Seminário: Categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados

Matheus Johnny Caetano

Abril 2023

1 Introdução

O objetivo deste seminário é apresentar duas categorias equivalentes à categoria de conjuntos κ-condensados: a categoria de feixes de espaços Hausdorff compactos κ-pequenos e a categoria de feixes de conjuntos extremamente desconexos κ-pequenos.

Para isto, introduziremos os conceitos de pré-topologia e topologia de Grothendieck e bases de uma categoria. Além disso, utilizaremos as seguintes notações:

- ProFinSet é o site dos conojuntos profinitos;
- CHTop é o site dos espaços Hausdorff compactos;
- EDSet é o site dos conjuntos extremamente desconexos;
- $Sh(\mathcal{C})$ é a categoria de feixes de $\mathcal{C}$.

Em cada site teremos como cobertura familias finitas de funções juntamente sobrejetivas.

2 Noções catogóricas e topológicas

Começaremos relembrando alguns conceitos.

Definição 2.1. [1, p. 48] *Considere duas flexas $f : A \to B$ e $g : A \to B$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um* **equalizador** *de f, g é um par (K, k) onde*

1. *K é um objeto de $\mathcal{C}$,*
2. *$k : K \to A$ é uma flexa de $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = g \circ k$ e para todo par (M, m) onde*
   (a) M é um objeto de $\mathcal{C}$,
   (b) $m : M \to A$ é uma flexa de $\mathcal{C}$ tal que que $f \circ m = g \circ m$,

   existe um único morfismo $n : M \to K$ tal que $m = k \circ n$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ M \arrow[u, dashed, "\exists n"] \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Definição 2.2. [1, p. 51] *Considere dois morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$ em uma categoria $\mathcal{C}$. Um* **pullback** *de (f, g) é uma tripla (P, p_1, p_2) onde:*

1. *P é um objeto de $\mathcal{C}$;*
2. *$p_1 : P \to A$ e $p_2 : P \to B$ são morfismos de $\mathcal{C}$ tais que $f \circ p_1 = g \circ p_2$ e para toda tripla (Q, q_1, q_2) onde*
   (a) *Q é um objeto de $\mathcal{C}$;*
   (b) *$q_1 : Q \to A$ e $q_2 : Q \to B$ tais que $f \circ q_1 = g \circ q_2$,*

   existe um único morfismo $h : Q \to P$ tal que $q_1 = p_1 \circ h$ e $q_2 = p_2 \circ h$.

Usualmente denotamos $P = A \times_C B$.

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Observação 1. *O pullback $P = A \times_C B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.*

Lema 2.1. [5, p. 3] *Se $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ são funções contínuas e Y é Hausdorff, então $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado em X.*

Demonstração. Sejam $y \in N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ e U, V subconjuntos abertos disjuntos de Y contendo $f(y)$ e $g(y)$ respectivamente. Temos $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de y e está contida em N. Portanto, N é uma união de conjuntos abertos, logo é aberto, e $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado. Em outras palavras, $Eq(f, g)$ é fechado em X. □

A partir deste resultado, podemos mostrar que ProFinSet é fechado para pullbacks:

Lema 2.2. *Seja $f : S' \to S$ um mapa onde S' é profinito e S é Hausdorff compacto. Então $S' \times_S S' \subset S' \times S'$ é profinito.*

Demonstração. Como S' é profinito, $S' \times S'$ também é. Assim, temos que $S' \times_S S' \subset S' \times S'$ é Hausdorff totalmente desconexo. Para mostrar compacidade, basta mostrar que o pullback é um subconjunto fechado do produto cartesiano.

Observe que $S' \times_S S'$ é o conjunto dos pares $(a, b) \in S' \times S'$ tais que $f \circ p_1 = f \circ p_2$, ou seja, $f(a) = f(b)$. Logo, podemos escrever

$$S' \times_S S' = \{(a, b) \in S' \times S' : p_1(a, b) = p_2(a, b)\}$$

Assim, pelo Lema 2.1 $S' \times_S S'$ é fechado, e consequentemente compacto. Portanto, $S' \times_S S'$ é profinito.

□

Proposição 2.1. [4, p. 8] *Seja S um espaço Hausdorff compacto. Então existe uma sobrejeção $S' \to S$, onde S' é profinito.*

Demonstração. Seja S um espaço Hausdorff compacto e considere S^{dis} o conjunto S com a topologia discreta. Temos que $S' = \beta S^{dis}$ é um espaço compato Hausdorff totalmente desconexo, ou seja, S' é profinito. Considere, o mapa $f : S^{dis} \to S$ tal que $f(x) = x$. Observe que f é contínua e sobrejetiva. Como S é Hausdorff compacto, temos pela propriedade universal da compactificação de Stone-Cech que existe $\tilde{f} : S' \to S$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S^{dis} \arrow[r, "b"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & S' = \beta S^{dis} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Além disso, como $\tilde{f} \circ b$ é sobrejetiva, temos que $\tilde{f}$ é uma sobrejeção. $\square$

Definição 2.3. [4, p. 11] *Um espaço Hausdorff compacto S é* **extremamente desconexo** *se para toda sobrejeção $f : S' \to S$ existe $g : S \to S'$ tal que $f \circ g = 1_S$. Nestas condições, dizemos que g é uma seção de f e f é uma retração de g.*

Neste texto, chamaremos de **conjunto extremamente desconexo** um espaço Hausdorff compacto extremamente desconexo.

