

TEOREMA 2.2 DAS NOTAS DE PETER SCHOLZE SOBRE MATEMÁTICA CONDENSADA

Igor Martins Silva

02 e 09 de dezembro de 2022

Antes de enunciarmos o Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze, e apresentarmos sua demonstração, que é o objetivo deste texto, vamos relembrar o que é uma categoria de grupos abelianos κ -condensados, definir categoria abeliana e apresentar os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Porém, antes de mais nada, vale ressaltar que uma categoria \mathcal{C} , a menos que se expresse o contrário, é sinônimo de categoria pequena, ou seja, $\text{Obj}(\mathcal{C})$ e $\text{Hom}(\mathcal{C})$ são conjuntos.

Vamos começar relembrando a definição de categoria de grupos abelianos κ -condensados, assunto discutido no seminário sobre conjuntos condensados, ministrado por Luiz Felipe Andrade Campos. Sejam

- (a) \mathcal{HTop} a categoria cujos objetos são espaços topológicos Hausdorff e os morfismos são funções contínuas, e
- (b) $\mathcal{TFinSet}$ a categoria cujos objetos são conjuntos finitos com a topologia discreta e os morfismos são funções contínuas.

Note que $\mathcal{TFinSet}$ é uma subcategoria de \mathcal{HTop} . Seja \mathcal{D} um poset, isto é, uma categoria cujos objetos são elementos de um conjunto parcialmente ordenados e os morfismos são dados pela relação de ordem, \geq , no seguinte sentido: dados $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \neq \emptyset$, se, e somente se, $X \geq Y$. Suponha ainda que \mathcal{D} é direcionado para cima, isto é, dados $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, existe $Z \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ tal que $Z \geq X, Y$. Seja $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{HTop}$ um funtor tal que $F(\mathcal{D})$ está em $\mathcal{TFinSet}$. No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, ministrado pelo professor John MacQuarrie, vimos que o limite de F é um cone, ou seja, é um par $(L, (\varphi_D)_{D \in \mathcal{D}})$, onde $L \in \text{Obj}(\mathcal{HTop})$ e $\varphi_D \in \text{Hom}_{\mathcal{HTop}}(L, F(D))$, que satisfaz uma propriedade universal. O objeto dado pelo limite de F é o que chamamos de **conjunto profinito**. A categoria cujos objetos são conjuntos profinitos e os morfismos são funções contínuas é denotada por ProFinSet .

Seja κ um cardinal limite forte não enumerável, isto é, um cardinal não enumerável tal que, para todo $\lambda < \kappa$, vale que $2^\lambda < \kappa$. Definimos $\kappa\text{-ProFinSet}$ como sendo a categoria cujos objetos são conjuntos profinitos de cardinalidade menor do que κ e os morfismos são funções contínuas.

Denote por \mathbf{AbGrp} a categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos. Um **grupo abeliano κ -condensado** é um feixe

$$T : \kappa\text{-ProFinSet}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$$

Como feixes são funtores, se T e S são grupos abelianos κ -condensados, então um morfismo de T para S é uma transformação natural de T para S . Assim, podemos definir uma categoria onde os objetos são grupos abelianos κ -condensados e os morfismos são transformações naturais. Vamos denotar tal categoria por $\kappa\text{-Cond}(\mathbf{AbGrp})$. Para mais detalhes sobre feixes, ver o seminário sobre feixes e esquemas, ministrado pelo professor André Contiero.

Vamos, agora, definir categoria abeliana. Para isso, precisamos, antes, de alguns conceitos. Seja \mathcal{C} uma categoria. Dizemos que $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ é um **objeto inicial**, se, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, existe um único morfismo em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X)$. Analogamente, dizemos que $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ é um **objeto final**, se, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, existe um único morfismo em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C)$. Uma categoria \mathcal{C} é dita **pré-aditiva**, se,

- (a) para todo $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, existe uma operação binária $+$ sobre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), +)$ é grupo abeliano;
- (b) para todo $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, a composição

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

é bilinear, isto é, $(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$ e $f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'$, para todo $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e todo $g, g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Denotaremos o elemento neutro do grupo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ por 0_{XY} .

Observação 1. Se \mathcal{C} é uma categoria pré-aditiva e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, então $0_{XY} \circ f = (0_{XY} + 0_{XY}) \circ f = 0_{XY} \circ f + 0_{XY} \circ f$. Logo, $0_{XY} \circ f = 0_{ZY}$. Analogamente, se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, então $f \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$. \square

Lema 1. Sejam \mathcal{C} uma categoria pré-aditiva e $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) C é um objeto inicial.

(b) C é um objeto final.

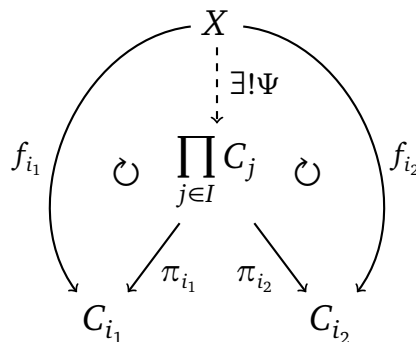
(c) $\text{id}_C = 0_{CC} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$.

Demonstração. Vamos mostrar que (a) implica (c). Assim, suponha que C é um objeto inicial. Então, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$ é o grupo abeliano trivial. Uma vez que $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, então $\text{id}_C = 0_{CC} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$. A demonstração que (b) implica (c) é idêntica a que fizemos. Vamos mostrar, agora, que (c) implica (a). Assuma que $\text{id}_C = 0_{CC} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$. Sejam $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X)$. Como $\text{id}_C = 0_{CC}$, então $f = f \circ 0_{CC}$. Mas pela Observação 1, $f = 0_{CX}$. Portanto, C é um objeto inicial. Analogamente, prova-se que (c) implica (b), o que finaliza a demonstração. \square

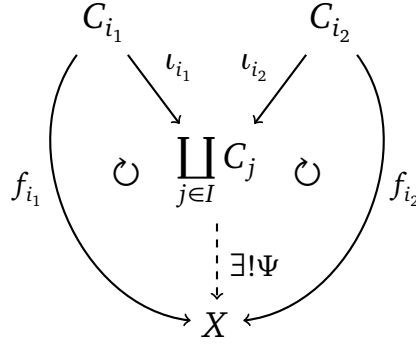
Em uma categoria pré-aditiva, um objeto inicial (ou final) é chamado de **objeto zero** e é denotado por $0_{\mathcal{C}}$.

Relembre, do seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, que dadas duas categorias, \mathcal{D} e \mathcal{C} , onde os morfismos de \mathcal{D} são apenas as identidades, e dado um funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, definimos o *produto* de $(F(D))_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})}$ como sendo o limite de F . Analogamente, define-se o *coproduto*, usando-se o colimite.

Assim, se \mathcal{C} é uma categoria e $(C_i)_{i \in I}$ é uma família de objetos de \mathcal{C} , definindo \mathcal{D} como sendo a categoria onde $\text{Obj}(\mathcal{D}) = \{C_i \mid i \in I\}$ e $\text{Hom}(\mathcal{D}) = \{\text{id}_{C_i} \mid i \in I\}$ e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ o funtor que leva objetos e morfismos neles mesmos, temos que o **produto** de $(C_i)_{i \in I}$ é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, $\prod_{j \in I} C_j$, e a segunda coordenada é uma família de morfismo em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, $(\pi_i : \prod_{j \in I} C_j \rightarrow C_i)_{i \in I}$, tal que, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e toda família $(f_i : X \rightarrow C_i)_{i \in I}$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, existe único morfismo $\Psi : X \rightarrow \prod_{j \in I} C_j$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$ tal que $\pi_i \circ \Psi = f_i$, para todo $i \in I$.



