

CATEGORIAS

SCHCS

Notas baseadas nos primeiros capítulos do livro *Basic Category Theory* por Tom Leinster (*Cambridge studies in advanced mathematics*, vol. 143, CUP, 2014).

1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Uma *categoria* C consiste de

- (1) *objetos* A, B, C ;
- (2) para cada par de objetos A e B , uma coleção $H(A, B)$ de *morfismos* (mapas, setas, flechas, etc) $A \rightarrow B$.

Outra notação para os morfismos: $\text{Hom}(A, B)$, $C(A, B)$, $H_C(A, B)$, $\text{Hom}_C(A, B)$.

Para objetos A, B, C temos uma função

$$H(A, B) \times H(B, C) \rightarrow H(A, C), \quad (f, g) \mapsto g \circ f.$$

Esta função chama-se *composição*. Para cada objeto A temos $1_A \in H(A, A)$ tal que

$$1_B \circ h = h, \quad h \circ 1_A = h, \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

para todo $h \in H(A, B)$, $g \in H(B, C)$ e $f \in H(C, D)$. Se $f \in H(A, B)$, então A é o *domínio* de f e B é o *codomínio*.

Exemplo 1. As seguintes são os exemplos mais comuns de categorias:

- (1) **Set**: Os objetos são conjuntos, os mapas são mapas entre conjuntos.
- (2) **Grp**: Os objetos são grupos, e os mapas são homomorfismos entre grupos.
- (3) **AbGrp**: Os objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos.
- (4) **Ring**: Os objetos são anéis (com 1), e os mapas são homomorfismos entre anéis.
- (5) **CRing**: Os objetos são anéis comutativos (com 1), e os mapas são homomorfismos entre anéis comutativos.
- (6) k -**Vect**: Os objetos são espaços vetoriais sobre um corpo k e os mapas são aplicações k -lineares.
- (7) R -**Mod**: Os objetos são R -módulos (à esquerda) e os mapas são R -homomorfismos.
- (8) **Top**: Os objetos são espaços topológicos e os mapas são funções contínuas.

Um mapa $f \in H(A, B)$ é dito *isomorfismo*, se existir $g \in H(B, A)$ tal que $fg = 1_B$ e $gf = 1_A$.

Exemplo 2. Outros exemplos,

- (1) \emptyset com nenhum objeto e nenhuma flecha;
- (2) $\{A\}$ com um objeto e uma flecha 1_A ;

- (3) $A \rightarrow B$ com dois objetos e três flechas $1_A, 1_B, A \rightarrow B$.
- (4) Um monoide M pode ser visto como uma categoria com um objeto A e uma flecha associada com cada elemento de M . A identidade de M corresponde a 1_A e a associatividade do monoide corresponde à associatividade da composição.
- (5) Um grupo G pode ser visto como uma categoria com um objeto A e uma flecha associada com cada elemento de G . Neste caso, toda flecha da categoria é um isomorfismo.
- (6) Se P é um conjunto parcialmente ordenado, então P pode ser visto como uma categoria. Os objetos da categoria são os elementos de P e, para $\alpha, \beta \in P$, temos uma flecha $\varphi_{\alpha, \beta} : \alpha \rightarrow \beta$ na categoria se e somente se $\alpha \leq \beta$. Neste caso, $H(\alpha, \beta) = \{\varphi_{\alpha, \beta}\}$.

1.1. Categoria oposta ou dual. Seja C uma categoria. Definimos o *dual* ou *oposta* C' de C . Os objetos de C' são os mesmos que os objetos de C , 1_A em C' é o mesmo que em C , e $H_{C'}(A, B) = H_C(B, A)$.

