

# CATEGORIAS

SCHCS

Notas baseadas nos primeiros capítulos do livro *Basic Category Theory* por Tom Leinster (*Cambridge studies in advanced mathematics*, vol. 143, CUP, 2014).

## 1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Uma *categoria*  $C$  consiste de

- (1) *objetos*  $A, B, C$ ;
- (2) para cada par de objetos  $A$  e  $B$ , uma coleção  $H(A, B)$  de *morfismos* (mapas, setas, flechas, etc)  $A \rightarrow B$ .

Outra notação para os morfismos:  $\text{Hom}(A, B)$ ,  $C(A, B)$ ,  $H_C(A, B)$ ,  $\text{Hom}_C(A, B)$ .

Para objetos  $A, B, C$  temos uma função

$$H(A, B) \times H(B, C) \rightarrow H(A, C), \quad (f, g) \mapsto g \circ f.$$

Esta função chama-se *composição*. Para cada objeto  $A$  temos  $1_A \in H(A, A)$  tal que

$$1_B \circ h = h, \quad h \circ 1_A = h, \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

para todo  $h \in H(A, B)$ ,  $g \in H(B, C)$  e  $f \in H(C, D)$ . Se  $f \in H(A, B)$ , então  $A$  é o *domínio* de  $f$  e  $B$  é o *codomínio*.

**Exemplo 1.** As seguintes são os exemplos mais comuns de categorias:

- (1) **Set**: Os objetos são conjuntos, os mapas são mapas entre conjuntos.
- (2) **Grp**: Os objetos são grupos, e os mapas são homomorfismos entre grupos.
- (3) **AbGrp**: Os objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos.
- (4) **Ring**: Os objetos são anéis (com 1), e os mapas são homomorfismos entre anéis.
- (5) **CRing**: Os objetos são anéis comutativos (com 1), e os mapas são homomorfismos entre anéis comutativos.
- (6)  **$k$ -Vect**: Os objetos são espaços vetoriais sobre um corpo  $k$  e os mapas são aplicações  $k$ -lineares.
- (7)  **$R$ -Mod**: Os objetos são  $R$ -módulos (à esquerda) e os mapas são  $R$ -homomorfismos.
- (8) **Top**: Os objetos são espaços topológicos e os mapas são funções contínuas.

Um mapa  $f \in H(A, B)$  é dito *isomorfismo*, se existir  $g \in H(B, A)$  tal que  $fg = 1_B$  e  $gf = 1_A$ .

**Exemplo 2.** Outros exemplos,

- (1)  $\emptyset$  com nenhum objeto e nenhuma flecha;
- (2)  $\{A\}$  com um objeto e uma flecha  $1_A$ ;

- (3)  $A \rightarrow B$  com dois objetos e três flechas  $1_A, 1_B, A \rightarrow B$ .
- (4) Um monoide  $M$  pode ser visto como uma categoria com um objeto  $A$  e uma flecha associada com cada elemento de  $M$ . A identidade de  $M$  corresponde a  $1_A$  e a associatividade do monoide corresponde à associatividade da composição.
- (5) Um grupo  $G$  pode ser visto como uma categoria com um objeto  $A$  e uma flecha associada com cada elemento de  $G$ . Neste caso, toda flecha da categoria é um isomorfismo.
- (6) Se  $P$  é um conjunto parcialmente ordenado, então  $P$  pode ser visto como uma categoria. Os objetos da categoria são os elementos de  $P$  e, para  $\alpha, \beta \in P$ , temos uma flecha  $\varphi_{\alpha, \beta} : \alpha \rightarrow \beta$  na categoria se e somente se  $\alpha \leq \beta$ . Neste caso,  $H(\alpha, \beta) = \{\varphi_{\alpha, \beta}\}$ .

**1.1. Categoria oposta ou dual.** Seja  $C$  uma categoria. Definimos o *dual* ou *oposta*  $C'$  de  $C$ . Os objetos de  $C'$  são os mesmos que os objetos de  $C$ ,  $1_A$  em  $C'$  é o mesmo que em  $C$ , e  $H_{C'}(A, B) = H_C(B, A)$ .