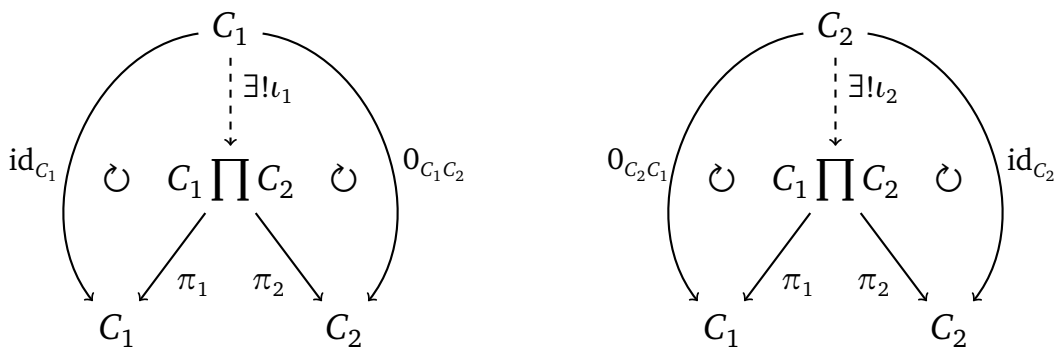
De maneira análoga, o **coproduto** de $(C_i)_{i \in I}$ é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, $\coprod_{j \in I} C_j$, e a segunda coordenada é uma família de morfismo em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, $(\iota_i : C_i \rightarrow \coprod_{j \in I} C_j)_{i \in I}$, tal que, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e toda família $(f_i : C_i \rightarrow X)_{i \in I}$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, existe único morfismo $\Psi : \coprod_{j \in I} C_j \rightarrow X$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$ tal que $\Psi \circ \iota_i = f_i$, para todo $i \in I$.



Proposição 1. Seja \mathcal{C} uma categoria pré-aditiva.

- (a) Se $(\prod_{j \in I} C_j, (\pi_i : \prod_{j \in I} C_j \rightarrow C_i)_{i \in I})$ é o produto de $(C_i)_{i \in I}$, com $|I| < \infty$, então existem $\iota_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i, \prod_{j \in I} C_j)$, para cada $i \in I$, tal que $(\prod_{j \in I} C_j, (\iota_i)_{i \in I})$ é o coproduto de $(C_i)_{i \in I}$.
- (b) Se $(\coprod_{j \in I} C_j, (\iota_i : C_i \rightarrow \coprod_{j \in I} C_j)_{i \in I})$ é o coproduto de $(C_i)_{i \in I}$, com $|I| < \infty$, então existem $\pi_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\prod_{j \in I} C_j, C_i)$, para cada $i \in I$, tal que $(\prod_{j \in I} C_j, (\pi_i)_{i \in I})$ é o produto de $(C_i)_{i \in I}$.

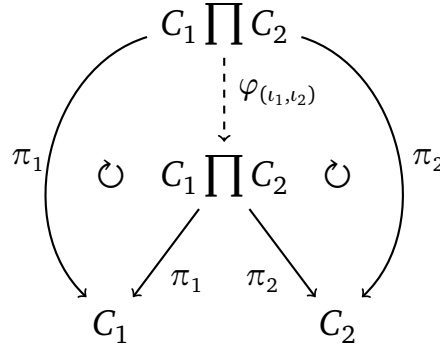
Demonstração. Mostraremos apenas a afirmação (a), pois a (b) é similar. A demonstração é por indução sobre $|I|$. Suponha que $|I| = 2$. Pela definição de produto, tomando o objeto C_1 e os morfismos id_{C_1} e $0_{C_1 C_2}$, temos que existe único $\iota_1 : C_1 \rightarrow C_1 \prod C_2$ tal que $\pi_1 \circ \iota_1 = \text{id}_{C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_1 = 0_{C_1 C_2}$. Novamente, pela definição de produto, tomando, agora, o objeto C_2 e os morfismos id_{C_2} e $0_{C_2 C_1}$, temos que existe único $\iota_2 : C_2 \rightarrow C_1 \prod C_2$ tal que $\pi_1 \circ \iota_2 = 0_{C_2 C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_2 = \text{id}_{C_2}$.



Para qualquer $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $j_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, X)$ e $j_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, X)$, defina $\varphi_{(j_1, j_2)} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1 \amalg C_2, X)$ como sendo $j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2$. Assim, considerando o objeto $C_1 \amalg C_2$ e os morfismos $\iota_1 : C_1 \rightarrow C_1 \amalg C_2$ e $\iota_2 : C_2 \rightarrow C_1 \amalg C_2$, temos que

$$\pi_1 \circ \varphi_{(\iota_1, \iota_2)} = \pi_1 \circ \iota_1 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \iota_2 \circ \pi_2 = \text{id}_{C_1} \circ \pi_1 + 0_{C_1 C_2} \circ \pi_2 = \pi_1.$$

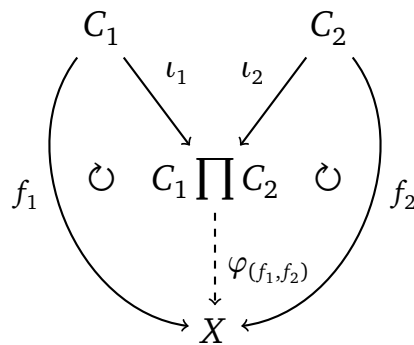
Analogamente, $\pi_2 \circ \varphi_{(\iota_1, \iota_2)} = \pi_2$. Isso significa que o seguinte diagrama comuta:



Como $\text{id}_{C_1 \amalg C_2}$ também comuta esse diagrama, pela unicidade, temos que $\varphi_{(\iota_1, \iota_2)} = \text{id}_{C_1 \amalg C_2}$, ou seja, $\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = \text{id}_{C_1 \amalg C_2}$. A partir dessa observação, vamos mostrar que o coproduto de C_1 e C_2 é o par $(C_1 \amalg C_2, (\iota_1, \iota_2))$. Sejam $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $f_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, X)$ e $f_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, X)$. Considerando $\varphi_{(f_1, f_2)} = f_1 \circ \pi_1 + f_2 \circ \pi_2$, temos que

$$\varphi_{(f_1, f_2)} \circ \iota_1 = f_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1 + f_2 \circ \pi_2 \circ \iota_1 = f_1 \circ \text{id}_{C_1} + f_2 \circ 0_{C_1 C_2} = f_1.$$

De maneira análoga, $\varphi_{(f_1, f_2)} \circ \iota_2 = f_2$. Isso quer dizer que o diagrama abaixo é comutativo.



Suponha que $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1 \amalg C_2, X)$ seja um morfismo que também comuta o dia-

grama acima. Então

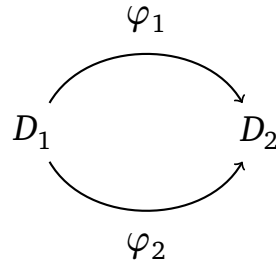
$$\begin{aligned}
\varphi_{(f_1, f_2)} - g &= (\varphi_{(f_1, f_2)} - g) \circ \text{id}_{C_1 \amalg C_2} \\
&= (\varphi_{(f_1, f_2)} - g) \circ \varphi_{(\iota_1, \iota_2)} \\
&= (\varphi_{(f_1, f_2)} - g) \circ (\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2) \\
&= (\varphi_{(f_1, f_2)} \circ \iota_1 - g \circ \iota_1) \circ \pi_1 + (\varphi_{(f_1, f_2)} \circ \iota_2 - g \circ \iota_2) \circ \pi_2 \\
&= (f_1 - f_1) \circ \pi_1 + (f_2 - f_2) \circ \pi_2 \\
&= 0_{C_1 \amalg C_2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_{(f_1, f_2)} = g$. Isso significa que $\varphi_{(f_1, f_2)}$ é o único morfismo que comuta o diagrama acima, ou seja, o par $(C_1 \amalg C_2, (\iota_1, \iota_2))$ é o coproduto de C_1 e C_2 . Para $|I| > 2$, aplica-se indução. \square

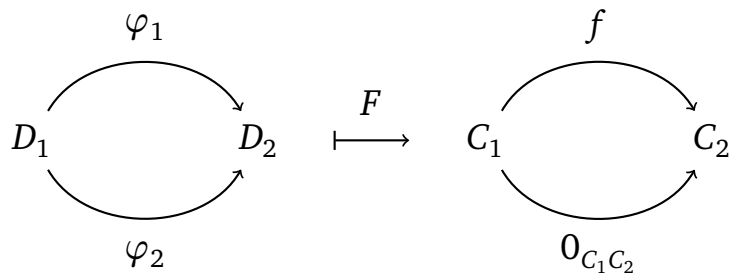
Uma categoria \mathcal{C} é chamada de **aditiva**, se

- (a) \mathcal{C} é pré-aditiva,
- (b) existe um objeto zero em $\text{Obj}(\mathcal{C})$ e
- (c) existe o produto para qualquer família $(C_i)_{i \in I}$ de objetos em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, com $|I| < \infty$.

