Teorema 2.2 das notas de Peter Scholze sobre matemática condensada

Igor Martins Silva

02 e 09 de dezembro de 2022

Antes de enunciarmos o Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze, e apresentarmos sua demonstração, que é o objetivo deste texto, vamos relembrar o que é uma categoria de grupos abelianos κ-condensados, definir categoria abeliana e apresentar os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Porém, antes de mais nada, vale ressaltar que uma categoria $\mathscr{C}$, a menos que se expresse o contrário, é sinônimo de categoria pequena, ou seja, $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ são conjuntos.

Vamos começar relembrando a definição de categoria de grupos abelianos κ-condensados, assunto discutido no seminário sobre conjuntos condensados, ministrado por Luiz Felipe Andrade Campos. Sejam

(a) $\mathbf{HTop}$ a categoria cujos objetos são espaços topológicos Hausdorff e os morfismos são funções contínuas, e

(b) $\mathbf{TFinSet}$ a categoria cujos objetos são conjuntos finitos com a topologia discreta e os morfismos são funções contínuas.

Note que $\mathbf{TFinSet}$ é uma subcategoria de $\mathbf{HTop}$. Seja $\mathscr{D}$ um poset, isto é, uma categoria cujos objetos são elementos de um conjunto parcialmente ordenados e os morfismos são dados pela relação de ordem, $\geq$, no seguinte sentido: dados $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y) \neq \varnothing$, se, e somente se, $X \geq Y$. Suponha ainda que $\mathscr{D}$ é direcionado para cima, isto é, dados $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, existe $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ tal que $Z \geq X, Y$. Seja $F : \mathscr{D} \to \mathbf{HTop}$ um funtor tal que $F(\mathscr{D})$ está em $\mathbf{TFinSet}$. No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, ministrado pelo professor John MacQuarrie, vimos que o limite de F é um cone, ou seja, é um par $\left(L, (\varphi_D)_{D \in \mathscr{D}}\right)$, onde $L \in \mathrm{Obj}(\mathbf{HTop})$ e $\varphi_D \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{HTop}}(L, F(D))$, que satisfaz uma propriedade universal. O objeto dado pelo limite de F é o que chamamos de **conjunto profinito**. A categoria cujos objetos são conjuntos profinitos e os morfismos são funções contínuas é denotada por $\mathbf{ProFinSet}$.

Seja κ um cardinal limite forte não enumerável, isto é, um cardinal não enumerável tal que, para todo $\lambda < \kappa$, vale que $2^\lambda < \kappa$. Definimos κ-$\mathsf{ProFinSet}$ como sendo a categoria cujos objetos são conjuntos profinitos de cardinalidade menor do que κ e os morfismos são funções contínuas.

Denote por AbGrp a categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos. Um **grupo abeliano κ-condensado** é um feixe

$$T : \ \kappa\text{-}\mathsf{ProFinSet}^{\mathrm{op}} \ \rightarrow \ \mathsf{AbGrp}$$

Como feixes são funtores, se T e S são grupos abelianos κ-condensados, então um morfismo de T para S é uma transformação natural de T para S. Assim, podemos definir uma categoria onde os objetos são grupos abelianos κ-condensados e os morfismos são transformações naturais. Vamos denotar tal categoria por κ-$\mathsf{Cond}(\mathsf{AbGrp})$. Para mais detalhes sobre feixes, ver o seminário sobre feixes e esquemas, ministrado pelo professor André Contiero.

Vamos, agora, definir categoria abeliana. Para isso, precisamos, antes, de alguns conceitos. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ é um **objeto inicial**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe um único morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, X)$. Analogamente, dizemos que $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ é um **objeto final**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe um único morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, C)$. Uma categoria $\mathscr{C}$ é dita **pré-aditiva**, se,

(a) para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, existe uma operação binária $+$ sobre $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ tal que $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y), +)$ é grupo abeliano;

(b) para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, a composição

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z)$$

é bilinear, isto é, $(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$ e $f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'$, para todo $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ e todo $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$.

Denotaremos o elemento neutro do grupo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ por 0_{XY}.

Observação 1. Se $\mathscr{C}$ é uma categoria pré-aditiva e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X)$, então $0_{XY} \circ f = (0_{XY} + 0_{XY}) \circ f = 0_{XY} \circ f + 0_{XY} \circ f$. Logo, $0_{XY} \circ f = 0_{ZY}$. Analogamente, se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, então $f \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$. $\square$

Lema 1. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva e $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) C é um objeto inicial.

(b) C é um objeto final.

(c) $\mathrm{id}_C = 0_{CC} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$.

Demonstração. Vamos mostrar que (a) implica (c). Assim, suponha que C é um objeto inicial. Então, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$ é o grupo abeliano trivial. Uma vez que $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, então $\mathrm{id}_C = 0_{CC} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$. A demonstração que (b) implica (c) é idêntica a que fizemos. Vamos mostrar, agora, que (c) implica (a). Assuma que $\mathrm{id}_C = 0_{CC} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$. Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,X)$. Como $\mathrm{id}_C = 0_{CC}$, então $f = f \circ 0_{CC}$. Mas pela Observação 1, $f = 0_{CX}$. Portanto, C é um objeto inicial. Analogamente, prova-se que (c) implica (b), o que finaliza a demonstração. ⊠

Em uma categoria pré-aditiva, um objeto inicial (ou final) é chamado de **objeto zero** e é denotado por $0_{\mathscr{C}}$.

Relembre, do seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, que dadas duas categorias, $\mathscr{D}$ e $\mathscr{C}$, onde os morfismos de $\mathscr{D}$ são apenas as identidades, e dado um funtor $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, definimos o *produto* de $\big(F(D)\big)_{D\in\mathrm{Obj}(\mathscr{D})}$ como sendo o limite de F. Analogamente, define-se o *coproduto*, usando-se o colimite.

Assim, se $\mathscr{C}$ é uma categoria e $(C_i)_{i\in I}$ é uma família de objetos de $\mathscr{C}$, definindo $\mathscr{D}$ como sendo a categoria onde $\mathrm{Obj}(\mathscr{D}) = \{C_i \mid i \in I\}$ e $\mathrm{Hom}(\mathscr{D}) = \{\mathrm{id}_{C_i} \mid i \in I\}$ e $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ o funtor que leva objetos e morfismos neles mesmos, temos que o **produto** de $(C_i)_{i\in I}$ é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\prod\limits_{j\in I} C_j$, e a segunda coordenada é uma família de morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $(\pi_i : \prod\limits_{j\in I} C_j \to C_i)_{i\in I}$, tal que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e toda família $(f_i : X \to C_i)_{i\in I}$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, existe único morfismo $\Psi : X \to \prod\limits_{j\in I} C_j$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $\pi_i \circ \Psi = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] \arrow[ddl, bend right, "f_{i_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "f_{i_2}"] & \\
  \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \prod\limits_{j\in I} C_j \arrow[dl, "\pi_{i_1}"] \arrow[dr, "\pi_{i_2}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \\
 C_{i_1} & & C_{i_2}
\end{tikzcd}$$

De maneira análoga, o **coproduto** de $(C_i)_{i\in I}$ é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\coprod\limits_{j\in I} C_j$, e a segunda coordenada é uma família de morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $(\iota_i : C_i \to \coprod\limits_{j\in I} C_j)_{i\in I}$, tal que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e toda família $(f_i : C_i \to X)_{i\in I}$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, existe único morfismo $\Psi : \coprod\limits_{j\in I} C_j \to X$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $\Psi \circ \iota_i = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
C_{i_1} \arrow[dr, "\iota_{i_1}"] \arrow[ddr, bend right, "f_{i_1}"'] & & C_{i_2} \arrow[dl, "\iota_{i_2}"'] \arrow[ddl, bend left, "f_{i_2}"] \\
\circlearrowright & \coprod\limits_{j\in I} C_j \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] & \circlearrowright \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Proposição 1. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva.

