Seminário de Matemática Condensada
— Feixes e Esquemas —

por André Contiero

Contents

Apresento aqui somente algumas noções gerais sobre feixes e esquemas. Para uma exposição mais completa e profunda, sugiro as notas de R. Vakil [Vakil], com várias interpretações categóricas. O livro de R. Hartshorne [Hart] ainda é uma referência muito boa. Encontrei ainda uma série de apresentações de J. Dolan [Dolan] trazendo uma exposição muito categórica sobre os principais objetos da Geometria Algébrica.

1 Propaganda

Dado X um espaço topológico compacto de Hausdorff, considere o anel das funções contínuas a valores complexos, a saber $\mathcal{O}_X(X) := \{f : X \to \mathbb{C}\,;\, f \text{ é continua}\}$. Para cada $p \in X$, tomamos o ideal $\mathfrak{m}_p := \{f \in \mathcal{O}_X(X)\,;\, f(p) = 0\}$ de $\mathcal{O}_X(X)$. Não é difícil ver que $\mathfrak{m}_p$ é um ideal maximal, bastando verificar que $\mathcal{O}_X(X)/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{C}$. Igualmente não é difícil verificar que os ideais maximais de $\mathcal{O}_X(X)$ são exatamente $\mathfrak{m}_p$ para $p \in X$. Considere $\mathrm{SpecMax}(\mathcal{O}_X(X))$ o *espectro maximal* do anel $\mathcal{O}_X(X)$ munido da topologia de Zariski, i.e. os fechados de $\mathrm{SpecMax}(\mathcal{O}_X(X))$ são da forma $V(I) := \{\mathfrak{m}_p\,;\, I \subseteq \mathfrak{m}_p\}$ com I ideal de $\mathcal{O}_X(X)$. Uma simples aplicação do Lema de Urysohn (aquele mesmo da Análise na reta) garante que:

Observação 1.1. *A aplicação $X \to \mathrm{SpecMax}(\mathcal{O}_X(X))$, dada por $p \mapsto \mathfrak{m}_p$, é um homeomorfismo.*

A observação acima nos diz que é possível recuperar a topologia original de X a partir do espectro maximal de seu anel de funções contínuas munido da topologia de Zariski. Desta forma, dado um anel comutativo com unidade R, seu espectro maximal $\mathrm{SpecMax}(R)$ é então um objeto topológico (acredito) interessante.

De maneira mais geral, dado um anel comutativo com unidade tomamos seu *espectro*, i.e.

$$\mathrm{Spec}\, R := \{\mathfrak{p} \subseteq R\,;\, \mathfrak{p} \text{ é primo}\},$$

munido da topologia de Zariski, seus fechados são da forma

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\,;\, I \subset \mathfrak{p}\}.$$

Exemplo 1.2. *Considere um corpo* $\mathbf{k}$ *algebricamente fechado e* $\mathbf{k}[X]$ *o anel de polinômios em uma variável sobre* $\mathbf{k}$*. O conjunto* $\operatorname{Spec}\mathbf{k}[X]$ *consiste nos ideais maximais que são gerados por polinômios de grau um,* $\mathbf{a} := (X - a)$*, e um único ideal primo não maximal, o ideal nulo* $\zeta := (0)$*. Desta forma* $\mathbb{A}^1 := \operatorname{Spec}\mathbf{k}[X]$ *está em bijeção com* $\mathbf{k} \cup \{\zeta\}$*. Na topologia de Zariski, os abertos de* $\mathbb{A}^1$ *são complementares de conjuntos finitos. Além disso, contém um único ponto não fechado* ζ*, cujo fecho topológico é todo o* $\mathbb{A}^1$*. O ponto* ζ *é chamado ponto genérico de* $\mathbb{A}^1$*. Claramente todo aberto não vazio de* $\mathbb{A}^1$ *contém o ponto genérico. Na Geometria Algébrica dizemos que* $\mathbb{A}^1$ *é a reta afim sobre* $\mathbf{k}$*.*

Exemplo 1.3. *Assumindo que* $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ *no exemplo acima, temos que a reta afim complexa* $\mathbb{A}^1$ *não é a compactificação do plano complexa* $\mathbb{C}$*, a esfera de Riemann. Isso se deve ao fato que numa* one-point compactitifcation*, todo aberto de* $\mathbb{C}$ *continua um aberto da compactificação, fato que não ocorre em* $\mathbb{A}^1$*.*

Uma inútil mas curiosa observação é que toda sequência não constante de números complexos "converge" para qualquer número complexo na topologia de Zariski, pois claramente todo aberto não contém apenas um número finito de elementos da sequência.

