1 Cohomologia de feixes

Nessas notas, nosso objetivo será discutir cohomologias de feixes, com o objetivo de provar que a noção que introduziremos aqui coincide com a noção de cohomologia condensada introduzidas por Scholzen e Clausen. Mais especificamente nosso objetivo será entender a demonstração do Teorema 3.2 das notas "Lectures on Condensed Mathematics" de Peter Scholze.

Para fixarmos a terminologia, se $\mathscr{F}$ é pré-feixe (ou um feixe) de grupos abelianos sobre X, então os elementos de $\mathscr{F}(U)$ serão chamados de seções locais de U. Se $V \subset U$, então chamaremos o morfismo induzido em $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ de mapa de restrição, cuja imagem de uma seção s de $\mathscr{F}(U)$ em $\mathscr{F}(V)$ denotaremos por $s\big|_V$.

O exemplo canônico de feixe é o que X é uma variedade algébrica sobre um corpo algebricamente fechado k e a cada aberto $U \subset X$, associamos ao anel das funções regulares sobre U. Além disso, podemos definir o feixe de funções contínuas, diferenciáveis e holomorfas sobre uma variedade topológica, suave ou complexa, respectivamente.

Seja X um espaço topológico, e considere $\mathfrak{Ab}(X)$ a categoria dos feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X. Definimos $\Gamma : \mathfrak{Ab}(X) \to \text{Groups}$ como $\mathcal{F} \to \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

O funtor seção global aparece em muitos contextos da geometria algébrica, sua primeira aparição de destaque acontece na demonstração da equivalência da categoria de feixes quasi-coerentes sobre $X = \text{Spec}(A)$ e $A-$módulos. Veja [2, Chapter 2, Prop. 5.4].

Quando temos uma sequência exata de feixes sobre $X = \text{Spec}(A)$

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0,$$

é verdade que (veja [2, Chapter 2, Prop. 5.6])

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}') \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}'') \to 0.$$

Mas para espaços topológicos em geral o que temos é

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}') \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}'').$$

Por isso seria interessante entendermos quais objetos aparecem a direita desta sequência exata, e sob quais condições $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{F}'')$ é sobrejetivo.

A ideia para a cohomologia por meio do funtor derivado é aproximar um objeto A de uma categoria abeliana por "objetos cohomologicamente triviais". A aproximação se dá por uma resolução acíclica, onde usamos um complexo exato $(C^\bullet, d^\bullet)$ e um isomorfismo $A \to d^0$. Obtemos então uma sequência exata longa da seguinte forma:

$$0 \to A \to C^0 \to C^1 \to C^2 \to \cdots.$$

onde os C^i são cohomologicamente triviais. Aplicando o funtor F em $C^\bullet$ obtemos o complexo $F(C^\bullet)$. Com isso, o i-ésimo grupo de cohomologia de F em A será o i-ésimo grupo de homologia do complexo, ou seja, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $R^iF(A) = H^i(F(C^\bullet))$. No entanto, notemos que isso pode gerar problemas, pois pode depender do complexo exato utilizado. Com isso precisamos de uma definição que nos dê um resultado único, a menos de isomorfismo, para qualquer complexo utilizado.

Agora vejamos uma pequena revisão de álgebra homológica. Um complexo $A^\bullet$ em uma categoria abeliana $\mathfrak{A}$ é uma coleção de objetos A^i, com $i \in \mathbb{Z}$, e morfismo $d^i\colon A^i \to A^{i+1}$, tal que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para todo i. Caso não se especifique todos os objetos, escolhendo a partir de um índice apenas, estamos considerando $A^i = 0$ para o restante. Um morfismo de complexos entre as categorias $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ é uma coleção de morfismos $f^i\colon A^i \to B^i$ que comuta com os mapas d^i.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"'] & A^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "d^i"] & B^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definimos o i-ésimo objeto de cohomologia $h^i(A^\bullet)$ como $\ker d^i/\operatorname{im} d^{i-1}$. Observemos que se $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ é um morfismo de complexos, então podemos perceber que f induz um mapa natural $h^i(f)\colon h^i(A^\bullet) \to h^i(B^\bullet)$. Como morfismo de complexos induz um morfismo entre as cohomologias, podemos notar que se

