
CFD 1

Skriptum zur Vorlesung von

Prof. Dr. sc. techn. habil. J. Sesterhenn

Numerische Fluidodynamik, TU-Berlin

8. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundgleichungen	3
2.1	Transporttheorem und Satz von Gauß	3
2.1.1	Transporttheorem	3
2.1.2	Satz von Gauß	5
2.2	Transport- und Massegleichung	8
2.2.1	Transportgleichung	8
2.2.2	Massenerhalt	9
2.3	Satz von Gauß und Massenerhaltung	11
2.3.1	Bemerkungen zum Satz von Gauß	11
2.4	Impulserhaltung und Oberflächenkräfte	13
2.4.1	Impulserhalt	13
2.5	Energieerhaltung und thermodynamische Betrachtungen . . .	17
2.5.1	Energieerhalt	17
2.5.2	Stoffgesetze	17
2.5.3	Entropiegleichung	18
3	Finite Differenzen	21
3.1	Die Transportgleichung	21
3.2	Diskretisierung der Transportgleichung im Raum	23
3.2.1	Transformation der Transportgleichung	23
3.2.2	Taylorentwicklung der Größe u	25
3.2.3	Linearkombination der Taylorentwicklungen von u . .	27
3.2.4	Übertragungsfunktion einer Diskretisierung	29
3.3	Kompakte Verfahren zur Diskretisierung im Raum	39
3.3.1	Beispiel: Zentralknotenverfahren nach Lele (1992)	41
3.3.2	Beispiel: Verfahren nach Tolstykh (1972)	46
3.3.3	Beispiel: Verfahren nach Adams & Shariff (JCP 1997)	50
4	Behandlung der Zeit	51
4.1	Diskretisierung der Transportgleichung in der Zeit	51
4.1.1	Allgemeines	51

4.1.2	Behandelte Modellgleichung	51
4.1.3	Euler-Verfahren	52
4.1.4	Stabilitätsbetrachtung der Eulerverfahren	55
4.1.5	Stabilitätsbegriffe	57
4.2	Erhöhung der Ordnung	58
4.2.1	Richardson-Extrapolation	58
4.2.2	Verbesserte Polygonzugmethode nach Euler	59
4.2.3	Trapezverfahren	59
4.2.4	Allgemeines Konstruktionsverfahren für Zeitintegrations- schemata	60
4.2.5	Verfahren von Heun	62
4.3	Verfahren von Runge-Kutta	63
4.3.1	Konstruktion eines Runge-Kutta-Schemas	63
4.3.2	Klassische Verfahren mit guten Rundungseigenschaften	64
4.3.3	Stabilitätsbetrachtung der Runge-Kutta-Verfahren	67
4.3.4	Vergleich verschiedener Einschritt-Verfahren	68
4.4	Mehrschrittverfahren	71
4.4.1	Adams–Bashforth	71
4.4.2	Allgemeine Mehrschrittverfahren	72
4.4.3	Stabilität von Mehrschrittverfahren	73
5	Linearer und nichtlinearer Transport	75
5.1	Die lineare Transportgleichung	76
5.2	Charakteristiken aus Burgersgleichung (nichtlineare Gleichun- gen 1. Ordnung)	77
5.3	Entstehung eines Stoßes	78
5.4	Berechnung der Stoßgeschwindigkeit	79
5.5	Berechnung der Stoßstruktur	80
5.6	Betrachtung der kinetischen Energie im Stoß	82
5.7	Verdünnungswellen	84
6	Hyperbolische Systeme	89
6.1	Die eindimensionale lineare Wellengleichung	89
6.2	Die eindimensionalen Eulergleichungen als nichtlineares System	92
6.3	Lösung der eindimensionalen Eulergleichungen mit dem Cha- rakteristikenverfahren	96
6.4	Einfache Wellen	97
7	Das Riemann Problem	99
7.1	Rankine-Hugoniot Beziehung	99
7.2	Das Riemann-Problem	102

8	Finite Volumen Methoden	107
8.1	Die Idee	107
8.2	CFL Bedingung	110
8.3	Approximation des Flusses	111
8.4	Einschub: Charakteristikenverfahren	112
8.5	Riemann-Löser	113
8.5.1	Riemann Probleme	114
8.5.2	Das Godunov Verfahren	118
8.5.3	Der Riemannlöser von Roe	120
8.5.4	Der Riemannlöser von Schleicher	121

Kapitel 1

Einführung

In diesem Skript bemühen wir uns einen Einblick in die grundlegenden Methoden und Verfahren der numerischen Strömungsmechanik zu geben. Dabei konzentriert sich dieser erste Teil der Vorlesung und des Skripts auf die Einführung von numerischen Werkzeugen und Techniken während im nachfolgenden Semester praktische Anwendungen und Modelle der angewandten numerischen Strömungsmechanik besprochen werden. Diese Unterteilung ist leider notwendig, denn um die Probleme und Feinheiten num. Strömungsmechanik behandeln zu können sind sowohl fundierte Kenntnisse in der numerischen Behandlung von PDEs, also auch in der Strömungsmechanik selbst notwendig. Nichts desto trotz wird in dieser Veranstaltung der Bezug zur Strömungsmechanik nicht zu kurz kommen. Dabei halten wir uns die meiste Zeit im Bereich der Gasdynamik auf, denn viele der hier für hyperbolische Gleichungen entwickelten Techniken finden später in Theorie und Numerik parabolischer, also reibungsbehafteter, Gleichungen wieder Anwendung. Im Folgenden leiten wir zunächst die Grundgleichungen der Gas- und Strömungsmechanik her, beschäftigen uns mit den Grundlagen der Finite-Differenzen-Ansätze zur Diskretisierung von Orts- und Zeitableitungen und gehen dann über die Betrachtung von Charakteristiken und Stößen zu Riemannproblemen und allgemeinen Finite-Volumen-Methoden über.

Kapitel 2

Grundgleichungen

2.1 Transporttheorem und Satz von Gauß

2.1.1 Transporttheorem

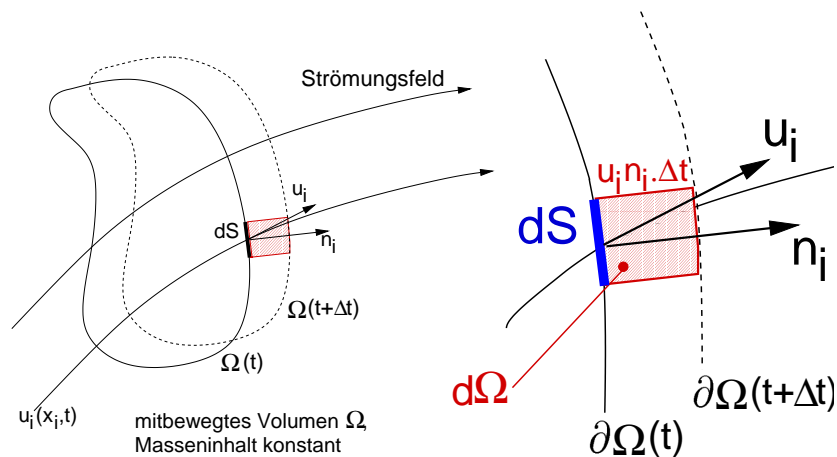


Abbildung 2.1: Mitbewegtes Fluidvolumen mit konstanter Masse (Fluidteilchen)

Betrachtet wird das Integral $I = \int_{\Omega(t)} \varphi d\Omega$ einer beliebigen Größe φ , welches gebildet wird über das in Abb. 2.1 gezeigte Fluidvolumen $\Omega(t)$. Die-

ses Volumen werde mit der Strömung fortbewegt, sodass keine Masse durch die Ränder tritt. Nun ist die Ableitung dieses Integrals I nach der Zeit von Interesse,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi d\Omega.$$

Die Ableitung entspricht dem Grenzwert

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (I(t + \Delta t) - I(t)) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega(t+\Delta t)} \varphi(t + \Delta t, x_i) d\Omega - \int_{\Omega(t)} \varphi(t, x_i) d\Omega \right) \frac{1}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Omega(t)} \frac{\varphi(t + \Delta t, x_i) - \varphi(t, x_i)}{\Delta t} d\Omega + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Omega(t+\Delta t) - \Omega(t)} \frac{\varphi(t + \Delta t, x_i)}{\Delta t} d\Omega. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet das Integral über $\Omega(t + \Delta t) - \Omega(t)$, dass wir über das in der Zeit Δt zu der Menge $\Omega(t)$ hinzugewonnene Volumen integrieren und dieses addieren, während über das in Δt verlorene Volumen mit negativen Vorzeichen integriert wird. Die Teilausdrücke werden dann zu:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Omega(t)} \frac{\varphi(t + \Delta t, x_i) - \varphi(t, x_i)}{\Delta t} d\Omega = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\Omega$$

und

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Omega(t+\Delta t) - \Omega(t)} \frac{\varphi(t + \Delta t, x_i)}{\Delta t} d\Omega = \oint_{\partial \Omega} \frac{\varphi(t, x_i) u_i n_i \Delta t dS}{\Delta t}.$$

Dabei wurde der zweite Term (das Integral über die Differenz zwischen den beiden Volumina $\Omega(t + \Delta t)$ und $\Omega(t)$) in ein Oberflächenintegral über die gesamte Berandung $\partial \Omega$ des Volumens $\Omega(t)$ umgewandelt. Abb. 2.1 zeigt, wie das Produkt von Normalenvektor n_i und Geschwindigkeitsvektor u_i sowie der Zeit Δt den Abstand zwischen den beiden Oberflächen ergibt.

Das **Transporttheorem** lautet dann:

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial \Omega} \varphi \cdot u_i \cdot n_i dS} \quad (2.1)$$

Zu dieser Gleichung 2.1 sind wir gelangt, ohne vorauszusetzen, dass die betrachtete Größe φ im Raum stetig sei (in der Zeit aber schon; φ soll sich zeitlich kontinuierlich ändern können). Dies bedeutet, dass die Differenzierbarkeit von φ bzgl. x_i hier noch nicht vorausgesetzt wurde. Damit ist diese

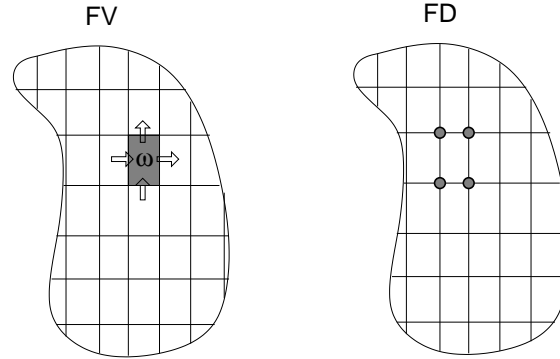


Abbildung 2.2: Finite-Volumen-Diskretisierung (links), Finite-Differenzen-Diskretisierung (rechts)

(integrale) Form der Erhaltungssätze (für geeignete φ die Erhaltungssätze für Masse, Impuls, Energie) allgemeiner als die differentielle Form (siehe weiter unten) und läßt auch Unstetigkeiten wie Verdichtungsstöße zu. Die Finite-Volumen-Diskretisierung (siehe Abb. 2.2) besitzt als Ausgangspunkt diese integralen Erhaltungssätze. Das Fluidvolumen wird durch ein Gitter in kleine Volumina ω unterteilt, über die bei den Finite-Volumen-Verfahren die Integrale aus 2.1 gebildet werden. Hierbei tritt in der Aeroakustik wegen der dort sehr kleinen Störungen (z.B. im Druck p , siehe weiter unten) ein Problem beim Auswerten dieser in den integralen Erhaltungssätzen enthaltenen Bilanzen auf. Dagegen ist das Vorgehen bei der Finite-Differenzen-Methode anders: Die differentiellen Gleichungen werden benutzt (siehe unten), und die auftretenden partiellen Ableitungen durch Differenzen der Werte an den Gitterpunkten dargestellt.

2.1.2 Satz von Gauß

Im Folgenden wird die integrale Form der Transportgleichung betrachtet. Der weiteren Berechnung dient daraus der Term:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \int_{\partial\Omega} u_i n_i dS \quad (2.2)$$

und die Betrachtung eines infinitesimalen Volumens $dV = dx_1 dx_2 dx_3$.

Der Fluss durch eine Seite, z.B. die Ebene senkrecht zur x_1 -Achse, ist:

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{n} dS = -u_1 dx_2 dx_3. \quad (2.3)$$

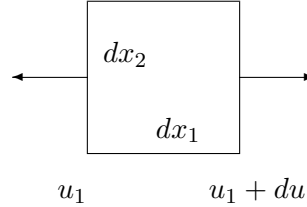


Abbildung 2.3: Zur Definition der Divergenz

Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite ergibt sich dabei aus der Richtung von \vec{n} (siehe Abb. 2.3). Der Fluss durch die gegenüberliegende Seite wird mithilfe einer Taylorentwicklung berechnet:

$$\begin{aligned}\vec{u}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \cdot \vec{n} dS &= u_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \\ &= \left(u_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Die Summe beider Flüsse führt demnach zu:

$$\begin{aligned}\vec{u}(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{n} dS + \vec{u}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \cdot \vec{n} dS \\ = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Nun wird über alle 3 Richtungen summiert und durch das Volumen geteilt:

$$\frac{1}{dV} \int_{\partial\Omega} u_i n_i dS = \frac{1}{dV} \sum \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{dV} \quad (2.6)$$

und es ergibt sich schließlich die Divergenz:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{u}) &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int u_i n_i dS \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \partial_i u_i.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Der Satz von Gauß sagt, dass auch bei beliebig geformten, einfach zusammenhängenden Gebieten mit stetigem \vec{u} (Taylorentwicklung!) auch bei endlich großem Volumen der Fluss durch die Oberfläche als Integral über die Divergenz geschrieben werden kann.

Der **Satz von Gauß** schreibt sich folglich:

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} u_i n_i dS = \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega.} \quad (2.8)$$

Dabei ist n_i der nach außen gerichtete Normalenvektor der Oberfläche und dS das Flächenelement. Das Transporttheorem schreibt sich dann:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi u_i)}{\partial x_i} \right) d\Omega. \quad (2.9)$$

Für den Fall der Erhaltung von I muss gelten:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi u_i)}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0, \quad (2.10)$$

bzw., beim Vorhandensein von Quelltermen q im Gebiet:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi u_i)}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} q \, d\Omega. \quad (2.11)$$

Da diese Gleichung für alle beliebig kleinen Fluidvolumina Ω gelten muss, folgt für das Transporttheorem in differenzieller Form demnach:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi u_i)}{\partial x_i} = 0} \quad (2.12)$$

bzw.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi u_i)}{\partial x_i} = q. \quad (2.13)$$

2.2 Transport- und Massegleichung

2.2.1 Transportgleichung

Die Transportgleichung stellt in Differentialform

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi u_i)}{\partial x_i} = 0$$

eine partielle Differentialgleichung dar. Viele Eigenschaften der Gleichung und ihre Lösungen übertragen sich auf vereinfachte Varianten dieser Gleichung. Um ein Grundverständnis zu erlangen, reduzieren wir uns zunächst auf den einfachen, eindimensionalen Fall, also



$$\partial_t \varphi + \partial_x (u \cdot \varphi),$$

wobei φ und u i.A. Funktionen von (x, t) sind. Bei gegebenem $u(x, t)$ ist dies eine lineare Gleichung für φ . Später wird u über eine weitere Gleichung von φ und u bestimmt, der Impulsgleichung, was ein nichtlineares System ergibt. Um ein besseres Verständnis für das Verhalten der Gleichung zu erlangen, betrachten wir zunächst den Fall mit $u(x, t) = \lambda = \text{const.}$

$$\partial_t \varphi + \lambda \partial_x \varphi = 0, \quad (2.14)$$

welche auch **Transportgleichung** heißt. Dass dieser Name gerechtfertigt ist, zeigt sich bei direkter Lösung dieser Gleichung. Selbige ist in diesem speziellen Beispiel leicht ersichtlich; zu einem Anfangszustand $g(x)$ lautet sie:

$$\varphi(x, t) = g(x - \lambda t). \quad (2.15)$$

Die Richtigkeit dieser Lösung kann durch Einsetzen in Gleichung (2.14) nachvollzogen werden. Eine Anfangsverteilung $g(x)$ wird also einfach mit der Zeit verschoben. Stellt man sich einen dünnen Stab mit einer kontinuierlichen Farbverteilung vor und bewegt diesen entlang der x -Achse, dann beschreibt die Gleichung, wie die Farbe sich an einem Punkt x_0 verändert oder wie diese *transportiert* wird.

Entsprechend kann gefragt werden, wie ein (Farb-)Punkt in der Zeit bewegt wird, also auf welcher Bahn er im (x, t) -Diagramm liegt. Statt dies aus (2.15) abzulesen, werden wir die Bahn direkt aus (2.14) ableiten. Wir suchen Bahnen $x(t)$ auf denen $\varphi = \varphi(x(t), t)$ konstant ist, das totale Differential also verschwindet. Nach der Kettenregel ergibt sich für das totale Differential von φ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0 \quad (2.16)$$

Nach Vergleich mit (2.14) folgt: $\frac{dx}{dt} = \lambda$, also $x(t) = \lambda t + x_0$. Entlang dieser Kurven ändert sich der Zustand nicht, was auch ein Einsetzen von $x(t)$ in

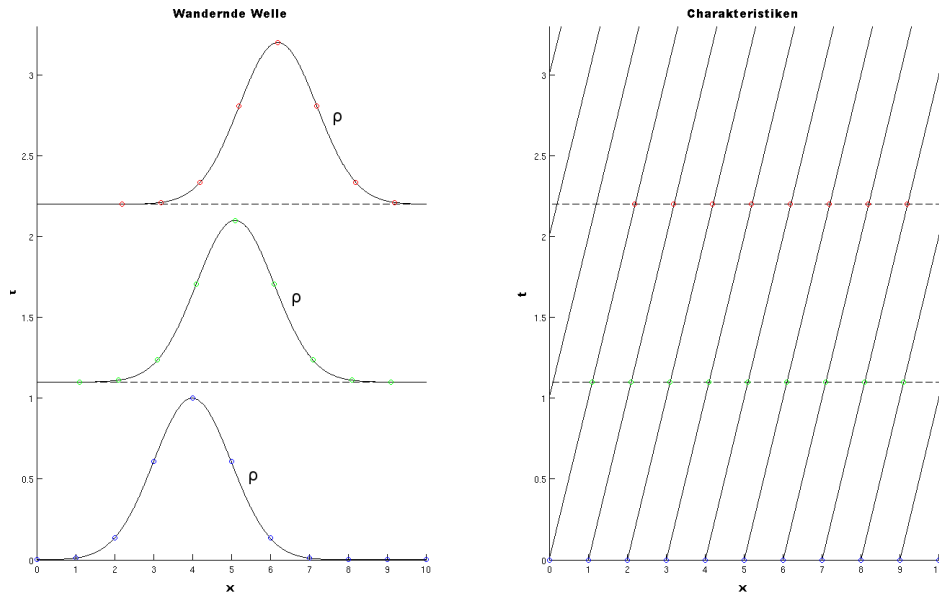


Abbildung 2.4: links: Die wandernde Verteilung von φ ; rechts: Charakteristiken

die Lösung zeigt: $\varphi(x(t), t) = g(x(t) - \lambda t) = g(x_0) = \text{const}$. In Abb. 2.4 ist dieser Vorgang für den Fall $\lambda = 1$ anschaulich dargestellt. Die Kurven $x(t)$ nennt man **Charakteristiken**.

Mathematisch ist auch eine nichtkonstante Geschwindigkeit u möglich. Die Vorstellung eines starren Körpers ist dann jedoch nicht mehr möglich, da dieser keine verschiedenen Geschwindigkeiten an verschiedenen Orten zulässt. Zur besseren Interpretation soll diese Diskussion auf Grundlage der Massengleichung durchgeführt werden.

2.2.2 Massenerhalt

Es wird $\varphi = \rho$ in (2.1) gesetzt. Damit ist $I = \int_{\Omega(t)} \varphi d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho d\Omega = m$.

Der **Erhaltungssatz für die Masse** lautet damit:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial \Omega} \rho u_i n_i dS = 0. \quad (2.17)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist Null, wenn keine Massenquellen vorhanden sind (Bei Strömungen mit chemischer Reaktion, z.B. Verbrennung, sind z.B. in der Massenbilanz einer Spezies Quellterme vorhanden).

Unter Benutzung des Satzes von Gauß ergibt sich:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0,$$

und nachdem diese Gleichung wieder für alle Fluidvolumina Ω gelten muss, muss der Ausdruck unter dem Integral Null werden, und man erhält die differentielle Form der Massengleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2.18)$$

Hierfür wird aber die Differenzierbarkeit von φ bzw. ρ gebraucht. Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt für die Finite-Differenzen-Verfahren.

Der zweite Term in Gleichung (2.18) ist ein Divergenzterm, der Ein- und Ausfluß über die Grenze des (Kontroll-)Volumens beschreibt. Dies wird für die 1-dimensionale Gleichung deutlich:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (2.19)$$

oder in integraler Form durch Integration über x^1

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0}^{x_1} \rho dx + [\rho u]_{x_0}^{x_1} = 0. \quad (2.20)$$

Dabei wird $f(x, t) = \rho(x, t)u(x, t)$ der *Fluss* genannt. Dieser ist die Masse die pro Zeiteinheit durch den Rand strömt (siehe Abb. 2.5). Die Gleichung hat dabei eine einfache Interpretation: Die integrale Größe $\int \rho dx$ ändert sich nur durch die Differenz der Flüsse in x_0 und x_1 . Diese kann z.B. dadurch sein, dass bei konstantem u ein Bereich höherer Dichte hineintransportiert wird, oder das bei konstanter Dichte und *unterschiedlichen* Geschwindigkeiten verschiedene Massenströme realisiert werden. Diese führt zu einer lokalen Massendichteerhöhung (oder Verringerung), also einer *Kompression*

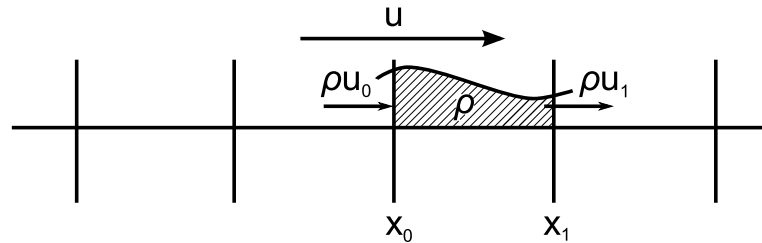


Abbildung 2.5: Darstellung des Massenstroms über die Ränder x_0 und x_1

¹bei unstetiger Lösung muss diese direkt aus (2.17) hergeleitet werden.

2.3 Satz von Gauß und Massenerhaltung


2.3.1 Bemerkungen zum Satz von Gauß

Anschaulich besagt der Satz von Gauß nichts anderes, als dass der Fluss aus einem festen Gebiet heraus gleich der Summe aller Quellen und Senken, also der Divergenz, innerhalb des Gebietes entspricht. Da er in der Strömungsmechanik fundamental ist, soll er etwas erläutert werden.

Einfach ist die Situation im eindimensionalen Raum. Auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ entspricht der Satz von Gauß dem **Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung**. Es gilt:

$$\int_a^b \partial_x f(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a). \quad (2.21)$$

Dies ist verbunden mit einer wichtigen Eigenschaft im Diskreten, der **Teleskopsummeneigenschaft**. Bei einem skizzierten Beweis des Hauptsatzes, welcher im Grunde aussagt, dass Differtiation und Integration Inverse Operatoren sind, wird diese Eigenschaft besonders deutlich. Approximieren wir ein Integral durch Riemannsummen, so gilt:



$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) \cdot \Delta x. \quad (2.22)$$

Wird die Ableitung nun diskret approximiert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \partial_x f(x) dx \\ \approx & \sum_{i=1}^{i=n} \partial_x f(x_i) \cdot \Delta x \\ \approx & \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \cdot \Delta x \\ = & \sum_{i=1}^{i=n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ = & +f(x_1) - f(x_0) \\ & +f(x_2) - f(x_1) \\ & + \dots \\ & +f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) \\ & +f(x_n) - f(x_{n-1}) \\ = & f(x_n) - f(x_0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man genau den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Was nicht offensichtlich war, ist die Stetigkeitsvoraussetzung des Satz von Gauß. In (2.21) ist die Ableitung nur bei Stetigkeit definiert. In der Teleskopsumme (2.23) haben wir eine Ableitungsapproximation und nur eine

Integralapproximation passend gewählt. Die Ableitung und das Integral sind aber in der Riemanndefinition gegeben, wenn bei *beliebiger* Unterteilung der selbe Grenzwert bei $\Delta x \rightarrow 0$ zu finden ist. Und dies ist bei Sprüngen gerade nicht gegeben.

Zur weiteren Veranschaulichung betrachten wir nun ein 2-dimensionales Beispiel auf dem Rechteck $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \operatorname{div}(f(x)) d^2V \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (\partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x)) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \partial_{x_1} f_1(x) dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 \partial_{x_2} f_2(x) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_0^1 [f_1(x)]_0^1 dx_2 + \int_0^1 [f_2(x)]_0^1 dx_1.
 \end{aligned}$$

Es bleiben also nur die Integrale über den Rand und es wird nur der Fluss senkrecht zum Rand, also in Normalenrichtung, berücksichtigt. Der Flussvektor $f = (f_1, f_2)^t$ wird an jeder Oberfläche auf die Normalkomponente projiziert, lässt sich also schreiben als:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f(x)) d^2V \tag{2.24}$$

$$= \int_0^1 \left. \vec{f} \cdot \vec{n}_{x_1} \right|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^1 \left. \vec{f} \cdot \vec{n}_{x_1} \right|_{x_1=1} dx_2 + \tag{2.25}$$

$$\int_0^1 \left. \vec{f} \cdot \vec{n}_{x_2} \right|_{x_2=0} dx_1 + \int_0^1 \left. \vec{f} \cdot \vec{n}_{x_2} \right|_{x_2=1} dx_1 \tag{2.26}$$

Siehe dazu auch Abb. 2.6. Das Vorzeichen ist durch die Orientierung des Normalenvektors nach außen gegeben.

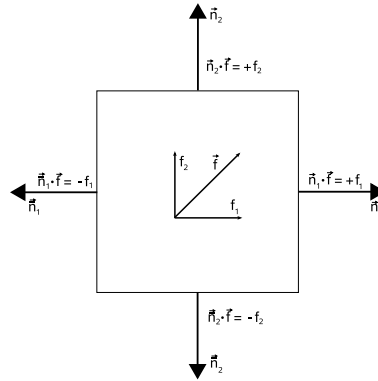


Abbildung 2.6: Das Integral über die Divergenz lässt sich auf die Normalkomponente des Flusses zurückführen.

2.4 Impulserhaltung und Oberflächenkräfte

2.4.1 Impulserhalt

Ableitung der Differentialgleichungen

Nun nimmt man $\varphi = \rho \cdot u_j$. Sodann:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \rho u_j u_i n_i dS = \sum F_j,$$

wobei die rechte Seite die Summe der angreifenden Kräfte darstellt.

- Für die **Euler-Gleichungen** (reibung- und wärmeleitungsfrei):
 $\sum F_j = \oint_{\partial\Omega} -p n_j dS$, d.h. nur Druckkräfte sind hier vorhanden (und wirken entlang der negativen Richtung der Oberflächennormalen).
- Für die **Navier-Stokes-Gleichungen** (mit Reibung):
 $\sum F_j = \oint_{\partial\Omega} (-p n_j + n_i \tau_{ij}) dS$

Dabei ist τ_{ij} definiert zu $\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + (\mu_d - \frac{2}{3}\mu) S_{kk} \delta_{ij}$, wobei S_{ij} den Deformationstensor bezeichnet (siehe nächster Abschnitt). Das Gradiententheorem

$$\oint_{\partial\Omega} p n_i dS = \oint_{\partial\Omega} p \delta_{ij} n_j dS$$

liefert:

$$\oint_{\partial\Omega} p \delta_{ij} n_j dS = \int_{\Omega} \frac{\partial(p \delta_{ij})}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega.$$

Somit erhält man für den **Euler** -Fall die folgende partielle Differentialgleichung (DGL in konservativer Form) :

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (2.27)$$

und für den Fall der **Navier-Stokes-Gleichungen** (DGL in konservativer Form):

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}, \quad (2.28)$$

Entstehung von Oberflächenkräften durch Reibung

Die Annahme eines reibungsfreien Fluides ist oft nicht realistisch. Ein einfacher Schleppversuch zweier ebener Platten, wie in Abb. 2.7 dargestellt, zeigt, dass mit guter Näherung die innere Reibung eines Fluids proportional zum Geschwindigkeitsgradienten angenommen werden kann:

$$\tau \propto \frac{\partial u}{\partial y}.$$

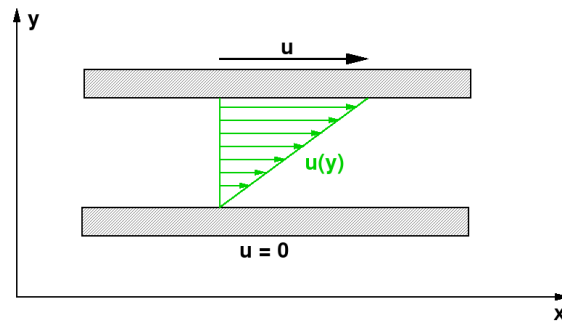


Abbildung 2.7: Fluid zwischen zwei relativ zueinander in Längsbewegung befindlichen ebenen Wänden

Im folgenden soll dieser Ansatz für einen allgemeinen Strömungszustand hergeleitet werden:

An zwei benachbarten Punkten unterscheiden sich die Geschwindigkeiten u_i um

$$\tilde{u}_i - u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (2.29)$$

Dies bedeutet dann z.B.:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

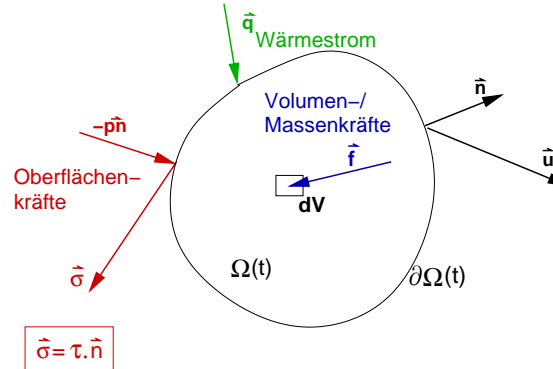


Abbildung 2.8: Schematische Skizze eines Fluidteilchens und die angreifenden Oberflächen- und Volumenkräfte sowie der übergehende Wärmestrom

Dabei wird der Term $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ als **Geschwindigkeitsgradiententensor** bezeichnet. Wie jeder Tensor zweiter Stufe kann er in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Teil aufgespalten werden.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = S_{ij} + R_{ij} \quad (2.30)$$

Es gilt:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (2.31)$$

$$R_{ij} = -R_{ji}. \quad (2.32)$$

Für den Abstandsvektor δx (nach der Zeit $dt : \delta x'$) zweier mit dem Fluid mitbewegter Punkte P_1 und P_2 gilt:

$$\delta x'_i = \delta x_i + (\tilde{u}_i - u_i) \cdot dt = \delta x_i + \left(\delta x_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dt. \quad (2.33)$$

Die Änderung des Abstandsquadrates beträgt:

$$\Delta = (\delta x')^2 - (\delta x)^2 = \left(dr_i + dr_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dt \right)^2 - (dr_i)^2 = \quad (2.34)$$

$$= 2 \cdot dr_i \cdot dr_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dt + \left(dr_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dt \right)^2, \quad (2.35)$$

wobei

$$\left(dr_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dt \right)^2 \approx 0.$$

Damit gilt

$$\Delta = 2 \cdot dr_j \cdot dr_i \cdot (S_{ij} + R_{ij})dt. \quad (2.36)$$

Es ist aber

$$\delta x_j \delta x_i R_{ij} = \frac{1}{2} [dr_j dr_i R_{ij} + dr_j dr_i R_{ij}] = \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2} [dr_j dr_i R_{ij} - dr_j dr_i R_{ji}] = 0 \quad (2.38)$$

und damit erhalten wir

$$\Delta = 2 \cdot dr_j dr_i S_{ij}. \quad (2.39)$$

Wenn S_{ij} verschwindet, so ändert sich der Abstand zweier im Fluid mitbewegter Punkte nicht! S_{ij} bezeichnet man deshalb als **Deformationstensor**. Für dr' gilt in diesem Spezialfall:

$$dr'_i = dr_i + dr_j R_{ij} dt. \quad (2.40)$$

Mit der Definition des Wirbelvektors,

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad (2.41)$$

was sich symbolisch in der Form $\omega = \text{rot } u$ schreibt und mit dem Einheits-tensor dritter Stufe ε_{ijk} , für den gilt

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } ijk \text{ eine zyklische Permutation von } 123 \text{ ist} \\ 0 & \text{für mindestens zwei gleiche Indizes} \\ -1 & \text{wenn } ijk \text{ eine zyklische Permutation von } 321 \text{ ist} \end{cases},$$

lässt sich R_{ij} als

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} \omega_k \quad (2.42)$$

darstellen.