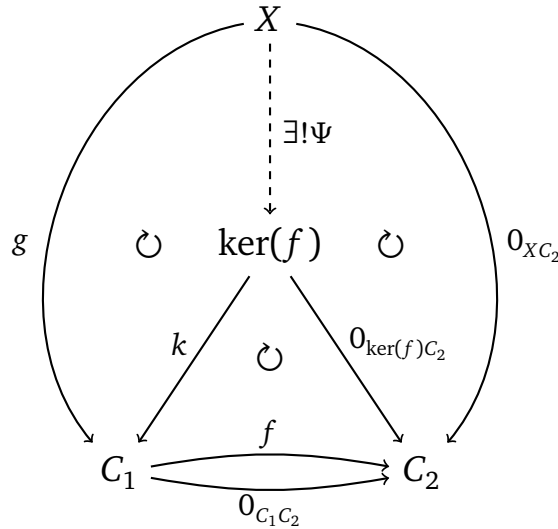
Seja \mathcal{D} a categoria com dois objetos, D_1 e D_2 , e dois morfismos paralelos de um objeto para o outro, φ_1 e φ_2 . Pense em \mathcal{D} como sendo representada pelo diagrama abaixo.



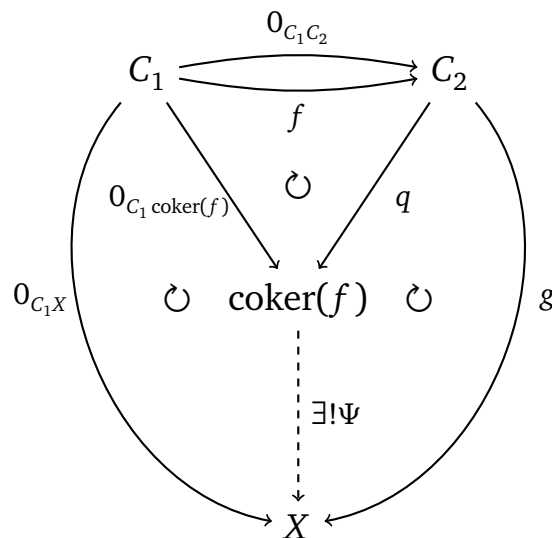
Sejam \mathcal{C} uma categoria pré-aditiva e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ um morfismo. Defina $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ como sendo o funtor tal que $F(D_1) = C_1$, $F(D_2) = C_2$, $F(\varphi_1) = f$ e $F(\varphi_2) = 0_{C_1 C_2}$.



Definimos o **núcleo** de f como sendo o limite de F , ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, $\ker(f)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, $k : \ker(f) \rightarrow C_1$, tal que $f \circ k = 0_{\ker(f)C_2}$ e, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e todo $g : X \rightarrow C_1$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, que satisfazem a propriedade $f \circ g = 0_{XC_2}$, existe único morfismo $\Psi : X \rightarrow \ker(f)$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$ tal que $k \circ \Psi = g$.



Similarmente, o **conúcleo** de f é o colimite de F , ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, $\text{coker}(f)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, $q : C_2 \rightarrow \text{coker}(f)$, tal que $q \circ f = 0_{C_1 \text{coker}(f)}$ e, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e todo $g : C_2 \rightarrow X$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, que satisfazem a propriedade $g \circ f = 0_{C_1X}$, existe único morfismo $\Psi : \text{coker}(f) \rightarrow X$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$ tal que $\Psi \circ q = g$.

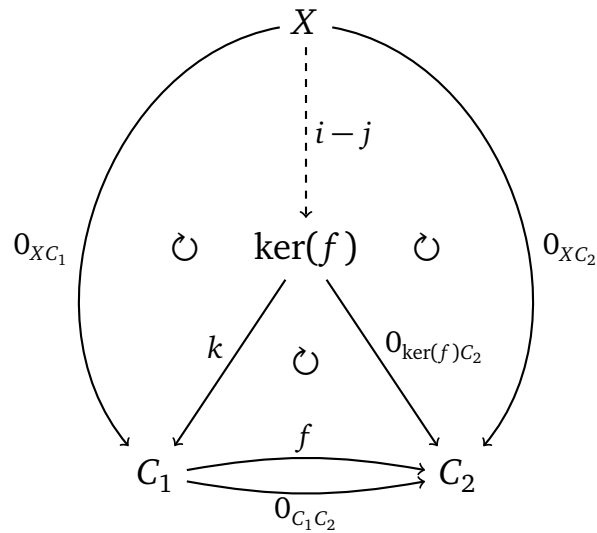


Uma categoria \mathcal{C} é dita **pré-abeliana**, se \mathcal{C} é aditiva e se, para todo $f : X \rightarrow Y$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, existe núcleo e conúcleo de f .

Sejam \mathcal{C} uma categoria e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$. Dizemos que f é **monomorfismo**, se, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e para todo $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C_1)$, temos que $g_1 = g_2$, sempre que $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Dizemos que f é **epimorfismo**, se, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e para todo $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, X)$, temos que $g_1 = g_2$, sempre que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.

Lema 2. Sejam \mathcal{C} uma categoria pré-aditiva, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, $(\ker(f), k : \ker(f) \rightarrow C_1)$ o núcleo de f e $(\text{coker}(f), q : C_2 \rightarrow \text{coker}(f))$ o conúcleo de f . Então k é monomorfismo e q é epimorfismo.

Demonstração. Mostraremos apenas que k é monomorfismo, já que a demonstração que q é epimorfismo é análoga. Sejam $i, j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \ker(f))$ tais que $k \circ i = k \circ j$. Então $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$. Pela definição de núcleo de f , tomando o objeto X e o morfismo 0_{XC_1} , temos que existe único morfismo $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \ker(f))$ tal que $k \circ \psi = 0_{XC_1}$. Uma vez que $k \circ 0_{X \ker(f)} = 0_{XC_1}$, então tal ψ é, exatamente, $0_{X \ker(f)}$. Acontece que $i - j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \ker(f))$ também satisfaz a condição de $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$.



Portanto, pela unicidade, $i - j = 0_{X \ker(f)}$. Logo, $i = j$. □

Proposição 2. Sejam \mathcal{C} uma categoria pré-abeliana e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Sejam também

- | | |
|--|---|
| (a) $(\ker(f), k)$ o núcleo f , | (c) $(\ker(q), k')$ o núcleo q e |
| (b) $(\text{coker}(f), q)$ o conúcleo de f , | (d) $(\text{coker}(k), q')$ o conúcleo de k . |

Então existe único $\bar{f} : \text{coker}(k) \rightarrow \ker(q)$ tal que $f = k' \circ \bar{f} \circ q'$.

$$\begin{array}{ccccc}
\ker(f) & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{q} & \operatorname{coker}(f) \\
& & \downarrow q' & \circlearrowleft & \uparrow k' & & \\
& & \operatorname{coker}(k) & \xrightarrow{\bar{f}} & \ker(q) & &
\end{array}$$

Demonstração. Pela definição de conúcleo de f , temos que $q \circ f = 0_{X \operatorname{coker}(f)}$. Logo, pela definição de núcleo de q , existe único $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \ker(q))$ tal que

$$k' \circ f' = f, \quad (1)$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
& & X & & \\
& \swarrow f & \downarrow f' & \searrow 0_{X \operatorname{coker}(f)} & \\
& \circlearrowleft & \ker(q) & \circlearrowright & \\
& \swarrow k' & \downarrow q & \searrow 0_{\ker(q) \operatorname{coker}(f)} & \\
Y & \xrightarrow{\quad} & \operatorname{coker}(f) & & \\
& \searrow 0_{Y \operatorname{coker}(f)} & & &
\end{array}$$