Exemplo 1.4. *O conjunto dos números primos reunido com o ponto genérico* $\mathbf{0}$ *é um importante exemplo para a aritmética*

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Para uso posterior, temos os seguintes functores contra-variantes

$$\begin{pmatrix} \text{Espaços topológicos} \\ \text{compactos de Hausdorff} \end{pmatrix} \longrightarrow (\text{Anéis}) \longrightarrow (\text{Espectros})$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \longmapsto & \mathcal{O}_X(X) & & \\ & & R & \longmapsto & \operatorname{Spec}(R) \end{array}$$

Um mofismo $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ na categoria de espectros são exatamente aqueles oriundos de homomorfismo de anéis, a saber, são co-morfismos de anéis, ou seja, se $f : B \to A$ é um homomorfismo de anéis comutativos com unidades, então $f^{\#} : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ é dada por $f^{\#}(p) := f^{-1}(p)$.

Um pouco de propaganda. Acredito que um problema que pode ser resolvido de maneira muito simples usando esquemas é o seguinte:

Teorema 1.5 (Shimura 50's)**.** *Variedades projetivas lisas definidas sobre* $\mathbb{Q}$ *tem somente uma quantidade finita reduções ruins.*

Exemplo 1.6. *Considere a equação polinomial* $Y^2 = X^3 + 2$ *com soluções sobre* $\mathbb{C}$*. Melhor, a curva projetiva plana*

$$V(Y^2Z - X^3 - 2Z^3) \subset \mathbb{P}^2.$$

Considerar uma p-redução significa considerar a curva

$$V(Y^2Z - X^3 - 2Z^3) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p},$$

em que $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*. Ou soluções da equação* $Y^2 = X^3 + 2$ *sobre* $\overline{\mathbb{F}_p}$*. Por exemplo*

- *redução* $\mod 2$*:* $Y^2 = X^3$*;*

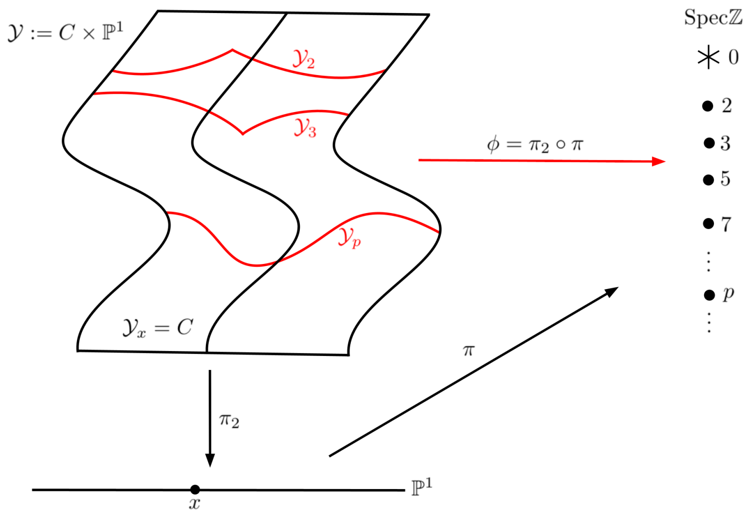
- *redução* $\mod 3$*:* $Y^2 = (X-2)^3$.

Uma p-redução ruim de C siginifica que a curva definida sobre $\mathbb{F}_p$ tem singularidades.

Como olhar para todas as p-reduções de uma só vez?

Considere $C := V(Y^2Z - X^3 - 2Z^3) \subset \mathbb{P}^2$ e $\mathcal{Y} := C \times \mathbb{P}^1$. Tome a projeção na segunda coordenada $\pi_2 : \mathcal{Y} \to \mathbb{P}^1$. Cada fibra de π_2 sobre um ponto $x \in \mathbb{P}^2$ é $\mathcal{Y}_x \cong C$.

