Seminário: Categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados

Matheus Johnny Caetano

November 2022

1 Introdução

O objetivo deste seminário é apresentar duas categorias equivalentes à categoria de conjuntos κ-condensados: a categoria de feixes de espaços Hausdorff compactos κ-pequenos e a categoria de feixes de conjuntos extremamente desconexos κ-pequenos.

Para isto, introduziremos os conceitos de pré-topologia e topologia de Grothendieck e bases de uma categoria. Além disso, utilizaremos as seguintes notações:

- ProFinSet é o site dos conojuntos profinitos;
- CHTop é o site dos espaços Hausdorff compactos;
- EDSet é o site dos conjuntos extremamente desconexos;
- $Sh(\mathcal{C})$ é a categoria de feixes de $\mathcal{C}$.

Em cada site teremos como cobertura familias finitas de funções juntamente sobrejetivas.

2 Noções catogóricas e topológicas

Começaremos relembrando alguns conceitos.

Definição 2.1. [1, p. 48] *Considere duas flexas $f : A \to B$ e $g : A \to B$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um* **equalizador** *de f, g é um par (K, k) onde*

1. *K é um objeto de $\mathcal{C}$,*
2. *$k : K \to A$ é uma flexa de $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = g \circ k$ e para todo par (M, m) onde*
   (a) *M é um objeto de $\mathcal{C}$,*
   (b) *$m : M \to A$ é uma flexa de $\mathcal{C}$ tal que que $f \circ m = g \circ m$,*

   existe um único morfismo $n : M \to K$ tal que $m = k \circ n$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ M \arrow[u, dashed, "\exists n"] \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Definição 2.2. [1, p. 51] *Considere dois morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um* **pullback** *de (f, g) é uma tripla (P, p_1, p_2) onde:*

1. *P é um objeto de $\mathcal{C}$;*

2. $p_1 : P \to A$ *e* $p_2 : P \to B$ *são morfismos de* $\mathcal{C}$ *tais que* $f \circ p_1 = g \circ p_2$ *e para toda tripla* (Q, q_1, q_2) *onde*

(a) Q *é um objeto de* $\mathcal{C}$*;*

(b) $q_1 : Q \to A$ *e* $q_2 : Q \to B$ *tais que* $f \circ q_1 = g \circ q_2$*,*

existe um único morfismo $h : Q \to P$ *tal que* $q_1 = p_1 \circ h$ *e* $q_2 = p_2 \circ h$*.*

Usualmente denotamos $P = A \times_C B$*.*

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Observação 1. *O pullback* $P = A \times_C B$ *é um subconjunto do produto cartesiano* $A \times B$*.*

Lema 2.1. [5, p. 3] *Se* $f : X \to Y$ *e* $g : X \to Y$ *são funções contínuas e* Y *é Hausdorff, então* $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *é fechado em* X*.*

Demonstração. Sejam $y \in N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ e U, V subconjuntos abertos disjuntos de Y contendo $f(y)$ e $g(y)$ respectivamente. Temos $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de y e está contida em N. Portanto, N é uma união de conjuntos abertos, logo é aberto, e $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado. Em outras palavras, $Eq(f, g)$ é fechado em X. □

A partir deste resultado, podemos mostrar que ProFinSet é fechado para pullbacks:

Lema 2.2. *Seja* $f : S' \to S$ *um mapa onde* S' *é profinito e* S *é Hausdorff compacto. Então* $S' \times_S S' \subset S' \times S'$ *é profinito.*

Demonstração. Como S' é profinito, $S' \times S'$ também é. Assim, temos que $S' \times_S S' \subset S' \times S'$ é Hausdorff totalmente desconexo. Para mostrar compacidade, basta mostrar que o pullback é um subconjunto fechado do produto cartesiano.

