

Seminário: limites e colimites, conjuntos profinitos

John MacQuarrie

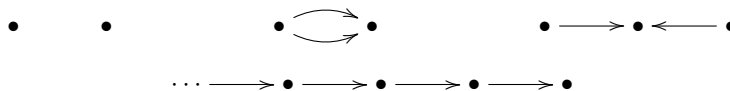
16 de setembro de 2022

Limites e colimites

Limites e colimites são definidos por propriedades universais. Assim a gente define eles para ter propriedades úteis, e depois se preocupa se eles existem.

A definição tem três partes:

- Uma “categoria combinatória” \mathcal{D} (D = “diagrama”): pensamos nela como uma coleção de pontos e flechas mesmo. Exemplos:



- Uma categoria \mathcal{C} que queremos entender. Exemplos:

Set, **Grp**, **Ab**, **Top**, ...

- Um funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$: pensamos nele como realizando a forma de \mathcal{D} dentro da categoria \mathcal{C} . Exemplo: Um funtor

$$F : \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

“é” um par de grupos abelianos G, H junto com dois homomorfismos $f, g : G \rightarrow H$:

$$\begin{array}{ccc} G & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & H \end{array}$$

Definição. Sejam \mathcal{D} uma categoria pequena, \mathcal{C} uma categoria e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor covariante.

- Um cone (c, ψ_d) de F consiste de um objeto $c \in \mathcal{C}$, junto com um morfismo $\psi_d : c \rightarrow Fd$ para todo $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$. Para qualquer morfismo $\alpha : d \rightarrow d'$ em \mathcal{D} , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ \psi_d \swarrow & & \searrow \psi_{d'} \\ Fd & \xrightarrow{F(\alpha)} & Fd' \end{array}$$

tem que comutar.

- Um cocone (b, γ_d) de F consiste de um objeto $b \in \mathcal{C}$, junto com um morfismo $\gamma_d : Fd \rightarrow b$ para todo $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$. Para qualquer morfismo $\alpha : d \rightarrow d'$ em \mathcal{D} , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Fd & \xrightarrow{F(\alpha)} & Fd' \\ \gamma_d \searrow & & \swarrow \gamma_{d'} \\ & b & \end{array}$$

tem que comutar.

Exemplo. O mesmo $F : \bullet \rightrightarrows \bullet \rightarrow \mathbf{Ab}$ com imagem

$$G \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} H.$$

Vamos supor também que $g : G \rightarrow H$ é o hom trivial 0, que manda todo $g \in G$ para 0.

Um cone dele é um grupo abeliano C com homomorfismos $\psi : C \rightarrow G$ e $\varphi : C \rightarrow H$. O diagrama

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \psi \swarrow & & \searrow \varphi \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

comuta, então $\varphi = f\psi$. Mas o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \psi \swarrow & & \searrow \varphi \\ G & \xrightarrow{0} & H \end{array}$$

também comuta, então $\varphi = 0\psi = 0$. Em particular $f\psi = 0$: abrindo isso, os cones de F estão em correspondência com homomorfismos de grupos abelianos $\psi : C \rightarrow G$ cujas imagens caíam dentro de $\text{Ker}(f)$.

Limites são os melhores cones e colimites são os melhores cocones:

Definição. • O limite $\lim(F)$ de $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (caso existir) é um cone (L, φ_d) de F que satisfaz a seguinte propriedade universal: sempre que (c, ψ_d) é um cone de F , existe um único morfismo $\psi : c \rightarrow L$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} c & & \\ \psi_d \downarrow & \searrow \psi & \\ & L & \\ & \swarrow \varphi_d & \\ & Fd & \end{array}$$

comuta para todo $d \in \mathcal{D}$.

• O colimite $\text{colim}(F)$ é o conceito dual.

Lema. O (co)limite de F , caso existir, é único até isomorfismo.

Demonstração. (ideia): Suponha que temos dois limites $(L, \varphi_d), (L', \varphi'_d)$. Pelas propriedades universais de L', L respectivamente, temos morfismos $\rho : L \rightarrow L', \theta : L' \rightarrow L$ fazendo todos os diagramas

$$\begin{array}{ccc} L & \begin{array}{c} \xrightarrow{\rho} \\ \xleftarrow{\theta} \end{array} & L' \\ \varphi_d \searrow & & \swarrow \varphi'_d \\ & d & \end{array}$$

comutarem. Compondo, o mapa $\theta\rho$ faz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\theta\rho} & L \\ \varphi_d \searrow & & \swarrow \varphi_d \\ & d & \end{array}$$

comutar. Mas id_L também faz o diagrama comutar, então pela unicidade do mapa, $\theta\rho = \text{id}_L$. Similarmente $\rho\theta = \text{id}_{L'}$ e assim ρ é iso com inverso θ . \square

