# Seminário: limites e colimites, conjuntos profinitos

## John MacQuarrie

#### 16 de setembro de 2022

#### Limites e colimites

Limites e colimites são definidos por propriedades universais. Assim a gente <u>define</u> eles para ter propriedades úteis, e depois se preocupa se eles existem.

A definição tem três partes:

 $\bullet$  Uma "categoria combinatória"  $\mathcal{D}$  (D ="diagrama"): pensamos nela como uma coleção de pontos e flechas mesmo. Exemplos:



• Uma categoria  $\mathcal{C}$  que queremos entender. Exemplos:

• Um funtor  $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ : pensamos nele como realizando a forma de  $\mathcal{D}$  dentro da categoria  $\mathcal{C}$ . Exemplo: Um funtor

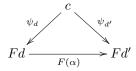
$$F: \bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

"é" um par de grupos abelianos G,H junto com dois homomorfismos  $f,g:G\to H$ :

$$G \underbrace{\overset{f}{\underset{g}{\longrightarrow}}} H$$

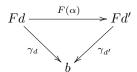
**Definição.** Sejam  $\mathcal{D}$  uma categoria pequena,  $\mathcal{C}$  uma categoria e  $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  um funtor covariante.

• Um <u>cone</u>  $(c, \psi_d)$  de F consiste de um objeto  $c \in C$ , junto com um morfismo  $\psi_d : c \to Fd$  para todo  $d \in \overline{Ob}(D)$ . Para qualquer morfismo  $\alpha : d \to d'$  em D, o diagrama



tem que comutar.

• Um <u>cocone</u>  $(b, \gamma_d)$  de F consiste de um objeto  $b \in \mathcal{C}$ , junto com um morfismo  $\gamma_d : Fd \to b$  para todo  $d \in \overline{\mathrm{Ob}(\mathcal{D})}$ . Para qualquer morfismo  $\alpha : d \to d'$  em  $\mathcal{D}$ , o diagrama



tem que comutar.

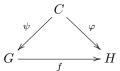
Álgebra Linear 2 John MacQuarrie 2

**Exemplo.** O mesmo  $F: \bullet \longrightarrow \mathbf{Ab}$  com imagem

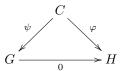
$$G \underbrace{\bigcap_{g}}^{f} H$$
.

Vamos supor também que  $g: G \to H$  é o hom trivial 0, que manda todo  $g \in G$  para 0.

Um cone dele é um grupo abeliano C com homomorfismos  $\psi:C\to G$  e  $\varphi:C\to H$ . O diagrama



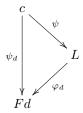
comuta, então  $\varphi = f\psi$ . Mas o diagrama



também comuta, então  $\varphi = 0\psi = 0$ . Em particular  $f\psi = 0$ : abrindo isso, os cones de F estão em correspondência com homomorfismos de grupos abelianos  $\psi : C \to G$  cujas imagens caiam dentro de  $\mathrm{Ker}(f)$ .

Limites são os melhores cones e colimites são os melhores cocones:

**Definição.** • O <u>limite</u>  $\lim(F)$  de  $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  (caso existir) é um cone  $(L, \varphi_d)$  de F que satisfaz a seguinte propriedade universal: sempre que  $(c, \psi_d)$  é um cone de F, existe um único morfismo  $\psi: c \to L$  tal que o diagrama

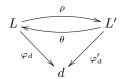


comuta para todo  $d \in \mathcal{D}$ .

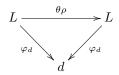
• O colimite colim(F)  $\acute{e}$  o conceito dual.

**Lema.** O (co)limite de F, caso existir, é único até isomorfismo.

Demonstração. (ideia): Suponha que temos dois limites  $(L, \varphi_d), (L', \varphi'_d)$ . Pelas propriedades universais de L', L respectivamente, temos morfismos  $\rho: L \to L', \theta: L' \to L$  fazendo todos os diagramas



comutarem. Compondo, o mapa  $\theta \rho$  faz o diagrama



comutar. Mas  $\mathrm{id}_L$  também faz o diagrama comutar, então pela <u>unicidade</u> do mapa,  $\theta \rho = \mathrm{id}_L$ . Similarmente  $\rho \theta = \mathrm{id}_{L'}$  e assim  $\rho$  é iso com inverso  $\theta$ .

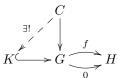
Exemplo. Um cone óbvio de

$$G \underbrace{\bigcap_{0}^{f} H}$$

é a inclusão do núcleo K de f em G:

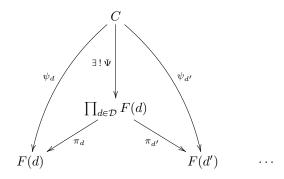
$$K \hookrightarrow G \xrightarrow{f} H$$
.