Observe que $S' \times_S S'$ é o conjunto dos pares $(a, b) \in S' \times S'$ tais que $f \circ p_1 = f \circ p_2$, ou seja, $f(a) = f(b)$. Logo, podemos escrever

$$S' \times_S S' = \{(a, b) \in S' \times S' : p_1(a, b) = p_2(a, b)\}$$

Assim, pelo Lema 2.1 $S' \times_S S'$ é fechado, e consequentemente compacto. Portanto, $S' \times_S S'$ é profinito. □

Proposição 2.1. [4, p. 8] *Seja* S *um espaço Hausdorff compacto. Então existe uma sobrejeção* $S' \to S$*, onde* S' *é profinito.*

Demonstração. Seja S um espaço Hausdorff compacto e considere S^{dis} o conjunto S com a topologia discreta. Temos que $S' = \beta S^{dis}$ é um espaço compato Hausdorff totalmente desconexo, ou seja, S' é profinito. Considere, o mapa $f : S^{dis} \to S$ tal que $f(x) = x$. Observe que f é contínua e sobrejetiva. Como S é Hausdorff compacto, temos pela propriedade universal da compactificação de Stone-Cech que existe $\tilde{f} : S' \to S$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S^{dis} \arrow[r, "b"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & S' = \beta S^{dis} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Além disso, como $\tilde{f} \circ b$ é sobrejetiva, temos que $\tilde{f}$ é uma sobrejeção. □

Definição 2.3. [4, p. 11] *Um espaço Hausdorff compacto* S *é* **extremamente desconexo** *se para toda sobrejeção* $f : S' \to S$ *existe* $g : S \to S'$ *tal que* $f \circ g = 1_S$*. Nestas condições, dizemos que* g *é uma seção de* f *e* f *é uma retração de* g*.*

Neste texto, chamaremos de **conjunto extremamente desconexo** um espaço Hausdorff compacto extremamente desconexo.

Proposição 2.2. [4, p. 11] *Sejam S_0 um espaço topológico discreto e $S = \beta S_0$ a compactificação de Stone-Čech de S_0. Então S é extremamente desconexo.*

Demonstração. Temos pela proposição 2.1 que S é um espaço Hausdorff compacto. Seja $f : S' \to S$ uma sobrejeção contínua, onde S' é compacto Hausdorff e considere a inclusão $i : S_0 \to S$. Como f é sobrejetiva e S_0 é discreto, existe $g : S_0 \to S'$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, two heads, "f"] & S \\
S_0 \arrow[u, "g"] \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Agora, considere $b : S_0 \to S$ o mapa da compactificação de Stone-Cech. Temos que b induz o mapa $\tilde{g}$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\tilde{g}"] & S' \arrow[r, two heads, "f"] & S \\
& S_0 \arrow[ul, "b"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que $f \circ \tilde{g} \circ i = i$, logo pela unicidade da propriedade universal da compactificação de Stone-Cech, $f \circ \tilde{g} = 1_S$. ☐

Corolário 2.0.1. [4, p. 11] *Seja S um espaço Hausdorff compacto. Então existe uma sobrejeção $f : \tilde{S} \to S$, onde $\tilde{S}$ é extremamente desconexo.*

3 Topologia de Grothendieck

Nesta seção definiremos pré-topologia e topologia de Grothendieck e, a partir destas definições, podemos introduzir o conceito de feixe.

Definição 3.1. [3, p. 20] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com pullbacks. Uma* **pré-topologia de Grothendieck** *em $\mathcal{C}$ é uma coleção $Cov(\mathcal{C})$ de famílias de morfismos $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ para cada objeto $U \in Obj(\mathcal{C})$, chamadas* **coberturas** *de U tais que:*

1. *Todo isomorfismo $V \to U$ forma uma cobertura $\{V \to U\}$;*
2. *Se $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ é uma cobertura e $f : V \to U$ é um morfismo qualquer em $\mathcal{C}$, então $\{V \times_U U_i \to V\}_{i \in I}$ é uma cobertura de V.*
3. *Se $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ e, para cada i, $\{U_{i,j} \to U_i\}_{j \in J_i}$ são coberturas, então a família de composições $\{U_{i,j} \to U_i \to U\}_{i \in I,\ j \in J_i}$ também é uma cobertura.*

Chamamos de **site** *uma categoria com uma pre-topologia de Grothendieck.*

As categorias dos conjuntos profinitos e dos espaços Hausdorff compactos, ambas com coberturas dadas por famílias finitas de mapas juntamente sobrejetivos, são sites.