2. FUNCTORES

Sejam C e D categorias. Um *functor* $F : C \rightarrow D$ associa

- (1) cada objeto $A \in C$ com um objeto $F(A) \in D$;
- (2) cada mapa $f \in H(A, B)$ com um mapa $F(f) \in H(F(A), F(B))$

tal que

$$F(1_A) = 1_{F(A)} \quad \text{e} \quad F(fg) = F(f)F(g).$$

Exemplo 3. *Funtores de esquecimento:* Considere o seguinte functor $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$. Associamos com cada grupo G o seu conjunto G e $F(\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha \in H_{\mathbf{Grp}}(G, H)$.

Pode-se definir funtores de esquecimento similarmente

- (1) $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$;
- (2) $\mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Grp}$;
- (3) $R\text{-mod} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$;
- (4) $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$.

Exemplo 4. *Funtores livres:* Considere por exemplo o functor $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$ levando cada conjunto X ao grupo $F(X)$ livre gerado por X . Um morfismo $\alpha : X \rightarrow Y$ induz um único homomorfismo $\bar{\alpha} : F(X) \rightarrow F(Y)$. Pode-se definir funtores similares

- (1) $\mathbf{Set} \rightarrow k\text{-Vect}$;
- (2) $\mathbf{Set} \rightarrow R\text{-Mod}$;
- (3) $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{CRing}$;
- (4) $\mathbf{Set} \rightarrow k\text{-CAlg}$ (a categoria de k -álgebras comutativas onde k é um corpo).

Um functor contravariante entre C e D é um functor $C \rightarrow D'$.

Exemplo 5. $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbb{R}\text{-CAlg}$: Seja X um espaço topológico. Definimos o functor F como $X \mapsto C(X, \mathbb{R})$ onde $C(X, \mathbb{R})$ é o anel das funções contínuas de X para \mathbb{R} . Se $f : X \rightarrow Y$

em **Top**, então $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ com $F(f)(\psi) = \psi \circ f$. Às vezes, escrevemos que $F(f) = - \circ f$.

Exemplo 6. O espectro $\mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Top}$: $R \mapsto \text{Spec}(R)$ onde

$$\text{Spec}(R) = \{P \subset R \mid P \text{ é um ideal primo}\}.$$

Definimos uma topologia (chamada de *Topologia de Zariski*) em $\text{Spec}(R)$ com a regra que

$$V(I) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$$

são os fechados para $I \subseteq R$ ideais. Se $f : R \rightarrow S$, então $\text{Spec}(f) : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ está definido como $\text{Spec}(f)(Q) = f^{-1}(Q)$ para cada $Q \in \text{Spec}(S)$. É um exercício fácil mostrar que isso é bem definido, pois a pré-imagem homomorfica de um ideal primo é primo.

Um functor $F : C \rightarrow D$ é dito *fiel* (repetivamente, *pleno*, *full* em inglês) se todos os mapas $H(A, B) \rightarrow H(F(A), F(B))$ são injetivos (respetivamente, sobrejetivos).

Uma *subcategoria* D de C contém objetos de C e $H_D(A, B) \subseteq H_C(A, B)$. Subcategoria é *plena* se $H_D(A, B) = H_C(A, B)$. Por exemplo, **AbGrp** é uma subcategoria plena de **Grp**.

3. TRANSFORMAÇÃO NATURAL

Sejam C e D categorias e $F, G : C \rightarrow D$ funtores. Uma *transformação natural* α entre F e G é composta por uma família de morfismos $\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$ para todo objeto A em C tal que para todo mapa $f : A \rightarrow B$ o diagrama

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(B) \end{array}$$

comuta.

Exemplo 7. Seja C uma categoria discreta sobre um conjunto X . Então C não tem flechas, exceto 1_x para todo $x \in X$. Seja D uma categoria qualquer. Então funtores $F, G : C \rightarrow D$ escolhem objetos $F(x)$ e $G(x)$ para cada $x \in X$. Uma transformação natural α é uma coleção de mapas $\alpha_x : F(x) \rightarrow G(x)$.

