Seminário: limites e colimites, conjuntos profinitos

John MacQuarrie

16 de setembro de 2022

Limites e colimites

Limites e colimites são definidos por propriedades universais. Assim a gente <u>define</u> eles para ter propriedades úteis, e depois se preocupa se eles existem.

A definição tem três partes:

- Uma "categoria combinatória" $\mathcal{D}$ ($D =$"diagrama"): pensamos nela como uma coleção de pontos e flechas mesmo. Exemplos:

$$\bullet \qquad \bullet \qquad\qquad \bullet \rightrightarrows \bullet \qquad\qquad \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

- Uma categoria $\mathcal{C}$ que queremos entender. Exemplos:

$$\mathbf{Set}\,, \quad \mathbf{Grp}\,, \quad \mathbf{Ab}\,, \quad \mathbf{Top}\,, \ \ldots$$

- Um funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$: pensamos nele como realizando a forma de $\mathcal{D}$ dentro da categoria $\mathcal{C}$. Exemplo: Um funtor

$$F : \bullet \rightrightarrows \bullet \quad \to \quad \mathbf{Ab}$$

  "é" um par de grupos abelianos G, H junto com dois homomorfismos $f, g : G \to H$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & H \end{tikzcd}$$

Definição. *Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria pequena, $\mathcal{C}$ uma categoria e $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ um funtor covariante.*

- *Um <u>cone</u> (c, ψ_d) de F consiste de um objeto $c \in \mathcal{C}$, junto com um morfismo $\psi_d : c \to Fd$ para todo $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Para qualquer morfismo $\alpha : d \to d'$ em $\mathcal{D}$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\psi_d"'] \arrow[dr, "\psi_{d'}"] & \\ Fd \arrow[rr, "F(\alpha)"'] & & Fd' \end{tikzcd}$$

  tem que comutar.

- *Um <u>cocone</u> (b, γ_d) de F consiste de um objeto $b \in \mathcal{C}$, junto com um morfismo $\gamma_d : Fd \to b$ para todo $d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Para qualquer morfismo $\alpha : d \to d'$ em $\mathcal{D}$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} Fd \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[dr, "\gamma_d"'] & & Fd' \arrow[dl, "\gamma_{d'}"] \\ & b & \end{tikzcd}$$

  tem que comutar.

Exemplo. O mesmo $F : \bullet \rightrightarrows \bullet \quad \to$ **Ab** com imagem

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & H \end{tikzcd}.$$

Vamos supor também que $g : G \to H$ é o hom trivial 0, que manda todo $g \in G$ para 0.

Um cone dele é um grupo abeliano C com homomorfismos $\psi : C \to G$ e $\varphi : C \to H$. O diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G \arrow[rr, "f"'] & & H \end{tikzcd}$$

comuta, então $\varphi = f\psi$. Mas o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G \arrow[rr, "0"'] & & H \end{tikzcd}$$

também comuta, então $\varphi = 0\psi = 0$. Em particular $f\psi = 0$: abrindo isso, os cones de F estão em correspondência com homomorfismos de grupos abelianos $\psi : C \to G$ cujas imagens caiam dentro de $\mathrm{Ker}(f)$.

Limites são os melhores cones e colimites são os melhores cocones:

Definição.

- *O limite* $\lim(F)$ *de* $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *(caso existir) é um cone* (L, φ_d) *de* F *que satisfaz a seguinte propriedade universal: sempre que* (c, ψ_d) *é um cone de* F*, existe um único morfismo* $\psi : c \to L$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dd, "\psi_d"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ & L \arrow[dl, "\varphi_d"] \\ Fd & \end{tikzcd}$$

comuta para todo $d \in \mathcal{D}$.

- *O colimite* $\mathrm{colim}(F)$ *é o conceito dual.*

Lema. *O (co)limite de* F*, caso existir, é único até isomorfismo.*

Demonstração. (ideia): Suponha que temos dois limites $(L, \varphi_d), (L', \varphi'_d)$. Pelas propriedades universais de L', L respectivamente, temos morfismos $\rho : L \to L'$, $\theta : L' \to L$ fazendo todos os diagramas

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, bend left, "\rho"] \arrow[dr, "\varphi_d"'] & & L' \arrow[ll, bend left, "\theta"] \arrow[dl, "\varphi'_d"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

comutarem. Compondo, o mapa $\theta\rho$ faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\theta\rho"] \arrow[dr, "\varphi_d"'] & & L \arrow[dl, "\varphi_d"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

comutar. Mas id_L também faz o diagrama comutar, então pela unicidade do mapa, $\theta\rho = \mathrm{id}_L$. Similarmente $\rho\theta = \mathrm{id}_{L'}$ e assim ρ é iso com inverso θ. $\square$

Exemplo. Um cone óbvio de

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & H \end{tikzcd}$$

é a inclusão do núcleo K de f em G:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] & G \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & H \end{tikzcd} .$$