Uma vez que $(\ker(f), k)$ o núcleo f , então $f \circ k = 0_{\ker(f)Y}$. Daí, podemos concluir que

$$k' \circ f' \circ k \stackrel{(1)}{=} f \circ k = 0_{\ker(f)Y} = k' \circ 0_{\ker(f)\ker(q)}.$$

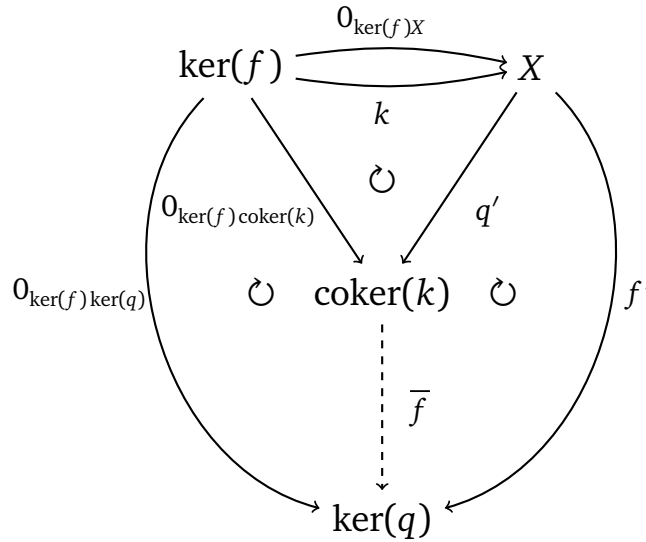
Não perca de vista que temos a seguinte cadeia de morfismo:

$$\begin{array}{ccccc}
\ker(f) & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f'} & \ker(q) & \xrightarrow{k'} & Y \\
& & & \searrow f & & &
\end{array}$$

Logo, como k' é monomorfismo, $f' \circ k = 0_{\ker(f)\ker(q)}$. Daí, pela definição de conúcleo de k , existe único $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{coker}(k), \ker(q))$

$$\bar{f} \circ q' = f', \quad (2)$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.



Com isso, obtemos

$$k' \circ \bar{f} \circ q' \stackrel{(2)}{=} k' \circ f' \stackrel{(1)}{=} f.$$

o que conclui a demonstração. \square

Uma categoria \mathcal{C} é denominada **abeliana**, se \mathcal{C} é pré-abeliana e se, para todo $f : X \rightarrow Y$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, o morfismo \bar{f} , dado pelo Proposição 2, é um isomorfismo.

Exemplo 1. Vamos ver que a categoria \mathbf{AbGrp} é uma categoria abeliana. Sabemos, da Teoria de Grupos, que \mathbf{AbGrp} é pré-aditiva, já que $\text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(G, H)$ é grupo abeliano e a composição é bilinear. O grupo trivial $\{0\}$ é o elemento zero dessa categoria e, no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos que, dados $(G_i)_{i=1}^n$ grupo abelianos, a soma direta $\bigoplus_{i=1}^n G_i$, junto das inclusões $\iota_i : G_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n G_i$, é o coproduto de $(G_i)_{i=1}^n$. Portanto, \mathbf{AbGrp} é aditiva. Seja $f \in \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(G, H)$. Afirmamos que

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = 0\}, \quad \text{junto do morfismo} \quad k : \ker(f) \rightarrow G$$

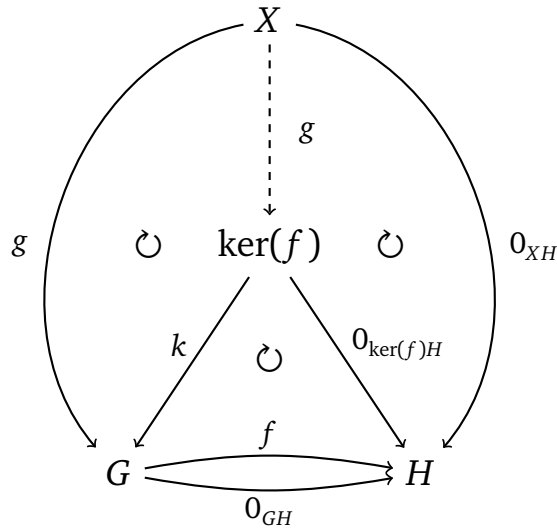
$$g \mapsto g$$

é o núcleo de f , e

$$\text{coker}(f) = H / \text{im}(f), \quad \text{junto do morfismo} \quad q : H \rightarrow \text{coker}(f)$$

$$h \mapsto h + \text{im}(f)$$

onde $\text{im}(f) = \{h \in H \mid \exists g \in G \ f(g) = h\}$, é o conúcleo de f . Vamos mostrar só a afirmação para o núcleo. Note que $f \circ k = 0$, pois $f(g) = 0$, para todo $g \in \ker(f)$. Sejam $X \in \text{Obj}(\mathbf{AbGrp})$ e $g \in \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(X, G)$ tal que $f \circ g = 0$. Isso quer dizer que $f(g(x)) = 0$, para todo $x \in X$, ou seja, $g(x) \in \ker(f)$. Daí, podemos restringir o contradomínio de g e considerá-la em $\text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(X, \ker(f))$. Assim, temos que o seguinte diagrama comuta.



Seja $h \in \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(X, \ker(f))$ tal que $k \circ h = g$. Então, como $g = k \circ g$, temos que $k \circ h = k \circ g$. Uma vez que, por definição, k é injetiva, temos que $h = g$. Portanto, $(\ker(f), k)$ é o núcleo de f . Logo, \mathbf{AbGrp} é pré-abeliana. Finalmente, seja $f \in \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(G, H)$ e sejam

- $(\ker(f), \ker(f) \xrightarrow{k} G)$ o núcleo f ,
- $(\text{coker}(f), H \xrightarrow{q} \text{coker}(f))$ o conúcleo de f ,
- $(\ker(q), \ker(q) \xrightarrow{k'} H)$ o núcleo q e
- $(\text{coker}(k), G \xrightarrow{q'} \text{coker}(k))$ o conúcleo de k .

Note que $\ker(q) = \{h \in H \mid q(h) = 0\} = \{h \in H \mid h + \text{im}(f) = 0\}$. Logo, $\ker(q) \subseteq \text{im}(f)$. Reciprocamente, se $h \in \text{im}(f)$, então $h + \text{im}(f) = 0$, ou seja, $q(h) = 0$. Assim, $\ker(q) = \text{im}(f)$. Agora, veja que $\text{coker}(k) = G / \text{im}(k)$. Mas k é injetiva, logo $\text{im}(k) =$

$\ker(f)$. Daí, $\text{coker}(k) = G/\ker(f)$. Pelo Teorema do Isomorfismo, o homomorfismo de grupos $\bar{f} : G/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f)$, $g + \ker(f) \mapsto f(g)$, é um isomorfismo. Logo,

$$\begin{aligned}\bar{f} : \text{coker}(k) &\rightarrow \ker(q) \\ g + \ker(f) &\mapsto f(g)\end{aligned}$$

é um isomorfismo. Pela definição de núcleo e conúcleo, temos que

$$k'(\bar{f}(q'(g))) = k'(\bar{f}(g + \underbrace{\text{im}(k)}_{=\ker(f)})) = k'(f(g)) = f(g),$$

isto é, $f = k' \circ \bar{f} \circ q'$. Portanto, \mathbf{AbGrp} é abeliana. \square

Observação 2. Seja \mathcal{C} uma categoria e considere a categoria cujos objetos são funtores de \mathcal{C} para \mathbf{AbGrp} e cujos morfismos são transformações naturais, a qual denotaremos por $\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{AbGrp})$. Vamos ver, sem muitos detalhes, que essa categoria é abeliana.

- Sejam $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ funtores e $\eta, \nu : F \rightarrow G$ transformações naturais. Dado $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, definimos $(\eta + \nu)_C := \eta_C + \nu_C$ (note que a soma à direita da igualdade é a soma entre homomorfismos de grupos). Isso faz $\eta + \nu := (\eta_C + \nu_C)_{C \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$ uma transformação natural. Além disso, com tal soma, $\text{Hom}_{\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{AbGrp})}(F, G)$ é um grupo abeliano, já que $\text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(F(C), G(C))$ é um grupo abeliano.

