Produto tensorial e homomorfismo interno de grupos abelianos condensados

Igor Martins Silva

25 de abril de 2023

Neste seminário, temos como objetivo:

(a) definir o produto tensorial de dois grupos abelianos κ-condensados,

(b) dados M, N e P grupos abelianos κ-condensados, mostrar que:

   (i) existem isomorfismos naturais

$$M \otimes N \to N \otimes M \quad \text{e} \quad M \otimes (N \otimes P) \to (M \otimes N) \otimes P,$$

   (ii) vale a propriedade universal: se $f : M \times N \to P$ é uma função bilinear, então existe único morfismo $\overline{f} : M \otimes N \to P$ tal que $\overline{f} \circ \otimes = f$,

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists ! \overline{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & P \end{tikzcd}$$

   (iii) se T_1 e T_2 são conjuntos condensados, então $\mathbb{Z}[T_1 \times T_2]$ é naturalmente isomorfo a $\mathbb{Z}[T_1] \otimes \mathbb{Z}[T_2]$,

   (iv) se T é um conjunto condensado, então $- \otimes \mathbb{Z}[T]$ é um funtor exato,

(c) definir homomorfismo interno.

Vale lembrar algumas notações de categorias que usaremos ao longo do texto:

- AbGrp: categoria dos grupos abelianos,
- κ-EDSet: categoria dos conjuntos κ-pequenos extremamente desconexos,
- κ-$\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$: categoria dos grupos abelianos κ-condensados,
- $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$: categoria dos funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$,
- $\mathsf{Sh}(\mathscr{C}, \mathsf{Set})$: categoria dos feixes de conjuntos sobre $\mathscr{C}$.

Produto tensorial

Sejam $M, N \in \kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathcal{A}\mathsf{bGrp})$. Considere o pré-feixe

$$\begin{array}{rcl} F_{M,N} : \kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}^{\mathrm{op}} & \to & \mathcal{A}\mathsf{bGrp} \\ S & \mapsto & M(S) \otimes N(S) \\ S_1 \xrightarrow{f} S_2 & \mapsto & M(S_2) \otimes N(S_2) \xrightarrow{M(f) \otimes N(f)} M(S_1) \otimes N(S_1) \end{array}$$

A feixificação de $F_{M,N}$ é o par $\left(F^{\mathrm{sh}}_{M,N}, \theta^{M,N}\right)$, onde $F^{\mathrm{sh}}_{M,N} : \kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathsf{bGrp}$ é um feixe e $\theta^{M,N} : F_{M,N} \to F^{\mathrm{sh}}_{M,N}$ é uma transformação natural, que satisfaz a seguinte propriedade universal: dados $G : \kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}\mathsf{bGrp}$ um feixe e $\eta : F_{M,N} \to G$ uma transformação natural, existe única transformação natural $\overline{\eta} : F^{\mathrm{sh}}_{M,N} \to G$ tal que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} F_{M,N} \arrow[r, "\theta^{M,N}"] \arrow[dr, "\eta"'] & F^{\mathrm{sh}}_{M,N} \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{\eta}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Definimos **produto tensorial** de M com N, denotado por $M \otimes N$, como sendo $F^{\mathrm{sh}}_{M,N}$, isto é, $M \otimes N := F^{\mathrm{sh}}_{M,N}$.

Proposição 1. Sejam $M, N, P \in \kappa\text{-}\mathsf{Cond}(\mathcal{A}\mathsf{bGrp})$. Então

(a) $M \otimes N$ é naturalmente isomorfo a $N \otimes M$ e

(b) $M \otimes (N \otimes P)$ é naturalmente isomorfo a $(M \otimes N) \otimes P$.

