. Isso é consequência direta do
   Teorema de Freyd para Funtor Adjunto: Dada uma categoria pequena e completa A, um funtor $G : A \to X$ tem adjunta à esquerda se e somente se preserva limites pequenos e satisfaz *Solution Set Condition:* for cada objeto $x \in X$ existe um conjunto pequeno I e uma família I-indexada de morfimos $f_i : x \to Ga_i$ tal quer qualquer mapa $h : x \to Ga$ pode ser escrito como uma composição $h = Gt \circ f_i$ para algum indice i e algum $t : a_i \to a$.

   Neste caso, explicitamente, a adjunta à esquerda mapeia o pre-feixe $G \in \hat{C}_2$ à extensão de Kan à esquerda $G : C_2^{op} \to Set$ ao longo de α^{op}, i.e.
   $$\alpha^*(G)(x) = colim_{x \to a(y)} G(y)$$

□

Definition 3.4. A **categoria condensada** é dado pelo limite direto na categoria de κ-conjuntos condensados ao longo o poset de cardinais de limite forte κ.

Example 3.3. Seja T um espaço topológico. Existe um conjunto condensado $\underline{T}$ associado que mapeia qualquer conjunto profinito S con conjunto de mapas contínuos $C(S, T)$. Isso satisfaz as condições de feixe

- 2., claramente;
- 3., pois qualquer sobrejeção $S' \to S$ de espaços de Hausdorff compactos é um mapa quociente, de forma que qualquer mapa $S \to T$, tal que a composição $S' \to S \to T$ é contínua, é contínuo.