- Sejam $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ funtores e $\eta, \nu : F \rightarrow G$ e $\zeta : H \rightarrow F$ transformações naturais. Dado $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, definimos $((\eta + \nu) \circ \zeta)_C := (\eta_C + \nu_C) \circ \zeta_C$ (note que a composição à direita da igualdade é a composição entre homomorfismos de grupos). Assim, a composição em $\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{AbGrp})$ herda a bilinearidade da composição em \mathbf{AbGrp} .

- Seja $0_{\mathbf{AbGrp}}$ o objeto zero em \mathbf{AbGrp} . Defina $0_{\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{AbGrp})} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$, como sendo o funtor tal que $C \mapsto 0_{\mathbf{AbGrp}}$ e $C_1 \xrightarrow{f} C_2 \mapsto 0_{\mathbf{AbGrp}} \xrightarrow{0_{\mathbf{AbGrp}} 0_{\mathbf{AbGrp}}} 0_{\mathbf{AbGrp}}$. Tal funtor é o objeto zero em $\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{AbGrp})$, porque, dado qualquer funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$, se $\eta : 0_{\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{AbGrp})} \rightarrow F$ é uma transformação natural, então η_C só pode ser o homomorfismo que leva $0_{\mathbf{AbGrp}}$ em $0_{\mathbf{AbGrp}}$, para todo $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

- Sejam $F_1, \dots, F_n : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ funtores. Defina o funtor

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^n F_i : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbf{AbGrp} \\ C &\mapsto \bigoplus_{i=1}^n F_i(C) \\ C_1 \xrightarrow{f} C_2 &\mapsto \bigoplus_{i=1}^n F_i(C_1) \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^n F_i(f)} \bigoplus_{i=1}^n F_i(C_2) \\ (g_i)_{i=1}^n &\mapsto (F_i(f)(g_i))_{i=1}^n. \end{aligned}$$

Para $j = 1, \dots, n$, defina a transformação natural $\eta^j : F_j \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n F_i$, onde $\eta_C^j = \iota_C^j : F_j(C) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n F_i(C)$ a inclusão. Pode-se provar que $\bigoplus_{i=1}^n F_i$, junto das transformações naturais $\eta^j : F_j \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n F_i$, é o coproduto de $(F_i)_{i=1}^n$.

- Seja $\eta : F \rightarrow G$ uma transformação natural. Defina o funtor

$$\begin{aligned} \ker(\eta) : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbf{AbGrp} \\ C &\mapsto \ker(\eta_C) \\ C_1 \xrightarrow{f} C_2 &\mapsto \ker(\eta_{C_1}) \xrightarrow{\ker(\eta)(f)} \ker(\eta_{C_2}) \\ g &\mapsto F(f)(g). \end{aligned}$$

Usando a definição de núcleo de um homomorfismo de grupos e o fato de $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$, pode-se provar que esse funtor está bem definido. Defina a transformação natural $k : \ker(\eta) \rightarrow F$, onde $k_C : \ker(\eta_C) \rightarrow F(C)$, $g \mapsto g$ é a inclusão. Pode-se também provar que $(\ker(\eta), k)$ é o núcleo de η . Similarmente, defina o funtor

$$\begin{aligned} \text{coker}(\eta) : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbf{AbGrp} \\ C &\mapsto \text{coker}(\eta_C) = G(C) / \text{im}(\eta_C) \\ C_1 \xrightarrow{f} C_2 &\mapsto G(C_1) / \text{im}(\eta_{C_1}) \xrightarrow{\text{coker}(\eta)(f)} G(C_2) / \text{im}(\eta_{C_2}) \\ g + \text{im}(\eta_{C_1}) &\mapsto G(f)(g) + \text{im}(\eta_{C_2}). \end{aligned}$$

Novamente, usando que $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$, pode-se provar que esse funtor está bem definido. Definindo, agora, a transformação natural $q : G \rightarrow \text{coker}(\eta)$, onde $q_C : G(C) \rightarrow$

$\text{coker}(\eta_C)$, $g \mapsto g + \text{im}(\eta_C)$, pode-se também provar que $(\text{coker}(\eta), q)$ é o conúcleo de η .

• Dado $\eta : F \rightarrow G$ uma transformação natural, pelo Exemplo 1, temos que $\bar{\eta}_C : \text{coker}(k_C) \rightarrow \ker(q_C)$, $g + \ker(\eta_C) \mapsto \eta_C(g)$ é um isomorfismo e comuta o diagrama da Proposição 2. Isso prova que $\bar{\eta} : \text{coker}(k) \rightarrow \ker(q)$ é isomorfismo e que comuta o mesmo diagrama.

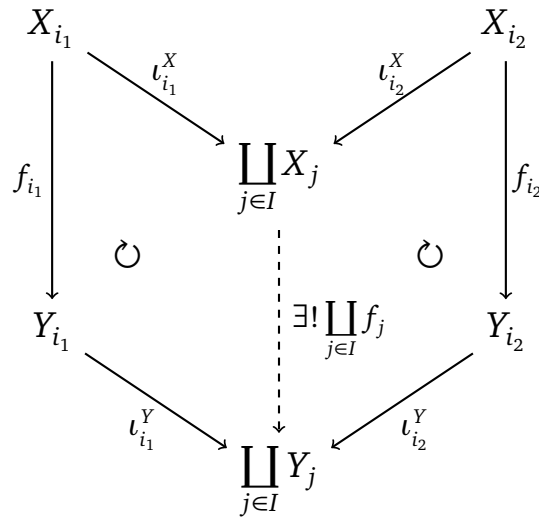
Com isso, temos que $\mathbf{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{AbGrp})$ é uma categoria abeliana. \square

Apresentada a definição de categoria abeliana, estamos quase prontos para enunciarmos o Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze. Falta vermos os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Porém, antes, vamos a mais alguns conceitos.

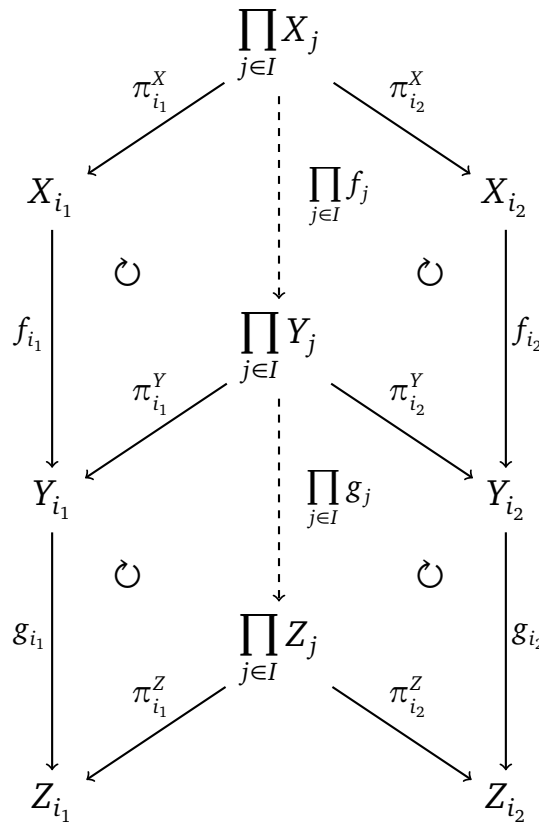
Sejam \mathcal{C} uma categoria onde existem limites e colimites e $(f_i : X_i \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ uma família de morfismos em $\text{Hom}(\mathcal{C})$. Sejam $(\prod_{j \in I} X_j, (\pi_i^X : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i)_{i \in I})$ o produto de $(X_i)_{i \in I}$ e $(\prod_{j \in I} Y_j, (\pi_i^Y : \prod_{j \in I} Y_j \rightarrow Y_i)_{i \in I})$ o produto de $(Y_i)_{i \in I}$. Pela propriedade universal do produto, existe único morfismo em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\prod_{j \in I} X_j, \prod_{j \in I} Y_j)$, o qual denotaremos por $\prod_{j \in I} f_j$, tal que $\pi_i^Y \circ \prod_{j \in I} f_j = f_i \circ \pi_i^X$, para todo $i \in I$, ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \prod_{j \in I} X_j & & \\
 & \swarrow \pi_{i_1}^X & \downarrow \exists! \prod_{j \in I} f_j & \searrow \pi_{i_2}^X & \\
 X_{i_1} & & & & X_{i_2} \\
 \downarrow f_{i_1} & \circlearrowleft & & \circlearrowright & \downarrow f_{i_2} \\
 & & \prod_{j \in I} Y_j & & \\
 \swarrow \pi_{i_1}^Y & & & & \searrow \pi_{i_2}^Y \\
 Y_{i_1} & & & & Y_{i_2}
 \end{array}$$