(a) Se $\big(\prod\limits_{j\in I} C_j, (\pi_i : \prod\limits_{j\in I} C_j \to C_i)_{i\in I}\big)$ é o produto de $(C_i)_{i\in I}$, com $|I| < \infty$, então existem $\iota_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_i, \prod\limits_{j\in I} C_j)$, para cada $i \in I$, tal que $\big(\prod\limits_{j\in I} C_j, (\iota_i)_{i\in I}\big)$ é o coproduto de $(C_i)_{i\in I}$.

(b) Se $\big(\coprod\limits_{j\in I} C_j, (\iota_i : C_i \to \coprod\limits_{j\in I} C_j)_{i\in I}\big)$ é o coproduto de $(C_i)_{i\in I}$, com $|I| < \infty$, então existem $\pi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\prod\limits_{j\in I} C_j, C_i)$, para cada $i \in I$, tal que $\big(\coprod\limits_{j\in I} C_j, (\pi_i)_{i\in I}\big)$ é o produto de $(C_i)_{i\in I}$.

Demonstração. Mostraremos apenas a afirmação (a), pois a (b) é similar. A demonstração é por indução sobre $|I|$. Suponha que $|I| = 2$. Pela definição de produto, tomando o objeto C_1 e os morfismos id_{C_1} e $0_{C_1C_2}$, temos que existe único $\iota_1 : C_1 \to C_1 \prod C_2$ tal que $\pi_1 \circ \iota_1 = \mathrm{id}_{C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_1 = 0_{C_1C_2}$. Novamente, pela definição de produto, tomando, agora, o objeto C_2 e os morfismos id_{C_2} e $0_{C_2C_1}$, temos que existe único $\iota_2 : C_2 \to C_1 \prod C_2$ tal que $\pi_1 \circ \iota_2 = 0_{C_2C_1}$ e $\pi_2 \circ \iota_2 = \mathrm{id}_{C_2}$.

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[d, dashed, "\exists!\iota_1"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}_{C_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "0_{C_1C_2}"] & \\
\circlearrowright & C_1 \prod C_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \circlearrowright \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C_2 \arrow[d, dashed, "\exists!\iota_2"] \arrow[ddl, bend right, "0_{C_2C_1}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}_{C_2}"] & \\
\circlearrowright & C_1 \prod C_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \circlearrowright \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}$$

Para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $j_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1,X)$ e $j_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2,X)$, defina $\varphi_{(j_1,j_2)} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1 \prod C_2,X)$ como sendo $j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2$. Assim, considerando o objeto $C_1 \prod C_2$ e os morfismos $\iota_1 : C_1 \to C_1 \prod C_2$ e $\iota_2 : C_2 \to C_1 \prod C_2$, temos que

$$\pi_1 \circ \varphi_{(\iota_1,\iota_2)} = \pi_1 \circ \iota_1 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \iota_2 \circ \pi_2 = \mathrm{id}_{C_1} \circ \pi_1 + 0_{C_1C_2} \circ \pi_2 = \pi_1.$$

Analogamente, $\pi_2 \circ \varphi_{(\iota_1,\iota_2)} = \pi_2$. Isso significa que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \prod C_2 \arrow[d, dashed, "\varphi_{(\iota_1,\iota_2)}"] \arrow[ddl, bend right, "\pi_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_2"] & \\
& C_1 \prod C_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
C_1 & & C_2
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{id}_{C_1 \prod C_2}$ também comuta esse diagrama, pela unicidade, temos que $\varphi_{(\iota_1,\iota_2)} = \mathrm{id}_{C_1 \prod C_2}$, ou seja, $\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2 = \mathrm{id}_{C_1 \prod C_2}$. A partir dessa observação, vamos mostrar que o coproduto de C_1 e C_2 é o par $\left(C_1 \prod C_2, (\iota_1, \iota_2)\right)$. Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $f_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1,X)$ e $f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2,X)$. Considerando $\varphi_{(f_1,f_2)} = f_1 \circ \pi_1 + f_2 \circ \pi_2$, temos que

$$\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_1 = f_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1 + f_2 \circ \pi_2 \circ \iota_1 = f_1 \circ \mathrm{id}_{C_1} + f_2 \circ 0_{C_1C_2} = f_1.$$

De maneira análoga, $\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_2 = f_2$. Isso quer dizer que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & C_2 \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[ddl, bend left, "f_2"] \\
& C_1 \prod C_2 \arrow[d, dashed, "\varphi_{(f_1,f_2)}"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Suponha que $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1 \prod C_2,X)$ seja um morfismo que também comuta o diagrama acima. Então

$$\begin{aligned}
\varphi_{(f_1,f_2)} - g &= (\varphi_{(f_1,f_2)} - g) \circ \mathrm{id}_{C_1 \prod C_2} \\
&= (\varphi_{(f_1,f_2)} - g) \circ \varphi_{(\iota_1,\iota_2)} \\
&= (\varphi_{(f_1,f_2)} - g) \circ (\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2) \\
&= (\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_1 - g \circ \iota_1) \circ \pi_1 + (\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_2 - g \circ \iota_2) \circ \pi_2 \\
&= (f_1 - f_1) \circ \pi_1 + (f_2 - f_2) \circ \pi_2 \\
&= 0_{C_1 \prod C_2 X}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_{(f_1,f_2)} = g$. Isso significa que $\varphi_{(f_1,f_2)}$ é o único morfismo que comuta o diagrama acima, ou seja, o par $\left(C_1 \prod C_2, (\iota_1, \iota_2)\right)$ é o coproduto de C_1 e C_2. Para $|I| > 2$, aplica-se indução. ⊠

Uma categoria $\mathscr{C}$ é chamada de **aditiva**, se

(a) $\mathscr{C}$ é pré-aditiva,

(b) existe um objeto zero em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e

(c) existe o produto para qualquer família $(C_i)_{i \in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, com $|I| < \infty$.

Seja $\mathscr{D}$ a categoria com dois objetos, D_1 e D_2, e dois morfismos paralelos de um objeto para o outro, φ_1 e φ_2. Pense em $\mathscr{D}$ como sendo representada pelo diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\varphi_2"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ um morfismo. Defina $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ como sendo o funtor tal que $F(D_1) = C_1$, $F(D_2) = C_2$, $F(\varphi_1) = f$ e $F(\varphi_2) = 0_{C_1C_2}$.