Für $S_{ij} = 0$ ist die Bewegung der Punkte P_1 und P_2 also als reine Translation und Rotation darstellbar. R_{ij} bezeichnet man daher als **Rotations-tensor**.

Nun wird ein allgemeiner Ausdruck für den Tensor τ_{ij} gesucht.

- Für reine Translationen und Rotationen soll keine äußere Kraft auf das Fluidelement wirken, d.h., τ_{ij} hängt nur von S_{ij} ab.
- $\tau_{ij} \equiv 0$ für $S_{ij} \equiv 0$.
- Das Medium ist isotrop.

Aufgrund der ersten Aussage ist τ_{ij} homogen. Der allgemeinste lineare homogene Ansatz lautet:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + (\mu_d - \frac{2}{3}\mu) S_{kk} \delta_{ij}. \quad (2.43)$$

2.5 Energieerhaltung und thermodynamische Betrachtungen

2.5.1 Energieerhalt

Sei nun $\varphi = \rho \cdot e$, wobei e die totale spezifische Energie sein soll: $e = \varepsilon + \frac{1}{2}u_i u_i$ mit der spezifischen inneren Energie ε .

Die Erhaltungsgleichung ("Erhaltungsform") lautet:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega} \rho e \cdot u_i n_i dS = \oint_{\partial\Omega} (-p u_i n_i + \tau_{ij} u_i n_j + q_i n_i) dS,$$

wobei die Wärmeleitung beschrieben werden kann durch das Fouriersche Gesetz $q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$. Hier ist λ die Wärmeleitfähigkeit. (Meist wird bei der Modellierung des Wärmestroms nur die Wärmeleitung berücksichtigt, bei Stoffgemischen kommt noch ein Wärmetransport durch unterschiedliche Diffusionskonstanten hinzu.) Diese Gleichung besagt: Die Energie eines Fluidteilchens ändert sich durch Wärmeleitung und durch die Arbeit der angreifenden Kräfte.

In differentieller Form (konservativ) kommt nach Umformung mit dem Gaußschen Satz:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(p u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(u_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (2.44)$$

2.5.2 Stoffgesetze

Viskose Reibung

Die dynamische Viskosität (Scherzähigkeit) wird relativ gut durch das **Sutherland-Gesetz**

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \frac{T_{ref} + S}{T + S} \cdot \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{3/2} \quad (2.45)$$

beschrieben. Für Luft bei $T_{ref} = 273 \text{ K}$ ist $\mu_{ref} = 1,71 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{ms}}$ und $S = 122 \text{ K}$.

Bei moderaten Temperaturänderungen wird auch

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{0,7} \quad (2.46)$$

gebraucht.

Für die Druckzähigkeit μ_d verwendet man häufig die sog. **Stokessche Hypothese**

$$\mu_d = 0. \quad (2.47)$$

Bei mehratomigen Gasen und bei hohen Frequenzen ist dies im allgemeinen nicht gültig und μ_d ist dann zu berücksichtigen.

Wärmeleitung

Die Wärmeleitfähigkeit λ verhält sich ähnlich wie die Scherzähigkeit, und die dimensionslose **Prandtl-Zahl**

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} \quad (2.48)$$

ist über weite Temperaturbereiche nahezu konstant. Recht gute Resultate liefert die Formel von **Eucken**:

$$Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}. \quad (2.49)$$

Für Luft ist $Pr \approx 0,7$.

2.5.3 Entropiegleichung

Durch die bei einer Temperatur T zugeführte Wärmemenge dQ ist die Entropie dS gegeben als

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (2.50)$$

Weiterhin gilt

$$Tds = d\varepsilon + p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) = d\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (2.51)$$

mit der Änderung der inneren Energie $d\varepsilon$ und der Kompressionsarbeit $p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Adiabate Kompression erhöht $d\varepsilon$, der nicht-adiabate Teil eines Kompressionsvorgangs erhöht ds .

Mit den substantiellen Ableitungen schreibt sich, wie gesehen, die Kontinuitätsgleichung:

$$-\frac{p}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{D\rho}{Dt} \right) = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

und dann lautet die obige Beziehung für ein strömendes Medium:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

und die Entropiegleichung wird unter Hinzunahme einer Bilanz der inneren Energie zu:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (2.52)$$

mit der Dissipationsfunktion Φ , wobei die rechte Seite in der Aeroakustik gleich Null ist, d.h. in der Aeroakustik ist **Isentropie** gegeben:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0.$$

Die bereits gezeigte Gleichung für die Gesamtenergie ist sehr redundant, sie enthält die Kontinuitätsgleichung, und die Gleichung für die kinetische Energie, welche sich aus der Impulsgleichung ableiten läßt und ihr gegenüber keine neue Information liefert. Die hier verwendete Entropiegleichung vermeidet diese Redundanzen.

In Form einer wirklichen Bilanz schreibt sich die Entropiegleichung:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}_{\text{Entropiestrom}} + \underbrace{\frac{1}{T} \left(\Phi + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}_{\substack{\text{Entropieerzeugung} \\ \geq 0}} \quad (2.53)$$

Kapitel 3

Finite Differenzen

Zunächst werden Ableitungen für diskret vorliegende Funktionen eingeführt und zwei Qualitätskriterien motiviert.

3.1 Die Transportgleichung

Als Beispiel für eine zu diskretisierende Gleichung dient die schon vorgestellte Transportgleichung

$$u_t + \lambda u_x = \varepsilon u_{xx}. \quad (3.1)$$

Dabei ist $u = u(x, t)$ und u_t, u_x und u_{xx} die Ableitungen nach der Zeit und dem Ort. Diese Gleichung ist einfacher, als die kompletten Navier-Stokes Gleichungen und in vielen Fällen kann die Navier-Stokes Gleichung auf ein System von Transportgleichungen zurückgeführt werden. Häufig wird die Reibung vernachlässigt, d.h. $\varepsilon = 0$, also

$$u_t + \lambda u_x = 0. \quad (3.2)$$

Tatsächlich kann in der Strömungsmechanik, trotz kleiner Reibungskoeffizienten, der Reibungsterm häufig jedoch nicht vernachlässigt werden, da dieser z.B. bei Grenzschichten und Stößen eine entscheidende Rolle spielt.

Um die Qualität der numerischen Lösung beurteilen zu können, wird die Transportgleichung auf zwei Wegen gelöst, zunächst über das schon bekannte Verfahren der Charakteristiken. Dann durch eine Zerlegung in Wellen (Fourierzerlegung). Dieses Vorgehen wird unmittelbar zu einem Qualitätskriterium für Ableitungen führen, dem Übertragungsverhalten oder der modifizierten Wellenzahl.

I) Charakteristiken Für diesen Abschnitt setzen wir $\varepsilon = 0$. Die Änderung von $u(x, t)$ ist gegeben durch das totale Differential

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Setzen wir $du = 0$ ergibt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = 0.$$

Dies entspricht der Transportgleichung (3.2), wenn $\lambda = \frac{dx}{dt}$ ist. D. h. der Wert von $u(x, t)$ ändert sich nicht ($du = 0$), wenn wir entlang einer Geraden¹ mit der Steigung $\frac{dx}{dt} = \lambda$ gehen, also $u(x = t\lambda + x_0, t) = \text{const.}$ Diese Geraden nennt man Charakteristiken. Der Begriff wird später noch vertieft.

II) Wellenzerlegung Die Transportgleichung ist so einfach, dass sie direkt gelöst werden kann. Dazu machen wir den Ansatz

$$u \sim e^{i(kx - \omega t)},$$

was einer laufenden Welle entspricht, je für Real und Imaginärteil, und setzen dies in (3.1) ein, so finden wir:

$$e^{i(kx - \omega t)}(-i\omega + i\lambda k) = e^{i(kx - \omega t)}(-\varepsilon k^2). \quad (3.3)$$

Dies löst die Transportgleichung (3.1) exakt für

$$(-i\omega + i\lambda k) + \varepsilon k^2 = 0. \quad (3.4)$$

Lösen wir nach ω auf und setzen es in den Ansatz ein, so finden wir als Lösung

$$u = e^{ik(x - \lambda t)} e^{-t\varepsilon k^2} \quad (3.5)$$

Ist $\varepsilon = 0$, bleibt die Lösung für $x - \lambda t = \text{const}$ konstant, wie vorher gefunden. Damit ist λ die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Da dies unabhängig von k ist und k als Faktor insgesamt vorgezogen werden konnte, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit unabhängig von k . Dies nennt man *Dispersionsfreiheit*. Die Anfangsbedingung $u(x, t_0)$ kann in Wellen zerlegt werden (Fouriertransformation):

$$u \sim \hat{u}_k e^{i(kx - \omega t)}.$$

Die Lösung ist dann die Überlagerung, also die Summe von Termen (3.5) mit verschiedenen k .

$$u = \hat{u}_k e^{ik(x - \lambda t)} e^{-t\varepsilon k^2}.$$

Da sich die Wellen zu verschiedenen k mit gleicher Geschwindigkeit ausbreiten, bleibt die ursprüngliche Form für alle Zeiten erhalten. Dispersionsfreiheit garantiert also das Formen unverändert transportiert werden. Somit ist die Dispersionsfreiheit eine direkte Konsequenz oder Ursache der Lösung

¹Wenn $\lambda = \text{const}$

der Transportgleichung als reine Verschiebung. Bricht umgekehrt ein numerisches Verfahren die Dispersionsfreiheit, werden Strukturen beim Transport verändert.

Für $\varepsilon > 0$ wird die Lösung mit der Zeit immer kleiner. Kleine Wellenlängen, d.h. große Wellenzahlen k werden schneller gedämpft. Die zweite Ableitung wirkt also als Dämpfung. Ist $\varepsilon < 0$, würde es ein exponentielles Anwachsen geben.

3.2 Diskretisierung der Transportgleichung im Raum

Wir werden in diesem Kapitel fast immer von äquidistanten Gittern ausgehen. Die Berechnung auf gestreckten Gittern erfolgt durch eine Abbildung von diesen auf äquidistante Gitter, was im zweiten Teil der Vorlesung genauer erläutert wird. Daher wird hier nur sehr kurz, soweit nötig, in gestreckte Gitter eingeführt.

3.2.1 Transformation der Transportgleichung

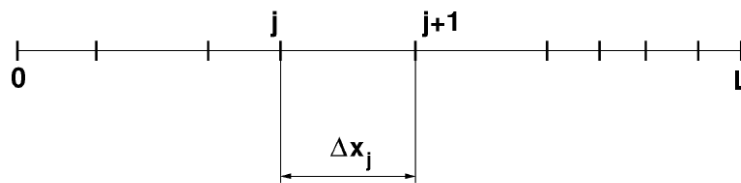


Abbildung 3.1: Diskretisierung mit variablem Knotenabstand

Die Diskretisierung erfolgt, wie in Abb. 3.1 gezeigt, auf einem Gitter, das aus Knoten j (Punkten auf der x -Achse) mit zunächst willkürlich bestimmten, unter Umständen unterschiedlichen Abständen Δx_j besteht. Bei nicht-orthogonalen Gittern treten, wie wir sehen werden, häufig Ausdrücke der Form $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ auf. Dabei ist $\xi(x, t)$ eine das Gitter beschreibende Koordinatentransformation. Diese sehr allgemeine Verteilung der Knoten und damit der Δx_j führt insbesondere in der Akustik zu Problemen da bei der Verteilung der Δx_j teilweise keine Differenzierbarkeit der Koordinatentransformation gegeben ist und Wellen an dieser Unstetigkeit reflektiert werden können. Abb. 3.2 zeigt einen solchen Sprung in der Gitterweite. Wir werden später sehen, dass das Gitter die Dispersionsrelation beeinflusst. Eine Änderung im Gitter wirkt also wie ein geändertes Medium und entsprechend wird an der Grenze wie an einer Luft-Glas Grenze reflektiert.

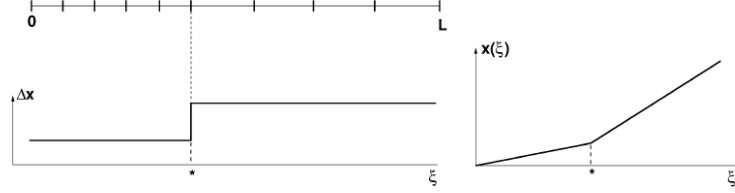


Abbildung 3.2: Sprung in der Verteilung der Knotenabstände

Daher wird eine glatte Transformation $\xi = \xi(x)$ bevorzugt (s. Abb. 3.3).

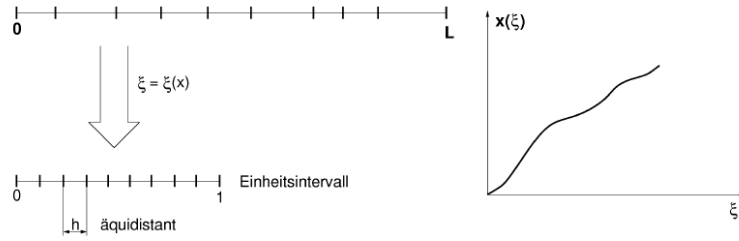


Abbildung 3.3: Transformation der Verteilung auf das Einheitsintervall

Etwas allgemeiner soll

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, t) \\ \tau = t \end{cases}$$

mit einem zeitabhängigen Gitter betrachtet werden. Die Zeit soll nicht vom Ort abhängen, wie dies bei relativistischen Berechnungen notwendig wäre. Die transformierte Transportgleichung $u(\xi, \tau)_t + \lambda u(\xi, \tau)_x = 0$ lautet dann nach der Kettenregel

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.6)$$

und geht mit $\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$ über in

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \quad (3.7)$$

Sei nun

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) =: \tilde{\lambda}$$

und damit

$$u_\tau + \tilde{\lambda} u_\xi = 0. \quad (3.8)$$

Es genügt demnach, Gl. (3.8) auf dem Intervall $\Omega = [0, 1]$ zu betrachten; allerdings darf dabei nicht vergessen werden, dass $\tilde{\lambda}$ von x, t abhängt. Insbesondere ist $\tilde{\lambda}$ im allgemeinen Fall von der Lösung abhängig.

Die Diskretisierung erfolgt nach der Transformation ξ auf einem äquidistanten Gitter mit Maschenweite $h = \frac{1}{N-1}$ auf dem Intervall von 0 bis 1 mit N Stützstellen.

Sei jetzt u_j der Vektor der Werte u an allen Knoten $j = 1, \dots, N$. Die diskrete Form der Transportgleichung sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{du_j}{dt} + \lambda M_{jk} u_k = 0. \quad (3.9)$$

Dabei steckt die Raumdiskretisierung in der Matrix M_{kj} , die $\frac{du_j}{d\xi}$ als lineare Funktion von u_j approximiert.

3.2.2 Taylorentwicklung der Größe u

Die Größe u kann unter der Voraussetzung ausreichender Differenzierbarkeit (d.h. es sind z.B. keine Stöße vorhanden) folgendermaßen in einer Taylorreihe um u_j (am Knoten j) entwickelt werden:

$$u_{j+1} = u_j + hu'_j + \frac{h^2}{2}u''_j + \frac{h^3}{6}u'''_j + \dots \quad (3.10)$$

Um u'_j zu approximieren, formen wir Gl. (3.10) um und erhalten die **Vorwärtsdifferenz**

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \frac{h}{2}u''_j - \frac{h^2}{6}u'''_j - \dots \quad (3.11)$$

Der erste Term auf der rechten Seite in (3.11) ist eine Approximation für u'_j mit einer lokalen Fehlerordnung von 1. Der erste Fehlerterm ist demnach $-\frac{h}{2}u''_j$ und das Verfahren von "1. Ordnung" (in h).

Bei dieser Approximation hat die Matrix M_{kj} die Form

$$M = \begin{bmatrix} \dots & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & \\ & & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1/h & 1/h & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & & \dots & & \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & \dots \end{bmatrix}.$$

Es muss beachtet werden, dass bspw. der zweite Fehlerterm zwar mit h^2 kleiner wird, aber über die darin ebenfalls vorkommende Ableitung u''_j ist noch nichts ausgesagt, d.h. es ist noch nicht sichergestellt, dass der (hier) in

h linearer Term ihm gegenüber dominant ist. Die Frage ist, welche Größenordnung für die unterschiedlichen Fehlerterme zu erwarten ist:

Mit dem momentan leistungstärksten Rechner werden Punktzahlen von der Größenordnung von 1000^3 behandelt (1000 pro Koordinatenrichtung), d.h. (hier in einer Koordinatenrichtung) es kommt für $-\frac{h}{2}$ bereits zu einem Fehler von der Größenordnung $\frac{1}{1000}$. Mit weniger leistungsfähigen Rechnern kann dieser Term auch eine Größenordnung größer sein. Dieser Fehler ist uns allerdings zu groß, eine höhere Fehlerordnung wird angestrebt.

Zur Untersuchung der Ableitungen u_j'', u_j''' wird der Ansatz $u \propto \sin(kx)$ benutzt; variiert man k , so bleibt der Sinus immer von der Größenordnung Eins: $\sin(kx) = O(1)$; durch die Ableitung tritt davor k^2 bzw. k^3 auf.

Das bedeutet für den Term $\frac{h}{2}u_j''$ eine Größenordnung von $\frac{h}{2}k^2$, sowie für $\frac{h^2}{6}u_j'''$ eine Größenordnung von $\frac{h^2}{6}k^3$.

Wenn nun der Term 1. Ordnung dominieren soll, dann muss gelten, dass $\frac{h}{2}k^2 \gg \frac{h^2}{6}k^3$ und somit

$$kh \ll 3. \quad (3.12)$$

Die Bedeutung der Wellenzahl k ist in Abb. 3.4 dargestellt. Für $k = 0$ ist die betrachtete Größe eine Konstante, für $k = 1$ liegt eine Wellenlänge zwischen 0 und 2π , für $k = 2$ zwei Wellenlängen usw. Abb. 3.4 zeigt auch die maximale Auflösung, die mit einer gegebenen Punkteverteilung erzielt werden kann.

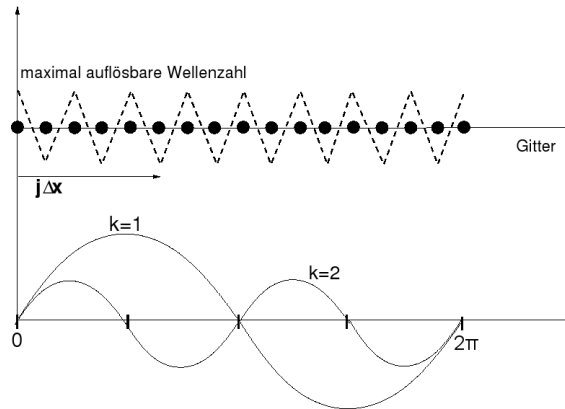


Abbildung 3.4: Bedeutung der Wellenzahl und maximal erzielbare Auflösung auf gegebenem Gitter

Für $k \cdot 2h = 2\pi$ bzw. $kh = \pi$ brauchen wir gerade zwei Gitterpunkte auf der minimal darstellbaren Wellenlänge und für die größte Wellenzahl k dagegen fordern wir für $kh = \frac{\pi}{2}$ bereits vier Gitterpunkte pro Wellenlänge.

Gleichung (3.12) sagt aus, dass kh deutlich unter 3 liegen muß, d.h. mindestens zwei bis drei Größenordnungen darunter, um ein gutes Verhalten der Diskretisierung zu erreichen. Dies bedeutet: Das Verhalten ist schlecht für hohe Wellenzahlen, und nur gut für niedrige Werte von k . Ein gutes Ver-

halten bei hohen wie auch niedrigen Wellenzahlen wird aber angestrebt. Die größte auftretende Wellenzahl mit zwei Punkten aufzulösen, führt dann zu keinem guten Verhalten, vier Punkte verbessern es bereits.

3.2.3 Linearkombination der Taylorentwicklungen von u

Beispiel für einen Dreipunkte-Differenzenstern - Linearkombination zweier Taylorreihen

Zusätzlich zu Gl. (3.10) kann die Entwicklung von u auch unter Einbeziehung des links vom Knoten j liegenden Punktes erfolgen:

$$u_{j-1} = u_j - hu'_j + \frac{h^2}{2}u''_j - \frac{h^3}{6}u'''_j + \dots \quad (3.13)$$

Dabei ist

$$u'_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} + \frac{h}{2}u''_j - \frac{h^2}{6}u'''_j + \dots \quad (3.14)$$

die sog. **Rückwärtsdifferenz**. Nun wird die Linearkombination aus Gl. (3.13) und (3.10) gebildet: $u_{j+1} - u_{j-1}$. Damit fällt u_j am Knoten j selbst heraus, sowie der Term $\frac{h^2}{2}u''_j$ und weitere Terme in geraden Potenzen von h . Es bleibt also beim Umformen nur noch ein Fehlerterm 2. Ordnung stehen:

$$u_{j+1} - u_{j-1} = 2hu'_j + \frac{2h^3}{6}u'''_j + \dots, \quad (3.15a)$$

$$u'_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}u'''_j + O(h^4). \quad (3.15b)$$

Gl.(3.15b) ist ebenfalls eine Approximation der Ableitung u'_j , ist aber gegenüber Gl. (3.11), die nur zwei Punkte benutzt, durch einen Dreipunkte-Differenzenstern (stencil) verbessert. Die Verwendung von mehr Punkten bedeutet mehr numerischen Aufwand, aber es ist nun, um die Dominanz des Fehlerterms niedrigster Ordnung in h sicherzustellen, zu fordern (Rechnung genau wie oben):

$$kh \ll \sqrt{20}, \quad (3.16)$$

was günstiger ist als $\ll 3$, wie oben.

Erweiterung auf eine Linearkombination beliebig vieler Taylorentwicklungen

Jetzt soll die Linearkombination einer Anzahl von Taylorentwicklungen der Größe u gebildet werden, und zwar beginnend bei der Gleichung für den am weitesten links liegenden der benutzten Knoten, $j - q$, und endend bei dem am weitesten rechts liegenden dieser Knoten, $j + r$.

Dann lautet die Approximation der Ableitung u'_j

$$u'_j = \sum_{m=-q}^r \alpha_{j+m} \cdot u_{j+m} + O(h^p), \quad (3.17)$$

wobei in dieser Gleichung die u_m in ihrer Darstellung als Taylorreihe einzusetzen sind.

Beispiel für Drei-Punkte-Stern rechtsseitig (u_j, u_{j+1}, u_{j+2}) Man setzt hierzu die Gleichung (3.17) unter Benutzung der bereits gesehenen Taylorentwicklungen an, wobei die Koeffizienten α_{j+m} zunächst noch nicht bekannt sind. Wegen der Translationsinvarianz wird $\alpha_{j+m} \equiv \alpha_m$ angenommen:

$$\begin{aligned} u'_j &= \alpha_0 \cdot u_j + \alpha_1 \left(u_j + hu'_j + \frac{h^2}{2} u''_j + \dots \right) \\ &\quad + \alpha_2 \left(u_j + 2hu'_j + \frac{(2h)^2}{2} u''_j + \dots \right) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) \cdot u_j + (\alpha_1 h + \alpha_2 2h) u'_j + \left(\alpha_1 \frac{h^2}{2} + \alpha_2 \frac{2^2 h^2}{2} \right) u''_j + \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

(die Taylorentwicklung für u_j um u_j lautet einfach $u_j = u_j$).

Gesucht ist eine Approximation für u'_j ; ein Koeffizientenvergleich in (3.18) liefert also die an die α_m zu stellenden Bedingungen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad (3.19a)$$

$$\alpha_1 h + 2\alpha_2 h = 1, \quad (3.19b)$$

$$\alpha_1 \frac{h^2}{2} + \alpha_2 \frac{4h^2}{2} = 0. \quad (3.19c)$$

Mehr als diese drei Gleichungen können wir für die drei unbekannten Koeffizienten nicht aufstellen. Es ergibt sich $\alpha_0 = -\frac{3}{2h}$, $\alpha_1 = \frac{2}{h}$ und $\alpha_2 = -\frac{1}{2h}$.

Mit dieser Methode sind beliebige Approximationsverfahren erzeugbar; angenommen, man würde in obigem Beispiel den Punkt $j+3$ noch mit hinzunehmen, dann hätte man zwei Möglichkeiten, zwischen denen man sich entscheiden könnte:

- entweder: Eliminieren des Fehlertermes 2. Ordnung durch eine 4. Gleichung im obigen Gleichungssatz (und Ergänzen der obigen Gleichungen um den 4. Koeffizienten), oder
- Aufstellen einer 4. Gleichung mit dem Ziel, das **Übertragungsverhalten** (d.h. das Verhalten der Approximation von u'_j über alle Wellenzahlen k , wie auch bereits weiter oben erwähnt) zu optimieren.

Dies bedeutet auch: Das Augenmerk ist nicht nur auf eine Erhöhung der Fehlerordnung zu richten, sondern auch auf das Übertragungsverhalten. In dieser Wahl liegt eine Möglichkeit zur Optimierung eines Verfahrens.



Anmerkung zum Übertragungsverhalten Das Übertragungsverhalten ist gut, wenn die diskrete Dispersionsrelation möglichst nahe an der Dispersionsrelation liegt, die aus den exakten Gleichungen (z.B. den Eulergleichungen, die nicht dispersiv sind, d.h. Phasengeschwindigkeit = Gruppengeschwindigkeit) folgt.

3.2.4 Übertragungsfunktion einer Diskretisierung

Es geht nun darum, zu untersuchen, wie sich ein Diskretisierungsverfahren für unterschiedliche Wellenzahlen verhält; wie weiter oben gesehen, dominiert der Term niedrigster Ordnung in der Gitterweite h nur, wenn die Wellenzahl unterhalb eines bestimmten Wertes liegt. Hingegen werden aber im Normalfall hochfrequente Lösungen gesucht, über die die Ordnung des Verfahrens allein noch keine ausreichende Aussage erlaubt.

Vorbemerkung: Wellenzahlen, Aliasfehler

Im weiteren wird die Wellenzahl ein zentraler Begriff, daher soll hier kurz an sie erinnert werden.

Über die Periode von Funktionen kann man die Wellenzahl angeben. Dazu werden die Kreisfunktion, oder da es in Rechnungen meist praktischer ist, die komplex Exponentialfunktion verwendet

$$y(x) = \exp(\pm ikx) = \cos(kx) \pm i \sin(kx) \quad (3.20)$$

mit der *Wellenzahl* k . Gehen wir von einem Definitionsbereich $0 \leq x \leq L$ aus und fordern Periodizität am Rand $y(0) = y(L)$

$$\exp(0) = 1 = \exp(ikL) \quad (3.21)$$



was mit $ikL = n2\pi$ erfüllt ist, wobei n eine beliebige ganze Zahl sei, also auch negativ. Also ist

$$k \equiv k_n = \frac{2\pi}{L}n. \quad (3.22)$$

Die Interpretation ist einfach, es gibt n Perioden in L . Die Wellenlänge ist $\lambda = L/n$, also $k\lambda = 2\pi$. Realteile von y sind für verschiedene k in (3.5) gezeigt.

Bisher haben wir die Diskretisierung noch nicht beachtet. In der Simulation werden nur diskrete Werte $x_j = hj$ mit $h = \Delta x$, $j = 1, \dots, N$ betrachtet, wobei $N\Delta x = L$.



$$y_j = \exp(i2\pi \frac{n}{N}j) \quad (3.23)$$

Die Periodizität ist damit automatisch erfüllt, da mit $j' = j + N$

$$y_{j'} = \exp(i2\pi \frac{n}{N}(j + N)) = y_j. \quad (3.24)$$

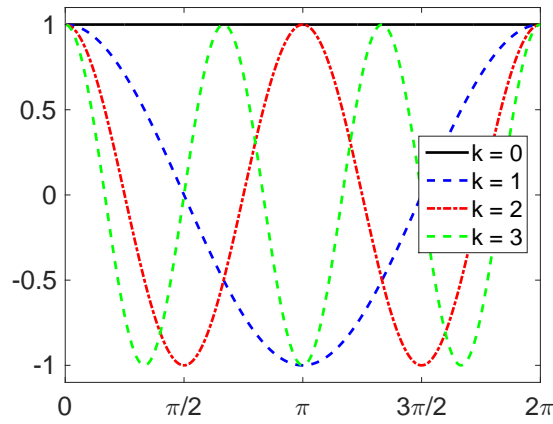


Abbildung 3.5: Verschiedene Wellenzahlen

Entsprechend kann man die Wellenzahl k_n mit $n' = n + N$ betrachten und findet

$$y_j = \exp(i2\pi \frac{n+N}{N} j) = \exp(i2\pi \frac{n}{N} j) \exp(i2\pi(j)) = y_j, \quad (3.25)$$

d.h. die Funktionen unterscheiden sich *an den Gitterpunkten* nicht. Ein Beispiel ist Abb. 3.6. Dieses ist der Aliasfehler, d.h. verschiedenen Wellenzahlen

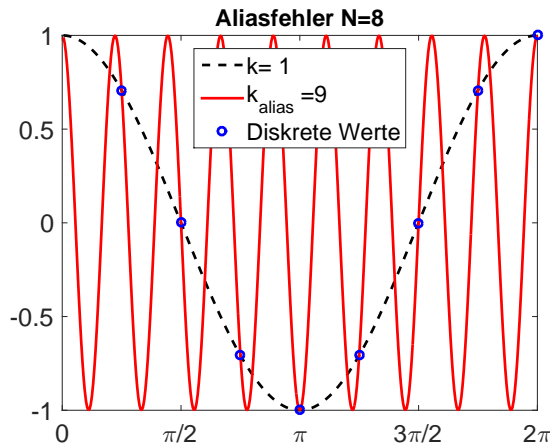


Abbildung 3.6: Unterschiedliche Wellenzahlen sind im Diskreten nicht immer zu unterscheiden, der Aliasfehler.

sind auf einem Gitter nicht zu unterscheiden. Werden durch nichtlineare Terme Moden außerhalb des aufgelösten Bereichs erzeugt können diese falsche Beiträge zu aufgelösten Moden liefern.

Auf N Gitterpunkten können also nur N Moden dargestellt werden. Wegen des Aliaseffekts gibt es eine Wahlfreiheit, wie die Moden bezeichnet werden, die z.B. entsprechend der Fouriertransformation symmetrisch um $k = -(N-1)/2, \dots, 0, (N-1)/2$ sind.

Werden reelle Funktionen durch komplexe Exponentialfunktion dargestellt (also Fourier-transformiert) sind die Amplituden $\hat{u}_k^* = \hat{u}_{-k}$, was bei der (modifizierten) Wellenzahl der Ableitung wieder zu sehen ist.

Periodische Analyse

Sei eine periodische harmonische Funktion

$$u \sim e^{ikx}$$

(eine stehende Welle) gegeben. Diese Funktion soll nun mit einem gegebenen Diskretisierungsverfahren diskretisiert werden. Dabei ist der Bereich der darstellbaren Wellenzahlen begrenzt. Insbesondere können, wie in Abb. 3.4 gezeigt, nur Wellenzahlen k kleiner als $\frac{\pi}{h}$ ("Zick-Zack-Mode") auf diesem Gitter der Gitterweite h untergebracht werden.

Das Rechengebiet soll die Länge L haben; das Gitter besitzt N Knoten $x_j = j(L/N) = jh$, auf denen die obige harmonische Funktion mit

$$k_n = \frac{2\pi}{L}n \quad (3.26)$$

dargestellt wird. Dabei ist

$$j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.27)$$

$$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.28)$$

denn mit $n = \frac{N}{2}$ bekommt man $k = \frac{2\pi \cdot N}{2L} = \frac{\pi}{h}$. Es dürfen daneben auch keine Wellenzahlen kleiner als $\frac{2\pi}{L}$ eingesetzt werden, denn dann wird auf dem Rechengebiet nicht mehr die gesamte Wellenlänge dargestellt, und am Rand, z.B. bei $x = L$, geht die Differenzierbarkeit und ggf. auch die Stetigkeit der periodischen Funktion verloren.

Periodische Analyse eines symmetrischen FD-Verfahrens 2.Ordnung Benutzt man zur Diskretisierung ein Finite-Differenzen-Verfahren 2. Ordnung (zentrale Differenzen), dann kommt für die Approximation der Ableitung am Punkt j :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_j &= \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = \frac{1}{2h} \cdot \left(e^{\frac{2\pi i n (j+1)}{N}} - e^{\frac{2\pi i n (j-1)}{N}} \right) \\ &= e^{\frac{2\pi i n j}{N}} \cdot \left[\frac{1}{2h} \cdot \left(e^{\frac{2\pi i n}{N}} - e^{-\frac{2\pi i n}{N}} \right) \right] \\ &= u_j \cdot i \frac{\sin(\frac{2\pi n}{N})}{h} = i \frac{\sin(kh)}{h} u_j, \end{aligned} \quad (3.29)$$

da $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $x = j \cdot h$, was auf $ikx = \frac{i2\pi n}{L} \cdot jh = \frac{i2\pi n}{L} \cdot j \frac{L}{N} = \frac{i2\pi n}{N} \cdot j$ führt.

Die exakte Ableitung der harmonischen Funktion $u_j \sim e^{ikx}$ ergibt sich auf analytischem Weg zu

$$u'_j \sim ike^{ikx} = ik u_j. \quad (3.30)$$

Wir definieren ein k' (modifizierte Wellenzahl) derart, dass gilt

$$k'h := \sin(kh) \quad (3.31)$$

bzw.

