CATEGORIAS

SCHCS

Notas baseadas nos primeiros capítulos do livro *Basic Category Theory* por Tom Leinster (*Cambridge studies in advanced mathematics*, vol. 143, CUP, 2014).

1. Definições básicas

Uma *categoria* C consiste de
1. *objetos* A, B, C;
2. para cada par de objetos A e B, uma coleção $H(A,B)$ de *morfismos* (mapas, setas, flechas, etc) $A \to B$.

Outra notação para os morfismos: $\mathrm{Hom}(A,B)$, $C(A,B)$, $H_C(A,B)$, $\mathrm{Hom}_C(A,B)$.

Para objetos A, B, C temos uma função

$$H(A,B) \times H(B,C) \to H(A,C), \quad (f,g) \mapsto g \circ f.$$

Esta função chama-se *composição.* Para cada objeto A temos $1_A \in H(A,A)$ tal que

$$1_B \circ h = h,\ h \circ 1_A = h,\ (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

para todo $h \in H(A,B)$, $g \in H(B,C)$ e $f \in H(C,D)$. Se $f \in H(A,B)$. então A é o *domínio* de f e B é o *codomínio.*

Exemplo 1. As seguintes são os exemplos mais comuns de categorias:
1. **Set**: Os objetos são conjuntos, os mapas são mapas entre conjuntos.
2. **Grp**: Os objetos são grupos, e os mapas são homomorfismos entre grupos.
3. **AbGrp**: Os objestos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos.
4. **Ring**: Os objetos são anéis (com 1), e os mapas são homomorfismos entre anéis.
5. **CRing**: Os objetos são anéis comutativos (com 1), e os mapas são homomorfismos entre anéis comutativos.
6. k-**Vect**: Os objetos são espaços vetoriais sobre um corpo k e os objetos são aplicações k-lineares.
7. R-**Mod**: Os objetos são R-módulos (à esquerda) e os mapas são R-homomorfismos.
8. **Top**: Os objetos são espaços topológicos e os mapas são funções contínuas.

Um mapa $f \in H(A,B)$ é dito *isomorfismo*, se existir $g \in H(B,A)$ tal que $fg = 1_B$ e $gf = 1_A$.

Exemplo 2. Outros exemplos,
1. $\emptyset$ com nenhum objeto e nenhuma flecha;
2. $\{A\}$ com um objeto e uma flecha 1_A;

(3) $A \to B$ com dois objetos e três flechas 1_A, 1_B, $A \to B$.
(4) Um monoide M pode ser visto como uma categoria com um objeto A e uma flecha associada com cada elemento de M. A identidade de M corresponde a 1_A e a associatividade do monoide corresponde à associatividade da composição.
(5) Um grupo G pode ser visto como uma categoria com um objeto A e uma flecha associada com cada elemento de G. Neste caso, toda flecha da categoria é um isomorfismo.
(6) Se P é um conjunto parcialmente ordenado, então P pode ser visto como uma categoria. Os objetos da categoria são os elementos de P e, para $\alpha, \beta \in P$, temos uma flecha $\varphi_{\alpha,\beta} : \alpha \to \beta$ na categoria se e somente se $\alpha \leq \beta$. Neste caso, $H(\alpha, \beta) = \{\varphi_{\alpha,\beta}\}$.

1.1. **Categoria oposta ou dual.** Seja C uma categoria. Definimos o *dual* ou *oposta* C' de C. Os objetos de C' são os mesmos que os objetos de C, 1_A em C' é o mesmo que em C, e $H_{C'}(A, B) = H_C(B, A)$.

2. Functores

Sejam C e D categorias. Um *functor* $F : C \to D$ associa

(1) cada objeto $A \in C$ com um objeto $F(A) \in D$;
(2) cada mapa $f \in H(A, B)$ com um mapa $F(f) \in H(F(A), F(B))$

tal que

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \quad \text{e} \quad F(fg) = F(f)F(g).$$

Exemplo 3. *Functores de esquecimento:* Considere o seguinte functor **Grp** $\to$ **Set**. Associamos com cada grupo G o seu conjunto G e $F(\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha \in H_{\mathbf{Grp}}(G, H)$.

Pode-se definir functores de esquecimento similarmente

(1) **Ring** $\to$ **Set**;
(2) **Ring** $\to$ **Grp**;
(3) R-**mod** $\to$ **AbGrp**;
(4) **Ab** $\to$ **Grp**.

Exemplo 4. *Functores livres:* Considere por exemplo o functor **Set** $\to$ **Grp** levando cada conjunto X ao grupo $F(X)$ livre gerado por X. Um morfimso $\alpha : X \to Y$ induz um único homomorfismo $\bar{\alpha} : F(X) \to F(Y)$. Pode-se definir functores similares

(1) **Set** $\to$ k-**Vect**;
(2) **Set** $\to$ R-**Mod**;
(3) **Set** $\to$ **CRing**;
(4) **Set** $\to$ k-**CAlg** (a categoria de k-álgebras comutativas onde k é um corpo).