Todo anel contém uma cópia de $\mathbb{Z}$, estamos considerando característica zero. Em termos geométricos isso implica que temos um morfismo de qualquer de objeto gemétrico para $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Em particular, temos um morfismo sobrejetivo $\pi : \mathbb{P}^1 \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.



Observação 1.7. *As fibras de ϕ são as p-reduções: $\mathcal{Y}_p = \mathcal{Y} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$. Considerando as reduções de C $\mod 2$ e $\mod 3$, temos duas crvas singualares cuspidais, a saber $Y^2 = X^3$ e $Y^2 = (X-2)^3$;*

Prova do Teorema de Shimura. Seja $\mathcal{Y}$ uma variedade algébrica lisa definida sobre $\mathbb{Q}$. Considere o morfismo $\mathcal{Y} \to \mathbb{Z}$. Como suavidade é uma condição aberta, segue existe um aberto de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ tal que que para todo $p \in U$, a fibra $\mathcal{Y}_p$ é lisa. $\square$

2 Feixes

Definição 2.1. *Seja X um espaço topológico e tome uma categoria de conjuntos, grupos, ou grupos abelianos, anéis, módulos, álgebras, etc. Um pré-feixe $\mathscr{F}$ de conjuntos, grupos, grupos abelianos, etc. sobre X consiste de:*

1. *Para cada aberto $U \subseteq X$ tem-se um grupo (ou módulo, etc.) $\mathscr{F}(U)$;*

2. *Para cada inclusão de dois abertos $U \subseteq V$ de X, um morfismo $\operatorname{res}_{V,U} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$, chamado restrição e tal que $\operatorname{res}_{U,U} = \operatorname{id}_U$.*

3. *Se $W \subseteq U \subseteq V$ são inclusões de três abertos de X, então $\operatorname{res}_{V,W} = \operatorname{res}_{V,U} \circ \operatorname{res}_{U,W}$.*

Para cada aberto U de X, os elementos de $\mathscr{F}(U)$ são chamados de seções de $\mathscr{F}$ sobre U.

Observação 2.2. *Dados $s \in \mathscr{F}(U)$ uma seção de F e $V \subset U$ é um aberto de U, denotamos $\mathrm{res}_{U,V}(s) = s|_V$.*

Exemplo 2.3. *Seja $\pi : F \to X$ um fibrado vetorial (ou um recobrimento, ou apenas uma aplicação contínua) sobre um espaço topológico X. Para cada aberto $U \subseteq X$, considere o conjunto $F(U) := \{s : U \to F\,;\, s$ é contínua e $\pi \circ s = \mathrm{id}_U\}$ das seções de F sobre U. As seções de F formam um pré-feixe de conjuntos sobre X.*

Exemplo 2.4. *Considere uma variedade diferenciável M. Para cada aberto U de M associamos o conjunto das funções (seções) reais diferenciáveis de U. Novamente temos um pré-feixe.*

Observação 2.5. *Dado um espaço topógico X, considere a categoria de Ab_X cujos objetos são todos os abertos de X e morfismos são dados por inclusões de abertos. Fixe ainda uma categoria $\mathcal{C}$ de conjuntos, ou grupos, ou grupos abelianos, etc. Um feixe $\mathscr{F}$ sobre X é apenas um functor contra-variante $\mathscr{F} : Ab_X \to \mathcal{C}$.*

Definição 2.6. *Seja X um espaço topológico. Um feixe $\mathscr{F}$ sobre X é um pré-feixe sobre X satisfazendo ainda:*

4. *Dados $\{U\}_i$ uma cobertura aberta de um aberto U de X e duas seções $s, t \in \mathscr{F}(U)$. Se $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ para todo índice i, então $s = t$;*
5. *Seja $\{U_i\}$ uma coleção de aberto de X com $U = \cup_i U_i$. Dadas seções $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para quaisquer i, j, vale que existe uma (única pelo item 4.) seção $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$.*

Usualmente o item 4. acima é chamado de Axioma da Identidade, enquanto que o item 5. é chamado Axioma da Colagem, por razões muito óbvias.

