# TEOREMA 2.2 DAS NOTAS DE PETER SCHOLZE SOBRE MATEMÁTICA CONDENSADA

#### **Igor Martins Silva**

02 e 09 de dezembro de 2022

Antes de enunciarmos o Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze, e apresentarmos sua demonstração, que é o objetivo deste texto, vamos relembrar o que é uma categoria de grupos abelianos  $\kappa$ -condensados, definir categoria abeliana e apresentar os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB4), (AB5), (AB6), (AB3\*) e (AB4\*). Porém, antes de mais nada, vale ressaltar que uma categoria  $\mathscr{C}$ , a menos que se expresse o contrário, é sinônimo de categoria pequena, ou seja,  $\operatorname{Obj}(\mathscr{C})$  e  $\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$  são conjuntos.

# 1 Categoria $\kappa$ -Cond(AbGrp)

Vamos começar relembrando a definição de categoria de grupos abelianos  $\kappa$ -condensados, assunto discutido no seminário sobre conjuntos condensados, ministrado por Luiz Felipe Andrade Campos. Sejam

- (a) **HTop** a categoria cujos objetos são espaços topológicos Hausdorff e os morfismos são funções contínuas, e
- (b) **TfinSet** a categoria cujos objetos são conjuntos finitos com a topologia discreta e os morfismos são funções contínuas.

Note que **TfinSet** é uma subcategoria de **HTop**. Seja  $\mathscr{D}$  um poset, isto é, uma categoria cujos objetos são elementos de um conjunto parcialmente ordenados e os morfismos são dados pela relação de ordem,  $\geq$ , no seguinte sentido: dados  $X,Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ , temos que  $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y) \neq \mathscr{D}$ , se, e somente se,  $X \geq Y$ . Suponha ainda que  $\mathscr{D}$  é direcionado para cima, isto é, dados  $X,Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ , existe  $Z \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$  tal que  $Z \geq X,Y$ . Seja  $F : \mathscr{D} \to \mathsf{HTop}$  um funtor tal que  $F(\mathscr{D})$  está em **TfinSet**. No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, ministrado pelo professor John MacQuarrie, vimos que o limite de F é um cone, ou seja, é um par  $(L,(\varphi_D)_{D\in\mathscr{D}})$ , onde  $L \in \mathrm{Obj}(\mathsf{HTop})$  e  $\varphi_D \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{HTop}}(L,F(D))$ , que satisfaz uma propriedade universal. O objeto dado pelo limite de F é o que chamamos de **conjunto** 

**profinito**. A categoria cujos objetos são conjuntos profinitos e os morfismos são funções contínuas é denotada por **ProfinSet**.

Seja  $\kappa$  um cardinal limite forte não enumerável, isto é, um cardinal não enumerável tal que, para todo  $\lambda < \kappa$ , vale que  $2^{\lambda} < \kappa$ . Definimos  $\kappa$ -ProfinSet como sendo a categoria cujos objetos são conjuntos profinitos de cardinalidade menor do que  $\kappa$  e os morfismos são funções contínuas.

Denote por AbGrp a categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos. Um **grupo abeliano**  $\kappa$ -condensado é um feixe

$$T: \kappa$$
-ProFinSet<sup>op</sup>  $\rightarrow$  AbGrp

Como feixes são funtores, se T e S são grupos abelianos  $\kappa$ -condensados, então um morfismo de T para S é uma transformação natural de T para S. Assim, podemos definir uma categoria onde os objetos são grupos abelianos  $\kappa$ -condensados e os morfismos são transformações naturais. Vamos denotar tal categoria por  $\kappa$ -Cond(AbGrp). Para mais detalhes sobre feixes, ver o seminário sobre feixes e esquemas, ministrado pelo professor André Contiero.

## 2 Categoria abeliana

#### 2.1 Categoria pré-aditiva

Uma categoria  $\mathscr{C}$  é dita **pré-aditiva**, se,

- (a) para todo  $X, Y \in \text{Obj}(\mathscr{C})$ , existe uma operação binária + sobre  $\text{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$  tal que  $(\text{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y), +)$  é grupo abeliano;
- (b) para todo  $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , a composição

$$\circ$$
: Hom<sub>\( \mathcal{C}\)</sub> $(Y,Z) \times \text{Hom}_{(C)}(X,Y) \to \text{Hom}_{(C)}(X,Z)$ 

é bilinear, isto é,  $(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g$  e  $f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'$ , para todo  $f, f' \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z)$  e todo  $g, g' \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ .

Denotaremos o elemento neutro do grupo  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$  por  $0_{XY}$ .

**Observação 1.** Se  $\mathscr{C}$  é uma categoria pré-aditiva e  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,X)$ , então  $0_{XY} \circ f = (0_{XY} + 0_{XY}) \circ f = 0_{XY} \circ f + 0_{XY} \circ f$ . Logo,  $0_{XY} \circ f = 0_{ZY}$ . Analogamente, se  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z)$ , então  $f \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$ .

## 2.2 Categoria aditiva

Seja  $\mathscr C$  uma categoria. Dizemos que  $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$  é um **objeto inicial**, se, para todo  $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ , existe um único morfismo em  $\mathrm{Hom}_{\mathscr C}(C,X)$ . Analogamente, dizemos que  $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$  é um **objeto final**, se, para todo  $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ , existe um único morfismo em  $\mathrm{Hom}_{\mathscr C}(X,C)$ .

**Lema 1.** Sejam  $\mathscr C$  uma categoria pré-aditiva e  $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes.

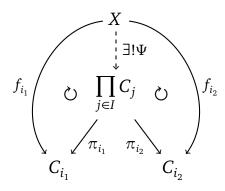
- (a) *C* é um objeto inicial.
- (b) *C* é um objeto final.
- (c)  $id_C = 0_{CC} \in Hom_{\mathscr{C}}(C, C)$ .

**Demonstração.** Vamos mostrar que (a) implica (c). Assim, suponha que C é um objeto inicial. Então,  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$  é o grupo abeliano trivial. Uma vez que  $\operatorname{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$ , para todo  $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ , então  $\operatorname{id}_C = 0_{CC} \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$ . A demonstração que (b) implica (c) é idêntica a que fizemos. Vamos mostrar, agora, que (c) implica (a). Assuma que  $\operatorname{id}_C = 0_{CC} \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)$ . Sejam  $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$  e  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C,X)$ . Como  $\operatorname{id}_C = 0_{CC}$ , então  $f = f \circ 0_{CC}$ . Mas pela Observação 1,  $f = 0_{CX}$ . Portanto, C é um objeto inicial. Analogamente, prova-se que (c) implica (b), o que finaliza a demonstração.

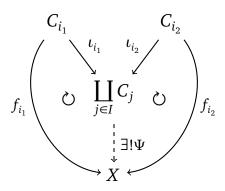
Em uma categoria pré-aditiva, um objeto inicial (ou final) é chamado de **objeto zero** e é denotado por  $0_{\mathscr{C}}$ .

Relembre, do seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, que dadas duas categorias,  $\mathscr{D}$  e  $\mathscr{C}$ , onde os morfismos de  $\mathscr{D}$  são apenas as identidades, e dado um funtor F:  $\mathscr{D} \to \mathscr{C}$ , definimos o  $\operatorname{produto}$  de  $\left(F(D)\right)_{D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})}$  como sendo o limite de F. Analogamente, define-se o  $\operatorname{coproduto}$ , usando-se o colimite.

Assim, se  $\mathscr C$  é uma categoria e  $(C_i)_{i\in I}$  é uma família de objetos de  $\mathscr C$ , definindo  $\mathscr D$  como sendo a categoria onde  $\operatorname{Obj}(\mathscr D)=\{C_i\mid i\in I\}$  e  $\operatorname{Hom}(\mathscr D)=\{\operatorname{id}_{C_i}\mid i\in I\}$  e  $F:\mathscr D\to\mathscr C$  o funtor que leva objetos e morfismos neles mesmos, temos que o **produto** de  $(C_i)_{i\in I}$  é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em  $\operatorname{Obj}(\mathscr C)$ ,  $\prod_{j\in I}C_j$ , e a segunda coordenada é uma família de morfismo em  $\operatorname{Hom}(\mathscr C)$ ,  $(\pi_i:\prod_{j\in I}C_j\to C_i)_{i\in I}$ , tal que, para todo  $X\in\operatorname{Obj}(\mathscr C)$  e toda família  $(f_i:X\to C_i)_{i\in I}$  em  $\operatorname{Hom}(\mathscr C)$ , existe único morfismo  $\Psi:X\to\prod_{i\in I}C_i$  em  $\operatorname{Hom}(\mathscr C)$  tal que  $\pi_i\circ\Psi=f_i$ , para todo  $i\in I$ .



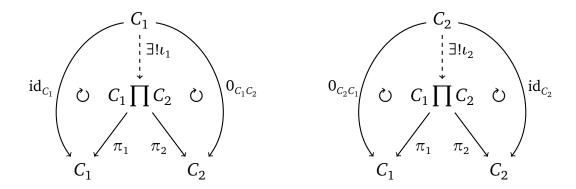
De maneira análoga, o **coproduto** de  $(C_i)_{i\in I}$  é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em  $\mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \coprod_{j\in I} C_j$ , e a segunda coordenada é uma família de morfismo em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}), \ (\iota_i:C_i\to\coprod_{j\in I}C_j)_{i\in I}$ , tal que, para todo  $X\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$  e toda família  $(f_i:C_i\to X)_{i\in I}$  em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ , existe único morfismo  $\Psi:\coprod_{j\in I}C_j\to X$  em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$  tal que  $\Psi\circ\iota_i=f_i$ , para todo  $i\in I$ .