Um functor contravariante entre C e D é um functor $C \to D'$.

Exemplo 5. **Top** $\to \mathbb{R}$-**CAlg**: Seja X um espaço topológico. Definimos o functor F como $X \mapsto C(X, \mathbb{R})$ onde $C(X, \mathbb{R})$ é o anel das funções contínuas de X para $\mathbb{R}$. Se $f : X \to Y$

em **Top**, então $F(f) : F(Y) \to F(X)$ com $F(f)(\psi) = \psi \circ f$. Às vezes, escrevemos que $F(f) = - \circ f$.

Exemplo 6. O espectro **CRing** $\to$ **Top**: $R \mapsto \mathrm{Spec}(R)$ onde

$$\mathrm{Spec}(R) = \{P \subset R \mid P \text{ é um ideal primo}\}.$$

Definimos uma topologia (chamada de *Topologia de Zariski*) em $\mathrm{Spec}(R)$ com a regra que

$$V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$$

são os fechados para $I \subseteq R$ ideais. Se $f : R \to S$, então $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ está definido como $\mathrm{Spec}(f)(Q) = \varphi^{-1}(Q)$ para cada $Q \in \mathrm{Spec}(S)$. É um exercício fácil mostrar que isso é bem definido, pois a pré-imagem homomorfica de um ideal primo é primo.

Um functor $F : C \to D$ é dito *fiel* (repetivamente, *cheio*) se todos os mapas $H(A, B) \to H(F(A), F(B))$ são injetivos (respetivamente, sobrejetivos).

Uma *subcategoria* D de C contém objetos de C e $H_D(A, B) \subseteq H_C(A, B)$. Subcategoria é *cheia* se $H_D(A, B) = H_C(A, B)$. Por exemplo, **AbGrp** é uma subcategoria cheia de **Grp**.

3. Transformação natural

Sejam C e D categorias e $F, G : C \to D$ functores. Uma *transformação natural* α entre F e G é composta por uma família de morfismos $\alpha_A : F(A) \to G(A)$ para todo objeto A em C tal que para todo mapa $f : A \to B$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd} \tag{1}$$

comuta.

Exemplo 7. Seja C uma categoria discreta sobre um conjunto X. Então C não tem flechas, exceto 1_x para todo $x \in X$. Seja D uma categoria qualquer. Então functores $F, G : C \to D$ escolhem objetos $F(x)$ e $G(x)$ para cada $x \in X$. Uma transformação natural α é uma coleção de mapas $\alpha_x : F(x) \to G(x)$.

Exemplo 8. Seja $n \geq 1$ fixo, e considere F, G : **CRing** $\to$ **Grp** onde $F(R) = GL_n(R)$, $G(R) = R^*$. É fácil ver que estas correspodências são functoriais; ou seja, estendem-se para morfismos. O mapa $\det_R : GL_n(R) \to R^*$ é uma transformação natural.

Transformações naturais podem ser compostas. Se $F, G, H : C \to D$ functores, $\alpha : F \to G$, $\beta : G \to H$ são transformações naturais, então a composição $\beta\alpha$ é transformação natural $F \to H$. A identidade $1_{F(A)} : F(A) \to F(A)$ é natural $F \to F$. Assim se C e D são categorias, então a *categoria dos funtores* $[C, D]$ tem os functores entre C e D como os objetos e as transformações naturais como os morfismos.

Isomorphismo natural entre F e G é uma transformação natural α tal que

$$\alpha_A : F(A) \to G(A)$$

é um isomorfismo para cada objeto A na categoria C.

Exercício 9. *Isomorphismo natural é um isomorfismo na categoria dos functores. Neste caso os functores F e G são naturalmente isomorfos.*

Dados dois functores $F, G : C \to D$. Dizemos que $F(A)$ e $G(A)$ são naturalmente isomorfos se F e G são naturalmente isomorfos.