De fato ele é o limite: já que um cone é um hom  $C \to G$  cuja imagem caia dentro de K, ele se factora unicamente por  $K \hookrightarrow G$ :



Uns (co)limites são familiares e têm nomes:

- Seja  $\mathcal{D}$  uma categoria pequena com somente morfismos identidades. Assim  $\mathcal{D}$  é moralmente só um conjunto.  $F(\mathcal{D})$  é qualquer conjunto de objetos F(d) de  $\mathcal{C}$  indexado pelos objetos de  $\mathcal{D}$ . Um cone de F é um objeto C de  $\mathcal{C}$  com mapas quaisquer  $C \to F(d)$  para cada d. O limite de F é o produto  $\prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ .
  - Em categorias tipo **Set**, **Grp**, **Ab**, **Top**:



O mapa  $\psi$  manda um elemento x de C pro vetor  $(\psi_d(x))_{d\in\mathcal{D}}$ .

- Em **Top** ainda temos que dizer a topologia que daremos pro conjunto  $\prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ . Cada  $\pi_d$  tem que ser contínua ou não teremos os mapas  $\pi_d$ . Mas a topologia tem que ser a menor possível com essa propriedade, pois senão, pegue  $C = \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$  com uma topologia menor. O mapa "id":  $C \to \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$  <u>não</u> será contínua. A topologia mais fraca tal que cada  $\pi_d$  é contínuo é precisamente a <u>topologia do produto!</u>
- Limites podem não existir: Pegue  $C = \mathbf{FSet}$ , conjuntos finitos: um produto qualquer de conjuntos finitos não é finito!

Os colimites desses F são mais diversos:

- em Set, colim(F) =  $\coprod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$  a união disjunta.
- em  $\mathbf{Ab}$ , colim $(F) = \bigoplus_{d \in \mathcal{D}} F(d)$  a soma direta.
- em **Grp**, colim $(F) = *_{d \in \mathcal{D}} F(d)$  o produto livre.
- O limite de  $\underbrace{\circ}_{\beta}$  é o <u>equalizador</u> de  $F(\alpha), F(\beta)$ . O colimite é o <u>coequalizador</u>.
  - Em **Set**, **Ab**, **Grp**, **HTop** o equalizador é a coisa óbvia:

$$\operatorname{Eq}\left(G \xrightarrow{f} H\right) = \{x \in G \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow G.$$

- Às vezes (co)limites existem mas não são tão óbvios: seja G um grupo e  $L \leq G$  não normal. G/L não é um grupo então pode pensar que  $L \hookrightarrow G$  não possui conúcleo em  $\mathbf{Grp}$ . Mas sendo  $\overline{L}$  o subgrupo normal gerado por L, a projeção  $G \to G/\overline{L}$  é o conúcleo.

 $\bullet$  O limite de  $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \to \mathcal{C}$ é um pullback ou produto fibrado em  $\mathcal{C}\colon$ 

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \longrightarrow B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow C \end{array}$$

O colimite de  $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \rightarrow \mathcal{C}$  é um pushout em  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc}
C \longrightarrow B \\
\downarrow & \downarrow \\
A \longrightarrow A \bigsqcup_{C} B
\end{array}$$

**Teorema.** (de existência de (co)limites) Se C possui produtos arbitrários e equalizadores, então todo funtor  $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  possui limite (isto é: C é completa).

Se  $\mathcal C$  possui coprodutos arbitrários e coequalizadores, então todo funtor  $F:\mathcal D\to\mathcal C$  possui colimite (isto é,  $\mathcal C$  é cocompleta).

Demonstração. Escrevemos flechas como  $\alpha: s(\alpha) \to t(\alpha)$ . Os objetos

$$\prod_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \quad , \quad \prod_{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})} F(t(\alpha))$$

existem em  $\mathcal{C}$ . Para cada  $\alpha \in \text{Mor}(\mathcal{D})$  definimos dois mapas

$$\prod_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \xrightarrow{\sigma_{\alpha} = F(\alpha) \pi_{s(\alpha)}} F(t(\alpha)) .$$

A propriedade universal do segundo produto dá únicos mapas

$$\prod_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \xrightarrow{\sigma} \prod_{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})} F(t(\alpha)) .$$

A equalizador de  $\sigma$ ,  $\tau$  é o limite de F.