Exemplo. Um cone óbvio de

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ & \searrow 0 & \nearrow \\ & & \end{array}$$

é a inclusão do núcleo K de f em G :

$$K \hookrightarrow G \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & H \\ & \searrow 0 & \nearrow \end{array}$$

De fato ele é o limite: já que um cone é um hom $C \rightarrow G$ cuja imagem caia dentro de K , ele se factora unicamente por $K \hookrightarrow G$:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \exists! \swarrow & \downarrow & \searrow \\ K & \hookrightarrow G & \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & H \\ & \searrow 0 & \nearrow \end{array} \end{array}$$

Uns (co)limites são familiares e têm nomes:

- Seja \mathcal{D} uma categoria pequena com somente morfismos identidades. Assim \mathcal{D} é moralmente só um conjunto. $F(\mathcal{D})$ é qualquer conjunto de objetos $F(d)$ de \mathcal{C} indexado pelos objetos de \mathcal{D} . Um cone de F é um objeto C de \mathcal{C} com mapas quaisquer $C \rightarrow F(d)$ para cada d . O limite de F é o produto $\prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$.

– Em categorias tipo **Set**, **Grp**, **Ab**, **Top**:

$$\begin{array}{ccccc} & C & & & \\ & \downarrow \exists! \Psi & & \searrow \psi_{d'} & \\ & \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d) & & & \\ \swarrow \psi_d & & \searrow \pi_{d'} & & \\ F(d) & & & & F(d') \quad \dots \end{array}$$

O mapa ψ manda um elemento x de C pro vetor $(\psi_d(x))_{d \in \mathcal{D}}$.

- Em **Top** ainda temos que dizer a topologia que daremos pro conjunto $\prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$. Cada π_d tem que ser contínua ou não teremos os mapas π_d . Mas a topologia tem que ser a menor possível com essa propriedade, pois senão, pegue $C = \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ com uma topologia menor. O mapa “id” : $C \rightarrow \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ não será contínua. A topologia mais fraca tal que cada π_d é contínuo é precisamente a topologia do produto!
- Limites podem não existir: Pegue $\mathcal{C} = \mathbf{FSet}$, conjuntos finitos: um produto qualquer de conjuntos finitos não é finito!

Os colimites desses F são mais diversos:

- em **Set**, $\text{colim}(F) = \coprod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ – a união disjunta.
- em **Ab**, $\text{colim}(F) = \bigoplus_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ – a soma direta.
- em **Grp**, $\text{colim}(F) = \ast_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ – o produto livre.

- O limite de $\bullet \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ & \searrow \beta & \nearrow \end{array} \bullet$ é o equalizador de $F(\alpha), F(\beta)$. O colimite é o coequalizador.

– Em **Set**, **Ab**, **Grp**, **HTop** o equalizador é a coisa óbvia:

$$\text{Eq} \left(\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ G & & H \\ & \xleftarrow{g} & \end{array} \right) = \{x \in G \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow G.$$

- Às vezes (co)limites existem mas não são tão óbvios: seja G um grupo e $L \leq G$ não normal. G/L não é um grupo então pode pensar que $L \hookrightarrow G$ não possui conúcleo em **Grp**. Mas sendo \bar{L} o subgrupo normal gerado por L , a projeção $G \rightarrow G/\bar{L}$ é o conúcleo.

- O limite de $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \rightarrow \mathcal{C}$ é um pullback ou produto fibrado em \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

- O colimite de $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \rightarrow \mathcal{C}$ é um pushout em \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \sqcup_C B \end{array}$$

Teorema. (de existência de (co)limites) Se \mathcal{C} possui produtos arbitrários e equalizadores, então todo funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ possui limite (isto é: \mathcal{C} é completa).

Se \mathcal{C} possui coprodutos arbitrários e coequalizadores, então todo funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ possui colimite (isto é, \mathcal{C} é cocompleta).

Demonstração. Escrevemos flechas como $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$. Os objetos

$$\prod_{d \in \text{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \quad , \quad \prod_{\alpha \in \text{Mor}(\mathcal{D})} F(t(\alpha))$$

existem em \mathcal{C} . Para cada $\alpha \in \text{Mor}(\mathcal{D})$ definimos dois mapas

$$\prod_{d \in \text{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \xrightleftharpoons[\tau_\alpha = \pi_{t(\alpha)}]{\sigma_\alpha = F(\alpha)\pi_{s(\alpha)}} F(t(\alpha)) .$$

A propriedade universal do segundo produto dá únicos mapas

$$\prod_{d \in \text{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \xrightleftharpoons[\tau]{\sigma} \prod_{\alpha \in \text{Mor}(\mathcal{D})} F(t(\alpha)) .$$