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\varphi_2"'] & D_2 \arrow[r, mapsto, "F"] & C_1 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "0_{C_1C_2}"'] & C_2
\end{tikzcd}$$

Definimos o **núcleo** de f como sendo o limite de F, ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\ker(f)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $k : \ker(f) \to C_1$, tal que $f \circ k = 0_{\ker(f)C_2}$ e, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e todo $g : X \to C_1$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, que satisfazem a propriedade $f \circ g = 0_{XC_2}$, existe único morfismo $\Psi : X \to \ker(f)$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $k \circ \Psi = g$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] \arrow[ddr, bend left=60, "0_{XC_2}"] & \\
 {} & \ker(f) \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)C_2}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & {} \\
C_1 \arrow[rr, bend left=10, "f"] \arrow[rr, bend right=10, "0_{C_1C_2}"'] & {} & C_2
\end{tikzcd}$$

Similarmente, o **conúcleo** de f é o colimite de F, ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\mathrm{coker}(f)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $q : C_2 \to \mathrm{coker}(f)$, tal que $q \circ f = 0_{C_1\,\mathrm{coker}(f)}$ e, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e todo $g : C_2 \to X$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, que satisfazem a propriedade $g \circ f = 0_{C_1X}$, existe único morfismo $\Psi : \mathrm{coker}(f) \to X$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $\Psi \circ q = g$.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[rr, bend left=10, "0_{C_1C_2}"] \arrow[rr, bend right=10, "f"'] \arrow[dr, "0_{C_1\,\mathrm{coker}(f)}"'] \arrow[ddr, bend right=60, "0_{C_1X}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & C_2 \arrow[dl, "q"] \arrow[ddl, bend left=60, "g"] \\
 {} & \mathrm{coker}(f) \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] & {} \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Uma categoria $\mathscr{C}$ é dita **pré-abeliana**, se $\mathscr{C}$ é aditiva e se, para todo $f : X \to Y$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, existe núcleo e conúcleo de f.

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$. Dizemos que f é **monomorfismo**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, C_1)$, temos que $g_1 = g_2$, sempre que $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Dizemos que f é **epimorfismo**, se, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2, X)$, temos que $g_1 = g_2$, sempre que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.

Lema 2. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-aditiva, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$, $(\ker(f), k : \ker(f) \to C_1)$ o núcleo de f e $(\mathrm{coker}(f), q : C_2 \to \mathrm{coker}(f))$ o conúcleo de f. Então k é monomorfismo e q é epimorfismo.

Demonstração. Mostraremos apenas que k é monomorfismo, já que a demonstração que q é epimorfismo é análoga. Sejam $i, j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$ tais que $k \circ i = k \circ j$. Então $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$. Pela definição de núcleo de f, tomando o objeto X e o morfismo 0_{XC_1}, temos que existe único morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$ tal que $k \circ \psi = 0_{XC_1}$. Uma vez que $k \circ 0_{X\,\ker(f)} = 0_{XC_1}$, então tal ψ é, exatamente, $0_{X\,\ker(f)}$. Acontece que $i - j \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$ também satisfaz a condição de $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "i-j"] \arrow[ddl, bend right=60, "0_{XC_1}"'] \arrow[ddr, bend left=60, "0_{XC_2}"] & \\
 & \ker(f) \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)C_2}"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
C_1 \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "0_{C_1C_2}"'] & & C_2
\end{tikzcd}
$$

Portanto, pela unicidade, $i - j = 0_{X\,\ker(f)}$. Logo, $i = j$. $\boxtimes$

Proposição 2. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria pré-abeliana e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Sejam também

(a) $(\ker(f), k)$ o núcleo f,

(b) $(\mathrm{coker}(f), q)$ o conúcleo de f,

(c) $(\ker(q), k')$ o núcleo q e

(d) $(\mathrm{coker}(k), q')$ o conúcleo de k.

Então existe único $\overline{f} : \mathrm{coker}(k) \to \ker(q)$ tal que $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$.

$$
\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r, "q"] & \operatorname{coker}(f) \\
& \operatorname{coker}(k) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \ker(q) \arrow[u, "k'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Demonstração. Pela definição de conúcleo de f, temos que $q \circ f = 0_{X\,\operatorname{coker}(f)}$. Logo, pela definição de núcleo de q, exite único $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(q))$ tal que

$$
k' \circ f' = f, \tag{1}
$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "f'"] \arrow[ddl, bend right=50, "f"'] \arrow[ddr, bend left=50, "0_{X\,\operatorname{coker}(f)}"] & \\
{} & \ker(q) \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dl, "k'"'] \arrow[dr, "0_{\ker(q)\,\operatorname{coker}(f)}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \\
Y \arrow[rr, bend left=10, "q"] \arrow[rr, bend right=10, "0_{Y\,\operatorname{coker}(f)}"'] & {} & \operatorname{coker}(f)
\end{tikzcd}
$$

Uma vez que $(\ker(f), k)$ o núcleo f, então $f \circ k = 0_{\ker(f)Y}$. Daí, podemos concluir que

$$
k' \circ f' \circ k \overset{(1)}{=} f \circ k = 0_{\ker(f)Y} = k' \circ 0_{\ker(f)\,\ker(q)}.
$$

Não perca de vista que temos a seguinte cadeia de morfismo:

$$
\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \ker(q) \arrow[r, "k'"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Logo, como k' é monomorfismo, $f' \circ k = 0_{\ker(f)\ker(q)}$. Daí, pela definição de conúcleo de k, exite único $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{coker}(k), \ker(q))$

$$\overline{f} \circ q' = f', \tag{2}$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[rr, shift left, "0_{\ker(f)X}"] \arrow[rr, shift right, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)\,\mathrm{coker}(k)}"'] \arrow[ddr, bend right=60, "0_{\ker(f)\ker(q)}"'] & & X \arrow[dl, "q'"] \arrow[ddl, bend left=60, "f'"] \\
 & \mathrm{coker}(k) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] & \\
 & \ker(q) &
\end{tikzcd}$$

Com isso, obtemos

$$k' \circ \overline{f} \circ q' \overset{(2)}{=} k' \circ f' \overset{(1)}{=} f.$$

o que conclui a demonstração. $\boxtimes$

Uma categoria $\mathscr{C}$ é denominada **abeliana**, se $\mathscr{C}$ é pré-abeliana e se, para todo $f : X \to Y$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, o morfismo $\overline{f}$, dado pelo Proposição 2, é um isomorfismo.