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_j \approx i \frac{\sin(\frac{2\pi n}{N})}{h} u_j =: ik' u_j. \quad (3.32)$$

Der Zusammenhang ist in Abb. 3.7 dargestellt. In diesem Diagramm stellt die Winkelhalbierende die exakte Lösung $k' = k$ dar. Man erkennt, dass nur für kleine kh , im niederfrequenten Bereich, der durch die numerische Approximation bedingte Fehler klein ist.

Die 1. Konsistenzbedingung erzwingt, dass die effektive Wellenzahl für $k = 0$ Null ist. Die zweite Konsistenzbedingung führt dazu, dass die Steigung im Ursprung der exakten Wellenzahl entspricht.

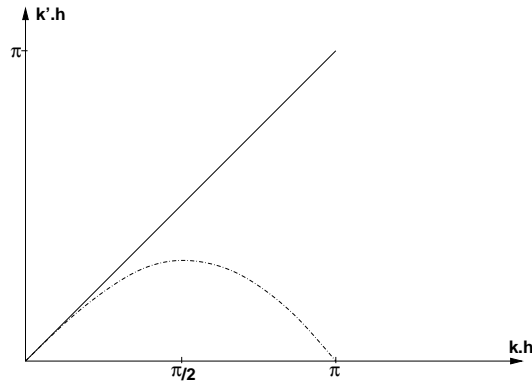


Abbildung 3.7: Übertragungsfunktion $k'h$ als Funktion von kh

Die Lösung der dämpfungsfreien Transportgleichung (3.2) war gegeben durch $u \sim e^{i(kx - \omega t)}$ und ist exakt für

$$-\omega + \lambda k = 0. \quad (3.33)$$

Auflösen nach ω und Einsetzen in den Ansatz ergibt:

$$u = e^{ik(x - \lambda t)} \quad (3.34)$$

Nun wird die exakte Differentiation durch eine numerische ersetzt, und (3.33) geht über in

$$-\omega + \lambda k' = 0. \quad (3.35)$$

Widerum Auflösen nach ω und Einsetzen in den Ansatz ergibt nun:

$$u = e^{ik(x - \frac{\lambda k'}{k} t)} \quad (3.36)$$

Eine Welle der Wellenzahl k bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit, also der Geschwindigkeit mit der sich diese einzelne Welle durch ein Gebiet fortbewegt. Numerisch ist diese also $\lambda' = \lambda \frac{k'}{k} = \frac{\omega k'}{k^2}$ und von der exakten Phasengeschwindigkeit $\lambda = \frac{\omega}{k}$ verschieden.

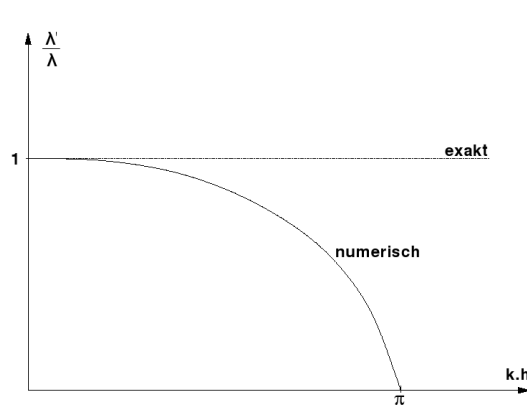


Abbildung 3.8: Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten über kh

Das Verhalten der Phasengeschwindigkeiten im numerisch approximierten und im exakten Fall zeigt Abb. 3.8. Die Welle läuft im numerischen Fall mit zunehmender Wellenzahl immer langsamer und langsamer als die exakte Lösung (siehe auch Abb. 3.9). Dies bedeutet auch, dass die Energie, die in dem sich fortbewegenden Wellenpaket steckt, in der Approximation der analytischen Lösung hinterherläuft. Die Lösung ist also *nicht mehr* dispersionsfrei.

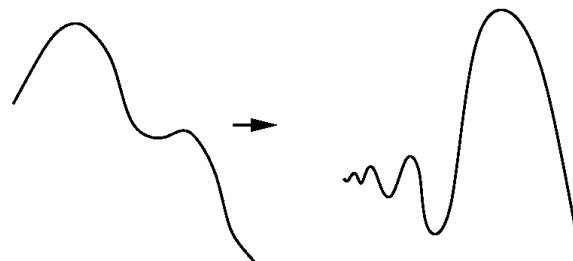


Abbildung 3.9: Geringere Phasengeschwindigkeit für höhere Wellenzahlen



Periodische Analyse nichtsymmetrischer Verfahren Die letzten beiden Abschnitte benutzten eine symmetrische Diskretisierung. Ist das Verfahren asymmetrisch in Bezug auf den Knoten, an dem die Ableitung der Größe u approximiert wird, dann wird aus der Differenz zweier e-Funktionen, die rein imaginär ist (s.o.) ein Term, in dem auch ein Realteil auftritt.

Beispiel:

Mit $u_j = \exp(ikx_j)$

$$\left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = \frac{1 - e^{-ikh}}{h} e^{ikx_j}. \quad (3.37)$$

Die modifizierte Wellenzahl lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} ik' &= \frac{1 - e^{-ikh}}{h} = i \frac{\sin(kh)}{h} + \frac{1 - \cos(kh)}{h} \\ k' &= \frac{\sin(kh)}{h} - i \frac{1 - \cos(kh)}{h} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Der Realteil von k' entspricht dem der zentralen Ableitung.

Abbildung 3.10 zeigt das Verhalten für ein Verfahren mit einem nicht-symmetrischen Vier-Punkt-Stern (u_{j-1} , u_j , u_{j+1} , u_{j+2}). Die Steigung der Kurve für die Approximation ist bzgl. des Realteils von $k'h$ bei $kh = 0$ richtig ($= 1$), wie im symmetrischen Verfahren.

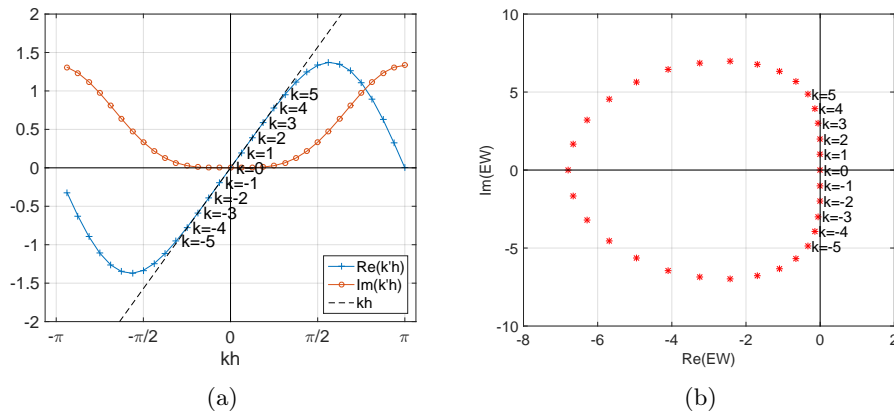


Abbildung 3.10: (a) kh (exakt) bzw. Imaginär- und Realteil von bzw. $k'h$ (approximiert) im Fall einer nichtsymmetrischen Diskretisierung (b) Die Eigenwerte (EW) der selben Ableitungsmatrix

Vergleich mit einer Transportgleichung mit Reibungsterm Es sei nun die neue Transportgleichung

$$u_t + \lambda u_x = \varepsilon \cdot u_{xx} \quad (3.39)$$

gegeben, wobei die rechte Seite einen Viskositätsterm darstellen kann. Setzt man eine sich fortbewegende Welle der Form

$$u \sim e^{i(kx - \omega t)}$$

in (3.39) ein, so findet man die Bedingung, unter der diese Welle eine Lösung von (3.39) ist:

$$-i\omega + i\lambda k = -\varepsilon k^2 \quad (3.40a)$$

$$-\omega + \lambda k = i\varepsilon k^2 \quad (3.40b)$$

Setzen wir nun (3.38) in die numerische Lösung ohne Reibungsterm (3.35) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} -\omega + \lambda \left(\frac{\sin(kh)}{h} - i \frac{1 - \cos(kh)}{h} \right) &= 0 \\ -\omega + \lambda \cdot \frac{\sin(kh)}{h} &= i\lambda \frac{1 - \cos(kh)}{h} \\ -\omega + \lambda \cdot \operatorname{Re}(k') &= i\lambda \cdot \operatorname{Im}(k') \end{aligned} \quad (3.41)$$

Entwickelt man den Imaginärteil von k' für kleine h

$$\operatorname{Im}(k') = \frac{1 - \cos(kh)}{h} \approx \frac{1}{2} h k^2$$

sieht man, dass der Imaginärteil für nicht zu große kh dem Dämpfungsterm von (3.40b) entspricht, falls $\lambda > 0$. Hohe Wellenzahlen k werden bei der Approximation stärker gedämpft als niedrige (numerische Dissipation). Eine zu große numerische Dissipation ist nicht erwünscht. Es wäre allerdings problematischer, wenn das Diskretisierungsverfahren für eine Anfachung anstelle einer Dämpfung bei bestimmten Wellenzahlen sorgen würde, was hier für $\lambda < 0$ der Fall wäre. Die Entwicklung würde in etwa wie in Abb. 3.11 ablaufen. Es käme zu einer künstlichen Verstärkung der hochfrequenten Anteile. Je nach Vorzeichen von λ ist eine Rechts- oder Linksseite Ableitung zu bilden, um eine Dämpfung zu erreichen. Da λ in der Strömungsmechanik mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit zusammenhängt, muss dann je nach Vorzeichen der Geschwindigkeit die Ableitung gebildet werden. Dieses Vorgehen nennt man Aufwind oder Upwind Ableitung. Später wird gezeigt, wie numerische Dissipation hoher Wellenzahlen zur numerischen Stabilisierung des Zeitschritts verwendet werden kann.

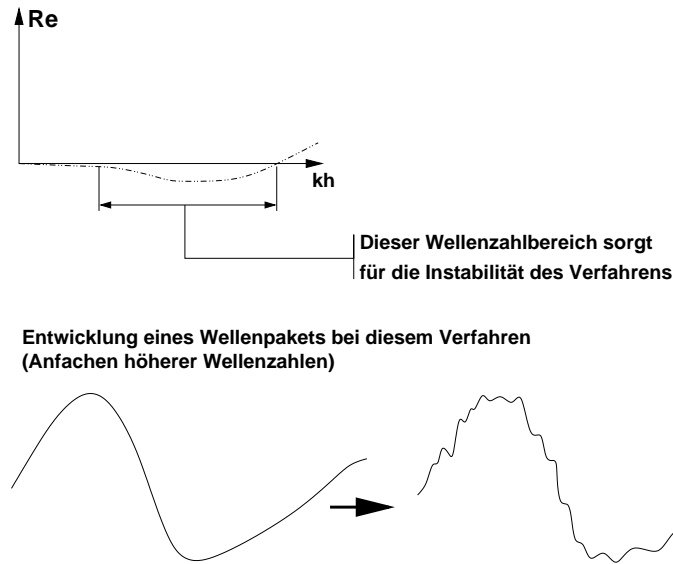


Abbildung 3.11: Anfachen eines Wellenzahlbereichs

In den bisherigen Fällen wurden die Ansatzfunktionen $u_j = \exp(ikx_j)$ durch die Ableitungsmatrix nicht verändert, nur die modifizierte Wellenzahl kam als Vorfaktor hinzu.

$$Du = ik'u \quad (3.42)$$

Dies ist immer dann gegeben wenn alle Gitterpunkte gleich behandelt werden, also es insbesondere keine Randpunkte gibt. Die Gleichung (3.42) hat die Form einer Eigenwertgleichung mit Eigenwerten ik' der Ableitungsmatrix D . Statt der modifizierten Wellenzahl k' können also auch die Eigenwerte (EW) von D ($= ik'$), d.h. das Spektrum, betrachtet werden. Das Spektrum von (3.37) ist in Abb. 3.10b zu sehen. Das exakte ik sind äquidistante Werte auf der Imaginären Achse. Die Dämpfung, also der Realteil der Eigenwerte (was dem Imaginärteil von k' mit umgekehrtem Vorzeichen entspricht, wegen $EW = ik'$) ergibt eine Abweichung von der Imaginären Achse. Durch das Abfallen von $\text{Im}(k')$ auf Null bei $kh = \pi$ schließt sich das Spektrum zu einer Ellipse.

Verbesserung der Übertragungseigenschaften eines Finite-Differenzen-Verfahrens (Tam & Webb 1993)

Ziel ist es sicherzustellen, dass mit dem Verfahren hochfrequente Vorgänge (auch z.B. kleine Wirbel) behandelt werden können. Für ein gutes Übertragungsverhalten bei höheren Wellenzahlen muss die Übertragungskurve der

Geraden für die exakte Lösung möglichst weit folgen. Weiterhin wird versucht den numerischen Aufwand, der für das Verfahren betrieben werden muss, zu begrenzen, d.h. die Anzahl an erforderlichen Punkten (die Breite des Differenzensterns) gering zu halten. Das Problem ist dabei, dass Verfahren hoher Ordnung der Gerade weit folgen, aber viele Punkte benötigen.

Es wird die Annahme getroffen, dass mindestens vier Punkte zur Darstellung einer vollen Schwingungsperiode benutzt werden. Dann verlangen wir, dass die Übertragungskurve auf jeden Fall für $kh < \frac{\pi}{2}$ (größte Wellenzahl $\frac{\pi}{2h}$) der Gerade möglichst gut folgen soll.

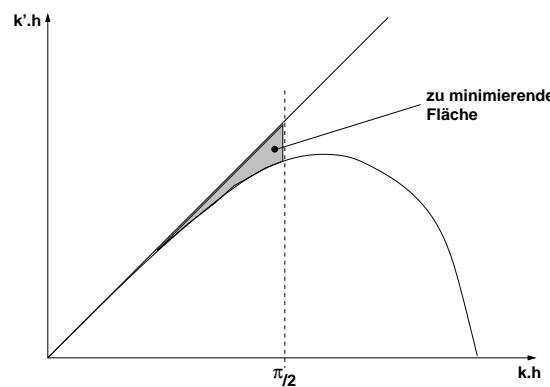


Abbildung 3.12: Minimierung der Fläche zwischen Übertragungskurve und Gerade der exakten Lösung

Definition eines Zielfunktional (Siehe Abb. 3.12)

Die Fläche zwischen der Kurve und der Winkelhalbierenden in dem interessierenden Bereich ist ein Maß dafür, wie gut sich die Übertragungskurve an die Gerade anschmiegt. Um die Integration zu erleichtern, wird Punktsymmetrie der Kurve gefordert und über den negativen Ast mitintegriert. Das Zielfunktional (nach Tam), das es zu minimieren gilt, lautet dann

$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |kh - k'h|^2 d(kh). \quad (3.43)$$

Anwendung auf ein Zentralfdifferenzenverfahren Wir nehmen zum Beispiel einen zentralen Differenzenstern an; die benutzten Taylorentwicklungen sind:

$$u_{j\pm l} = u_j \pm u'_j \cdot lh + \frac{u''_j \cdot (lh)^2}{2} \pm \frac{u'''_j \cdot (lh)^3}{6} + \dots \pm \dots \quad (3.44)$$

Verwendet wird Gl. (3.17) in abgewandelter Form:

$$u_{x,j} = \sum_{l=1}^p \alpha_l (u_{j+l} - u_{j-l}). \quad (3.45)$$

Durch die Subtraktion fallen alle geraden Ableitungen in (3.44) heraus.

Es werden nun drei Koeffizienten verwendet, d.h. der Differenzenstern besitzt sieben Punkte; für die Koeffizienten können drei Gleichungen angegeben werden:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) \cdot 2hu'_j = u'_j \quad (3.46a)$$

$$(\alpha_1 + 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3) \cdot 2 \frac{h^3 u'''_j}{6} = 0 \quad (3.46b)$$

$$(\alpha_1 + 2^5\alpha_2 + 3^5\alpha_3) \cdot 2 \frac{h^5 u''''_j}{120} = 0. \quad (3.46c)$$

Das erzeugte Verfahren ist dann maximal von 6. Ordnung bei Ausnutzung der drei Gleichungen.

Allerdings können wir auch auf die letzte Gleichung verzichten (und erhalten damit ein Verfahren 4. Ordnung) und stattdessen die Forderung aufstellen, dass das Zielfunktional (3.43) sein Minimum annehmen soll (möglichst geringe Abweichung von $k'h$ von kh im Bereich $kh < \pi/2$).

Es sei nun wieder, wie bereits zuvor,

$$u = e^{ikx}$$

mit $x_j = j \cdot h$. Damit ergibt sich für die Differenzen:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+l} - u_{j-l}}{2} &= \frac{e^{ik(j+l)h} - e^{ik(j-l)h}}{2} = \frac{e^{\frac{ikh l}{N}} - e^{-ikh l}}{2} u_j \\ &= i \sin(kh \cdot l) \cdot u_j, \end{aligned} \quad (3.47)$$

und das Zielfunktional schreibt sich mit $ik'h = i \sum_{l=1}^p \alpha_l \sin(l \cdot kh)$

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |kh - (\alpha_1 \sin(kh) + \alpha_2 \sin(2kh) + \alpha_3 \sin(3kh))|^2 d(kh). \quad (3.48)$$

Nun soll eine der Konsistenzgleichungen (3.46a)-(3.46c), die zum Verschwinden der Fehlerterme führen, zugunsten der Forderung

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (3.49)$$

weggelassen werden, d.h. wir nehmen bspw. an $E = E(\alpha_1)$ und minimieren E nach α_1 , wodurch die dritte Gleichung geliefert wird. Um damit weiterhin die

bestmögliche Fehlerordnung zu erreichen, wird folglich, wie bereits erwähnt, stets die letzte Konsistenzgleichung weggelassen.

Mit den ersten beiden Gleichungen (3.46a) und (3.46b) sowie (3.49) ergeben sich die drei Koeffizienten zu

$$\alpha_1 = 0,79927 \quad (3.50)$$

$$\alpha_2 = -0,18941 \quad (3.51)$$

$$\alpha_3 = 0,02652. \quad (3.52)$$

(Beachte: Das Minimum ist recht flach, deswegen macht es eigentlich nicht viel, etwas von diesen Werten abzuweichen, aber die verwendeten Konsistenzbedingungen müssen erfüllt sein! Dementsprechend sollte man gerundete Koeffizienten daraufhin kontrollieren, ob sie die übrigen Konsistenzgleichungen erfüllen).

3.3 Kompakte Verfahren zur Diskretisierung im Raum

Durch Kombination von Taylorreihen, etwa

$$u'_j = \sum_{p=-a}^b \alpha_{j+p} \cdot u_{j+p}, \quad (3.53)$$

können, wie weiter oben bereits gesehen, Diskretisierungsverfahren höherer Fehlerordnung gefunden werden. Dabei nimmt der numerische Aufwand mit der Breite des Differenzensterns, d.h. mit der Zahl an verwendeten Punkten, zu.

Das Ziel der **kompakten Verfahren** ist es, dieselbe Fehlerordnung auf einem erheblich kleineren Differenzenstern zu erreichen. In der bereits zuvor benutzten Gl. (3.53) wird eine Anzahl möglicher Approximationen der Ableitung u'_j an der Stelle j aufaddiert. Bei den kompakten Verfahren sollen nun auch die Approximationen an den Nachbarorten des Punktes j (d.h. $j \pm 1$ etc.) addiert werden; dies läuft darauf hinaus, auch die Ableitungen in der Nachbarschaft des Punktes j zu berücksichtigen, denn sie hängen mit der Ableitung bei j zusammen (dies folgt aus der Differenzierbarkeit einer Funktion, die einen physikalischen Vorgang beschreibt, vgl. Abb. 3.13).

Dies kann man wie folgt ausnutzen: Die Ableitung am Punkt j ist approximiert durch $\frac{u'_{j-1} + u'_{j+1}}{2} \approx u'_j$ wobei der Fehler mit den Taylorreihen (3.10, 3.13) berechnet werden kann

$$\frac{u'_{j-1} + u'_{j+1}}{2} = u'_j + \frac{h^2}{2} u'''_j + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.54)$$

Vergleicht man dies mit der Zentraldifferenz (3.15b) erkennt man, dass der führende Fehlerterm die selbe Form hat und in der Kombination der beiden

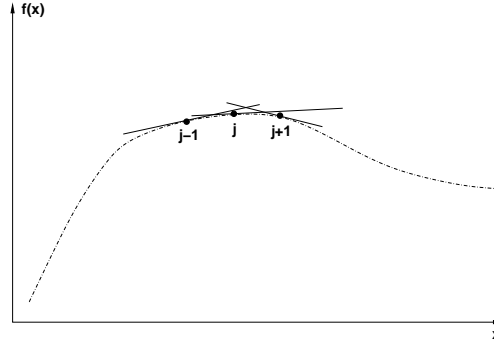


Abbildung 3.13: Steigung einer Kurve in der Nachbarschaft eines Knoten j

Approximationen

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{1}{3} \frac{u'_{j-1} + u'_{j+1}}{2} = u'_j \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \mathcal{O}(h^4) \quad (3.55)$$

wegfällt. Umgeschrieben ergibt sich

$$\left(\frac{1}{6}u'_{j-1} + \frac{4}{6}u'_j + \frac{1}{6}u'_{j+1}\right) = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.56)$$

Damit kann auf einem gegebenen Differenzenstern eine Ableitung höhere Ordnung oder mit besserem Übertragungsverhalten konstruiert werden. Das Auflösen der linken Seite um u'_j zu bestimmen lässt sich numerisch effizient implementieren, wie später gezeigt wird.

Anstelle von Gl. (3.53) ist also die allgemeine Form

$$\sum_{q=-c}^d \beta_{j+q} u'_{j+q} = \sum_{p=-a}^b \alpha_{j+p} u_{j+p} \quad (3.57)$$

zu schreiben, wobei u'_{j+q} durch Differenzieren der entsprechenden Taylorreihe gewonnen wird, zum Beispiel:

$$u_{j\pm 1} = u_j \pm u'_j h + u''_j \frac{h^2}{2} \pm \dots \quad (3.58)$$

$$u'_{j\pm 1} = u'_j \pm u''_j h + u'''_j \frac{h^2}{2} \pm \dots \quad (3.59)$$

Im folgenden sei nun $a = b = c = d = 1$ angenommen. Dann geht (3.57)

über in

$$\begin{aligned} \beta_{-1} \cdot (u'_j - u''_j h + u'''_j \frac{h^2}{2} - \dots) + \beta_0 \cdot (u'_j) + \beta_1 \cdot (u'_j + u''_j h + u'''_j \frac{h^2}{2} + \dots) = \\ \alpha_{-1} \cdot (u_j - u'_j h + u''_j \frac{h^2}{2} - \dots) + \alpha_0 \cdot (u_j) + \alpha_1 \cdot (u_j + u'_j h + u''_j \frac{h^2}{2} + \dots). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch mit dem Ziel, eine Approximation für u'_j zu erhalten.

Die drei ersten Bedingungen, die daraus gewonnen werden, lauten

$$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \quad (3.61)$$

$$\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \alpha_{-1}h - \alpha_1h = 0 \quad (3.62)$$

wobei (3.61) durch die Forderung, u_j aus der Gleichung zu eliminieren bedingt ist und (3.62) durch das Ziel, eine Approximation für u'_j zu finden, also dass der Koeffizient vor u'_j auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen gleich ist.

Diese beiden Bedingungen sind notwendig, um eine Approximation für u'_j zu erhalten. Weitere Bedingungen, die an die Koeffizienten zu stellen sind, können nun zur Optimierung des Verfahrens benutzt werden (meist ist dabei ein Verfahren mindestens 4. Ordnung das Ziel).

3.3.1 Beispiel: Zentralfdifferenzenverfahren nach Lele (1992)

Das in diesem Abschnitt besprochene Verfahren ist bereits seit den 60er Jahren bekannt; die von Lele (*Sanjiva K. Lele. Compact Finite Difference Schemes with spectral-like resolution. Journal of computational physics 103, 16-42 (1992)*) durchgeführte Optimierung wird als historischer Auslöser für die Verwendung dieses Verfahrens angesehen.

Hier wird (wie bei Lele, s.o.) ein Zentralverfahren betrachtet, dessen Übertragungsfunktion, ähnlich wie bei einem Spektralverfahren (vgl. Abb. 3.14), der Geraden ($k'h = kh$) sehr weit folgt (daher die Bezeichnung "...with spectral-like resolution").

Diskretisierungsschema des Verfahrens nach Lele

Die Schreibung der Koeffizienten entspricht im folgenden der von Lele (1992) und weicht von der in (3.57) benutzten Notation ab. Der Koeffizient bei u'_j wurde zu 1 gewählt, außerdem sind die Koeffizienten für rechts- und linksliegende Punkte gleich (zentrales Verfahren). Dabei wurde auch der Abstand der Punkte (2h, 4h bzw. 6h) jeweils nicht in die Koeffizienten a, b, c mit aufgenommen.

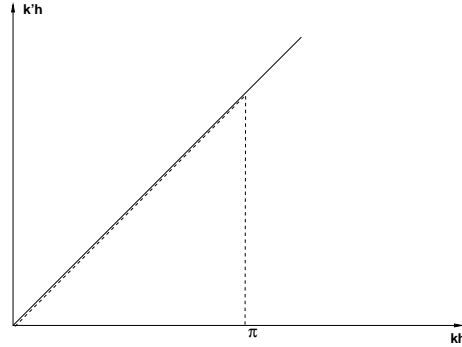


Abbildung 3.14: Verhalten eines Spektralverfahrens über kh : Direkt vor dem Wert $kh = \pi$ geht $k'h$ abrupt auf Null zurück.

Das Verfahren schreibt sich

$$\beta \cdot (u'_{j-2} + u'_{j+2}) + \alpha \cdot (u'_{j-1} + u'_{j+1}) + u'_j = c \cdot \frac{u_{j+3} - u_{j-3}}{6h} + b \cdot \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4h} + a \cdot \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}. \quad (3.63)$$

Gl. (3.63) wird in Matrixschreibweise zu

$$Bu' = Au; \quad (3.64)$$

zum Lösen des Gleichungssystems ist die Matrix B zu invertieren; man bevorzugt daher eine einfach aufgebaute Matrix B , beispielsweise, wie hier, eine pentadiagonale Matrix, deren Inversion ohne Iteration und mit begrenztem Rechenaufwand möglich ist.

Das Einsetzen der Taylorentwicklungen

$$u_{j+p} = u_j + hp u'_j + \frac{(hp)^2}{2!} u''_j + \frac{(hp)^3}{3!} u'''_j + \dots \quad (3.65)$$

$$u'_{j+p} = u'_j + hp u''_j + \frac{(hp)^2}{2!} u'''_j + \frac{(hp)^3}{3!} u^{IV}_j + \dots \quad (3.66)$$

liefert mit

$$u'_j(1 + 2\alpha + 2\beta) + u'''_j(2\frac{(1h)^2}{2!}\alpha + 2\frac{(2h)^2}{2!}\beta) + \dots \quad (3.67)$$

$$= u'_j(a + b + c) + u'''_j \frac{h^2}{3!}(a + 2^2b + 3^2c) + \dots \quad (3.68)$$

die folgenden Gleichungen, mit denen jeweils ein Verfahren der angegebenen Fehlerordnung erzeugt wird.

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 1 + 2\alpha + 2\beta && \text{Konsistenz \& Verfahren von 2. Ordnung} \\
a + 2^2b + 3^2c &= 2 \cdot \frac{3!}{2!}(\alpha + 2^2\beta) && \text{Verfahren von 4. Ordnung genau} \\
a + 2^4b + 3^4c &= 2 \cdot \frac{5!}{4!}(\alpha + 2^4\beta) && \text{Verfahren von 6. Ordnung genau} \\
a + 2^6b + 3^6c &= 2 \cdot \frac{7!}{6!}(\alpha + 2^6\beta) && \text{Verfahren von 8. Ordnung genau} \\
a + 2^8b + 3^8c &= 2 \cdot \frac{9!}{8!}(\alpha + 2^8\beta) && \text{Verfahren von 10. Ordnung genau}
\end{aligned}$$

Tridiagonale Verfahren ($\beta = 0$)

Wählt man in Gl. (3.63) $\beta = 0$, so erhält man tridiagonale Verfahren (B ist eine tridiagonale Matrix); bei diesen Diskretisierungsschemata werden nur die Nachbarpunkte des betrachteten Knotens berücksichtigt. Mit der Wahl $\beta = 0$ wird ein Verfahren höchstens von 8. Ordnung genau erreicht.

Wählt man zusätzlich $c = 0$ (d.h. man beschränkt sich auch auf der rechten Seite von (3.63) auf Verfahren, die nur die Nachbarpunkte benutzen), und löst die ersten drei Gleichungen der obigen Tabelle, wobei α als Parameter herangezogen wird, dann kommt für a und b :

$$a = \frac{2}{3}(\alpha + 2) \quad (3.69)$$

$$b = \frac{1}{3}(4\alpha - 1). \quad (3.70)$$

Für unterschiedliche Wahl des Wertes α werden die Diskretisierungsverfahren in Tab. 3.1 erhalten:

Koeffizient α	Diskretisierungsschemata
$\alpha = 0$	explizite Verfahren
$\alpha = \frac{1}{4}$ bzw. $b = 0$	Padé - Verfahren
$\alpha = \frac{1}{3}$	Verfahren 6. Ordnung

Tabelle 3.1: Erzeugte Schemata für unterschiedliche Wahl des Koeffizienten α in 3.3.1 "Tridiagonale Verfahren"

Dabei ist die Fehlerordnung von α abhängig, der Fehlerkoeffizient lautet

$$\frac{4}{5!}(3\alpha - 1)h^4u^{VI}. \quad (3.71)$$

Für die Wahl $\alpha = \frac{1}{3}$ fällt der Ausdruck in (3.71) weg, und der Fehlerterm wird zu

$$\frac{4}{7!}h^6u^{VII}. \quad (3.72)$$

Optimierung des Verfahrens

Lele (1992) optimiert nun dieses Verfahren, allerdings ist die Vorgehensweise etwas anders als bei der weiter oben besprochenen Optimierung von Tam & Webb (1993).

Als Kriterium wird verlangt, dass die Funktion $k'h(kh)$ an drei Stellen ($kh = 2,2$; $kh = 2,3$; $kh = 2,4$) exakt sein soll, d.h. $k'h(kh = 2,2) = 2,2$ usw., siehe Abb. 3.15.

Sei wieder

$$u = e^{ikx}. \quad (3.73)$$

(Ein symmetrisches Schema liefert beim Einsetzen der e-Funktion durch die Differenzenbildung Sinus- und Cosinusfunktionen und wird daher aus Gründen der Einfachheit gewählt).

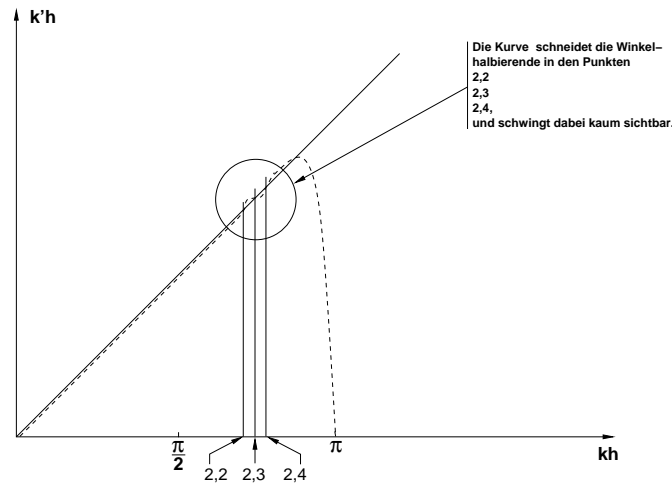


Abbildung 3.15: Optimierung nach Lele; $k'h(kh)$ ist an drei Stellen exakt (2,2;2,3;2,4)

Die Übertragungsfunktion ist für das von Lele verwendete Schema (3.63)

$$k'h(kh) = \frac{a \sin(kh) + \frac{b}{2} \sin(2kh) + \frac{c}{3} \sin(3kh)}{1 + 2\alpha \cos(kh) + 2\beta \cos(2kh)}. \quad (3.74)$$

Mit der Forderung, dass diese Kurve die Gerade an den erwähnten drei Punkten schneide, ergeben sich drei Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten.

Die Abbildung 3.16 zeigt einen Vergleich verschiedener Verfahren; die Kurven sind darunter den Diskretisierungsschemata zugeordnet.