Definição 3.2. [3, p. 21] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ um pré-feixe. Dizemos que F é um* **feixe** *no site $\mathcal{C}$ se para todo objeto U de $\mathcal{C}$ e toda cobertura $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] & \prod_{i \in I} F(U_i) \arrow[r, shift left, "\prod_{i,j} F(p^1_{ij})"] \arrow[r, shift right, "\prod_{i,j} F(p^2_{ij})"'] & \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)
\end{tikzcd}$$

é um equalizador, onde $p^1_{ij} : U_i \times_U U_j \to U_i$ e $p^2_{ij} : U_i \times_U U_j \to U_j$ são as projeções canônicas. Denotaremos por $Sh(\mathcal{C})$ a categoria de feixes em $\mathcal{C}$.

Com isso, podemos definir feixes em ProFinSet e CHTop. Vale lembrar que definimos um **conjunto condensado** como um feixe $T : \text{ProFinSet}^{op} \to \text{Set},\ S \mapsto T(S)$ tal que $T(\emptyset) = *$ e as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para todo par de conjuntos profinitos S_1 e S_2, o mapa natural $T(S_1 \amalg S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$ é uma bijeção.

(ii) Para toda sobrejeção $S' \to S$ entre profinitos com o pullback $S' \times_S S'$ e suas projeções p_1 e p_2, o mapa natural

$$T(S) \to \{x \in T(S') | T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

é uma bijeção.

Queremos mostrar equivalência entre as categorias de feixes em ProFinSet, CHTop e EDSet. No entanto, não podemos definir feixes em EDSet, pois não temos uma pré-topologia de Grothendieck visto que esta categoria não possui pullbacks.

Em vista disso, precisamos de uma noção mais geral de topologia em categorias que não admitem pullbacks, como EDSet, e assim, definir feixes nessas categorias. Para tal definição, introduziremos os seguintes conceitos:

Definição 3.3. [3, p. 22] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto de $\mathcal{C}$. A* **categoria slice** *$\mathcal{C}_{/X}$ de $\mathcal{C}$ sobre X é uma categoria associada cujos objetos são pares (A, π), onde $\pi : A \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$. Os morfismos nesta categoria $f : (A, \pi) \to (A', \pi')$ são dados por morfismos $f : A \to A'$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Um **crivo** *em X é uma subcategoria plena $S(X)$ de $\mathcal{C}_{/X}$ que consiste em pares $(Y, f : Y \to X)$ tal que para todo morfismo $g : (Y', f') \to (Y, f)$ em $\mathcal{C}_{/X}$ o par (Y', f') pertence à $S(X)$ sempre que (Y, f) pertence à $S(X)$.*

A partir disto, podemos definir o **pullback de um crivo** $S(X)$ ao longo de um morfismo $f : Y \to X$ como o crivo em Y que consiste em pares $(V, g : V \to Y)$ tais que a composição $(V, f \circ g : V \to X)$ pertence à $S(X)$. Usaremos a notação $f^*S(X)$ para tal pullback.

Agora, tendo uma nova noção de pullbacks podemos definir uma topologia de Grothendieck a partir de crivos:

Definição 3.4. [3, p. 22] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma* **topologia de Grothendieck** *J em $\mathcal{C}$ é uma coleção de crivos para cada objeto X de $\mathcal{C}$, chamada* **crivos de cobertura** *e denotada por $J(X)$, tal que*

1. *Para cada objeto X em $\mathcal{C}$, a categoria $\mathcal{C}_{/X}$ (chamada crivo maximal) é um crivo de cobertura em X;*
2. *Para cada morfismo $f : Y \to X$ em $\mathcal{C}$ e cada crivo de cobertura $S(X) \in J(X)$ em X, o pullback $f^*S(X)$ é um crivo de cobertura em Y;*
3. *Seja $S(X) \in J(X)$ um crivo de cobertura em X e seja $T(X)$ outro crivo em X tal que para cada morfismo $f : Y \to X$ em $S(X)$ o pullback $f^*T(X)$ é um crivo de cobertura em Y. Então $T(X)$ é um crivo de cobertura em X.*

Uma categoria com uma topologia de Grothendieck também é chamada de **site**.