Exemplo 1. Vamos ver que a categoria $\mathfrak{AbGrp}$ é uma categoria abeliana. Sabemos, da Teoria de Grupos, que $\mathfrak{AbGrp}$ é pré-aditiva, já que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(G,H)$ é grupo abeliano e a composição é bilinear. O grupo trivial $\{0\}$ é o elemento zero dessa categoria e, no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos que, dados $(G_i)_{i=1}^n$ grupo abelianos, a soma direta $\bigoplus_{i=1}^n G_i$, junto das inclusões $\iota_i : G_i \to \bigoplus_{i=1}^n G_i$, é o coproduto de $(G_i)_{i=1}^n$. Portanto, $\mathfrak{AbGrp}$ é aditiva. Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(G,H)$. Afirmamos que

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = 0\}, \quad \text{junto do morfismo} \quad \begin{array}{rccc} k: & \ker(f) & \to & G \\ & g & \mapsto & g \end{array}$$

é o núcleo de f, e

$$\operatorname{coker}(f) = {}^{H}\!/_{\operatorname{im}(f)}, \quad \text{junto do morfismo} \quad \begin{array}{rccl} q: & H & \to & \operatorname{coker}(f) \\ & h & \mapsto & h + \operatorname{im}(f) \end{array}$$

onde $\operatorname{im}(f) = \{h \in H \mid \exists\, g \in G \ f(g) = h\}$, é o conúcleo de f. Vamos mostrar só a afirmação para o núcleo. Note que $f \circ k = 0$, pois $f(g) = 0$, para todo $g \in \ker(f)$. Sejam $X \in \operatorname{Obj}(\mathfrak{AbGrp})$ e $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(X, G)$ tal que $f \circ g = 0$. Isso quer dizer que $f(g(x)) = 0$, para todo $x \in X$, ou seja, $g(x) \in \ker(f)$. Daí, podemos restringir o contradomínio de g e considerá-la em $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(X, \ker(f))$. Assim, temos que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[ddl, bend right=60, "g"'] \arrow[ddr, bend left=60, "0_{XH}"] & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \ker(f) \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "0_{\ker(f)H}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & {} \\
G \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "0_{GH}"'] & {} & H
\end{tikzcd}$$

Seja $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(X, \ker(f))$ tal que $k \circ h = g$. Então, como $g = k \circ g$, temos que $k \circ h = k \circ g$. Uma vez que, por definição, k é injetiva, temos que $h = g$. Portanto, $(\ker(f), k)$ é o núcleo de f. Logo, $\mathfrak{AbGrp}$ é pré-abeliana. Finalmente, seja $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(G, H)$ e sejam

- $(\ker(f), \ker(f) \xrightarrow{k} G)$ o núcleo f,
- $(\operatorname{coker}(f), H \xrightarrow{q} \operatorname{coker}(f))$ o conúcleo de f,
- $(\ker(q), \ker(q) \xrightarrow{k'} H)$ o núcleo q e
- $(\operatorname{coker}(k), G \xrightarrow{q'} \operatorname{coker}(k))$ o conúcleo de k.

Note que $\ker(q) = \{h \in H \mid q(h) = 0\} = \{h \in H \mid h + \operatorname{im}(f) = 0\}$. Logo, $\ker(q) \subseteq \operatorname{im}(f)$. Reciprocamente, se $h \in \operatorname{im}(f)$, então $h + \operatorname{im}(f) = 0$, ou seja, $q(h) = 0$. Assim, $\ker(q) = \operatorname{im}(f)$. Agora, veja que $\operatorname{coker}(k) = {}^{G}\!/_{\operatorname{im}(k)}$. Mas k é injetiva, logo $\operatorname{im}(k) =$

$\ker(f)$. Daí, $\operatorname{coker}(k) = {}^{G}\!\big/_{\ker(f)}$. Pelo Teorema do Isomorfismo, o homomorfismo de grupos $\overline{f} : {}^{G}\!\big/_{\ker(f)} \to \operatorname{im}(f)$, $g + \ker(f) \mapsto f(g)$, é um isomorfismo. Logo,

$$\begin{array}{rrcl} \overline{f} : & \operatorname{coker}(k) & \to & \ker(q) \\ & g + \ker(f) & \mapsto & f(g) \end{array}$$

é um isomorfismo. Pela definição de núcleo e conúcleo, temos que

$$k'\big(\overline{f}(q'(g))\big) = k'\big(\overline{f}(g + \underbrace{\operatorname{im}(k)}_{=\ker(f)})\big) = k'(f(g)) = f(g),$$

isto é, $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$. Portanto, $\mathfrak{AbGrp}$ é abeliana. □

Observação 2. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria e considere a categoria cujos objetos são funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathfrak{AbGrp}$ e cujos morfismos são transformações naturais, a qual denotaremos por $\mathfrak{Func}(\mathscr{C}, \mathfrak{AbGrp})$. Vamos ver, sem muitos detalhes, que essa categoria é abeliana.

- Sejam $F, G : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores e $\eta, \nu : F \to G$ transformações naturais. Dado $C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$, definimos $(\eta + \nu)_C := \eta_C + \nu_C$ (note que a soma à direita da igualmente é a soma entre homomorfismos de grupos). Isso faz $\eta + \nu := (\eta_C + \nu_C)_{C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})}$ uma transformação natural. Além disso, com tal soma, $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C}, \mathfrak{AbGrp})}(F, G)$ é um grupo abeliano, já que $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{AbGrp}}(F(C), G(C))$ é um grupo abeliano.

- Sejam $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores e $\eta, \nu : F \to G$ e $\zeta : H \to F$ transformações naturais. Dado $C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$, definimos $\big((\eta + \nu) \circ \zeta\big)_C := (\eta_C + \nu_C) \circ \zeta_C$ (note que a composição à direita da igualmente é a composição entre homomorfismos de grupos). Assim, a composição em $\mathfrak{Func}(\mathscr{C}, \mathfrak{AbGrp})$ herda a bilinearidade da composição em $\mathfrak{AbGrp}$.

- Seja $0_{\mathfrak{AbGrp}}$ o objeto zero em $\mathfrak{AbGrp}$. Defina $0_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C}, \mathfrak{AbGrp})} : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$, como sendo o funtor tal que $C \mapsto 0_{\mathfrak{AbGrp}}$ e $C_1 \xrightarrow{f} C_2 \mapsto 0_{\mathfrak{AbGrp}} \xrightarrow{0_{0_{\mathfrak{AbGrp}} 0_{\mathfrak{AbGrp}}}} 0_{\mathfrak{AbGrp}}$. Tal funtor é o objeto zero em $\mathfrak{Func}(\mathscr{C}, \mathfrak{AbGrp})$, porque, dado qualquer funtor $F : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$, se $\eta : 0_{\mathfrak{Func}(\mathscr{C}, \mathfrak{AbGrp})} \to F$ é uma transformação natural, então η_C só pode ser o homomorfismo que leva $0_{\mathfrak{AbGrp}}$ em $0_{\mathfrak{AbGrp}}$, para todo $C \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$.

- Sejam $F_1, \dots, F_n : \mathscr{C} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores. Defina o funtor

$$
\begin{array}{rcccl}
\displaystyle\bigoplus_{i=1}^n F_i : & \mathscr{C} & \to & \mathfrak{AbGrp} & \\
& C & \mapsto & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^n F_i(C) & \\
& C_1 \xrightarrow{f} C_2 & \mapsto & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^n F_i(C_1) \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^n F_i(f)} \bigoplus_{i=1}^n F_i(C_2) & \\
& & & (g_i)_{i=1}^n \quad \mapsto \quad \big(F_i(f)(g_i)\big)_{i=1}^n. &
\end{array}
$$

Para $j = 1, \dots, n$, defina a transformação natural $\eta^j : F_j \to \bigoplus_{i=1}^n F_i$, onde $\eta^j_C = \iota^j_C : F_j(C) \to \bigoplus_{i=1}^n F_i(C)$ a inclusão. Pode-se provar que $\bigoplus_{i=1}^n F_i$, junto das transformações naturais $\eta^j : G_j \to \bigoplus_{i=1}^n G_i$, é o coproduto de $(F_i)_{i=1}^n$.