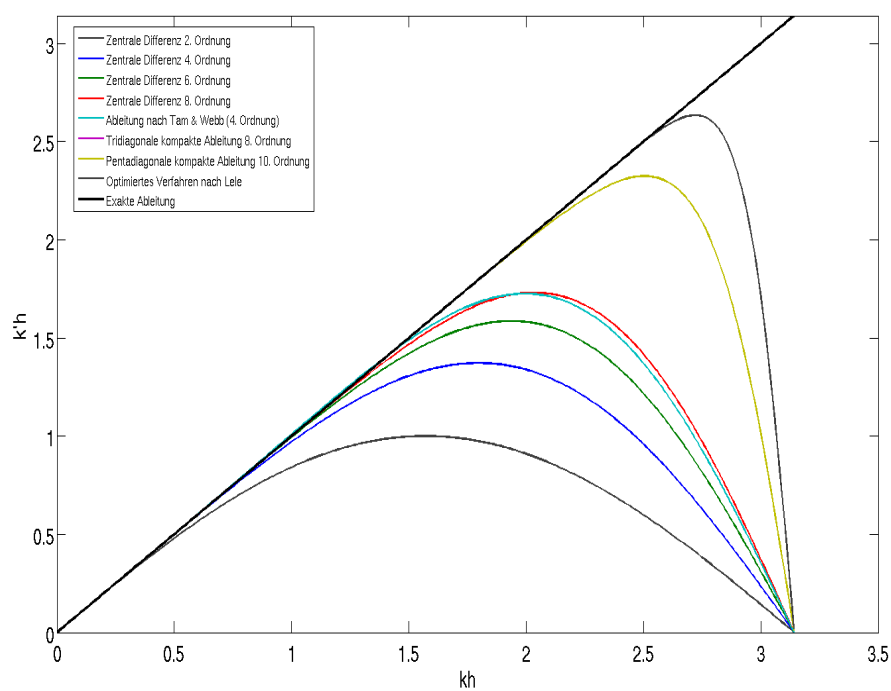


Abbildung 3.16: Vergleich verschiedener Diskretisierungsschemata. Es wird ersichtlich, dass das optimierte Schema dem numerisch teureren pentadiagonalen Verfahren 10. Ordnung überlegen ist.

Ergebnis der Optimierung Lele gibt folgende Koeffizienten für das optimierte Verfahren an:

$$\alpha = 0,5771439$$

$$\beta = 0,0896406$$

$$a = 1,3025166$$

$$b = 0,9935500$$

$$c = 0,03750245$$

3.3.2 Beispiel: Verfahren nach Tolstykh (1972)

Hintergrund der asymmetrischen (Upwind-) Schemata

Bei dem im vorherigen Abschnitt besprochenen Verfahren nach Lele handelt es sich um eine symmetrische Diskretisierungsmethode. Dadurch besitzt bei diesem Verfahren $ik'h$ keinen Realteil, und es tritt keine numerische Dämpfung auf.

Das Schema nach Tolstykh (1972) ist nun ein Upwind-Schema. Es ist asymmetrisch, demnach besitzt $ik'h$ Imaginär- und Realteil. Bei den Upwind-Schemata wird nun die durch den Realteil auftretende Dämpfung dazu benutzt, diejenigen (hohen) Frequenzen zu dämpfen, die - wegen des bei hohen Wellenzahlen von der Geraden $k'h = kh$ abweichenden Imaginärteils - mit einer vom exakten Wert abweichenden Geschwindigkeit transportiert werden ($\lambda \neq \tilde{\lambda}$; siehe hierzu Abb. 3.17).

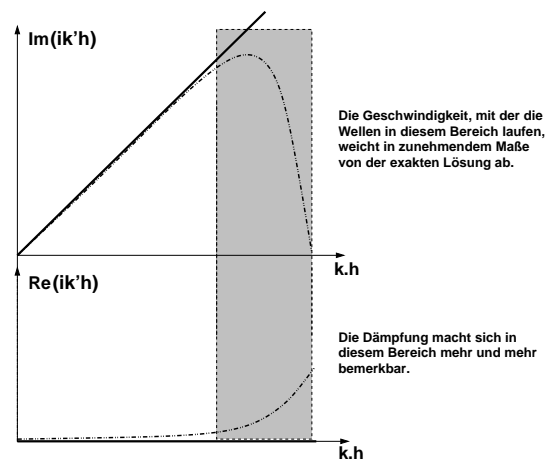


Abbildung 3.17: Einsatz des in $ik'h$ bei asymmetrischen Verfahren auftretenden Realteils zur Dämpfung hoher Frequenzen

Diskretisierungsschema nach Tolstykh

Der Verlauf der Ableitung u' wird bei diesem Schema durch eine Parabel approximiert, d.h. durch die Werte der Ableitungen u' an den Punkten $j-1$, j , sowie $j+1$ wird ein parabolischer Verlauf der allgemeinen Form

$$u' = ax^2 + bx + c \quad (3.75)$$

gelegt (siehe Abb. 3.18). u'_j liegt im Scheitel der Parabel (dort ist $x = 0$); um $u'_{j\pm 1}$ zu erhalten, wird $x = \pm h$ eingesetzt (h ist weiterhin die Gitterweite in der Raumdiskretisierung).

Mit diesen Vorgaben folgt

$$u'_j = c \quad (3.76a)$$

$$u'_{j-1} = ah^2 - bh + u'_j \quad (3.76b)$$

$$u'_{j+1} = ah^2 + bh + u'_j \quad (3.76c)$$

Um die Koeffizienten a und b zu berechnen, benutzen wir Summe und Differenz der Gl. (3.76b) und (3.76c),

$$u'_{j+1} + u'_{j-1} = 2h^2 \cdot a + 2u'_j \quad (3.77a)$$

$$u'_{j+1} - u'_{j-1} = 2h \cdot b, \quad (3.77b)$$

und erhalten schließlich

$$a = \frac{u'_{j+1} + u'_{j-1} - 2u'_j}{2h^2} \quad (3.78a)$$

$$b = \frac{u'_{j+1} - u'_{j-1}}{2h}. \quad (3.78b)$$

Im nachfolgenden Schritt wird $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$ über x integriert, was einerseits der Differenz der Werte von u an den Integralgrenzen entspricht, andererseits durch das Integral über das Polynom $ax^2 + bx + c$ angenähert werden kann.

Integration über den linken Parabelabschnitt $[x_{j-1}, x_j]$ Berechnet wird

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\partial u}{\partial x} dx \approx \int_{x_{j-1}}^{x_j} (ax^2 + bx + c) dx,$$

mit den oben angegebenen Koeffizienten a, b (siehe auch Abb. 3.19a). Eine kurze Zwischenrechnung liefert

$$\begin{aligned} u_j - u_{j-1} &= \left[a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right]_{x_{j-1}=-h}^{x_j=0} + O(h^4) \\ &= \frac{h}{12} (5u'_{j-1} + 8u'_j - u'_{j+1}) + O(h^4). \end{aligned} \quad (3.79)$$

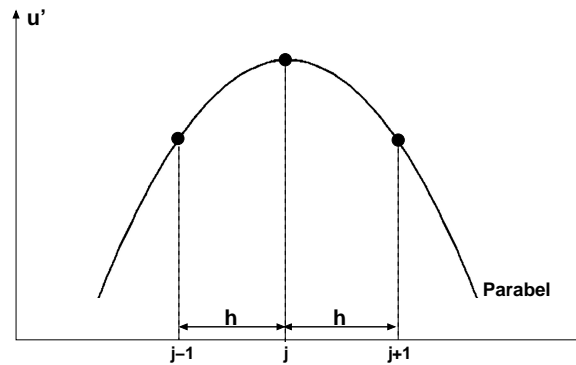


Abbildung 3.18: Verfahren nach Tolstykh: Parabolische Approximation des Verlaufs von u'

Integration über den rechten Parabelabschnitt $[x_j, x_{j+1}]$ Das Ergebnis dieser Integration (siehe Abb. 3.19b) wird hier im weiteren nicht verwendet; es lautet

$$u_{j+1} - u_j = \frac{h}{12} (5u'_{j+1} - 3u'_j - u'_{j-1}) + O(h^4). \quad (3.80)$$

Das hier vorgestellte Schema nach Tolstykh stellt gewissermaßen den “Prototyp” eines asymmetrischen kompakten Diskretisierungsverfahrens dar; eine andere Anzahl benutzter Stützstellen und eine andere Interpolationsfunktion sind denkbar.

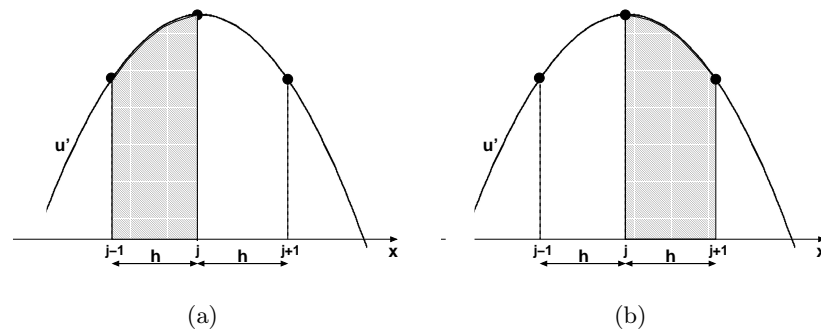


Abbildung 3.19: Integration von u' zwischen dem linken und dem mittleren (a) bzw. dem mittleren und dem rechten (b) Knoten.

Übertragungsverhalten des Verfahrens nach Tolstykh

Es werde wieder die diskrete Form der Transportgleichung

$$u_t + \lambda u_x = 0$$

betrachtet; durch die Raumdiskretisierung geht die Phasengeschwindigkeit $\lambda = \frac{\omega}{k}$ über in $\tilde{\lambda} = \lambda \frac{k'}{k}$.

Die Abbildung 3.20 zeigt das Verhalten der Methode nach Tolstykh bei Integration über den linken Teil der Parabel: Der Realteil $\text{Re}(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda})$ zeigt ein leichtes Überschießen bevor er nahe bei π auf Null abfällt. Der Imaginärteil $\text{Im}(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda})$ hingegen, der dabei (im Fall $\lambda > 0$) wieder die numerische Dämpfung (Dissipation) darstellt, wechselt sein Vorzeichen mit λ . Für $\lambda > 0$ bleibt $\text{Im}(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}) > 0$, damit ist das Verfahren stabil, und die hohen Frequenzen, deren Phasengeschwindigkeit von der physikalisch exakten abweicht, werden gedämpft. Ist jedoch $\lambda < 0$, so verläuft $\text{Im}(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda})$ unterhalb der kh -Achse, und es resultiert ein instabiles Verfahren, bei dem die fraglichen Frequenzen angefacht werden. Das Verhalten dreht sich genau um (instabil für $\lambda > 0$), wenn wie in Gl. (3.80) über den rechten Abschnitt der Parabel integriert wird. Somit ist bei der praktischen Anwendung das Vorzeichen von λ zu bestimmen und die entsprechende Diskretisierungsvorschrift zu verwenden, mit der die Dämpfung unerwünschter Frequenzen erreicht wird.

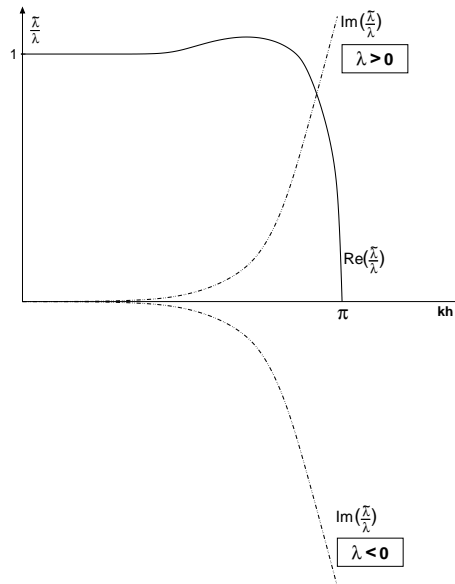


Abbildung 3.20: Verfahren nach Tolstykh: Verhalten für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$.

3.3.3 Beispiel: Verfahren nach Adams & Shariff (JCP 1997)

Adams und Shariff haben ebenfalls asymmetrische Verfahren mit nicht mehr zwingend reellen modifizierten Wellenzahlen k' konstruiert.

Auch bei diesen Verfahren wurde eine Optimierung durchgeführt, wobei die zwischen $k'h(kh)$ und der Ursprungsgeraden $k'h = kh$ eingeschlossene Fläche wiederum das Optimierungskriterium darstellt. Allerdings ist diese Fläche nicht mehr nur von einem Parameter abhängig, wie bei Tam & Webb (siehe vorne), sondern von mehreren. Die Optimierung ist hier weniger leicht nachvollziehbar.

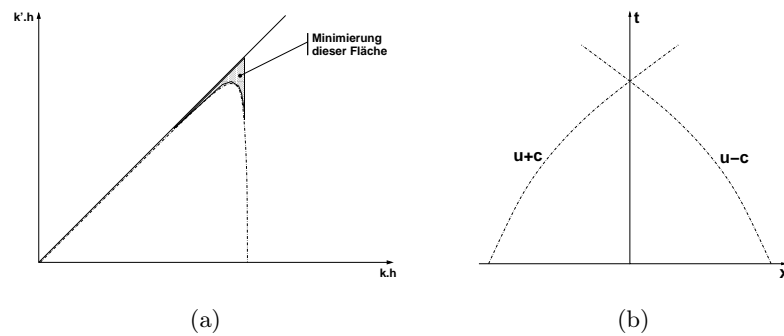


Abbildung 3.21: (a) Optimierungskriterium für das Verfahren nach Adams & Shariff / (b) Rechts- und linksläufige Charakteristiken (nichtlinearer Fall)

Kapitel 4

Behandlung der Zeit

4.1 Diskretisierung der Transportgleichung in der Zeit

4.1.1 Allgemeines

Unterschiede gegenüber der Raumdiskretisierung

Die Zeitdiskretisierung unterscheidet sich insofern von der räumlichen Diskretisierung, als im zeitlichen Ablauf der Berechnung meist nicht alle Zeitschritte gleichzeitig von Interesse sind; vielmehr reicht es aus, wenn Werte für einige wenige aufeinanderfolgende Zeitschritte zur gleichen Zeit vorliegen - im Raum hingegen werden alle Punkte benötigt. Daher werden bei der Diskretisierung der Zeitkoordinate andere Verfahren als im Raum eingesetzt.

Dieses Vorwärtsmarschieren in der Zeit bringt aber auch neue Probleme. Nicht für alle Verfahren, die auf einer sinnvoll diskretisierten Ableitung aufbauen, d.h. für $\Delta t \rightarrow 0$ zur Ableitung $\partial u / \partial t$ werden, konvergiert die Lösung in der Zeit zu der exakten Lösung. Das erklärt sich dadurch, dass zwar der Fehler in jedem Zeitschritt kleiner wird, aber die Anzahl der Schritte entsprechend größer. Nur wenn die *Summe der Fehler* kleiner wird, konvergiert die Lösung zur echten Lösung. Dies wird im Wesentlichen durch die Stabilität des Verfahrens beschrieben.

Literatur: Einführung [Schwarz], Mehrschritt [Trefethen], weiterführend [Hairer, Nørsett, Wanner].

4.1.2 Behandelte Modellgleichung

Es gilt, die Konvektionsgleichung

$$u_t + \lambda u_x = 0$$

in der Zeit zu integrieren. Die bereits räumlich diskretisierte Transportgleichung hat die semidiskrete Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda M u = 0; \quad (4.1)$$

diese gewöhnliche Differentialgleichung ist über die Zeit zu integrieren. Im Allgemeinen stellt sie ein Gleichungssystem dar. In den folgenden Abschnitten wird daher eine Vektorgleichung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, t) = -\lambda M u \quad (4.2)$$

behandelt. Wir nehmen an, dass die Anfangsbedingung $u(t = t_0) = u_0$ bekannt ist; M ist die Matrix, die aus der Raumdiskretisierung stammt. Zur leichteren Schreibung wird zusätzlich die Matrix $A = -\lambda M$ eingeführt.

Erster Lösungsansatz, Taylorreihe:

$$u(t) = u(t_0) + (t - t_0) \frac{\partial u(t_0)}{\partial t} + \frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{\partial^2 u(t_0)}{\partial t^2} + \dots \quad (4.3)$$

Praktisch zwei Möglichkeiten:

- $\frac{\partial^n u(t_0)}{\partial t^n}$ aus DGL, falls RHS wenn nichtlinear
- Ansatz für $u(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \dots$, und Bestimmung der c_n aus DGL

Für die lineare Differentialgleichung 4.2 findet sich die exakte Lösung

$$u(t) = e^{tA} u_0 \quad (4.4)$$

$$= (1 + tA + (tA)^2/2 + \dots) u_0 \quad (4.5)$$

Bemerkung:

- Konvergiert langsam
- entspricht Taylorreihe, wenn linear: $\partial_t^n u = A^n u$
- Besser: Krylov \rightarrow später

4.1.3 Euler-Verfahren

Euler explizit

Die geometrische Interpretation des expliziten Euler-Verfahrens ist in Abb. 4.1 dargestellt. Bei dieser Methode wird die Steigung $\frac{\partial u}{\partial t}$, die bei t_0 durch die Funktion $f(u_0, t_0)$ sofort bekannt ist, dazu benutzt, durch Extrapolieren $u(t = t_1)$ zu finden ($t_1 = t_0 + \Delta t$).

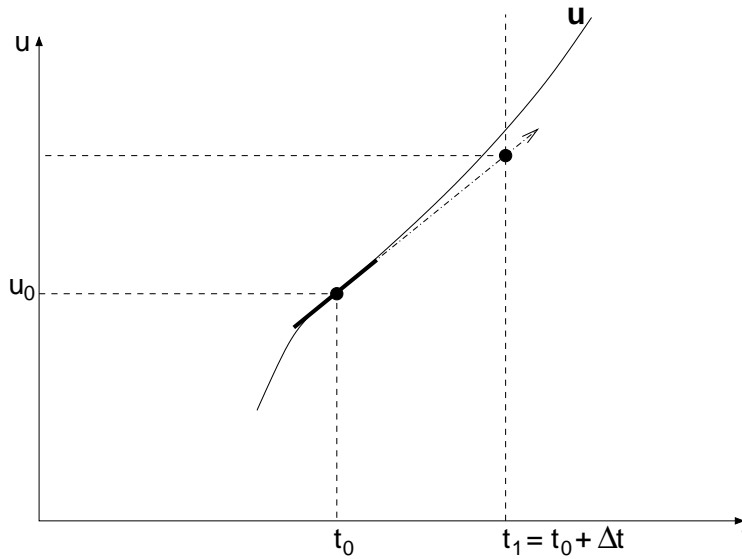


Abbildung 4.1: Explizites Eulerverfahren: Die bei (u_0, t_0) bekannte Steigung $\frac{\partial u}{\partial t}$ wird zum Extrapolieren der Lösung bei t_1 benutzt.

Wir betrachten die Taylorentwicklung der Funktion $u(t)$; dabei bezeichnet das hochgestellte n den Zeitpunkt und $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ die Ableitung nach der Zeit:

$$u^{n+1} = u^n + \dot{u}^n \cdot \Delta t + \ddot{u}^n \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \ddot{\ddot{u}}^n \cdot \frac{\Delta t^3}{6} + \dots \quad (4.6)$$

Die Approximation nach dem expliziten Eulerverfahren entspricht in der Taylorreihe einem Abbruch nach dem zweiten Reihenterm:



$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(u^n, t^n), \quad (4.7)$$

wobei Gl. (4.2) berücksichtigt wurde.

Globaler Fehler

Globaler Fehler ist der Fehler über ein Intervall $(t - t_0)$, d.h. der kumulative Fehler nach mehreren Schritten. Eine *Abschätzung* ergibt sich auf folgende Weise: das Intervall wird in N Schritten berechnet

$$(t - t_0) = N \cdot \Delta t, \quad (4.8)$$

wobei der lokaler Fehler d ist, globaler Fehler g . Damit gilt

$$g \sim |d|N \sim (\Delta t)^2 \frac{(t - t_0)}{\Delta t} = \Delta t(t - t_0) \quad (4.9)$$

Das Euler-Verfahren ist also global von erster Ordnung in Δt .
Bemerkungen:

- Fehler auf 10^{-6} braucht $\sim 10^6$ Schritte
- Abschätzung meist zutreffend, Ausnahmen sind
 - instabile Verfahren, Fehler schaukelt sich auf
 - Fehler kompensieren sich, alternierende RK, zum Teil erhaltende Verfahren
- strengere Rechnung: [Schwarz, 9.1.2]

Euler implizit

Wird das Verfahren in impliziter Weise ausgeführt, so entspricht die geometrische Interpretation der Darstellung in Abb. 4.2. Der Wert $u(t = t_1)$ wird gefunden, indem die Steigung $\frac{du}{dt}$ zu eben diesem Zeitpunkt t_1 für die Extrapolation benutzt wird. Die Approximation lautet dann

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(u^{n+1}, t^{n+1}) \quad (4.10)$$

lokaler Fehler:

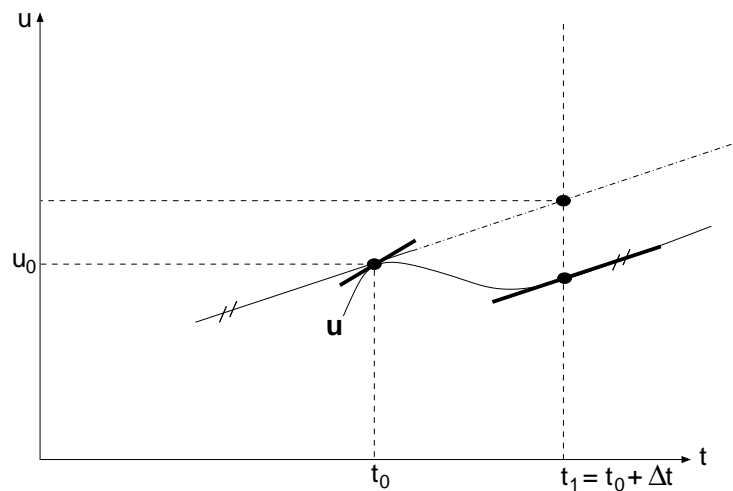


Abbildung 4.2: Implizites Eulerverfahren: Die noch unbekannte Steigung $\frac{\partial u}{\partial t}$ am Punkt (u_1, t_1) wird benutzt, um, ausgehend von u_0, t_0 die Lösung bei t_1 durch Extrapolation zu finden.

$$d = u(t^{n+1}) - u(t^n) - \Delta t f(u^{n+1}, t^{n+1}) \quad (4.11)$$

$$= u(t^{n+1}) - u(t^n) - \Delta t \partial_t u^{n+1} \quad (4.12)$$

$$= \frac{(\Delta t)^2}{2} \partial_t^2 u(t^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \quad (4.13)$$

Der globale Fehler ist hier wieder $\sim \Delta t$.

4.1.4 Stabilitätsbetrachtung der Eulerverfahren

Die betrachteten physikalischen Phänomene sollen mit der Zeit nicht immer weiter anwachsen, sondern gedämpft werden. Gesucht wird also eine abklingende Lösung $u(t)$. Wir betrachten das lineare Modellproblem

$$u' = \lambda u, \quad (4.14)$$

wobei λ nun die (komplexen) Eigenwerte von A bezeichnen soll ($Au = \lambda u$) und $f(u, t) = \lambda u$.

Euler explizit

Die Approximation durch das explizite Eulerverfahren ist nach Gl. (4.7) gegeben zu

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(u^n, t^n)$$

bzw.

$$u^{n+1} = (1 + \Delta t \cdot \lambda) u^n \quad (4.15)$$

Es wird ersichtlich, daß die Lösung u über alle Grenzen wächst, falls λ einen positiven Realteil besitzt. Unter der Voraussetzung

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

ist für eine stabile Lösung zu fordern:

$$\left| \frac{u^{n+1}}{u^n} \right| = |1 + \lambda \Delta t| \leq 1. \quad (4.16)$$

Es sei

$$\sigma := (1 + \lambda \Delta t) = (1 + \lambda_R \Delta t + i \lambda_I \Delta t),$$

wobei $\lambda_R < 0$ und damit $\operatorname{Re}(u^{n+1}) < \operatorname{Re}(u^n)$.

Somit stellt

$$|\sigma|^2 = (1 + \lambda_R \Delta t)^2 + (\lambda_I \Delta t)^2 = 1 \quad (4.17)$$

die Bedingung für marginale Stabilität des Verfahrens dar; Gl. (4.17) ist die Gleichung eines Kreises um den Punkt -1 auf der reellen Achse (siehe Abb. 4.3). Mit einem so gearteten Stabilitätsgebiet ist dieses Verfahren **bedingt stabil**. Wir wollen nun noch zwei Spezialfälle der Größe λ betrachten, nämlich λ rein reell und λ rein imaginär.

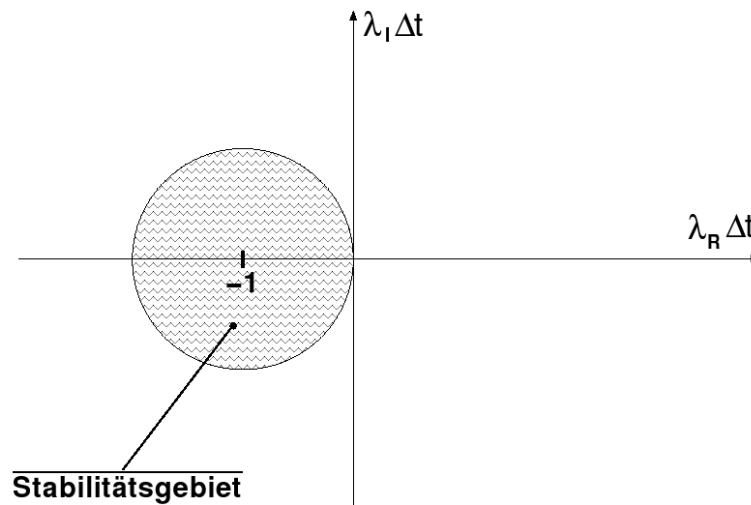


Abbildung 4.3: Stabilitätsbereich des expliziten Eulerverfahrens

λ rein reell, $\lambda < 0$: Für rein reelle $\lambda < 0$ muss gelten

$$\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda|}. \quad (4.18)$$

Dies bedeutet anschaulich: Große Werte λ verlangen sehr kleine Zeitschritte Δt , um ein stabiles Verfahren zu erreichen.

λ rein imaginär: Rein imaginäre λ stellen ein Schwingungsproblem dar, beispielsweise

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0,$$

ausgeschrieben in ein System zweier Dgl. 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

mit

$$\lambda = \pm i\omega.$$

Für ein solches Problem (rein imaginäre Schwingung) ist das explizite Eulerverfahren immer instabil; in der Abb. 4.3 liegt man außerhalb des Stabilitätsgebietes, das nur im Ursprung von der imaginären Achse berührt wird.

Euler implizit

Nach Gl. (4.10) stellt sich das implizite Eulerverfahren folgendermaßen dar:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(u^{n+1}, t^{n+1}).$$

Auf die bereits bei der Stabilitätsbetrachtung zum expliziten Eulerverfahren benutzte Modellgleichung $u' = \lambda u$ angewandt, führt dies auf

$$u^{n+1} = u^n + \lambda \Delta t \cdot u^{n+1} \quad (4.19)$$

bzw. nach Umformung

$$u^{n+1} = (1 - \lambda \Delta t)^{-1} u^n. \quad (4.20)$$

Analog ergibt sich auch hier eine rechte Seite für

$$\left| \frac{u^{n+1}}{u^n} \right| = \left| \frac{1}{1 - \lambda \Delta t} \right| \leq 1. \quad (4.21)$$

mit entsprechender Bedingung für die Stabilität. Für den Nenner gilt somit:

$$|1 - \lambda \Delta t| \geq 1. \quad (4.22)$$

Für ein

$$\sigma := (1 - \lambda \Delta t) = (1 - \lambda_R \Delta t - i \lambda_I \Delta t)$$

ergibt sich folglich das Stabilitätsgebiet:

$$|\sigma|^2 = (1 - \lambda_R \Delta t)^2 + (\lambda_I \Delta t)^2 \geq 1 \quad (4.23)$$

Die Gleichung (4.23) beschreibt hier einen Kreis um den Punkt 1 auf der reellen Achse (siehe Abb. 4.4), wobei innerhalb diesem das implizite Euler-Verfahren instabil ist. Daher ist auch dieses Verfahren nur **bedingt stabil**.

4.1.5 Stabilitätsbegriffe

Begriffe:

- **stabil** : Die Lösung wächst unabhängig von der Wahl des Zeitschritts Δt **nicht** über alle Grenzen.
- **instabil** : Die Lösung wächst unabhängig von Δt über alle Grenzen, sie “explodiert”.
- **bedingt stabil** : Die Lösung ist in Abhängigkeit vom Zeitschritt Δt stabil.

Die **bedingte** Stabilität ist eine Mindestforderung an ein Verfahren zur Zeitintegration.

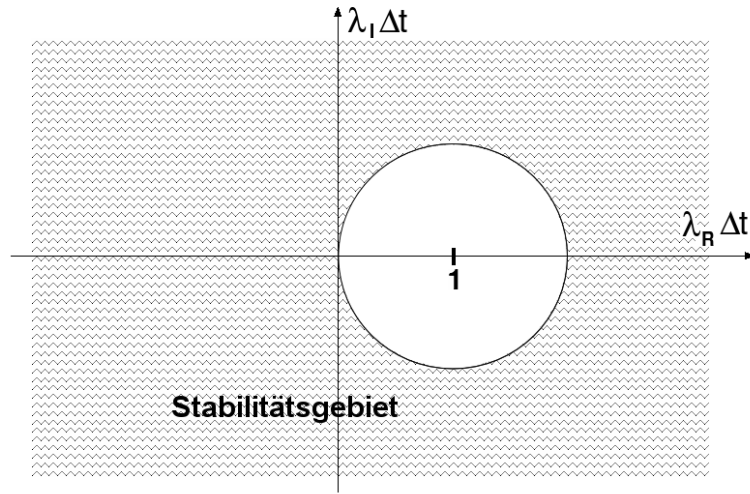


Abbildung 4.4: Stabilitätsbereich des impliziten Eulerverfahrens

Stabilität eines Einzschrittverfahrens:

Ein **Einzschrittverfahren** (ein Verfahren, das nur das Resultat des vorangegangenen Schrittes verwendet; Euler- und Runge-Kutta-Verfahren sind z.B. Einzschrittverfahren) nach

$$u^{n+1} = F(\lambda \Delta t) u^n \quad (4.24)$$

heißt **stabil** für alle $\lambda \Delta t$ aus

$$\left\{ \lambda \Delta t \in \mathbb{C} \mid |F(\lambda \Delta t)| < 1 \right\}. \quad (4.25)$$

4.2 Erhöhung der Ordnung

4.2.1 Richardson-Extrapolation

Das Ziel ist, durch Linearkombination von Approximationsvorschriften verschiedener Schrittweite und bekannter Fehlerordnung Fehlerterme zu eliminieren und so eine verbesserte Lösung zu erhalten. Dies kann beispielsweise auf folgende Weise geschehen:

Die Approximation mit der vollen Schrittweite Δt lautet

$$u^n = u(t_0) + c_1 \Delta t + O(\Delta t^2), \quad (4.26)$$

diejenige mit der halben Schrittweite $\frac{\Delta t}{2}$

$$u^{\frac{n}{2}} = u(t_0) + c_1 \frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^2). \quad (4.27)$$

Durch Linearkombination kommt

$$\tilde{u} \approx 2 \cdot u^{\frac{n}{2}} - u^n = u(t_0) + O(h^2). \quad (4.28)$$

4.2.2 Verbesserte Polygonzugmethode nach Euler

Ausgehend vom Punkt (u^n, t^n) wird die Modellgleichung

$$\dot{u} = f(u, t)$$

integriert. Für die Extrapolation mit ganzer $(n+1)$ und halber $(n+1/2)$ Schrittweite finden wir

$$u_1^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(u^n, t^n) \quad (4.29a)$$

$$u^{n+1/2} = u^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(u^n, t^n) \quad (4.29b)$$

$$u_2^{n+1} = u^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \cdot f\left(u^{n+1/2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right). \quad (4.29c)$$

Die Richardson-Extrapolation liefert für u_1^{n+1} und u_2^{n+1} :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= 2u_2^{n+1} - u_1^{n+1} = \\ &= 2u^{n+1/2} + \Delta t \cdot f\left(u^{n+1/2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) - u^n - \Delta t \cdot f(u^n, t^n) = \\ &= 2u^n + \Delta t \cdot f(u^n, t^n) + \Delta t \cdot f\left(u^{n+1/2}, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) - u^n - \Delta t \cdot f(u^n, t^n) = \\ &= u^n + \Delta t \cdot f\left(u^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot f(u^n, t^n), t^n + \frac{\Delta t}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Der allgemein formulierte **Algorithmus** der verbesserten Polygonzugmethode lautet dann:

$$\boxed{u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot k_2} \quad (4.31a)$$

$$\boxed{k_1 = f(u^n, t^n)} \quad (4.31b)$$

$$\boxed{k_2 = f\left(u^n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot k_1, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right)} \quad (4.31c)$$

4.2.3 Trapezverfahren

Bei der Trapezmethode wird die Modellgleichung

$$\dot{u} = f(u, t)$$

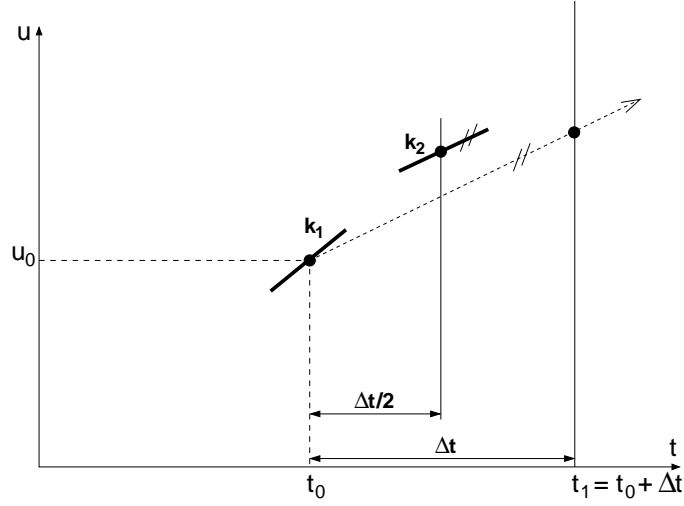


Abbildung 4.5: Geometrische Interpretation der verbesserten Polygonzugmethode von Euler

von n bis $n + 1$ folgendermaßen integriert:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u, t) dt = u^{n+1} - u^n \approx \frac{\Delta t}{2} (f(u^n, t^n) + f(u^{n+1}, t^{n+1})). \quad (4.32)$$

Dies ist ein implizites Verfahren; u^{n+1} kann mit einer Fixpunktiteration nach Euler mit dem Startwert $u^{n+1,(0)}$ bestimmt werden:

$$u^{n+1,(0)} = u^n + \Delta t \cdot f(u^n, t^n) \quad (4.33a)$$

$$u^{n+1,(i+1)} = u^n + \frac{\Delta t}{2} (f(u^n, t^n) + f(u^{n+1,(i)}, t^{n+1})) \quad (4.33b)$$

4.2.4 Allgemeines Konstruktionsverfahren für Zeitintegrations-schemata

Schema (zweistufig)

$$\boxed{u^{n+1} = u^n + \gamma_1 \Delta t \cdot k_1 + \gamma_2 \Delta t \cdot k_2} \quad (4.34a)$$

$$\boxed{k_1 = f(u^n, t^n)} \quad (4.34b)$$

$$\boxed{k_2 = f(u^n + \beta \Delta t \cdot k_1, t^n + \alpha \Delta t)} \quad (4.34c)$$

Dies bedeutet, u^{n+1} wird gefunden durch Kombination (eine gewichtete Summe) der Steigungen $f(u, t)$ an der Stelle u^n und an z.B. einer weiteren Stelle $u^n + \beta \Delta t \cdot k_1$. Abb. 4.6 zeigt die geometrische Interpretation.