$$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$$

é uma sequência exata de complexos, então existem mapas naturais $\delta^i\colon h^i(C^\bullet) \to h^{i+1}(A^\bullet)$ que nos dá a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow h^i(A^\bullet) \longrightarrow h^i(B^\bullet) \longrightarrow h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Sejam $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ e $g\colon A^\bullet \to B^\bullet$. Dizemos que f e g são homotópicos, e denotamos por $f \sim g$, se existe uma coleção de morfismos $k^i\colon A^i \to B^i$ tal que $f - g = dk + kd$, notemos que não é necessário que k^i comuta com d^i. A coleção de morfismo $(k^i) = k$ é chamada de operador de homotopia.

Um objeto $I \in \mathfrak{A}$ é dito injetivo se o funtor $\operatorname{Hom}(-, I)$ é exato. Uma resolução injetiva de um objeto $A \in \mathfrak{A}$ é um complexo de elementos de $\mathfrak{A}$, que está definido em $i \geq 0$ junto com um morfismo $\varepsilon\colon A \to I^0$, tal que I^i é injetivo para todo i e a sequência longa

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

é exata.

Se todo objeto de uma categoria $\mathfrak{A}$ é isomorfo a um subobjeto de um objeto injetivo, temos que dizemos que $\mathfrak{A}$ tem suficiente objetos injetivos. Se $\mathfrak{A}$ tem suficiente objetos injetivos, então todo objeto da categoria admite uma resolução injetiva. Com isso temos as definições necessárias para construir os funtores derivados à direita.

Definição 1.1. *Sejam $\mathfrak{A}$ uma categoria abelina com suficiente objetos injetivos, $\mathfrak{B}$ uma categoria abeliana e $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ um funtor covariante exato à esquerda. Construímos os funtores derivados à direita R^iF, com $i \geq 0$, onde para cada objeto $A \in \mathfrak{A}$ escolhemos uma resolução injetiva $I^\bullet$ de A. Então definimos $R^iF(A) = h^i(F(I^\bullet))$.*

É possível provar que duas resoluções injetivas de um objeto $A \in \mathfrak{A}$ são homotopicamente equivalentes, e que duas resoluções homotopicamente equivalentes induzem as mesmas cohomologias para cada i.

O próximo resultado nos diz que os funtores derivados à direita independe da escolha da resolução injetiva e como esses funtores derivados à direita se comportam em uma sequência exata curta.

Teorema 1.2. *Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ duas categorias abelianas e $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ um funtor covariante exato à esquerda. Suponhamos que $\mathfrak{A}$ seja uma categoria abeliana com suficiente injetivos, então:*

1. *Para cada $i \geq 0$, R^iF como definido acima é um funtor aditivo de $\mathfrak{A}$ para $\mathfrak{B}$. Mais ainda, é independente, à menos de isomorfismos naturais de funtores, das escolhas de resoluções injetivas.*

2. *Existe um isomorfismo natural $F \simeq R^0F$.*

3. *Para cada sequência exata $0 \to A^{'} \to A \to A^{''} \to 0$ e para cada $i \geq 0$ existe um morfismo natural $\delta^i\colon R^iF(A^{''}) \to R^{i+1}F(A^{'})$, tal que obtemos a seguinte sequência exata longa:*

$$\cdots \longrightarrow R^iF(A^{'}) \to R^iF(A) \to R^iF(A^{''}) \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A^{'}) \longrightarrow R^{i+1}F(A) \longrightarrow \cdots$$

.