**Proposição 1.** Seja ℰ uma categoria pré-aditiva.

- (a) Se  $\left(\prod_{j\in I} C_j, (\pi_i:\prod_{j\in I} C_j\to C_i)_{i\in I}\right)$  é o produto de  $(C_i)_{i\in I}$ , com  $|I|<\infty$ , então existem  $\iota_i\in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C_i,\prod_{j\in I} C_j)$ , para cada  $i\in I$ , tal que  $\left(\prod_{j\in I} C_j, (\iota_i)_{i\in I}\right)$  é o coproduto de  $(C_i)_{i\in I}$ .
- (b) Se  $\left(\coprod_{j\in I} C_j, (\iota_i:C_i\to\coprod_{j\in I} C_j)_{i\in I}\right)$  é o coproduto de  $(C_i)_{i\in I}$ , com  $|I|<\infty$ , então existem  $\pi_i\in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\prod_{j\in I} C_j,C_i)$ , para cada  $i\in I$ , tal que  $\left(\coprod_{j\in I} C_j,(\pi_i)_{i\in I}\right)$  é o produto de  $(C_i)_{i\in I}$ .

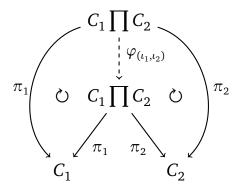
**Demonstração.** Mostraremos apenas a afirmação (a), pois a (b) é similar. A demonstração é por indução sobre |I|. Suponha que |I|=2. Pela definição de produto, tomando o objeto  $C_1$  e os morfismos  $\mathrm{id}_{C_1}$  e  $0_{C_1C_2}$ , temos que existe único  $\iota_1:C_1\to C_1\prod C_2$  tal que  $\pi_1\circ\iota_1=\mathrm{id}_{C_1}$  e  $\pi_2\circ\iota_1=0_{C_1C_2}$ . Novamente, pela definição de produto, tomando, agora, o objeto  $C_2$  e os morfismos  $\mathrm{id}_{C_2}$  e  $0_{C_2C_1}$ , temos que existe único  $\iota_2:C_2\to C_1\prod C_2$  tal que  $\pi_1\circ\iota_2=0_{C_2C_1}$  e  $\pi_2\circ\iota_2=\mathrm{id}_{C_2}$ .



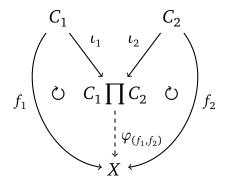
Para qualquer  $X \in \text{Obj}(\mathscr{C}), \ j_1 \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1,X)$  e  $j_2 \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2,X)$ , defina  $\varphi_{(j_1,j_2)} \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1 \prod C_2,X)$  como sendo  $j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2$ . Assim, considerando o objeto  $C_1 \prod C_2$  e os morfismos  $\iota_1 : C_1 \to C_1 \prod C_2$  e  $\iota_2 : C_2 \to C_1 \prod C_2$ , temos que

$$\pi_1\circ\varphi_{(\iota_1,\iota_2)}=\pi_1\circ\iota_1\circ\pi_1+\pi_1\circ\iota_2\circ\pi_2=\mathrm{id}_{C_1}\circ\pi_1+0_{C_1C_2}\circ\pi_2=\pi_1.$$

Analogamente,  $\pi_2 \circ \varphi_{(\iota_1,\iota_2)} = \pi_2$ . Isso significa que o seguinte diagrama comuta:



Como  $\mathrm{id}_{C_1\prod C_2}$  também comuta esse diagrama, pela unicidade, temos que  $\varphi_{(\iota_1,\iota_2)}=\mathrm{id}_{C_1\prod C_2}$ , ou seja,  $\iota_1\circ\pi_1+\iota_2\circ\pi_2=\mathrm{id}_{C_1\prod C_2}$ . A partir dessa observação, vamos mostrar que o coproduto de  $C_1$  e  $C_2$  é o par  $\left(C_1\prod C_2,(\iota_1,\iota_2)\right)$ .



Sejam  $X \in \text{Obj}(\mathscr{C}), f_1 \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, X)$  e  $f_2 \in \text{Hom}_{\mathscr{C}}(C_2, X)$ . Considerando  $\varphi_{(f_1, f_2)} = f_1 \circ f_2 = f_1 \circ f_2$ 

 $\pi_1 + f_2 \circ \pi_2$ , temos que

$$\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_1 = f_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1 + f_2 \circ \pi_2 \circ \iota_1 = f_1 \circ \operatorname{id}_{C_1} + f_2 \circ 0_{C_1C_2} = f_1.$$

De maneira análoga,  $\varphi_{(f_1,f_2)} \circ \iota_2 = f_2$ . Isso quer dizer que o diagrama acima é comutativo. Suponha que  $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1 \prod C_2, X)$  seja um morfismo que também comuta o diagrama acima. Então

$$\begin{split} \varphi_{(f_{1},f_{2})} - g &= (\varphi_{(f_{1},f_{2})} - g) \circ \mathrm{id}_{C_{1} \prod C_{2}} \\ &= (\varphi_{(f_{1},f_{2})} - g) \circ \varphi_{(\iota_{1},\iota_{2})} \\ &= (\varphi_{(f_{1},f_{2})} - g) \circ (\iota_{1} \circ \pi_{1} + \iota_{2} \circ \pi_{2}) \\ &= (\varphi_{(f_{1},f_{2})} \circ \iota_{1} - g \circ \iota_{1}) \circ \pi_{1} + (\varphi_{(f_{1},f_{2})} \circ \iota_{2} - g \circ \iota_{2}) \circ \pi_{2} \\ &= (f_{1} - f_{1}) \circ \pi_{1} + (f_{2} - f_{2}) \circ \pi_{2} \\ &= 0_{C_{1} \prod C_{2}X}. \end{split}$$

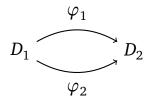
Portanto,  $\varphi_{(f_1,f_2)} = g$ . Isso significa que  $\varphi_{(f_1,f_2)}$  é o único morfismo que comuta o diagrama acima, ou seja, o par  $(C_1 \prod C_2, (\iota_1, \iota_2))$  é o coproduto de  $C_1$  e  $C_2$ . Para |I| > 2, aplica-se indução.

Uma categoria  $\mathscr{C}$  é chamada de **aditiva**, se

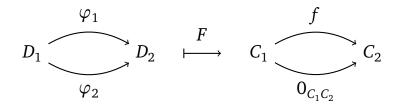
- (a) & é pré-aditiva,
- (b) existe um objeto zero em  $Obj(\mathscr{C})$  e
- (c) existe o produto para qualquer família  $(C_i)_{i\in I}$  de objetos em  $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ , com  $|I|<\infty$ .

## 2.3 Categoria pré-abeliana

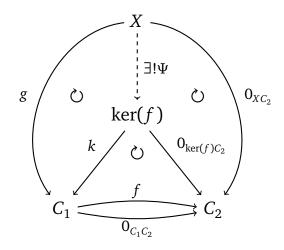
Seja  $\mathcal{D}$  a categoria com dois objetos,  $D_1$  e  $D_2$ , e dois morfismos paralelos de um objeto para o outro,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Pense em  $\mathcal{D}$  como sendo representada pelo diagrama abaixo.



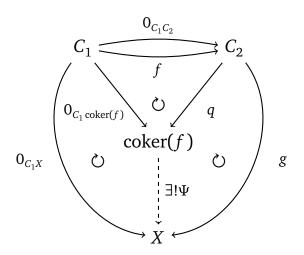
Sejam  $\mathscr C$  uma categoria pré-aditiva e  $f\in \operatorname{Hom}_{\mathscr C}(C_1,C_2)$  um morfismo. Defina  $F:\mathscr D\to\mathscr C$  como sendo o funtor tal que  $F(D_1)=C_1$ ,  $F(D_2)=C_2$ ,  $F(\varphi_1)=f$  e  $F(\varphi_2)=0_{C_1C_2}$ .



Definimos o **núcleo** de f como sendo o limite de F, ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em  $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ ,  $\ker(f)$ , e a segunda coordenada é um morfismo em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ ,  $k: \ker(f) \to C_1$ , tal que  $f \circ k = 0_{\ker(f)C_2}$  e, para todo  $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$  e todo  $g: X \to C_1$  em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ , que satisfazem a propriedade  $f \circ g = 0_{XC_2}$ , existe único morfismo  $\Psi: X \to \ker(f)$  em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$  tal que  $k \circ \Psi = g$ .



Similarmente, o **conúcleo** de f é o colimite de F, ou seja, é um par ordenado ( $\operatorname{coker}(f)$ ,  $q:C_2\to\operatorname{coker}(f)$ ), onde  $\operatorname{coker}(f)\in\operatorname{Obj}(\mathscr{C})$  e  $q\in\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$ , tal que  $q\circ f=0_{C_1\operatorname{coker}(f)}$  e, para todo  $X\in\operatorname{Obj}(\mathscr{C})$  e todo  $g:C_2\to X$  em  $\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$ , que satisfazem a propriedade  $g\circ f=0_{C_1X}$ , existe único morfismo  $\Psi:\operatorname{coker}(f)\to X$  em  $\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$  tal que  $\Psi\circ q=g$ .



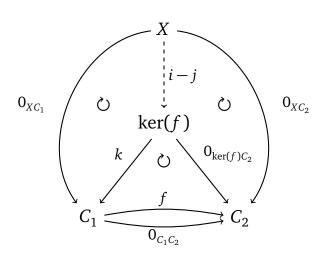
Uma categoria  $\mathscr{C}$  é dita **pré-abeliana**, se  $\mathscr{C}$  é aditiva e se, para todo  $f: X \to Y$  em  $Hom(\mathscr{C})$ , existe núcleo e conúcleo de f.