Proposição 2.2. [4, p. 11] *Sejam S_0 um espaço topológico discreto e $S = \beta S_0$ a compactificação de Stone-Čech de S_0. Então S é extremamente desconexo.*

Demonstração. Temos pela proposição 2.1 que S é um espaço Hausdorff compacto. Seja $f : S' \to S$ uma sobrejeção contínua, onde S' é compacto Hausdorff e considere a inclusão $i : S_0 \to S$. Como f é sobrejetiva e S_0 é discreto, existe $g : S_0 \to S'$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, two heads, "f"] & S \\ S_0 \arrow[u, "g"] \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Agora, considere $b : S_0 \to S$ o mapa da compactificação de Stone-Cech. Temos que b induz o mapa $\tilde{g}$ que comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\tilde{g}"] & S' \arrow[r, two heads, "f"] & S \\ & S_0 \arrow[ul, "b"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Observe que $f \circ \tilde{g} \circ i = i$, logo pela unicidade da propriedade universal da compactificação de Stone-Cech, $f \circ \tilde{g} = 1_S$. $\square$

Corolário 2.0.1. [4, p. 11] *Seja S um espaço Hausdorff compacto. Então existe uma sobrejeção $f : \tilde{S} \to S$, onde $\tilde{S}$ é extremamente desconexo.*

3 Topologia de Grothendieck

Nesta seção definiremos pré-topologia e topologia de Grothendieck e, a partir destas definições, podemos introduzir o conceito de feixe.

Definição 3.1. [3, p. 20] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com pullbacks. Uma* **pré-topologia de Grothendieck** *em $\mathcal{C}$ é uma coleção $Cov(\mathcal{C})$ de famílias de morfismos $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ para cada objeto $U \in Obj(\mathcal{C})$, chamadas* **coberturas** *de U tais que:*

> *(PT1) Todo isomorfismo $V \to U$ forma uma cobertura $\{V \to U\}$;*
>
> *(PT2) Se $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ é uma cobertura e $f : V \to U$ é um morfismo qualquer em $\mathcal{C}$, então $\{V \times_U U_i \to V\}_{i\in I}$ é uma cobertura de V.*
>
> *(PT3) Se $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ e, para cada i, $\{U_{i,j} \to U_i\}_{j\in J_i}$ são coberturas, então a família de composições $\{U_{i,j} \to U_i \to U\}_{i\in I,\ j\in J_i}$ também é uma cobertura.*

Chamamos de **site** *uma categoria com uma pre-topologia de Grothendieck.*

A definição de pré-topologia de Grothendieck nos permite definir uma noção de feixes para categorias com certos pullbacks que fornece uma boa extensão da noção de feixes para espaços topológicos.

Definição 3.2. [3, p. 21] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to Set$ um pré-feixe. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um* **feixe** *no site $\mathcal{C}$ se para todo objeto U de $\mathcal{C}$ e toda cobertura $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ o diagrama*

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \underset{\prod_{i,j} \mathcal{F}(p^2_{ij})}{\overset{\prod_{i,j} \mathcal{F}(p^1_{ij})}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

é um equalizador, onde $p^1_{ij} : U_i \times_U U_j \to U_i$ e $p^2_{ij} : U_i \times_U U_j \to U_j$ são as projeções canônicas.

Considere a categoria CHTop e sejam X um espaço Hausdorff compacto e $\{X_i \to X\}_{i\in I}$ uma família finita de mapas juntamente sobrejetivos em CHTop, ou seja, o mapa induzido $\coprod_{i\in I} X_i \to X$ é sobrejetivo. Estas famílias definem uma pré-topologia de Grothendieck em CHTop. Similarmente, a categoria ProFinSet também é um site. No entanto, isso não acontece para EDSet, pois de acordo com Scholze [4] esta categoria não é fechada para pullbacks.

A vista disso, as definições a seguir estabelecem a base para uma noção mais geral de topologia de Grothendieck.

Definição 3.3. [3, p. 22] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto de $\mathcal{C}$. A* **categoria slice** *$\mathcal{C}_{/X}$ de $\mathcal{C}$ sobre X é uma categoria associada cujos objetos são pares (A, π), onde $\pi : A \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$. Os morfismos nesta categoria $f : (A, \pi) \to (A', \pi')$ são dados por morfismos $f : A \to A'$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Um **crivo** *em X é uma subcategoria plena $S_{\mathcal{C}}(X) \subset \mathcal{C}_{/X}$ que consiste em pares (Y, f) com $f : Y \to X$ tal que para todo morfismo $g : (Y', f') \to (Y, f)$ em $\mathcal{C}_{/X}$ o par (Y', f') pertence à $S_{\mathcal{C}}(X)$ sempre que (Y, f) pertence à $S_{\mathcal{C}}(X)$. Quando não houver ambiguidade, denotaremos um crivo em X por $S(X)$.*

Vejamos um exemplo. Seja P um poset e $p \in Obj(P)$, então a categora slice de P sobre p é $P_{/p} = \{x \mid x \leq p\}$, tal categoria é o crivo maximal em p. Outro exemplo de crivo é $S(p) = \{x \mid x \leq y < p\}$.

A partir do exposto, podemos definir o **pullback de um crivo** $S(X)$ ao longo de um morfismo $f : Y \to X$ como o crivo em Y que consiste em pares $(V, g : V \to Y)$ tais que a composição $(V, f \circ g : V \to X)$ pertence à $S(X)$. Usaremos a notação $f^*S(X)$ para tal pullback.

De fato, $f^*S(X)$ é um crivo. Sejam (V,g) um objeto de $f^*S(X)$ e $m:(W,h)\to(V,g)$ um morfismo em $\mathcal{C}_{/Y}$, temos que $(V,f\circ g)$ é um objeto de $S(X)$. Logo, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "h"'] & & V \arrow[dl, "g"] \\ & Y \arrow[d, "f"] & \\ & X & \end{tikzcd}$$

e pela propriedade do crivo $S(X)$, $(W,f\circ h)$ é objeto de $S(X)$ e, consequentemente, $(W,h)\in Obj(f^*S(X))$.