De fato ele é o limite: já que um cone é um hom $C \to G$ cuja imagem caia dentro de K, ele se factora unicamente por $K \hookrightarrow G$:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "\exists!"'] \arrow[d] & \\ K \arrow[r, hook] & G \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0"'] & H \end{tikzcd}$$

Uns (co)limites são familiares e têm nomes:

- Seja $\mathcal{D}$ uma categoria pequena com somente morfismos identidades. Assim $\mathcal{D}$ é moralmente só um conjunto. $F(\mathcal{D})$ é qualquer conjunto de objetos $F(d)$ de $\mathcal{C}$ indexado pelos objetos de $\mathcal{D}$. Um cone de F é um objeto C de $\mathcal{C}$ com mapas quaisquer $C \to F(d)$ para cada d. O limite de F é o <u>produto</u> $\prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$.
  - Em categorias tipo **Set**, **Grp**, **Ab**, **Top**:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[ddl, bend right, "\psi_d"'] \arrow[d, "\exists!\Psi"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_{d'}"] & & \\ & \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d) \arrow[dl, "\pi_d"] \arrow[dr, "\pi_{d'}"'] & & \\ F(d) & & F(d') & \cdots \end{tikzcd}$$

    O mapa ψ manda um elemento x de C pro vetor $(\psi_d(x))_{d \in \mathcal{D}}$.
  - Em **Top** ainda temos que dizer a topologia que daremos pro conjunto $\prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$. Cada π_d tem que ser contínua ou não teremos os mapas π_d. Mas a topologia tem que ser a menor possível com essa propriedade, pois senão, pegue $C = \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ com uma topologia menor. O mapa "id" : $C \to \prod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ <u>não</u> será contínua. A topologia mais fraca tal que cada π_d é contínuo é precisamente a <u>topologia do produto</u>!
  - Limites podem não existir: Pegue $\mathcal{C} = \mathbf{FSet}$, conjuntos finitos: um produto qualquer de conjuntos finitos não é finito!

  Os colimites desses F são mais diversos:
  - em **Set**, $\mathrm{colim}(F) = \coprod_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ – a união disjunta.
  - em **Ab**, $\mathrm{colim}(F) = \bigoplus_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ – a soma direta.
  - em **Grp**, $\mathrm{colim}(F) = \circledast_{d \in \mathcal{D}} F(d)$ – o produto livre.

- O limite de $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & \bullet \end{tikzcd}$ é o <u>equalizador</u> de $F(\alpha), F(\beta)$. O colimite é o <u>coequalizador</u>.
  - Em **Set**, **Ab**, **Grp**, **HTop** o equalizador é a coisa óbvia:

$$\mathrm{Eq}\left(\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & H \end{tikzcd} \right) = \{x \in G \mid f(x) = g(x)\} \hookrightarrow G.$$

  - Às vezes (co)limites existem mas não são tão óbvios: seja G um grupo e $L \leqslant G$ não normal. G/L não é um grupo então pode pensar que $L \hookrightarrow G$ não possui conúcleo em **Grp**. Mas sendo $\overline{L}$ o subgrupo normal gerado por L, a projeção $G \to G/\overline{L}$ é o conúcleo.

- O limite de $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \ \to \mathcal{C}$ é um <u>pullback</u> ou <u>produto fibrado</u> em $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

O colimite de $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \ \to \mathcal{C}$ é um <u>pushout</u> em $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \bigsqcup_C B \end{tikzcd}$$

Teorema. *(de existência de (co)limites) Se $\mathcal{C}$ possui produtos arbitrários e equalizadores, então todo funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ possui limite (isto é: $\mathcal{C}$ é <u>completa</u>).*

Se $\mathcal{C}$ possui coprodutos arbitrários e coequalizadores, então todo funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ possui colimite (isto é, $\mathcal{C}$ é <u>cocompleta</u>).

Demonstração. Escrevemos flechas como $\alpha : s(\alpha) \to t(\alpha)$. Os objetos

$$\prod_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \quad , \quad \prod_{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})} F(t(\alpha))$$

existem em $\mathcal{C}$. Para cada $\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ definimos dois mapas

$$\begin{tikzcd} \prod_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \arrow[r, shift left, "\sigma_\alpha = F(\alpha)\pi_{s(\alpha)}"] \arrow[r, shift right, "\tau_\alpha = \pi_{t(\alpha)}"'] & F(t(\alpha)) \end{tikzcd} .$$

A propriedade universal do segundo produto dá únicos mapas

$$\begin{tikzcd} \prod_{d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})} F(d) \arrow[r, shift left, "\sigma"] \arrow[r, shift right, "\tau"'] & \prod_{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})} F(t(\alpha)) \end{tikzcd} .$$

A equalizador de σ, τ é o limite de F. $\square$

O legal desse teorema é que quando entendemos produtos e equalizadores em $\mathcal{C}$, ele dá uma <u>construção</u> dos limites:

Exemplo. Em $\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Grp}, \ldots$ considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