#### 2.4 Categoria abeliana

Sejam  $\mathscr C$  uma categoria e  $f\in \operatorname{Hom}_{\mathscr C}(C_1,C_2)$ . Dizemos que f é **monomorfismo**, se, para todo  $X\in\operatorname{Obj}(\mathscr C)$  e para todo  $g_1,g_2\in\operatorname{Hom}_{\mathscr C}(X,C_1)$ , temos que  $g_1=g_2$ , sempre que  $f\circ g_1=f\circ g_2$ . Dizemos que f é **epimorfismo**, se, para todo  $X\in\operatorname{Obj}(\mathscr C)$  e para todo  $g_1,g_2\in\operatorname{Hom}_{\mathscr C}(C_2,X)$ , temos que  $g_1=g_2$ , sempre que  $g_1\circ f=g_2\circ f$ .

**Lema 2.** Sejam  $\mathscr{C}$  uma categoria pré-aditiva,  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ ,  $(\ker(f), k : \ker(f) \to C_1)$  o núcleo de f e  $(\operatorname{coker}(f), q : C_2 \to \operatorname{coker}(f))$  o conúcleo de f. Então k é monomorfismo e q é epimorfismo.

**Demonstração.** Mostraremos apenas que k é monomorfismo, já que a demonstração que q é epimorfismo é análoga. Sejam  $i, j \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$  tais que  $k \circ i = k \circ j$ . Então  $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$ . Pela definição de núcleo de f, tomando o objeto X e o morfismo  $0_{XC_1}$ , temos que existe único morfismo  $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$  tal que  $k \circ \psi = 0_{XC_1}$ . Uma vez que  $k \circ 0_{X \ker(f)} = 0_{XC_1}$ , então tal  $\psi$  é, exatamente,  $0_{X \ker(f)}$ . Acontece que  $i - j \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(f))$  também satisfaz a condição de  $k \circ (i - j) = 0_{XC_1}$ .



Portanto, pela unicidade,  $i - j = 0_{X \ker(f)}$ . Logo, i = j.

**Proposição 2.** Sejam  $\mathscr C$  uma categoria pré-abeliana e  $f\in \operatorname{Hom}_{\mathscr C}(X,Y)$ . Sejam também

(a)  $(\ker(f), k)$  o núcleo f,

- (c)  $(\ker(q), k')$  o núcleo q e
- (b)  $(\operatorname{coker}(f), q)$  o conúcleo de f,
- (d)  $(\operatorname{coker}(k), q')$  o conúcleo de k.

 $\boxtimes$ 

Então existe único  $\overline{f}$ :  $\operatorname{coker}(k) \to \ker(q)$  tal que  $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$ .

$$\ker(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} \operatorname{coker}(f)$$

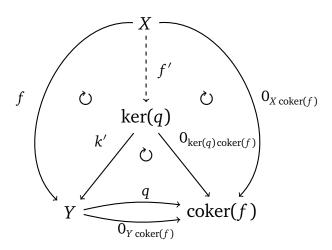
$$q' \qquad \circlearrowleft \qquad \downarrow k'$$

$$\operatorname{coker}(k) \xrightarrow{\overline{f}} \ker(q)$$

**Demonstração.** Pela definição de conúcleo de f, temos que  $q \circ f = 0_{X \operatorname{coker}(f)}$ . Logo, pela definição de núcleo de q, exite único  $f' \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \ker(q))$  tal que

$$k' \circ f' = f,\tag{1}$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.



Uma vez que  $(\ker(f), k)$  o núcleo f, então  $f \circ k = 0_{\ker(f)Y}$ . Daí, podemos concluir que

$$k' \circ f' \circ k \stackrel{\text{(1)}}{=} f \circ k = 0_{\ker(f)Y} = k' \circ 0_{\ker(f)\ker(g)}.$$

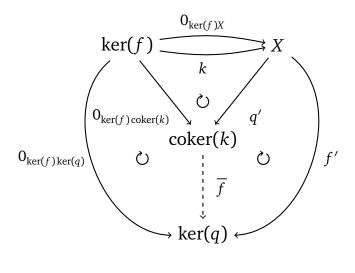
Não perca de vista que temos a seguinte cadeia de morfismo:

$$\ker(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f'} \ker(q) \xrightarrow{k'} Y$$

Logo, como k' é monomorfismo,  $f' \circ k = 0_{\ker(f)\ker(q)}$ . Daí, pela definição de conúcleo de k, exite único  $\overline{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname{coker}(k), \ker(q))$ 

$$\overline{f} \circ q' = f', \tag{2}$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.



Com isso, obtemos

$$k' \circ \overline{f} \circ q' \stackrel{(2)}{=} k' \circ f' \stackrel{(1)}{=} f.$$

o que conclui a demonstração.

Uma categoria  $\mathscr C$  é denominada **abeliana**, se  $\mathscr C$  é pré-abeliana e se, para todo  $f:X\to Y$  em  $\mathsf{Hom}(\mathscr C)$ , o morfismo  $\overline f$ , dado pelo Proposição 2, é um isomorfismo.

**Exemplo 1.** Vamos ver que a categoria  $\mathsf{AbGrp}$  é uma categoria abeliana. Sabemos, da Teoria de Grupos, que  $\mathsf{AbGrp}$  é pré-aditiva, já que  $\mathsf{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(G,H)$  é grupo abeliano e a composição é bilinear. O grupo trivial  $\{0\}$  é o elemento zero dessa categoria e, no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos que, dados  $(G_i)_{i=1}^n$  grupo abelianos, a soma direta  $\bigoplus_{i=1}^n G_i$ , junto das inclusões  $\iota_i:G_i\to\bigoplus_{i=1}^n G_i$ , é o coproduto de  $(G_i)_{i=1}^n$ . Portanto,  $\mathsf{AbGrp}$  é aditiva. Seja  $f\in\mathsf{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(G,H)$ . Afirmamos que

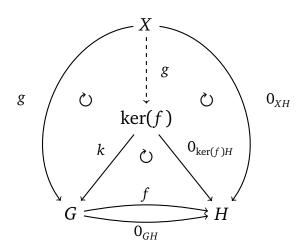
$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = 0\}, \quad \text{junto do morfismo} \quad k : \ker(f) \to G$$

$$g \mapsto g$$

$$\operatorname{coker}(f) = \frac{H}{\operatorname{im}(f)}$$
, junto do morfismo  $q: H \to \operatorname{coker}(f)$   
 $h \mapsto h + \operatorname{im}(f)$ 

 $\boxtimes$ 

onde  $\operatorname{im}(f) = \{h \in H \mid \exists g \in G \ f(g) = h\}$ , é o conúcleo de f. Vamos mostrar só a afirmação para o núcleo. Note que  $f \circ k = 0$ , pois f(g) = 0, para todo  $g \in \ker(f)$ . Sejam  $X \in \operatorname{Obj}(\operatorname{AbGrp})$  e  $g \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{AbGrp}}(X,G)$  tal que  $f \circ g = 0$ . Isso quer dizer que f(g(x)) = 0, para todo  $x \in X$ , ou seja,  $g(x) \in \ker(f)$ . Daí, podemos restringir o contradomínio de g e considerá-la em  $\operatorname{Hom}_{\operatorname{AbGrp}}(X,\ker(f))$ . Assim, temos que o seguinte diagrama comuta.



Seja  $h \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{flbGrp}}(X, \ker(f))$  tal que  $k \circ h = g$ . Então, como  $g = k \circ g$ , temos que  $k \circ h = k \circ g$ . Uma vez que, por definição, k é injetiva, temos que h = g. Portanto,  $(\ker(f), k)$  é o núcleo de f. Logo,  $\operatorname{flbGrp}$  é pré-abeliana. Finalmente, seja  $f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{flbGrp}}(G, H)$  e sejam

- $(\ker(f), \ker(f) \xrightarrow{k} G)$  o núcleo f,
- $(\operatorname{coker}(f), H \xrightarrow{q} \operatorname{coker}(f))$  o conúcleo de f,
- $(\ker(q), \ker(q) \xrightarrow{k'} H)$  o núcleo q e
- $(\operatorname{coker}(k), G \xrightarrow{q'} \operatorname{coker}(k))$  o conúcleo de k.

Note que  $\ker(q) = \{h \in H \mid q(h) = 0\} = \{h \in H \mid h + \operatorname{im}(f) = 0\}$ . Logo,  $\ker(q) \subseteq \operatorname{im}(f)$ . Reciprocamente, se  $h \in \operatorname{im}(f)$ , então  $h + \operatorname{im}(f) = 0$ , ou seja, q(h) = 0. Assim,  $\ker(q) = \operatorname{im}(f)$ . Agora, veja que  $\operatorname{coker}(k) = \frac{G}{\operatorname{im}(k)}$ . Mas k é injetiva, logo  $\operatorname{im}(k) = \ker(f)$ . Daí,  $\operatorname{coker}(k) = \frac{G}{\ker(f)}$ . Pelo Teorema do Isomorfismo, o homomorfismo de grupos  $\overline{f} : \frac{G}{\ker(f)} \to \operatorname{im}(f)$ ,  $g + \ker(f) \mapsto f(g)$ , é um isomorfismo. Logo,

$$\overline{f}$$
:  $\operatorname{coker}(k) \to \ker(q)$   
 $g + \ker(f) \mapsto f(g)$ 

é um isomorfismo. Pela definição de núcleo e conúcleo, temos que

$$k'(\overline{f}(q'(g))) = k'(\overline{f}(g + \underbrace{\operatorname{im}(k)})) = k'(f(g)) = f(g),$$

isto é,  $f = k' \circ \overline{f} \circ q'$ . Portanto, AbGrp é abeliana.