Agora, tendo uma nova noção de pullbacks podemos definir uma topologia de Grothendieck a partir de crivos:

Definição 3.4. [3, p. 22] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma* **topologia de Grothendieck** *J em $\mathcal{C}$ é uma coleção de crivos para cada objeto X de $\mathcal{C}$, chamada* **crivos de cobertura** *e denotada por $J(X)$, tal que*

(T1) Para cada objeto X em $\mathcal{C}$, o crivo maximal $\mathcal{C}_{/X}$ é um crivo de cobertura em X;

(T2) Para cada morfismo $f:Y\to X$ em $\mathcal{C}$ e cada crivo de cobertura $S(X)\in J(X)$ em X, o pullback $f^*S(X)$ é um crivo de cobertura em Y;

(T3) Seja $S(X)\in J(X)$ um crivo de cobertura em X e seja $T(X)$ outro crivo em X tal que para cada morfismo $f:Y\to X$ em $S(X)$ o pullback $f^*T(X)$ é um crivo de cobertura em Y. Então $T(X)$ é um crivo de cobertura em X.

Uma categoria com uma topologia de Grothendieck também é chamada de **site***.*

Exemplo 3.1. *Seja X um espaço e seja $\mathcal{U}(X)$ o poset de todos os subconjuntos abertos de X considerado como uma categoria. Então podemos equipar $\mathcal{U}(X)$ com uma topologia de Grothendieck onde uma coleção de morfismos $\{U_i\subset U\}_{i\in I}$ é uma cobertura de um objeto U se $U=\cup_{i\in I}U_i$.*

Lema 3.1. [6, Lemma 00Z5] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck J e $X\in Obj(\mathcal{C})$. Se $S'(X)\in J(X)$ é um crivo de cobertura e $S(X)$ é outro crivo tal que $S'(X)\subset S(X)$, então $S(X)\in J(X)$.*

Definição 3.5. [3, p. 22] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $X\in Obj(\mathcal{C})$ e $\{f_i:X_i\to X\}_{i\in I}$ uma coleção de morfismos. O menor crivo em X que contém todo par (X_i,f_i) é chamado de* **crivo gerado pelos morfismos** *f_i. Tal crivo é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}_{/X}$ e é dado por pares (Y,f) tais que existe alguma fatoração $Y\to X_i\to X$ para algum i. Além disso, dizemos que um crivo $S(X)$ é* **finitamente gerado** *se é gerado por uma coleção finita de morfismos.*

Se uma categoria $\mathcal{C}$ é equipada com uma topologia de Grothendieck, então diremos que uma coleção de morfismos $\{f_i:C_i\to C\}$ é uma **cobertura de crivos**[1] se gera um crivo de cobertura em $C\in Obj(\mathcal{C})$.

A próxima etapa é definir uma nova noção de feixes. Considere $\mathcal{C}$ um site com uma topologia de Grothendieck e sejam $X\in Obj(\mathcal{C})$, $S(X)$ um crivo em X e $\mathcal{F}:\mathcal{C}^{op}\to\text{Set}$ um pré-feixe. Aplicando $\mathcal{F}$ nos mapas de $S(X)$, obtemos um cone $(\mathcal{F}(X),\{\mathcal{F}(f)\}_{(Y,f)\in S(X)})$, ou seja, para cada morfismo $g:(Y_1,f_1)\to(Y_2,f_2)$ em $S(X)$, o diagrama a seguir comuta:

[1]Para distinguir essas coberturas das coberturas de uma pré-topologia, utilizaremos o termo "cobertura de crivos".

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(X) \arrow[dl, "\mathcal{F}(f_1)"'] \arrow[dr, "\mathcal{F}(f_2)"] & \\
\mathcal{F}(Y_1) & & \mathcal{F}(Y_2) \arrow[ll, "\mathcal{F}(g)"]
\end{tikzcd}$$

Sendo assim, pela propiedade universal de limites existe um único morfismo

$$\phi : \mathcal{F}(X) \to \lim_{Y \in S(X)^{op}} \mathcal{F}(Y)$$

tal que todos os diagramas da seguinte forma comutam:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(X) \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[ddl, bend right, "\mathcal{F}(f_1)"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathcal{F}(f_2)"] & \\
 & \lim\limits_{Y \in S(X)^{op}} \mathcal{F}(Y) \arrow[dl, "l_1"] \arrow[dr, "l_2"'] & \\
\mathcal{F}(Y_1) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(Y_2)
\end{tikzcd}$$

A partir disto, temos a seguinte definição:

Definição 3.6. [2, p. 126] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck. Dizemos que um pré-feixe $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to Set$ é um feixe se satisfaz a seguinte condição: Para cada objeto X em $\mathcal{C}$ e cada crivo de cobertura $S(X)$, o mapa canônico*

$$\mathcal{F}(X) \to \lim_{Y \in S(X)^{op}} \mathcal{F}(Y)$$

é uma bijeção.

Conhecendo as definições de prétopologia e topologia de Grothendieck, podemos relacioná-las como mostra o lema abaixo:

Lema 3.2. [6, Lemma 00ZC] *Seja $\mathcal{C}$ um site equipado com uma pré-topologia de Grothendieck com coberturas $Cov(\mathcal{C})$. Para cada objeto U de $\mathcal{C}$, denote por $J(U)$ o conjunto de crivos $S(U)$ em U com a seguinte propriedade: "existe uma cobertura $\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I} \in Cov(\mathcal{C})$ tal que o crivo $[\{f_i\}_{i \in I}]$ gerado por f_i está condido em $S(U)$". Então J é uma topologia em $\mathcal{C}$ e é chamada de* **topologia associada à** *$\mathcal{C}$.*

Demonstração. Mostraremos que os axiomas (PT1), (PT2) e (PT3) da definição de prétopologia (Definição 3.1) implicam diretamento os axiomas (T1), (T2) e (T3) da definição de topologia (Definição 3.4).