Exemplo 2.7. *Considere o espaço topológico $\mathbb{R}$ com a topologia induzida por uma métrica, a usual por exemplo. O pré-feixe cujas seções são as funções limitadas não é um feixe. Nada muito emocionante.*

Exemplo 2.8. *Dada uma variedade complexa $\mathcal{X}$, para cada aberto $U \subseteq \mathcal{X}$ considere $\mathscr{F}(U)$ a $\mathbb{C}$-álgebra das funções holomorfas $s : U \to \mathbb{C}$. Vale que $\mathscr{F}$ é um feixe de $\mathbb{C}$-álgebras sobre $\mathcal{X}$.*

Exercício 2.9. *Seja $\mathscr{F}$ um feixe de conjuntos sobre um espaço topológico X. Se U, V são dois abertos disjuntos de X, então mostre que $\mathscr{F}(U \cup V) = \mathscr{F}(U) \times \mathscr{F}(V)$.*

Lema 2.10. *Seja $\mathscr{F}$ um pré-feixe sobre X. $\mathscr{F}$ é um feixe se, e somente se, a seguinte sequência*

$$\bullet \to \mathscr{F}(U) \to \prod_i \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathscr{F}(U_{ij}) \to \bullet$$

é exata para quaiquer aberto $U \subseteq X$ e qualquer cobertura aberta $\{U_i\}$ de U, em que $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Definição 2.11. *Seja $\mathscr{F}$ um pré-feixe sobre X. Dado $p \in X$, o stalk*[1] *de $\mathscr{F}$ sobre p é o co-limite*

$$\mathscr{F}_p := \varinjlim_{p\in U} \mathscr{F}(U),$$

em que o limite é tomado sobre a categoria de conjuntos filtrados. Equivalentemente,

$$\mathscr{F}_p := \{(s,U)\,;\, s \in F(U) \text{ e } p \in U\}/\sim$$

com $(s,U) \sim (t,V)$, se existe um aberto $W \subseteq U \cap V$ tal que $p \in W$ e $s|_W = t|_W$.

O stalk de um feixe sobre um ponto pode ser visto como o cojunto dos germes de funções em um ponto. Este ponto de vista é usado, por exemplo, em Geometria Complexa, em que o $f|_W$ é realmente a restrição de funções ou formas diferenciais.

Observação 2.12. *Vale observar que se $\mathscr{F}$ é um feixe de anéis, grupos, grupos abelianos, etc., então o stalk $\mathscr{F}_p$ é também um anel, grupo, grupo abeliano, etc. Equivalentemente, os limites vivem na mesma categoria. Além disso, temos sempre um morfismo $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_p$ sempre que $\mathfrak{p} \in U$, levando as seções sobre U em seu respectivo germe.*

Exemplo 2.13 (Na Geometria Complexa)**.** *Seja uma variedade complexa compacta X, (uma superfície compacta de Riemann, a esfera de Riemann, um toro complexo). Para cada aberto $U \subseteq X$, considere*

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ meromorfas}\,;\, f \text{ é homolorfa em } U\}.$$

Claramente $\mathcal{O}_X$ é um feixe de anéis sobre X em que a restrição é a somente restrição de funções complexas. Dado um ponto $p \in X$, o germe de uma função holoforma f numa vizinhança de p é por definição

$$f_p := \{(g,U)\,;\ \exists W \subset U \text{ com } p \in W,\ f,g \in \mathcal{O}_X(W) \text{ e } f|_W = g|_W\}.$$

O conjunto, denotado por $\mathcal{O}_{X,p}$, de todos os germes de funções holomorfas forma um anel local, cujo ideal maximal é

$$\mathfrak{m}_p := \{f_p \in \mathcal{O}_{X,p}\,;\, f_p(p) = 0\},$$

valendo ainda que $\mathcal{O}_{X,p}/m_p \cong \mathbb{C}$. Note que a definição $\mathcal{O}_{X,p}$ na Geometria Complexa é exatamente a do stalk em p do feixe de funções holomorfas $\mathcal{O}_X$.

No caso em que X á superfície compacta de Riemann, seu corpo de funções meromorfas é $\mathbb{C}(z)$, enquanto que $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathbb{C}$, pois as únicas funções complexas que não possuem polos são as constantes.

Um caso muito particular, por vezes muito útil, é quando todos os stalks $\mathscr{F}_p$ estão contidos em um conjunto, desta forma o as seções de $\mathscr{F}$ sobre sobre um abeto U é simplesmente:

$$\mathscr{F}(U) = \bigcap_{p\in U} \mathscr{F}_p.$$

[1] Já vi a tradução literal de stalk como talo, que não considero adequada. Não sei como traduzir esse termo, talvez pedicelo seja mais próximo.