Observação 2. Seja & uma categoria e considere a categoria cujos objetos são funtores de & para AbGrp e cujos morfismos são transformações naturais, a qual denotaremos por Func(&,AbGrp). Vamos ver, sem muitos detalhes, que essa categoria é abeliana.

- Sejam  $F,G:\mathscr{C}\to \mathsf{AbGrp}$  funtores e  $\eta,\nu:F\to G$  transformações naturais. Dado  $C\in \mathsf{Obj}(\mathscr{C})$ , definimos  $(\eta+\nu)_C\coloneqq \eta_C+\nu_C$  (note que a soma à direita da igualmente é a soma entre homomorfismos de grupos). Isso faz  $\eta+\nu\coloneqq (\eta_C+\nu_C)_{C\in \mathsf{Obj}(\mathscr{C})}$  uma transformação natural. Além disso, com tal soma,  $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Func}(\mathscr{C},\mathsf{AbGrp})}(F,G)$  é um grupo abeliano, já que  $\mathsf{Hom}_{\mathsf{AbGrp}}(F(C),G(C))$  é um grupo abeliano.
- Sejam  $F,G,H:\mathscr{C}\to \mathsf{AbGrp}$  funtores e  $\eta,\nu:F\to G$  e  $\zeta:H\to F$  transformações naturais. Dado  $C\in \mathsf{Obj}(\mathscr{C})$ , definimos  $\big((\eta+\nu)\circ\zeta\big)_C\coloneqq (\eta_C+\nu_C)\circ\zeta_C$  (note que a composição à direita da igualmente é a composição entre homomorfismos de grupos). Assim, a composição em Func $(\mathscr{C},\mathsf{AbGrp})$  herda a bilinearidade da composição em  $\mathsf{AbGrp}$ .
- Seja  $0_{\text{AbGrp}}$  o objeto zero em AbGrp. Defina  $0_{\text{Func}(\mathscr{C},\text{AbGrp})}:\mathscr{C}\to\text{AbGrp}$ , como sendo o funtor tal que  $C\mapsto 0_{\text{AbGrp}}$  e  $C_1\stackrel{f}{\to}C_2\mapsto 0_{\text{AbGrp}}\stackrel{0_{0_{\text{AbGrp}}}\circ_{\text{AbGrp}}}{\longrightarrow}0_{\text{AbGrp}}$ . Tal funtor é o objeto zero em  $\text{Func}(\mathscr{C},\text{AbGrp})$ , porque, dado qualquer funtor  $F:\mathscr{C}\to\text{AbGrp}$ , se  $\eta:0_{\text{Func}(\mathscr{C},\text{AbGrp})}\to F$  é uma transformação natural, então  $\eta_C$  só pode ser o homomorfismo que leva  $0_{\text{AbGrp}}$  em  $0_{\text{AbGrp}}$ , para todo  $C\in\text{Obj}(\mathscr{C})$ .
  - Sejam  $F_1, \dots, F_n : \mathscr{C} \to \mathcal{A}\mathsf{bGrp}$  funtores. Defina o funtor

$$\bigoplus_{i=1}^{n} F_{i}: \mathcal{C} \to \mathcal{A}b\mathsf{Grp}$$

$$C \mapsto \bigoplus_{i=1}^{n} F_{i}(C)$$

$$C_{1} \xrightarrow{f} C_{2} \mapsto \bigoplus_{i=1}^{n} F_{i}(C_{1}) \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^{n} F_{i}(f)} \bigoplus_{i=1}^{n} F_{i}(C_{2})$$

$$(g_{i})_{i=1}^{n} \mapsto (F_{i}(f)(g_{i}))_{i=1}^{n}.$$

Para  $j=1,\ldots,n$ , defina a transformação natural  $\eta^j:F_j\to\bigoplus_{i=1}^nF_i$ , onde  $\eta^j_C=\iota^j_C:F_j(C)\to\bigoplus_{i=1}^nF_i(C)$  a inclusão. Pode-se provar que  $\bigoplus_{i=1}^nF_i$ , junto das transformações naturais  $\eta^j:G_j\to\bigoplus_{i=1}^nG_i$ , é o coproduto de  $(F_i)_{i=1}^n$ .

 $\bullet$  Seja $\eta: F \to G$ uma transformação natural. Defina o funtor

$$\ker(\eta): \quad \mathscr{C} \rightarrow \mathcal{A}b\mathsf{Grp}$$

$$C \mapsto \ker(\eta_C)$$

$$C_1 \xrightarrow{f} C_2 \mapsto \ker(\eta_{C_1}) \xrightarrow{\ker(\eta)(f)} \ker(\eta_{C_2})$$

$$g \mapsto F(f)(g).$$

Usando a definição de núcleo de um homomorfismo de grupos e o fato de  $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$ , pode-se provar que esse funtor está bem definido. Defina a transformação natural  $k : \ker(\eta) \to F$ , onde  $k_C : \ker(\eta_C) \to F(C)$ ,  $g \mapsto g$  é a inclusão. Pode-se também provar que  $(\ker(\eta), k)$  é o núcleo de  $\eta$ . Similarmente, defina o funtor

Novamente, usando que  $\eta_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{C_1}$ , pode-se provar que esse funtor está bem definido. Definindo, agora, a transformação natural  $q: G \to \operatorname{coker}(\eta)$ , onde  $q_C: G(C) \to \operatorname{coker}(\eta_C)$ ,  $g \mapsto g + \operatorname{im}(\eta_C)$ , pode-se também provar que  $(\operatorname{coker}(\eta), q)$  é o conúcleo de  $\eta$ .

• Dado  $\eta: F \to G$  uma transformação natural, pelo Exemplo 1, temos que  $\overline{\eta}_C: \operatorname{coker}(k_C) \to \ker(q_C), \ g + \ker(\eta_C) \mapsto \eta_C(g)$  é um isomorfismo e comuta o diagrama da Proposição 2. Isso prova que que  $\overline{\eta}: \operatorname{coker}(k) \to \ker(q)$  é isomorfismo e que comuta o mesmo diagrama.

Com isso, temos que  $Func(\mathscr{C},AbGrp)$  é uma categoria abeliana.

## 3 Axiomas de Grothendieck

Vamos ver os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB3\*), (AB4), (AB4\*), (AB5) e (AB6). Eles são estabelecem condições extras que categorias abelianas possuem. Assim, para essa seção, a categoria  $\mathscr{C}$ , a qual vale tais axiomas, é uma categoria abeliana.

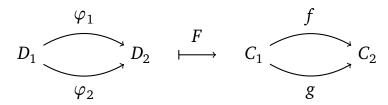
#### 3.1 Axiomas (AB3)

**Axioma (AB3).** Em  $\mathscr{C}$ , existe o coproduto para qualquer família  $(C_i)_{i \in I}$  de objetos em Obj $(\mathscr{C})$ , com I um conjunto de índices qualquer.

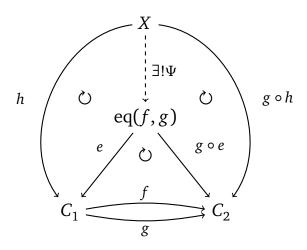
#### **3.2** Axiomas (AB3\*)

**Axioma (AB3\*).** Em  $\mathscr{C}$ , existe o produto para qualquer família  $(C_i)_{i \in I}$  de objetos em  $Obj(\mathscr{C})$ , com I um conjunto de índices qualquer.

**Observação 3.** Analogamente a definição de núcleo e conúcleo de um morfismo, defina  $F: \mathcal{D} \to \mathscr{C}$  como sendo o funtor tal que  $F(D_1) = C_1$ ,  $F(D_2) = C_2$ ,  $F(\varphi_1) = f$  e  $F(\varphi_2) = g$ .



Definimos o **equalizador** de f e g como sendo o limite de F, ou seja, é um par ordenado, onde a primeira coordenada é um objeto em  $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ ,  $\mathrm{eq}(f,g)$ , e a segunda coordenada é um morfismo em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ ,  $e:\mathrm{eq}(f,g)\to C_1$ , tal que  $f\circ e=g\circ e$  e, para todo  $X\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$  e todo  $h:X\to C_1$  em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ , que satisfazem a propriedade  $f\circ h=g\circ h$ , existe único morfismo  $\Psi:X\to\mathrm{eq}(f,g)$  em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$  tal que  $e\circ \Psi=h$ .

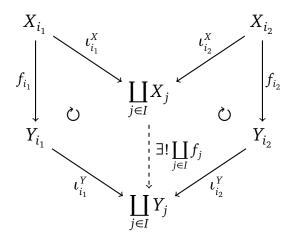


Similarmente, definimos o **coequalizador** de f e g como sendo o colimite de F. Uma vez que  $\mathscr C$  é uma categoria abeliana, temos que existem núcleo e conúcleo, para todo morfismo. Assim, pode-se mostrar que  $\left(\ker(f-g), k : \ker(f-g) \to C_1\right)$  é o equalizador de f e g e que  $\left(\operatorname{coker}(f-g), q : C_2 \to \operatorname{coker}(f-g)\right)$  é o coequalizador de f e g.

No seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, vimos um teorema que diz: "se  $\mathscr{C}$  é uma categoria que possui (co)produtos arbitrários e (co)equalizadores, então todo funtor  $F: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$  possui (co)limite". Logo, os axiomas (AB3) e (AB3\*) são equivalentes a dizer, respectivamente, que todo colimite existe e que todo limite existe.