- Seja $\eta : F \to G$ uma transformação natural. Defina o funtor

$$
\begin{array}{rcccl}
\ker(\eta) : & \mathscr{C} & \to & \mathfrak{AbGrp} & \\
& C & \mapsto & \ker(\eta_C) & \\
& C_1 \xrightarrow{f} C_2 & \mapsto & \ker(\eta_{C_1}) \xrightarrow{\ker(\eta)(f)} \ker(\eta_{C_2}) & \\
& & & g \quad \mapsto \quad F(f)(g). &
\end{array}
$$

Usando a definição de núcleo de um homomorfismo de grupos e o fato de $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$, pode-se provar que esse funtor está bem definido. Defina a transformação natural $k : \ker(\eta) \to F$, onde $k_C : \ker(\eta_C) \to F(C)$, $g \mapsto g$ é a inclusão. Pode-se também provar que $(\ker(\eta), k)$ é o núcleo de η. Similarmente, defina o funtor

$$
\begin{array}{rcccl}
\operatorname{coker}(\eta) : & \mathscr{C} & \to & \mathfrak{AbGrp} & \\
& C & \mapsto & \operatorname{coker}(\eta_C) = {}^{G(C)}\!\big/_{\operatorname{im}(\eta_C)} & \\
& C_1 \xrightarrow{f} C_2 & \mapsto & {}^{G(C_1)}\!\big/_{\operatorname{im}(\eta_{C_1})} \xrightarrow{\operatorname{coker}(\eta)(f)} {}^{G(C_2)}\!\big/_{\operatorname{im}(\eta_{C_2})} & \\
& & & g + \operatorname{im}(\eta_{C_1}) \quad \mapsto \quad G(f)(g) + \operatorname{im}(\eta_{C_2}). &
\end{array}
$$

Novamente, usando que $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$, pode-se provar que esse funtor está bem definido. Definindo, agora, a transformação natural $q : G \to \operatorname{coker}(\eta)$, onde $q_C : G(C) \to$

$\operatorname{coker}(\eta_C)$, $g \mapsto g + \operatorname{im}(\eta_C)$, pode-se também provar que $(\operatorname{coker}(\eta), q)$ é o conúcleo de η.

• Dado $\eta : F \to G$ uma transformação natural, pelo Exemplo 1, temos que $\overline{\eta}_C : \operatorname{coker}(k_C) \to \ker(q_C)$, $g + \ker(\eta_C) \mapsto \eta_C(g)$ é um isomorfismo e comuta o diagrama da Proposição 2. Isso prova que que $\overline{\eta} : \operatorname{coker}(k) \to \ker(q)$ é isomorfismo e que comuta o mesmo diagrama.

Com isso, temos que $\mathfrak{Func}(\mathscr{C},\mathfrak{AbGrp})$ é uma categoria abeliana. $\square$

Apresentada a definição de categoria abeliana, estamos quase prontos para enunciarmos o Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze. Falta vermos os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Porém, antes, vamos a mais alguns conceitos.

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem limites e colimites e $(f_i : X_i \to Y_i)_{i \in I}$ uma família de morfismos em $\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$. Sejam $\Big(\prod\limits_{j\in I} X_j, (\pi_i^X : \prod\limits_{j\in I} X_j \to X_i)_{i\in I}\Big)$ o produto de $(X_i)_{i\in I}$ e $\Big(\prod\limits_{j\in I} Y_j, (\pi_i^Y : \prod\limits_{j\in I} Y_j \to Y_i)_{i\in I}\Big)$ o produto de $(Y_i)_{i\in I}$. Pela propriedade universal do produto, existe único morfismo em $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\prod\limits_{j\in I} X_j, \prod\limits_{j\in I} Y_j)$, o qual denotaremos por $\prod\limits_{j\in I} f_j$, tal que $\pi_i^Y \circ \prod\limits_{j\in I} f_j = f_i \circ \pi_i^X$, para todo $i \in I$, ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & \prod\limits_{j\in I} X_j \arrow[dl, "\pi^X_{i_1}"'] \arrow[dr, "\pi^X_{i_2}"] \arrow[dd, dashed, "\exists!\prod\limits_{j\in I} f_j"] & \\
X_{i_1} \arrow[dd, "f_{i_1}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & X_{i_2} \arrow[dd, "f_{i_2}"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"'] \\
 & \prod\limits_{j\in I} Y_j \arrow[dl, "\pi^Y_{i_1}"] \arrow[dr, "\pi^Y_{i_2}"'] & \\
Y_{i_1} & & Y_{i_2}
\end{tikzcd}$$

O morfismo $\prod\limits_{j\in I} f_j$ é dito **produto** de $(f_i)_{i\in I}$. Similarmente, o **coproduto** de $(f_i)_{i\in I}$ é o único morfismo em $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod\limits_{j\in I} X_j, \coprod\limits_{j\in I} Y_j)$, o qual denotaremos por $\coprod\limits_{j\in I} f_j$, que $\coprod\limits_{j\in I} f_j \circ \iota_i^X = \iota_i^Y \circ f_i$, para todo $i \in I$, ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
X_{i_1} \arrow[dr, "\iota_{i_1}^X"] \arrow[dd, "f_{i_1}"'] \arrow[dddr, phantom, "\circlearrowleft"] & & X_{i_2} \arrow[dl, "\iota_{i_2}^X"'] \arrow[dd, "f_{i_2}"] \arrow[dddl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \coprod\limits_{j \in I} X_j \arrow[dd, dashed, "\exists! \coprod\limits_{j \in I} f_j"] & \\
Y_{i_1} \arrow[dr, "\iota_{i_1}^Y"'] & & Y_{i_2} \arrow[dl, "\iota_{i_2}^Y"] \\
& \coprod\limits_{j \in I} Y_j &
\end{tikzcd}
$$

Observação 3. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem limites e colimites e $(f_i : X_i \to Y_i)_{i \in I}$ e $(g_i : Y_i \to Z_i)_{i \in I}$ famílias de morfismos em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$. Considere o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{j \in I} X_j \arrow[dl, "\pi_{i_1}^X"'] \arrow[dr, "\pi_{i_2}^X"] \arrow[dd, dashed, "\prod\limits_{j \in I} f_j"] & \\
X_{i_1} \arrow[dd, "f_{i_1}"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft"] & & X_{i_2} \arrow[dd, "f_{i_2}"] \arrow[ddl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \prod\limits_{j \in I} Y_j \arrow[dl, "\pi_{i_1}^Y"'] \arrow[dr, "\pi_{i_2}^Y"] \arrow[dd, dashed, "\prod\limits_{j \in I} g_j"] & \\
Y_{i_1} \arrow[dd, "g_{i_1}"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft"] & & Y_{i_2} \arrow[dd, "g_{i_2}"] \arrow[ddl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \prod\limits_{j \in I} Z_j \arrow[dl, "\pi_{i_1}^Z"'] \arrow[dr, "\pi_{i_2}^Z"] & \\
Z_{i_1} & & Z_{i_2}
\end{tikzcd}
$$

Pode-se provar, usando a comutatividade do diagrama e a unicidade do produto de morfismos, que

$$
\prod_{j \in I} (g_j \circ f_j) = \prod_{j \in I} g_j \circ \prod_{j \in I} f_j
$$

O mesmo raciocínio se aplica para o coproduto de morfismos. $\square$

Seja $\mathscr{D}$ uma categoria de índices (no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, chamamos $\mathscr{D}$ de “categoria combinatória”). Essa categoria é chamada **filtrada**, se

(a) $\mathrm{Obj}(\mathscr{D}) \neq \varnothing$,

(b) para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, existe $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Z) \neq \varnothing \neq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Y,Z)$,

(c) dados $f, g : X \to Y$, existem $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ e $h : Y \to Z$ tal que $h \circ f = h \circ g$.