Seja $U \in Obj(\mathcal{C})$ e considere o crivo maximal $\mathcal{C}_{/U}$. Queremos mostrar que $\mathcal{C}_{/U} \in J(U)$. Temos que o morfismo $1_U : U \to U$ é um isomorfismo, logo, pelo axioma (PT1), $\{1_U : U \to U\} \in Cov(\mathcal{C})$. Seja $[1_U]$ o crivo gerado por 1_U, temos pela maximalidade de $\mathcal{C}_{/U}$ que $[1_U] \subset \mathcal{C}_{/U}$. Logo, $\mathcal{C}_{/U} \in J(U)$. Além disso, dado um par $(V, g) \in \mathcal{C}_{/U}$ podemos fatorá-lo da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & U \arrow[r, "1_U"] & U
\end{tikzcd}$$

Assim, $\mathcal{C}_{/U} \subset [1_U]$ e, portanto, $\mathcal{C}_{/U} = [1_U]$.

Agora, considere um crivo $S(U) \in J(U)$. Existe $\{g_i : U_i \to U\}_{i \in I} \in Cov(\mathcal{C})$ tal que $[\{g_i\}_{i \in I}] \subset S(U)$. Seja $f : V \to U$ um morfismo em $\mathcal{C}$, queremos mostrar que $f^* S(U) \in J(V)$. Temos que $\mathcal{C}$ é uma categoria com pullbacks, assim para todo $i \in I$, existe $U_i \times_U V$ e pelo axioma (PT2), $\{p_{i_1} : U_i \times_U V \to V\}_{i \in I} \in Cov(\mathcal{C})$. Queremos mostrar que o crivo $[\{p_{i_1}\}_{i \in I}] \subset f^* S(U)$. Considere o diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{tikzcd}
& U_i \times_U V \arrow[dl, bend right, "p_{i_1}"'] \arrow[dr, bend left, "p_{i_2}"] & \\
U_i \arrow[dr, bend right, "g_i"'] & & V \arrow[dl, bend left, "f"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Temos que $(U_i, g_i) \in S(U)$, assim pela condição de crivo $(U_i \times_U V, g_i \circ p_{i_1}) \in S(U)$. Como o diagrama comuta, $(U_i \times_U V, f \circ p_{i_2}) \in S(U)$. Assim, $(U_i \times_U V, p_{i_1})$ é um elemento de $\mathcal{C}_{/V}$ cuja composição com f está em $S(U)$, ou seja, $(U_i \times_U V, p_{i_1}) \in f^* S(U)$. Como todo elemento de $[\{p_{i_1}\}_{i \in I}]$ se fatora por p_{i_1} para algum i temos que $[\{p_{i_1}\}_{i \in I}] \subset f^* S(U)$.

Por fim, sejam $S(U) \in J(U)$ e $T(U)$ outro crivo tal que para cada morfismo $f : V \to U$ em $S(U)$, $f^* T(U) \in J(V)$. Queremos mostrar que $T(U) \in J(U)$. Como $S(U) \in J(U)$, existe $\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I}$ tal que $[\{f_i\}_{i \in I}] \subset S(U)$. Considere $f_i : U_i \to U$ para algum $i \in I$. Por hipótese, $f_i^* T(U) \in J(U_i)$, logo, existe $\{f_{i,j} : U_{i,j} \to U_i\}_{i \in I, j \in J_i} \in Cov(\mathcal{C})$ tal que $[\{f_{i,j}\}_{i \in I, j \in J_i}] \subset f_i^* T(U)$. Além disso, o axioma (PT3) implica que $\{f_i \circ f_{i,j} : U_{i,j} \to U_i \to U\}_{i \in I, j \in J_i} \in Cov(\mathcal{C})$. Afirmamos que $[\{f_i \circ f_{i,j}\}_{i \in I, j \in J_i}] \subset T(U)$. De fato, temos $(U_{i,j}, f_{i,j}) \in f_i^* T(U)$ e $f_i^* T(U)$ é o conjunto dos pares cuja composição à esquerda por f_i pertence à $T(U)$, portanto, $(U_{i,j}, f_i \circ f_{i,j}) \in T(U)$.

Portanto, J é uma topologia. $\square$

Uma observação importante é que uma cobertura em uma prétopologia de Grothendieck também sera uma cobertura de crivos na topologia de Grothendieck associada. Dessa forma, ao considerarmos as categorias CHTop ou ProFinSet equipadas com uma pré-topologia de Grothendieck definida por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, podemos construir uma topologia de Grothendieck associada utilizando as mesmas coberturas.

Ademais, é possível estabelecer uma relação entre os feixes definidos na pré-topologia e os feixes da topologia associada.

Lema 3.3. [6, Lemma 00ZC] *Seja $\mathcal{C}$ um site equipado com uma pré-topologia de Grothendieck e considere a topologia J associada à $\mathcal{C}$ do Lema 3.2. Então um pré-feixe F é um feixe para esta topologia se, e somente se, é um feixe para a pré-topologia*[2].

4 Base de um site

Muitas vezes é útil descrever um feixe especificande seu valor apenas em uma classe restrita de objetos. Sendo assim, nesta seção introduziremos o conceito de base de um site e, a partir disto, apresentaremos resultados importantes para equivalência de feixes.

Definição 4.1. [2, p. 131] *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com a topologia de Grothendieck. Dizemos que uma subcategoria plena $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ é uma* **base** *para $\mathcal{C}$ se para todo objeto X de $\mathcal{C}$, existe uma cobertura de crivos $\{f_i : D_i \to X\}_{i \in I}$, onde D_i é objeto de $\mathcal{D}$.*

[2] A demonstração deste resultado pode ser encontrada na referência [6, Lemma 00ZC]. É importante notar que a demonstração utiliza uma definição diferente de crivo em relação à definição utilizada neste texto para a construção de uma topologia de Grothendieck. Portanto, essa abordagem pode apresentar algumas variações.