#### 3.3 Axiomas (AB4)

Sejam  $\mathscr C$  uma categoria onde existem colimites e  $(f_i:X_i\to Y_i)_{i\in I}$  uma família de morfismos em  $\mathrm{Hom}(\mathscr C)$ . Sejam  $\left(\coprod_{j\in I}X_j,(\iota_i^X:X_i\to\coprod_{j\in I}X_j)_{i\in I}\right)$  o coproduto de  $(X_i)_{i\in I}$  e  $\left(\coprod_{j\in I}Y_j,(\iota_i^Y:Y_i\to\coprod_{j\in I}Y_j)_{i\in I}\right)$  o coproduto de  $(Y_i)_{i\in I}$ . Pela propriedade universal do coproduto, existe único morfismo em  $\mathrm{Hom}_{\mathscr C}(\coprod_{j\in I}X_j,\coprod_{j\in I}Y_j)$ , o qual denotaremos por  $\coprod_{j\in I}f_j$ , tal que  $\coprod_{j\in I}f_j\circ\iota_i^X=\iota_i^X\circ f_i$ , para todo  $i\in I$ , ou seja, que comuta o diagrama abaixo.



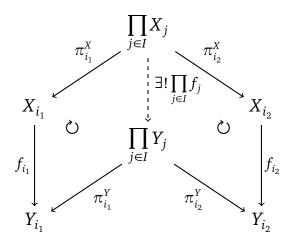
**Axioma (AB4).**  $\mathscr C$  satisfaz (AB3) e coprodutos são exatos, isto é, se I é um conjunto de índices e  $0 \to X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \to 0$  é uma sequência exata curta, com  $i \in I$  e  $X_i, Y_i, Z_i \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ , então a sequência

$$0 \to \coprod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\coprod_{i \in I} f_i} \coprod_{i \in I} Y_i \xrightarrow{\coprod_{i \in I} g_i} \coprod_{i \in I} Z_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

#### **3.4** Axiomas (AB4\*)

Sejam  $\mathscr C$  uma categoria onde existem limites e  $(f_i:X_i\to Y_i)_{i\in I}$  uma família de morfismos em  $\mathrm{Hom}(\mathscr C)$ . Similarmente à definição de coproduto de morfismos, o **produto** de  $(f_i)_{i\in I}$  é o único morfismo em  $\mathrm{Hom}_{\mathscr C}(\prod_{j\in I}X_j,\prod_{j\in I}Y_j)$ , o qual denotaremos por  $\prod_{j\in I}f_j$ , tal que  $\pi_i^Y\circ\prod_{j\in I}f_j=f_i\circ\pi_i^X$ , para todo  $i\in I$ , ou seja, que comuta o diagrama abaixo.



**Axioma (AB4\*).**  $\mathscr C$  satisfaz (AB3\*) e produtos são exatos, isto é, se I é um conjunto de índices e  $0 \to X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \to 0$  é uma sequência exata curta, com  $i \in I$  e  $X_i, Y_i, Z_i \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ , então a sequência

$$0 \to \prod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\prod_{i \in I} f_i} \prod_{i \in I} Y_i \xrightarrow{\prod_{i \in I} g_i} \prod_{i \in I} Z_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

#### 3.5 Axiomas (AB5)

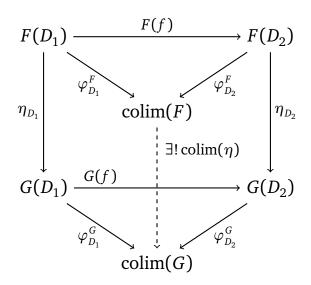
Seja  $\mathcal D$  uma categoria de índices (no seminário sobre limites, colimites e conjuntos profinitos, chamamos  $\mathcal D$  de "categoria combinatória"). Essa categoria é chamada **filtrada**, se

- (a)  $Obj(\mathcal{D}) \neq \mathcal{O}$ ,
- (b) para todo  $X,Y\in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ , existe  $Z\in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$  tal que  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Z)\neq \mathcal{D}\neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Z)$ ,
- (c) dados  $f, g: X \to Y$ , existem  $Z \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  e  $h: Y \to Z$  tal que  $h \circ f = h \circ g$ .

Se  $\mathscr{C}$  é uma categoria onde existem limites e colimites e  $F: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$  é um funtor, onde  $\mathscr{D}$  é uma categoria filtrada, o colimite de F é dito **colimite filtrado**.

Sejam  $F,G,H: \mathcal{D} \to \mathscr{C}$  funtores, com  $\mathcal{D}$  sendo uma categoria de índices e  $\mathscr{C}$  uma categoria abeliana. Sejam  $\eta: F \to G$  e  $\nu: G \to H$  transformações naturais. De maneira semelhante ao que foi feito na Observação 2, podemos definir núcleo e conúcleo de uma transformação natural, usando o núcleo e conúcleo da categoria abeliana  $\mathscr{C}$ . Também pode-se generalizar a definição de transformação natural zero, usando o objeto zero de  $\mathscr{C}$ . Assim, uma sequência  $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$  é uma sequência exata curta, se  $\eta$  é injetiva,  $\nu$  é sobrejetiva e  $\ker(\nu) = \operatorname{im}(\eta)$ . Pode-se provar que,  $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$  é uma sequência exata curta, se, e somente se, para todo  $D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})$ , a sequência  $0 \to F(D) \xrightarrow{\eta_D} G(D) \xrightarrow{\nu_D} H(D) \to 0$  é uma sequência exata curta em  $\mathscr{C}$ .

Considere ainda  $F,G: \mathcal{D} \to \mathscr{C}$  como no parágrafo anterior e  $\eta: F \to G$  uma transformação natural qualquer. Sejam  $\left(\operatorname{colim}(F), (\varphi_D^F: F(D) \to \operatorname{colim}(F))_{D \in \operatorname{Obj}(D)}\right)$  e  $\left(\operatorname{colim}(G), (\varphi_D^G: G(D) \to \operatorname{colim}(G))_{D \in \operatorname{Obj}(D)}\right)$  colimites de F e G, respectivamente. Se  $D_1, D_2 \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$  e  $f: D_1 \to D_2$  é um morfismo, então, pela propriedade da transformação natural  $\eta$ , temos que  $G(f) \circ \eta_{D_1} = \eta_{D_2} \circ F(f)$ . Pela propriedade do colimite de G, temos que  $\varphi_{D_1}^G = \varphi_{D_2}^G \circ G(f)$ .



Portanto,

$$\varphi_{D_2}^G \circ \eta_{D_2} \circ F(f) = \varphi_{D_2}^G \circ G(f) \circ \eta_{D_1} = \varphi_{D_1}^G \circ \eta_{D_1},$$

como se vê no diagrama anterior. Logo, pela propriedade do colimite de F, existe único morfismo de  $\operatorname{colim}(F)$  para  $\operatorname{colim}(G)$ , o qual denotaremos por  $\operatorname{colim}(\eta)$ , tal que  $\operatorname{colim}(\eta) \circ \varphi_D^F = \varphi_D^G \circ \eta_D$ , para todo  $D \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$ .

**Axioma (AB5)**.  $\mathscr C$  satisfaz (AB3) e colimites filtrados são exatos, isto é, se  $0 \to F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} H \to 0$  é uma sequência exata curta, com  $F, G, H : \mathscr D \to \mathscr C$  funtores, onde  $\mathscr D$  é uma

categoria filtrada, então a sequência

$$0 \to \operatorname{colim}(F) \xrightarrow{\operatorname{colim}(\eta)} \operatorname{colim}(G) \xrightarrow{\operatorname{colim}(\nu)} \operatorname{colim}(H) \to 0$$

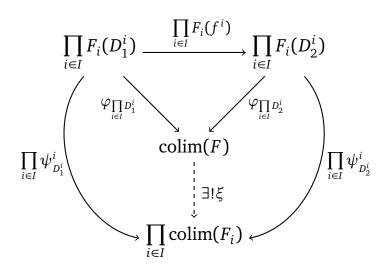
também é uma sequência exata curta.

#### 3.6 Axiomas (AB6)

Definimos o **produto** de  $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ , uma família de categorias, denotado por  $\prod_{i\in I}\mathscr{D}_i$ , como sendo a categoria cujos objetos são  $\prod_{i\in I}D^i=\{(D^i)_{i\in I}\mid D^i\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D}_i)\}$  e os morfismos são  $\prod_{i\in I}f^i=\{(f^i)_{i\in I}\mid f^i\in \mathrm{Hom}(\mathscr{D}_i)\}$ . Pode-se provar que se  $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$  é uma família de categorias filtradas, então  $\prod_{i\in I}\mathscr{D}_i$  também é uma categoria filtrada. Sejam  $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$  uma família de categorias filtradas,  $\mathscr C$  uma categoria onde existem colimites, e  $F_i:\mathscr{D}_i\to\mathscr C$  funtores indexados por  $i\in I$ . Seja  $\left(\mathrm{colim}(F_i),(\psi^i_{D^i}:F_i(D^i)\to\mathrm{colim}(F_i))_{D^i\in \mathrm{Obj}(\mathscr{D}_i)}\right)$  o colimite de  $F_i$ . Se  $f^i:D^i_1\to D^i_2$  é um morfismo em  $\mathrm{Hom}(\mathscr{D}_i)$ , então, pela propriedade do colimite de  $F_i$ ,  $\psi^i_{D^i_1}=\psi^i_{D^i_2}\circ F_i(f^i)$ . Defina o funtor  $F:\prod_{i\in I}\mathscr{D}_i\to\mathscr C$ , onde  $F(\prod_{i\in I}D^i)=\prod_{i\in I}F_i(D^i)$  e  $F(\prod_{i\in I}f^i)=\prod_{i\in I}F_i(f^i)$ . Seja  $\left(\mathrm{colim}(F),(\varphi_{\prod_{i\in I}D^i}:F(\prod_{i\in I}D^i)\to\mathrm{colim}(F))_{\prod_{i\in I}D^i\in\mathrm{Obj}(\prod_{i\in I}\mathscr{D}_i)}\right)$  o colimite de F. Note que, se  $\prod_{i\in I}f^i:\prod_{i\in I}D^i_1\to\prod_{i\in I}D^i_2$  é um morfismo em  $\mathrm{Hom}(\prod_{i\in I}\mathscr{D}_i)$ , então, temos que

$$\prod_{i \in I} \psi_{D_2^i}^i \circ \prod_{i \in I} F_i(f^i) = \prod_{i \in I} (\psi_{D_2^i}^i \circ F_i(f^i)) = \prod_{i \in I} \psi_{D_1^i}^i$$

o que quer dizer que o diagrama abaixo é comutativo.