Exemplo 2.14. *Considerando o Exemplo 2.13. Sabemos que o conjunto das funções meromorfas de uma variedade compacta complexa X forma um corpo, denotado por $\mathbb{C}(X)$. Por exemplo, se X é a esfera de Riemann, o corpo de funções meromorfas de X é $\mathbb{C}(z)$, em que z é uma indeterminada sobre $\mathbb{C}$. Vale que $\mathscr{O}_X(U) = \bigcap_{p\in U} \mathscr{O}_{X,p}$.*

Definição 2.15. *Um morfismo $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ entre dois pré-feixes $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ sobre X é tal que para cada aberto $U \subseteq X$ temos um morfismo $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ que é compatível com restrições, a saber, dados $V \subseteq U$ abertos de X o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{U,W}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{U,W}"] \\ \mathscr{F}(W) \arrow[r, "\varphi(V)"'] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Equivalentemente, um morfismo entre dois pré-feixes é uma transformação natural entre dois functores.

Observação 2.16. *Um morfismo $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de feixes sobre X induz morfismos $\varphi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$ nos stalks.*

A seguir estão alguns primeiros exemplos de (pré-)feixes e alguns objetos que são usuais na Geometria Algébrica.

Exemplo 2.17 (Skyscraper sheaf)**.** *Fixe um objeto A na categoria de grupos, anéis, etc, e o elemento neutro $0 \in A$. Dado um ponto p do espaço topológico X, o skyscraper sheaf suportado em p é:*

$$\mathscr{F}(U) = \begin{cases} A, & \text{se } p \in U \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Existem somente dois tipos de restrições $\mathrm{res}_{U,W}$ com $W \subseteq U$, a saber, a identidade, caso $p \in W$ ou $p \notin U$, e a nula $A \to 0$, no caso de $p \in U \setminus W$.

Definição 2.18 (Pusforward de um feixe)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos e $\pi : X \to Y$ um morfismo.*[2] *Dado um feixe $\mathscr{F}$ sobre X, o pushforward de $\mathscr{F}$ por π é o feixe $\pi_*\mathscr{F}$ sobre Y tal que para cada aberto $W \subseteq Y$ temos*

$$\pi_*\mathscr{F}(W) := \mathscr{F}(\pi^{-1}(W)).$$

Definição 2.19. *Seja X um espaço toplógico. Um* ***espaço étalé*** *sobre X é um par (E, π) com E um espaço topológico e $\pi : E \to X$ um homeomorfismo local. $E_x := \pi^{-1}(x)$ é chamado o stalk sobre x.*

Exemplo 2.20 (Espaço étalé de um feixe)**.** *Seja $\mathscr{F}$ um feixe (ou pré-feixe) sobre um espaço topológico X. Considere E a reunião disjunta de todos os stalks sobre X,*

$$F := \bigsqcup_{p\in X} \mathscr{F}_p.$$

[2]Na categoria de espaços toplógicos exigimos apenas cotinuidade.

Para cada aberto $U \subseteq X$ e cada seção $s \in \mathscr{F}(U)$, considere o subconjunto de F dado por

$$(s, U) = \{s_p \,;\, p \in U\} \subset F$$

e tome a topologia em F tal que esses são os abertos básicos. Com isso conseguimos um mapa $\pi : F \to X$ dado por $s_p \mapsto p$, levando um germe ao seu ponto, que é um homeomorfismo local, pois $\pi^{-1}(U) = (s, U)$ e $\pi(s, U) = U$.

Uma pergunta honesta deve ser feita: Para que serve este espaço étalé de um feixe? Talvez uma maneira muito simples de se ter bons exemplos de feixes seja tomar feixes de seções, como no Exemplo 2.3. neste sentido, o espaço étalé de um feixe mostra que todo feixe é um feixe de secções. Para ver isso, uma seção $s \in \mathscr{F}(U)$ é exatamente a seção dada por $p \mapsto s_p$ de $\pi : F \to \mathscr{F}$. Uma segunda utilidade para o espaço étalé é a feixificação de um pré-feixe.