Se $\mathscr{C}$ é uma categoria onde existem limites e colimites e $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ é um funtor, onde $\mathscr{D}$ é uma categoria filtrada, o colimite de F é dito **colimite filtrado**.

Sejam $F, G, H : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores, com $\mathscr{D}$ sendo uma categoria de índices e $\mathscr{C}$ uma categoria abeliana. Sejam $\eta : F \to G$ e $\nu : G \to H$ transformações naturais. Se, para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, a sequência $0 \to F(D) \xrightarrow{\eta(D)} G(D) \xrightarrow{\nu(D)} H(D) \to 0$ é uma sequência exata curta em $\mathscr{C}$, então dizemos que a sequência $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$ é uma sequência exata curta na categoria cujos objetos são funtores de $\mathscr{D}$ para $\mathscr{C}$ e cujos morfismos são transformações naturais.

Considere ainda $F, G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ como no parágrafo anterior e $\eta : F \to G$ uma transformação natural qualquer. Sejam $\left(\mathrm{colim}(F), (\varphi_D^F : F(D) \to \mathrm{colim}(F))_{D \in \mathrm{Obj}(D)}\right)$ e $\left(\mathrm{colim}(G), (\varphi_D^G : G(D) \to \mathrm{colim}(G))_{D \in \mathrm{Obj}(D)}\right)$ colimites de F e G, respectivamente. Se $D_1, D_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ e $f : D_1 \to D_2$ é um morfismo, então, pela propriedade da transformação natural η, temos que $G(f) \circ \eta_{D_1} = \eta_{D_2} \circ F(f)$. Pela propriedade do colimite de G, temos que $\varphi_{D_1}^G = \varphi_{D_2}^G \circ G(f)$.

$$\begin{tikzcd}
F(D_1) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_{D_1}^F"'] \arrow[dd, "\eta_{D_1}"'] & & F(D_2) \arrow[dl, "\varphi_{D_2}^F"] \arrow[dd, "\eta_{D_2}"] \\
& \mathrm{colim}(F) \arrow[dd, dashed, "\exists!\, \mathrm{colim}(\eta)"] & \\
G(D_1) \arrow[rr, "G(f)"] \arrow[dr, "\varphi_{D_1}^G"'] & & G(D_2) \arrow[dl, "\varphi_{D_2}^G"] \\
& \mathrm{colim}(G) &
\end{tikzcd}$$

Portanto,

$$\varphi_{D_2}^G \circ \eta_{D_2} \circ F(f) = \varphi_{D_2}^G \circ G(f) \circ \eta_{D_1} = \varphi_{D_1}^G \circ \eta_{D_1},$$

como se vê no diagrama anterior. Logo, pela propriedade do colimite de F, existe único morfismo de $\operatorname{colim}(F)$ para $\operatorname{colim}(G)$, o qual denotaremos por $\operatorname{colim}(\eta)$, tal que $\operatorname{colim}(\eta) \circ \varphi_D^F = \varphi_D^G \circ \eta_D$, para todo $D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})$.

Definimos o **produto** de $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$, uma família de categorias, denotado por $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{D}_i$, como sendo a categoria cujos objetos são $\prod\limits_{i\in I} D^i$, onde $D^i \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D}_i)$, e os morfismos são $\prod\limits_{i\in I} f^i$, onde $f^i \in \operatorname{Hom}(\mathscr{D}_i)$. Pode-se provar que se $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ é uma família de categorias filtradas, então $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{D}_i$ também é uma categoria filtrada. Sejam $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ uma família de categorias filtradas, $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem limites e colimites, e $F_i : \mathscr{D}_i \to \mathscr{C}$ funtores indexados por $i \in I$. Seja $\big(\operatorname{colim}(F_i), (\psi^i_{D^i} : F_i(D^i) \to \operatorname{colim}(F_i))_{D^i \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D}_i)}\big)$ o colimite de F_i. Se $f^i : D_1^i \to D_2^i$ é um morfismo em $\operatorname{Hom}(\mathscr{D}_i)$, então, pela propriedade do colimite de F_i, $\psi^i_{D_1^i} = \psi^i_{D_2^i} \circ F_i(f^i)$. Defina o funtor $F : \prod\limits_{i\in I} \mathscr{D}_i \to \mathscr{C}$, onde $F(\prod\limits_{i\in I} D^i) = \prod\limits_{i\in I} F_i(D^i)$ e $F(\prod\limits_{i\in I} f^i) = \prod\limits_{i\in I} F_i(f^i)$. Seja $\big(\operatorname{colim}(F), (\varphi_{\prod\limits_{i\in I} D^i} : F(\prod\limits_{i\in I} D^i) \to \operatorname{colim}(F))_{\prod\limits_{i\in I} D^i \in \operatorname{Obj}(\prod\limits_{i\in I} \mathscr{D}_i)}\big)$ o colimite de F. Se $\prod\limits_{i\in I} f^i : \prod\limits_{i\in I} D_1^i \to \prod\limits_{i\in I} D_2^i$ é um morfismo em $\operatorname{Hom}(\prod\limits_{i\in I} \mathscr{D}_i)$, usando a Observação 3, temos que

$$\prod_{i\in I} \psi^i_{D_2^i} \circ \prod_{i\in I} F_i(f^i) = \prod_{i\in I} (\psi^i_{D_2^i} \circ F_i(f^i)) = \prod_{i\in I} \psi^i_{D_1^i}$$

o que quer dizer que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} F_i(D_1^i) \arrow[rr, "\prod\limits_{i\in I} F_i(f^i)"] \arrow[dr, "\varphi_{\prod\limits_{i\in I} D_1^i}"'] \arrow[ddr, bend right, "\prod\limits_{i\in I} \psi^i_{D_1^i}"'] & & \prod\limits_{i\in I} F_i(D_2^i) \arrow[dl, "\varphi_{\prod\limits_{i\in I} D_2^i}"] \arrow[ddl, bend left, "\prod\limits_{i\in I} \psi^i_{D_2^i}"] \\
& \operatorname{colim}(F) \arrow[d, dashed, "\exists! \xi"] & \\
& \prod\limits_{i\in I} \operatorname{colim}(F_i) &
\end{tikzcd}$$

Logo, pela propriedade do colimite de F, existe único morfismo $\xi : \operatorname{colim}(F) \to \prod\limits_{i\in I} \operatorname{colim}(F_i)$ tal que $\xi \circ \varphi_{\prod\limits_{i\in I} D^i} = \prod\limits_{i\in I} \psi^i_{D^i}$, para todo $\prod\limits_{i\in I} D^i \in \operatorname{Obj}(\prod\limits_{i\in I} \mathscr{D}_i)$.