Demonstração. Provaremos o item (a) e deixaremos o item (b) como exercício. Seja $S \in \kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}$. Sabemos, da teoria sobre produto tensorial de grupos abelianos, que $M(S) \otimes N(S)$ é naturalmente isomorfo a $N(S) \otimes M(S)$. Vamos denotar por η_S o isomorfismo natural de $M(S) \otimes N(S)$ para $N(S) \otimes M(S)$. Assim, temos que $\eta_S : F_{M,N}(S) \to F_{N,M}(S)$ é um isomorfismo, para todo $S \in \kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}$. Defina $\eta := (\eta_S)_{S \in \kappa\text{-}\mathcal{ED}\mathsf{Set}}$. Então $\eta : F_{M,N} \to F_{N,M}$ é um isomorfismo funtorial. Observe que $\theta^{N,M} \circ \eta$ é uma transformação natural de $F_{M,N}$ para $N \otimes M$. Logo, pela propriedade universal de $M \otimes N$, existe única transformação natural $\gamma^1 : M \otimes N \to N \otimes M$ tal que

$$\gamma^1 \circ \theta^{M,N} = \theta^{N,M} \circ \eta. \tag{1}$$

Analogamente, temos que $\theta^{M,N} \circ \eta^{-1}$ é uma transformação natural de $F_{N,M}$ para $M \otimes N$. Logo, pela propriedade universal de $N \otimes M$, existe única transformação natural $\gamma^2 : N \otimes M \to M \otimes N$ tal que

$$\gamma^2 \circ \theta^{N,M} = \theta^{M,N} \circ \eta^{-1}. \tag{2}$$

As equações obtidas anteriormente podem ser mais facilmente percebidas através do diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
F_{M,N} \arrow[r, "\theta^{M,N}"] \arrow[d, shift right, "\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \otimes N \arrow[d, dashed, shift right, "\gamma^1"'] \\
F_{N,M} \arrow[r, "\theta^{N,M}"'] \arrow[u, shift right, "\eta^{-1}"'] & N \otimes M \arrow[u, dashed, shift right, "\gamma^2"']
\end{tikzcd}$$

Agora, note que

$$\gamma^2 \circ \gamma^1 \circ \theta^{M,N} \overset{(1)}{=} \gamma^2 \circ \theta^{N,M} \circ \eta \overset{(2)}{=} \theta^{M,N} \circ \eta^{-1} \circ \eta = \theta^{M,N}.$$

Isso quer dizer que $\gamma^2 \circ \gamma^1$ comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
F_{M,N} \arrow[r, "\theta^{M,N}"] \arrow[dr, "\theta^{M,N}"'] & M \otimes N \arrow[d, shift right, "\gamma^2 \circ \gamma^1"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}^{M \otimes N}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
 & M \otimes N
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{id}^{M\otimes N}$ também comuta o diagrama, então, pela unicidade, $\gamma^2 \circ \gamma^1 = \mathrm{id}^{M\otimes N}$. Um raciocínio análogo mostra que $\gamma^1 \circ \gamma^2 = \mathrm{id}^{N\otimes M}$. Portanto, $M \otimes N$ e $N \otimes M$ são naturalmente isomorfismos. $\boxtimes$

Sejam $M, N, P \in \kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})$. Dizemos que $f : M \times N \to P$ é **bilinear**, se $f_S : M(S) \times N(S) \to P(S)$ é bilinear, para todo $S \in \kappa\text{-}\mathbf{EDSet}$. Para cada $S \in \kappa\text{-}\mathbf{EDSet}$, defina

$$\begin{aligned} t_S :\ M(S) \times N(S) &\to \overbrace{F_{M,N}(S)}^{M(S)\otimes N(S)} \\ (m,n) &\mapsto m \otimes n \end{aligned}$$

Considere a transformação natural $t : M \times N \to F_{M,N}$ fazendo $t = (t_S)_{S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}}$. Defina, agora, $\otimes := \theta^{M,N} \circ t$.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[rr, bend right, "\otimes"'] & F_{M,N} \arrow[r, "\theta^{M,N}"] & M \otimes N
\end{tikzcd}$$

Proposição 2. Sejam $M, N \in \kappa\text{-}\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp})$. Então $M \otimes N$, junto da transformação natural $\otimes$, satisfaz a seguinte propriedade universal: dados $P \in \kappa\text{-}\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp})$ e $f : M \times N \to P$ uma função bilinear, existe única transformação natural $\overline{f} : M \otimes N \to P$ tal que $\overline{f} \circ \otimes = f$.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $f : M \times N \to P$ uma função bilinear. Então, da teoria sobre produto tensorial de grupos abelianos, para cada $S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}$, existe único homomorfismo de grupos $\widetilde{f}_S : F_{M,N}(S) \to P(S)$ que comuta o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
M(S) \times N(S) \arrow[r, "t_S"] \arrow[dr, "f_S"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & \overbrace{F_{M,N}(S)}^{M(S) \otimes N(S)} \arrow[d, dashed, "\exists! \widetilde{f}_S"] \\
& P(S)
\end{tikzcd}$$