Exemplo 10 (O duplo dual)**.** Sejam V e W k-espaços vetoriais. Lembremos que $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ e, por extensão, $V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, k)$. A correspondência $(-)^*$ é functorial contravariante; de fato, se $\alpha : V \to W$, definimos $\alpha^* : W^* \to V^*$ como $\alpha^* = - \circ \alpha$ e $\alpha^{**} : V^{**} \to W^{**}$ como $\alpha^{**} = - \circ \alpha^*$. Ou seja,

$$\alpha^{**}(\beta)(\psi) = (\beta \circ \alpha^*)(\psi) = \beta(\psi \circ \alpha)$$

para $\beta \in V^{**}$ e $\psi \in W^*$. Temos que $\varphi^V : v \mapsto \varphi^V_v$ é um mapa de $V \to V^{**}$ onde $\varphi^V_v(\chi) = \chi(v)$ para $v \in V$ e $\chi \in V^*$. Afirmamos que a coleção de mapas φ^V define uma transformação natural entre os functores $1, (-)^{**} : k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$. Escrevendo o diagrama (1) para esta situação, precisa-se provar que $\alpha^{**}(\varphi^V_v) = \varphi^W_{\alpha(v)}$ para todo $\alpha : V \to W$ em k-**Vect**. Mas isso segue dos fatos que

$$\alpha^{**}(\varphi^V_v)(\psi) = \varphi^V_v(\psi \circ \alpha) = \psi(\alpha(v))$$

e

$$\varphi^W_{\alpha(v)}(\psi) = \psi(\alpha(v)).$$

Então temos que os φ^V determinam uma transformação natural. Note que se $\dim V$ é finita, então $\varphi^V : V \to V^{**}$ é um isomorfismo e neste caso temos um isomorfismo entre os functores 1 e $(-)^{**}$ na categoria k-**FinVect** de k-espaços de dimensão finita.

4. Functores adjuntos

Sejam C e D categorias e assuma que temos functores

$$F : C \to D \quad \text{e} \quad G : D \to C.$$

Dizemos que (F, G) é um *par adjunto* ou F é *adjunto à esquerda* de G, ou G é *adjunto à direita* de F se para cada par de objetos $A \in C$ e $B \in D$ existe uma bijeção

$$\varrho_{A,B} : H_D(F(A), B) \to H_C(A, G(B))$$

natural no sentido explicado nos itens (1)–(2) em baixo. Para simplificar a notação, se $g \in H_D(F(A), B)$ e $f \in H_C(A, G(B))$ então denotamos a suas imagens por esta bijeção como $\bar{g}$ e $\bar{f}$, respetivamente.

A palavra "natural" no parágrafo anterior tem o seguinte significado.

(1) Seja $A \in C$, $B, B' \in D$ objetos e sejam $g : F(A) \to B$ e $q : B \to B'$. Então
$$\overline{F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'} = A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B').$$
(2) Seja $A, A' \in C$, $B \in D$ objetos e sejam $p : A' \to A$ e $f : A \to G(B)$. Então
$$\overline{A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)} = F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B.$$

As condições (1) e (2) podem ser expressas com a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
H_D(F(A), B) \arrow[r, "q\circ -"] \arrow[d, "\varrho_{A,B}"'] & H_D(F(A), B') \arrow[d, "\varrho_{A,B'}"] \\
H_C(A, G(B)) \arrow[r, "G(q)\circ -"'] & H_C(A, G(B'))
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
H_C(A, G(B)) \arrow[r, "-\circ p"] & H_C(A', G(B)) \\
H_D(F(A), B) \arrow[r, "-\circ F(p)"'] \arrow[u, "\varrho_{A,B}"] & H_C(F(A'), B). \arrow[u, "\varrho_{A',B}"']
\end{tikzcd}$$

Exemplo 11. Considere os functores $F : \mathbf{Set} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$ e $G : k\text{-}\mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ onde, para um conjunto X, $F(X) = k[X]$ é o espaço vetorial de combinações lineares formais de elementos de X com coeficientes em k (o k-espaço com base X) e para um k-espaço vetorial V, $G(V) = V$ (ou seja, G é um functor de esquecimento). Note que F e G podem ser definidos para morfismos na maneira óbvia. Assuma que X é um conjunto, V é um k-espaço. A bijeção natural na definição do adjunto pode ser definida como

$$\begin{aligned}
&\varrho_{X,V} : H_{k\text{-}\mathbf{Vect}}(k[X], V) \to H_{\mathbf{Set}}(X, G(V)) = H_{\mathbf{Set}}(X, V) : \\
&\quad g \mapsto \bar{g} = g|_X \\
&\quad \bar{f} \leftarrow\!\shortmid f
\end{aligned}$$

onde $\bar{f} : k[X] \to V$ é o mapa induzido por $f : X \to V$. Sejam $g : k[X] \to V$ e $q : V \to V'$ em k-$\mathbf{Vect}$, e $f : X \to V$ e $p : X' \to X$ em $\mathbf{Set}$. Traçando os dois diagramas antes do exemplo obtemos as seguintes imagens:

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[r, "q\circ -"] \arrow[d, "\chi_{X,V}"'] & q \circ g \arrow[d, "\chi_{X,V'}"] \\
g|_X \arrow[r, "G(q)\circ -"'] & (q \circ g)|_X = q \circ (g|_X)
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "-\circ p"] & f \circ p = (\bar{f} \circ F(p))|_X \\
\bar{f} \arrow[r, "-\circ F(p)"'] \arrow[u, "\chi_{X,V}"] & \bar{f} \circ F(p) \arrow[u, "\chi_{X',V}"']
\end{tikzcd}$$

Temos que (F, G) é um par adjunto.