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria onde existem limites e colimites, $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ e considere o funtor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\cdot): \quad \mathscr{C} & \to & \mathrm{Set} \\ Y & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \\ f: Y_1 \to Y_2 & \mapsto & f^*: \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y_2) \\ & & \qquad\qquad\qquad g \mapsto f \circ g \end{array}$$

Seja $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ um funtor, com $\mathscr{D}$ sendo uma categoria filtrada, e considere a composição $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,F(\cdot))$. Sendo $\big(\mathrm{colim}(F),(\psi_D : F(D) \to \mathrm{colim}(F))_{D\in\mathrm{Obj}(\mathscr{D})}\big)$ o colimite de F, então, para todo $f : D_1 \to D_2$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{D})$, temos que $\psi_{D_1} = \psi_{D_2} \circ F(f)$. Assim, note que, se $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,F(D_1))$, então

$$(\psi^*_{D_2} \circ F(f)^*)(g) = \psi^*_{D_2}(F(f) \circ g) = \psi_{D_2} \circ F(f) \circ g = \psi_{D_1} \circ g = \psi^*_{D_1}(g),$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,F(D_1)) \arrow[rr, "F(f)^*"] \arrow[dr, "\varphi_{D_1}"] \arrow[ddr, bend right, "\psi^*_{D_1}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,F(D_2)) \arrow[dl, "\varphi_{D_2}"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi^*_{D_2}"] \\
& \mathrm{colim}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,F(\cdot))\big) \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\mathrm{colim}(F)) &
\end{tikzcd}$$

Logo, existe único morfismo $\Psi : \mathrm{colim}\big(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,F(\cdot))\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\mathrm{colim}(F))$, pela propriedade do colimite de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,F(\cdot))$, tal que $\Psi \circ \varphi_D = \psi^*_D$, para todo $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$. Se o morfismo Ψ for um isomorfismo, então dizemos que X é **compacto**.

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\cdot)$ preserva epimorfismos, então dizemos que X é **projetivo**. Se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\cdot)$ é fiel, então dizemos que X é um **gerador** de $\mathscr{C}$.

Agora, vamos ver os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Seja $\mathscr{C}$ uma categoria abeliana. Os axiomas são:

(AB3) existe o coproduto para qualquer família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, com I um conjunto de índices qualquer, (AB4) $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3) e coprodutos são exatos, isto é, se I é um conjunto de índices e $0 \to X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \to 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$ e $X_i, Y_i, Z_i \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, então a sequência

$$0 \to \coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I} f_i} \coprod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I} g_i} \coprod_{i\in I} Z_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta,

(AB5) $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3) e colimites filtrados são exatos, isto é, se $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$ é uma sequência exata curta, com $F, G, H : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funtores, onde $\mathscr{D}$ é uma categoria filtrada, então a sequência

$$0 \to \mathrm{colim}(F) \xrightarrow{\mathrm{colim}(\eta)} \mathrm{colim}(G) \xrightarrow{\mathrm{colim}(\nu)} \mathrm{colim}(H) \to 0$$

também é uma sequência exata curta,

(AB6) $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3) e o morfismo $\xi : \mathrm{colim}(F) \to \prod_{i\in I} \mathrm{colim}(F_i)$ é um isomorfismo, onde

- $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ é uma família de categorias filtradas,
- $F_i : \mathscr{D}_i \to \mathscr{C}$ funtores indexados por $i \in I$,
- $F : \prod_{i\in I} \mathscr{D}_i \to \mathscr{C}$ é um funtor, onde $F(\prod_{i\in I} D^i) = \prod_{i\in I} F_i(D^i)$ e $F(\prod_{i\in I} f^i) = \prod_{i\in I} F_i(f^i)$

conforme apresentado em algum parágrafo anterior,

(AB3*) existe o produto para qualquer família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, com I um conjunto de índices qualquer,

(AB4*) $\mathscr{C}$ satisfaz (AB3*) e produtos são exatos, isto é, se I é um conjunto de índices e $0 \to X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \to 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$ e $X_i, Y_i, Z_i \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, então a sequência

$$0 \to \prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\prod_{i\in I} f_i} \prod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\prod_{i\in I} g_i} \prod_{i\in I} Z_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

Observação 4. Analogamente a definição de núcleo e conúcleo de um morfismo, considere $\mathscr{D}$ a categoria com dois objetos, D_1 e D_2, e dois morfismos paralelos de um objeto para o outro, φ_1 e φ_2, e sejam $\mathscr{C}$ uma categoria abeliana e $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ morfismos. Defina $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ como sendo o funtor tal que $F(D_1) = C_1$, $F(D_2) = C_2$, $F(\varphi_1) = f$ e $F(\varphi_2) = g$.

$$
\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\varphi_2"'] & D_2 & \overset{F}{\longmapsto} & C_1 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & C_2
\end{tikzcd}
$$

Definimos o **equalizador** de f e g como sendo o limite de F, ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\mathrm{eq}(f, g)$, e a segunda coordenada é um morfismo em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, $e : \mathrm{eq}(f, g) \to C_1$, tal que $f \circ e = g \circ e$ e, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e todo $h : X \to C_1$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, que satisfazem a propriedade $f \circ h = g \circ h$, existe único morfismo $\Psi : X \to \mathrm{eq}(f, g)$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ tal que $e \circ \Psi = h$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] \arrow[ddl, bend right=60, "h"'] \arrow[ddr, bend left=60, "g \circ h"] & \\
 & \mathrm{eq}(f,g) \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "g \circ e"] & \\
C_1 \arrow[rr, bend left=10, "f"] \arrow[rr, bend right=10, "g"'] & & C_2
\end{tikzcd}
$$

Similarmente, definimos o **coequalizador** de f e g como sendo o colimite de F. Uma vez que $\mathscr{C}$ é uma categoria abeliana, temos que existem núcleo e conúcleo, para todo morfismo. Assim, pode-se mostrar que $\big(\ker(f-g), k : \ker(f-g) \to C_1\big)$ é o equalizador de f e g e que $\big(\mathrm{coker}(f-g), q : C_2 \to \mathrm{coker}(f-g)\big)$ é o coequalizador de f e g.

No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos um teorema que diz: "se $\mathscr{C}$ é uma categoria que possui (co)produtos arbitrários e (co)equalizadores, então todo funtor $F : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ possui (co)limite". Logo, os axiomas (AB3) e (AB3*) são equivalentes a dizer, respectivamente, que todo colimite existe e que todo limite existe. $\square$

Exemplo 2. Apresentaremos, sem muitos detalhes, as ideais que justificam que a categoria $\mathfrak{AbGrp}$ satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*).