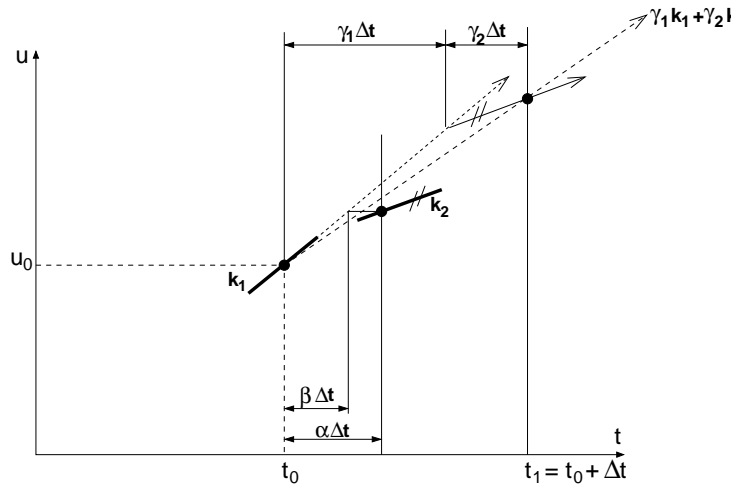


Abbildung 4.6: Allgemeine Konstruktionsmethode für Einschrittverfahren

Konsistenzbedingungen

Für das Schema aus Gl. (4.34a) wird die höchste Ordnung des Verfahrens mit dem vollständigen Satz an Konsistenzbedingungen

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad (4.35a)$$

$$\gamma_1 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \quad (4.35b)$$

$$\gamma_2 \cdot \beta = \frac{1}{2} \quad (4.35c)$$

erreicht.

Speicherbedarf

Man beachte, daß die Steigungen k_i für das gesamte Feld zu berechnen und zu speichern sind; zur Vermeidung von Speicherplatzproblemen besteht die Möglichkeit, z.B. $\gamma_2 = 0$ zu wählen (bspw. "low-storage Runge-Kutta"). Das Verhalten dieser Verfahren ist aber weniger gut. Zur Zeit ist der Speicher i.d.R. auch nicht der begrenzende Faktor, sondern der CPU-Durchsatz.

4.2.5 Verfahren von Heun

Das Verfahren von Heun ergibt sich aus dem Trapezverfahren durch Abbruch der Fixpunktiteration nach dem ersten Schritt. Weitere Iterationen verbessern die Genauigkeit der Trapezmethode nicht, wohl aber die Stabilität.

Das Verfahren von Heun benutzt also eine Mittelung der Steigungen bei n und bei $n + 1$:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2) \quad (4.36)$$

In (4.34a) sind demnach einzusetzen:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha &= \beta = 1 \end{aligned}$$

was auf

$$k_1 = f(u^n, t^n) \quad (4.37a)$$

$$k_2 = f(u^n + \Delta t \cdot k_1, t^n + \Delta t = t^{n+1}) \quad (4.37b)$$

führt.

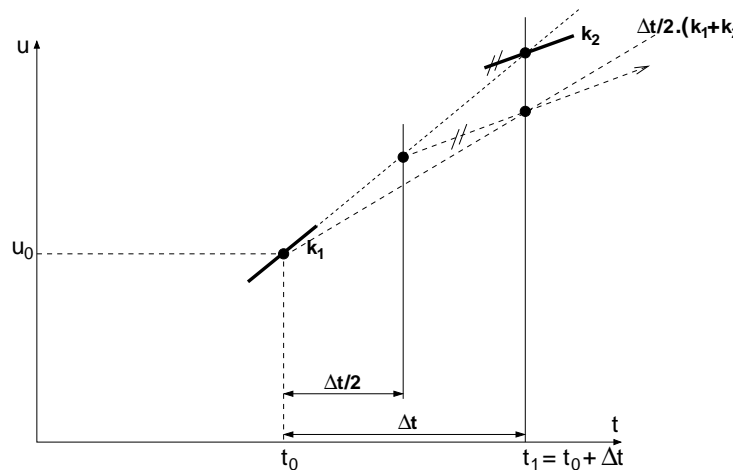


Abbildung 4.7: Geometrische Interpretation des Verfahrens von Heun

4.3 Verfahren von Runge-Kutta

4.3.1 Konstruktion eines Runge-Kutta-Schemas

Um zu Methoden höherer Ordnung zu gelangen, wird für die zur gegebenen Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung

$$u^{n+1} - u^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u, t) dt \quad (4.38)$$

eine genauere Approximation als die bereits vorgestellte Trapezregel gesucht. Ein dreistufiges Verfahren mit den Stützstellen τ_1, τ_2, τ_3 im Intervall $[t^n = t, t^{n+1} = t + \Delta t]$ mit den dazugehörigen Parametern γ_i erhält man durch den Ansatz

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot (\gamma_1 f(\tau_1, u(\tau_1)) + \gamma_2 f(\tau_2, u(\tau_2)) + \gamma_3 f(\tau_3, u(\tau_3))) . \quad (4.39)$$

Für die Schrittweiten τ_i wird angesetzt:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t^n, \\ \tau_2 &= t^n + \alpha_2 \Delta t, \\ \tau_3 &= t^n + \alpha_3 \Delta t. \end{aligned}$$

Die Prädiktorwerte für u werden angesetzt zu

$$u_1 = u(\tau_1) = u^n, \quad (4.40a)$$

$$u_2 = u(\tau_2) = u^n + \beta_{21} f(u^n, t^n) \Delta t, \quad (4.40b)$$

$$u_3 = u(\tau_3) = u^n + (\beta_{31} f(u^n, t^n) + \beta_{32} f(t^n + \alpha_2 \Delta t, u_2)) \Delta t. \quad (4.40c)$$

Auf diese Weise erhalten wir den Konstruktionsalgorithmus eines dreistufigen Runge-Kutta-Verfahrens:

$$\boxed{k_1 = f(u^n, t^n)} \quad (4.41a)$$

$$\boxed{k_2 = f(t^n + \alpha_2 \Delta t, u^n + \beta_{21} k_1 \Delta t)} \quad (4.41b)$$

$$\boxed{k_3 = f(t^n + \alpha_3 \Delta t, u^n + (\beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \Delta t)} \quad (4.41c)$$

In diesem Schema verbleiben aber die noch zu bestimmenden Größen $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Zwei der acht Unbekannten können durch die Forderung, dass mindestens im trivialen Fall $u' = 1$ die Prädiktorwerte in Gln. (4.40a)-(4.40c) exakt sein sollen, eliminiert werden; dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_{21} \\ \alpha_3 &= \beta_{31} + \beta_{32} \end{aligned}$$

Entwickeln von u bzw. f in eine Taylorreihe und Vergleich mit dem angegebenen Algorithmus liefert zunächst den Diskretisationsfehler. Die Koeffizienten, für die ein Verfahren dritter Ordnung erzielt wird, folgen mit der Forderung, dass der Diskretisationsfehler bis zur Ordnung $O(\Delta t^3)$ verschwinden soll, zu

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \quad (4.42a)$$

$$\alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 = \frac{1}{2} \quad (4.42b)$$

$$\alpha_2 \gamma_3 \beta_{32} = \frac{1}{6} \quad (4.42c)$$

$$\alpha_2^2 \gamma_2 + \alpha_3^2 \gamma_3 = \frac{1}{3}. \quad (4.42d)$$

Damit stehen vier Gleichungen für die verbleibenden sechs Unbekannten zur Verfügung; man kann somit weitere Forderungen an die Parameter stellen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass es nicht möglich ist, mit dem dreistufigen Schema ein Verfahren vierter oder höherer Ordnung zu erreichen. Früher war es ein Hauptanliegen, für die Handrechnung einfache und handliche Koeffizienten zu Verfügung zu haben. In der numerischen Aeroakustik legt man dagegen eher Wert auf das Übertragungsverhalten der Methode.

Stufenzahl und Ordnung der Runge-Kutta-Schemata

Ein Blick auf Tabelle 4.1 zeigt, dass durch Erhöhung der Anzahl an Stufen bis zum Runge-Kutta-Verfahren mit vier Stufen auch die Ordnung gleichmaßen erhöht wird; Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (4 Stufen) sind daher beliebt.

Verfahren mit einer großen Anzahl an Stufen besitzen zwar auch höhere Ordnung, wie in Tab. 4.1 bis zum Verfahren mit neun Stufen dargestellt, allerdings besitzen sie auch eine erhebliche Zahl an freien Parametern (diese sind die Wichtungskoeffizienten und die Orte der Stützstellen); freie Parameter sind zwar für eine Optimierung vonnöten, zuviele erweisen sich aber auch nicht als günstig.

RK-Verfahren mit Stufenanzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
erreichte Ordnung	1	2	3	4	4	5	6	6	7

Tabelle 4.1: Zuordnung der Stufenzahl eines Runge-Kutta-Verfahrens zur damit erreichbaren Ordnung

4.3.2 Klassische Verfahren mit guten Rundungseigenschaften

An ein Verfahren sind die folgenden Anforderungen zu stellen:

- Geringer Speicherbedarf
- Große Schrittweiten Δt
- Gute Fehlereigenschaften

Verfahren von Heun dritter Ordnung

Der zugehörige **Algorithmus** lautet:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{4}(k_1 + 3k_3) \quad (4.43a)$$

$$k_1 = f(u^n, t^n) \quad (4.43b)$$

$$k_2 = f\left(u^n + \frac{\Delta t}{3}k_1, t^n + \frac{\Delta t}{3}\right) \quad (4.43c)$$

$$k_3 = f\left(u^n + \frac{2\Delta t}{3}k_2, t^n + \frac{2\Delta t}{3}\right) \quad (4.43d)$$

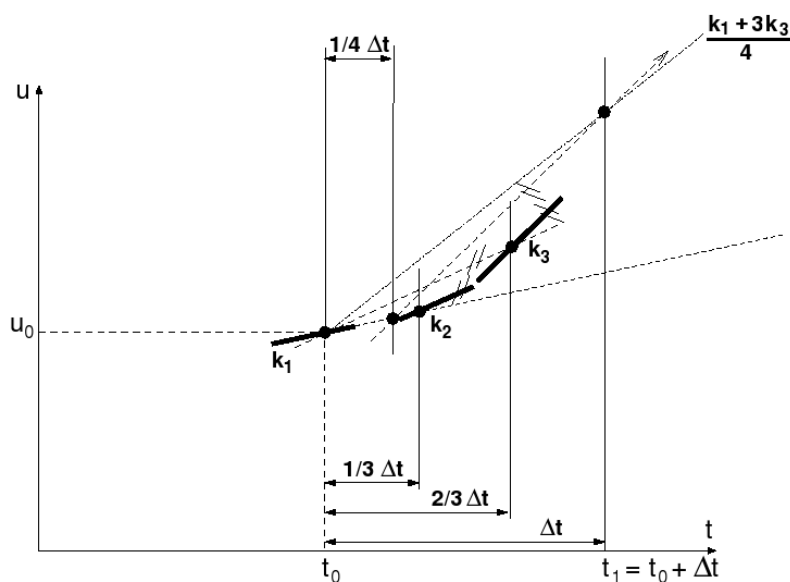


Abbildung 4.8: Geometrische Interpretation des Verfahrens von Heun dritter Ordnung

Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung

Der zugehörige **Algorithmus** lautet:

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (4.44a)$$

$$k_1 = f(u^n, t^n) \quad (4.44b)$$

$$k_2 = f\left(u^n + \frac{\Delta t}{2}k_1, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.44c)$$

$$k_3 = f(u^n - \Delta t \cdot k_1 + 2\Delta t \cdot k_2, t^n + \Delta t) \quad (4.44d)$$

Man beachte den höheren Speicherbedarf gegenüber dem Verfahren von Heun dritter Ordnung.

Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung

Eine (für die Handrechnung angenehme) Eigenschaft dieses klassischen Verfahrens sind die sehr einfachen Koeffizienten. Der Konstruktionsalgorithmus lautet

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.45a)$$

$$k_1 = f(u^n, t^n) \quad (4.45b)$$

$$k_2 = f\left(u^n + \frac{\Delta t}{2}k_1, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.45c)$$

$$k_3 = f\left(u^n + \frac{\Delta t}{2}k_2, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.45d)$$

$$k_4 = f(u^n + \Delta t \cdot k_3, t^n + \Delta t) \quad (4.45e)$$

Wenden wir diese Vorschrift auf das Modellproblem aus Gl. (4.14) an, so ergibt sich für die k_i

$$k_1 = \lambda u^n \quad (4.46a)$$

$$k_2 = \lambda \left(u^n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) = \left(\lambda + \frac{\Delta t}{2}\lambda^2\right) u^n \quad (4.46b)$$

$$k_3 = \lambda \left(u^n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) = \left(\lambda + \frac{\Delta t}{2}\lambda^2 + \frac{\Delta t^2}{4}\lambda^3\right) u^n \quad (4.46c)$$

$$k_4 = \lambda(u^n + \Delta t \cdot k_3) = \left(\lambda + \Delta t \cdot \lambda^2 + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda^3 + \frac{\Delta t^3}{4}\lambda^4\right) u^n, \quad (4.46d)$$

und für die Approximation von u^{n+1} kommt schließlich

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= \left(1 + \Delta t \cdot \lambda + \frac{1}{2}(\Delta t \cdot \lambda)^2 + \frac{1}{6}(\Delta t \cdot \lambda)^3 + \frac{1}{24}(\Delta t \cdot \lambda)^4\right) u^n \quad (4.47) \\ &=: F(\lambda \Delta t) \cdot u^n. \end{aligned}$$

Die hier auftretende Funktion $F(\lambda \Delta t)$ (vgl. auch Gl. (4.24)) stellt die nach dem 4. nichtkonstanten Glied abgebrochene Taylorentwicklung des Terms $e^{\lambda \Delta t}$ in $u^{n+1} = e^{\lambda \Delta t} u^n$ dar - die dazugehörige Modellgleichung ist $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$ mit der exakten Lösung $u(t) = e^{\lambda t}$.

Über das Übertragungsverhalten mit endlich großem Δt gibt das nachfolgende, hier nicht mehr auftretende Glied der Reihe Aufschluss.

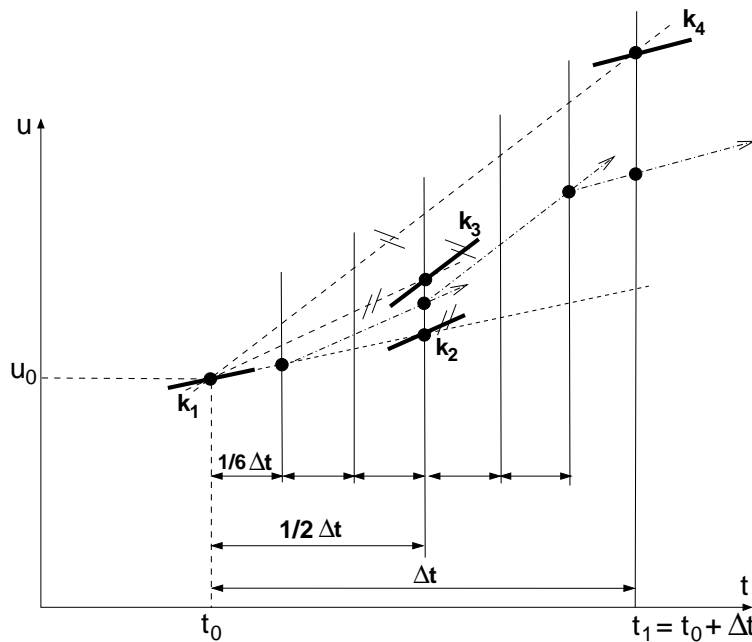


Abbildung 4.9: Geometrische Interpretation des Runge-Kutta-Verfahrens in vier Stufen

4.3.3 Stabilitätsbetrachtung der Runge-Kutta-Verfahren

Das Stabilitätsgebiet wurde in Gl. (4.25) mittels $F(\lambda \Delta t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ definiert; es ist begrenzt durch die Niveaulinie der Funktion $|F(\lambda \Delta t)| = \text{const} = 1$, die

andeutungsweise in Abbildung 4.10 gezeichnet ist. $|F(\lambda\Delta t)|$ ist eine Funktion in zwei Veränderlichen (Real- und Imaginärteil von $\lambda\Delta t$), deren Schnittfläche auf der Höhe 1 hier gezeigt wird. Komplizierte Funktionen $F(\lambda\Delta t)$ hoher Ordnung liefern als Stabilitätsbereich ein Gebiet, welches nicht mehr zusammenhängend ist, wie z.B. bei Euler- und Heunverfahren. Dies ist durch die rechts unten in 4.10 befindlichen Inseln angedeutet.

Runge-Kutta-Verfahren ermöglichen die Behandlung von Schwingungen dadurch, daß ihr Stabilitätsgebiet die imaginäre Achse nicht nur berührt, sondern auch darüber hinausreicht. Ein bestimmter Bereich rein imaginärer λ wird dadurch behandelbar.

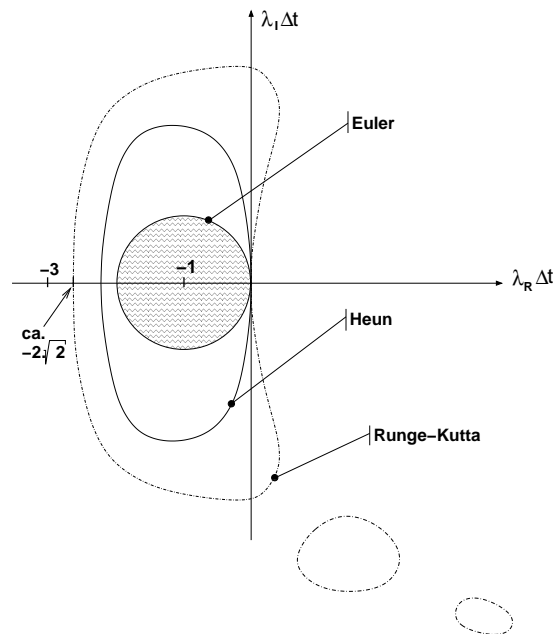


Abbildung 4.10: Stabilitätsgebiet eines Runge-Kutta-Verfahrens; zum Vergleich das Stabilitätsgebiet von Eulerverfahren (explizit) sowie Heunverfahren

4.3.4 Vergleich verschiedener Einschnitt-Verfahren

Verschiedene Vergleiche sind in den Abbildungen 4.11 bis 4.14 dargestellt.

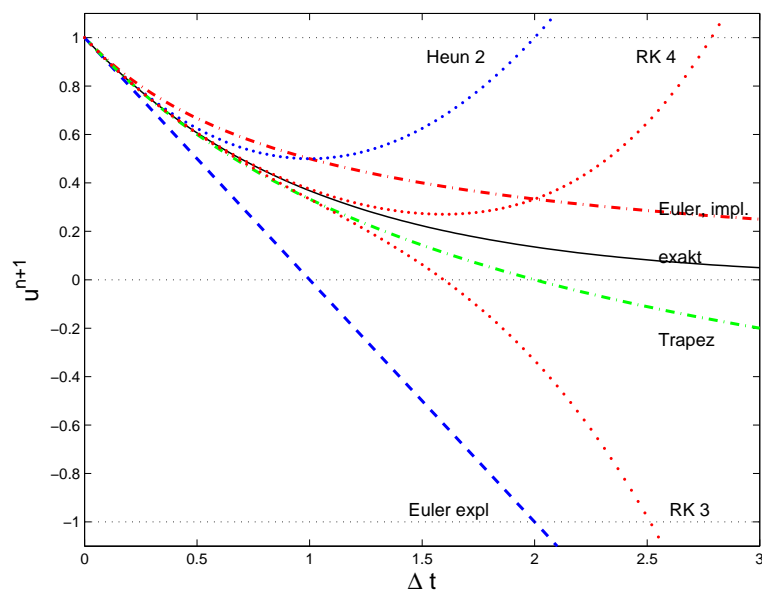


Abbildung 4.11: Ein Zeitschritt Δt . Alle hier gezeigten expliziten Verfahren divergieren für $\Delta t \rightarrow \infty$. Implizite Verfahren können endlich bleiben, aber asymptotisches Verhalten kann u.U. falsch sein.

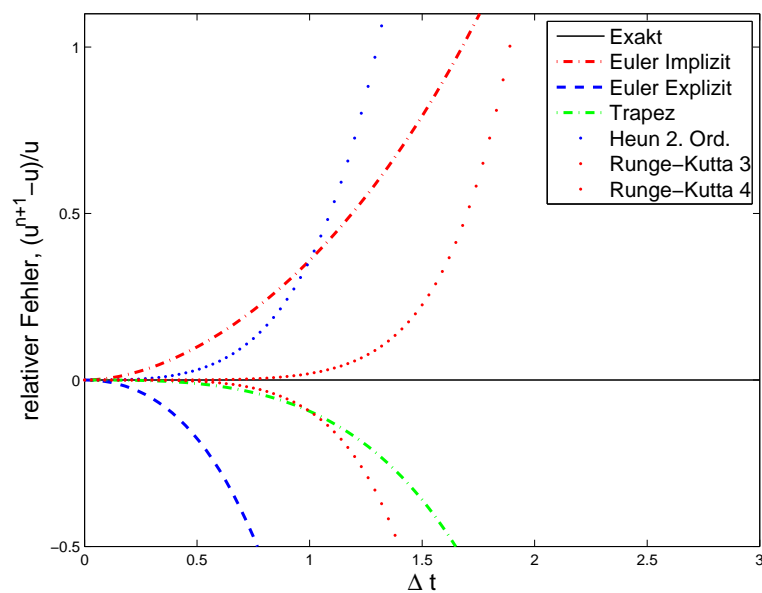


Abbildung 4.12: Ein Zeitschritt Δt , der relative Fehler.

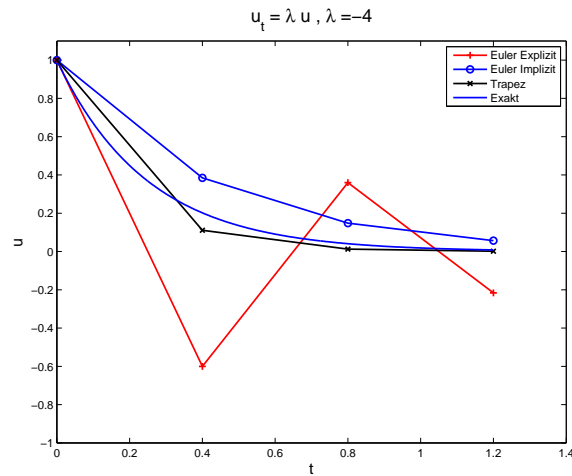


Abbildung 4.13: Einfach Zeitschrittverfahren, $\dot{u} = \lambda u$. Das explizite Euler-Verfahren schwingt stark, bei etwas größerem Schritt wird es instabil.

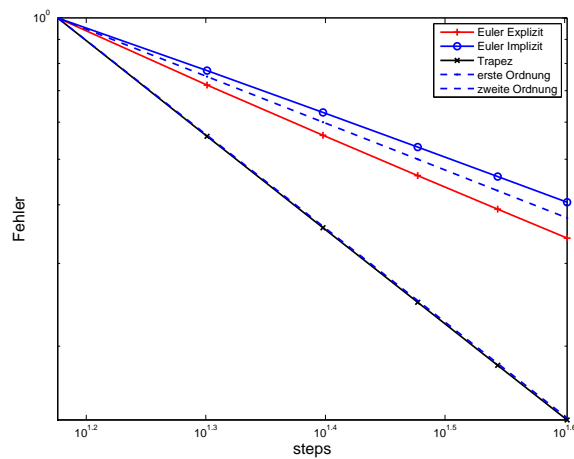


Abbildung 4.14: Der globale Fehler als Funktion der Schrittzahl; alle gezeigten Verfahren konvergieren, jedoch mit verschiedenen Raten.

4.4 Mehrschrittverfahren

Eine Alternative zu den Einschrittverfahren, die aus einem Zeitpunkt (mit Hilfe von Zwischenwerten) einen neuen bestimmen, sind die Mehrschrittverfahren, die auch auf vorherige Werte zugreifen.

4.4.1 Adams–Bashforth

Formale Integration der DGL (4.2)

$$u(t^{n+1}) = u(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(t), t) dt \quad (4.48)$$

Approximation von $f(t) = f(u(t), t)$ durch Extrapolation von alten Werten

$$f^n = f(u^n, t^n), f^{n-1} = f(u^{n-1}, t^{n-1}), f^{n-2} = f(u^{n-2}, t^{n-2}), \dots \quad (4.49)$$

Polynomansatz,

$$f(t) = \sum_{j=0}^3 f^{n-j} \mathcal{L}^{n-j}(t) \quad (4.50)$$

mit Lagrange–Polynome

$$\mathcal{L}^n(t) = \prod_{i, i \neq n} \frac{(t - t^i)}{(t^n - t^i)} \quad (4.51)$$

Damit wird DGL zu

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \sum_{j=0}^3 f^{n-j} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathcal{L}^n(t) dt \\ &= u^n + \sum_{j=0}^3 f^{n-j} b^j. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Dabei sind die b^j einfache Zahlen, entstanden durch elementares Integrieren der Polynome. Beispielsweise:

$$\begin{aligned} b^0 &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathcal{L}^n(t) dt \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{(t - t^{n-1})(t - t^{n-2})(t - t^{n-3})}{(t^n - t^{n-1})(t^n - t^{n-2})(t^n - t^{n-3})} dt \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$= \Delta t \int_0^1 \frac{(\tau - (-1))(\tau - (-2))(\tau - (-3))}{1 \cdot 2 \cdot 3} d\tau \quad (4.54)$$

$$= \Delta t \frac{55}{24} \quad (4.55)$$

Ebenso andere b^j . Damit erhält man zum Beispiel das vierstufige Verfahren von Adams–Bashforth (AB4):

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{24} (55f^n - 59f^{n-1} + 37f^{n-2} - 9f^{n-3}). \quad (4.56)$$

Bemerkungen:

- global von 4. Ordnung
- Pro Zeitschritt eine Auswertung der rechten Seite
- Genauigkeit & Stabilität kleiner als RK \rightarrow kleiner Zeitschritte
- Genauigkeit erhöhbar über mehr Schritte, mehr Speicher, kaum mehr Rechenkosten
- Implizite Version über Einbeziehung von $f^{n+1} \rightarrow$ Adams–Moulten

4.4.2 Allgemeine Mehrschrittverfahren

Mehrschritt allgemein

$$\sum_{k=0}^N \alpha^k u^{n+k} = \Delta t \sum_{k=0}^N \beta^k f^{n+k} \quad (4.57)$$

Entspricht kompakter Ableitung in Zeit

$$\frac{1}{\Delta t} Au = Bf, \quad (\dot{u} = f) \quad (4.58)$$

Bemerkung: Nicht aus bekannten u soll $\dot{u} = f$ bestimmt werden, sondern aus bekannten u^{n+k} und f^{n+k} soll u^{n+N} bestimmt werden. Daher explizit wenn $\beta^N = 0$, auch wenn entsprechende Ableitungsform im Raum implizit wäre!

Bestimmung der Ordnung, Taylorreihe entsprechend Raumableitung. Lokaler Fehler

$$d = \sum_{k=0}^N \alpha^k u^{n+k} - \Delta t \sum_{k=0}^N \beta^k \dot{u}^{n+k} \quad (4.59)$$

mit Taylorreihe

$$u^{n+k} = u^n + k\Delta t \dot{u}^n + \frac{(k\Delta t)^2}{2} \ddot{u}^n + \dots \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} d &= \left(\sum_{k=0}^N \alpha^k \right) u^n \\ &+ \left(\sum_{k=0}^N \alpha^k k - \sum_{k=0}^N \beta^k \right) \dot{u}^n \Delta t \\ &+ \left(\sum_{k=0}^N \alpha^k k^2 - 2 \sum_{k=0}^N \beta^k k \right) \frac{\ddot{u}^n}{2} (\Delta t)^2 \\ &+ \dots \\ &+ \left(\sum_{k=0}^N \alpha^k k^q - q \sum_{k=0}^N \beta^k k^{q-1} \right) \frac{u^{(q),n}}{q} (\Delta t)^q + \dots \end{aligned} \quad (4.61)$$

Erster Klammerterm Konsistenz, weiter bestimmen lokale Ordnung.

4.4.3 Stabilität von Mehrschrittverfahren

Stabilität auch bei $\Delta t \rightarrow 0$ nicht immer gegeben.

Beispiel:

$$u^{n+2} + 4u^{n+1} - 5u^n = \Delta t (4f^{n+1} + 2f^n)$$

Mit $\dot{u} = -u = f(u)$

$$u^{n+2} + 4u^{n+1} - 5u^n = -\Delta t (4u^{n+1} + 2u^n)$$

$$u^{n+2} + 4(1 + \Delta t)u^{n+1} + (-5 + 2\Delta t)u^n = 0 \quad (4.62)$$

Differenzengleichung, Ansatz $u^n = c\xi^n$, ($\xi \neq 0$, triviale Lösung). Hier ist ξ^n der Exponent, kein Hochindex!

$$\xi^2 + 4(1 + \Delta t)\xi^1 + (-5 + 2\Delta t) = 0 \quad (4.63)$$

$$\xi_1 = 1 - \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \quad \xi_2 = -5 + \mathcal{O}((\Delta t)) \quad (4.64)$$

Also

$$u^n = c_1(1 - \Delta t + \dots)^n + c_2(-5 + \dots)^n \quad (4.65)$$

Erster Term erzeugt Näherungslösung, zweiter Term führt zu starkem Wachstum: Parasitäre Lösung.

Bedingung für Stabilität: Definiere Polynome

$$\rho(\xi) = \sum_{k=0}^N \alpha^k \xi^k, \quad \sigma(\xi) = \sum_{k=0}^N \beta^k \xi^k \quad (4.66)$$

Forderung (Wurzelortkriterium): $|\xi_i| \leq 1$ mit $\rho(\xi_i) = 0$. Falls $|\xi| = 1$ dann Wurzel einfach. (Sonst Lsg $n^{q-1}\xi^n = n^q$, q , Vielfachheit der Wurzel.)

Kapitel 5

Linearer und nichtlinearer Transport

Charakteristiken sind insbesondere in der Gasdynamik ein zentrales Konzept. Nicht nur sind sie unabdingbar zum Verständnis der physikalischen Vorgänge, auch numerische Verfahren verwenden Charakteristiken direkt oder implizit. Im Folgenden soll das Konzept der Charakteristiken Stück für Stück erarbeitet und auf die Gasdynamik angewandt werden. Charakteristiken beschreiben i.A. die Ausbreitungsweise von kleinen Störungen einer Grundströmung, also z.B. Schall.

Die Untersuchung ob reelle Charakteristiken existieren, führt später auf die Einteilung von partiellen DGLs in hyperbolisch, parabolisch und elliptisch. Sind alle Charakteristiken reell und verschieden, spricht man von hyperbolischen Gleichungen. Hier existiert schall- bzw. wellenartiges Verhalten. Die Gasdynamik ist also (bei Vernachlässigung der Reibung) durch hyperbolische Gleichungen gegeben. Im Folgenden gehen wir stillschweigend von hyperbolischen Gleichungen aus.