Observação 2.21. *Considere $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ um morfismo de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X. Assim, para cada aberto U de X podemos associar os grupos*

$$\operatorname{Ker}\left(\,\phi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)\,\right)\ ,\ \ \operatorname{Im}\left(\,\phi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)\,\right)\ \ e\ \ \operatorname{Coker}\left(\,\phi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)\,\right).$$

Logo temos os pré-feixes $\operatorname{Ker}\phi$, $\operatorname{Im}\phi$ e $\operatorname{Coker}\phi$ sobre X associados ao morfismo ϕ. Facilmente nos convencemos que $\operatorname{Ker}\phi$ é um feixe, mas não necessariamente $\operatorname{Im}\phi$ e $\operatorname{Coker}\phi$. Mas podemos associar um feixe a esses pré-feixes conforme o resultado que segue.

Lema 2.22 (Feixificação de um pré-feixe)**.** *Seja $\mathscr{F}$ um pré-feixe sobre X. Existe um (único a menos de isomorfismos) feixe $\mathscr{F}^+$ sobre X e um morfismo $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ tais que qualquer morfismo de feixes $\rho : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ se fatora unicamente por ϕ, i.e. existe um único $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ fazendo o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathscr{F}^+ \arrow[d, dashed, "\exists!\,\psi"] \\ & \mathscr{G} \end{tikzcd}$$

comutar, ou seja $\psi \circ \phi = \rho$.

Proof. Seja $\pi : \mathrm{F} \to \mathscr{F}$ o espaço étalé do pré-feixe $\mathscr{F}$, c.f. Exemplo 2.20. Para cada aberto $U \subset X$ tome

$$\mathscr{F}^+(U) := \{s : U \to \mathrm{F}(U)\,;\, \pi \circ s = \mathrm{id}_U \text{ e } s \text{ contínua }\},$$

$\mathscr{F}^+(U)$ é o conjunto das seções contínuas do espaço étalé F. É imediato verificar que $\mathscr{F}^+$ é um feixe. As demais afirmações ficam a cargo do(a) leitor(a). □

Exercício 2.23. *Mostre que se $\mathscr{F}$ é um pré-feixe e $\mathscr{F}^+$ é seu feixe associado, então $\mathscr{F}_p \cong \mathscr{F}_p^+$, $\forall\, p \in X$.*

A seguir vamos assumir que todos os feixes são feixes de grupos abelianos, de anéis comutativos, ou mais geralmente, de objetos estão em uma categoria abeliana (whatever it means).

Definição 2.24 (Sub-feixes)**.** *Um feixe $\mathscr{G}$ é um sub-feixe de $\mathscr{F}$ se para todo aberto U, $\mathscr{G}(U)$ é sub-grupo de $\mathscr{F}(U)$ e as restrições em $\mathscr{G}$ são dadas pelas restrições de $\mathscr{F}$.*

Exemplo 2.25. *Se $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é um morfismo de feixes, então* $\operatorname{Ker}\phi$ *é um sub-feixe de $\mathscr{F}$ e o feixe induzido* $\operatorname{Im}\phi$ *é sub-feixe de $\mathscr{G}$.*

Sempre tomaremos os feixes induzidos quando falamos em quocientes, núcleos, imagens, etc.

Proposição 2.26. *Um morfismo $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de feixes é um isomorfismo se, e somente se, $\phi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$ é isomorfismo para todo p.*

Exemplo 2.27 (Ramos de log)**.** *Considere um morfismo de feixes $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$. É importante observar que injetividade de ϕ siginifica* Ker *nulo, que é equivalente a afirmar que $\phi(U)$ é injetiva para todo U. Isso decorre trivialmente do fato de* $\operatorname{Ker}\phi$ *ser um feixe. Contudo, a sobrejetividade de ϕ não siginifica sobrejetividade de todo $\phi(U)$. Vamos a um exemplo.*

Considere $X := \mathbb{C}$ com a topologia usual. Considere $\mathcal{O}_X$ o feixe das funções holomorfas, i.e. para cada aberto U, $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C}\,;\, f \text{ é holomorfa}\}$, denote por $\mathcal{O}_X^*$ o feixe das funções holomorfas e invertíveis. Tome agora o morfismo dado pela exponencial de funções:

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^*$$

Lembrando dos ramos de logaritmos, temos a sobrejetividade dos morfismos $\mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{O}_{X,p}^*$ para todo $p \in X$, enquanto que não temos sobrejetividade para todos os abertos. Aqui $\mathcal{O}_X^*$ tem estrutura multiplicativa. Aproveitando esse mesmo exemplo, considere $\underline{\mathbb{Z}}$ o feixe de constantes induzido por $\mathbb{Z}$, veja Exercício 2.28 abaixo. Vale que

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times 2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1$$

é uma sequência exata de feixes. Para ver isso, basta mostrar que a sequencia induzidas nos stalks é exata.