4. *Consideremos a sequência exata do item anterior e um morfismo entre ela e a seguinte sequência exata $0 \to B^{'} \to B \to B^{''} \to 0$, os δ 's nos dão o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
R^iF(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & R^{i+1}F(A') \arrow[d] \\
R^iF(B'') \arrow[r, "\delta^i"] & R^{i+'}F(B')
\end{tikzcd}.$$

Definição 1.3. *Seja $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ como no teorema anterior. Dizemos que um objeto $J \in \mathfrak{A}$ é acíclico para F se $R^iF(J) = 0$ para todo $i > 0$.*

Proposição 1.4. *Com $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ como no teorema anterior, suponhamos que existe uma sequência exata*

$$0 \to A \to J^0 \to J^1 \to \cdots$$

onde cada J^i é acíclico para F, $i \geq 0$. Dizemos que $J^\bullet$ é uma resolução F-acíclica de A. Então, para cada $i \geq 0$ existe um isomorfismo natural $R^iF(A) \simeq h^i(F(J^\bullet))$.

Podemos definir de maneira análoga utilizando objetos projetivos, resoluções projetivas, categorias com suficiente objetos projetivos, funtor derivado à esquerda de um funtor covariante exato à direita. Podemos definir um funtor derivado à direita de um funtor contravariante exato à esquerda utilizando uma resolução projetiva. No entanto, necessitamos apenas das definidas acima. Agora vejamos uma propriedade universal de funtores derivados. Para isso, mudaremos um pouco a definição dada acima.

O primeiro desafio para definir cohomologia de feixes é mostrar que a categoria de feixes sobre um espaço topológico possui suficientes injetivos.

Notemos que enunciamos resultados sobre uma categoria que possui suficiente injetivos, então nosso primeiro resultado é mostrar que a categoria que trabalhamos possui suficiente injetivos.

Proposição 1.5. *Se A é um anel, então todo A-módulo é isomorfo a um sub-módulo de um A-módulo injetivo.*

A demonstração pode ser encontrada em [1, Chapter I,1.2.2].

Utilizando essa proposição, podemos verificar que $\mathfrak{Mod}(X)$, a categoria dos feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos em um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ possui suficientes injetivos.

Proposição 1.6. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado. Então, a categoria $\mathfrak{Mod}(X)$ de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos possui suficiente injetivos.*

Demonstração. Seja $\mathscr{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Para cada ponto $x \in X$ a haste $\mathscr{F}_x$ é um $\mathcal{O}_{x,X}$-módulo. Utilizando a proposição anterior, existe um $\mathcal{O}_{x,X}$-módulo injetivo I_x, tal que $\mathscr{F}_x \hookrightarrow I_x$. Para cada ponto $x \in X$, vamos considerar a inclusão $j\colon \{x\} \hookrightarrow X$. Com isso, seja o feixe $\mathscr{I} = \prod_{x \in X} j_*(I_x)$.

Para qualquer feixe $\mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_X$-módulos, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, \mathscr{I}) = \prod \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, j_*(I_x))$, pela definição do produto direto. Por outro lado, podemos ver que para cada ponto $x \in X$ sabemos quem é o grupo de morfismos entre o feixe $\mathscr{G}$ e o feixe relacionado à inclusão do ponto no espaço, isso é, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, j_*(I_x)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{x,X}}(\mathscr{G}_x, I_x)$.

Portanto, concluímos que existe um morfismo natural dos feixes de $\mathscr{O}_X$-módulos $\mathscr{F}$ nos feixes $\mathscr{I}$ construídos acima, utilizando dos mapas locais $\mathscr{F}_x \longrightarrow I_x$. Temos que é injetivo. Além disso, o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{I})$ é o produto direto sobre todos os pontos de X dos funtores haste $\mathscr{G} \mapsto \mathscr{G}_x$, que é um funtor exato. Além disso, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{x,X}}(-, I_x)$ é exato, já que cada I_x é um $\mathscr{O}_{x,X}$-módulo injetivo.

Concluímos que $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{I})$ é um funtor exato e assim, $\mathscr{I}$ é um $\mathscr{O}_X$-módulo injetivo. □

Corolário 1.7. *Se X é um espaço topológico qualquer, a categoria $\mathfrak{Ab}(X)$, dos feixes de grupos abelianos em X, possui suficiente injetivos.*

Demonstração. Basta considerarmos $\mathscr{O}_X$ o feixe de anéis constante $\mathbb{Z}$. Então $(X, \mathscr{O}_X)$ é um espaço anelado e $\mathfrak{Mod}(X) = \mathfrak{Ab}(X)$. □

Como nossa categoria possui suficiente injetivos, podemos construir o funtor derivado à direita e assim definir os funtores de cohomologia em um espaço topológico.