Logo, pela propriedade do colimite de F, existe único morfismo  $\xi$  : colim $(F) \to \prod_{i \in I} \operatorname{colim}(F_i)$ 

tal que  $\xi \circ \varphi_{\prod_{i \in I} D^i} = \prod_{i \in I} \psi^i_{D^i}$ , para todo  $\prod_{i \in I} D^i \in \text{Obj}(\prod_{i \in I} \mathcal{D}_i)$ .

**Axioma (AB6).**  $\mathscr C$  satisfaz (AB3) e o morfismo  $\xi: \operatorname{colim}(F) \to \prod_{i \in I} \operatorname{colim}(F_i)$  é um isomorfismo.

**Exemplo 2.** Apresentaremos, sem muitos detalhes, as ideais que justificam que a categoria **AbGrp** satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB3\*), (AB4), (AB4\*), (AB5) e (AB6).

(AB3) Sejam  $(G_i)_{i\in I}$  uma família de grupos abelianos. Então  $\bigoplus_{i\in I} G_i$ ,  $(\iota_i:G_i\to\bigoplus_{i\in I} G_i)_{i\in I}$ ) é o coproduto de  $(G_i)_{i\in I}$ , onde  $\bigoplus_{i\in I} G_i=\{(g_i)_{i\in I}\mid g_i\in G_i\text{ e }g_i\neq 0\text{ somente para uma quantidade finita de índices}\}$ . Para ver isso, basta notar que, dados  $f_i:G_i\to X$  homomorfismos de grupos indexados por  $i\in I$ , temos que  $\psi:\bigoplus_{i\in I} G_i\to X$ ,  $(g_i)_{i\in I}\mapsto \sum_{i\in I} f_i(g_i)$  é o único homomorfismo tal que  $f_i=\psi\circ\iota_i$ .

(AB3\*) Analogamente ao que foi feito em (AB3), sejam  $(G_i)_{i \in I}$  uma família de grupos abelianos. Então  $\left(\prod_{i \in I} G_i, (\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \to G_i)_{i \in I}\right)$  é o produto de  $(G_i)_{i \in I}$ , onde  $\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i\}$ . Para ver isso, basta notar que, dados  $f_i : X \to G_i$  homomorfismos de grupos indexados por  $i \in I$ , temos que  $\psi : X \to \prod_{i \in I} G_i, x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$  é o único homomorfismo tal que  $f_i = \pi_i \circ \psi$ .

(AB4) Sejam  $(G_i)_{i\in I}$ ,  $(H_i)_{i\in I}$  e  $(K_i)_{i\in I}$  famílias de grupos abelianos e  $(f_i:G_i\to H_i)_{i\in I}$  e  $(r_i:H_i\to K_i)_{i\in I}$  famílias de homomorfismos de grupos tais que  $0\to G_i\overset{f_i}\to H_i\overset{r_i}\to K_i\to 0$  é uma sequência exata curta, com  $i\in I$ . Pode-se provar que o coproduto de  $(f_i)_{i\in I}$  é o homomorfismo  $\bigoplus_{i\in I}f_i:\bigoplus_{i\in I}G_i\to\bigoplus_{i\in I}H_i$ ,  $(g_i)_{i\in I}\mapsto (f_i(g_i))_{i\in I}$ . O mesmo vale para o coproduto de  $(r_i)_{i\in I}$ . Assim, usando que  $f_i$  é injetiva,  $r_i$  é sobrejetiva e im $(f_i)=\ker(r_i)$ , para todo  $i\in I$ , pode-se provar que

$$0 \to \bigoplus_{i \in I} G_i \xrightarrow[i \in I]{\bigoplus_{i \in I} f_i} \bigoplus_{i \in I} H_i \xrightarrow[i \in I]{\bigoplus_{i \in I} r_i} \bigoplus_{i \in I} K_i \to 0$$

também é uma sequência exata curta.

(AB4\*) Aplica-se, nesse axioma, o mesmo raciocínio usado em (AB4), onde o produto de homomorfismos é definido igualmente ao coproduto.

(AB5) Sejam  $\mathscr{D}$  uma categoria filtrada e  $F, G, H : \mathscr{D} \to \mathsf{AbGrp}$  funtores tais que  $0 \to F \xrightarrow{\eta}$ 

 $G \xrightarrow{\nu} H \to 0$  é uma sequência exata curta. Seja  $\bigsqcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} F(D)$  a união disjunta de todos os grupos F(D), indexados por  $D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ , isto é,

$$\bigsqcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} F(D) = \bigcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} \{\underbrace{(x, D)}_{\mathbb{H}} \mid x \in F(D)\} = \bigcup_{D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})} \{x_D \in F(D)\}.$$

Defina a relação  $\sim$  em  $\bigsqcup_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})} F(D)$  da seguinte maneira:

$$x_{D_1} \sim x_{D_2} \iff \exists D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}) \ \exists d_1: D_1 \to D \ \exists d_2: D_2 \to D \quad F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2})$$

Pode-se provar que essa relação é uma relação de equivalência. Assim, podemos considerar o conjunto das classes de equivalência,  $\binom{\bigcup}{D\in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})}F(D)$ / $\sim = \{[x_D] \mid x_D\in F(D)\}=: L_F$ . Sejam  $[x_{D_1}]$  e  $[x_{D_2}]$  duas classes de equivalência e  $D\in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})$  tal que existe  $d_1:D_1\to D$  e  $d_2:D_2\to D$  (lembre-se de que  $\mathscr{D}$  é uma categoria filtrada). Definimos  $[x_{D_1}]+[x_{D_2}]:=[F(d_1)(x_{D_1})+F(d_2)(x_{D_2})]$ . Pode-se mostrar essa operação é bem definida e que faz o conjunto  $L_F$  ser um grupo abeliano. Também pode-se provar que o colimite de F é o par  $(L_F,(s_D:F(D)\to L_F)_{D\in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})})$ , onde  $s_D(x_D)=[x_D]$  (para mais detalhes ver [2], Proposição 2.13.3, e [6], seção 10.8). O mesmo se aplica aos funtores G e H.

Pode-se provar que o colimite de  $\eta$  é o morfismo  $\operatorname{colim}(\eta): L_F \to L_G, [x_D] \mapsto [\eta_D(x_D)].$  Vamos ver que ela está bem definida. Suponha que  $[x_{D_1}] = [x_{D_2}].$  Então existem  $d_1: D_1 \to D$  e  $d_2: D_2 \to D$  tais que  $F(d_1)(x_{D_1}) = F(d_2)(x_{D_2}).$  Como  $\eta$  é uma transformação natural, então

$$G(d_1)(\eta_{D_1}(x_{D_1})) = \eta_D(F(d_1)(x_{D_1})) = \eta_D(F(d_2)(x_{D_2})) = G(d_2)(\eta_{D_2}(x_{D_2})),$$

como se vê no diagrama abaixo.

Logo,  $[\eta_{D_1}(x_{D_1})] = [\eta_{D_2}(x_{D_2})]$ . Da mesma forma define-se o colimite de  $\nu$ .

Finalmente, prova-se que a sequência  $0 \to L_F \xrightarrow{\operatorname{colim}(\eta)} L_F \xrightarrow{\operatorname{colim}(v)} L_H \to 0$  é uma sequência exata curta.

(AB6) Esse axioma segue de um resultado que diz que na categoria **AbGrp** limites finitos comutam com colimites filtrados. Veja, por exemplo, [2], Corolário 2.13.6. □

## 4 Objetos compactos, projetivos e geradores

Sejam  $\mathscr C$  uma categoria onde existem limites e colimites,  $X\in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$  e considere o funtor

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\cdot): \mathscr{C} \to \operatorname{Set}$$

$$Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$$

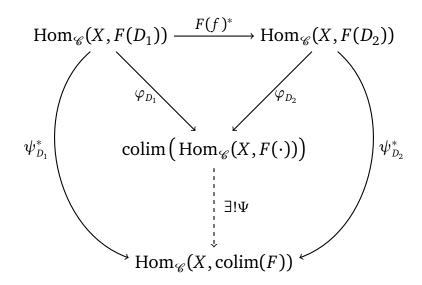
$$f: Y_1 \to Y_2 \mapsto f^*: \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y_1) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y_2)$$

$$g \mapsto f \circ g$$

Seja  $F: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$  um funtor, com  $\mathscr{D}$  sendo uma categoria filtrada, e considere a composição  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\cdot))$ . Sendo  $\left(\operatorname{colim}(F), (\psi_D: F(D) \to \operatorname{colim}(F))_{D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})}\right)$  o colimite de F, então, para todo  $f: D_1 \to D_2$  em  $\operatorname{Hom}(\mathscr{D})$ , temos que  $\psi_{D_1} = \psi_{D_2} \circ F(f)$ . Assim, note que, se  $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(D_1))$ , então

$$(\psi_{D_2}^* \circ F(f)^*)(g) = \psi_{D_2}^*(F(f) \circ g) = \psi_{D_2} \circ F(f) \circ g = \psi_{D_1} \circ g = \psi_{D_1}^*(g),$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta.