O morfismo $\prod_{j \in I} f_j$ é dito **produto** de $(f_i)_{i \in I}$. Similarmente, o **coproduto** de $(f_i)_{i \in I}$ é o único morfismo em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{j \in I} X_j, \coprod_{j \in I} Y_j)$, o qual denotaremos por $\coprod_{j \in I} f_j$, que $\coprod_{j \in I} f_j \circ \iota_i^X = \iota_i^Y \circ f_i$, para todo $i \in I$, ou seja, que comuta o diagrama abaixo.



Observação 3. Sejam \mathcal{C} uma categoria onde existem limites e colimites e $(f_i : X_i \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ e $(g_i : Y_i \rightarrow Z_i)_{i \in I}$ famílias de morfismos em $\text{Hom}(\mathcal{C})$. Considere o diagrama abaixo.



Pode-se provar, usando a comutatividade do diagrama e a unicidade do produto de morfismos, que

$$\prod_{j \in I} (g_j \circ f_j) = \prod_{j \in I} g_j \circ \prod_{j \in I} f_j$$

O mesmo raciocínio se aplica para o coproduto de morfismos. □

Seja \mathcal{D} uma categoria de índices (no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, chamamos \mathcal{D} de “categoria combinatória”). Essa categoria é chamada **filtrada**, se

- (a) $\text{Obj}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$,
- (b) para todo $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, existe $Z \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Z) \neq \emptyset \neq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z)$,
- (c) dados $f, g : X \rightarrow Y$, existem $Z \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ e $h : Y \rightarrow Z$ tal que $h \circ f = h \circ g$.

Se \mathcal{C} é uma categoria onde existem limites e colimites e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ é um funtor, onde \mathcal{D} é uma categoria filtrada, o colimite de F é dito **colimite filtrado**.

Sejam $F, G, H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores, com \mathcal{D} sendo uma categoria de índices e \mathcal{C} uma categoria abeliana. Sejam $\eta : F \rightarrow G$ e $\nu : G \rightarrow H$ transformações naturais. Se, para todo $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, a sequência $0 \rightarrow F(D) \xrightarrow{\eta(D)} G(D) \xrightarrow{\nu(D)} H(D) \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta em \mathcal{C} , então dizemos que a sequência $0 \rightarrow F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta na categoria cujos objetos são funtores de \mathcal{D} para \mathcal{C} e cujos morfismos são transformações naturais.

Considere ainda $F, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ como no parágrafo anterior e $\eta : F \rightarrow G$ uma transformação natural qualquer. Sejam $(\text{colim}(F), (\varphi_D^F : F(D) \rightarrow \text{colim}(F))_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})})$ e $(\text{colim}(G), (\varphi_D^G : G(D) \rightarrow \text{colim}(G))_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})})$ colimites de F e G , respectivamente. Se $D_1, D_2 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ e $f : D_1 \rightarrow D_2$ é um morfismo, então, pela propriedade da transformação natural η , temos que $G(f) \circ \eta_{D_1} = \eta_{D_2} \circ F(f)$. Pela propriedade do colimite de G , temos que $\varphi_{D_1}^G = \varphi_{D_2}^G \circ G(f)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 F(D_1) & \xrightarrow{F(f)} & & F(D_2) & \\
 \downarrow \eta_{D_1} & \searrow \varphi_{D_1}^F & & \swarrow \varphi_{D_2}^F & \downarrow \eta_{D_2} \\
 & & \text{colim}(F) & & \\
 & & \vdots \exists! \text{colim}(\eta) & & \\
 G(D_1) & \xrightarrow{G(f)} & & G(D_2) & \\
 \searrow \varphi_{D_1}^G & & & \swarrow \varphi_{D_2}^G & \\
 & & \text{colim}(G) & &
 \end{array}$$

Portanto,

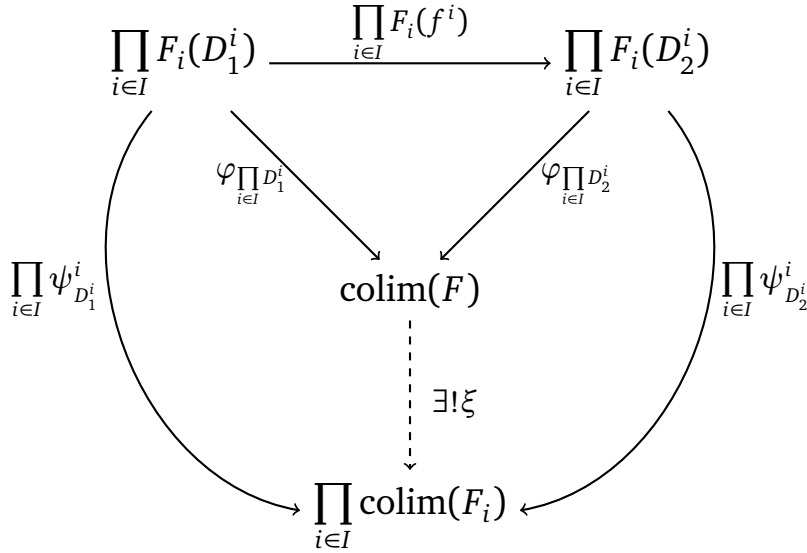
$$\varphi_{D_2}^G \circ \eta_{D_2} \circ F(f) = \varphi_{D_2}^G \circ G(f) \circ \eta_{D_1} = \varphi_{D_1}^G \circ \eta_{D_1},$$

como se vê no diagrama anterior. Logo, pela propriedade do colimite de F , existe único morfismo de $\text{colim}(F)$ para $\text{colim}(G)$, o qual denotaremos por $\text{colim}(\eta)$, tal que $\text{colim}(\eta) \circ \varphi_D^F = \varphi_D^G \circ \eta_D$, para todo $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$.

Definimos o **produto** de $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$, uma família de categorias, denotado por $\prod_{i \in I} \mathcal{D}_i$, como sendo a categoria cujos objetos são $\prod_{i \in I} D^i$, onde $D^i \in \text{Obj}(\mathcal{D}_i)$, e os morfismos são $\prod_{i \in I} f^i$, onde $f^i \in \text{Hom}(\mathcal{D}_i)$. Pode-se provar que se $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ é uma família de categorias filtradas, então $\prod_{i \in I} \mathcal{D}_i$ também é uma categoria filtrada. Sejam $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ uma família de categorias filtradas, \mathcal{C} uma categoria onde existem limites e colimites, e $F_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}$ funtores indexados por $i \in I$. Seja $(\text{colim}(F_i), (\psi_{D^i}^i : F_i(D^i) \rightarrow \text{colim}(F_i))_{D^i \in \text{Obj}(\mathcal{D}_i)})$ o colimite de F_i . Se $f^i : D_1^i \rightarrow D_2^i$ é um morfismo em $\text{Hom}(\mathcal{D}_i)$, então, pela propriedade do colimite de F_i , $\psi_{D_2^i}^i = \psi_{D_1^i}^i \circ F_i(f^i)$. Defina o funtor $F : \prod_{i \in I} \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}$, onde $F(\prod_{i \in I} D^i) = \prod_{i \in I} F_i(D^i)$ e $F(\prod_{i \in I} f^i) = \prod_{i \in I} F_i(f^i)$. Seja $(\text{colim}(F), (\varphi_{\prod_{i \in I} D^i} : F(\prod_{i \in I} D^i) \rightarrow \text{colim}(F))_{\prod_{i \in I} D^i \in \text{Obj}(\prod_{i \in I} \mathcal{D}_i)})$ o colimite de F . Se $\prod_{i \in I} f^i : \prod_{i \in I} D_1^i \rightarrow \prod_{i \in I} D_2^i$ é um morfismo em $\text{Hom}(\prod_{i \in I} \mathcal{D}_i)$, usando a Observação 3, temos que

$$\prod_{i \in I} \psi_{D_2^i}^i \circ \prod_{i \in I} F_i(f^i) = \prod_{i \in I} (\psi_{D_2^i}^i \circ F_i(f^i)) = \prod_{i \in I} \psi_{D_1^i}^i$$

o que quer dizer que o diagrama abaixo é comutativo.