Definição 1.8. *Sejam X um espaço topológico e $\Gamma(X, -)$ o funtor de seções globais de $\mathfrak{Ab}(X)$ para $\mathfrak{Ab}$. Definimos os funtores de cohomologia $H^i(X, -)$ como os funtores derivados à direita de $\Gamma(X, -)$. Para qualquer feixe $\mathscr{F}$, os grupos $H^i(X, \mathscr{F})$ são os grupos de cohomologia de $\mathscr{F}$.*

Para fazer cálculos efetivos da cohomologia de feixes em um espaço topológico, precisamos da definição de um feixe flácido, pois veremos que são acíclicos para o funtor seção global e assim conseguiremos calcular a cohomologia usando uma resolução flácida.

Definição 1.9. *Sejam X um espaço topológico e $\mathscr{F}$ um feixe em X. Dizemos que $\mathscr{F}$ é um feixe flácido se o mapa de restrição $\mathscr{F}(X) \mapsto \mathscr{F}(U)$ é sobrejetivo para cada conjunto aberto $U \subset X$.*

Como utilizamos de resoluções injetivas, vejamos que essas resoluções são flácidas também.

Lema 1.10. *Se $(X, \mathscr{O}_X)$ é um espaço anelado, todo $\mathscr{O}_X$-módulo injetivo é é flácido.*

Demonstração. Para qualquer conjunto aberto $U \subset X$, denotamos o feixe $j_!(\mathscr{O}_X\big|_U)$ por $\mathscr{O}\big|_U$, que é restringir o feixe $\mathscr{O}_X$ para U e então estender por 0 fora de U. Sejam $\mathscr{I}$ um $\mathscr{O}_X$-módulo injetivo e $V \subset U$ conjuntos abertos. Então temos as seguintes inclusões $0 \to \mathscr{O}_V \to \mathscr{O}_U$ de feixes de $\mathscr{O}_X$-módulos.

Como $\mathscr{I}$ é injetivo, temos as seguintes sobrejeções $\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_U, \mathscr{I}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_V, \mathscr{I}) \to 0$. Como $\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_U, \mathscr{I}) = \mathscr{I}(U)$ e $\mathrm{Hom}(\mathscr{O}_V, \mathscr{I}) = \mathscr{I}(V)$, temos que $\mathscr{I}$ é flácido. □

Vejamos como feixes flácidos se comportam em sequências exatas.

Lema 1.11. *Seja* $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ *uma sequência exata de feixes em um espaço topológico* X*. Então temos:*

1. *Se* $\mathscr{F}'$ *é flácido, a sequência correspondente de seções globais*

$$0 \to \mathscr{F}'(U) \to \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}''(U) \to 0$$

é exata para todo conjunto aberto $U \subset X$*.*

2. *Se* $\mathscr{F}'$ *e* $\mathscr{F}$ *são flácidos, então* $\mathscr{F}''$ *também é.*

Demonstração. 1. Observe que podemos apenas restringir os feixes para o aberto, então basta provar para o espaço todo. Já sabemos que o funtor seção global é exato à esquerda, logo basta provar que é exato à direita. Seja $\sigma \in \mathscr{F}''$. Consideremos Σ a família de pares (U, s) de abertos U de X e $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que são mapeados para $\sigma\big|_U$. Observemos que a relação $(U, s) \leq (U', s')$ se $U \subset U'$ e $s = s'\big|_U$ é uma relação de ordem e nos dá uma ordenação parcial do conjunto Σ. Além disso, cada cadeia ascendente em Σ possui um elemento maximal, logo o Lema de Zorn nos diz que existe um elemento maximal (U_0, s_0).

