Matemática Condensada

John MacQuarrie

June 24, 2022

Matemática Consensada é um jeito novo de resolver problemas fundamentais que aparecem quando tentar fazer álgebra com objetos topológicos. Em álgebra normal temos:

Theorem 0.1. *(1o teorema de isomorfismo) Seja $\rho : G \to H$ um homomorfismo de grupos abelianos (ou espaços vetoriais ou módulos ou que seja). Então*

$$G/\mathrm{Ker}(\rho) \cong \mathrm{Im}(\rho).$$

Quando nossos grupos tem topologias, todos os mapas têm que ser contínuos, e isso gera problemas:

Example 0.2. $\mathbb{R}$ como a topologia normal é um grupo topológico. Considere também $\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}$, isto é, $\mathbb{R}$, mas agora com a topologia discreta, então TODO subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}$ é aberto. Como *grupos*, $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\mathrm{dis}}$. Mas o mapa contínuo

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^{\mathrm{dis}} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

não é iso, pois seu inverso não é contínuo. Como grupos *topológicos*, não são iso. Mais precisamente $\mathbb{R}^{\mathrm{dis}}/\mathrm{Ker}(\rho) = \mathbb{R}^{\mathrm{dis}} \ncong \mathrm{Im}(\rho)$ – o 1o Teorema de Iso falhou!

Example 0.3. Seja k um corpo com a topologia discreta. Um k-espaço vetorial é uma *soma direta* de cópias de k:

$$V = \bigoplus_{i \in I} k = \{(\lambda_i)_{i \in I} \mid \lambda_i = 0 \text{ para quase todos os } i \in I\}.$$

O dual de V é

$$V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k) = \prod_{i \in I} k = \{(\lambda_i)_{i \in I}\}.$$

V^*, sendo um produto, deve receber a *topologia do produto* (que não será discreto quando $|I| = \infty$). Queremos uma categoria que contém espaços vetoriais discretos $V = \bigoplus_I k$ e os seus duais $\prod_I k$. Chegamos no mesmo problema: esquecendo da topologia,

$$W = \prod_{\mathbb{N}} k$$

é um espaço vetorial discreto, então $W^{\text{dis}} = \bigoplus_{|\mathbb{R}|} k$. O mapa

$$\begin{aligned} \rho : W^{\text{dis}} &\to W \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínua e bijetiva, mas não é iso.

Seja

$$C = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\} \cup \{0\}$$

uma "sequência convergente", um subespaço de $\mathbb{R}$. Os pontos $\frac{1}{n}$ são isolados: $\{\frac{1}{n}\}$ é aberto. Mas os abertos que contém 0 são *cofinitos*.

Obtemos C como o *limite* da sequência de conjuntos finitos

$$\ldots \xrightarrow{\rho_3} \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\} \xrightarrow{\rho_2} \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} \xrightarrow{\rho_1} \{0, \frac{1}{2}\}$$

onde ρ_n manda elementos da imagem para eles mesmo, e elementos fora para 0. Diremos que C é um *conjunto profinito*: um limite (inverso) de conjuntos finitos.

O (primeiro) truque da Matemática Condensada é trocar nossos grupos topológicos G pelo conjunto

$$\mathrm{CMap}(C, G) = \{\text{mapas contínuos de } C \text{ a } G\}.$$

Para que? Primeiramente $\mathrm{CMap}(C, -)$ é um *funtor*: dado um hom contínuo de grupos $\rho : G \to H$, obtemos um mapa

$$\begin{aligned} \mathrm{CMap}(C, G) &\to \mathrm{CMap}(C, H) \\ \gamma &\mapsto \rho\gamma \end{aligned}$$

Example 0.4.

- $\mathrm{CMap}(C, \mathbb{R})$: podemos mandar C continuamente para qualquer sequência convergente de $\mathbb{R}$: $\mathrm{CMap}(C, \mathbb{R})$ é muito grande!
- $\mathrm{CMap}(C, \mathbb{R}^{\text{dis}})$: sendo γ dentro, considere $a = \gamma(0)$. Já que γ é contínuo, $\gamma^{-1}(a)$ é aberto e contém 0. Assim $\gamma^{-1}(a)$ contém QUASE TODOS os elementos de C. Assim podemos mandar C somente para sequências eventualmente constantes: $\mathrm{CMap}(C, \mathbb{R}^{\text{dis}})$ é bem menor!

O mapa

$$\mathrm{CMap}(C, \mathbb{R}^{\text{dis}}) \to \mathrm{CMap}(C, \mathbb{R})$$

é a inclusão das sequências eventualmente constantes no conjunto das sequências convergentes. É injetivo, mas longe de ser sobrejetivo.

Mágica: Fazendo essa troca, o 1o Teorema de Iso vale novamente!

Mas: não basta considerar C. Temos que considerar os conjuntos $\mathrm{CMap}(X, G)$ para TODOS os conjuntos profinitos X de uma vez: assim entram *feixes*.