Exemplo 8. Seja $n \geq 1$ fixo, e considere $F, G : \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{Grp}$ onde $F(R) = GL_n(R)$, $G(R) = R^*$. É fácil ver que estas correspondências são functoriais; ou seja, estendem-se para morfismos. O mapa $\det_R : GL_n(R) \rightarrow R^*$ é uma transformação natural.

Transformações naturais podem ser compostas. Se $F, G, H : C \rightarrow D$ funtores, $\alpha : F \rightarrow G$, $\beta : G \rightarrow H$ são transformações naturais, então a composição $\beta\alpha$ é transformação natural $F \rightarrow H$. A identidade $1_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$ é natural $F \rightarrow F$. Assim

se C e D são categorias, então a *categoria dos funtores* $[C, D]$ tem os funtores entre C e D como os objetos e as transformações naturais como os morfismos.

Isomorfismo natural entre F e G é uma transformação natural α tal que

$$\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$$

é um isomorfismo para cada objeto A na categoria C .

Exercício 9. *Isomorfismo natural é um isomorfismo na categoria dos funtores. Neste caso os funtores F e G são naturalmente isomorfos.*

Dados dois funtores $F, G : C \rightarrow D$. Dizemos que $F(A)$ e $G(A)$ são naturalmente isomorfos se F e G são naturalmente isomorfos.

Exemplo 10 (O duplo dual). Sejam V e W k -espaços vetoriais. Lembremos que $V^* = \text{Hom}(V, k)$ e, por extensão, $V^{**} = \text{Hom}(V^*, k)$. A correspondência $(-)^*$ é functorial contravariante; de fato, se $\alpha : V \rightarrow W$, definimos $\alpha^* : W^* \rightarrow V^*$ como $\alpha^* = - \circ \alpha$ e $\alpha^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$ como $\alpha^{**} = - \circ \alpha^*$. Ou seja,

$$\alpha^{**}(\beta)(\psi) = (\beta \circ \alpha^*)(\psi) = \beta(\psi \circ \alpha)$$

para $\beta \in V^{**}$ e $\psi \in W^*$. Temos que $\varphi^V : v \mapsto \varphi_v^V$ é um mapa de $V \rightarrow V^{**}$ onde $\varphi_v^V(\chi) = \chi(v)$ para $v \in V$ e $\chi \in V^*$. Afirmamos que a coleção de mapas φ^V define uma transformação natural entre os funtores $1, (-)^{**} : k\text{-}\mathbf{Vect} \rightarrow k\text{-}\mathbf{Vect}$. Escrevendo o diagrama (1) para esta situação, precisa-se provar que $\alpha^{**}(\varphi_v^V) = \varphi_{\alpha(v)}^W$ para todo $\alpha : V \rightarrow W$ em $k\text{-}\mathbf{Vect}$. Mas isso segue dos fatos que

$$\alpha^{**}(\varphi_v^V)(\psi) = \varphi_v^V(\psi \circ \alpha) = \psi(\alpha(v))$$

e

$$\varphi_{\alpha(v)}^W(\psi) = \psi(\alpha(v)).$$

Então temos que os φ^V determinam uma transformação natural. Note que se $\dim V$ é finita, então $\varphi^V : V \rightarrow V^{**}$ é um isomorfismo e neste caso temos um isomorfismo entre os funtores 1 e $(-)^{**}$ na categoria $k\text{-}\mathbf{FinVect}$ de k -espaços de dimensão finita.

4. FUNCTORES ADJUNTOS

Sejam C e D categorias e assuma que temos funtores

$$F : C \rightarrow D \quad \text{e} \quad G : D \rightarrow C.$$

Dizemos que (F, G) é um *par adjunto* ou F é *adjunto à esquerda* de G , ou G é *adjunto à direita* de F se para cada par de objetos $A \in C$ e $B \in D$ existe uma bijeção

$$\varrho_{A,B} : H_D(F(A), B) \rightarrow H_C(A, G(B))$$

natural no sentido explicado nos itens (1)–(2) em baixo. Para simplificar a notação, se $g \in H_D(F(A), B)$ e $f \in H_C(A, G(B))$ então denotamos a suas imagens por esta bijeção como \bar{g} e \bar{f} , respectivamente.

