Compactificação de Stone-$\check{C}$ech

Lucas H. R. de Souza

October 13, 2022

1 Compactificações

Definição 1.1. Seja X um espaço topológico Hausdorff. Uma compactificação de X é um espaço Hausdorff compact $\bar{X}$ junto com um mergulho $f : X \to \bar{X}$ tal que $f(X)$ é denso em $\bar{X}$.

Exemplos.

1. Seja X um conjunto limitado em $\mathbb{R}^n$. Então a inclusão de X em seu fecho é uma compactificação de X.

2. Seja $X = (0, 1)$. O mapa $f : (0, 1) \to S^1$ dado por $f(x) = e^{2\pi ix}$ é uma compactificação de $(0, 1)$. Note que a inclusão de $(0, 1)$ em $[0, 1]$ é outra compactificação de $(0, 1)$.

Definição 1.2. Sejam X um espaço Hausdorff e $f : X \to \bar{X}$, $f' : X \to \bar{X}'$ compactificações de X. As duas compactificações são equivalentes se existe $g : \bar{X} \to \bar{X}'$ homeomorfismo tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \bar{X} \arrow[d, "g"] \\ & \bar{X}' \end{tikzcd}$$

Proposição 1.3. *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto e não compacto. Então existe, a menos de equivalência, uma única compactificação $\bar{X}$ de X tal que $\#\bar{X} - X = 1$.*

Proof. Consideremos $\bar{X} = X\dot{\cup}\{\infty\}$ e $\iota : X \to X\dot{\cup}\{\infty\}$ o mapa de inclusão. Declaramos U um aberto de $X\dot{\cup}\{\infty\}$ se U é um aberto de X ou $\infty \in U$ e $X - U$ é compacto. Com isso temos uma topologia para $X\dot{\cup}\{\infty\}$.

Se U é aberto, temos que $\iota^{-1}(U) = U$ se $\infty \notin U$ e $\iota^{-1}(U) = U - \{\infty\}$ se $\infty \in U$, e ambos são abertos em X. Portanto ι é contínua. Como todo aberto de X é aberto em $X\dot{\cup}\{\infty\}$, segue que ι é aberto. Como ι é injetivo e aberto, segue que é um mergulho. Seja U uma vizinhança de ∞. Temos que $U \neq \{\infty\}$, já que X não é compacto. Portanto $U \cap X \neq \emptyset$, o que implica que $\infty \in Cl_{X\dot{\cup}\{\infty\}}X$ (ou seja, X é denso em $X\dot{\cup}\{\infty\}$).

Sejam $x, y \in X\dot{\cup}\{\infty\}$ pontos distintos. Se $y = \infty$, então tome U aberto que contenha x e tal que $Cl_X(U)$ é compacto (existe pois X é localmente compacto). Portanto U e $X\dot{\cup}\{\infty\} - Cl_X(U)$ são abertos que separam x e ∞. Suponhamos $x, y \in X$. Como X é Hausdorff, existem U e V abertos tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Mas U e V também são abertos em $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Portanto $X\dot{\cup}\{\infty\}$ é Hausdorff.

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ uma cobertura aberta de $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Tome $\alpha_0 \in \Gamma$ tal que $\infty \in U_{\alpha_0}$. Temos que $X - U_{\alpha_0}$ é compacto e $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ cobre $X - U_{\alpha_0}$. Portanto existe subcobertura finita $\{U_1, ..., U_n\}$ de $X - U_{\alpha_0}$. Então $\{U_{\alpha_0}, U_1, ..., U_n\}$ é uma subcobertura finita de $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Portanto $X\dot{\cup}\{\infty\}$ é compacto.

Portanto $\iota : X \to X\dot{\cup}\{\infty\}$ é uma compactificação de X que satisfaz $\#(X\dot{\cup}\{\infty\}) - X = 1$.

Seja $f : X \to \bar{X}$ compactificação de X tal que $\#\bar{X} - f(X) = 1$. Tome $g : \bar{X} \to X\dot{\cup}\{\infty\}$ definido por $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$ e $g(\bar{X} - f(X)) = \infty$. É imediato que g é uma bijeção que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & \bar{X} \arrow[d, "g"] \\ & X\dot{\cup}\{\infty\} \end{tikzcd}$$

Observe que $f(X)$ é aberto em $\bar{X}$, pois $\bar{X} - X$ é um único ponto (e portanto fechado, pois $\bar{X}$ é Hausdorff). Seja U aberto em $X\dot{\cup}\{\infty\}$. Se $\infty \notin U$, então $g^{-1}(U) = f(U)$, que é aberto em $\bar{X}$. Suponha $\infty \in U$. Então $K = X\dot{\cup}\{\infty\} - U$ é compacto. Temos que $g^{-1}(K) = f(K)$ é compacto, o que implica que é fechado. Portanto $g^{-1}(U) = \bar{X} - f(K)$ é aberto. Logo g é contínua (e portanto um homeomorfismo, pois $\bar{X}$ é compacto e $X\dot{\cup}\{\infty\}$ é Hausdorff). Temos então a unicidade da compactificação. $\square$

Observação. Tal compactificação é chamada de compactificação de um ponto de X ou compactificação de Alexandroff de X.