Considere a categoria CHTop equipada com uma topologia de Grothendieck dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos. Vimos na Proposição 2.1 que dado um espaço Hausdorff compacto X existe uma sobrejeção $f : Y \twoheadrightarrow X$ em que Y é profinito. Em outras palavras, dado um objeto X em CHTop, existe uma cobertura composta por um mapa $\{f : Y \to X\}$ em que Y é objeto de ProFinSet. Ademais, como ProFinSet é uma subcategoria plena de CHTop, concluímos que a categoria dos conjuntos profinitos é uma base para categoria dos espaços Hausdorff compactos. Similarmente, utilizando o Corolário 2.0.1, concluímos que EDSet é uma base para CHTop.

Outro exemplo de base para um site pode ser visto a seguir:

Exemplo 4.1. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U}(X)$ o poset de subconjuntos abertos de X equipado com a topologia de Grothendieck do exemplo 3.1. Então uma subcategoria plena $\mathcal{U}_0(X) \subset \mathcal{U}(X)$ é uma base no sentido da definição 4.1 se e somente se é uma base no sentido usual, ou seja, todo subconjunto aberto de X pode sesr expresso como uma união de conjuntos abertos pertencentes à $\mathcal{U}_0(X)$.*

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ equipada com uma topologia de Grothendieck e uma base $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, é possível herdar em $\mathcal{D}$ uma topologia proveniente de $\mathcal{C}$.

Proposição 4.1. [2, p. 131] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck e $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base. Então, existe uma única topologia de Grothendieck na categoria $\mathcal{D}$ tal que a coleção de morfismos $\{D_i \to D\}_{i\in I}$ em $\mathcal{D}$ é uma cobertura se, e somente se, é uma cobertura em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Digamos que $S_{\mathcal{D}}(D) \subset \mathcal{D}_{/D}$ é um crivo de cobertura em $\mathcal{D}$ se contem uma coleção de morfismos $\{f_i : D_i \to D\}_{i\in I}$ os quais formam uma cobertura de crivos em $\mathcal{C}$. Iremos verificar que os axiomas (T1), (T2) e (T3) da definição 3.4 são satisfeitos.

O axioma (T1) segue de imediato, visto que dado $D \in Obj(\mathcal{D})$ o morfismo $\{1_D : D \to D\}$ gera o crivo maximal $\mathcal{C}_{/D}$.

Para verificar o axioma (T2), considere $S_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo de cobertura em $D \in Obj(\mathcal{D})$ e $f : D' \to D$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Queremos mostrar que o pullback $f^*S_{\mathcal{D}}(D) \subset \mathcal{D}_{/D'}$ é um crivo de cobertura. Seja $S_{\mathcal{C}}(D)$ o crivo gerado por $S_{\mathcal{D}}(D)$, então o pullback $f^*S_{\mathcal{C}}(D)$ é um crivo de cobertura em $\mathcal{C}$. Desta forma, existe uma cobertura de crivos $\{g_i : C_i \to D'\}$ em $\mathcal{C}$ tal que cada composição $f \circ g_i : C_i \to D$ pertence à $S_{\mathcal{C}}(D)$. Como $S_{\mathcal{C}}(D)$ é gerado pelos morfismos de $S_{\mathcal{D}}(D)$, o mapa $f \circ g_i : C_i \to D$ pode ser fatorado por algum $(D_i, g_i') \in S_{\mathcal{D}}(D)$, assim obtemos o diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & D_i \arrow[d, "g_i'"] \\ D' \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{D}$ é base de $\mathcal{C}$, cada C_i admite uma cobertura de crivos $\{g_{i,j} : D_{i,j} \to C_i\}_{j\in J_i}$ em que cada $D_{i,j}$ é objeto de $\mathcal{D}$. Então as composições $\{g_i \circ g_{i,j} : D'_{i,j} \to C_i \to D'\}_{i\in I, j\in J_i}$ formam uma coberdura de crivos de D' por objetos do crivo $f^*S_{\mathcal{D}}(D)$.

$$\begin{tikzcd} D_{i,j} \arrow[r, "g_{i,j}"] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & D_i \arrow[d, "g_i'"] \\ & D' \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

Por fim, verificaremos o axioma (T3). Seja $S_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo de cobertura, então existe uma coleção de morfismos $\{f_i : D_i \to D\}_{i\in I}$ que gera um crivo de cobertura em $\mathcal{C}$. Seja $T_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo tal que para cada morfismo f em $S_{\mathcal{D}}(D)$ o pullback $f^*S_{\mathcal{D}}(D)$ é um crivo de cobertura. Logo, para cada f_i o pullback $f_i^*T_{\mathcal{D}}(D)$ é um crivo de cobertura e existe uma coleção $\{f_{i,j} : D_{i,j} \to D_i\}_{j\in J_i}$ que gera um crivo de coberturas em $\mathcal{C}$. Além disso, para cada f_i a composição $f_i \circ f_{i,j} : D_{i,j} \to D$ está em $T_{\mathcal{D}}(D)$. Portanto, temos uma coleção $\{f_i \circ f_{i,j} : D_{i,j} \to D\}_{i\in I, j\in J_i}$ em $T_{\mathcal{D}}(D)$ que gera um crivo de cobertura em $\mathcal{C}$.

□

A partir desta proposição, concluímos que a categoria EDSet herda a topologia de Grothendieck de ProFinSet dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos.

Queremos demonstrar que, dado uma categoria $\mathcal{C}$ equipada com uma topologia de Grothendieck definida por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, e uma base $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ com a topologia herdada de $\mathcal{C}$, existe uma equivalência entre as categorias de feixes $Sh(\mathcal{C})$ e $Sh(\mathcal{D})$. Para tanto, é necessário definir uma extensão de Kan à direita.

