Matemática Condensada

John MacQuarrie

April 5, 2023

Matemática Consensada é um jeito novo de resolver problemas fundamentais que aparecem quando tentar fazer álgebra com objetos topológicos. Em álgebra normal temos:

Theorem 0.1. *(1o teorema de isomorfismo) Seja $\rho : G \to H$ um homomorfismo de grupos abelianos (ou espaços vetoriais ou módulos ou que seja). Então*

$$G/\mathrm{Ker}(\rho) \cong \mathrm{Im}(\rho).$$

Quando nossos grupos tem topologias, todos os mapas têm que ser contínuos, e isso gera problemas:

Example 0.2. $\mathbb{R}$ como a topologia normal é um grupo topológico. Considere também $\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}$, isto é, $\mathbb{R}$, mas agora com a topologia discreta, então TODO subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}$ é aberto. Como *grupos*, $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\mathrm{dis}}$. Mas o mapa contínuo

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^{\mathrm{dis}} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

não é iso, pois seu inverso não é contínuo. Como grupos *topológicos*, não são iso. Mais precisamente $\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}/\mathrm{Ker}(\rho) = \mathbb{R}^{\mathrm{dis}} \ncong \mathrm{Im}(\rho)$ – o 1o Teorema de Iso falhou!

Matemática condensada vai resolver esse problema!

Topologias de Grothendieck e sites

X – espaço topológico
$\mathcal{C}$ – categoria tendo produtos e equalizadores (exemplos: $\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}$,k–Vec, $R-\mathbf{Mod}, \ldots$).

Denote por $\mathcal{O}(X)$ o poset dos subconjuntos abertos de X, tratado como categoria. Um *prefeixe* tradicional é um functor contravariante $F : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{C}$. Para definir feixe, considere qualquer subconjunto aberto $U \in \mathcal{O}(X)$ e qualquer cobertura de U por abertos $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Obtemos o seguinte diagrama:

$$F(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j)\,. \qquad (*)$$

α: Para cada i, a inclusão $\iota_i : U_i \to U$ dá um mapa $F(\iota_i) : F(U) \to F(U_i)$, assim o produto universal do produto dá um mapa $F(U) \to \prod_i F(U_i)$.

β, γ: Para cada j, k, temos o seguinte diagrama NÃO comutativo:

$$\begin{tikzcd} & \prod_i F(U_i) \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dd, bend right, "\beta_{jk}"'] \arrow[dd, bend left, "\gamma_{jk}"] \arrow[dr, "\pi_k"] & \\ F(U_j) \arrow[dr] & & F(U_k) \arrow[dl] \\ & F(U_j \cap U_k) & \end{tikzcd}$$

com β_{jk}, γ_{jk} as composições correspondentes. Agora a propriedade universal do segundo produto, aplicada nos β_{jk} dá β, e aplicada nos γ_{jk} dá γ.

Diremos que o prefeixe F é um *feixe*, se o mapa α de $(*)$ é o equalizador de β e γ.

Como entendo, a observação do Grothendieck era que tem valor em considerar feixes $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$, com $\mathcal{D}$ mais geral que $\mathcal{O}(X)$. Para definir feixe, a gente precisava da noção de *cobertura*:

Definition 0.3. (informal) Uma cobertura de um objeto c de uma categoria $\mathcal{C}$ é uma coleção de flechas $f_i : x_i \to c$.

Um *site* é uma categoria $\mathcal{C}$ junto com, para cada $c \in \mathcal{C}$, uma coleção de cobeturas destacadas. As regras são:

1. Para qualquer isomorfismo $f : c' \to c$, $\{f\}$ é uma cobertura destacada de c.
2. Se $\{f_i : x_i \to c\}$ é uma cobertura e $\rho : d \to c$ é uma flecha, obtemos mapas assim:

$$\begin{tikzcd} d \times_c x_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & x_i \arrow[d, "f_i"] \\ d \arrow[r, "\rho"'] & c \end{tikzcd}$$

   A regra é que $\{g_i : d \times_c x_i \to d\}$ tem que ser uma cobertura destacada.
3. Se $\{f_i : c_i \to c\}$ é uma cobertura destacada e para cada i, $\{g_{ij} : c_{ij} \to c_i\}$ é uma cobertura destacada, então $\{f_i g_{ij} : c_{ij} \to c\}$ é mais uma cobertura destacada.

Observação: Estamos supondo aqui que $\mathcal{C}$ tem pullbacks. Tem uma versão mais geral, e de fato podemos ter que usar esta versão mais geral (veja depois da Proposição 0.19).

Example 0.4. $\mathcal{C} = \mathcal{O}(X)$. Uma cobertura destacada de U é qualquer cobertura de U por abertos. Axioma 2 está dizendo que, se $U = \bigcup_i U_i$ é uma cobertura de U e $V \subseteq U$, então $V = \bigcup(U_i \cap V)$ é uma cobertura de V.