Exemplo. A projeção estereográfica nos dá uma compactificação de um ponto de $\mathbb{R}^n$. A unicidade da compactificação de um ponto mostra que a única compactificação de um ponto de $\mathbb{R}^n$ deve ser homeomorfa à esfera de dimensão n.

Exemplos. Outros exemplos de compactificações que aparecem na natureza:

1. Se X é Hausdorff, localmente compacto, conexo e localmente conexo, então a compactificação de Freudenthal é a maior compactificação de X cuja fronteira é totalmente desconexa.

2. Se X é um espaço métrico CAT(0), o conjunto de raios geodésicos determina a fronteira de uma compactificação para X.

3. Se X é um grupo finitamente gerado, com a topologia discreta, então temos compactificações com as seguintes fronteiras: hiperbólica (se o grupo for hiperbólico), fronteira de Bowditch (se o grupo for relativamente hiperbólico), fronteira de Floyd, fronteira de Martin (se for fazer passeios aleatórios no grupo), $E\mathcal{Z}$-fronteira (se for usar ferramentas de teoria de homotopia) e muitas outras. Tais fronteiras dão informações importantes a respeito do grupo.

2 Compactificação de Stone-$\check{C}$ech

2.1 Definição e propriedades

Definição 2.1. Seja X um espaço Hausdorff. A compactificação de Stone-$\check{C}$ech de X é um mergulho $b : X \to \beta X$ tal que βX é um espaço Hausdorff compacto e para toda aplicação contínua $f : X \to Y$, com Y Hausdorff compacto, existe uma única aplicação contínua $\tilde{f} : \beta X \to Y$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Proposição 2.2. *A compactificação de Stone-$\check{C}$ech de X, se existir, é única, a menos de equivalência.*

Proof. Suponha que existe outra compactificação de Stone-$\check{C}$ech $b' : X \to \beta X'$. Pelas propriedades universais de b e b', existem aplicações contínuas $\tilde{b}$ e $\tilde{b}'$ que comutam os diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "b'"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{b}'"] \\ & \beta X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b'"] \arrow[dr, "b"'] & \beta X' \arrow[d, "\tilde{b}"] \\ & \beta X \end{tikzcd}$$

Temos então que os mapas $id_{\beta X}$ e $\tilde{b}' \circ \tilde{b}$ comutam os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "b"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{b}\circ\tilde{b}'"] \\ & \beta X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "b"'] & \beta X \arrow[d, "id_{\beta X}"] \\ & \beta X \end{tikzcd}$$

Pela unicidade do mapa que comuta tal diagrama, temos que $\tilde{b} \circ \tilde{b}' = id_{\beta X}$. Analogamente, $\tilde{b}' \circ \tilde{b} = id_{\beta X'}$. Portanto as duas compactificações são equivalentes. $\square$

Proposição 2.3. *A compactificação de Stone-Čech é de fato uma compactificação.*

Proof. Basta mostrar que $b(X)$ é denso em βX. Sejam $Z = Cl_{\beta X}(b(X))$ e $b_1 : X \to Z$, $b_2 : b(X) \to \beta X$ o mapa dado pela correstrição de b e o mapa de inclusão, respectivamente. Temos que $b = b_2 \circ b_1$.

Sejam Y um espaço Hausdorff compacto e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Pela propriedade universal de βX, existe aplicação contínua $\tilde{f}$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b_1"] \arrow[drr, "f"'] & Z \arrow[r, "b_2"] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Portanto b_1 é um mergulho de X em um espaço Hausdorff compacto Z e tal que para toda aplicação contínua f para um espaço Hausdorff compacto Y, existe o mapa $\tilde{f} \circ b_2$ que comuta o diagrama acima. A unicidade segue do fato que para todo elemento de $b_1(X)$, $\tilde{f} \circ b_2(x) = f \circ b_1^{-1}(x)$ e $b_1(X)$ é denso em Z. Portanto $b_1 : X \to Z$ é uma compactificação de Stone-Čech de X.