Exercício 2.28 (Feixe de constantes)**.** *Seja A um grupo munido da topologia discreta e X um espaço topológico. Considere $\mathscr{A}(U)$ o conjunto das funções contínuas $f : U \to A$. Mostre que $\mathscr{A}$ é um feixe de grupos tal que para todo aberto conexo $U \subseteq X$ vale que $\mathscr{A}(U) = A$.*

Exercício 2.29. *Seja*

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$$

uma sequenência exata de feixes sobre X. Se $f : X \to Y$ é um morfismo, mostre que

$$0 \to f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{G} \to f_*\mathscr{H}$$

é uma sequência exata de feixes sobre Y.

Exercício 2.30. *Sejam $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ dois feixes de grupos sobre X. Para cada aberto U considere* $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}(U), \mathscr{G}(U))$ *o grupo dos homomorfismos de $\mathscr{F}(U)$ em $\mathscr{G}(U)$. Mostre que com isso temos um feixe associado, que denotamos por* $\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$*.*

3 Topologia de Grothendieck e Sites

Talvez a ideia central de Grothendieck tenha sido a de desenvolver a teoria de feixes não somente sobre uma categoria de espaços topológicos, mas desenvolver sobre uma categoria mais abstrata, a de certos de mapas que são chamados recobrimentos. Essa categoria com recobrimentos é o que será chamado de um *site*.

Exemplo 3.1. *A categoria Ab_X^{op} de todos os abertos de um espaço topológico X, que cujos mapas são inclusões, será um site. Lembre-se da definição de pré-feixe feita na Observação 2.5, que na verdade mostra que a definição de pré-feixe ou de feixes, c.f. Lema 2.10, só depende de uma categoria e de certa coleções de mapas $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ satisfazendo determinadas condições.*

Definição 3.2 (Topologia de Grothendieck)**.** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma topologia de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$ consiste de um conjunto $\mathrm{Cov}(X)$ de coleções de mapas (morfismos) $\{X_i \to X\}_{i\in I}$ para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ e satisfazendo:*

1. *Se $U \to X$ é um isomorfimo, então $\{U \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$;*
2. *Se $\{X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ e $Y \to X$ é qualquer mapa em $\mathcal{C}$, então o produto fibrado $X_i \times_X Y$ existe em $\mathcal{C}$ e a coleção*
$$\{X_i \times_X Y \to Y\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(Y).$$
3. *Se $\{X_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ e para cada $i \in I$ são dados $\{U_{ij} \to X_i\}_{j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(X_i)$, então*
$$\{U_{ij} \to X_i \to X\}_{i\in I,\, j\in J_i} \in \mathrm{Cov}(X).$$

Definição 3.3. *As coleções $\{X_i \to X\}_{i\in I}$ são chamadas de recobrimentos de X. Uma categoria munida da Toplogia de Grothendieck é chamado um site.*

Exemplo 3.4. *Fixado um espaço topológico X, considere Ab_X a categoria dos abertos de X. Cada* $\mathrm{Hom}(U, V)$ *é um conjunto com um único elemento, sempre que $U \subset V$, ou o conjunto vazio, caso contrário. Para cada $U \in Ab_X$, defina $\mathrm{Cov}(U)$ como o conjunto das coleções $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ em que $U = \cup_{i\in I} U_i$.*

Segue do exemplo acima que um conjunto algébrico, ou um esquema, munido da topologia de Zariski é portanto um site, chamado site de Zariski.

