Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Caracteres de grupos de permutações

Lucas Abraão Mateus de Castro

Course: Grupos e Representações (MAT 889)
Professor: Csaba Schneider

28 de novembro de 2019

Seja G um grupo finito e $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$. Escolhamos um $\mathbb{C}$-espaço vetorial n-dimensional V de base $\left\{v_{x_1}, \dots, v_{x_n}\right\}$, $V = \left\langle v_{x_1}, \dots, v_{x_n} \right\rangle$. Então

- V é G-módulo pela ação $v_{x_i} g = v_{x_i g}$ para todos $x_i \in X$ e $g \in G$;
- a representação permutacional de G correspondente da ação de G em X é

$$
\begin{aligned}
\rho_X : G &\longrightarrow GL(V) \\
g &\longmapsto (g)\rho_X : V \longrightarrow V \\
&\qquad\qquad\qquad v_{x_i} \longmapsto v_{x_i g}
\end{aligned}
$$

onde $(g)\rho_X$ é estendido linearmente em V;

- a representação permutacional de G correspondente da ação de G em X é

$$\begin{aligned} \rho_X : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto (g)\rho_X : V \longrightarrow V \\ &\qquad\qquad\qquad v_{x_i} \longmapsto v_{x_i g} \end{aligned}$$

onde $(g)\rho_X$ é estendido linearmente em V;
- para $g \in G$ e $1 \leq i \leq n$ temos

$$(g\rho_X)_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_{x_i g} \neq v_{x_i} \Leftrightarrow x_i g \neq x_i, \\ 1 & \text{se } v_{x_i g} = v_{x_i} \Leftrightarrow x_i g = x_i; \end{cases}$$

- o caracter π_X de ρ_X é dado por

$$(g)\pi_X = |\{x \in X \mid xg = x\}| = |fix_X(g)|$$

e é dito o caracter permutacional de G correspondente a ação de G em X.

Teorema

[2, 8.4.6] Seja $G \leq Sym(X)$ um grupo de permutações finito com $|X| = n$. Sejam os $\mathbb{C}$-caracteres π_X e χ_1 o permutacional e o trivial de G, respectivamente.

(1) $|orb(G,X)| = \langle \pi_X, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi_X.$

(2) *Sejam G transitivo em X e $G_x := \{g \in G \mid xg = x\}$ para algum $x \in X$. Então*

$$|orb(G_x,X)| = \langle \pi_X, \pi_X \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g\pi_X)^2 .$$

(3) *Seja G transitivo em X. Então G é 2-transitivo em X se e só se $\pi_X = \chi_1 + \chi$ onde χ é um caracter irredutível de G.*

Exemplo

Sejam $G = S_4$ e $X = \{1, \ldots, 4\}$.

	1	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
π_X	4	2	0	1	0
χ_1	1	1	1	1	1

Exemplo

Sejam $G = S_4$ e $X = \{1, \dots, 4\}$.

	1	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
π_X	4	2	0	1	0
χ_1	1	1	1	1	1
$\chi_3 = \pi_X - \chi_1$	3	1	-1	0	-1

(1) $|orb(G,X)| = \langle \pi_X, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi_X.$

Demonstração. (1) Se $X = \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_t$ é a união disjunta das órbitas da ação de G em X então

$$fix_X(g) = fix_{\mathcal{O}_1}(g) \cup \cdots \cup fix_{\mathcal{O}_t}(g)$$

é uma união disjunta para todo $g \in G$ e logo $\pi_X = \pi_{\mathcal{O}_1} + \cdots + \pi_{\mathcal{O}_t}$. É então suficiente mostrar que $\langle \pi_{\mathcal{O}}, \chi_1 \rangle = 1$ para toda órbita $\mathcal{O}$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{\mathcal{O}}, \chi_1 \rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi_{\mathcal{O}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\{i \in \mathcal{O} \mid ig = i\}| \\
&= \frac{1}{|G|}|\{(i,g) \in \mathcal{O}\times G \mid ig = i\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{i\in\mathcal{O}} |\{g \in G \mid ig = i\}| \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{i\in\mathcal{O}} |G_i|.
\end{aligned}$$

(1) $|orb(G,X)| = \langle \pi_X, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi_X.$

Demonstração.

Como G é transitivo em $\mathcal{O}$ segue do T.O.E. que para todo $i \in \mathcal{O}$ temos $|\mathcal{O}| = [G : G_i]$ e $|\mathcal{O}||G_i| = |G|$. Logo

$$\langle \pi_{\mathcal{O}}, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{i\in\mathcal{O}} |G_i| = \frac{1}{|G|}|\mathcal{O}||G_i| = \frac{1}{|G|}|G| = 1.$$

E assim

$$\langle \pi_X, \chi_1 \rangle = \left\langle \pi_{\mathcal{O}_1}, \chi_1 \right\rangle + \cdots + \left\langle \pi_{\mathcal{O}_t}, \chi_1 \right\rangle = |orb(G,X)|.$$

(2) G transitivo em X

$$\Rightarrow |orb(G_x, X)| = \langle \pi_X, \pi_X \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g\pi_X)^2.$$

Demonstração. (2) Assumimos sem perda de generalidade $X = \{1, \ldots, n\}$. Seja $S = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Então

$$\langle \pi_X, \pi_X \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g\pi_X)^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in S} (g\pi_X)^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{g \in G_i} g\pi_X \right].$$

Como G é transitivo em X então os G_i são conjugados e $\sum_{g \in G_i} g\pi_X$ independe de i. De (1) temos

$$\langle \pi_X, \pi_X \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{g \in G_x} g\pi_X \right] = \frac{1}{|G|} n |G_x| |orb(G_x, X)|$$

mas do T.O.E. temos $n|G_x| = |X||G_x| = |G|$ e segue o resultado.

(3) Seja G transitivo em X. Então G é 2-transitivo em X se e só se $\pi_X = \chi_1 + \chi$ onde χ é um caracter irredutível de G.

Demonstração.

(3) Sejam $\chi_1, \ldots, \chi_k$ os caracteres irredutíveis distintos de G. Temos que

$$\pi_X = \alpha_1 \chi_1 + \cdots + \alpha_k \chi_k, \qquad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Como G é transitivo em X segue de (1) que $\alpha_1 = \left\langle \pi_X, \chi_1 \right\rangle = orb(G, X) = 1$ e logo

$$\langle \pi_X, \pi_X \rangle = 1 + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i^2 \qquad \text{e} \qquad \pi_X = \chi_1 + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \chi_i$$

(3) Seja G transitivo em X. Então G é 2-transitivo em X se e só se $\pi_X = \chi_1 + \chi$ onde χ é um caracter irredutível de G.

Demonstração.

$$\langle \pi_X, \pi_X \rangle = 1 + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i^2 \qquad \textbf{e} \qquad \pi_X = \chi_1 + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \chi_i$$

Temos que

$$\begin{aligned} G \textbf{ é } 2\textbf{-transitivo em } X &\Leftrightarrow G_x \textbf{ é transitivo em } X \setminus \{x\} \\ &\Leftrightarrow |orb(G_x, X)| = 2 \\ &\Leftrightarrow \langle \pi_X, \pi_X \rangle = 2 \\ &\Leftrightarrow \exists! i \geq 2 \textbf{ tal que } \alpha_i = \delta_{ij} \textbf{ para } i \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \pi_X = \chi_1 + \chi_j \textbf{ com } j \geq 2. \end{aligned}$$

■

Referências

[1] G. James, M. Liebeck, *Representations and characters of groups*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2001.

[2] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*. 2nd ed. Springer, 1996.