Es wird sich zeigen, dass es im nichtlinearen Fall zum Aufsteilen von Strukturen und damit zu (fast) unstetigem Verhalten von Strömungsgrößen kommt, den Stößen. Diese werden i.A. *nicht* durch Charakteristiken beschrieben, sondern durch Erhaltungsgleichungen. Trotzdem gibt es physikalische und mathematische Berührungspunkte, so dass dieses hier im Zusammenhang mit Charakteristiken beschrieben werden. Reibung, die streng genommen bei Charakteristiken vernachlässigt werden muss, wird hier wichtig.

Ein interessanter Film zu Gasdynamik/Wasserwellen ist zu finden unter <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>, *Waves in Fluids* (letzter Film).

Literatur:

R. J. LeVeque, Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser, 1990

C. Hirsch, Numerical Computations of Internal & External Flows, 1988

z.T. auch

E. Becker, Gasdynamik, 1966

5.1 Die lineare Transportgleichung

Eine einfache Gleichung welche die Ausbreitung einer Größe u mit einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit λ beschreibt, ist die lineare eindimensionale Transportgleichung

$$\partial_t u + \lambda \partial_x u = \varepsilon \partial_x^2 u, \quad (5.1)$$

wobei $u = u(x, t)$ mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$ gegeben ist. Mit dieser Gleichung kann beispielsweise die Ausbreitung eines Stoffes, der mit der Strömung transportiert wird, beschrieben werden. Als Anwendungsbeispiel sind der Transport von Staubpartikeln in Luft oder Tinte in Wasser zu nennen. Der Term auf der rechten Seite kann dabei als Diffusionsterm oder Reibungsterm interpretiert werden. Die obige Gleichung kann geschrieben als

$$\partial_t u + \partial_x \underbrace{(\lambda u - \varepsilon \partial_x u)}_{=: f} = 0.$$

Die Größe f wird als Fluss bezeichnet. Die Integration über das Gebiet liefert

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \partial_t u \, dx &= \partial_t \int_{x_0}^{x_1} u \, dx = - \int_{x_0}^{x_1} \partial_x f \, dx = - [f]_{x_0}^{x_1} \\ \Rightarrow \partial_t U &:= \partial_t \int_{x_0}^{x_1} u \, dx = - [f]_{x_0}^{x_1} = -f(t, x_1) + f(t, x_0). \end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung der integralen Größe U ist gegeben durch Flüsse an der Oberfläche des Integrationsvolumens. Die integrale Größe U ist beispielsweise die gesamte Stoffmenge in dem betrachteten Gebiet. Man erkennt anhand der obigen Gleichung, dass ein positiver Fluss am rechten Rand des Gebiets ($x = x_1$) die gesamte Stoffmenge verringert. Am linken Rand verhält es sich andersherum. Man erkennt, dass integrale, also global betrachtete, Größen lediglich durch die Flüsse an den Rändern verändert werden.

Die Herleitung der Charakteristiken geht von der linearen Transportgleichung in der Form (5.1) aus. Mit der Annahme¹, dass der Diffusions- bzw. Reibungsterm vernachlässigt werden kann ($\varepsilon \approx 0$), ergibt sich die lineare Transportgleichung zu einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\partial_t u + \lambda \partial_x u = 0. \quad (5.2)$$

Zur Bestimmung einer Lösung wählen wir den Ansatz $x = x(t)$. Damit ergibt sich für die totale Ableitung der Größe $u(t, x(t))$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (5.3)$$

¹Dies ist eine weitreichende Annahme. Der Reibungs bzw. Diffusionsterm ändert den Charakter der Gleichung von hyperbolisch 1. Ordnung auf parabolisch 2. Ordnung. Eine weitere Diskussion erfolgt später.

Wählt man weiterhin $\frac{dx}{dt} = \lambda$, dann ergibt beim Vergleich von Gleichung (5.3) und Gleichung (5.2)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Das heißt, $du = 0$ entlang der Kurve $x(t)$ mit der Steigung $\frac{dx}{dt} = \lambda$. Die Kurve $x(t)$ ist eine Charakteristik in der Raum-Zeit-Ebene.

Allgemein ist eine Charakteristik eine Kurve, entlang derer für die Lösung einer partiellen Differentialgleichung spezielle, einfache Zusammenhänge gelten. Im Fall der linearen Transportgleichung sind diese besonders einfach, da die Steigung der Kurven $\frac{dx}{dt} = \lambda = \text{konst}$ ist. Es gilt also

$$x(t) = x_0 + \lambda t , \quad (5.4)$$

wobei x_0 eine Integrationskonstante ist, die durch die Position zum Zeitpunkt $t = 0$ bestimmt wird. Da die Änderung der Größe u entlang der Charakteristik $x(t)$ Null ist ($du = 0$), gilt

$$\begin{aligned} u(t) &= u(x(t), t) = \text{konst}|_{x=x(t)} = u(x_0, 0) = g(x_0) \\ \stackrel{(5.4)}{\Rightarrow} u(x, t) &= g(x - \lambda t) , . \end{aligned}$$

Das heißt der Anfangswert breitet sich entlang der Geraden $x_0 + \lambda t$ aus. Die Anfangsverteilung g wird also mit der Geschwindigkeit λ durch das Gebiet transportiert. Zwischen zwei unterschiedlichen Zeitpunkten ändert sich die Form der Verteilung nicht, sondern lediglich die Position.

Auch wenn die totale Ableitung $\frac{du}{dt}$ konstant ist, bedeutet dies sicher nicht, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ Null sind. Vielmehr ist die Kurve $x(t)$ so gewählt, dass die partiellen Ableitungen sich nach Gleichung (5.2) aufheben.

5.2 Charakteristiken aus Burgersgleichung (nicht-lineare Gleichungen 1. Ordnung)

Das erarbeitete Konzept der Charakteristiken soll nun auf die nichtlineare Burgersgleichung

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = \varepsilon \partial_x^2 u \quad \text{oder} \quad \partial_t u + u \partial_x u = \varepsilon \partial_x^2 u$$

erweitert werden. Die Schreibweise auf der linken Seite wird als Divergenzform bezeichnet. Die Schreibweise auf der rechten Seite wird konvektive Form genannt. Diese kann als Prototyp der Impulsgleichung aufgefasst werden. Auf der linken Seite handelt es sich um den nichtlinearen Transportterm. Auf der

rechten Seite steht der Reibungsterm. In Divergenzform kann die Burgersgleichung wie oben mit dem Fluss f geschrieben als

$$\partial_t u + \partial_x \underbrace{\left(\frac{u^2}{2} - \varepsilon \partial_x u \right)}_f = 0 .$$

Nun wird die konvektive Form oder auch quasi-lineare Form der Burgersgleichung unter Vernachlässigung der Reibung ($\varepsilon \approx 0$) betrachtet

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 . \quad (5.5)$$

Wiederum wird der Ansatz $x = x(t)$ gewählt. Das totale Differential von u nach Gleichung (5.3) entspricht Gleichung (5.5), wenn $\frac{dx}{dt} = u$ gewählt wird. Das heißt

$$\frac{du}{dt} = \partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad \text{entlang} \quad \frac{dx}{dt} = u .$$

Daraus folgt $du = 0$ entlang der Charakteristik $\frac{dx}{dt} = u$. Da entlang der Charakteristik die Größe u = konst ist, ist die Steigung der Charakteristiken ebenfalls konstant und es gilt

$$\frac{dx}{dt} = \text{konst} \Rightarrow x = x_0 + u(0, x_0) t ,$$

wobei x_0 wiederum eine Integrationskonstante ist. Die Charakteristiken haben aber nun verschiedene Steigungen, je nach Anfangswert $u(0, x_0)$.

5.3 Entstehung eines Stoßes

Die Lösung kann leicht entlang der Charakteristiken entwickelt werden. Man erkennt in Abbildung 5.1, dass sich die Wellen mit zunehmender Zeit aufteilen. Schnittpunkte der Charakteristiken ergeben Mehrdeutigkeiten; es gibt also keine eindeutige Lösung. Ein Stoß entsteht, d.h. die betrachtete Größe ändert sich sprunghaft bzw. sehr stark. Stoße sind physikalisch sinnvoll und treten durchaus in technischen Anwendungen auf. Im Inkompressiblen ist beispielsweise dabei der sog. hydraulische Sprung zu nennen. Im Kompressiblen gibt es im Überschall den Verdichtungsstoß.

In Stoßen ist der Reibungseinfluss nicht zu vernachlässigen. Die Argumentation ist analog zur Grenzschichttheorie. Außerhalb des Stoßes sind die Gradienten (Ableitungen) klein. Innerhalb des Stoßes sind diese jedoch sehr groß. Aufgrund des ebenfalls kleinen Faktors ε kann in großer Entfernung vom Stoß der Reibungsterm vernachlässigt. In der Nähe des Stoßes ist der Term $\varepsilon \partial_x^2 u$ jedoch relevant, da die Gradienten sehr groß sind. Der Reibungsterm sorgt dafür, dass kinetische Energie durch den Stoß in innere Energie umgewandelt wird. Wie wir später noch sehen werden, ist der Reibungsterm wichtig für die Beschreibung des Stoßes.

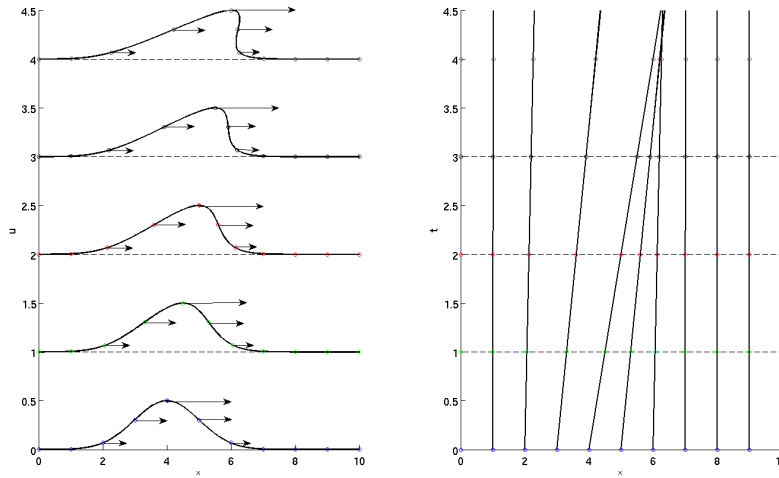


Abbildung 5.1: links: Stoßentwicklung, Aufsteilen der Welle; rechts: Charakteristiken

5.4 Berechnung der Stoßgeschwindigkeit

Aus der Stoßhöhe kann mit der Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung die Stoßgeschwindigkeit berechnet werden. Mit Stoßgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit gemeint, mit der sich der Stoß durch das Gebiet bewegt. Die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung leitet sich aus den erhaltenden Größen her, in diesem Fall dem Impuls. Im Folgenden berücksichtigen wir wieder die Reibung, da diese wesentlich für die spätere Diskussion ist. Die Burgersgleichung in Divergenzform lautet

$$\partial_t u + \partial_x \underbrace{\left(\frac{u^2}{2} - \varepsilon \partial_x u \right)}_{=f} = 0 \Leftrightarrow \partial_t u + \partial_x f = 0 .$$

Nun bilden wir das räumliche Integral über den Stoßbereich, wobei die Grenzen außerhalb des Stoßes liegen, siehe Abbildung 5.2. Der Fluss tritt wiederum lediglich an den Rändern auf. Es ergibt sich

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} u \, dx + [f]_{x_1}^{x_2} = 0 . \quad (5.6)$$

Wir nehmen an, der Stoß habe die Form wie im Abbildung 5.2 und s ist die Stoßgeschwindigkeit. Mit der Annahme, dass die in Abbildung 5.2 eingezeichneten Flächen gleich sind, kann der integrale Term der obigen Gleichung

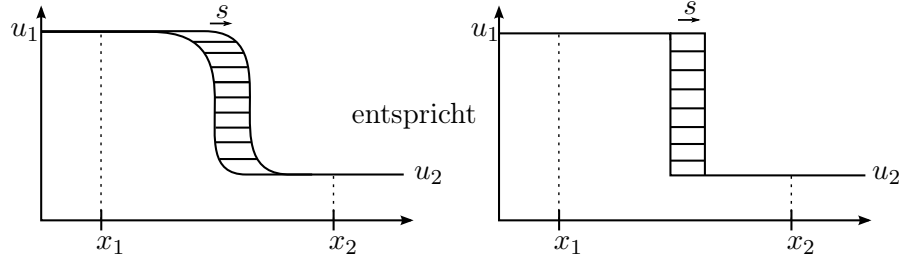


Abbildung 5.2: Stoßentwicklung, Aufsteilen der Welle

vereinfacht werden. Die zeitliche Änderung der Fläche gilt also

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} u \, dx = s(u_1 - u_2) = -s[u]_{x_1}^{x_2}.$$

Für Gleichung 5.6 ergibt sich damit

$$-s[u]_{x_1}^{x_2} + [f]_{x_1}^{x_2} = 0 \Rightarrow s = \frac{[f]}{[u]}, \quad (5.7)$$

wobei mit $[\cdot] = (\cdot)_2 - (\cdot)_1$ die Sprungklammer bzw. der Sprung der betrachteten Größe gemeint ist. Das heißt aus u_1 und u_2 kann der Sprung im Fluss f und damit die Stoßgeschwindigkeit s bestimmt werden. Wenn nun x_1 und x_2 weit weg vom Stoß gewählt wird, sind die Ableitungen bzw. Anstiege dort klein (vgl. Abbildung 5.2). Dort gilt für die Steigung $\partial_x u \ll 1$. Da $\varepsilon \ll 1$ und die Steigung in den Punkten x_1 und x_2 sehr klein ist, kann der Reibungsterm $\varepsilon \partial_x u$ bei der Auswertung des Flusses in den Punkten x_1 und x_2 vernachlässigt werden. Für die Stoßgeschwindigkeit ergibt sich also

$$s = \frac{\left[\frac{u^2}{2}\right]}{[u]} = \frac{1}{2} \frac{u_2^2 - u_1^2}{u_2 - u_1} = \frac{1}{2} \frac{(u_2 + u_1)(u_2 - u_1)}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 + u_1}{2}. \quad (5.8)$$

5.5 Berechnung der Stoßstruktur

Zur Berechnung der Stoßstruktur wird wiederum die Burgersgleichung in Divergenz unter Berücksichtigung der Reibung verwendet. Diese lautet

$$\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = \varepsilon \partial_x^2 u. \quad (5.9)$$

Zur Lösung wird eine sog. Galileitransformation genutzt. Dazu wird eine neue Koordinate ξ verwendet. Für diese gilt

$$\xi(t, x) = x - st, \quad (5.10)$$

wobei s wie oben die Stoßgeschwindigkeit bezeichnet. Das neue Koordinatensystem bewegt sich also mit dem Stoß mit. Der Stoß hat im ξ -System stets die Koordinate $\xi = 0$. Die skalare Größe u wird ebenfalls im ξ -System ausgedrückt, d.h. $u = u(\xi(t, x))$. Mit Hilfe der Kettenregel kann die Burgersgleichung damit im ξ -System geschrieben werden als

$$\partial_t \xi \frac{du}{d\xi} + \partial_x \xi \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \varepsilon (\partial_x \xi)^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \varepsilon \partial_x^2 \xi \frac{du}{d\xi}.$$

Mit Hilfe von Gleichung (5.10) können die partiellen Ableitungen ausgewertet werden und es ergibt sich

$$-s \frac{du}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \varepsilon \frac{d^2 u}{d\xi^2}. \quad (5.11)$$

Mit Hilfe der Transformation konnte die partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung überführt werden, in der lediglich Ableitung nach ξ auftreten. Einmaliges Integrieren führt auf

$$-su + \frac{u^2}{2} + C = \varepsilon \frac{du}{d\xi}, \quad (5.12)$$

mit noch zu bestimmender Integrationskonstante C . Die linke Seite der obigen Gleichung ist ein quadratisches Polynom, welches sich in zwei Linearfaktoren zerlegen lässt. Für $\xi \rightarrow \infty$, also weit rechts vom Stoß, gilt $u \rightarrow u_2$ und die Steigung der Funktion, d. h. die rechte Seite, verschwindet. Damit ist u_1 eine Wurzel des Polynoms. Ebenso kann man für $\xi \rightarrow -\infty$, also weit links vom Stoß, argumentieren. An den Stellen u_1 und u_2 gilt also die Bedingung

$$\frac{u_1^2}{2} - su_1 + C = \frac{u_2^2}{2} - su_2 + C = 0. \quad (5.13)$$

Durch Einsetzen der Stoßgeschwindigkeit nach Gleichung (5.8) in die obige Gleichung ergibt sich die Integrationskonstante C zu

$$C = \frac{u_1 u_2}{2}. \quad (5.14)$$

Damit ergibt sich die Linearfaktorzerlegung des Polynoms zu

$$\frac{u^2}{2} - \frac{u_1 + u_2}{2} u + \frac{u_1 u_2}{2} = -\frac{1}{2} (u - u_2)(u_1 - u). \quad (5.15)$$

Mit der obigen Linearfaktorzerlegung ergibt sich Gleichung (5.12) durch Trennung zu

$$\frac{1}{\varepsilon} \int d\xi = \int \frac{-2}{(u - u_2)(u_1 - u)} du. \quad (5.16)$$

Die Nullstellen des Polynoms als Wert weit links und rechts vom Stoß sind sinnvoll, da mit $\xi \rightarrow \infty$ auch das Integral unendlich werden muss. Dies ist nur

möglich, wenn der Nenner Null wird (eine logarithmische Divergenz). Selbiges gilt auch für $\xi \rightarrow -\infty$. Die Bedeutung von u_1 und u_2 könnte man auch offen lassen und am expliziten Ausdruck am Ende ablesen. Um die rechte Seite integrieren zu können, wird eine Partialbruchzerlegung genutzt. Diese ergibt sich zu

$$\frac{-2}{(u - u_2)(u_1 - u)} = \frac{-2}{u_1 - u_2} \left(\frac{1}{u_1 - u} + \frac{1}{u - u_2} \right). \quad (5.17)$$

Das Integral kann ausgeführt werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\varepsilon} &= \frac{2}{u_1 - u_2} (\ln(u_1 - u) - \ln(u - u_2)) + \tilde{C} \\ &= \frac{2}{u_1 - u_2} \ln \left(\frac{u_1 - u}{u - u_2} \right) + \tilde{C}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

wobei \tilde{C} eine weitere Integrationskonstante ist. Diese ergibt sich zu Null, da die Größe u an der Stelle $\xi = 0$ gleich dem Mittelwert aus u_1 und u_2 entspricht. Daraus folgt

$$\frac{\xi}{\lambda} = \ln \left(\frac{u_1 - u}{u - u_2} \right), \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\varepsilon}{u_1 - u_2}. \quad (5.19)$$

Anhand der obigen Gleichung ist erkennbar, dass die Konstante λ die Dimension einer Länge hat. Zur Beschreibung der Stoßstruktur kann die obige Gleichung umgeschrieben zu

$$u(\xi) = \frac{u_1 + u_2 \exp(\xi/\lambda)}{1 + \exp(\xi/\lambda)} \quad (5.20)$$

Im Fall des Grenzübergangs $\xi \rightarrow \infty$ ergibt sich dabei der Wert u_2 und für $\xi \rightarrow -\infty$ nach der Wert u_1 .

5.6 Betrachtung der kinetischen Energie im Stoß

Die Energie ist wichtig zum Verständnis des Stoßes. Für die Burgersgleichung ist das speziell die kinetische Energie, da keine innere Energie modelliert wird. Skalare Multiplikation der Burgersgleichung mit u und geschicktes Umschreiben ergibt die Energiegleichung

$$\partial_t \frac{u^2}{2} + \partial_x \frac{u^3}{3} = \varepsilon u \partial_x^2 u.$$

Die Integration über das betrachtete Gebiet liefert

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} \frac{u^2}{2} dx + \left[\frac{u^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} = \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} u \partial_x^2 u dx.$$

Analog wie zuvor für den (scharfen) Sprung kann das Integral auf der linken Seite mit der Stoßgeschwindigkeit geschrieben werden als

$$-s \left[\frac{u^2}{2} \right] + \left[\frac{u^3}{3} \right] = \varepsilon \int u \partial_x^2 u \, dx . \quad (5.21)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite, welcher proportional zu ε ist, reduziert sich nicht zu den Randtermen. Die Energie ist also nicht erhalten. Der Reibungsterm ist **nicht** klein, da $\partial_x^2 u$ im Stoß sehr groß ist. Setzt man die rechte Seite trotzdem zu Null, ergibt sich

$$\tilde{s} \left[\frac{u^2}{2} \right] = \left[\frac{u^3}{3} \right]$$

mit anderer und falscher Stoßgeschwindigkeit \tilde{s} . D. h. die Erhaltung von Impuls und kinetischer Energie kann nicht gleichzeitig gewährleistet werden, da man zwei verschiedene unverträgliche Stoßgeschwindigkeiten erhält. Reibung setzt kinetische Energie in innere Energie um (Dissipation).

Das Integral des Reibungsterms kann durch partielle Integration umgeschrieben werden zu

$$\varepsilon \int u \partial_x^2 u \, dx = \underbrace{\varepsilon [u \partial_x u]_{x_0}^{x_1}}_{\text{klein außerhalb des Stoßes}} - \underbrace{\varepsilon \int (\partial_x u)^2 \, dx}_{>0} .$$

Aus dieser Umschreibung ist erkennbar, dass kinetische Energie vernichtet wird, da $\varepsilon > 0$ ist. Die innere Energie ist nicht Teil des betrachteten Modells. Allerdings gibt es bei den Navier-Stokes-Gleichungen in der Bilanz der inneren Energie einen Quellterm, der die Produktion innerer Energie durch Reibung beschreibt. Reibung erzeugt also innere Energie (Bei idealen Gasen entspricht dies Temperatur und Druck).

Die linke Seite der Energiebilanz über dem Stoß nach Gleichung (5.21) ergibt sich unter Verwendung der richtigen Stoßgeschwindigkeit nach Gleichung (5.8) zu

$$\begin{aligned} -s \left[\frac{u^2}{2} \right] + \left[\frac{u^3}{3} \right] &= -\frac{s}{2} (u_2^2 - u_1^2) + \frac{1}{3} (u_2^3 - u_1^3) \\ &= \frac{u_1 + u_2}{4} (u_1^2 - u_2^2) + \frac{1}{3} (u_2^3 - u_1^3) \\ &= \frac{1}{12} (u_2^3 - 3u_2^2 u_1 + 3u_2 u_1^2 - u_1^3) \\ &= \frac{1}{12} (u_2 - u_1)^3 = -\varepsilon \int (\partial_x u)^2 \, dx + \underbrace{\varepsilon [u \partial_x u]}_{\ll 1} . \end{aligned} \quad (5.22)$$

So haben wir einen Ausdruck für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie gefunden. Der zweite Term auf der rechten Seite wird weit weg entfernt

vom Stoß ausgewertet. Dort ist Ableitung sehr klein. Deshalb wird dieser Term als klein angenommen werden. Damit verbleibt der Integralterm als dominierender Term auf der rechten Seite. Dieser ist kleiner Null, was der Dissipation der kinetischen Energie entspricht. Da die rechte Seite der obigen Gleichung kleiner Null ist, muss $(u_2 - u_1)^3 < 0$ gelten. Daraus folgt wegen $u_2, u_1 > 0$ die Bedingung $u_2 < u_1$. Dies entspricht eine sog. Entropiebedingung, siehe dazu Abbildung 5.3a.

Im Fall in Abbildung 5.3b würde Energie durch Reibung erzeugt werden, was jedoch offensichtlich „entropieverletzend“ wäre. Stattdessen gibt es eine weitere Lösung, die im folgenden Abschnitt diskutiert wird.

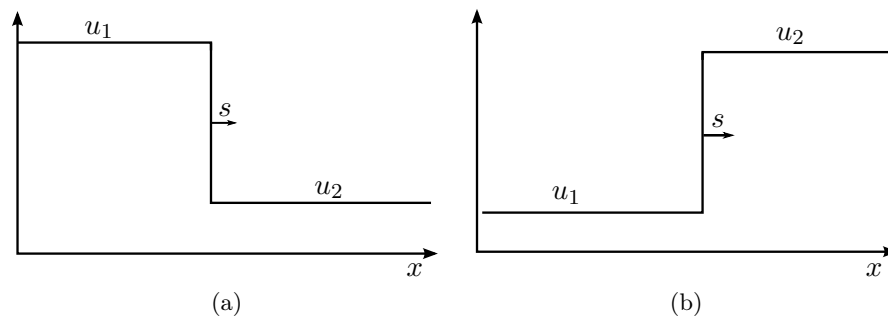


Abbildung 5.3: Stoßentwicklung: (a) möglich, (b) unmöglich, da die Entropiebedingung verletzt wird.

5.7 Verdünnungswellen

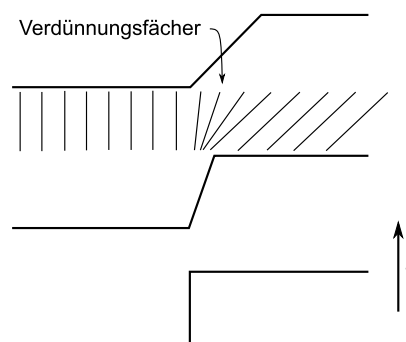


Abbildung 5.4: Die Verdünnungswelle, auch Verdünnungs- oder Expansionsfächer genannt. Dargestellt ist die Lösung zum Startzeitpunkt und deren Evolution. Die Charakteristiken sind ebenfalls skizziert.

Wie eben gesehen ist ein Stoß nicht möglich, wenn $u_2 < u_1$ ist. Stattdes-

sen treten Verdünnungswellen auf. Diese können beschrieben durch




$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & x < u_1 t \\ x/t & u_2 t < x < u_1 t \\ u_2 & u_2 t < x \end{cases} . \quad (5.23)$$

Um zu zeigen, dass dies die Lösung für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist, muss sowohl die Impulsbilanz als auch die Energiebilanz gelten. Für die Impulsbilanz wird der Gesamtimpuls $\int u \, dx$ betrachtet. Durch Integration der Burgersgleichung erhält man wie bereits bekannt die Änderung des Gesamtimpulses als

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} u \, dx = -[f]_{x_1}^{x_2} , \quad (5.24)$$

wobei x_1 und x_2 sehr weit entfernt vom Expansionsfächer sind. Mit der Funktion nach Gleichung (5.23) erhält man für die zeitliche Änderung des Integrals



$$\begin{aligned} \partial_t \int_{x_1}^{x_2} u \, dx &= \partial_t \left(\int_{x_1}^{u_1 t} u_1 \, dx + \int_{u_1 t}^{u_2 t} \frac{x}{t} \, dx + \int_{u_2 t}^{x_2} u_2 \, dx \right) = \partial_t \frac{1}{2} (u_1^2 t - u_2^2 t) \\ &= \frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Für den Fluss gilt

$$-[f]_{x_1}^{x_2} = - \left[\frac{u^2}{2} - \varepsilon \partial_x u \right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) = \frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) . \quad (5.26)$$

Dabei ist ausgenutzt worden, dass der Reibungsterm in großer Entfernung zur Unstetigkeit Null ist, vergleiche Abbildung 5.4. Damit ist gezeigt, dass die Burgersgleichung bzw. Impulsbilanz erfüllt ist.

Die Bilanzgleichung für die kinetische Energie wird für den Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ betrachtet. Das heißt also die Reibung wird nicht berücksichtigt. Mit Hilfe der expliziten Form für u nach Gleichung (5.23) berechnet man

wiederum durch Integration

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \int_{x_1}^{x_2} \frac{u^2}{2} dx + \left[\frac{u^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} \\
 &= \partial_t \left(\int_{x_1}^{u_1 t} \frac{u_1^2}{2} dx + \int_{u_1 t}^{u_2 t} \frac{x^2}{2t^2} dx + \int_{u_2 t}^{x_2} \frac{u_2^2}{2} dx \right) + \left[\frac{u^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} \\
 &= \partial_t \left(\frac{u_1^2}{2} (u_1 t - x_1) + \frac{1}{6} (u_2^3 t - u_1^3 t) + \frac{u_2^2}{2} (x_2 - u_2 t) \right) + \left[\frac{u^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (5.27) \\
 &= \left(\frac{u_1^3}{2} + \frac{1}{6} (u_2^3 - u_1^3) - \frac{u_2^2}{2} \right) + \left[\frac{u^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} \\
 &= \frac{u_1^3 - u_2^3}{3} + \frac{u_2^3 - u_1^3}{3} = 0.
 \end{aligned}$$

Damit ist die Energiegleichung ohne Berücksichtigung der Reibung erfüllt. In einer Verdünnungswelle wird unter der Voraussetzung bei $\varepsilon \rightarrow 0$ also keine kinetische Energie dissipiert.

Der Stoß und die Verdünnungswelle, auch Expansionsfächer genannt, sind in Abbildung 5.5 gegenübergestellt. Beide sind Lösung zu unstetigen Anfangsbedingungen der Burgersgleichung. Beim Stoß bleibt die Lösung unstetig. Bei der Verdünnungswelle ergibt sich eine stetige Lösung. Die Art der Lösung, die sich einstellt, ist abhängig vom Sprung in der Anfangsbedingung.

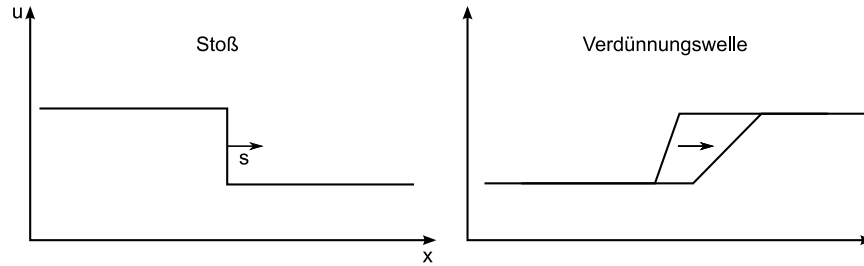


Abbildung 5.5: Stoß, Verdünnung

Bemerkungen

- Lösung von diskontinuierlichen Startlösungen werden Riemannprobleme genannt. Stoß und Verdünnungswelle finden sich als Lösungsteile bei Systemen.
- Falls der Reibungsterm weggelassen wird, ist der Charakter der Differentialgleichung hyperbolisch. Durch Berücksichtigung der Reibung wird die Differentialgleichung parabolisch. Dadurch gibt es aber auch

einen Informationsfluss gegen die Strömungsrichtung. Wenn die Reibung klein ist, dann ist eine hyperbolische Lösung eine gute Approximation. Im Stoß ist die Reibung dominant und Charakteristiken vereinigen sich durch einen Stoß. Reibung kann approximiert als Quellterm behandelt werden, sie krümmt dann die Charakteristiken.

Kapitel 6

Hyperbolische Systeme

In diesem Teil wird die Erweiterung des Charakteristikenkonzepts auf lineare und nichtlineare Systeme gezeigt. Dabei wird nicht mehr nur eine partielle Differentialgleichung sondern ein System von gekoppelten Differentialgleichungen betrachtet.

6.1 Die eindimensionale lineare Wellengleichung

Im Folgenden soll der Schritt zu Systemen gemacht werden, zunächst wieder nur im linearen Fall. Dazu wird das System auf verschiedene Weise gelöst. Es wird beispielhaft das gekoppelte partielle Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\partial_t v + \partial_x u &= 0, \\ \partial_t u + \partial_x v &= 0.\end{aligned}\tag{6.1}$$

betrachtet, welches die Ausbreitung von Wellen beschreibt. Das System ist linear in den Größen u und v . Nun werden verschiedene Lösungsmethoden für Gleichung (6.1) präsentiert.

Methode 1 – Zurückführen auf die klassische Wellengleichung

Es ist möglich das System auf die klassische Wellengleichung zu überführen. Dazu wird der Ausdruck $\partial_t(6.1)_{II} - \partial_x(6.1)_I$ gebildet und es ergibt sich

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \Leftrightarrow (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u = 0.$$

Im zweiten Schritt sind die Ableitungen mit der binomischen Formel zerlegt worden. So können diese als Produkt von zwei Transportoperatoren geschrieben. Die Lösung benannt nach d'Alembert ergibt sich aus Superposition einer nach links (f_2) und einer nach rechts (f_1) laufenden Welle und lautet

$$u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

mit $c = 1$, wie man schnell nachrechnet. Die explizite Lösung für u ergibt sich aus der Anfangsbedingung. Die Lösung für v kann analog oder durch Einsetzen von u in Gleichung (6.1) bestimmt werden.