Definição 4.2. [1, p. 123] *Considere dois funtores $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$. A* **extensão de Kan à direita** *de G sobre F, se existir, é um par (R, α) em que:*

(1) $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor,

(2) $\alpha : R \circ F \Rightarrow G$ é uma transformação natural,

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dr, dashed, bend left, "R"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\ \mathcal{B} \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[rr, "G"'] & & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

satisfazendo a seguinte propriedade universal: se (M, β) é outro par com $M : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e $\beta : R \circ M \Rightarrow G$ uma transformação natural, então existe uma única transformação natural $\theta : M \Rightarrow R$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} & R \circ F \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ G & & M \circ F \arrow[ul, dashed, "\theta_F"'] \arrow[ll, "\beta"] \end{tikzcd}$$

onde θ_F é a transformação natural com

$$\theta_F(B) = \theta(F(B)) : M \circ F(B) \to R \circ F(B)$$

para todo $B \in Obj(\mathcal{B})$.

A extensão de Kan à direita de G sobre F é usualmente denotada por $Ran_F G$.

Teorema 4.1. [1, p. 123] *Sejam $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ funtores em que $\mathcal{B}$ é uma categoria pequena e $\mathcal{D}$ é uma categoria completa. Então a extensão de Kan à direita de G sobre F existe.*

Embora não apresentemos a demonstração desse resultado, durante o processo de prova, chegamos à conclusão de que é possível expressar a extensão de Kan à direita de G sobre F como um limite, que será utilizado na proposição a seguir:

Proposição 4.2. [2, p. 132] *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ uma base equipada com a topologia de Grothendieck* *herdada de $\mathcal{C}$ da proposição 4.1.1 e $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to Set$ um pré-feixe. Então, $\mathcal{F}$ é um feixe se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) A restrição $\mathcal{F}|_{\mathcal{D}^{op}} : \mathcal{D}^{op} \to Set$ é um feixe;

(2) O funtor $\mathcal{F}$ é uma extensão de Kan à direita da sua restrição $\mathcal{F}|_{\mathcal{D}^{op}}$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{op} \to \text{Set}$ seja um feixe. Provaremos que as condições (1) e (2) são satisfeitas. Sejam $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}|_{\mathcal{D}^{op}}$ e $(\hat{\mathcal{F}}, \alpha)$ a extensão de Kan à direita de $\mathcal{F}_0$. Observe que $\hat{\mathcal{F}}$ existe, pois estamos trabalhando com categorias pequenas e Set é uma categoria completa. Além disso, $\hat{\mathcal{F}}$ é dada pela fórmula

$$\hat{\mathcal{F}}(C) = \lim_{D \in (\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C})^{op}} \mathcal{F}_0(D).$$

Considere $\mathcal{I} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ o funtor de inclusão. Temos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, dashed, "\hat{\mathcal{F}}"] & \\
\mathcal{D} \arrow[u, "\mathcal{I}"] \arrow[r, "\mathcal{F}_0"'] & \text{Set}
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{F}$ é um funtor de $\mathcal{C}$ para Set que satisfaz $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$ e $\beta : \mathcal{F} \circ \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{F}_0$ uma transformação natural, temos pela propriedade universal da extensão de Kan que existe única transformação natural $\theta : \mathcal{F} \Rightarrow \hat{\mathcal{F}}$ satisfazendo $\theta(\mathcal{F}) \circ \alpha = \beta$. Ademais, segundo Lurie [2], θ é um isomorfismo quando restrita à $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
& \hat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{I} \arrow[dl, "\alpha"'] & \\
\mathcal{F}_0 & & \mathcal{F} \circ \mathcal{I} \arrow[ul, dashed, "\theta_{\mathcal{I}}"'] \arrow[ll, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

Para provar (2), precisamos garantir que θ é um ismorfismo. Fixe um objeto $C \in Obj(\mathcal{C})$, e considere o pullback $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C} \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \mathcal{C}_{/C} \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{I}"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

onde $U : \mathcal{C}_{/C} \to \mathcal{C}$ é um funtor de esquecimento. Dado $(D, (Y, f)) \in \mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$, temos que

$$U \circ \rho_1(D, (Y, f)) = \mathcal{I} \circ \rho_2(D, (Y, f)) \Rightarrow \mathcal{I}(D) = U(Y, f) \Rightarrow Y = D.$$

Além disso, dado um morfismo (g, h) em $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$, temos

$$U \circ \rho_1(g, h) = \mathcal{I} \circ \rho_2(g, h) \Rightarrow \mathcal{I}(g) = U(h) \Rightarrow g = h.$$

Assim, conclúimos que $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$ é moralmente o conjunto dos mapas cujo domínio é um objeto de $\mathcal{D}$ e o contradomínio é o objeto C.

Seja $S_{\mathcal{C}}(C)$ o crivo gerado por $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$. Como $\mathcal{D}$ é uma base para $\mathcal{C}$, existe uma cobertura de crivos $\{D_i \to C\}_{i\in I}$ com $D_i \in Obj(\mathcal{D})$, logo $[\{D_i \to C\}_{i\in I}]$ é crivo de cobertura e como $[\{D_i \to C\}_{i\in I}] \subset S_{\mathcal{C}}(C)$, concluímos pelo Lema 3.1 que $S_{\mathcal{C}}(C)$ também é um crivo de cobertura.

Assim, o mapa θ_C se encaixa no diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C) \arrow[r, "\theta_C"] \arrow[d, "\varphi"'] & \hat{\mathcal{F}}(C) \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \\
\lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\theta'"] & \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \hat{\mathcal{F}}(C')
\end{tikzcd}$$

onde θ' é a componente da transformação natural nos limites.

Observe que o mapa vertical à esquerda é, por hipótese de $\mathcal{F}$ ser feixe, uma bijeção e o mapa vertical à direita também é, visto que $\hat{\mathcal{F}}$ é uma extensão de Kan. Queremos mostrar que θ_C é uma bijeção, para isso verificaremos que θ' é bijetiva.