## 2. FUNCTORES

Sejam  $C$  e  $D$  categorias. Um *functor*  $F : C \rightarrow D$  associa

- (1) cada objeto  $A \in C$  com um objeto  $F(A) \in D$ ;
- (2) cada mapa  $f \in H(A, B)$  com um mapa  $F(f) \in H(F(A), F(B))$

tal que

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \quad \text{e} \quad F(fg) = F(f)F(g).$$

**Exemplo 3.** *Funtores de esquecimento:* Considere o seguinte functor  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Associamos com cada grupo  $G$  o seu conjunto  $G$  e  $F(\alpha) = \alpha$  para cada  $\alpha \in H_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ .

Pode-se definir funtores de esquecimento similarmente

- (1)  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ ;
- (2)  $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ;
- (3)  $R\text{-mod} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ ;
- (4)  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ .

**Exemplo 4.** *Funtores livres:* Considere por exemplo o functor  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$  levando cada conjunto  $X$  ao grupo  $F(X)$  livre gerado por  $X$ . Um morfismo  $\alpha : X \rightarrow Y$  induz um único homomorfismo  $\bar{\alpha} : F(X) \rightarrow F(Y)$ . Pode-se definir funtores similares

- (1)  $\mathbf{Set} \rightarrow k\text{-Vect}$ ;
- (2)  $\mathbf{Set} \rightarrow R\text{-Mod}$ ;
- (3)  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{CRing}$ ;
- (4)  $\mathbf{Set} \rightarrow k\text{-CAlg}$  (a categoria de  $k$ -álgebras comutativas onde  $k$  é um corpo).

Um functor contravariante entre  $C$  e  $D$  é um functor  $C \rightarrow D'$ .

**Exemplo 5.**  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbb{R}\text{-CAlg}$ : Seja  $X$  um espaço topológico. Definimos o functor  $F$  como  $X \mapsto C(X, \mathbb{R})$  onde  $C(X, \mathbb{R})$  é o anel das funções contínuas de  $X$  para  $\mathbb{R}$ . Se  $f : X \rightarrow Y$

em **Top**, então  $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$  com  $F(f)(\psi) = \psi \circ f$ . Às vezes, escrevemos que  $F = \psi \circ -$ .

**Exemplo 6.** O espectro  $\mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Top}$ :  $R \mapsto \text{Spec}(R)$  onde

$$\text{Spec}(R) = \{P \subset R \mid P \text{ é um ideal primo}\}.$$

Definimos uma topologia (chamada de *Topologia de Zariski* em  $\text{Spec}(R)$ ) com a regra que

$$V(I) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$$

são fechados para  $I \subseteq R$  ideais. Se  $f : R \rightarrow S$ , então  $\text{Spec}(f) : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$  está definido como  $\text{Spec}(f)(Q) = f^{-1}(Q)$  para cada  $Q \in \text{Spec}(S)$ . É um exercício fácil mostrar que isso é bem definido, pois a pré-imagem homomorfica de um ideal primo é primo.

Um functor  $F : C \rightarrow D$  é dito *fiel* (repetivamente, *cheio*) se todos os mapas  $H(A, B) \rightarrow H(F(A), F(B))$  são injetivos (respetivamente, sobrejetivos).

Uma *subcategoria*  $D$  de  $C$  contém objetos de  $C$  e  $H_D(A, B) \subseteq H_C(A, B)$ . Subcategoria é *cheia* se  $H_D(A, B) = H_C(A, B)$ . Por exemplo, **AbGrp** é uma subcategoria cheia de **Grp**.

### 3. TRANSFORMAÇÃO NATURAL

Sejam  $C$  e  $D$  categorias e  $F, G : C \rightarrow D$  funtores. Uma *transformação natural*  $\alpha$  entre  $F$  e  $G$  é composta por uma família de morfismos  $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$  para todo objeto  $A$  em  $C$  tal que para todo mapa  $f : A \rightarrow B$  o diagrama

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(B) \end{array}$$

comuta.

**Exemplo 7.** Seja  $C$  uma categoria discreta sobre um conjunto  $X$ . Então  $C$  não tem flechas, exceto  $1_x$  para todo  $x \in X$ . Seja  $D$  uma categoria qualquer. Então funtores  $F, G : C \rightarrow D$  escolhem objetos  $F(x)$  e  $G(x)$  para cada  $x \in X$ . Uma transformação natural  $\alpha$  é uma coleção de mapas  $\alpha_x : F(x) \rightarrow G(x)$ .