A equalizador de σ, τ é o limite de F . □

O legal desse teorema é que quando entendemos produtos e equalizadores em \mathcal{C} , ele dá uma construção dos limites:

Exemplo. Em **Set**, **Ab**, **Grp**, ... considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

O teorema diz que o limite (= pullback) é o equalizador de

$$\begin{array}{ccc} A \times B \times C & \xrightleftharpoons[(a,b,c) \mapsto (c,c)]{(a,b,c) \mapsto (f(a),g(b))} & t(f) \times t(g) . \end{array}$$

Assim o limite é

$$A \times_C B = \{(a, b, c) \mid f(a) = c = g(b)\} \cong \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \quad - \text{a definição "familiar"}$$

Limites inversos e conjuntos profinitos

Definição. Seja \mathcal{D} um poset, tratado como categoria: temos $d \rightarrow d' \iff d \geq d'$. Diremos que \mathcal{D} é direcionado para cima se $\forall d, d' \in \mathcal{D}$, existe $b \in \mathcal{D}$ com $b \geq d, d'$.

Se $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ é um funtor com \mathcal{D} direcionado para cima, $F(\mathcal{D})$ é um sistema inverso em \mathcal{C} . O seu limite é um limite inverso, denotado por $\varprojlim (F)$.

Dualmente, colimites de $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ com \mathcal{D} direcionado para baixo se chamam de limites diretos e são denotados como $\varinjlim (F)$.

Exemplo. X um espaço topológico e $\mathcal{D} = \mathcal{O}(X)$ com morfismos inclusões. Considere o funtor

$$\begin{aligned} F : \mathcal{O}(X) &\rightarrow \mathbf{Top} \\ U &\mapsto U \end{aligned}$$

Temos $\varprojlim (F) = \bigcap_{U \in \mathcal{O}(X)} U$.

Definição. Um conjunto/grupo profinito é um limite inverso, na categoria $\mathbf{HTop}/\mathbf{TGrp}$, de um sistema inverso de conjuntos/grupos finitos discretos.

Proposição. Conjuntos profinitos são sempre Hausdorff, compactos e totalmente desconexos (= o maior componente conexo é um ponto).

Demonstração. Só compacto: Pelo teorema de Tychonoff, produtos de espaços compactos é compacto. Equalizadores de mapas contínuos de espaços Hausdorff são fechados. Subconjuntos fechados de compactos são compactos. Assim pelo teorema de existência, de fato qualquer limite de espaços compactos Hausdorff é compacto. \square

(de fato essa proposição é sse).

Seja \mathcal{N} a categoria direcionada para cima

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \dots$$

Exemplo. $F : \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{TGrp}$ (grupos topológicos Hausdorff) com imagem

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{mod } p} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{mod } p^2} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{mod } p^3} \dots$$

Pelo teorema de existência:

$$\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, x_m \pmod{p^n} = x_n \forall n \leq m\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \mid a_i \in \{0, \dots, p-1\} \right\} = \mathbb{Z}_p.$$

Exemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F(n) := \{*, a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbf{Set}$. Dados $m \geq n$, defina

$$\begin{aligned} \{*, a_1, a_2, \dots, a_m\} &\rightarrow \{*, a_1, a_2, \dots, a_n\} \\ * &\mapsto * \\ a_i &\mapsto a_i \quad i \leq n \\ a_i &\mapsto * \quad i > n \end{aligned}$$

$$L = \varprojlim (F) = \{(*, *, *, \dots), (a_1, a_1, a_1, \dots), (*, a_2, a_2, \dots), (*, *, a_3, a_3, \dots)\} \cong \{*, a_1, a_2, \dots\}.$$

Topologia de L ?

$$\pi_n^{-1}(a_n) = \{(*, \dots, *, a_n, a_n, \dots)\} = \{a_n\},$$

$$\pi_n^{-1}(*) = \{(*, \dots, *, a_{n+1}, a_{n+1}, \dots), (*, \dots, *, *, a_{n+2}, \dots), \dots\} = \{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}.$$

Desenrolando: os singletons $\{a_n\}$ são abertos, mas os abertos que contêm $*$ são cofinitos. L é homeomorfo a uma sequência convergente, junto com seu limite, por exemplo

$$L \cong \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Mais geralmente, $C \cup \{*\}$, com C um conjunto discreto qualquer, é profinito: pegue o sistema inverso de conjuntos $\{F \cup \{*\} \mid F \subseteq C \text{ finito}\}$, e mapas análogos. Novamente os $\{c\}$ ($c \in C$) são abertos, enquanto os abertos contendo $*$ são cofinitos.

Exemplo. Sendo C_i um conjunto finito para cada $i \in I$, $\prod_{i \in I} C_i$ é profinito: pegue o sistema inverso dos

$$\prod_{i \in F \subseteq I \text{ finito}} C_i$$

com as projeções canônicas.