A palavra “natural” no parágrafo anterior tem o seguinte significado.

(1) Seja $A \in C$, $B, B' \in D$ objetos e sejam $g : F(A) \rightarrow B$ e $q : B \rightarrow B'$. Então

$$\overline{F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'} = A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B').$$

(2) Seja $A, A' \in C$, $B \in D$ objetos e sejam $p : A' \rightarrow A$ e $f : A \rightarrow G(B)$. Então

$$\overline{A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)} = F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B.$$

As condições (1) e (2) podem ser expressas com a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} H_D(F(A), B) & \xrightarrow{q \circ -} & H_D(F(A), B') & & H_C(A, G(B)) & \xrightarrow{- \circ p} & H_C(A', G(B)) \\ \varrho_{A,B} \downarrow & & \downarrow \varrho_{A,B'} & \text{e} & \varrho_{A,B} \uparrow & & \uparrow \varrho_{A',B} \\ H_C(A, G(B)) & \xrightarrow{G(q) \circ -} & H_C(A, G(B')) & & H_D(F(A), B) & \xrightarrow{- \circ F(p)} & H_C(F(A'), B). \end{array}$$

Exemplo 11. Considere os funtores $F : \mathbf{Set} \rightarrow k\text{-}\mathbf{Vect}$ e $G : k\text{-}\mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Set}$ onde, para um conjunto X , $F(X) = k[X]$ é o espaço vetorial de combinações lineares formais de elementos de X com coeficientes em k (o k -espaço com base X) e para um k -espaço vetorial V , $G(V) = V$ (ou seja, G é um functor de esquecimento). Note que F e G podem ser definidos para morfismos na maneira óbvia. Assuma que X é um conjunto, V é um k -espaço. A bijeção natural na definição do adjunto pode ser definida como

$$\begin{aligned} \varrho_{X,V} : H_{k\text{-}\mathbf{Vect}}(k[X], V) &\rightarrow H_{\mathbf{Set}}(X, G(V)) = H_{\mathbf{Set}}(X, V) : \\ g &\mapsto \bar{g} = g|_X \\ \bar{f} &\leftarrow f \end{aligned}$$

onde $\bar{f} : k[X] \rightarrow V$ é o mapa induzido por $f : X \rightarrow V$. Sejam $g : k[X] \rightarrow V$ e $q : V \rightarrow V'$ em $k\text{-}\mathbf{Vect}$, e $f : X \rightarrow V$ e $p : X' \rightarrow X$ em \mathbf{Set} . Traçando os dois diagramas antes do exemplo obtemos as seguintes imagens:

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{q \circ -} & q \circ g & & f & \xrightarrow{- \circ p} & f \circ p = (\bar{f} \circ F(p))|_X \\ \varrho_{X,V} \downarrow & & \downarrow \varrho_{X,V'} & \text{e} & \varrho_{X,V} \uparrow & & \uparrow \varrho_{X',V} \\ g|_X & \xrightarrow{G(q) \circ -} & (q \circ g)|_X = q \circ (g|_X) & & \bar{f} & \xrightarrow{- \circ F(p)} & \bar{f} \circ F(p) \end{array}$$

Temos que (F, G) é um par adjunto.

Exemplo 12. Considere os funtores $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ e $G : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ onde $F(X) = X/X'$ (X' sendo o subgrupo derivado) e $G(A) = A$ (ou seja, G é um functor de esquecimento). O quociente X/X' é chamado de *abelianização* de X . Note que a correspondência $X \mapsto X/X'$ é functorial, pois se $\alpha : X \rightarrow Y$ é um morfismo, então α induz um morfismo $\alpha_{\text{ab}} : X/X' \rightarrow Y/Y'$. Note que temos a projeção natural $\pi_X : X \rightarrow X/X'$ para cada grupo X . Dado X em \mathbf{Grp} e A em \mathbf{AbGrp} temos que a bijeção $\text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(X/X', A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(X, A)$ pode ser dada por

$$g \mapsto g \circ \pi_X \quad \text{e} \quad f \mapsto f_{\text{ab}}.$$

É fácil verificar que (F, G) é um par adjunto.