Methode 2 – Bestimmen der Charakteristiken

Um die Charakteristiken des System in Gleichung (6.1) zu finden, können die Gleichungen (6.1) addiert bzw. subtrahiert werden. Durch eine geschickte Linearkombination ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_t(u+v) + \partial_x(u+v) &= 0, \\ \partial_t(u-v) - \partial_x(u-v) &= 0.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Führt man die neuen Variablen $p = u + v$ und $q = u - v$ ein, so lässt sich das System schreiben als

$$\begin{aligned}\partial_t p + \partial_x p &= 0, \\ \partial_t q - \partial_x q &= 0.\end{aligned}$$



In den neuen Variablen p und q ist das System entkoppelt und jede Gleichung kann separat gelöst werden. Die Charakteristiken werden bestimmt und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} = \partial_t p + \partial_x p &= 0 \quad \text{falls} \quad \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dq}{dt} = \partial_t q - \partial_x q &= 0 \quad \text{falls} \quad \frac{dx}{dt} = -1.\end{aligned}$$

Die Charakteristiken $\frac{dx}{dt} = 1$ und $\frac{dx}{dt} = -1$ sind konstant. Deshalb gilt für die Variablen p und q

$$\begin{aligned}p(t, x(t)) &= \text{konst} \quad \text{entlang} \quad x = x_0 + t, \\ q(t, x(t)) &= \text{konst} \quad \text{entlang} \quad x = x_0 - t.\end{aligned}$$

Die Lösung ergibt sich also aus den Anfangsbedingungen zu einer nach links und einer nach rechts laufenden Welle

$$\begin{aligned}q &= f(x - ct), \\ p &= g(x + ct),\end{aligned}$$

wobei wiederum $c = 1$ gilt. Diese Lösung können wir wieder in u und v umschreiben zu

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f, \\ v &= \frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}f.\end{aligned}$$

Durch geschicktes Kombinieren konnten die Charakteristiken gefunden werden. Es stellt sich allerdings die Frage wie dieses systematisch funktioniert. Bei komplizierteren Systemen oder höhere Dimension ist die geschickte Linearkombination die zur Entkopplung führt nicht so leicht zu finden.

Methode 3 – Das Charakteristikenverfahren und die quasilinear Form

Diese Methode liefert einen systematischen Zugang zur Berechnung der Charakteristiken. Dazu wird Gleichung (6.1) als Vektorgleichung geschrieben werden

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_x \Leftrightarrow \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Diese Form wird als quasilinear Form bezeichnet, wobei der Vektor \mathbf{q} als Zustands- oder Variablenvektor bezeichnet wird. Nun wird die Systemmatrix \mathbf{A} diagonalisiert, um das System zu entkoppeln. Zunächst werden die Eigenwert λ berechnet. Das charakteristische Polynom liefert die Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\pm} = \pm 1.$$

Mit den so bestimmten rein reellen Eigenwerte λ_{\pm} können nun die Eigenvektoren bestimmt werden. An dieser Stelle werden sowohl die Rechts- als auch die Links-Eigenvektoren bestimmt. Für die Links-Eigenvektoren \mathbf{e}^{\pm} gilt

$$\mathbf{e}^{\pm} \mathbf{A} = \lambda_{\pm} \mathbf{e}^{\pm} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\pm} (\mathbf{A} - \lambda_{\pm} \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\pm} \begin{bmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{bmatrix} = 0$$

Die Lösung der linearen Gleichungssysteme liefert für die Links-Eigenvektoren die mögliche nicht eindeutige Lösung

$$\mathbf{e}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Für die Links-Eigenvektoren \mathbf{e}^{\pm} ergibt sich

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_{\pm} = \lambda_{\pm} \mathbf{e}_{\pm} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda_{\pm} \mathbf{I}) \mathbf{e}_{\pm} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}_{\pm} = 0$$

Damit erhält unter Beachtung der Normierungsbedingung für die Eigenvektoren $\mathbf{e}^+ \cdot \mathbf{e}_+ = \mathbf{e}^- \cdot \mathbf{e}_- = 1$ und durch Lösung des linearen Gleichungssystems die Rechtss-Eigenvektoren zu

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Damit kann die Matrix \mathbf{A} zerlegt werden und die Zerlegung ergibt sich durch die Links- und Rechts-Eigenvektoren zu

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{e}_+ & \mathbf{e}_- \end{array} \right] \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^+ \\ \mathbf{e}^- \end{bmatrix}.$$

Man rechnet schnell nach, dass die Links- und Rechts-Eigenvektormatrizen aufgrund der gewählten Normierung invers zueinander sind. Die quasilinear Form in Gleichung (6.1) kann damit geschrieben werden als

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{T} \Lambda \mathbf{T}^{-1} \partial_x \mathbf{q} = 0 \quad (6.3)$$

Wird diese Gleichung mit \mathbf{T}^{-1} multipliziert, so ergibt sich

$$\mathbf{T}^{-1} \partial_t \mathbf{q} + \Lambda \mathbf{T}^{-1} \partial_x \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \partial_t \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \partial_x \mathbf{q} = 0$$

Setzt man für \mathbf{q} wiederum u und v ein, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren mit der führenden Matrix

$$\begin{bmatrix} \partial_t u + \partial_t v \\ \partial_t u - \partial_t v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u + \partial_x v \\ \partial_x u - \partial_x v \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Schreibt man dieses System als skalare Gleichungen, so ergibt sich daraus wiederum Gleichung (6.2). Für Gleichung (6.2) sind die Lösungen bereits bestimmt worden. Wie man beim Vergleich erkennt, entsprechen die Charakteristiken den Eigenwerten der Systemmatrix. Die Rechts-Eigenvektoren entscheiden über die Linearkombination, die zu den neuen Variablen p und q führt.

6.2 Die eindimensionalen Eulergleichungen als nicht-lineares System

Die eindimensionalen Eulergleichungen bestehen aus den Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie in einer Dimension. Die Eulergleichungen beschreiben die reibungsfreie und adiabate Strömung. Deshalb sind die Prozesse isentrop und das System ist hyperbolisch. Die Massen- und die Impulsgleichung lauten

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u u) + \partial_x p &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Es wird davon ausgegangen, dass die Entropie s im gesamten Gebiet konstant ist. Dann hängen die thermodynamischen Variablen lediglich von einer unabhängigen Variablen ab. Für den Druck lässt sich deshalb schreiben: $p(\rho, s) \equiv p(\rho)$. Mit der Definition der Schallgeschwindigkeit c lässt sich der Druckgradienten daher durch den Dichtegradienten ersetzen. Es gilt

$$\partial_x p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \partial_x \rho = c^2 \partial_x \rho. \quad (6.5)$$

Durch das Einsetzen der Massenbilanz in die Impulsgleichung und unter Verwendung von Gleichung (6.5) werden die Gleichungen (6.4) zu

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u &= 0, \\ \rho \partial_t u + \rho u \partial_x u + c^2 \partial_x \rho &= 0.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Um die Charakteristiken zu bestimmen, verwenden wir nun zunächst Methode 2 aus dem vorherigen Abschnitt. Später wenden wir ebenfalls Methode 3 an. Um die Charakteristiken zu bestimmen, suchen wir also eine geschickte Kombination der Gleichungen (6.6). Mit der Linearkombination $c(6.6)_I \pm (6.6)_{II}$ und anschließendem Umformen erhält man

$$\begin{aligned}c(\partial_t \rho + (u + c) \partial_x \rho) + \rho(\partial_t u + (u + c) \partial_x u) &= 0, \\ c(\partial_t \rho + (u - c) \partial_x \rho) - \rho(\partial_t u + (u - c) \partial_x u) &= 0.\end{aligned}$$

Um einen Ausdruck für das totale Differential der Dichte ρ bzw. der Geschwindigkeit u zu erhalten

$$\frac{d\rho}{dt} = \partial_t \rho + \frac{dx}{dt} \partial_x \rho \quad \text{bzw.}, \quad \frac{du}{dt} = \partial_t u + \frac{dx}{dt} \partial_x u.$$

wählen wir die Charakteristiken als $\frac{dx}{dt} = u + c$ bzw. $\frac{dx}{dt} = u - c$. So ergibt sich

$$\begin{aligned}c \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du}{dt} &= 0 \quad \text{falls} \quad \frac{dx}{dt} = u + c, \\ c \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{du}{dt} &= 0 \quad \text{falls} \quad \frac{dx}{dt} = u - c.\end{aligned}$$

Die Charakteristiken sind bei den Eulergleichungen nicht mehr konstant, da es sich um ein nichtlineares System handelt. Formt man die obigen Gleichungen um und integriert nach der Zeit t , so ergibt sich für beide Gleichungen

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho \pm u = \text{konst.}$$

Die Funktion $c(\rho)$ ergibt sich aus der Zustandsgleichung des betrachteten Gases. Das Integral kann also als eine Funktion $w(\rho)$ geschrieben werden, welche prinzipiell bekannt ist. Damit kann die obige Gleichung geschrieben werden als

$$w(\rho) \pm u = \text{konst.} \quad \text{entlang} \quad \frac{dx}{dt} = u \pm c.$$

Die erhaltenen Größen $w(\rho) \pm u$ werden Riemann-Invarianten genannt. Die Charakteristikensteigung $\frac{dx}{dt}$ hängt von der lokalen Lösung ab. Es sind offensichtlich Schallwellen die sich relativ zur Strömung mit der Schallgeschwindigkeit c ausbreiten.

Wie kann man nun die Charakteristiken finden **ohne** eine geschickte Kombinationen zu raten? Dazu wird nun Methode 3 aus dem vorherigen Abschnitt angewendet. Der Weg ist praktisch identisch mit dem linearen Fall. Gleichung (6.6) lautet in Vektorform

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \partial_x \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

Die Eigenwerte von \mathbf{A} ergeben sich zu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (u - \lambda)^2 - c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = u \pm c.$$

Für die Rechts-Eigenvektoren \mathbf{e}_{\pm} lautet die Bestimmungsgleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda_{\pm} \mathbf{I}) \mathbf{e}_{\pm} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mp c & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & \mp c \end{bmatrix} \mathbf{e}_{\pm} = \mathbf{0}.$$

Eine mögliche Wahl für die Rechts-Eigenvektoren ergibt sich zu

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{c}{\rho} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{c}{\rho} \end{bmatrix}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem Rechts-Eigenvektor wurde aus Gründen der Normierung gewählt.

Für die Links-Eigenvektoren \mathbf{e}^{\pm} lautet die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{e}^{\pm} (\mathbf{A} - \lambda_{\pm} \mathbf{I}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\pm} \begin{bmatrix} \mp c & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & \mp c \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung für die Normierung $\underline{e}^+ \underline{e}_+ = \underline{e}^- \underline{e}_- = 1$ ergeben sich die Linkss-Eigenvektoren zu

$$\mathbf{e}^+ = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^- = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\rho}{c} \end{bmatrix}.$$

Wie oben kann die Systemmatrix \mathbf{A} damit zerlegt werden. Für die Zerlegung gilt

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c}{\rho} & -\frac{c}{\rho} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{T}} \begin{bmatrix} u+c & 0 \\ 0 & u-c \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{c} \\ 1 & -\frac{\rho}{c} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{T}^{-1}}.$$

Wenn diese Zerlegung in Gleichung (6.7) eingesetzt wird und die entstehende Gleichung mit \mathbf{T}^{-1} multipliziert wird, ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{c} \\ 1 & -\frac{\rho}{c} \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u+c & 0 \\ 0 & u-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{c} \\ 1 & -\frac{\rho}{c} \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Schreibt man dies als zwei skalare Gleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\partial_t \rho + \frac{\rho}{c} \partial_t u \right) + (u + c) \left(\partial_x \rho + \frac{\rho}{c} \partial_x u \right) &= 0, \\ \left(\partial_t \rho - \frac{\rho}{c} \partial_t u \right) + (u - c) \left(\partial_x \rho - \frac{\rho}{c} \partial_x u \right) &= 0. \end{aligned}$$

Um das totale Differential zu erhalten, können die Terme anders sortiert werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} (\partial_t \rho + (u + c) \partial_x \rho) + \frac{\rho}{c} (u_t + (u + c) u_x) &= 0, \\ (\partial_t \rho + (u - c) \partial_x \rho) - \frac{\rho}{c} (u_t + (u - c) u_x) &= 0. \end{aligned}$$

Wie oben ergibt sich daraus äquivalent

$$\begin{aligned} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho + du &= 0 \quad \text{entlang} \quad \frac{dx}{dt} = u + c, \\ \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho - du &= 0 \quad \text{entlang} \quad \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned}$$

Das Vorgehen wird noch einmal klarer, wenn es abstrakt durchgeführt wird. Mit dem Variablenvektor \mathbf{q} lautet Gleichung (6.7)

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{T} \Lambda \mathbf{T}^{-1} \partial_x \mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Dabei ist die Zerlegung der Systemmatrix \mathbf{A} nach Gleichung (6.2) im zweiten Schritt eingesetzt worden. Nach Multiplikation mit der Matrix \mathbf{T}^{-1} ergibt sich

$$\mathbf{T}^{-1} \partial_t \mathbf{q} + \Lambda \mathbf{T}^{-1} \partial_x \mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Die Matrix \mathbf{T}^{-1} besteht aus Zeilen mit Links-Eigenvektoren \mathbf{e}^i und die Matrix Λ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i . Daher ergibt sich die obige Gleichung unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention und des Kronecker-Symbols zu

$$e_k^i \frac{\partial q_k}{\partial t} + \lambda_{\underline{i}} \delta_{\underline{i}j} e_k^j \frac{\partial q_k}{\partial x} = 0. \quad (6.8)$$

Über den unterstrichenen Index \underline{i} wird dabei nicht summiert, d. h. die Einsteinsche Summenkonvention wird ausgesetzt. Unter Ausnutzung der Eigenschaften des Kronecker-Symbols ergibt sich

$$e_k^i \frac{\partial q_k}{\partial t} + \lambda_{\underline{i}} e_k^{\underline{i}} \frac{\partial q_k}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\underline{i}} \cdot \partial_t \mathbf{q} + \lambda_{\underline{i}} \mathbf{e}^{\underline{i}} \cdot \partial_x \mathbf{q} = 0.$$

Im zweiten Schritt in der obigen Gleichung ist dabei die Summation über den Index k als Skalarprodukt geschrieben worden. Der freie Index der obigen

Gleichung ist i . Dieser kann äquivalent durch \pm geschrieben werden. Dann ergibt sich

$$\mathbf{e}^\pm \cdot \partial_t \mathbf{q} + \lambda_\pm \mathbf{e}^\pm \cdot \partial_x \mathbf{q} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^\pm \cdot (\partial_t \mathbf{q} + \lambda_\pm \partial_x \mathbf{q}) = 0$$

Wählt man die Charakteristiken zu $\frac{dx}{dt} = \lambda_\pm$ dann gilt

$$\mathbf{e}^\pm \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0 \quad \text{entlang} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_\pm$$

Unter bestimmten Umständen (bei Integrierbarkeit) lässt sich dies schreiben als

$$\mathbf{e}^\pm \cdot d\mathbf{q} = \delta r^\pm = 0 \quad \text{entlang} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_\pm. \quad (6.9)$$

Die infinitesimal kleine Störung δr^i breitet sich entlang $\frac{dx}{dt} = \lambda_i$ aus. Die Störung ist stets orthonogal zu den Links-Eigenvektoren.

6.3 Lösung der eindimensionalen Eulergleichungen mit dem Charakteristikenverfahren

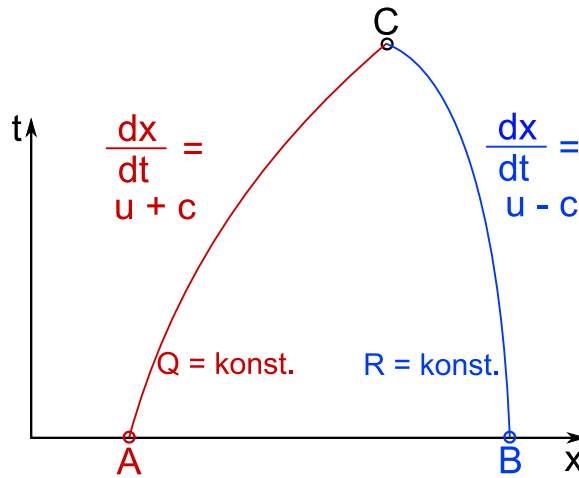


Abbildung 6.1: Charakteristikenverfahren

Für die Riemann-Invarianten Q und R der eindimensionalen Eulergleichung gilt

$$Q = w(\rho) + u, \quad R = w(\rho) - u,$$

wobei Q entlang der Charakteristik mit $\frac{dx}{dt} = u + c$ und R entlang der Charakteristik mit $\frac{dx}{dt} = u - c$ konstant ist, siehe Abbildung 6.1. Ist der Zustand, also die Werte von u und ρ , zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, so kann daraus der Zustand zu einem späteren Zeitpunkt berechnet werden.

Aus den Punkten A und B in Abbildung 6.1 kann mit den Steigungen der Schnittpunkt der rechts- und linksläufigen Charakteristik bestimmt werden. Da Q auf der rechtsläufigen und R auf der linksläufigen Charakteristik konstant ist, gilt

$$Q_A = Q_C, \quad R_B = R_C.$$

Der neue Zustand kann daraus berechnet werden. Das Problem liegt darin, dass die Charakteristiken von der Lösung abhängen. Daher wird in der Praxis bzw. bei der numerischen Umsetzung die Steigung der Charakteristik auf kleinen Teilstücken ausgewertet. Dort wird die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt und der Schnittpunkt der Charakteristiken kann bestimmt werden. Durch sukzessives Anwendung der beschriebenen Methode kann die Lösung im gesamten Gebiet und für den betrachteten Zeitabschnitt berechnet werden.

6.4 Einfache Wellen

Für den Fall, dass eine Riemann-Invariante konstant ist, ergibt sich eine spezielles Lösungsverhalten. Ist eine Riemann-Invariante konstant, z. B. Null, so sind die Lösungen besonders einfach. Gilt also beispielsweise

$$\begin{aligned} w(\rho) + u &= Q \\ w(\rho) - u &= R \equiv 0, \end{aligned}$$

so ergibt sich durch Addition bzw. Subtraktion $w(\rho) = \frac{Q}{2}$ und $u = \frac{Q}{2}$. Entlang der $(u + c)$ -Charakteristik ist Q konstant. Damit sind in diesem Fall u und ρ einzeln konstant. Deshalb ist die Steigung $(u + c)$ ebenfalls konstant. D. h. die Charakteristiken sind Geraden wie bei der Burgersgleichung. Entsprechend existieren die Prozesse Aufsteilen, Stoßentwicklung und Verdünnungswelle wie bei der Burgersgleichung.

Kapitel 7

Das Riemann Problem

7.1 Rankine-Hugoniot Beziehung

Im Folgenden soll die Stoßbeziehung für Systeme von partiellen Differentialgleichungen hergeleitet werden. Dazu werden beispielhaft die Euler-Gleichungen in Divergenzform nach Gleichung (6.4) herangezogen, wobei wir den Druck wieder durch Gleichung (6.5) ausdrücken. Dies ist nicht unproblematisch, weil im Stoß die Reibung wichtig wird. Dort ist die Strömung nicht mehr isentrop; die Entropie ist also nicht mehr konstant. Dies wird später noch genauer untersucht. Für schwache Stöße ist selbiger Ansatz aber näherungsweise zulässig, da man zeigen kann, dass schwache Stöße näherungsweise isentrop sind. Führen wir den Wertevektor $\mathbf{q} = [\rho \ m]^T$ mit $m = \rho u$ und die Abkürzung f^ρ und f^m für die Flüsse der Dichte und des Impulses ein, so ergeben sich die Euler-Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x f^\rho(\mathbf{q}) &= 0 \\ \partial_t m + \partial_x f^m(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \partial_t \mathbf{q} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0. \quad (7.1)$$

Dabei gilt für den vektorwertigen Fluss \mathbf{f}

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} f^\rho(\mathbf{q}) \\ f^m(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + c^2 \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + c^2 \rho \end{bmatrix}.$$

Nehmen wir wieder einen (scharfen) Stoß mit fester Form für die Dichte und den Impuls an, so finden wir analog zur Burgers-Gleichung durch Integration über x die Sprungbedingung. Mit der Stoßgeschwindigkeit s ergibt sich

$$\begin{aligned} s(\rho_2 - \rho_1) &= f^\rho(\mathbf{q}_2) - f^\rho(\mathbf{q}_1) \\ s(m_2 - m_1) &= f^m(\mathbf{q}_2) - f^m(\mathbf{q}_1) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad s[\mathbf{q}] = [\mathbf{f}(\mathbf{q})]. \quad (7.2)$$

Dies sind die Rankine-Hugoniot Bedingungen; in diesem Fall gibt es zwei Gleichungen für die fünf Unbekannten, das sind die Komponenten des Wertevektors \mathbf{q} in den Punkten x_1 links und x_2 rechts vom Stoß und die Stoßgeschwindigkeit s . Es zeigt sich, dass im Allgemeinen nicht jede Kombination

von ρ und m links und rechts vom Stoß zulässig ist. Bevor dies an einem Beispiel deutlich gemacht wird, wird die Verbindung von der Linearisierung von Gleichung (7.2) und den Charakteristiken gezeigt.

Dazu wird eine Koordinatentransformation durchgeführt. Die neue Koordinate ξ ist so gewählt, dass

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} x(\xi) = x_1 \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow 0} \mathbf{q}(\xi) = \mathbf{q}_1 .$$

Damit sind die Größen \mathbf{q}_2 rechts vom Stoß und s in Gleichung (7.2) ebenfalls von ξ abhängig und die Sprungbedingung ergibt sich zu

$$s(\xi)(\mathbf{q}(\xi) - \mathbf{q}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(\xi)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_1) . \quad (7.3)$$

Entwickelt man nun den Wertevektor $\mathbf{q}(\xi)$, den Fluss $\mathbf{f}(\mathbf{q}(\xi))$ und die Stoßgeschwindigkeit $s(\xi)$ in eine Taylor-Reihe um $\xi = 0$, so ergibt sich in Indexnotation

$$\begin{aligned} q_i(\xi) &= q_i(0) + \frac{dq_i}{d\xi} \xi + \mathcal{O}(\xi^2) , \\ f_i(q_j(\xi)) &= f_i(q_j(0)) + \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{d\xi} \xi + \mathcal{O}(\xi^2) , \\ s(\xi) &= s(0) + \frac{ds}{d\xi} \xi + \mathcal{O}(\xi^2) . \end{aligned}$$

Linearisiert man Gleichung (7.3), das heißt es werden lediglich die linearen Terme in ξ berücksichtigt, so ergibt sich unter Verwendung der obigen Taylor-Reihen

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{q}}{d\xi} = s(0) \frac{d\mathbf{q}}{d\xi} ,$$

wobei die Matrix \mathbf{A} die Jacobi-Matrix des vektorwertigen Flusses ist. Für diese gilt

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{2m}{\rho} \end{bmatrix} .$$

Wie man leicht nachrechnet, ergeben sich die Eigenwerte dieser Matrix zu $\lambda_{\pm} = m/\rho \pm c = u \pm c$. Diese entsprechen also den Eigenwerten, die bereits beim Charakteristikenverfahren für die Euler-Gleichungen bestimmt worden sind. Entsprechend der Rechnung in Gleichung (6.7) kann man mit $dm = u d\rho + \rho du$ ebenfalls die gleichen Riemann-Invarianten wie beim Charakteristikenverfahren für Euler-Gleichungen finden. Die Linearisierten Stoßbeziehung, was schwache Stößen entspricht, gehen also in Charakteristiken über.

Die Gleichung (7.1) für schwache Stöße kann als Eigenvektorgleichung aufgefasst werden. Nicht jede beliebige Kombination von Dichte und Impuls links und rechts vom Stoß ist zulässig, sondern nur gewisse Kombinationen aus einem Sprung in ρ und m . Die Ableitung des Wertevektors $d\mathbf{q}/d\xi$



kann durch Integration in eine vektorwertige Differenz zwischen dem Zustand links und rechts vom Stoß überführt. Die Eigenvektoren der Jacobi-Matrix entsprechen also den zulässigen Kombination. Diese Rechts-Eigenvektoren ergeben sich zu

$$\underline{e}_{\pm} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ m/\rho \pm c \end{bmatrix},$$

d. h. die möglichen Sprünge bei einem vorgegebenen Zustand ρ_1 und m_1 liegen in der ρ_2 – m_2 –Ebene auf Geraden, da die Lösung des Differentialgleichungssystems aus linearen Kombinationen dieser Eigenvektoren formiert ist, siehe dazu Abbildung 7.1. Da es zwei Eigenvektoren gibt, gibt in der ρ_2 – m_2 –Ebene ebenfalls zwei Geraden. Schafft man also z. B. in einem Stoßrohr eine beliebige Kombination von Zuständen links und rechts vom Stoß wird es im Allgemeinen zwei Stöße bzw. Verdünnungswellen geben, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten laufen.

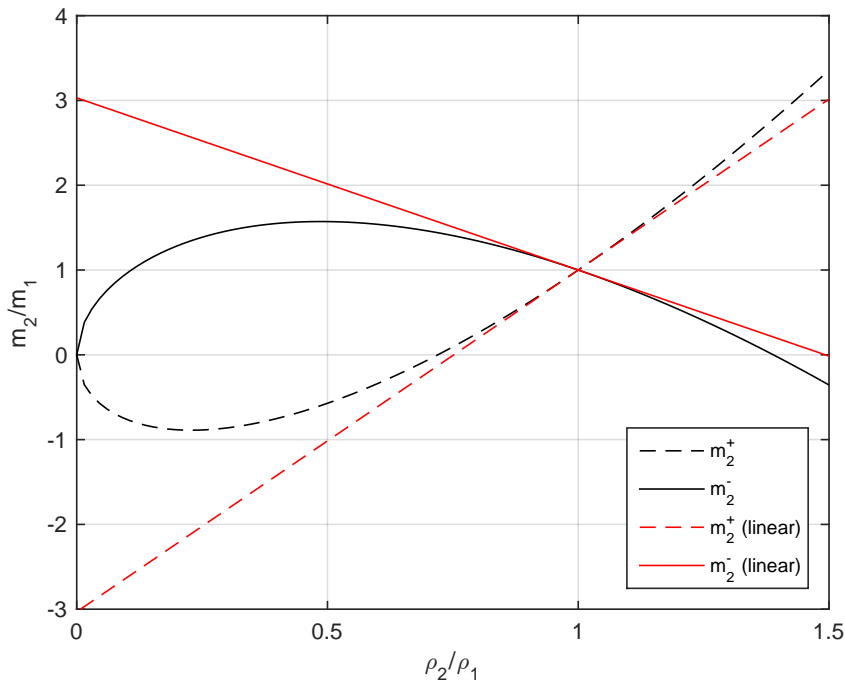


Abbildung 7.1: Der Rankine-Hugoniot-Lokus: Alle Zustände, die mit einem *einfachen Sprung* von einem gegebenen Zustand ρ_1, m_1 erreicht werden können in der linearen Näherung und der vollen Theorie.

Bestimmen wir nun die zulässigen Stöße für die nichtlinearen Euler-Gleichungen. Sie sind gegeben durch einfaches Ausschreiben von (7.2). Wenn

die Schallgeschwindigkeit c als konstant angenommen wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} s(\rho_2 - \rho_1) &= m_2 - m_1, \\ s(m_2 - m_1) &= (m_2^2/\rho_1 + c^2\rho_2) - (m_1^2/\rho_1 + c^2\rho_1). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Gibt man die Größen ρ_1, ρ_2 und m_1 vor, so lässt sich das System lösen. Nach längerer Rechnung ergibt sich für die Stoßgeschwindigkeit s und den Impuls rechts vom Stoß m_2

$$\begin{aligned} s &= \frac{m_1}{\rho_1} \pm c\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \\ m_2 &= \frac{\rho_2 m_1}{\rho_1} \pm c\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}(\rho_2 - \rho_1). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Man erkennt anhand der obigen Gleichung, dass die Stoßgeschwindigkeit wieder in die Charakteristikengeschwindigkeit übergeht, wenn $\rho_1 \rightarrow \rho_0$ geht. Geben wir nun den Zustand links vom Stoß, also ρ_1 und m_1 , vor, so gibt die Gleichung (7.5) an, welcher Impuls rechts vom Stoß m_2 bei gegebener Dichte ρ_2 möglich ist. Es gibt jeweils zwei Lösungen, die sich ebenfalls durch verschiedene Stoßgeschwindigkeiten unterscheiden. Die Menge aller möglichen Lösungen ist der sog. *Rankine-Hugoniot-Lokus*, siehe dazu Abbildung 7.1.

7.2 Das Riemann-Problem

Ein Riemann-Problem ist ein Problem mit unstetiger Anfangsbedingung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegen also die beiden konstanten aneinander angrenzenden Zustände A und B vor. Für $t > 0$ laufen demnach Wellen in die beiden Bereiche und es werden die Zustände C und D aufgespannt (siehe Abb. 7.2). Anschaulich lässt sich ein Riemann-Problem am besten an einem Stoßrohr verdeutlichen. In einem Stoßrohr werden zwei Bereiche mit unterschiedlichen, sich in Ruhe befindenden (also $u_A = u_B = 0$), Zuständen von einer Membran getrennt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird diese Membran gesprengt. Sei $p_A > p_B$, dann läuft folglich eine Druckwelle (ein Stoß) in den Bereich B und ein Expansionsfächer in den Bereich A und zwischen dem Stoß und dem Expansionsfächer entstehen die Zustände C und D, die von der sog. Kontaktunstetigkeit getrennt werden. Die Kontaktunstetigkeit stellt dabei die ursprüngliche Berührungsfläche der beiden Zustände A und B dar, die mit der entstandenen Strömungsgeschwindigkeit in C und D mitbewegt wird. Wären die Gase in A und B z.B. unterschiedlich eingefärbt, so ist die Kontaktunstetigkeit genau die Stelle an der sich die beiden Farben berühren. Nachdem wir jetzt die einzelnen Bestandteile der Lösung eines allgemeinen Riemann-Problems kennengelernt haben, bringen wir diese jetzt zusammen

um das Riemann-Problem für die Eulergleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0 \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) &= 0 \\ \partial_t s + u \partial_x s &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

zu lösen, wie es in Abb. 7.2 schematisch dargestellt ist. Die Letzte der obigen Gleichungen beschreibt den kovektiven Transport von Entropie. Die ersten beiden Gleichungen sind entsprechend die Massen- und Impulsbilanz. In den

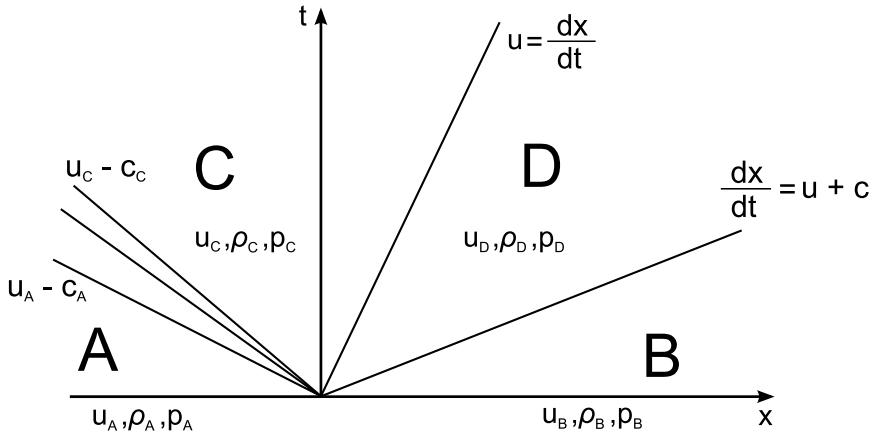


Abbildung 7.2: Das Riemannproblem für die Eulergleichungen

Bereichen A und B sind die Strömungsgrößen u, ρ und p bekannt, wohingegen die 6 Größen in den Bereichen C und D unbekannt sind. Zur Lösung des Problem verwenden wir für die Strömungsgrößen wiederum den Ansatz $q(x, t) = q(x/t) = q(\xi)$. Für die Ableitungen gilt also

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t \xi \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{x}{t^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x \xi \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Damit ergeben sich die Eulergleichungen mit $\xi = x/t$ zu

$$\begin{aligned} (u - \xi) \partial_\xi \rho + \rho \partial_\xi u &= 0 \\ (u - \xi) \partial_\xi u + \frac{1}{\rho} \partial_\xi p &= 0 \\ (u - \xi) \partial_\xi s &= 0 \end{aligned}$$

Zunächst fällt auf, dass die Entropiegleichung unabhängig von den anderen Gleichungen ist. Damit die Gleichung erfüllt ist, muss entweder $\partial_\xi s = 0$ sein oder $u = \xi = x/t$ gelten. Daraus folgt sofort, dass die Entropie sich nur beim Übergang von C nach D ändern kann und sowohl in den Bereichen A und C als auch in Bereichen D und B konstant ist. Beim Übergang von C nach D gilt nämlich genau $dx/dt = u$, siehe Abbildung 7.2. Damit können wir

außerhalb des Übergangs von C nach D die isentropen Beziehung für den Druck

$$\partial_\xi p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = c^2 \partial_\xi \rho$$

annehmen. Damit haben Masse- und Impulsgleichung die Form

$$(u - \xi) \partial_\xi \rho + \rho \partial_\xi u = 0, \quad (7.7)$$

$$(u - \xi) \partial_\xi u + \frac{c^2}{\rho} \partial_\xi \rho = 0. \quad (7.8)$$

Aus Gleichung (7.7) ergibt sich durch Umschreiben

$$\partial_\xi u = - (u - \xi) \frac{1}{\rho} \partial_\xi \rho.$$

Dies eingesetzt in Gleichung (7.8) liefert den Ausdruck

$$- (u - \xi)^2 \frac{1}{\rho} \partial_\xi \rho + c^2 \frac{1}{\rho} \partial_\xi \rho = \left(- (u - \xi)^2 + c^2 \right) \frac{1}{\rho} \partial_\xi \rho = 0.$$

Da im Allgemeinen die Dichte veränderlich ist, folgt aus der obigen Gleichung

$$- (u - \xi)^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{x}{t} = u \pm c. \quad (7.9)$$

Damit sind die Charakteristiken bestimmt. Die sich ergebenden Geraden mit den entsprechenden Steigungen sind in Abb. 7.2 beim Übergang von D nach B und von A nach C eingezeichnet. Setzt man diese Beziehung in die Massenbilanz nach Gleichung (7.7) ein, so ergibt sich

$$\partial_\xi u \mp c \frac{\partial_\xi \rho}{\rho} = 0. \quad (7.10)$$

Unter Verwendung der Isentropenbeziehung für die Dichte und die Schallgeschwindigkeit

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{dc}{c}$$

kann die obige Beziehung integriert werden und es gilt

$$u \mp \frac{2}{\gamma - 1} c = \text{konst.} \quad (7.11)$$

Entlang der Koordinate ξ bzw. der Charakteristik ist $u \mp \frac{2}{\gamma - 1} c$ also konstant. Damit gilt für die Verdünnungswelle von A nach C die Beziehung

$$u_A - \frac{2}{\gamma - 1} c_A = u_C - \frac{2}{\gamma - 1} c_C. \quad (7.12)$$

Wir haben gesehen, dass in den neuen Koordinaten Masse und Impuls unabhängig von der Entropie sind. Die Gleichungen können also unabhängig vom Sprung der Entropie von C nach D gelöst werden. Dort muss also

$$p_C = p_D \quad (7.13)$$

$$u_C = u_D \quad (7.14)$$

gelten. Diesen Übergang nennt man Kontaktunstetigkeit. Bis jetzt haben wir 3 Gleichungen für 6 Unbekannte. Die fehlenden 3 Gleichungen erhält man aus den Rankine-Hugoniot-Beziehungen für den Stoß von D nach B. Dafür nehmen wir die Eulergleichungen in Erhaltungsform zur Hand. Diese lauten mit der gesamten Energie E

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) &= 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x \left(\rho u \left(h + \frac{1}{2} u^2 \right) \right) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$ die Enthalpie ist. Nach der Koordinatentransformation $\xi = x - st$, die sich mit dem Stoß mitbewegt, ergeben sich die Rankine-Hugoniot Beziehungen

$$(\rho u)_D = (\rho u)_B, \quad (7.15)$$

$$(\rho u^2 + p)_D = (\rho u^2 + p)_B, \quad (7.16)$$

$$\left(\rho u \left(h + \frac{1}{2} u^2 \right) \right)_D = \left(\rho u \left(h + \frac{1}{2} u^2 \right) \right)_B. \quad (7.17)$$

Somit haben wir 6 Gleichungen für die 6 Unbekannten. Das Gleichungssystem ist nichtlinear, sodass die Lösung nur iterativ bestimmt werden kann. Nichtsdestotrotz sind wir so in der Lage die analytische Lösung des Riemann-Problems zu bestimmen. In der Praxis liegt das Problem in der effizienten numerischen Lösung des Riemann-Problems, das in jedem Zeitschritt an jeder Zellgrenze notwendig ist. Dazu existieren verschiedene Näherungsverfahren; das bekannteste ist der Riemann-Löser von Roe.