Vejamos que U_0 é o espaço todo e portanto a sequência é exata a direita. Para isso, suponhamos que exista um ponto $x \in X \setminus U_0$. Seja U_1 uma vizinhança aberta de x de modo que $\sigma\big|_{U_1}$ nos dá uma seção $s_1 \in \mathscr{F}(U_1)$. Com isso, na interseção $U_0 \cap U_1$ as seções s_0 e s_1 são mapeadas para $\sigma\big|_{U_0 \cap U_1}$. Com isso a diferença entre elas restrita na interseção está em $\mathscr{F}'(U_0 \cap U_1)$. Sabemos que $\mathscr{F}'$ é flácido, portanto a $(s_0 - s_1)\big|_V$ é uma restrição de uma seção $t \in \mathscr{F}'$. Portanto, o mapa $s_1 + t\big|_{U_1}$ é mapeado para $\sigma\big|_{U_1}$ e coincide com s_0 em V. Portanto, podemos colar as duas seções obtendo uma seção de $\mathscr{F}$ sobre $U_0 \cup U_1$ que é mapeado para $\sigma\big|_{U_0 \cup U_1}$, contradizendo a maximalidade de (U_0, s_0).

2. Seja $U \subset X$. Então cada seção $h \in \mathscr{F}^{''}$ é representada por uma seção $g \in \mathscr{F}(U)$ pelo item anterior. Como $\mathscr{F}$ é flácido, podemos estender g para $g^{'} \in \mathscr{F}(X)$. Com isso, $g^{'}$ é mapeado para um elemento $h^{'} \in F^{''}$ que estende h.

□

Proposição 1.12. *Se $\mathscr{F}$ é um feixe flácido em um espaço topológico X, então $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $i > 0$.*

Demonstração. Consideremos a inclusão de $\mathscr{F}$ em um objeto injetivo $\mathscr{I}$ em $\mathfrak{Ab}(X)$ e $\mathscr{G}$ como o feixe quociente, obtendo a seguinte sequência exata de feixes:

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I} \to \mathscr{G} \to 0.$$

Por hipótese $\mathscr{F}$ é flácido, e pelo lema anterior, $\mathscr{I}$ é flácido também, com isso podemos concluir que $\mathscr{G}$ é flácido. Como $\mathscr{F}$ é flácido, temos a seguinte sequência exata.

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{I}) \to \Gamma(X, \mathscr{G}) \to 0.$$

Como $\mathscr{I}$ é injetivo, temos que $H^i(X, \mathscr{I}) = 0$ para $i > 0$. Portanto da sequência exata longa da cohomologia, temos que $H^1(X, \mathscr{F}) = 0$ e $H^i(X, \mathscr{F}) \simeq H^{i-1}(X, \mathscr{G})$ para $i \geq 2$, mas como $\mathscr{G}$ é flácido também, pela indução em i conseguimos o resultado. □

Portanto, agora podemos calcular cohomologia utilizando resoluções flácidas e em particular obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.13. *Seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço anelado. Então os funtores derivados do funtor $\Gamma(X, -)$ da categoria $\mathfrak{Mod}(X)$ para $\mathfrak{Ab}$ coincide com os funtores de cohomologia $H^i(X, -)$.*

Demonstração. Considerando $\Gamma(X, -)$ um funtor de $\mathfrak{Mod}(X)$ para $\mathfrak{Ab}$, calculamos seus funtores derivados tomando resoluções injetivas em $\mathfrak{Mod}(X)$. Mas resoluções injetivas são flácidas e portanto acíclicas. Logo a resolução nos dá os funtores de cohomologia usuais. □

A seguir, apresentaremos alguns resultados sobre limites diretos de feixes e cohomologias, que serão úteis quando formos computar grupos de cohomologia condensada. Se $(\mathscr{F}_\alpha)$ é um sistema direto de feixes em X, indexado por um sistema direto A, então definimos o limite direto $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha$ como o feixificado do pré-feixe $U \mapsto \varinjlim \mathscr{F}_\alpha(U)$. Notemos que se X é um espaço topológico noetheriano, então o pré-feixe acima já é um feixe.