Exemplo 3.5. *Seja $\mathcal{C}$ a categoria dos espaços topológicos cujos mapas são funções contínuas. Para cada espaço topológico $X \in \mathcal{C}$ defina $\mathrm{Cov}(X)$ como a coleções das famílias $\{X_i \to X\}$ em que $X = \cup_{i\in I} X_i$ e cada $X_i \to X$ é uma imersão aberta.*

Exemplo 3.6 (Localização de um site)**.** *Sejam $\mathcal{C}$ um site e $X \in \mathcal{C}$ um objeto. Defina $\mathcal{C}/X$ como sendo a categoria cujos objetos são mapas $Y \to X$ in $\mathcal{C}$ e cujos mapas são diagramas comutativos*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

sobre X. Defina $\mathrm{Cov}(Y \to X)$ como sendo o conjunto dos X-morfismos $\{Y_i \to Y\}_{i\in I}$ tal que a coleção $\{Y_i \to Y\}_{i\in I}$ de morfismos está em $\mathcal{C}$, esquecendo que são X-morfimos, como em $\mathrm{Cov}(X)$.

Exemplo 3.7 (Diagramas)**.** *Sejam Δ uma categoria e $\mathcal{C}$ um site. Dado um funtor $F : \Delta^{op} \to C$, defina a categoria $\mathcal{C}_F$ da seguinte forma:*

- *Os objetos de $\mathcal{C}_F$ consiste dos pares $(\delta, X \to F(\delta))$ em que $\delta \in \Delta$ e $X \to F(\delta)$ é um morfismo em $\mathcal{C}$;*

- *Um morfismo*
$$(\delta', X' \to F(\delta')) \to (\delta, X \to F(\delta))$$
é um par (f, f^b) em que $f : \delta \to \delta$ é um morfismo em Δ e $f^b : X' \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que tal que o diagrama
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f^b"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ F(\delta') \arrow[r, "F(\delta)"] & F(\delta) \end{tikzcd}$$
comuta. Para cada objeto $(\delta, X \to F(\delta)) \in \mathcal{C}_F$ o conjunto de recobrimentos desde objeto é o conjunto das coleções
$$\left\{ (\delta_i, X_i) \xrightarrow{(f_i\, f_i^b)} (\delta, X) \right\}$$
tal que cada $f_i : \delta \to \delta'$ é um isomorfismo e a coleção $\{f_i^b : X_i \to X\}_{i \in I}$ está em $\mathrm{Cov}(\mathcal{C}/F(\delta))$.

Talvez um caso particular interessante do site acima é considerando Δ uma categoria de conjuntos finitos e ordenados cujos mapas preservam a ordem.

4 Pré-feixes e feixes sobre sites

Definição 4.1. *Um pré-feixe sobre uma categoria $\mathcal{C}$ é apenas um functor*
$$F : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$$
. Denotamos por $\hat{\mathcal{C}}$ a categoria dos pré-feixes sobre $\mathcal{C}$.

Definição 4.2. *Seja $\mathcal{C}$ um site.*

- *Um pré-feixe F sobre $\mathcal{C}$ é dito separado se para todo $U \in \mathcal{C}$ e $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ o mapa*
$$F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i)$$
é injetiva;

- *Um pré-feixe F sobre $\mathcal{C}$ é chamado um feixe se para todo objeto $U \in \mathcal{C}$ e recobrimentos $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ a sequência*
$$F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathscr{F}(U_i \times_U U_j)$$
é exata, em que o mapa do lado direito é induzido pelas duas projeções $U_i \times_U U_j \to U_i$ e $U_i \times_U U_j \to U_j$.

Teorema 4.3. *Seja $\mathcal{C}$ um site. A inclusão*

$$(\text{ feixes sobre } \mathcal{C}\ ) \hookrightarrow (\text{ pré-feixes sobre } \mathcal{C}\ )$$

tem uma adjunta a esquerda $F \mapsto F^a$.

Proof. veja [Vis, Thm 2.64] □

Observação 4.4. *O functor adjunto a esquerda $F \to F^a$ é chamado de feixificação, e F^a é chamado de feixe associado ao pré-feixe F*

Definição 4.5. *Um topos é uma categoria T equivalente a categoria de feixes de conjuntos sobre um site.*

References

[Dolan] J. Dolan, *Doctrines of Algebraic Geometry*, a series of talks: `https://ncatlab.org/jamesdolan/published/Algebraic+Geometry` (2009).

[Hart] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in mathematics 52, Springer Verlag (1977).

[Vakil] R. Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, Draft Notes, `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf` (2017).

[Vis] A. Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Math. Surveys Monogr. 123, Amer. Math. Soc. (2005) 1–104.

André Contiero
andrecontiero@gmail.com
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG, Brazil