Definição 3.5. [2, p. 126] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ é um feixe se satisfaz a seguinte condição: Para cada objeto X em $\mathcal{C}$ e cada crivo de cobertura $S(X)$, o mapa canônico*

$$F(X) \to \varprojlim_{Y \in S(X)^{op}} F(Y)$$

é uma bijeção

Com isso, podemos definir uma topologia de Grothendieck e trabalhar com feixes em EDSet. Além disso, sites sob uma pré-topologia também serão sites sob uma topologia. Para ver este resultado, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.6. [3, p. 22] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $X \in Obj(\mathcal{C})$ e $\{f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ uma coleção de morfismos. O menor crivo em X que contém todo par (X_i, f_i) é chamado de* **crivo gerado pelos morfismos** *f_i. Tal crivo é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}_{/X}$ e é dado por pares (Y, f) tais que existe alguma fatoração $Y \to X_i \to X$ para algum i.*

Lema 3.1. [6, Lemma 00ZC] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com uma pré-topologia de Grothendieck com coberturas $Cov(\mathcal{C})$. Para cada objeto U de $\mathcal{C}$, denote por $J(U)$ o conjunto de crivos $S(U)$ em U com a seguinte propriedade: "existe uma cobertura $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I} \in Cov(\mathcal{C})$ tal que o crivo $S'(U)$ gerado por f_i está condido em $S(U)$". Então:*

1. *J é uma topologia em $\mathcal{C}$.*
2. *Um prefeixe F é um feixe para esta topologia se, e somente se, é um feixe para a pré-topologia.*

4 Base de uma Categoria

Nesta seção introduziremos o conceito de base de uma categoria e, a partir disto, apresentaremos resultados importantes para equivalência de feixes.

Definição 4.1. [2, p. 131] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com a topologia de Grothendieck. Dizemos que uma subcategoria plena $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ é uma* **base** *para $\mathcal{C}$ se para todo objeot X de $\mathcal{C}$, existe uma cobertura $f_i : D_i \to X_{i\in I}$, onde I é um conjunto pequeno e D_i é objeto de $\mathcal{D}$.*

Queremos mostrar que EDSet é uma base para ProFinSet e para CHTop. Assim, primeiro mostraremos que EDSet é uma subcategoria plena de ProFinSet. Para isso, é importante ressaltar que um espaço topológico é dito **totalmente desconexo** se a maior componente conexa é um ponto; e **extremamente desconexo** se o fecho de todo conjunto aberto é aberto. Com isso, queremos mostrar que um espaço Hausdorff compacto extremamente desconexo (conjunto extremamente desconexo) é profinito, ou seja, Hausdorff compacto totalmente desconexo. Para esta finalidade, usaremos o seguinte lema:

Lema 4.1. [3, p. 12] *Seja X um espaço Hausdorff extremamente desconexo, então X é totalmente desconexo.*

Demonstração. Sejam X um espaço extremamente desconexo e Y um subespaço conexo de X. Suponha, por absurdo, que Y possui mais que um ponto. Assim, podemos tomar dois pontos quaisquer $y_1, y_2 \in Y$ e encontrar vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 de y_1 e y_2 respectivamente. Então $y_1 \notin \overline{U_2}$, $y_2 \notin \overline{U_1}$ e são subconjuntos próprios abertos e fechados, o que contradiz a conexidade de Y. Portanto, Y não pode conter mais de um ponto, ou seja, X é totalmente desconexo. □

Com isso, temos que EDSet é uma subcategoria de ProFinSet e é plena, pois dados X e Y objetos de EDSet, todo morfismo $f : X \to Y$ em ProFinSet também é um morfismo em EDSet. Além disso, pelo corolário 2.0.1, para todo profinito existe uma sobrejeção com domínio extremamente desconexo, logo, EDSet é uma base para ProFinSet. Analogamente, ProFinSet e EDSet são bases para CHTop.

Em vista disso, veremos a seguir uma sequência de resultados que serão fundamentais para demonstração das proposições principais deste seminário.

Proposição 4.1. [2, p. 131] *Sejam $\mathcal{C}$ um site e $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base. Então, existe uma única topologia de Grothendieck na categoria $\mathcal{D}$ tal que a coleção de morfismos $\{D_i \to D\}_{i\in I}$ em $\mathcal{D}$ é uma cobertura se, e somente se, é uma cobertura em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Referência [2], apêndice B, proposição B.6.3. □

Proposição 4.2. [2, p. 132] *Sejam $\mathcal{C}$ um site, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base equipada com a topologia de Grothendieck da proposição 4.3 e $F : \mathcal{C}^{op} \to Set$ um funtor. Então, F é um feixe se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *A restrição $F|_{\mathcal{D}^{op}} : \mathcal{D}^{op} \to Set$ é um feixe;*