Lema 1.14. *Em um espaço topológico noetheriano, o limite direto de um feixe flácido é flácido.*

Demonstração. Seja $(\mathscr{F}_\alpha)$ um sistema direto de feixes flácidos. Então para qualquer inclusão de conjuntos abertos $V \subset U$ e para cada α temos $\mathscr{F}_\alpha(U) \twoheadrightarrow \mathscr{F}_\alpha(V)$. Como $\varinjlim$ é um funtor exato, temos que $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha(U) \twoheadrightarrow \varinjlim \mathscr{F}_\alpha(V)$. Em um espaço topológico noetheriano, temos $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha(U) = (\varinjlim \mathscr{F}_\alpha)(U)$ para qualquer conjunto aberto.

Portanto, $(\varinjlim \mathscr{F}_\alpha)(U) \to (\varinjlim \mathscr{F}_\alpha)(V)$ é sobrejetivo. Concluindo que $\varinjlim \mathscr{F}_\alpha$ é flácido. □

Agora vejamos que o limite direto dos grupos de cohomologia é naturalmente isomorfo ao grupo de cohomologia do limite direto para feixes abelianos em espaços topológicos noetherianos.

Proposição 1.15. *Sejam X um espaço topológico noetheriano e $(\mathscr{F}_\alpha)$ um sistema direto de feixes abelianos. Para cada $i \geq 0$, existe um isomorfismo natural $\varinjlim H^i(X, \mathscr{F}_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim \mathscr{F}_\alpha)$.*

Demonstração. Para cada α temos o mapa natural $\mathscr{F}_\alpha \to \varinjlim \mathscr{F}_\alpha$. Observemos que esses mapas induzem mapas na cohomologia, tomemos os limites diretos desses mapas. Para $i = 0$ temos que o pré-feixe definido pelo limite direto já é um feixe, pois estamos em um espaço topológico noetheriano, portanto $\Gamma(X, \varinjlim \mathscr{F}_\alpha) = \varinjlim \Gamma(X, \mathscr{F}_\alpha)$.

Para o caso restante, consideremos a a categoria $\mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$ que consiste de todos os sistemas diretos de objetos em $\mathfrak{Ab}(X)$ e indexados por A. Isso é uma categoria abeliana. Mais ainda, como $\varinjlim$ é um funtor exato, temos uma transformação natural dos δ-funtores

$$\varinjlim H^i(X, -) \to H^i(X, \varinjlim -)$$

da categoria $\mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$ para $\mathfrak{Ab}(X)$. Como vimos, para $i = 0$ temos uma igualdade. Portanto, para provar que são iguais em todos os outros, precisamos mostrar que os dois são apagadores para $i > 0$. Então nesse caso, são ambos universais e portanto são isomorfos.

Seja $(\mathscr{F}_\alpha) \in \mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$. Para cada α definimos $\mathscr{G}_\alpha$ o feixe que associa cada aberto $U \subset X$ com o conjunto de mapas $s \colon U \to \bigcup_{p \in U} (\mathscr{F}_\alpha)_p$ para cada $p \in U$ e $s(p) \in (\mathscr{F}_\alpha)_p$. Temos que esse feixe é chamado de feixe das seções descontínuas de $(\mathscr{F}_\alpha)$, além disso é um feixe flácido e existe um morfismo injetivo natural de $\mathscr{F}_\alpha$ para $\mathscr{G}_\alpha$.

Como a construção de $\mathscr{G}_\alpha$ é funtorial, $(\mathscr{G}_\alpha)$ forma um sistema direto e conseguimos um monomorfismo $u \colon (\mathscr{F}_\alpha) \to (\mathscr{G}_\alpha)$ na categoria $\mathfrak{ind}_A(\mathfrak{Ab}(X))$. Como todos os $\mathscr{G}_\alpha$ são flácidos, então $H^i(X, \mathscr{G}_\alpha) = 0$ para $i > 0$. Portanto $\varinjlim H^i(X, \mathscr{G}_\alpha) = 0$ e o funtor é apagador para $i > 0$. Do outro lado, sabemos já que $\varinjlim \mathscr{G}_\alpha$ é flácido e portanto $H^i(X, \varinjlim \mathscr{G}_\alpha) = 0$ para $i > 0$, concluindo que é apagador também e finalizando a demonstração. □

Para provarmos nosso primeiro resultado principal, também precisaremos do seguinte importante teorema, cuja prova pode ser encontrada em [2, Chapter 2, Theorem 2.7].