Example 0.5. (O exemplo mais importante pra gente!) $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ (ou alguma subcategoria dela). As coberturas destacadas são conjuntos finitos de mapas "juntamente sobrejetivos". Isto é, uma cobertura de $X \in \mathbf{Top}$ é $\{f_1 : Y_1 \to X, \dots, f_n : Y_n \to X\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{Im}(f_i) = X$.

Uma coisa super útil é que um único mapa sobrejetivo $f : Y \twoheadrightarrow X$ é uma cobertura. Eles usam isso muito, pois Y pode ser "mais fácil" do que X.

Conjuntos profinitos

Um *conjunto profinito* é um limite inverso de conjuntos finitos discretos, tomado na categoria dos espaços topológicos.

Example 0.6. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}$:

$$C = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} \cup \{0\},$$

uma "sequência convergente". Os pontos $\frac{1}{n}$ são isolados: $\{\frac{1}{n}\}$ é aberto. Mas os abertos que contém 0 são *cofinitos*.

Obtemos C como o *limite inverso* da sequência de conjuntos finitos

$$\ldots \xrightarrow{\rho_3} \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \xrightarrow{\rho_2} \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \xrightarrow{\rho_1} \{0, \frac{1}{2}\}$$

onde ρ_n manda elementos da imagem para eles mesmo, e elementos fora para 0.

Theorem 0.7. *Um espaço X é profinito se, e somente se, ele é compacto, Hausdorff, e totalmente desconexo (isto é, o componente conexo de um ponto $x \in X$ é $\{x\}$).*

Example 0.8. Uma *compactificação* de um espaço X é um espaço compacto Hausdorff C, junto com um mergulo $X \to C$ com imagem densa no contradomínio. Existe uma "melhor compactificação":

A compactificação de Stone-Cech de X é um espaço compacto Hausdorff $\beta(X)$, junto com um mapa contínuo $\rho : X \to \beta(X)$, que satisfaz a seguinte propriedade universal:

Dado qualquer mapa $f : X \to C$ com C compacto Hausdorff, existe um único mapa $\gamma : \beta(X) \to C$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & C \\ & \beta(X) \arrow[ur, "\exists!\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Fato: Se Z é discreto, então $\beta(Z)$ é totalmente desconexo, logo profinito.

Suponha que X já é compacto Hausdorff e considere a seguinte situação:

$$\begin{tikzcd} X^{\mathrm{dis}} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\rho"'] & & X \\ & \beta(X^{\mathrm{dis}}) & \end{tikzcd}$$

"id" é um mapa para um espaço compacto Hausdorff, assim a propriedade universal nos dá um único mapa $\gamma : \beta(X^{\mathrm{dis}}) \to X$, que é sobre já que id é sobre.

Então suponha que nosso site é **CHaus** como em Exemplo 0.5. Esta conta mostra que todo objeto de **CHaus** pode ser coberta por um conjunto profinito!

$\beta(X^{\text{dis}})$ é melhor ainda: um espaço compacto Hausdorff D é *extremamente deconexo* (ED) se para qualquer sobrejeção contínua $\alpha : C \to D$ com C compacto Hausdorff, existe $\gamma : D \to C$ *contínua* tal que $\alpha\gamma = \mathrm{id}_D$. Ou seja, espaços ED são *projetivos* na categoria dos espaços compacto Hausdorff. Tais espaços são sempre profinitos.

De fato $\beta(X^{\text{dis}})$ é sempre ED: dado $\alpha : C \twoheadrightarrow \beta(X^{\text{dis}})$, defina um splitting $\mu : \beta(X^{\text{dis}}) \to C$ de α só como conjuntos. Já que X^{dis} é discreto, o mapa $\mu\rho$ é contínuo, e assim existe um mapa contínuo $\gamma : \beta(X^{\text{dis}}) \to C$ tal que $\gamma\rho = \mu\rho$. Temos $\alpha\gamma\rho = \alpha\mu\rho = \rho$. Mas $\mathrm{id}\rho = \rho$ também, assim pela unicidade na propriedade universal de $\beta(X^{\text{dis}})$, $\alpha\gamma = \mathrm{id}$ e γ é um splitting de α.

Assim no site **CHaus**, todo objeto possui uma cobertura *projetiva*!

A(s) categoria(s) condensada(s)

Ponto Técnico: Para evitar problemas com classes, fixamos um cardinal λ e decidimos que só queremos entender objetos de cardinalidade no máximo λ. Seja κ o limite da sequência

$$\lambda < 2^{\lambda} < 2^{2^{\lambda}} < \cdots$$

Seja $\kappa - \mathbf{Prof}$ o site dos conjuntos profinitos de tamanho menor do que κ, com coberturas coleções finitas de mapas contínuas juntamente sobrejetivas.