2. *O funtor F é uma extensão de Kan à direita da sua restrição $F|_{\mathcal{D}^{op}}$.*

Demonstração. Referência [2], apêndice B, proposição B.6.6. □

Proposição 4.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck e seja $\mathcal{D}$ uma base de $\mathcal{C}$. Assuma $\mathcal{D}$ equipada com a topologia de Grothendieck da proposição 4.1. Então precomposição com a inclusão $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ induz uma equivalência de categorias:*

$$Sh(\mathcal{C}) \to Sh(\mathcal{D}), \ \ F \to F|_{\mathcal{D}^{op}}.$$

Demonstração. Referência [2], apêndice B, proposição B.6.4. □

5 Equivalência de Categorias

Por fim, veremos os resultados que apresentam categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados.

Proposição 5.1. [4, p. 11] *Considere o site κ-CHTop de todos os espaços Hausdorff compactos κ-pequenos, com recobrimentos dados por familias finitas de funções juntamente sobrejetivas. Sua categoria de feixes é equivalente a conjuntos κ-condensados via restrição à conjuntos profinitos.*

Demonstração. Vimos que ProFinSet é uma base para CHTop, logo, pela proposição 4.3, obtemos uma equivalencia entre as categorias de feixe via restrição à conjuntos profinitos. □

Analogamente, como EDSet é uma base de ProFinSet, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2. [4, p. 12] *Considere o site κ-EDSet de todos os conjuntos extremamente desconexos κ-pequenos, com recobrimentos dados por familias finitas de funções juntamente sobrejetivas. Sua categoria de feixes é equivalente a conjuntos κ-condensados via restrição de conjuntos profinitos.*

Usando a proposição, podemos ver que a categoria de conjuntos / grupos / aneis / ... κ-condensados é equivalente a categoria de funtores

$$T : \{\kappa\text{EDSet}\}^{op} \to \{\text{Set / Grp / Ring / ...}\}$$

tais que $T(\emptyset) = *$ e para todo par de conjuntos κ-extremamente desconexos S_1 e S_2, o mapa natural $T(S_1 \amalg S_2) \to T(S_1) \times T(S_2)$ é uma bijeção.

Observe que o análogo à condição (ii) de conjuntos condensados foi omitido. Isto acontece pois tal condição é automática para conjuntos extremamente desconexos. De fato, seja $f : S' \to S$ uma sobrejeção entre conjuntos extremamentes desconexos, então existe $g : S \to S'$ tal que $f \circ g = 1_S$. Logo, aplicando um funtor T, obtemos

$$T(g) \circ T(f) = 1_{T(S)}$$

e o mapa $T(f)$ é injetivo. Além disso,

$$Im(T(f)) \subset \{x \in T(S') | T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_X S')\} = E$$

pois $f \circ p_1 = f \circ p_2$. Veremos que $E \subset Im(T(f))$ e todo funtor contravariante entre conjuntos extremamente desconexo satisfaz a condição (ii) automaticamente.

Seja $x \in E$ e considere o mapa $(g \circ f) \times_S 1_{S'} : S' \times_S S' \to S' \times_S S'$. Temos que

$$T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(p_1)(x) = T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(p_2)(x)$$

$$\Downarrow$$

$$T(p_1 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x) = T(p_2 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x)$$

$$\Downarrow$$

$$T(g \circ f)(x) = T(1_{S'})(x).$$

Assim, $T(f)(T(g)(x)) = x$, ou seja, $x \in Im(T(f))$. Portanto $T(S)$ está em bijeção com E.

Referências

[1] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 1994.

[2] LURIE, J. *Ultracategories.* Preprint version. 2018.Disponível em: `https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Conceptual.pdf` Acesso em: 06/12/2022.

[3] MAIR, C. *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups.* 2021. Disponível em: `https://arxiv.org/pdf/2105.07888.pdf` Acesso em: 06/12/2022.

[4] SCHOLZE, P. *Lectures on Condensed Mathematics* Notas de aula. 2019. Disponível em: `https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf` Acesso em: 06/12/2022.

[5] WILSON, J. S.*Profinite Groups.* Clarendon Press, 1998.

[6] THE STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project* 2018. Disponível em: `https://stacks.math.columbia.edu/` Acesso em: 06/12/2022