**Exemplo 8.** Seja  $n \geq 1$  fixo, e considere  $F, G : \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Grp}$  onde  $F(R) = GL_n(R)$ ,  $G(R) = R^*$ . É fácil ver que estas correspondências são functoriais; ou seja, estendem-se para morfismos. O mapa  $\det_R : GL_n(R) \rightarrow R^*$  é uma transformação natural.

Transformações naturais podem ser compostas. Se  $F, G, H : C \rightarrow D$  funtores,  $\alpha : F \rightarrow G$ ,  $\beta : G \rightarrow H$  são transformações naturais, então a composição  $\beta\alpha$  é transformação natural  $F \rightarrow H$ . A identidade  $1_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$  é natural  $F \rightarrow F$ . Assim

se  $C$  e  $D$  são categorias, então a *categoria dos funtores*  $[C, D]$  tem os funtores entre  $C$  e  $D$  como os objetos e as transformações naturais como os morfismos.

*Isomorfismo natural* entre  $F$  e  $G$  é uma transformação natural  $\alpha$  tal que

$$\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$$

é um isomorfismo para cada objeto  $A$  na categoria  $C$ .

**Exercício 9.** *Isomorfismo natural é um isomorfismo na categoria dos funtores. Neste caso os funtores  $F$  e  $G$  são naturalmente isomorfos.*

Dados dois funtores  $F, G : C \rightarrow D$ . Dizemos que  $F(A)$  e  $G(A)$  são naturalmente isomorfos se  $F$  e  $G$  são naturalmente isomorfos.

**Exemplo 10** (O duplo dual). Sejam  $V$  e  $W$   $k$ -espaços vetoriais. Lembremos que  $V^* = \text{Hom}(V, k)$  e, por extensão,  $V^{**} = \text{Hom}(V^*, k)$ . A correspondência  $(-)^*$  é functorial contravariante; de fato, se  $\alpha : V \rightarrow W$ , definimos  $\alpha^* : W^* \rightarrow V^*$  como  $\alpha^* = - \circ \alpha$  e  $\alpha^{**} : W^{**} \rightarrow V^{**}$  como  $\alpha^{**} = - \circ \alpha^*$ . Ou seja,

$$\alpha^{**}(\beta)(\psi) = (\beta \circ \alpha^*)(\psi) = \beta(\psi \circ \alpha)$$

para  $\beta \in V^{**}$  e  $\psi \in W^*$ . Temos que  $\varphi^V : v \mapsto \varphi_v^V$  é um mapa de  $V \rightarrow V^{**}$  onde  $\varphi_v^V(\chi) = \chi(v)$  para  $v \in V$  e  $\chi \in V^*$ . Afirmamos que a coleção de mapas  $\varphi^V$  define uma transformação natural entre os funtores  $1, (-)^{**} : k\text{-}\mathbf{Vect} \rightarrow k\text{-}\mathbf{Vect}$ . Escrevendo o diagrama (1) para esta situação, precisa-se provar que  $\alpha^{**}(\varphi_v^V) = \varphi_{\alpha(v)}^W$  para todo  $\alpha : V \rightarrow W$  em  $k\text{-}\mathbf{Vect}$ . Mas isso segue dos fatos que

$$\alpha^{**}(\varphi_v^V)(\psi) = \varphi_v^V(\psi \circ \alpha) = \psi(\alpha(v))$$

e

$$\varphi_{\alpha(v)}^W(\psi) = \psi(\alpha(v)).$$

Então temos que os  $\varphi^V$  determinam uma transformação natural. Note que se  $\dim V$  é finita, então  $\varphi^V : V \rightarrow V^{**}$  é um isomorfismo e neste caso temos um isomorfismo entre os funtores  $1$  e  $(-)^{**}$  na categoria  $k\text{-}\mathbf{FinVect}$  de  $k$ -espaços de dimensão finita.

#### 4. FUNCTORES ADJUNTOS

Sejam  $C$  e  $D$  categorias e assuma que temos funtores

$$F : C \rightarrow D \quad \text{e} \quad G : D \rightarrow C.$$

Dizemos que  $(F, G)$  é um *par adjunto* ou  $F$  é *adjunto à esquerda* de  $G$ , ou  $G$  é *adjunto à direita* de  $F$  se para cada par de objetos  $A \in C$  e  $B \in D$  existe uma bijeção

$$\varrho_{A,B} : H_D(F(A), B) \rightarrow H_C(A, G(B))$$

natural no sentido explicado nos itens (1)–(2) em baixo. Para simplificar a notação, se  $g \in H_D(F(A), B)$  e  $f \in H_C(A, G(B))$  então denotamos a suas imagens por esta bijeção como  $\bar{g}$  e  $\bar{f}$ , respectivamente.