Logo, pela propriedade do colimite de F , existe único morfismo $\xi : \text{colim}(F) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{colim}(F_i)$ tal que $\xi \circ \varphi_{\prod_{i \in I} D^i} = \prod_{i \in I} \psi_{D^i}^i$, para todo $\prod_{i \in I} D^i \in \text{Obj}(\prod_{i \in I} \mathcal{D}_i)$.

Sejam \mathcal{C} uma categoria onde existem limites e colimites, $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e considere o

funtor

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \quad \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\
Y &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\
f : Y_1 \rightarrow Y_2 &\mapsto f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_2) \\
g &\mapsto f \circ g
\end{aligned}$$

Seja $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor, com \mathcal{D} sendo uma categoria filtrada, e considere a composição $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(\cdot))$. Sendo $(\text{colim}(F), (\psi_D : F(D) \rightarrow \text{colim}(F))_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})})$ o colimite de F , então, para todo $f : D_1 \rightarrow D_2$ em $\text{Hom}(\mathcal{D})$, temos que $\psi_{D_1} = \psi_{D_2} \circ F(f)$. Assim, note que, se $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(D_1))$, então

$$(\psi_{D_2}^* \circ F(f)^*)(g) = \psi_{D_2}^*(F(f) \circ g) = \psi_{D_2} \circ F(f) \circ g = \psi_{D_1} \circ g = \psi_{D_1}^*(g),$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(D_1)) & \xrightarrow{F(f)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(D_2)) \\
\downarrow \varphi_{D_1} & & \downarrow \varphi_{D_2} \\
& \text{colim}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(\cdot))) & \\
& \downarrow \exists! \Psi & \\
& \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim}(F)) &
\end{array}$$

$\psi_{D_1}^*$ (curved arrow from $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(D_1))$ to $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim}(F))$)
 $\psi_{D_2}^*$ (curved arrow from $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(D_2))$ to $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim}(F))$)

Logo, existe único morfismo $\Psi : \text{colim}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(\cdot))) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim}(F))$, pela propriedade do colimite de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(\cdot))$, tal que $\Psi \circ \varphi_D = \psi_D^*$, para todo $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$. Se o morfismo Ψ for um isomorfismo, então dizemos que X é **compacto**.

Sejam \mathcal{C} uma categoria e $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Se $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ preserva epimorfismos, então dizemos que X é **projetivo**. Se $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ é fiel, então dizemos que X é um **gerador** de \mathcal{C} .

Agora, vamos ver os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Os axiomas são:

(AB3) existe o coproduto para qualquer família $(C_i)_{i \in I}$ de objetos em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, com I um conjunto de índices qualquer,

(AB4) \mathcal{C} satisfaz (AB3) e coprodutos são exatos, isto é, se I é um conjunto de índices e $0 \rightarrow X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$ e $X_i, Y_i, Z_i \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, então a sequência

$$0 \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\coprod_{i \in I} f_i} \coprod_{i \in I} Y_i \xrightarrow{\coprod_{i \in I} g_i} \coprod_{i \in I} Z_i \rightarrow 0$$

também é uma sequência exata curta,

(AB5) \mathcal{C} satisfaz (AB3) e colimites filtrados são exatos, isto é, se $0 \rightarrow F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta, com $F, G, H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores, onde \mathcal{D} é uma categoria filtrada, então a sequência

$$0 \rightarrow \text{colim}(F) \xrightarrow{\text{colim}(\eta)} \text{colim}(G) \xrightarrow{\text{colim}(\nu)} \text{colim}(H) \rightarrow 0$$

também é uma sequência exata curta,

(AB6) \mathcal{C} satisfaz (AB3) e o morfismo $\xi : \text{colim}(F) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{colim}(F_i)$ é um isomorfismo, onde

- $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ é uma família de categorias filtradas,
- $F_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}$ funtores indexados por $i \in I$,
- $F : \prod_{i \in I} \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{C}$ é um funtor, onde $F(\prod_{i \in I} D^i) = \prod_{i \in I} F_i(D^i)$ e $F(\prod_{i \in I} f^i) = \prod_{i \in I} F_i(f^i)$

conforme apresentado em algum parágrafo anterior,

(AB3*) existe o produto para qualquer família $(C_i)_{i \in I}$ de objetos em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, com I um conjunto de índices qualquer,

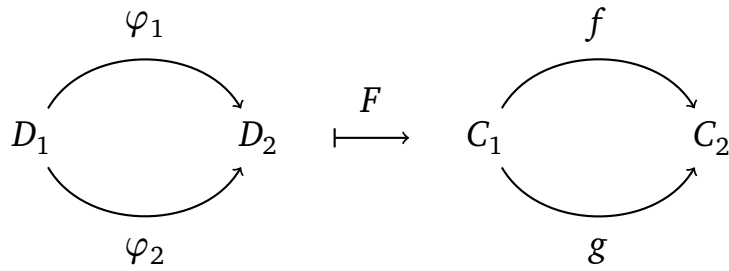
(AB4*) \mathcal{C} satisfaz (AB3*) e produtos são exatos, isto é, se I é um conjunto de índices e $0 \rightarrow X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$ e $X_i, Y_i, Z_i \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, então a sequência

$$0 \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\prod_{i \in I} f_i} \prod_{i \in I} Y_i \xrightarrow{\prod_{i \in I} g_i} \prod_{i \in I} Z_i \rightarrow 0$$

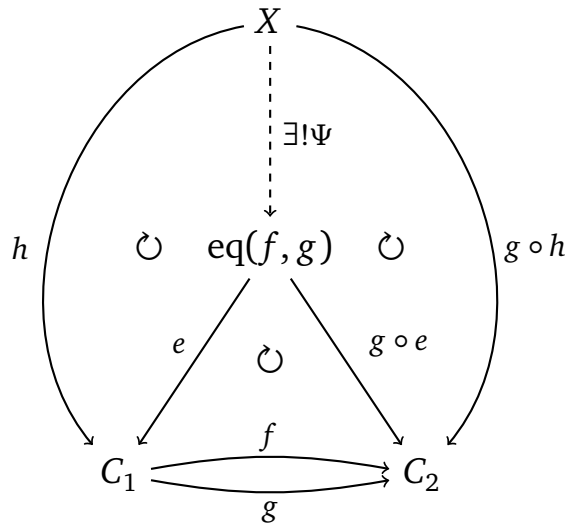
também é uma sequência exata curta.

Observação 4. Analogamente a definição de núcleo e conúcleo de um morfismo, considere \mathcal{D} a categoria com dois objetos, D_1 e D_2 , e dois morfismos paralelos de um objeto para o

outro, φ_1 e φ_2 , e sejam \mathcal{C} uma categoria abeliana e $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ morfismos. Defina $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ como sendo o funtor tal que $F(D_1) = C_1$, $F(D_2) = C_2$, $F(\varphi_1) = f$ e $F(\varphi_2) = g$.



Definimos o **equalizador** de f e g como sendo o limite de F , ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, $\text{eq}(f, g)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, $e : \text{eq}(f, g) \rightarrow C_1$, tal que $f \circ e = g \circ e$ e, para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e todo $h : X \rightarrow C_1$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$, que satisfazem a propriedade $f \circ h = g \circ h$, existe único morfismo $\Psi : X \rightarrow \text{eq}(f, g)$ em $\text{Hom}(\mathcal{C})$ tal que $e \circ \Psi = h$.