Considere $\{f_i : D_i \to C\}_{i\in I}$ uma cobertura de crivos da base, temos que cada mapa $(D_i, f_i) \in S_{\mathcal{C}}(C)$. Como a topologia de Grothendieck é dada por coleções finitas de mapas juntamente sobrejetivos, temos

$$f : \coprod_{i\in I} D_i \to C$$

é uma sobrejeção. Aplicando $\mathcal{F}$, obtemos:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(C) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, tail, "\mathcal{F}(f)"] & \\
\lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[rr, "l_{\coprod D_i}"'] & & \mathcal{F}(\coprod_{i\in I} D_i)
\end{tikzcd}$$

Pela condição de feixe, φ é bijetivo e $\mathcal{F}(f)$ é injetivo, logo $l_{\coprod D_i}$ também é injetivo. Além disso, como $\coprod_{i\in I} D_i$ é um objeto da base, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, tail, "l_{\coprod D_i}"'] & \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \hat{\mathcal{F}}(C') \arrow[d, "\hat{l}_{\coprod D_i}"] \\
\mathcal{F}(\coprod_{i\in I} D_i) \arrow[r, "\theta_{\coprod D_i}"'] & \hat{\mathcal{F}}(\coprod_{i\in I} D_i)
\end{tikzcd}$$

Temos que $\theta_{\coprod D_i}$ é bijetiva pois θ é isomorfismo quando restrita a base. Além disso, vimos que $l_{\coprod D_i}$ é injetivo, com isso, concluímos que θ' é monomorfismo. Basta mostrar que θ' também é epimorfismo.

De acordo com Lurie [2], θ' é um monomorfismo cuja imagem é a coleção de elementos $\eta \in \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C')$ com a propriedade de que para cada C' em $S(C)$, $l_{C'}(\eta) \in Im(\theta_{C'})$. Tomando $D \in Obj(\mathcal{D})$ temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "l_D"'] & \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \hat{\mathcal{F}}(C') \arrow[d, "\hat{l}_D"] \\
\mathcal{F}(D) \arrow[r, "\theta_{\coprod D_i}"'] & \hat{\mathcal{F}}(D)
\end{tikzcd}$$

Dado $\eta \in \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C')$, temos que $\hat{l}(\eta) \in \mathcal{F}(D)$. Como θ_D é bijeção, temos $\hat{l}(\eta) \in Im(\theta_D)$, logo $\eta \in Im(\theta')$, ou seja, θ' é sobrejetiva. Portanto, θ' é bijeção e, consequentemente, θ_C também é.

Agora, verificaremos a condição (1). Sejam $D \in Obj(\mathcal{D})$ e $S_{\mathcal{D}}(D)$ um crivo de cobertura em D. Queremos mostrar que o mapa canônico $\rho : \mathcal{F}_0(D) \to \lim\limits_{D' \in S(D)^{op}} \mathcal{F}_0(D')$ é bijetivo. Seja $S_{\mathcal{C}}(D) \subset \mathcal{C}_{/D}$ o crivo gerado por $S_{\mathcal{D}}(D)$. Nossa hipótese de que $S_{\mathcal{D}}(D)$ é cobertura para topologia de Grothendieck da Proposição 4.1 garante que $S_{\mathcal{C}}(D)$ é cobertura para topologia de Grothendieck original em $\mathcal{C}$. Assim, o mapa ρ fatora como:

$$\mathcal{F}_0(D) = \mathcal{F}(D) \xrightarrow{\rho'} \lim_{C' \in S_{\mathcal{C}}(D)^{op}} \mathcal{F}(C') \xrightarrow{\rho''} \lim_{D' \in S_{\mathcal{D}}(D)^{op}} \mathcal{F}_0(D')$$

onde ρ' é uma bijeção, dado que por hipótese $\mathcal{F}$ é um feixe, e ρ'' é uma bijeção visto que $\mathcal{F}$ é uma extensão de Kan à direita da sua restrição à $\mathcal{D}^{op}$.

Por fim, suponha que as condições (1) e (2) são satisfeitas. Queremos mostrar que $\mathcal{F}$ é um feixe em $\mathcal{C}$. Fixe um crivo de cobertura $S_{\mathcal{C}}(C) \subset \mathcal{C}_{/C}$, considere $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C}$ e seja $S_{\mathcal{D}}(C) = \mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} S_{\mathcal{C}}(C)$. Queremos mostrar que o mapa horizontal superior do diagrama a seguir é bijetivo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C') \arrow[d] \\
\lim\limits_{D \in (\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{/C})^{op}} \mathcal{F}(D) \arrow[r] & \lim\limits_{D \in S_{\mathcal{D}}(C)^{op}} \mathcal{F}(D)
\end{tikzcd}$$

Obtemos por (2) que os dois mapas verticais são bijetivos. Além disso, por (1) e pelo fato de $\mathcal{D}$ ser uma base de $\mathcal{C}$, temos que o mapa horizontal inferior também é bijetivo. Portanto, concluímos que $\mathcal{F}(C) \to \lim\limits_{C' \in S_{\mathcal{C}}(C)^{op}} \mathcal{F}(C')$ é bijetivo.