Definition 0.9. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria legal: $\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, R - \mathbf{Mod}, \ldots$ Um *conjunto/grupo abeliano/módulo, … κ-condensado* é um feixe

$$T : \kappa - \mathbf{Prof}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}.$$

Equivalentamente (segundo Scholze) uma coisa condensada é um functor contravariante $T : \kappa - \mathbf{Prof} \to \mathcal{C}$ tal que

- $T(\varnothing) = *$ (o objeto terminal de $\mathcal{C}$)
- $\forall S_1, S_2 \in \kappa - \mathbf{Prof}$,
$$T(S_1 \sqcup S_2) = T(S_1) \times T(S_2),$$
- Dado um mapa sobrejetivo $\rho : S' \to S$ em $\kappa - \mathbf{Prof}$, obtemos o pullback

$$\begin{tikzcd} S' \times_S S' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & S' \arrow[d, "\rho"] \\ S' \arrow[r, "\rho"'] & S \end{tikzcd}$$

  Aplicando T, obtemos

$$\begin{tikzcd} T(S) \arrow[r, "T(\rho)"] & T(S') \arrow[r, shift left, "T(p_1)"] \arrow[r, shift right, "T(p_2)"'] & T(S' \times_S S'). \end{tikzcd}$$

  A condição é que $T(\rho)$ seja o equalizador de $T(p_1)$ e $T(p_2)$.

Denote por $\kappa - \mathbf{Cond}(\mathcal{C})$ a categoria dos conjuntos/grupos/módulos κ-condensados.

Example 0.10. Seja X um espaço/grupo/R-módulo etc. topológico. Então

$$\underline{X} := \mathrm{CMap}(-, X) : \kappa - \mathbf{Prof} \to \mathbf{Set}/\mathbf{Ab}/R - \mathbf{Mod} \text{ etc.}$$

é um conjunto/grupo/R-módulo condensada.

Example 0.11. Considere o conjunto profinito

$$C = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\} \cup \{0\}.$$

Vamos avaliar alguns exemplos em C:

- $\underline{\mathbb{R}} = \mathrm{CMap}(-, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{CMap}(C, \mathbb{R}) \cong \{\text{sequências convergentes em } \mathbb{R}\}.$$

- $\underline{\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}} = \mathrm{CMap}(-, \mathbb{R}^{\mathrm{dis}})$:

$$\mathrm{CMap}(C, \mathbb{R}^{\mathrm{dis}}) \cong \{\text{sequências eventualmente constantes em } \mathbb{R}\}$$

  pois $f \in \mathrm{CMap}(C, \mathbb{R}^{\mathrm{dis}})$ é contínua, e logo $f^{-1}(f(0))$ é cofinito em C!

- $\mathbb{R}^{\mathrm{dis}} \to \mathbb{R}$ induz um mapa $\underline{\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}} \to \underline{\mathbb{R}}$: aplicado em C, dá a inclusão de mapas eventualmente constantes em sequências convergentes. O mapa $\underline{\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}} \to \underline{\mathbb{R}}$ tem um conúcleo $Q : \kappa - \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$ que é (o feixificação?) de

$$P \mapsto \frac{\mathrm{CMap}(P, \mathbb{R})}{\mathrm{CMap}(P, \mathbb{R}^{\mathrm{dis}})}.$$

  Temos

$$Q(*) = \frac{\mathrm{CMap}(*, \mathbb{R})}{\mathrm{CMap}(*, \mathbb{R}^{\mathrm{dis}})} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}} = 0,$$

  mas

$$Q(C) = \frac{\text{seq convergentes}}{\text{seq. event. const.}} = \text{algo enorme!}$$

  [Ou, bem, os valores do *pre*feixe são esses...]

Definition 0.12. Seja T um conjunto condensado. O *conjunto subjacente* de T é $T(*)$.

Example 0.13.

1. Sendo X um espaço topológico,

$$\underline{X}(*) = \mathrm{CMap}(*, X) = X,$$

   o conjunto subjacente de X!

2. Mas Q (do exemplo anterior) é um feixe interessante tendo conjunto subjacente $Q(*) = 0$.

Definition 0.14. *T um conjunto condensado. Daremos uma topologia pro conjunto subjacente assim: $T(*)_{\text{top}}$ é $T(*)$ como conjunto, com a topologia do quociente do mapa*

$$\left(\coprod_{\substack{S \text{ profinito} \\ |S|<\kappa \\ \gamma:\underline{S}\to T}} S \right) \to T(*),$$

que faz sentindo, lembrando que $S = \underline{S}(*)$.

Ponto Técnico: A topologia obtida sobre $T(*)$ é "compactamente gerada". Os espaços de interesse pra gente são CG, assim fica mais fácil só trabalhar com CG espaços.