Defina a transformação natural $\widetilde{f} : F_{M,N} \to P$, fazendo $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_S)_{S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}}$. Da propriedade universal da feixificação, existe única transformação natural $\overline{f} : M \otimes N \to P$ tal que $\overline{f} \circ \theta^{M,N} = \widetilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
F_{M,N} \arrow[r, "\theta^{M,N}"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\
& P
\end{tikzcd}$$

Assim, para cada $S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}$, temos que

$$\overline{f}_S \circ \otimes_S = \overline{f}_S \circ \theta^{M,N}_S \circ t_S = \widetilde{f}_S \circ t_S = f_S$$

Portanto, $\overline{f} \circ \otimes = f$. $\boxtimes$

Sejam T um conjunto condensado e $S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}$. Vamos denotar o grupo abeliano livre gerado por pelo conjunto $T(S)$ por $\mathbb{Z}[T(S)]$. Considere o pré-feixe

$$\begin{array}{rcl} P_T : \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}^{\mathrm{op}} & \to & \mathfrak{AbGrp} \\ S & \mapsto & \mathbb{Z}[T(S)] \\ S_1 \xrightarrow{f} S_2 & \mapsto & \mathbb{Z}[T(S_2)] \xrightarrow{\text{extensão de } T(f) \text{ por linearidade}} \mathbb{Z}[T(S_1)] \end{array}$$

Seja $(P_T^{\mathrm{sh}}, \zeta^T)$ a feixificação de P_T. Denotaremos P_T^{sh} por $\mathbb{Z}[T]$.

Proposição 3. Sejam T_1 e T_2 conjuntos condensados. Então $\mathbb{Z}[T_1 \times T_2]$ é naturalmente isomorfo a $\mathbb{Z}[T_1] \otimes \mathbb{Z}[T_2]$.

Demonstração. AINDA SEM ENTENDIMENTO $\boxtimes$

Sejam $M_1, M_2 \in \kappa\text{-}\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp})$, $\eta : M_1 \to M_2$ uma transformação natural e T um conjunto condensado. A transformação natural $\eta \otimes \mathrm{id}^{\mathbb{Z}[T]} : M_1 \otimes \mathbb{Z}[T] \to M_2 \otimes \mathbb{Z}[T]$ é entendida como sendo o conjunto formado pelos homomorfismos de grupos

$$\eta_S \otimes \mathrm{id}_S^{\mathbb{Z}[T]} : M_1(S) \otimes \mathbb{Z}[T(S)] \to M_2(S) \otimes \mathbb{Z}[T(S)],$$

para cada $S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}$, ou seja, $\eta \otimes \mathrm{id}^{\mathbb{Z}[T]} := (\eta_S \otimes \mathrm{id}_S^{\mathbb{Z}[T]})_{S \in \kappa\text{-}\mathfrak{EDSet}}$.

Proposição 4. Seja T um conjunto condensado. Então o funtor

$$\begin{array}{rcl} - \otimes \mathbb{Z}[T] : \kappa\text{-}\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp}) & \to & \kappa\text{-}\mathfrak{Cond}(\mathfrak{AbGrp}) \\ M & \mapsto & M \otimes \mathbb{Z}[T] \\ M_1 \xrightarrow{\eta} M_2 & \mapsto & M_1 \otimes \mathbb{Z}[T] \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}^{\mathbb{Z}[T]}} M_1 \otimes \mathbb{Z}[T] \end{array}$$

é exato.

Demonstração. AINDA SEM ENTENDIMENTO $\boxtimes$

Homomorfismo interno

Antes de definirmos o funtor Hom interno entre dois grupos abelianos κ-condensados, vamos a alguns lemas.

Lema 1. Seja $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ o funtor adjunto à esquerda de $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Seja $M : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ um diagrama e suponha que $\operatorname{colim}(M) \in \mathscr{C}$ exista. Então $L(\operatorname{colim}(M)) = \operatorname{colim}(L \circ M)$, ou seja, L comuta com colimites.