Teorema 1.16. *Seja X um espaço topológico noetheriano de dimensão n. Então para todo $i > n$ e todos os feixes de grupos abelianos $\mathscr{F}$ em X, temos $H^i(X, \mathscr{F}) = 0$.*

Note que um conjunto finito de pontos possui dimensão 0, assim, se S é um conjunto profinito, temos que $S = \varprojlim S_j$, onde S_j são conjuntos finitos, e assim se $\mathcal{F}$ é qualquer feixe em S, temos

$$H^i(S_j, \mathcal{F}) = 0,$$

para todo $i > 0$. Assim, é possível provar que $H^i(S, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$ (!!). Veja [1, Théorème 5.10.1 (pag 228)] e [1, Exemple 5.10.1 (pag 230)].

Teorema 1.17. *Seja S um conjunto profinito, e M um grupo abeliano. Então $H^0(S, M) \simeq C(S, M)$, o espaço das funções contínuas de S para M e $H^i(S, M) = 0$, para $i > 0$, com M sendo visto como a feixificação do pré-feixe constante $U \mapsto M$*

Demonstração. Considere M^+ a feixificação do feixe constante M, e considere o feixe $\mathcal{F}_M : \mathrm{Top}(X) \to \mathfrak{Ab}$ como

$$\mathcal{F}_M(U) = \{f : U \to M \mid \forall x \in U \; \exists \, x \in V \subseteq U; f : V \to A \text{ constante}\}.$$

Da definição de feixificação, M^+ , existe um morfismo natural $\theta : M \to M^+$ que induz um isomorfismos nas hastes $\theta_x : M_x \to M_x^+$. Não é difícil ver que $\varphi : M \to \mathcal{F}_M$ dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_U : M &\to \mathcal{F}_M(U) \\ a &\mapsto (u \mapsto a) \end{aligned}$$

Da propriedade universal da feixifação nós temos uma mapa $\Psi : M^+ \to \mathcal{F}_M$, tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. Vamos provar que ψ é isomorfismo de feixes. Para isso, basta mostrar que é um isomorfismo nas hastes $\theta_x : M_x^+ \to \mathcal{F}_{M_x}$.

A haste $M_x^+ \cong M_x \cong M$ e, portanto, o mapa nas hastes é $\psi_x : A \to \mathcal{F}_{M_x}$ dado por $\psi_x(a) = (u \mapsto a)_x$. Se $\psi_x(a) = \psi_x(b)$, então $(u \mapsto a)_x = (u \mapsto b)_x$, de modo que $(u \mapsto a) = (u \mapsto b)$. Como as funções são localmente constantes por definição temos que $a = b$ e logo ψ_x é injetiva.

Considere $f_x \in \mathcal{F}_{M_x}$. Como $\psi_x \circ \theta_x = \varphi_x$, é suficiente mostrar que φ_x é sobrejetiva. Como $f : U \to A$ é localmente constante, existe $x \in W \subseteq U$ tal que $f : W \to A$ é constante. Agora, deixe $a = f(x)$. Então $\varphi_x(a) = f_x$.

Assim vimos que $\Gamma(S, -)$ é isomorfo ao feixe das funções contínuas de S para M que são localmente constantes, sempre que M for a feixificação de um grupo abeliano.

Se S é um conjunto profinito, então em particular temos que $H^0(S, M) \simeq \Gamma(S, M)$ e como M é discreto, temos que $\Gamma(S, M) \simeq C(S, M)$.

□

Referências

[1] R. Godement. *Topologie algebrique et theorie des faisceaux*. Actualites scientifiques et industrielles 1252. Hermann, 1998.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.