A palavra “natural” no parágrafo anterior tem o seguinte significado.

(1) Seja  $A \in C$ ,  $B, B' \in D$  objetos e sejam  $g : F(A) \rightarrow B$  e  $q : B \rightarrow B'$ . Então

$$\overline{F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'} = A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B').$$

(2) Seja  $A, A' \in C$ ,  $B \in D$  objetos e sejam  $p : A' \rightarrow A$  e  $f : A \rightarrow G(B)$ . Então

$$\overline{A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)} = F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B.$$

As condições (1) e (2) podem ser expressas com a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} H_D(F(A), B) & \xrightarrow{q \circ -} & H_D(F(A), B') & & H_C(A, G(B)) & \xrightarrow{- \circ p} & H_C(A', G(B)) \\ \varrho_{A,B} \downarrow & & \downarrow \varrho_{A,B'} & e & \varrho_{A,B} \uparrow & & \uparrow \varrho_{A',B} \\ H_C(A, G(B)) & \xrightarrow{G(q) \circ -} & H_C(A, G(B')) & & H_D(F(A), B) & \xrightarrow{- \circ F(p)} & H_C(F(A'), B). \end{array}$$

**Exemplo 11.** Considere os funtores  $F : \mathbf{Set} \rightarrow k\text{-}\mathbf{Vect}$  e  $G : k\text{-}\mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Set}$  onde, para um conjunto  $X$ ,  $F(X) = k[X]$  é o espaço vetorial de combinações lineares formais de elementos de  $X$  com coeficientes em  $k$  (o  $k$ -espaço com base  $X$ ) e para um  $k$ -espaço vetorial  $V$ ,  $G(V) = V$  (ou seja,  $G$  é o functor de esquecimento). Note que  $F$  e  $G$  podem ser definidos para morfismos na maneira óbvia. Assuma que  $X$  é um conjunto,  $V$  é um  $k$ -espaço. A bijeção natural na definição do adjunto pode ser definida como

$$\begin{aligned} \varrho_{X,V} : H_{k\text{-}\mathbf{Vect}}(k[X], V) &\rightarrow H_{\mathbf{Set}}(X, G(V)) = H_{\mathbf{Set}}(X, V) : \\ g &\mapsto \bar{g} = g|_X \\ \bar{f} &\leftarrow f \end{aligned}$$

onde  $\bar{f} : k[X] \rightarrow V$  é o mapa induzido por  $f : X \rightarrow V$ . Sejam  $g : k[X] \rightarrow V$  e  $q : V \rightarrow V'$  em  $k\text{-}\mathbf{Vect}$ , e  $f : X \rightarrow V$  e  $p : X' \rightarrow X$  em  $\mathbf{Set}$ . Traçando os dois diagramas antes do exemplo obtemos as seguintes imagens:

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{q \circ -} & q \circ g & & f & \xrightarrow{- \circ p} & f \circ p = (\bar{f} \circ F(p))|_X \\ \chi_{X,V} \downarrow & & \downarrow \chi_{X,V'} & e & \chi_{X,V} \uparrow & & \uparrow \chi_{X',V} \\ g|_X & \xrightarrow{G(q) \circ -} & (q \circ g)|_X = q \circ (g|_X) & & \bar{f} & \xrightarrow{- \circ F(p)} & \bar{f} \circ F(p) \end{array}$$

Temos que  $(F, G)$  é um par adjunto.

**Exemplo 12.** Considere os funtores  $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$  e  $G : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$  onde  $F(X) = X/X'$  ( $X'$  sendo o subgrupo derivado) e  $G(A) = A$  (ou seja,  $G$  é o functor de esquecimento). O quociente  $X/X'$  é chamado de *abelianização* de  $X$ . Note que a correspondência  $X \mapsto X/X'$  é functorial, pois se  $\alpha : X \rightarrow Y$  é um morfismo, então  $\alpha$  induz um morfismo  $\alpha_{\text{ab}} : X/X' \rightarrow Y/Y'$ . Note que temos a projeção natural  $\pi_X : X \rightarrow X/X'$  para cada grupo  $X$ . Dado  $X$  em  $\mathbf{Grp}$  e  $A$  em  $\mathbf{AbGrp}$  temos que a bijeção  $\text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(X/X', A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(X, A)$  pode ser dada por

$$g \mapsto g \circ \pi_X \quad e \quad f \mapsto f_{\text{ab}}.$$

É fácil verificar que  $(F, G)$  é um par adjunto.