(AB3) Sejam $(G_i)_{i\in I}$ uma família de grupos abelianos. Então $\left(\bigoplus_{i\in I} G_i, (\iota_i : G_i \to \bigoplus_{i\in I} G_i)_{i\in I}\right)$ é o coproduto de $(G_i)_{i\in I}$, onde $\bigoplus_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} \mid g_i \in G_i$ e $g_i \neq 0$ somente para uma quantidade finita de índices$\}$. Para ver isso, basta notar que, dados $f_i : G_i \to X$ homomorfismos de grupos indexados por $i \in I$, temos que $\psi : \bigoplus_{i\in I} G_i \to X$, $(g_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(g_i)$ é o único homomorfismo tal que $f_i = \psi \circ \iota_i$.

(AB4) Sejam $(G_i)_{i\in I}$, $(H_i)_{i\in I}$ e $(K_i)_{i\in I}$ famílias de grupos abelianos e $(f_i : G_i \to H_i)_{i\in I}$ e $(r_i : H_i \to K_i)_{i\in I}$ famílias de homomorfismos de grupos tais que $0 \to G_i \xrightarrow{f_i} H_i \xrightarrow{r_i} K_i \to 0$ é uma sequência exata curta, com $i \in I$. Pode-se provar que o coproduto de $(f_i)_{i\in I}$ é o homomorfismo $\bigoplus_{i\in I} f_i : \bigoplus_{i\in I} G_i \to \bigoplus_{i\in I} H_i$, $(g_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(g_i))_{i\in I}$. O mesmo vale para o coproduto de $(r_i)_{i\in I}$. Assim, usando que f_i é injetiva, r_i é sobrejetiva e $\mathrm{im}(f_i) = \ker(r_i)$, para todo $i \in I$, pode-se provar que

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} G_i \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I} f_i} \bigoplus_{i\in I} H_i \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I} r_i} \bigoplus_{i\in I} K_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

(AB5) Sejam $\mathscr{D}$ uma categoria filtrada e $F, G, H : \mathscr{D} \to \mathfrak{AbGrp}$ funtores tais que $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$ é uma sequência exata curta. Seja $\bigsqcup_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D)$ a união disjunta de todos os grupos $F(D)$, indexados por $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, isto é,

$$\bigsqcup_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D) = \bigcup_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} \{\underbrace{(x, D)}_{\substack{\shortparallel \\ x_D}} \mid x \in F(D)\} = \bigcup_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} \{x_D \in F(D)\}.$$

Defina a relação $\sim$ em $\bigsqcup_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D)$ da seguinte maneira:

$$x_{D_1} \sim x_{D_2} \iff \exists D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})\ \exists d_1 : D_1 \to D\ \exists d_2 : D_2 \to D \quad F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2})$$

Pode-se provar que essa relação é uma relação de equivalência. Assim, podemos considerar o conjunto das classes de equivalência, $\left(\bigsqcup_{D\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})} F(D)\right)\big/\!\sim\; = \{[x_D] \mid x_D \in F(D)\} =: L_F$. Sejam $[x_{D_1}]$ e $[x_{D_2}]$ duas classes de equivalência e $D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ tal que existe $d_1 : D_1 \to D$ e $d_2 : D_2 \to D$ (lembre-se de que $\mathscr{D}$ é uma categoria filtrada). Definimos $[x_{D_1}] + [x_{D_2}] := [F(d_1)(x_{D_1}) + F(d_2)(x_{D_2})]$. Pode-se mostrar essa operação é bem definida e que faz o conjunto L_F ser um grupo abeliano. Também pode-se provar que o colimite de F é o par $\big(L_F, (s_D : F(D) \to L_F)_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}\big)$, onde $s_D(x_D) = [x_D]$ (para mais detalhes ver [2], Proposição 2.13.3, e [6], seção 10.8). O mesmo se aplica aos funtores G e H.

Pode-se provar que o colimite de η é o morfismo $\mathrm{colim}(\eta) : L_F \to L_G$, $[x_D] \mapsto [\eta_D(x_D)]$. Vamos ver que ela está bem definida. Suponha que $[x_{D_1}] = [x_{D_2}]$. Então existem $d_1 : D_1 \to D$ e $d_2 : D_2 \to D$ tais que $F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2})$. Como η é uma transformação natural, então

$$G(d_1)\big(\eta_{D_1}(x_{D_1})\big) = \eta_D\big(F(d_1)(x_{D_1})\big) = \eta_D\big(F(d_2)(x_{D_2})\big) = G(d_2)\big(\eta_{D_2}(x_{D_2})\big),$$

como se vê no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
x_{D_1} \arrow[d, phantom, "\Cap"] & & x_{D_2} \arrow[d, phantom, "\Cap"] \\
F(D_1) \arrow[r, "F(d_1)"] \arrow[d, "\eta_{D_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(D) \arrow[d, "\eta_D"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(D_2) \arrow[l, "F(d_2)"'] \arrow[d, "\eta_{D_2}"] \\
G(D_1) \arrow[r, "G(d_1)"'] & G(D) & G(D_2) \arrow[l, "G(d_1)"]
\end{tikzcd}$$

Logo, $[\eta_{D_1}(x_{D_1})] = [\eta_{D_2}(x_{D_2})]$. Da mesma forma define-se o colimite de ν.

Finalmente, prova-se que a sequência $0 \to L_F \xrightarrow{\mathrm{colim}(\eta)} L_F \xrightarrow{\mathrm{colim}(\nu)} L_H \to 0$ é uma sequência exata curta.

(AB6) Esse axioma segue de um resultado que diz que na categoria $\mathfrak{AbGrp}$ limites finitos comutam com colimites filtrados. Veja, por exemplo, [2], Corolário 2.13.6.

(AB3*) Analogamente ao que foi feito em (AB3), sejam $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos abelianos. Então $\big(\prod_{i \in I} G_i, (\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \to G_i)_{i \in I}\big)$ é o produto de $(G_i)_{i \in I}$, onde $\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i\}$. Para ver isso, basta notar que, dados $f_i : X \to G_i$ homomorfismos de grupos indexados por $i \in I$, temos que $\psi : X \to \prod_{i \in I} G_i$, $x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$ é o único homomorfismo tal que $f_i = \pi_i \circ \psi$.

(AB4*) Aplica-se, nesse axioma, o mesmo raciocínio usado em (AB4), onde o produto de homomorfismos é definido igualmente ao coproduto. □

Finalmente, vamos enunciar e demonstrar o Teorema 2.2.

Teorema 1 (Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze)**.** A categoria κ-$\mathsf{Cond}(\mathcal{A}\mathsf{b}\mathcal{G}\mathsf{rp})$ é uma categoria abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3*) e (AB4*). Além disso, tal categoria é gerada por objetos projetivos compactos.

Demonstração. ⊠

Referências

[1] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWROŃSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge Univerity Press, 2006. Apêndice A.

[2] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra I*. Cambridge Univerity Press, 1994.

[3] nLab. *Separator*. Website.

[4] ROCH, S. *A Brief Introduction to Abelian Categories*. Notas de aula. Website.

[5] SCHOLZE, P. *Lectures on Condensed Mathematics*. Notas de aula. Website.

[6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. Seções 4.19, 4.21, 10.8, 12.3, 12.5 e 19.10. Website.

[7] Wikipedia. *Abelian Category*. Website.

[8] Wikipedia. *Compact Object*. Website.

[9] Wikipedia. *Projective Object*. Website.