Similarmente, definimos o **coequalizador** de f e g como sendo o colimite de F . Uma vez que \mathcal{C} é uma categoria abeliana, temos que existem núcleo e conúcleo, para todo morfismo. Assim, pode-se mostrar que $(\ker(f - g), k : \ker(f - g) \rightarrow C_1)$ é o equalizador de f e g e que $(\text{coker}(f - g), q : C_2 \rightarrow \text{coker}(f - g))$ é o coequalizador de f e g .

No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos um teorema que diz: “se \mathcal{C} é uma categoria que possui (co)produtos arbitrários e (co)equalizadores, então todo funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ possui (co)limite”. Logo, os axiomas (AB3) e (AB3*) são equivalentes a dizer, respectivamente, que todo colimite existe e que todo limite existe. \square

Exemplo 2. Apresentaremos, sem muitos detalhes, as ideais que justificam que a categoria $\mathcal{A}bGrp$ satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*).

(AB3) Sejam $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos abelianos. Então $(\bigoplus_{i \in I} G_i, (\iota_i : G_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} G_i)_{i \in I})$ é o coproduto de $(G_i)_{i \in I}$, onde $\bigoplus_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \text{ e } g_i \neq 0 \text{ somente para uma quantidade finita de índices}\}$. Para ver isso, basta notar que, dados $f_i : G_i \rightarrow X$ homomorfismos de grupos indexados por $i \in I$, temos que $\psi : \bigoplus_{i \in I} G_i \rightarrow X, (g_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i(g_i)$ é o único homomorfismo tal que $f_i = \psi \circ \iota_i$.

(AB4) Sejam $(G_i)_{i \in I}, (H_i)_{i \in I}$ e $(K_i)_{i \in I}$ famílias de grupos abelianos e $(f_i : G_i \rightarrow H_i)_{i \in I}$ e $(r_i : H_i \rightarrow K_i)_{i \in I}$ famílias de homomorfismos de grupos tais que $0 \rightarrow G_i \xrightarrow{f_i} H_i \xrightarrow{r_i} K_i \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$. Pode-se provar que o coproduto de $(f_i)_{i \in I}$ é o homomorfismo $\bigoplus_{i \in I} f_i : \bigoplus_{i \in I} G_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_i, (g_i)_{i \in I} \mapsto (f_i(g_i))_{i \in I}$. O mesmo vale para o coproduto de $(r_i)_{i \in I}$. Assim, usando que f_i é injetiva, r_i é sobrejetiva e $\text{im}(f_i) = \ker(r_i)$, para todo $i \in I$, pode-se provar que

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in I} G_i \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} f_i} \bigoplus_{i \in I} H_i \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} r_i} \bigoplus_{i \in I} K_i \rightarrow 0$$

também é uma sequência exata curta.

(AB5) Sejam \mathcal{D} uma categoria filtrada e $F, G, H : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ funtores tais que $0 \rightarrow F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta. Seja $\bigsqcup_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})} F(D)$ a união disjunta de todos os grupos $F(D)$, indexados por $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, isto é,

$$\bigsqcup_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})} F(D) = \bigcup_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})} \underbrace{\{(x, D) \mid x \in F(D)\}}_{x_D} = \bigcup_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})} \{x_D \in F(D)\}.$$

Defina a relação \sim em $\bigsqcup_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})} F(D)$ da seguinte maneira:

$$x_{D_1} \sim x_{D_2} \iff \exists D \in \text{Obj}(\mathcal{D}) \exists d_1 : D_1 \rightarrow D \exists d_2 : D_2 \rightarrow D \quad F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2})$$

Pode-se provar que essa relação é uma relação de equivalência. Assim, podemos considerar o conjunto das classes de equivalência, $(\bigsqcup_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})} F(D)) / \sim = \{[x_D] \mid x_D \in F(D)\} =: L_F$. Sejam $[x_{D_1}]$ e $[x_{D_2}]$ duas classes de equivalência e $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ tal que existe $d_1 : D_1 \rightarrow D$ e $d_2 : D_2 \rightarrow D$ (lembre-se de que \mathcal{D} é uma categoria filtrada). Definimos $[x_{D_1}] + [x_{D_2}] := [F(d_1)(x_{D_1}) + F(d_2)(x_{D_2})]$. Pode-se mostrar essa operação é bem definida e que faz o con-

junto L_F ser um grupo abeliano. Também pode-se provar que o colimite de F é o par $(L_F, (s_D : F(D) \rightarrow L_F)_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})})$, onde $s_D(x_D) = [x_D]$ (para mais detalhes ver [2], Proposição 2.13.3, e [6], seção 10.8). O mesmo se aplica aos funtores G e H .

Pode-se provar que o colimite de η é o morfismo $\text{colim}(\eta) : L_F \rightarrow L_G, [x_D] \mapsto [\eta_D(x_D)]$. Vamos ver que ela está bem definida. Suponha que $[x_{D_1}] = [x_{D_2}]$. Então existem $d_1 : D_1 \rightarrow D$ e $d_2 : D_2 \rightarrow D$ tais que $F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2})$. Como η é uma transformação natural, então

$$G(d_1)(\eta_{D_1}(x_{D_1})) = \eta_D(F(d_1)(x_{D_1})) = \eta_D(F(d_2)(x_{D_2})) = G(d_2)(\eta_{D_2}(x_{D_2})),$$

como se vê no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & x_{D_1} & & x_{D_2} & \\ & \cap & & \cap & \\ F(D_1) & \xrightarrow{F(d_1)} & F(D) & \xleftarrow{F(d_2)} & F(D_2) \\ \eta_{D_1} \downarrow & \circlearrowleft & \eta_D \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \eta_{D_2} \\ G(D_1) & \xrightarrow{G(d_1)} & G(D) & \xleftarrow{G(d_1)} & G(D_2) \end{array}$$

Logo, $[\eta_{D_1}(x_{D_1})] = [\eta_{D_2}(x_{D_2})]$. Da mesma forma define-se o colimite de ν .

Finalmente, prova-se que a sequência $0 \rightarrow L_F \xrightarrow{\text{colim}(\eta)} L_F \xrightarrow{\text{colim}(\nu)} L_H \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta.

(AB6) Esse axioma segue de um resultado que diz que na categoria \mathbf{AbGrp} limites finitos comutam com colimites filtrados. Veja, por exemplo, [2], Corolário 2.13.6.

(AB3*) Analogamente ao que foi feito em (AB3), sejam $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos abelianos. Então $(\prod_{i \in I} G_i, (\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_i)_{i \in I})$ é o produto de $(G_i)_{i \in I}$, onde $\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i\}$. Para ver isso, basta notar que, dados $f_i : X \rightarrow G_i$ homomorfismos de grupos indexados por $i \in I$, temos que $\psi : X \rightarrow \prod_{i \in I} G_i, x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$ é o único homomorfismo tal que $f_i = \pi_i \circ \psi$.

(AB4*) Aplica-se, nesse axioma, o mesmo raciocínio usado em (AB4), onde o produto de homomorfismos é definido igualmente ao coproduto. \square

Finalmente, vamos enunciar e demonstrar o Teorema 2.2.

Teorema 1 (Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze). A categoria $\kappa\text{-Cond}(\mathbf{AbGrp})$ é uma categoria abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Além disso, tal categoria é gerada por objetos projetivos compactos.

Demonstração.

☐

Referências

- [1] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWROŃSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press, 2006. Apêndice A.
- [2] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra I*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] nLab. *Separator*. Website.
- [4] ROCH, S. *A Brief Introduction to Abelian Categories*. Notas de aula. Website.
- [5] SCHOLZE, P. *Lectures on Condensed Mathematics*. Notas de aula. Website.
- [6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. Seções 4.19, 4.21, 10.8, 12.3, 12.5 e 19.10. Website.
- [7] Wikipedia. *Abelian Category*. Website.
- [8] Wikipedia. *Compact Object*. Website.
- [9] Wikipedia. *Projective Object*. Website.