**Exemplo 13.** Considere um anel comutativo  $R$  com 1 e seja  $N$  um  $R$ -módulo. Considere os funtores  $- \otimes N$  e  $\text{Hom}(N, -)$  na categoria  $R\text{-Mod}$ . Note que as duas destas correspondências são functoriais, pois se  $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$ , então

$$\alpha \otimes N : M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N, \quad m \otimes n \mapsto \alpha(m) \otimes n$$

e

$$\text{Hom}(N, \alpha) : \text{Hom}(N, M_1) \rightarrow \text{Hom}(N, M_2) \quad \varphi \mapsto \alpha \circ \varphi.$$

Se  $M$  e  $P$  são  $R$ -módulos, então existe uma bijeção natural entre  $\text{Hom}(M \otimes N, P)$  e  $\text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$  dada por

$$f \mapsto \psi_f \quad \text{onde} \quad \psi_f(m)(n) = f(m \otimes n)$$

e

$$\varphi \mapsto f_\varphi \quad \text{onde} \quad f_\varphi(m \otimes n) = \varphi(m)(n).$$

É fácil verificar que os dois mapas são inversos e satisfazem a definição de par adjunto.

O seguinte teorema mostra o poder de pares adjuntos de funtores. O teorema é verdadeira em em contexto mais geral, nomeadamente em categorias abelianas.

**Teorema 14.** *Sejam  $R$  e  $S$  anéis comutativos com identidade e considere um par  $(F, G)$  adjunto de funtores  $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$  e  $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ . Então  $F$  é exato à direita e  $G$  é exato à esquerda. Em particular, se  $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$  em  $R\text{-Mod}$  é sobrejetivo, então  $F(\alpha)$  também é sobrejetivo, e se  $\beta : N_1 \rightarrow N_2$  em  $R\text{-Mod}$  é injetivo então  $G(\beta)$  também é injetivo.*

**Corolário 14.1.** *O functor  $- \otimes N$  definido no Exemplo 13 é exato à direita e  $\text{Hom}(N, -)$  é exato à esquerda. Ou seja, se  $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$  é sobrejetivo e  $\beta : N_1 \rightarrow N_2$  é injetivo, então  $\alpha \otimes N : M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$  é sobrejetivo e  $\text{Hom}(N, \beta) : \text{Hom}(N, M_1) \rightarrow \text{Hom}(N, M_2)$  é injetivo.*

Assuma que  $(F, G)$  é um par de funtores adjuntos para as categorias  $C$  e  $D$ . As composições  $FG$  e  $GF$  são funtores de  $D \rightarrow D$  e  $C \rightarrow C$ , respetivamente. Seja  $A$  um objeto de  $C$ . Então  $1_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$  corresponde a um morfismo  $\eta_A = \overline{1_{F(A)}} : A \rightarrow GF(A)$ . Similarmente, se  $B$  é um objeto em  $D$ , então  $\varepsilon_B = \overline{1_{G(B)}} : FG(B) \rightarrow B$ .

**Exemplo 15.** Considere a construção no Exemplo 11. Seja  $X$  um conjunto e considere  $1_{k[X]} : k[X] \rightarrow k[X]$ . O morfismo  $\eta_X : X \rightarrow k[X]$  é a inclusão de  $X$  em  $k[X]$ . Agora seja  $V$  um espaço vetorial e considere  $1_V : V \rightarrow V$ . O mapa correspondente  $\varepsilon_V : k[V] \rightarrow V$  leva uma  $k$ -combinação linear formal com elementos de  $V$  ao seu valor em  $V$ .

**Lema 16.** *As funções  $\eta_A$  e  $\varepsilon_B$  definem transformações naturais  $\eta : 1_C \rightarrow GF$  e  $\varepsilon : FG \rightarrow 1_D$ .*

*Proof.* Exercício. □

Os mapas  $\eta$  e  $\varepsilon$  são chamados de *unidade* e *counidade* da adjunção.