Example 0.15. Se X é cg, então $\underline{X}(*)_{\text{top}} \cong X$ como espaço topológico.

Mais que isso:

Proposition 0.16. *O functor $\underline{(-)} = \mathrm{CMap}(-,X) : \kappa - \mathbf{CGTop} \to \kappa - \mathbf{Cond}(\mathbf{Set})$ é adjunto à direita ao functor*

$$(-)(*)_{\text{top}} : \kappa - \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \to \kappa - \mathbf{CGTop}.$$

Se X é um espaço topológico compactamente gerado, a counidade $\varepsilon_X : \underline{X}(*)_{\text{top}} \to X$ é o isomorfismo natural.

É abstract nonsense que a counidade de uma adjunção é um isomorfismo se, e somente se, o adjunto à direita é plenamente fiel, assim:

Corollary 0.17. *O functor*

$$\begin{aligned} \kappa - \mathbf{CGTop} &\to \kappa - \mathbf{Cond}(\mathbf{Set}) \\ X \quad &\mapsto \quad \underline{X} = \mathrm{CMap}(-,X) \end{aligned}$$

é plenamente fiel.

Scholze afirma que segue formalmente disso que o corolário vale com outras categorias $\mathcal{C}$, assim por exemplo

$$\begin{aligned} \kappa - \mathbf{CGAb} &\to \kappa - \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab}) \\ X \quad &\mapsto \quad \underline{X} = \mathrm{CMap}(-,X) \end{aligned}$$

é plenamente fiel. Pode ou não ser um saco que a Proposição 0.16 NÃO generaliza direto, porque se T é um grupo abeliano condensado, pode acontecer que $T(*)_{\text{top}}$ não é um grupo topológico. Eu teria gostado de afirmar que se X é um grupo topológico e Q é como acima, então

$$\mathrm{Hom}(Q,\underline{X}) \cong \mathrm{Hom}(Q(*)_{\text{top}},X) = \mathrm{Hom}(0,X) = 0,$$

mas isso não segue direto dos resultados acima.

A categoria condensada é muito boa

Podemos mergulhar nossa categoria de grupos abelianos topológicos dentro de $\kappa-$ $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$: falta ver por que vale a pena fazer isso!

Theorem 0.18. *A categoria $\kappa-\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ é igualmente bem comportada com* **Ab***: é abeliana, e satisfaz as mesmas propriedades adicionais como* **Ab***: por exemplo, possui limites e colimites arbitrários.*

A prova disso usa umas equivalências. Temos inclusões de categorias:

$$\begin{aligned} &\mathbf{EDSet} = \{\text{Conjuntos ED}\} \\ \hookrightarrow\quad &\mathbf{PSet} = \{\text{Conjuntos profinitos}\} \\ \hookrightarrow\quad &\mathbf{CHTop} = \{\text{Espaços compacto Hausdorff}\}. \end{aligned}$$

Podemos tratar cada deles como um site com coberturas conjuntos finitos de mapas juntamente sobrejetivos.

Proposition 0.19. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria tipo* $\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \ldots$ *As categorias de feixes*

$$\begin{aligned} \mathbf{EDSet} &\to \mathcal{C}, \\ \mathbf{PSet} &\to \mathcal{C}, \qquad\qquad (= \mathbf{Cond}(\mathcal{C})!) \\ \mathbf{CHTop} &\to \mathcal{C} \end{aligned}$$

são equivalentes.

A equivalência mais interessante parece ser a primeira. Feixes de **EDSet** tem pros e contras:

PRO: Já que espaços ED são projetivos, a condição chata de feixe segue de graça das outras: um feixe $T : \mathbf{EDSet} \to \mathcal{C}$ é simplesmente um prefeixe tal que

$$T(\varnothing) = * \quad \text{e} \quad T(S_1 \sqcup S_2) = T(S_1) \times T(S_2)!$$

CONTRA: Se S_1, S_2 são ED, o produto $S_1 \times S_2$ é quase nunca ED. Assim a categoria **EDSet** não tem pullbacks, e assim precisamos usar uma outra definição de site, com crivos.

Matheus nos contará mais sobre essas equivalências semana que vem!

Proposition 0.20. *A categoria* $\mathbf{EDCond}(\mathbf{Ab})$ *(logo* $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$*) tem suficientes projetivos.*

Podemos construir projetivos assim: o functor $\mathbf{EDCond}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{EDCond}(\mathbf{Set})$ que manda $T \mapsto T$ possui adjunto à esquerda. Ele manda $T : \mathbf{EDSet} \to \mathbf{Set}$ pro feixificação $\mathbb{Z}[T]$ do functor que manda $S \in \mathbf{EDSet}$ para $\mathbb{Z}[T(S)] \in \mathbf{Ab}$.