Um argumento análogo ao da proposição anterior mostra que b_2 precisa ser uma bijeção. Portanto $Cl_{\beta X}(b(X)) = \beta X$, ou seja, $b(X)$ é denso em βX. $\square$

Proposição 2.4. *Seja X espaço Hausdorff tal que exista a compactificação de Stone-Čech. Se $f : X \to \bar{X}$ é outra compactificação de X, então existe uma única aplicação contínua $g : \beta X \to \bar{X}$ que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \bar{X} \end{tikzcd}$$

Proof. Caso particular da propriedade universal de βX. $\square$

Ou seja, βX é a maior compactificação de X, no sentido de que todas as outras compactificações são quocientes da compactificação de Stone-$\check{C}$ech.

Proposição 2.5. *Se X é desconexo, então βX é desconexo.*

Proof. Seja X a união disjunta de dois abertos U e V não vazios. Temos que o mapa $f : X \to 2$, com $2 = \{0, 1\}$ com a topologia discreta, tal que $f(U) = 0$ e $f(V) = 1$, é contínuo. O mapa f induz um mapa contínuo $\tilde{f} : \beta X \to 2$ tal que $f = \tilde{f} \circ \beta$. Então $\tilde{f}^{-1}(0)$ e $\tilde{f}^{-1}(1)$ separam βX. $\square$

2.2 Construção

Definição 2.6. Um espaço topológico X é dito completamente regular, ou $T_{3,5}$, se é Hausdorff e para todo $x \in X$ e todo fechado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$, tal que $f(x) = 0$ e $f(F) = 1$.

Teorema 2.7. *A compactificação de Stone-$\check{C}$ech de X existe se e somente se X é completamente regular.*

Observação. De fato, para um espaço Hausdorff possuir alguma compactificação, ele precisa ser completamente regular. Suponha que X possui uma compactificação $f : X \to \bar{X}$. Sejam F um fechado de X e $x \in X - F$. Temos que $f(F)$ é um fechado de $f(X)$, o que implica que $f(F) = G \cap f(X)$, para algum G fechado de $\bar{X}$. Pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $g : \bar{X} \to [0, 1]$, tal que $g(f(x)) = 0$ e $g(G) = 1$. Portanto $g \circ f$ separa F e x.

Vamos construir a compactificação de Stone-$\check{C}$ech para o caso de X discreto (e infinito):

Definição 2.8. Um filtro $\mathcal{F}$ em X é um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que satisfaz:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Um ultrafiltro é um filtro maximal.

Exemplo. Se $A \subseteq X$, então $\mathcal{F}_A = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ é um filtro. Se $A = \{x\}$, então $\mathcal{F}_x$ (omitimos as chaves para não carregar na notação) é um ultrafiltro. Tais ultrafiltros são chamados de ultrafiltros principais.

Todo filtro está contido em algum ultrafiltro. Tal afirmação é mais fraca que o Axioma da Escolha.

Proposição 2.9. *Um filtro $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro se e somente se para todo $U \subseteq X$, $U \in \mathcal{F}$ ou $X - U \in \mathcal{F}$.*

Observação. Note que U e $X - U$ não podem pertencer simultaneamente a um filtro $\mathcal{F}$.

Considere $Ult(X)$ o conjunto de ultrafiltros de X. Se $U \subseteq X$, definimos $U^* = \{\mathcal{F} \in Ult(X) : U \in \mathcal{F}\}$. A topologia de $Ult(X)$ será a topologia gerada pelos conjuntos da forma U^*, com $U \subseteq X$.

Proposição 2.10. *Para todo $U \subseteq X$, $(X - U)^* = Ult(X) - U^*$.*

Proof. Temos que $Ult(X) - U^* = \{\mathcal{F} \in Ult(X) : U \notin \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F} \in Ult(X) : X - U \in \mathcal{F}\} = (X - U)^*$. □

Proposição 2.11. *Para todo $U \subseteq X$, U^* é aberto e fechado.*

Proof. Pela definição da topologia de $Ult(X)$, U^* é aberto e, pela proposição anterior, seu complementar também é aberto. □

Proposição 2.12. *$Ult(X)$ é compacto.*

Proposição 2.13. *$Ult(X)$ é Hausdorff e totalmente desconexo.*

Considere a aplicação $\psi : X \to Ult(X))$ dada por $\psi(x) = \mathcal{F}_x$. O mapa ψ é o nosso candidato à compactificação de Stone-Čech de X.

Proposição 2.14. *ψ é um mergulho.*

Proof. Como X é discreto, ψ é contínua.