Logo, existe único morfismo  $\Psi: \operatorname{colim} \big(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\cdot))\big) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \operatorname{colim}(F))$ , pela pro-

priedade do colimite de  $\text{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\cdot))$ , tal que  $\Psi \circ \varphi_D = \psi_D^*$ , para todo  $D \in \text{Obj}(\mathscr{D})$ . Se o morfismo  $\Psi$  for um isomorfismo, então dizemos que X é **compacto**.

Sejam  $\mathscr C$  uma categoria e  $X\in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ . Se  $\mathrm{Hom}_{\mathscr C}(X,\cdot)$  preserva epimorfismos, então dizemos que X é **projetivo**. Seja  $G\subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ . Se para quaisquer  $f,g:C_1\to C_2$  morfismos em  $\mathscr C$ , com  $f\neq g$ , existe  $X\in G$  e  $h:X\to C_1$  tal que  $f\circ h\neq g\circ h$ , então dizemos que dizemos que G é um **conjunto de geradores** de  $\mathscr C$ .

## 5 Lema de Yoneda e Teorema da Função Adjunta

**Teorema 1** (Lema de Yoneda). Sejam  $\mathscr C$  uma categoria e  $C \in \mathrm{Obj}(\mathscr C)$ . Defina o funtor  $h^C := \mathrm{Hom}_{\mathscr C}(\cdot,C) : \mathscr C^{op} \to \mathsf{Set}$ . Sejam os funtores

- $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Func}(\mathscr{C}^{op}, \operatorname{Set})}(h^C, \cdot) : \operatorname{Func}(\mathscr{C}^{op}, \operatorname{Set}) \to \operatorname{Set},$
- $(\cdot)(C)$ : Func $(\mathscr{C}^{op}, \operatorname{Set}) \to \operatorname{Set}, F \mapsto F(C) \in F_1 \xrightarrow{\eta} F_2 \mapsto F_1(C) \xrightarrow{\eta_C} F_2(C)$ .

Então existe um isomorfismo natural

$$\Psi(C): \operatorname{Hom}_{\operatorname{Func}(\mathscr{C}^{op}, \operatorname{Set})}(h^C, \cdot) \to (\cdot)(C)$$

onde 
$$\Psi(C)_F$$
:  $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Func}(\mathscr{C}^{op},\,\operatorname{Set})}(h^C,F) \to F(C), \ \alpha \mapsto \alpha_C(\operatorname{id}_C).$ 

Sejam  $R: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$  e  $L: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$  funtores. Dizemos que L é **adjunta à esquerda** de R (R é adjunta à direita de L), se, para todo  $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  e para todo  $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,

$$\sigma(D)$$
:  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(L(\cdot), D) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, R(D))$   
 $\theta(C)$ :  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C), \cdot) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C, R(\cdot))$ 

são isomorfismos naturais. Note que  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(L(\cdot),D)$  e  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot,R(D))$  são funtores de  $\mathscr{C}^{op}$  para Set e  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(L(C),\cdot)$  e  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C,R(\cdot))$  são funtores de  $\mathscr{D}$  para Set.

**Teorema 2** (Teorema da Função Adjunta). Seja  $\mathscr C$  uma categoria (não necessariamente pequena) tal que, para todo  $F: \mathscr D \to \mathscr C$  um funtor, com  $\mathscr D$  sendo uma categoria índice, o limite existe (isto é,  $\mathscr C$  é completa). Seja também  $R: \mathscr C \to \mathscr E$  um funtor. Então as seguintes condições são equivalentes.

- (a) Existe um funtor adjunto à esquerda de R.
- (b) Valem as afirmações a seguir:

- (i) se  $F: \mathcal{D} \to \mathscr{C}$  é um funtor, onde  $(\lim(F), (\varphi_D)_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})})$  é seu limite e  $\mathcal{D}$  é uma categoria índice, então  $(R(\lim(F)), (R(\varphi_D))_{D \in \text{Obj}(\mathcal{D})})$  é o limite de RF (ou seja, R preserva limites pequenos).
- (ii) para todo  $E \in \text{Obj}(\mathcal{E})$ , existe um *conjunto*  $S_E \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$  tal que

$$\forall C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}) \ \forall e : E \to R(C) \ \exists C' \in S_E \ \exists c : C' \to C \ \exists e' : E \to R(C') \ R(c) \circ e' = e. \quad \Box$$

**Observação 4.** No Teorema 2, se  $\mathscr{C}$  é uma categoria pequena, então o item (b), subitem (ii) é sempre satisfeito, pois basta tomarmos o conjunto  $S_E = \text{Obj}(\mathscr{C})$  e fazermos C' = C,  $c = \text{id}_C$  e e' = e.

#### **6** Teorema 2.2

**Teorema 3** (Teorema 2.2, das notas de Peter Scholze). A categoria  $\kappa$ -Cond(AbGrp) é uma categoria abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck (AB3), (AB3\*), (AB4), (AB4\*), (AB5) e (AB6). Além disso, tal categoria é gerada por objetos projetivos compactos.

**Demonstração.** Seja  $\kappa$ -EDSet a categoria dos conjuntos  $\kappa$ -pequenos extremamente desconexos. Seja também Sh( $\kappa$ -EDSet) a categoria cujos objetos são feixes de grupos abelianos sobre  $\kappa$ -EDSet. Para simplificar a notação, vamos denotar  $\kappa$ -Cond( $\pi$ bGrp) por  $\mathscr{C}_1$  e Sh( $\kappa$ -EDSet) por  $\mathscr{C}_2$ . Vimos no seminário "Categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados", ministrado por Matheus Johnny Caetano, que  $\mathscr{C}_1$  é equivalente a  $\mathscr{C}_2$ . Assim, mostrando que  $\mathscr{C}_2$  é uma categoria abeliana e satisfaz os axiomas de Grothendieck do enunciado, temos que  $\mathscr{C}_1$  também é abeliana e satisfaz os mesmos axiomas. Portanto, vamos nos concentrar em  $\mathscr{C}_2$ . A ideia é usar que  $\pi$  bGrp é abeliana e satisfaz os axiomas enunciados. Para isso, considere um funtor

$$F: \mathscr{D} \to \mathscr{C}_{2}$$

$$D \mapsto F(D): \kappa\text{-}\mathcal{E}DSet^{op} \to \mathcal{A}bGrp$$

$$S \mapsto F(D)(S)$$

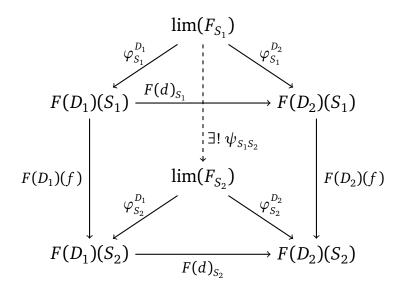
$$S_{1} \xrightarrow{f} S_{2} \mapsto F(D)(S_{1}) \xrightarrow{F(D)(f)} F(D)(S_{2})$$

$$D_{1} \xrightarrow{d} D_{2} \mapsto F(D_{1}) \xrightarrow{F(d)} F(D_{2}),$$

onde  $\mathcal{D}$  é uma categoria de índices. Para cada  $S \in \text{Obj}(\kappa\text{-}\mathcal{E}\mathsf{D}\mathsf{Set})$ , defina o funtor

$$\begin{array}{cccc} F_S: & \mathscr{D} & \to & \mathsf{flbGrp} \\ & D & \mapsto & F(D)(S) \\ D_1 \xrightarrow{d} D_2 & \mapsto & F(D_1)(S) \xrightarrow{F(d)_S} F(D_2)(S). \end{array}$$

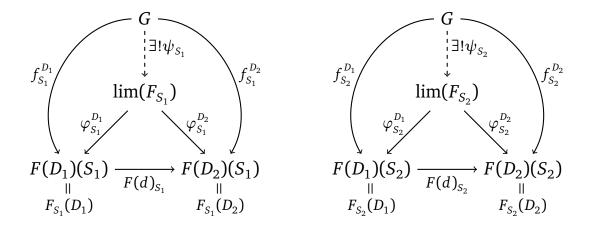
Seja  $(\lim(F_S), (\varphi_S^D : \lim(F_S) \to F(D)(S)))$  o limite de  $F_S$ . Dado  $f: S_1 \to S_2$  um morfismo em  $\operatorname{Hom}(\kappa\text{-}\mathcal{E}\mathsf{D}\mathsf{Set})$ , usando a propriedade de  $\lim(F_{S_1})$ , juntamente com a comutatividade de transformações naturais, temos que existe único morfismo  $\psi_{S_1S_2}: \lim(F_{S_1}) \to \lim(F_{S_2})$ , conforme se vê no diagrama abaixo.