□

Sob as condições estabelecidas na proposição anterior, podemos estabelecer uma equivalência entre as categorias $Sh(\mathcal{C})$ e $Sh(\mathcal{D})$. Dado um feixe $\mathcal{F} \in \mathrm{Obj}(Sh(\mathcal{C}))$, podemos restringi-lo à categoria $\mathcal{D}^{op}$, obtendo assim $\mathcal{F}|_{\mathcal{D}^{op}}$, e em seguida estender essa restrição a $\hat{\mathcal{F}}$. Desse modo, obtemos um mapa isomórfico à identidade $1_{Sh(\mathcal{C})}$. De maneira análoga, é possível obter um mapa isomórfico à identidade $1_{Sh(\mathcal{D})}$. Assim, segue o corolário abaixo:

Corolário 4.1.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria equipada com uma topologia de Grothendieck dada por coleções de mapas juntamente sobrejetivos e $\mathcal{D}$ uma base de $\mathcal{C}$. Assuma $\mathcal{D}$ equipada com a topologia de Grothendieck herdada de $\mathcal{C}$ da proposição 4.1. Então precomposição com a inclusão $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ induz uma equivalência de categorias:*

$$Sh(\mathcal{C}) \to Sh(\mathcal{D}), \quad F \to F|_{\mathcal{D}^{op}}.$$

5 Equivalência de Categorias

Por fim, veremos os resultados que apresentam categorias equivalentes à categoria de conjuntos condensados. Vale ressaltar que um **conjunto, grupo, anel, ..., condensado** é um feixe

$$\begin{array}{rcl} T: \quad \text{ProFinSet}^{op} & \rightarrow & \text{Set, Grp, Ring, ...} \\ S & \mapsto & T(S) \end{array}$$

Satisfazendo $T(\emptyset) = *$ e as seguintes condições:

(1) Para todo par de conjuntos profinitos S_1 e S_2, o mapa natural

$$T(S_1 \sqcup S_2) \rightarrow T(S_1) \times T(S_2)$$

é uma bijeção.

(2) Para toda sobrejeção $S' \rightarrow S$ entre profinitos com o pullback $S' \times_S S'$ e suas projeções p_1 e p_2, o mapa natural

$$T(S) \rightarrow \{x \in T(S') | T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_S S')\}$$

é uma bijeção.

Proposição 5.1. [4, p. 11] *Considere o site κ-CHTop de todos os espaços Hausdorff compactos κ-pequenos, com recobrimentos dados por familias finitas de funções juntamente sobrejetivas. Sua categoria de feixes é equivalente a conjuntos κ-condensados via restrição à conjuntos profinitos.*

Demonstração. Vimos que ProFinSet é uma base para CHTop, logo, pelo corolário 4.1.1, obtemos uma equivalencia entre as categorias de feixe via restrição à conjuntos profinitos. □

Analogamente, como EDSet é uma base de ProFinSet, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2. [4, p. 12] *Considere o site κ-EDSet de todos os conjuntos extremamente desconexos κ-pequenos, com recobrimentos dados por familias finitas de funções juntamente sobrejetivas. Sua categoria de feixes é equivalente a conjuntos κ-condensados via restrição de conjuntos profinitos.*

Usando a proposição, podemos ver que a categoria de conjuntos / grupos / aneis / ... κ-condensados é equivalente a categoria de funtores

$$T : \{\kappa\text{EDSet}\}^{op} \rightarrow \{\text{Set / Grp / Ring / ...}\}$$

tais que $T(\emptyset) = *$ e para todo par de conjuntos κ-extremamente desconexos S_1 e S_2, o mapa natural $T(S_1 \amalg S_2) \rightarrow T(S_1) \times T(S_2)$ é uma bijeção.

Observe que o análogo à condição (ii) [3] de conjuntos condensados foi omitido. Isto acontece pois tal condição é automática para conjuntos extremamente desconexos. De fato, seja $f : S' \rightarrow S$ uma sobrejeção

[3]Seja $S' \rightarrow S$ uma sobrejeção de conjunto extremamente desconexo. Embora o pullback $S' \times_S S'$ não seja extremamente desconexo, ele é profinito. Isso implica que existe uma sobrejeção de um conjunto extremamente desconexo $\tilde{S}$ para $S' \times_S S'$, o que por sua vez induz um diagrama $\tilde{S} \rightrightarrows S' \rightarrow S$ de conjuntos extremamente desconexos.

entre conjuntos extremamentes desconexos, então existe $g : S \to S'$ tal que $f \circ g = 1_S$. Logo, aplicando um funtor T, obtemos

$$T(g) \circ T(f) = 1_{T(S)}$$

e o mapa $T(f)$ é injetivo. Além disso,

$$Im(T(f)) \subset \{x \in T(S') | T(p_1)(x) = T(p_2)(x) \in T(S' \times_X S')\} = E$$

pois $f \circ p_1 = f \circ p_2$. Veremos que $E \subset Im(T(f))$ e todo funtor contravariante entre conjuntos extremamente desconexo satisfaz a condição (ii) automaticamente.

Seja $x \in E$ e considere o mapa $(g \circ f) \times_S 1_{S'} : S' \times_S S' \to S' \times_S S'$. Temos que

$$T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(p_1)(x) = T((g \circ f) \times_S 1_{S'}) \circ T(p_2)(x)$$

$$\Downarrow$$

$$T(p_1 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x) = T(p_2 \circ ((g \circ f) \times_S 1_{S'}))(x)$$

$$\Downarrow$$

$$T(g \circ f)(x) = T(1_{S'})(x).$$

Assim, $T(f)(T(g)(x)) = x$, ou seja, $x \in Im(T(f))$. Portanto $T(S)$ está em bijeção com E.

Referências

[1] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 1994.

[2] LURIE, J. *Ultracategories.* Preprint version. 2018.Disponível em: `https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Conceptual.pdf` Acesso em: 06/12/2022.

[3] MAIR, C. *Animated Condensed Sets and Their Homotopy Groups.* 2021. Disponível em: `https://arxiv.org/pdf/2105.07888.pdf` Acesso em: 06/12/2022.

[4] SCHOLZE, P. *Lectures on Condensed Mathematics* Notas de aula. 2019. Disponível em: `https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf` Acesso em: 06/12/2022.

[5] WILSON, J. S.*Profinite Groups.* Clarendon Press, 1998.

[6] THE STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project* 2018. Disponível em: `https://stacks.math.columbia.edu/` Acesso em: 06/12/2022