O teorema diz que o limite (= pullback) é o equalizador de

$$\begin{tikzcd} A \times B \times C \arrow[r, shift left, "(a,b,c) \mapsto (f(a), g(b))"] \arrow[r, shift right, "(a,b,c) \mapsto (c,c)"'] & t(f) \times t(g) \end{tikzcd} .$$

Assim o limite é

$$A \times_C B = \{(a, b, c) \mid f(a) = c = g(b)\} \cong \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\} \quad \text{– a definição “familiar”!}$$

Limites inversos e conjuntos profinitos

Definição. *Seja $\mathcal{D}$ um poset, tratado como categoria: temos $d \to d' \iff d \geqslant d'$). Diremos que $\mathcal{D}$ é <u>direcionado para cima</u> se $\forall d, d' \in \mathcal{D}$, existe $b \in \mathcal{D}$ com $b \geqslant d, d'$.*

Se $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ é um funtor com $\mathcal{D}$ direcionado para cima, $F(\mathcal{D})$ é um <u>sistema inverso</u> em $\mathcal{C}$. O seu limite é um <u>limite inverso</u>, denotado por $\varprojlim (F)$.

Dualmente, colimites de $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ com $\mathcal{D}$ direcionado para baixo se chamam de <u>limites diretos</u> e são denotados como $\varinjlim (F)$

Exemplo. X um espaço topológico e $\mathcal{D} = \mathcal{O}(X)$ com morfismos inclusões. Considere o funtor

$$\begin{aligned} F : \mathcal{O}(X) &\to \mathbf{Top} \\ U &\mapsto U \end{aligned}$$

Temos $\varprojlim (F) = \bigcap_{U \in \mathcal{O}(X)} U$.

Definição. *Um conjunto/grupo* <u>*profinito*</u> *é um limite inverso, na categoria* **HTop/TGrp***, de um sistema inverso de conjuntos/grupos finitos discretos.*

Proposição. *Conjuntos profinitos são sempre Hausdorff, compactos e totalmente desconexos (= o maior componente conexo é um ponto).*

Demonstração. Só compacto: Pelo teorema de Tychonoff, produtos de espaços compactos é compacto. Equalizadores de mapas contínuos de espaços Hausdorff são fechados. Subconjuntos fechados de compactos são compactos. Assim pelo teorema de existência, de fato qualquer limite de espaços compactos Hausdorff é compacto. ☐

(de fato essa proposição é sse).

Seja $\mathcal{N}$ a categoria direcionada para cima

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \cdots$$

Exemplo. $F : \mathcal{N} \to \mathbf{TGrp}$ (grupos topológicos Hausdorff) com imagem

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{mod } p} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{mod } p^2} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{mod } p^3} \cdots$$

Pelo teorema de existência:

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\,,\, x_m(\text{mod } p^n) = x_n \forall n \leqslant m\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \mid a_i \in \{0, \ldots, p-1\} \right\} = \mathbb{Z}_p.$$

Exemplo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F(n) := \{*,\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\} \in \mathbf{Set}$. Dados $m \geqslant n$, defina

$$\begin{aligned} \{*, a_1, a_2, \ldots, a_m\} &\to \{*, a_1, a_2, \ldots, a_n\} \\ * &\mapsto * \\ a_i &\mapsto a_i \quad i \leqslant n \\ a_i &\mapsto * \qquad i > n \end{aligned}$$

$$L = \varprojlim (F) = \{(*, *, *, \ldots),\, (a_1,\, a_1,\, a_1,\, \ldots),\, (*,\, a_2,\, a_2,\, \ldots),\, (*, *, a_3, a_3, \ldots)\} \cong \{*, a_1, a_2, \ldots\}.$$

Topologia de L?

$${\pi_n}^{-1}(a_n) = \{(*, \ldots, *, a_n, a_n, \ldots)\} = \{a_n\},$$

$$\begin{aligned} {\pi_n}^{-1}(*) &= \{(*, *, *, \ldots)\,,\, (*, \ldots, *, a_{n+1}, a_{n+1}, \ldots)\,,\, (*, \ldots, *, *, a_{n+2}, \ldots), \ldots\} \\ &= \{*, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\} \end{aligned}$$

Desenrolando: os singletons $\{a_n\}$ são abertos, mas os abertos que contém $*$ são cofinitos. L é homeomorfo a uma sequência convergente, junto com seu limite, por exemplo

$$L \cong \{0\,,\, 1\,,\, 1/2\,,\, 1/3\,,\, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Mais geralmente, $C \cup \{*\}$, com C um conjunto discreto qualquer, é profinito: pegue o sistema inverso de conjuntos $\{F \cup \{*\} \mid F \subseteq C \text{ finito}\}$, e mapas análogos. Novamente os $\{c\}$ $(c \in C)$ são abertos, enquanto os abertos contendo $*$ são cofinitos.

Exemplo. Sendo C_i um conjunto finito para cada $i \in I$, $\prod_{i\in I} C_i$ é profinito: pegue o sistema inverso dos

$$\prod_{i \in F \subseteq I \text{ finito}} C_i$$

com as projeções canônicas.