Temos que $\{x\}^* = \{\mathcal{F}_x\}$, o que implica que $\{\mathcal{F}_x\}$ é aberto. Portanto ψ é aberta, o que implica que é um mergulho. □

Proposição 2.15. *$\psi(X)$ é denso em $Ult(X)$.*

Proof. Seja $U \subseteq X$ não vazio. Tome $x \in U$. Temos que $U \in \mathcal{F}_x$, o que implica que $\mathcal{F}_x \in U^*$. Portanto $\psi(X)$ é denso em $Ult(X)$. □

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, em que Y é um espaço Hausdorff compacto. Definimos $\tilde{f} : Ult(X) \to Y$ como $\tilde{f}(\mathcal{F}) \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} Cl_Y(f(A))$.

Proposição 2.16. *$\# \bigcap_{A \in \mathcal{F}} Cl_Y(f(A)) = 1$.*

Portanto $\tilde{f}$ está bem definida.

Proposição 2.17. *O diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & Ult(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Proposição 2.18. *$\tilde{f}$ é contínua.*

Como $\psi(X)$ é denso em $Ult(X)$, segue que $\tilde{f}$ é a única aplicação contínua que comuta o diagrama acima.

Portanto $\psi : X \to Ult(X)$ é a compactificação de Stone-$\check{C}$ech de X.

Observação. Considere o anel $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$. Tal anel é booleano (i.e. $\forall U \subseteq X$, $U \cap U = U$). Temos que $Spec\mathcal{P}(X) \cong Ult(X)$. Dado um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}$, o conjunto $\mathcal{F}^c = \{A \subseteq X : X - A \in \mathcal{F}\}$ é um ideal maximal se e somente se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro. Além disso, em anéis booleanos, todo ideal primo é maximal. Tal homeomorfismo é dado associando a cada ultrafiltro o ideal dado pelos complementares.

Note que espectros de anéis com unidade são sempre compactos e espectros de anéis booleanos são Hausdorff e totalmente desconexos.

Não construiremos aqui o caso geral. Tal construção pode ser vista em [?] (para uma construção que generaliza a que usa ultrafiltros) e [?] (para uma construção que mergulha a compactificação de Stone-$\check{C}$ech em algum produto grande de cópias de $[0, 1]$).

Exemplo. Considere $X = S_\Omega$ (o primeiro ordinal não enumerável). Então $\#\beta S_\Omega - S_\Omega = 1$.

2.3 Consequências

Proposição 2.19. *Se X é discreto, então βX é totalmente desconexo.*

Proof. Temos que $Ult(X)$ é totalmente desconexo e $Ult(X) \cong \beta X$. $\square$

Lema 2.20. $[0, 1]^{[0,1]}$*, com a topologia produto, é separável (i.e. possui subconjunto enumerável denso).*

Proof. $\square$

Proposição 2.21. $\#\beta\mathbb{N} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Proof. Temos que $Ult(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, o que implica que $\#\beta\mathbb{N} \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

Por outro lado, temos que $[0,1]^{[0,1]}$, é separável. Seja D um subconjunto enumerável denso de $[0,1]^{[0,1]}$. Uma bijeção qualquer $f : \mathbb{N} \to D$ (que é contínua, pois $\mathbb{N}$ é discreto) induz uma aplicação contínua $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \to [0,1]^{[0,1]}$ (observe que $[0,1]^{[0,1]}$ é compacto pelo Teorema de Tychonoff). Como $\beta\mathbb{N}$ é compacto e D é denso, segue que $\tilde{f}$ é sobrejetiva. Logo $\#\beta\mathbb{N} \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

Portanto $\#\beta\mathbb{N} = 2^{2^{\aleph_0}}$. □

Lema 2.22. *Sejam X um espaço Hausdorff, $f : X \to \bar{X}$ uma compactificação de X e $\tilde{f} : \beta X \to \bar{X}$ o mapa induzido por f. Então $\tilde{f}(\beta X - b(X)) = \bar{X} - f(X)$.*

Proof. Seja $x \in \beta X$ tal que $\tilde{f}(x) \in f(X)$. Existe uma rede $\{b(x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ de pontos em $b(X)$ que converge para x. Como $\tilde{f}$ é contínua, segue que $\{\tilde{f}(b(x_\gamma))\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge para $\tilde{f}(x)$ em $\bar{X}$. Mas temos que $\{\tilde{f}(b(x_\gamma))\}_{\gamma\in\Gamma} = \{f(x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ e f é um mergulho, o que implica que $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge em X e portanto $x \in b(X)$. Logo $\tilde{f}(\beta X - b(X)) \subseteq \bar{X} - f(X)$. Como $\tilde{f}(b(X)) = f(X)$ e $\tilde{f}$ é sobrejetiva, segue que $\tilde{f}(\beta X - b(X)) = \bar{X} - f(X)$. □

Proposição 2.23. *Sejam X um espaço Hausdorff e $f : X \to \bar{X}$ uma compactificação de X. Então $f(X)$ é aberto em $\bar{X}$ se e somente se X é localmente compacto.*

Proof. Temos que aberto de espaço localmente compacto é localmente compacto. Portanto, se X é aberto de um compacto, então X é localmente compacto.