Exemplo 13. Considere um anel comutativo R com 1 e seja N um R -módulo. Considere os funtores $- \otimes N$ e $\text{Hom}(N, -)$ na categoria $R\text{-Mod}$. Note que as duas destas correspondências são functoriais, pois se $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$, então

$$\alpha \otimes N : M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N, \quad m \otimes n \mapsto \alpha(m) \otimes n$$

e

$$\text{Hom}(N, \alpha) : \text{Hom}(N, M_1) \rightarrow \text{Hom}(N, M_2) \quad \varphi \mapsto \alpha \circ \varphi.$$

Se M e P são R -módulos, então existe uma bijeção natural entre $\text{Hom}(M \otimes N, P)$ e $\text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$ dada por

$$f \mapsto \psi_f \quad \text{onde} \quad \psi_f(m)(n) = f(m \otimes n)$$

e

$$\varphi \mapsto f_\varphi \quad \text{onde} \quad f_\varphi(m \otimes n) = \varphi(m)(n).$$

É fácil verificar que os dois mapas são inversos e satisfazem a definição de par adjunto.

O seguinte teorema mostra o poder de pares adjuntos de funtores. O teorema é verdadeira em em contexto mais geral, nomeadamente em categorias abelianas.

Teorema 14. *Sejam R e S anéis comutativos com identidade e considere um par (F, G) adjunto de funtores $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ e $G : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$. Então F é exato à direita e G é exato à esquerda. Em particular, se $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$ em $R\text{-Mod}$ é sobrejetivo, então $F(\alpha)$ também é sobrejetivo, e se $\beta : N_1 \rightarrow N_2$ em $S\text{-Mod}$ é injetivo então $G(\beta)$ também é injetivo.*

Corolário 14.1. *O functor $- \otimes N$ definido no Exemplo 13 é exato à direita e $\text{Hom}(N, -)$ é exato à esquerda. Ou seja, se $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$ é sobrejetivo e $\beta : N_1 \rightarrow N_2$ é injetivo, então $\alpha \otimes N : M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$ é sobrejetivo e $\text{Hom}(N, \beta) : \text{Hom}(N, M_1) \rightarrow \text{Hom}(N, M_2)$ é injetivo.*

Assuma que (F, G) é um par de funtores adjuntos para as categorias C e D . As composições FG e GF são funtores de $D \rightarrow D$ e $C \rightarrow C$, respetivamente. Seja A um objeto de C . Então $1_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$ corresponde a um morfismo $\eta_A = \overline{1_{F(A)}} : A \rightarrow GF(A)$. Similarmente, se B é um objeto em D , então $\varepsilon_B = \overline{1_{G(B)}} : FG(B) \rightarrow B$.

Exemplo 15. Considere a construção no Exemplo 11. Seja X um conjunto e considere $1_{k[X]} : k[X] \rightarrow k[X]$. O morfismo $\eta_X : X \rightarrow k[X]$ é a inclusão de X em $k[X]$. Agora seja V um espaço vetorial e considere $1_V : V \rightarrow V$. O mapa correspondente $\varepsilon_V : k[V] \rightarrow V$ leva uma k -combinação linear formal com elementos de V ao seu valor em V .

Lema 16. *As funções η_A e ε_B definem transformações naturais $\eta : 1_C \rightarrow GF$ e $\varepsilon : FG \rightarrow 1_D$.*

Proof. Exercício. □

Os mapas η e ε são chamados de *unidade* e *counidade* da adjunção.