O legal desse teorema é que quando entendemos produtos e equalizadores em C, ele dá uma construção dos limites:

Exemplo. Em Set, Ab, Grp, ... considere o diagrama

$$A \xrightarrow{f} C$$

O teorema diz que o limite (= pullback) é o equalizador de

$$A \times B \times C \xrightarrow[(a,b,c)\mapsto(c,c)]{(a,b,c)\mapsto(c,c)} t(f) \times t(g) \ .$$

Assim o limite é

$$A\times_C B=\{(a,b,c)\,|\,f(a)=c=g(b)\}\cong\{(a,b)\in A\times B\,|\,f(a)=g(b)\}\quad -\text{ a definição "familiar"!}$$

### Limites inversos e conjuntos profinitos

**Definição.** Seja  $\mathcal{D}$  um poset, tratado como categoria: temos  $d \to d' \iff d \geqslant d'$ ). Diremos que  $\mathcal{D}$  é direcionado para cima se  $\forall d, d' \in \mathcal{D}$ , existe  $b \in \mathcal{D}$  com  $b \geqslant d, d'$ .

Se  $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  é um funtor com  $\mathcal{D}$  direcionado para cima,  $F(\mathcal{D})$  é um <u>sistema inverso</u> em  $\mathcal{C}$ . O seu limite é um limite inverso, denotado por  $\varprojlim (F)$ .

Dualmente, colimites de  $F: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  com  $\mathcal{D}$  direcionado para baixo se chamam de <u>limites diretos</u> e são denotados como  $\underline{\lim}(F)$ 

**Exemplo.** X um espaço topológico e  $\mathcal{D} = \mathcal{O}(X)$  com morfismos inclusões. Considere o funtor

$$F: \mathcal{O}(X) \to \mathbf{Top}$$

$$U \mapsto U$$

Temos  $\varprojlim (F) = \bigcap_{U \in \mathcal{O}(X)} U$ .

**Definição.** Um conjunto/grupo <u>profinito</u> é um limite inverso, na categoria **HTop/TGrp**, de um sistema inverso de conjuntos/grupos finitos discretos.

**Proposição.** Conjuntos profinitos são sempre Hausdorff, compactos e totalmente desconexos (= o maior componente conexo é um ponto).

Demonstração. Só compacto: Pelo teorema de Tychonoff, produtos de espaços compactos é compacto. Equalizadores de mapas contínuos de espaços Hausdorff são fechados. Subconjuntos fechados de compactos são compactos. Assim pelo teorema de existência, de fato qualquer limite de espaços compactos Hausdorff é compacto.

(de fato essa proposição é sse).

Seja  $\mathcal{N}$  a categoria direcionada para cima

**Exemplo.**  $F: \mathcal{N} \to \mathbf{TGrp}$  (grupos topológicos Hausdorff) com imagem

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \stackrel{\text{mod } p}{\longleftarrow} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \stackrel{\text{mod } p^2}{\longleftarrow} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \stackrel{\text{mod } p^3}{\longleftarrow} \cdots$$

Pelo teorema de existência:

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \ x_m \pmod{p^n} = x_n \forall n \leqslant m\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \mid a_i \in \{0,\dots,p-1\} \right\} = \mathbb{Z}_p.$$

**Exemplo.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $F(n) := \{*, a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbf{Set}$ . Dados  $m \ge n$ , defina

$$\{*, a_1, a_2, \dots, a_m\} \to \{*, a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$* \mapsto *$$

$$a_i \mapsto a_i \quad i \leq n$$

$$a_i \mapsto * \quad i > n$$

$$L = \lim (F) = \{(*, *, *, \ldots), (a_1, a_1, a_1, \ldots), (*, a_2, a_2, \ldots), (*, *, a_3, a_3, \ldots)\} \cong \{*, a_1, a_2, \ldots\}.$$

Topologia de L?

$$\pi_n^{-1}(a_n) = \{(*, \dots, *, a_n, a_n, \dots)\} = \{a_n\},\$$

$$\pi_n^{-1}(*) = \{(*, *, *, \dots), (*, \dots, *, a_{n+1}, a_{n+1}, \dots), (*, \dots, *, *, a_{n+2}, \dots), \dots\}$$
$$= \{*, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$$

Desenvolando: os singletons  $\{a_n\}$  são abertos, mas os abertos que contém \* são cofinitos. L é homeomorfo a uma sequência convergente, junto com seu limite, por exemplo

$$L\cong \{0\,,\,1\,,\,1/2\,,\,1/3\,,\,\ldots\}\subseteq \mathbb{R}.$$

Mais geralmente,  $C \cup \{*\}$ , com C um conjunto discreto qualquer, é profinito: pegue o sistema inverso de conjuntos  $\{F \cup \{*\} \mid F \subseteq C \text{ finito}\}$ , e mapas análogos. Novamente os  $\{c\}$   $(c \in C)$  são abertos, enquanto os abertos contendo \* são cofinitos.

**Exemplo.** Sendo  $C_i$  um conjunto finito para cada  $i \in I$ ,  $\prod_{i \in I} C_i$  é profinito: pegue o sistema inverso dos

$$\prod_{i \in F \subseteq I \text{ finito}} C_i$$

com as projeções canônicas.