Suponha que X é localmente compacto. Temos que a aplicação de inclusão $\iota : X \to X \cup \{\infty\}$ induz uma aplicação contínua $\tilde{\iota} : \beta X \to X \cup \{\infty\}$. Pelo lema anterior, temos que $\beta X - b(X) = \tilde{\iota}^{-1}(\infty)$, o que implica que $\beta X - b(X)$ é fechado em βX. Temos que a compactificação f induz uma aplicação contínua $\tilde{f} : \beta X \to \tilde{X}$. Como $\beta X - b(X)$ é fechado, e portanto compacto, e $\tilde{f}(\beta X - b(X)) = \bar{X} - f(X)$, segue que $\bar{X} - f(X)$ é compacto, e portanto fechado. Segue então que $f(X)$ é aberto. □

Observação. Provavelmente existe uma forma mais simples de demonstrar essa proposição, sem usar a compactificação de Stone-$\check{C}$ech.

2.4 Funtorialidade

Sejam $T_{3,5}Top$ a categoria de espaços completamente regulares e funções contínuas e T_2Comp a categoria de espaços Hausdorff compactos. Temos uma inclusão entre as categorias $\mathcal{I} : T_2Comp \to T_{3,5}Top$. Construiremos um funtor na outra direção:

Seja $\mathcal{B} : T_{3,5}Top \to T_2Comp$ dado por $\mathcal{B}(X) = \beta X$. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua entre espaços completamente regulares. Tomemos a inclusão $b_Y : Y \to \beta Y$. Então a função $b_Y \circ f : X \to \beta Y$ induz uma função contínua $\tilde{f} : \beta X \to \beta X$ que é a única que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ Y \arrow[r, "b_Y"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

Definimos então $\mathcal{B}(f) = \tilde{f}$.

Proposição 2.24. *$\mathcal{B}$ é um funtor covariante.*

Proof. Se X é um espaço completamente regular, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "id_X"'] & \beta X \arrow[d, "id_{\beta X}"] \\ X \arrow[r, "b_X"] & \beta X \end{tikzcd}$$

Pela unicidade de $\tilde{id_X}$, segue que $\mathcal{B}(id_X) = id_{\beta X}$.

Sejam X, Y e Z espaços completamente regulares e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicações contínuas. Temos que os dois diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ Y \arrow[r, "b_Y"] \arrow[d, "g"'] & \beta Y \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ Z \arrow[r, "b_Z"] & \beta Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "b_X"] \arrow[d, "g \circ f"'] & \beta X \arrow[d, "g \tilde{\circ} f"] \\ Z \arrow[r, "b_Z"] & \beta Z \end{tikzcd}$$

Pela unicidade de $g \tilde{\circ} f$, segue que $\mathcal{B}(g \circ f) = \mathcal{B}(g) \circ \mathcal{B}(f)$.

Portanto $\mathcal{B}$ é um funtor covariante. $\square$

Proposição 2.25. *$\mathcal{B}$ é adjunto à esquerda de $\mathcal{I}$.*

Proof. Se X é um espaço completamente regular, então o par $(\beta X, b_X)$, com $b_X : X \to \beta X$ a compactificação de Stone-Čech, é uma reflexão de X pelo funtor $\mathcal{I}$ (devido à própria definição de compactificação de Stone-Čech). Temos também que $b = \{b_X : X \in T_{3,5}Top\}$ é uma transformação natural $id_{T_{3,5}Top} \Rightarrow \mathcal{I} \circ \mathcal{B}$. Mas essas são condições necessárias e suficientes para que $\mathcal{B}$ seja adjunto à esquerda de $\mathcal{I}$ (Teorema 3.1.5 de [2]). $\square$

References

[1] L. F. Alrichi, *Notas de aula*. Notas de aula de curso de Aplicações de teoria de conjuntos no ICMC na USP, 2020.

[2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1 - Basic Category Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Great Britain, 1994. Zbl 1143.18001 MR 1291599

[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General Topology. Part 1.* Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966. Zbl 0301.54001 MR 0205210

[4] S. Willard, *General Topology.* Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1968. Zbl 0205.26601 MR 0264581