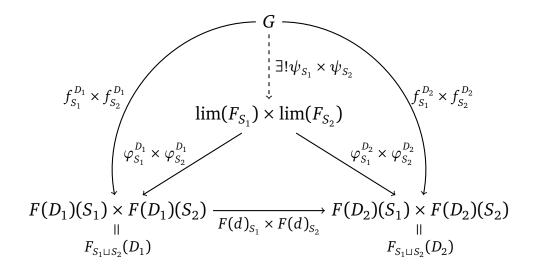
Assim, defina o funtor

$$\begin{array}{cccc} L: & \kappa\text{-}\mathcal{E}\mathrm{DSet}^{op} & \to & \mathcal{A}\mathrm{bGrp} \\ & S & \mapsto & \lim(F_S) \\ & S_1 \xrightarrow{f} S_2 & \mapsto & \lim(F_{S_1}) \xrightarrow{\psi_{S_1S_2}} \lim(F_{S_2}). \end{array}$$

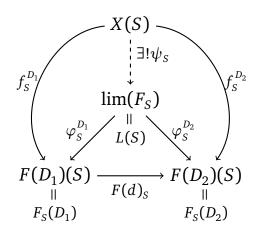
Vamos mostrar que  $L \in \text{Obj}(\mathscr{C}_2)$  e que  $\left(L, (\varphi^D : L \to F(D))_{D \in \text{Obj}(\mathscr{D})}\right)$  é o limite do funtor F, onde  $\varphi^D = (\varphi^D_S)_{S \in \text{Obj}(\kappa-\mathcal{E}DSet)}$ . Primeiro, vamos mostrar que  $L \in \mathscr{C}_2$ . Para isso, precisamos ver que  $L(S_1 \sqcup S_2) = L(S_1) \times L(S_2)$ . Mas, como  $L(S) = \lim(F_S)$ , temos que mostrar que  $\lim(F_{S_1 \sqcup S_2}) = \lim(F_{S_1}) \times \lim(F_{S_2})$ . Assim, considere os diagramas abaixo, onde G é um grupo abeliano qualquer e  $f^D_S : G \to F(D)(S)$  é um homomorfismo de grupos.



Logo, podemos formar o seguinte diagrama.



Dessa forma,  $\lim(F_{S_1}) \times \lim(F_{S_2})$  satisfaz a propriedade universal de limite de  $F_{S_1 \sqcup S_2}$ , logo,  $\lim(F_{S_1 \sqcup S_2}) = \lim(F_{S_1}) \times \lim(F_{S_2})$ , o que mostra que  $L \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C}_2)$ . Agora, vamos mostrar que  $\left(L, (\varphi^D: L \to F(D))_{D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})}\right)$  é o limite do funtor F. Para isso, considere  $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C}_2)$  e seja, para cada  $D \in \operatorname{Obj}(\mathscr{D})$ ,  $f^D: X \to F(D)$  morfismo em  $\operatorname{Hom}(\mathscr{C}_2)$ , ou seja, uma transformação natural. Uma vez que  $F(D)(S) = F_S(D)$ , pela propriedade universal do limite de  $F_S$ , temos que o seguinte diagrama comuta, para cada  $S \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C}_2)$ .



Portanto,  $\left(L, (\varphi^D: L \to F(D))_{D \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})}\right)$  é o limite do funtor F. Uma construção análoga pode ser feita para o colimite de F. Feito isso, basta checar que  $\mathscr{C}_2$  herda as propriedades de  $\mathrm{AbGrp}$ . Por exemplo, vamos ver que núcleo existe. Se  $\eta: T_1 \to T_2$  é um morfismo em  $\mathscr{C}_2$ , então  $\ker(\eta) = \lim(F)$ , onde

$$\begin{array}{cccc}
& & F & & \mathscr{C}_2 \\
& & & & \eta & \\
\bullet & & & \longmapsto & T_1 & \xrightarrow{0_{T_1 T_2}} T_2
\end{array}$$

Mas o limite de F é dado pelo limite L que, por sua vez, é dado pelo limite de  $F_S$ .

Uma vez que o limite de  $F_S$  é o núcleo de  $\eta_S$ , então o limite de F existe, pois **AbGrp** é abeliana. A verificação das demais propriedades que definem categoria abeliana e também os axiomas de Grothendieck são feitas analogamente.

Vamos ver, agora, que  $\mathscr{C}_1 = \kappa\text{-Cond}(\text{fbGrp})$  é gerada por objetos projetivos compactos. Vamos começar considerando o funtor esquecimento  $R:\mathscr{C}_1 \to \kappa\text{-Cond}(\text{Set})$ . Podese provar que R preserva limites pequenos. Como  $\mathscr{C}_1$  é uma categoria pequena, então, pela Observação 4 e pelo Teorema da Função Adjunta (Teorema 2), temos que R possui uma adjunta à esquerda  $L:\kappa\text{-Cond}(\text{Set}) \to \mathscr{C}_1$ . Seja S um conjunto  $\kappa\text{-pequeno}$  extremamente desconexo e considere  $\underline{S} = \text{Hom}_{\text{Top}}(\cdot,S) \in \text{Obj}(\kappa\text{-Cond}(\text{Set}))$ . Pela adjunção, temos que  $\theta(\underline{S}): \text{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), \cdot) \to \text{Hom}_{\kappa\text{-Cond}(\text{Set})}(\underline{S}, \cdot)$  é um isomorfismo natural. Pelo Lema de Yoneda (Teorema 1), temos que  $\Psi(\underline{S}): \text{Hom}_{\kappa\text{-Cond}(\text{Set})}(\underline{S}, \cdot) \to (\cdot)(S)$  também é um isomorfismo natural, onde  $(\cdot)(S): \kappa\text{-Cond}(\text{Set}) \to \text{Set}, X \mapsto X(S), X_1 \overset{\gamma}{\to} X_2 \mapsto X_1(S) \overset{\gamma}{\to} X_2(S)$ . Seja  $\eta: M_1 \to M_2$  um epimorfismo em  $\mathscr{C}_1$ . Então  $\eta_S: M_1(S) \to M_2(S)$  também é um epimorfismo. Como também  $\Psi(\underline{S})$  e  $\theta(\underline{S})$  são bijeções, temos que qualquer  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), M_2)$  está associado a um só elemento em  $g \in M_2(S)$ . Pela sobrejeção de  $\eta_S$ , existe  $x \in M_1(S)$  tal que  $\eta_S(x) = g$ . Novamente, pela bijeções de  $\Psi(\underline{S})$  e  $\theta(\underline{S})$ , x está associado a um único  $\beta \in \text{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), M_1)$ . Uma vez que o diagrama abaixo é comutativo, temos que  $\eta^*(\beta) = \alpha$ , ou seja,  $\eta^*$  é epimorfismo. Isso significa que  $L(\underline{S})$  é um objeto projetivo em  $\mathscr{C}_1$ .

Agora, vamos mostrar que  $L(\underline{S})$  é compacto, isto é, dado  $F: \mathcal{D} \to \mathscr{C}_1$ , com  $\mathcal{D}$  filtrada, o morfismo natural  $\varphi: \operatorname{colim} \big( \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), F(\cdot)) \big) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), \operatorname{colim}(F))$  é uma bijeção. Compondo os isomorfismos naturais  $\theta(\underline{S})$  com  $\Psi(\underline{S})$ , temos um isomorfismo natural entre  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), \cdot)$  e  $(\cdot)(S)$ . Assim, se  $F: \mathcal{D} \to \mathscr{C}_1$  é um funtor, com  $\mathcal{D}$  filtrada, então teremos ainda um isomorfismo natural entre  $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}_1}(L(\underline{S}), F(\cdot))$  e  $F(\cdot)(S)$ . Desse modo, se mostrarmos que  $\operatorname{colim} \big( F(\cdot)(S) \big)$  é isomorfo a  $\operatorname{colim}(F)(S)$ , teremos

$$\operatorname{colim} \big( \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}_1} (L(\underline{S}), F(\cdot)) \big) \cong \operatorname{colim} \big( F(\cdot)(S) \big) \cong \operatorname{colim}(F)(S) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}_1} (L(\underline{S}), \operatorname{colim}(F)),$$

o que provaria que  $L(\underline{S})$  é compacto. Assim, é suficiente provarmos que  $(\cdot)(S)$  preserva colimites (exercício).

Finalmente, vamos ver que o conjunto formado por todos  $L(\underline{S})$  é um conjunto gerador. Sejam  $\eta, \nu: M_1 \to M_2$  morfismos diferentes em  $\mathscr{C}_1$ . Então, existe algum S, conjunto  $\kappa$ -pequeno extremamente desconexo, tal que  $\eta_S \neq \nu_S$ , ou seja,  $\eta_S(m) \neq \nu_S(m)$ , para algum  $m \in M_1(S)$ . Pelas bijeções dadas pela adjunção e pelo Lema de Yoneda, temos que existe  $\gamma: L(\underline{S}) \to M_1$  e  $N \in L(\underline{S})$  tal que  $\gamma_S(N) = m$ . Logo,  $\eta_S(\gamma_S(N)) = \eta_S(m) \neq \nu_S(m) = \nu_S(\gamma_S(N))$ . Portanto,  $\eta \circ \gamma \neq \nu \circ \gamma$ .

### Referências

- [1] ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWROŃSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Cambridge University Press, 2006. Apêndice A.
- [2] BORCEUX, F. Handbook of Categorical Algebra I. Cambridge University Press, 1994.
- [3] nLab. Separator. Website.

- [4] ROCH, S. A Brief Introduction to Abelian Categories. Notas de aula. Website.
- [5] SCHOLZE, P. Lectures on Condensed Mathematics. Notas de aula. Website.
- [6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. Seções 4.19, 4.21, 10.8, 12.3, 12.5 e 19.10. Website.
- [7] Wikipedia. Abelian Category. Website.
- [8] Wikipedia. Compact Object. Website.
- [9] Wikipedia. Projective Object. Website.