Exemplo 12. Considere os functores $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{AbGrp}$ e $G : \mathbf{AbGrp} \to \mathbf{Grp}$ onde $F(X) = X/X'$ (X' sendo o subgrupo derivado) e $G(A) = A$ (ou seja, G é um functor de esquecimento). O quociente X/X' é chamado de *abelianização* de X. Note que a correspodência $X \mapsto X/X'$ é functorial, pois se $\alpha : X \to Y$ é um morfismo, então α induz um morfismo $\alpha_{\text{ab}} : X/X' \to Y/Y'$. Note que temos a projeção natural $\pi_X : X \to X/X'$ para cada grupo X. Dado X em $\mathbf{Grp}$ e A em $\mathbf{AbGrp}$ temos que a bijeção $\mathrm{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(X/X', A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(X, A)$ pode ser dada por

$$g \mapsto g \circ \pi_X \quad e \quad f \mapsto f_{\text{ab}}.$$

É fácil verificar que (F, G) é um par adjunto.

Exemplo 13. Considere um anel comutativo R com 1 e seja N um R-módulo. Considere os functores $-\otimes N$ e $\mathrm{Hom}(N, -)$ na categoria R-**Mod**. Note que as duas destas correspondências são functoriais, pois se $\alpha : M_1 \to M_2$, então

$$\alpha \otimes N : M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N, \quad m \otimes n \mapsto \alpha(m) \otimes n$$

e

$$\mathrm{Hom}(N, \alpha) : \mathrm{Hom}(N, M_1) \to \mathrm{Hom}(N, M_2) \quad \varphi \mapsto \alpha \circ \varphi.$$

Se M e P são R-módulos, então existe uma bijeção natural entre $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P)$ e $\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$ dada por

$$f \mapsto \psi_f \quad \text{onde} \quad \psi_f(m)(n) = f(m \otimes n)$$

e

$$\varphi \mapsto f_\varphi \quad \text{onde} \quad f_\varphi(m \otimes n) = \varphi(m)(n).$$

É fácil verificar que os dois mapas são inversos e satisfazem a definição de par adjunto.

O seguinte teorema mostra o poder de pares adjuntos de functores. O teorema é verdadeira em em contexto mais geral, nomeadamente em categorias abelianas.

Teorema 14. *Sejam R e S anéis comutativos com identidade e considere um par (F, G) adjunto de functores $F : R$-**Mod** $\to S$-**Mod** e $G : S$-**Mod** $\to R$-**Mod**. Então F é exato à direita e G é exato à esquerda. Em particular, se $\alpha : M_1 \to M_2$ em R-**Mod** é sobrejetivo, então $F(\alpha)$ também é sobrejetivo, e se $\beta : N_1 \to N_1$ em S-**Mod** é injetivo então $G(\beta)$ também é injetivo.*

Corolário 14.1. *O functor $-\otimes N$ definido no Exemplo 13 é exato à direita e* $\mathrm{Hom}(N, -)$ *é exato à esquerda. Ou seja, se $\alpha : M_1 \to M_1$ é sobrejetivo e $\beta : M_1 \to M_2$ é injetivo, então $\alpha \otimes N : M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$ é sobrejetivo e* $\mathrm{Hom}(N, \beta) : \mathrm{Hom}(N, M_1) \to \mathrm{Hom}(N, M_2)$ *é injetivo.*

Assuma que (F, G) é um par de functores adjuntos para as categorias C e D. As composições FG e GF são functores de $D \to D$ e $C \to C$, respetivamente. Seja A um objeto de C. Então $1_{F(A)} : F(A) \to F(A)$ corresonde a um morfismo $\eta_A = \overline{1_{F(A)}} : A \to GF(A)$. Similarmente, se B é um objeto em D, então $\varepsilon_B = \overline{1_{G(B)}} : FG(B) \to B$.

Exemplo 15. Considere a construção no Exemplo 11. Seja X um conjunto e considere $1_{k[X]} : k[X] \to k[X]$. O morfismo $\eta_X : X \to k[X]$ é a inclusão de X em $k[X]$. Agora seja V um espaço vetorial e considere $1_V : V \to V$. O mapa correspondente $\varepsilon_V : k[V] \to V$ leva uma k-combinação linear formal com elementos de V ao seu valor em V.

Lema 16. *As funções η_A e ε_B definem transformações naturais $\eta : 1_C \to GF$ e $\varepsilon : FG \to 1_D$.*

Proof. Exercício. $\square$

Os mapas η e ε são chamados de *unidade* e *counidade* da adjunção.