Demonstração. Ver Lema 4.24.5 em [3], Seção 4.24. ⊠

Lema 2. Seja $\mathscr{C}$ um site e considere o funtor inclusão $\iota : \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{Func}(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$. Então o funtor feixificação $-^{\mathrm{sh}}$: $\mathbf{Func}(\mathscr{C}, \mathbf{Set}) \to \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, \mathbf{Set})$ é a adjunta à esquerda de ι.

Demonstração. Ver [3], Seção 7.10, comentário abiaxo da Proposição 7.10.12. ⊠

Sabemos, da teoria de grupos, que, fixado $A \in \mathbf{AbGrp}$, o funtor

$$\begin{aligned} - \otimes A : \mathbf{AbGrp} &\to \mathbf{AbGrp} \\ B &\mapsto B \otimes A \\ B_1 \xrightarrow{f} B_2 &\mapsto B_1 \otimes A \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_A} B_2 \otimes A \end{aligned}$$

comuta com colimites. Fixado $M \in \mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})$, seja

$$\begin{aligned} F_{-,M} : \mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp}) &\to \mathbf{Func}(\kappa\text{-}\mathbf{EDSet}^{\mathrm{op}}, \mathbf{AbGrp}) \\ N &\mapsto F_{N,M} \\ N_1 \xrightarrow{\eta} N_2 &\mapsto F_{N_1,M} \xrightarrow{F_{\eta,M}} F_{N_2,M} \end{aligned}$$

onde $(F_{\eta,M})_S := \eta_S \otimes \mathrm{id}_S^M : N_1(S) \otimes M(S) \to N_2(S) \otimes M(S)$, para cada $S \in \kappa\text{-}\mathbf{EDSet}$. Pode-se mostrar que do fato de $- \otimes A$ comutar com colimites, obtém-se que $F_{-,M}$ também comuta com colimites. Uma vez que $(F_{-,M})^{\mathrm{sh}} = - \otimes M$ e a feixificação é uma adjunta à esquerda (Lema 2), então $- \otimes M$ também comuta com colimites (Lema 1). Pelo Teorema da Função Adjunta, $- \otimes M$ possui uma adjunta à direita, a qual denotaremos por $\underline{\mathrm{Hom}}(M, -)$ e a qual chamaremos de funtor **Hom interno**.

Sejam $S \in \kappa\text{-}\mathbf{EDSet}$ e $\underline{S} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(-, S) \in \kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$. Sabemos que a feixificação $\mathbb{Z}[-] : \kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \to \kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})$, $T \mapsto \mathbb{Z}[T]$ é a adjunta à esquerda da inclusão $\iota : \kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp}) \to \kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$. Logo, pela adjunção, temos que

$$\mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})}(\underline{S}, \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{\mathrm{Hom}}(M, N)) \tag{3}$$

é isomorfismo natural, para todo $N \in \kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})$.

Observe que $-\otimes M$ e $\underline{\mathrm{Hom}}(M,-)$ são funtores de κ-$\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})$ para essa mesma categoria. Logo, pela adjunção

$$\mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}]\otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \tag{4}$$

é um isomorfismo natural, para todo $N \in \kappa$-$\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})$.

Pelo Lema de Yoneda, temos que

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)(S) &\cong \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{Set})}(\underline{S}, \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \\ &\overset{(3)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}], \underline{\mathrm{Hom}}(M,N)) \\ &\overset{(4)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})}(\mathbb{Z}[\underline{S}]\otimes M, N).\end{aligned}$$

Seja $*$ um conjunto com um único elemento em κ-$\mathbf{EDSet}$. GOSTARIA DE MOSTRAR QUE $\mathbb{Z}[\underline{*}]\otimes M \cong M$, O QUE NOS DARIA QUE $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)(*) \cong \mathrm{Hom}_{\kappa\text{-}\mathbf{Cond}(\mathbf{AbGrp})}(M,N)$.

Referências

[1] SCHOLZE, P. *Lectures on Condensed Mathematics*. Notas de aula. Website.

[2] ÁSGEIRSSON, D. *The Foundations of Condensed Mathematics*. Dissertação de mestrado. Website.

[3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. Seções 4.24 e 7.10. Website.