Eine interessante Alternative ist z.B. erst das System zu linearisieren, was bei schwachen Stößen gerechtfertigt ist und anschließend entsprechend nachzuiteilieren, wenn echte Stöße auftauchen (siehe [Schleicher, Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 17 (1993), 265-269]).

Kapitel 8

Finite Volumen Methoden

8.1 Die Idee

In diesem Kapitel verabschieden wir uns von dem bisher genutzten Finite Differenzen Ansatz zur Approximation von Differentialgleichungen. Wir erinnern uns: die Finite Differenzen Approximation basierte auf der Formulierung der Grundgleichungen für Masse-, Impuls- und Energietransport in Differentialform. Für die Diskussion Finiten Volumen Methoden sind hingegen die integralen Formulierungen dieser Gleichungen und des Satzes von Gauß der Ausgangspunkt. Wir betrachten also Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} q d\Omega + \oint_{\partial\Omega} f(q) ds = 0, \quad (8.1)$$

wobei $f(q)$ den Fluss der Größe q beschreibt. Die zeitliche Änderung der integralen Größe q hängt also nur vom Fluß über die Grenzen des betrachteten Volumens ab. Unser Rechengebiet teilen wir nun in eine Reihe von Zellen oder Kontrollvolumina auf, auf denen wir die obige Gleichung fordern.

Dadurch ist es möglich Schemata zu konstruieren, die exakte Erhaltung für alle Größen gewährleisten, für die eine Bewegungsgleichung verwendet wird. Bei Gebrauch von Kontinuitäts- (oder Massen-), Impuls- und Energiegleichung sind Masse, Impuls und Energie erhalten. Verwendet man im Inkompressiblen nur die Impuls- und Massengleichung in Form der Divergenzfreiheit, sind entsprechend diese beiden erhalten. Die Erhaltung der Energie ist dann im Allgemeinen nicht gegeben.

Die exakten Erhaltungseigenschaften sind wichtig bei einer Reihe von Problemen. Bei Stoßproblemen ist die Erhaltung gerade der Ausgangspunkt für die Rankine-Hugoniot Beziehung, wobei hier zumindest eine approximative Erhaltung verlangt wird. Simulationen über lange Zeiten verlangen ebenfalls nach Erhaltung, damit z.B. die Masse in Systemen nicht verloren geht.

Bei Finiten Differenzen ist die exakte Erhaltung nicht garantiert, jedoch gilt hier nicht der Umkehrschluss. Auch Finiten Differenzen können erhaltend sein, bei denen über strukturelle Eigenschaften ebenfalls Erhaltung garantiert werden kann, nämlich die sog. *erhaltenden* oder *schief symmetrischen* Finiten Differenzen. So entsprechen Finiten Differenzen der Divergenzform und strukturell Finite Volumen, auch wenn streng genommen in Finite Volumen von der Integralform ausgegangen wird. Ebenso wird die Erhaltung in Finiten Differenzen im Grenzwert kleiner Gitterabstände häufig wieder hergestellt, auch wenn es hier verschiedene Gegenbeispiele gibt, wie z.B. nicht aufgelöste Stöße.

Ein weiterer Vorteil von Finite Volumen ist die einfache Struktur der Gleichungen, die es erlaubt mit unstrukturierten Gittern zu rechnen. Dies bringt große Vorteile bei der Simulation komplexer Geometrien mit sich, geht i.d.R. jedoch auf Kosten der Geschwindig- und Genauigkeit. Jedoch sind die Finite Volumen gerade wegen der geometrischen Flexibilität im industriellen Alltag in vielen Bereichen vorherrschend.

Das Hauptproblem ist nun die Berechnung der Flüsse über die Zellgrenzen $\oint_{\partial\Omega} f(q)ds$. Denn die Werte in denen bei Finite Volumen in der Regel gerechnet wird, sind die Mittelwerte der Zustandsgrößen über eine Zelle (siehe Abb. 8.1). Um die Flüsse über die Zellgrenzen bestimmen zu können, sind aber die Zustandsgrößen an dieser Zellgrenze vonnöten, die so nicht vorliegen. Diese können über unterschiedliche Ansätze bestimmt, bzw. approxiiert werden. Dies ist auch der Punkt, in dem sich die verschiedenen Finite Volumen Methoden grundsätzlich unterscheiden. Dabei wird bei kontinuierlicher Lösung, also im Unterschall und insbesondere im Inkompressiblen, meist interpoliert; im einfachsten Fall über Mitteln der zellgemittelten Strömungsgrößen. Gibt es zudem noch Stöße, werden häufig Riemannlöser verwendet.

Interessiert uns in besagten Fällen bei der Diskretisierung von Gleichung (8.1) nur noch der Mittelwert der Größe $q(x, t)$ in der i -ten Zelle zum Zeitpunkt t , so gilt im eindimensionalen:

$$Q_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q dx. \quad (8.2)$$

(8.1) hat also das diskrete Gegenstück:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} \sum F(Q) = 0. \quad (8.3)$$

Hieran lässt sich die Teleskopsummeneigenschaft gut demonstrieren. Summiert man über mehrere Zellen, so heben sich alle Flüsse, außer die über den Rand der äußersten Zellen, gegenseitig auf (siehe auch Abb. 8.2). Diese Eigenschaft sichert, dass Erhaltung auf jeder Zelle auch Erhaltung auf dem

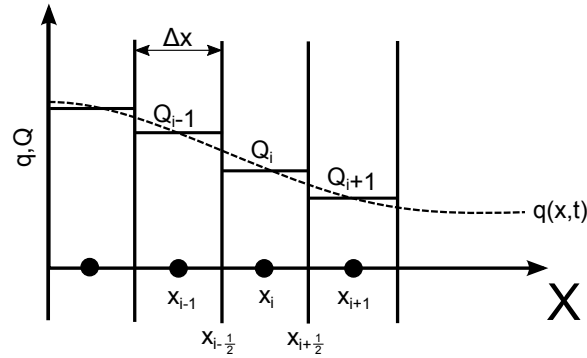


Abbildung 8.1: Unterteilung eines 1D-Gebiets auf Kontrollvolumina und Mittelwerte über die Zellen

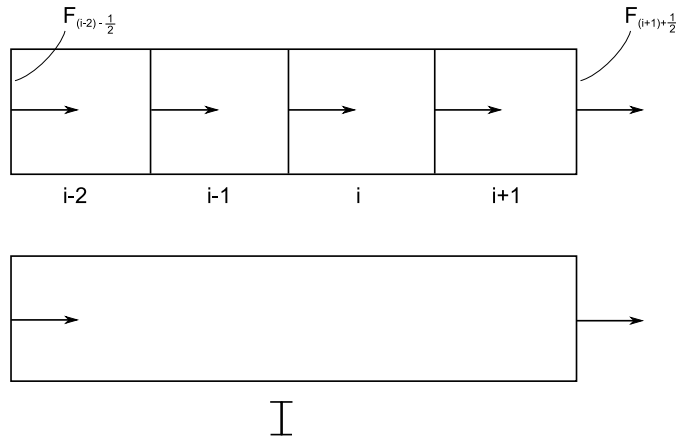


Abbildung 8.2: Teleskopeigenschaft

gesamten Rechengebiet impliziert. Siehe dazu auch die Überlegungen zum Satz von Gauß aus Kapitel 1.

Integration von (8.1) über t und Teilen durch Δt liefert, wieder in 1D:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right) \quad (8.4)$$

Die entscheidende Frage zur Berechnung eines neuen Zeitschrittes ist also die nach der Approximation des Flusses über die Zellgrenzen. Da sich q entlang der Zellgrenzen über die Zeit ändert, suchen wir eine Approximation der Form $\int F(Q) dt \approx \Delta t F^{n+\frac{1}{2}}$, also eine Mittelung des Flusses über die Zeit Δt bis zum nächsten festen Zeitschritt (siehe dazu auch Abb. 8.3):

$$Q_i^{n+1} \approx Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (8.5)$$

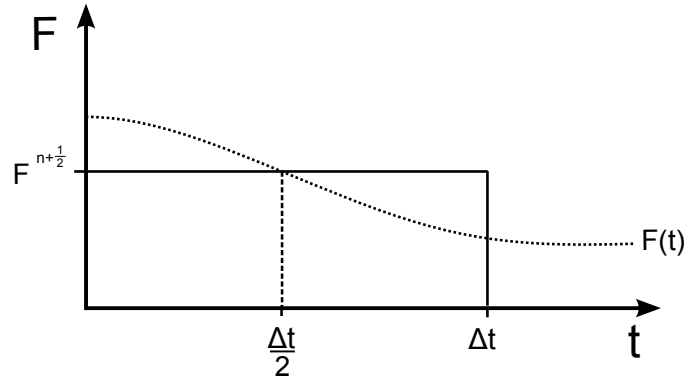


Abbildung 8.3: Flussmittelung

8.2 CFL Bedingung

Um die Stabilität aller Methoden, die im folgenden hergeleitet werden, zu garantieren, ist die sog. CFL Bedingung notwendig. Sie geht auf Courant, Friedrichs und Levy (1928) zurück. Anschaulich besagt sie nichts anderes, als dass der numerische Abhängigkeitsbereich eines Punktes den analytischen Abhängigkeitsbereich eines Punktes enthalten sollte. Dies ergibt Sinn, denn wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann die numerische Lösung nicht das Verhalten der tatsächlichen Lösung widerspiegeln. Im Fall der linearen Transportgleichung ist der Abhängigkeitsbereich eines Punktes (x_i, t^n) nichts anderes als die Charakteristik durch diesen Punkt, also die Gerade $x_0 + \lambda t$ durch diesen Punkt. Um die CFL Bedingung zu erfüllen, muss also x_0 von allen für die numerische Berechnung von (x_i, t^n) notwendigen Punkten eingeschlossen sein.

Dies kann direkt in eine Bedingung an die Diskretisierung umgesetzt werden. Es muss gelten:

$$\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C. \quad (8.6)$$

Hierbei ist λ die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen, entspricht also der Steigung der Charakteristiken. C stellt eine von der Gleichung abhängige Konstante dar, wobei $\nu = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}$ auch CFL-Nummer genannt wird. Für die 1D-Transportgleichung nimmt (8.6) die Form

$$\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

an. Allgemein genügt eine Diskretisierung der CFL-Bedingung, wenn innerhalb der Zeit Δt zwei Störungen mit einem Abstand von $2\Delta x$ nicht miteinander interagieren können.

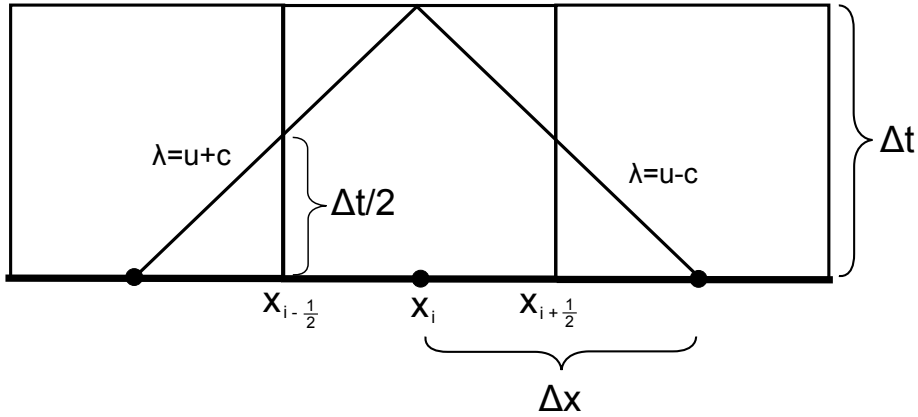


Abbildung 8.4: CFL Bedingung

8.3 Approximation des Flusses

Eben haben wir gesehen, dass die Wahl der numerischen Flussfunktion F der entscheidende Schritt für die Entstehung eines Lösungsverfahrens für (8.1) ist. Verschiedene Näherungen $F(Q)$ an $f(q)$ führen zu unterschiedlichen Verfahren. Die gebräuchlichsten Verfahren basieren auf der Möglichkeit, anhand der Charakteristiken das Verhalten der Lösung in den Kontrollvolumina zu beschreiben. Die Differentialform von (8.1) lautet:

$$q_t + f(q)_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q_t + \frac{\partial f}{\partial q} q_x = 0. \quad (8.7)$$

Entlang der Charakteristiken $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q}$ kennen wir das Verhalten der Lösung aus der Theorie. Um nun $F_{i \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ zu bestimmen, verfolgt man die durch den Punkt $(x_{i \pm \frac{1}{2}}, t + \frac{\Delta t}{2})$ laufende Charakteristik zurück in der Zeit bis $t = t_n$ und bestimmt den Wert der Lösung an dieser Stelle durch das Zellmittel (Abb. 8.5).

Betrachte den Spezialfall:

$$q_t + \frac{\partial f}{\partial q} q_x = q_t + \lambda q_x = 0,$$

also die lineare Transportgleichung. In diesem Fall ist die Lösung entlang der Charakteristiken $\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda$ konstant. Im Fall $\lambda \geq 0$ findet man also $q(x_{i-\frac{1}{2}} - \lambda \frac{\Delta t}{2}, t_n) = Q_{i-1}^n$ und somit:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \lambda Q_{i-1}^n, \quad F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \lambda Q_i^n. \quad (8.8)$$

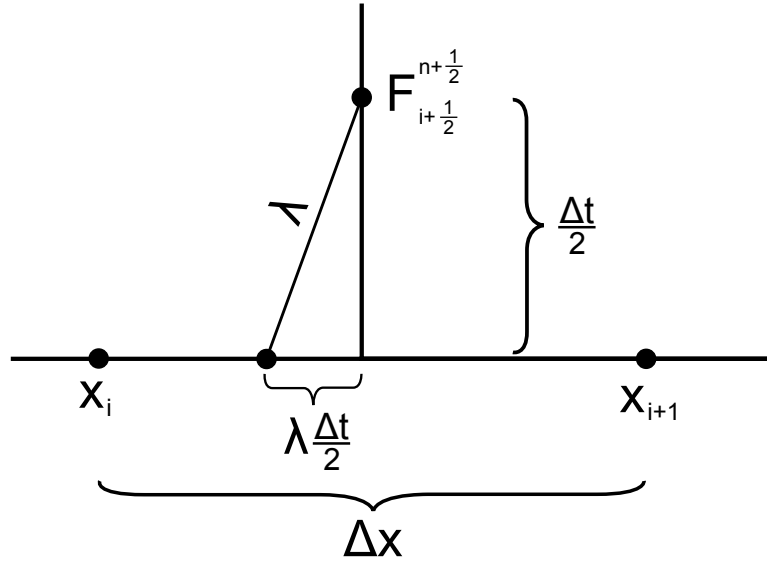


Abbildung 8.5: Flussbestimmung

In (8.5) eingesetzt ergibt sich so

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\lambda Q_i^n - \lambda Q_{i-1}^n] \quad (8.9)$$

$$= \lambda \frac{\Delta x}{\Delta t} Q_{i-1}^n + (1 - \lambda \frac{\Delta x}{\Delta t}) Q_i^n, \quad (8.10)$$

das klassische **Upwind Schema**. Eine andere Möglichkeit ist es, den Wert am Ursprung der Charakteristik nicht einfach gleich dem Zellenmittel zu setzen, sondern durch Interpolation der benachbarten Zellenmittel zu setzen.

Bei linearer Interpolation ist so zum Beispiel $F_{i+1/2}^{n+1/2} = \lambda Q_{i+1/2}^{n+1/2}$ mit

$$Q_{i+1/2}^{n+1/2} \approx Q_i^n + \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta t \lambda}{2} \right) \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right).$$

Dies führt auf das Verfahren nach **Lax-Wendroff** für lineare, skalare Gleichungen.

8.4 Einschub: Charakteristikenverfahren

Die eben angesprochene Technik ist auch die Grundlage für eine andere Kategorie von numerischen Verfahren, den Charakteristikenverfahren. Die Funktionsweise dieser Verfahren ist an einem Beispiel gut sichtbar zu machen.

Wir suchen zunächst die Charakteristiken des Systems:

$$\begin{cases} u_t + av_x = 0 \\ v_t + bu_x = 0. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0 \quad (8.11)$$

Nach Kapitel 5 benötigen wir dazu die Matrix T^{-1} der Links-Eigenvektoren von A . Damit erhält man die Invarianten $T^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ welche entlang der Kurven $\frac{\partial x}{\partial t}$ erhalten werden. Man findet:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{b}u + \sqrt{a}v = \text{konst}, \quad \text{für } \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{ab} \\ Q &= \sqrt{b}u - \sqrt{a}v = \text{konst}, \quad \text{für } \frac{\partial x}{\partial t} = -\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft machen wir uns an einem Schnittpunkt einer P - und Q -Charakteristik zunutze (siehe Abb. 8.6). Da die Lösung entlang dieser Geraden konstant ist, gilt:

$$\begin{aligned} P_1 = P_3 &\Rightarrow \sqrt{b}u_1 + \sqrt{a}v_1 = \sqrt{b}u_3 + \sqrt{a}v_3 \\ Q_1 = Q_3 &\Rightarrow \sqrt{b}u_2 - \sqrt{a}v_2 = \sqrt{b}u_3 - \sqrt{a}v_3, \end{aligned}$$

wobei $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ Punkte auf der P - bzw. Q -Charakteristik sind, während (u_3, v_3) der Schnittpunkt der beiden Geraden ist. Dieses Gleichungssystem können wir einfach lösen und erhalten so den Wert der Lösung am Schnittpunkt der Charakteristiken. Die numerische Umsetzung dieses Verfahrens könnte wie folgt aussehen: Um den Wert in einem Punkt (x_i, t^{n+1}) zu bestimmen, verfolgt man die Charakteristiken durch diesen Punkt zurück bis zur Zeit t^n . Den Wert der Lösung an den beiden Punkten (x_1, t^n) und (x_2, t^n) bestimmt man nun auf beliebige Weise, zum Beispiel durch Interpolation der zum Zeitpunkt t^n gegebenen Daten auf Zellmitteln oder Gitterpunkten. Damit sind dann alle Informationen vorhanden um das lineare Gleichungssystem für (x_3, t^{n+1}) auszuwerten.

8.5 Riemann-Löser

Das Konzept der Riemann-Löser geht auf Godunov (1959) zurück. Das Prinzip ist das folgende: Auf jeder Zelle approximieren wir die Lösung durch den Zellmittelwert, auf dem gesamten Rechengebiet ist unsere numerische Lösung also eine stückweise konstante Funktion mit Unstetigkeiten an den Zellgrenzen. Damit spiegelt jeder Zellübergang die Situation in einem Stoßrohr wieder. Godunov's Idee war nun die, an jeder Zellgrenze das dort auftretende Problem analytisch zu lösen. So erhält man lokal eine analytische Lösung zu den stückweise konstanten Anfangsbedingungen und kann diese lokalen Lösungen wieder auf geeignete Weise zu einem globalen Zustand zum nächsten Zeitschritt kombinieren (siehe Abb. 8.7).

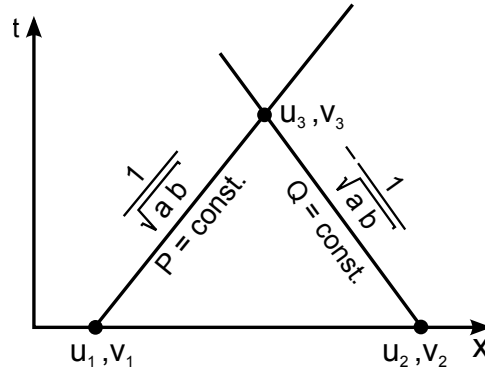


Abbildung 8.6: Charakteristikenverfahren

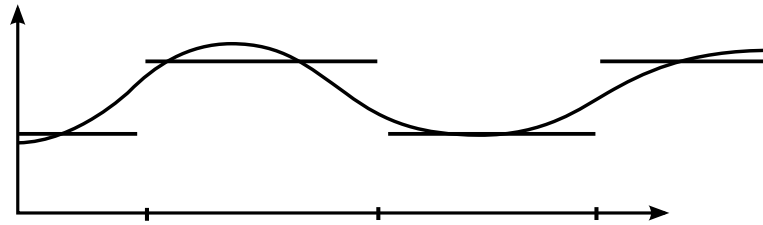


Abbildung 8.7: Godunov Ansatz über Zellmittelung

8.5.1 Riemann Probleme

Der Ausgangspunkt dieser Verfahren ist das sogenannte Riemannproblem

$$\begin{cases} q_t + Aq_x = 0 \\ q(x, 0) = q_l = \text{konst} & x < 0 \\ q(x, 0) = q_r = \text{konst} & x \geq 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

also ein hyperbolisches System mit unstetigen Anfangsdaten im Ursprung. Zur analytischen Lösung dieses Problems greifen wir wieder auf Charakteristiken zurück. Dabei untersuchen wir alle vom Koordinatenursprung ausgehenden Charakteristiken und bestimmen die Werte in den so entstehenden Fächern in der (x, t) Ebene. So betrachtet gehen wir genau umgekehrt zum Charakteristikenverfahren vor, wo wir die Charakteristiken von einem Punkt aus zurück verfolgt haben. Am Beispiel eines linearen Systems mit Matrix A bereits in Diagonalform werden wir die analytische Lösung von (8.12) angeben. Sei A also die Diagonalmatrix mit den Einträgen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann gilt für die i -te Komponente von q

$$\begin{cases} \partial_t q^i + \lambda_i \partial_x q^i = 0 \\ q^i(x, 0) = q_l^i & x < 0 \\ q^i(x, 0) = q_r^i & x > 0. \end{cases}$$

Für Gleichungen dieses Typs kennen wir die Lösung, die Unstetigkeit wandert mit der Geschwindigkeit λ_i ,

$$q^i(x, t) = \begin{cases} q_l^i, & x - \lambda_i t < 0 \\ q_r^i, & x - \lambda_i t > 0. \end{cases} \quad (8.13)$$

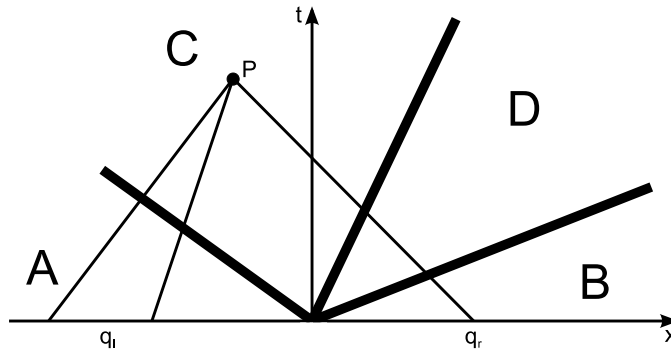


Abbildung 8.8: Zusammensetzung der Lösung

Da die Gleichungen alle entkoppelt sind, ist also der Vektor $q(x, t) = (q^1, \dots, q^n)^T$ eine Lösung des Riemannproblems. In Abbildung 8.8 ist der Aufbau der Lösung zu erkennen. Die Unstetigkeiten der Lösung liegen entlang der Charakteristiken, so nimmt die Lösung in den Bereichen A)-D) jeweils unterschiedliche Werte an. Eine interessante Beobachtung ist die folgende: Der Sprung über die i -te Charakteristik genügt der Gleichung

$$(q_r^i - q_l^i) \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i.$$

Dabei ist e_i der i -te Einheitsvektor, also auch der i -te Eigenvektor der Diagonalmatrix. Dieses Resultat ist sehr interessant, da es sich auch auf den Fall beliebiger A Matrix überträgt. Heuristisch bedeutet dies, dass der Sprung von q_l nach q_r in Eigenvektoren von A zerlegt wird. Diese Bedingung entspricht der Rankine-Hugoniot Bedingung für lineare Systeme. Da der Sprung $(q_r - q_l)$ im Allgemeinen nicht der Rankine-Hugoniot Bedingung genügt, wird der Sprung in dem Riemannproblem quasi in eine Reihe konformer Sprünge zerlegt. Nun wollen wir das, praktisch relevante, Riemannproblem für die Eulergleichungen lösen.

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = & 0 \\ \rho(u_t + uu_x) + p_x = & 0 \\ s_t + us_x = & 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

Mit $p = p(\rho, s)$, $dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p}{\partial s} ds$ sowie $\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho u_x &= 0 \\ \frac{Du}{Dt} + \frac{p_x}{\rho} &= 0 \\ \frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial s} \frac{Ds}{Dt}}_{=0} + \rho u_x = 0. \end{aligned}$$

Und schlussendlich die Form, in der wir rechnen werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p \\ u \\ s \end{pmatrix}}_{q_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} u & \rho c^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ u \\ s \end{pmatrix}}_{q_x} = 0 \quad (8.15)$$

Mit dem bekannten Ansatz transformieren wir das System in ein entkoppeltes System für die Riemann-Invarianten und erhalten:

$$\begin{pmatrix} \frac{p_t}{\rho c} + u_t \\ -\frac{p_t}{\rho c} + u_t \\ s_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_x}{\rho c} + u_x \\ -\frac{p_x}{\rho c} + u_x \\ s_x \end{pmatrix} = 0 \quad (8.16)$$

Die Wahl von $\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$ war nicht zufällig, denn c entspricht gerade der Schallgeschwindigkeit. Entlang der Stromfäden gilt also:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \frac{dx}{dt} &= u + c, & \frac{dp}{\rho c} + du &= 0 \\ \Gamma_2 : \frac{dx}{dt} &= u - c, & -\frac{dp}{\rho c} + du &= 0 \\ \Gamma_3 : \frac{dx}{dt} &= u, & ds &= 0 \end{aligned}$$

Der Zustand der Lösung ändert sich nur beim Sprung über die Charakteristiken. Neben den bekannten Zuständen in den Bereichen A) und B) suchen wir den Zustand in den Bereichen C) und D). Beim Übergang von A) zu C) wird die Γ_2 Charakteristik geschnitten; bei diesem Übergang gilt also:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\rho c} + du &= 0 \\ ds &= dp - c^2 d\rho = 0. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt beim Übergang von B) nach D), an dem die Γ_1 Charakteristik geschnitten wird:

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{\rho c} + du &= 0 \\ ds &= dp - c^2 d\rho = 0. \end{aligned}$$

Am Sprung über Γ_3 , also beim Übergang von D) nach C), gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\rho c} + du &= 0 \\ -\frac{dp}{\rho c} + du &= 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein LGS für die Sprungbedingungen, aus dem wir alle Zustände, mit der Einschränkung $(\rho c)^{*(*)} = (\rho c)_{a,b}$, bestimmen können:

$$\begin{cases} \frac{p_c - p_a}{(\rho c)^*} + u_c - u_a = 0 \\ (p_c - p_a) - c^{*2}(\rho_c - \rho_a) = 0 \\ u_d - u_c = 0 \\ p_d - p_c = 0 \\ -\frac{p_d - p_b}{(\rho c)^{**}} + (u_d - u_b) = 0 \\ (p_d - p_b) - c^{**2}(\rho_d - \rho_b) = 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

Den Übergang über die Charakteristik Γ_3 nennt man eine Kontaktunstetigkeit. Hier herrscht ein augenblickliches Gleichgewicht zwischen Geschwindigkeit und Druck zu beiden Seiten des Sprungs; einzig die Energie verändert sich.

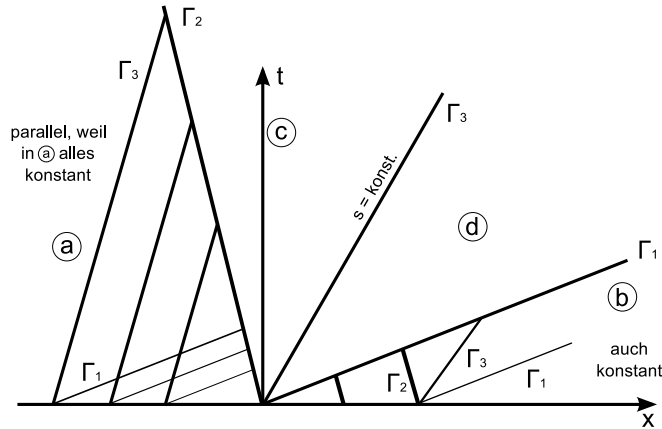


Abbildung 8.9: Lösung der Eulergleichung

Stöße und Verdünnungswellen

Der eben betrachtete Fall linearer Probleme beschreibt nur sehr schwache Stöße physikalisch korrekt. Wie in Kapitel 5 beschrieben, gehen also schwache Stöße in Charakteristiken über. Im Falle starker Stöße müssen aber nichtlineare Systeme betrachtet werden. In diesen Fall treten neben dem bekannten

Phänomen des Stoßes auch sogenannte Verdünnungswellen auf. Das Verhalten beider, beginnend mit den Verdünnungswellen, sei hier kurz erläutert. Für nichtlineare Riemannprobleme hängt die Lösung q von (8.12) von dem Parameter $\xi = \frac{x}{t}$ ab, $q(x, t) = q(\frac{x}{t})$. Damit gilt:

$$q_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0 \iff -\frac{x}{t^2}q'(\xi) + \frac{1}{t}f'(q(\xi))q'(\xi) = 0. \quad (8.18)$$

Schlussendlich ist also $q = \text{konst}$ oder

$$f'(q(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t}. \quad (8.19)$$

Damit ist der Wert innerhalb einer zentrierten Verdünnungswelle berechenbar. Als Beispiel nehmen wir die Burgersgleichung mit Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 \\ u_0(x) = 0, & \text{für } x < 0 \\ u_0(x) = 1, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Für $\frac{x}{t} < 0$ bleibt die Lösung konstant 0, für $\frac{x}{t} > 1$ konstant 1. In den Bereich $0 < \frac{x}{t} < 1$ erreichen keine Charakteristiken. Hier setzen wir eine Verdünnungswelle an. Es muss also nach (8.19)

$$u(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t}, \quad \text{für } 0 < \frac{x}{t} < 1$$

gelten.

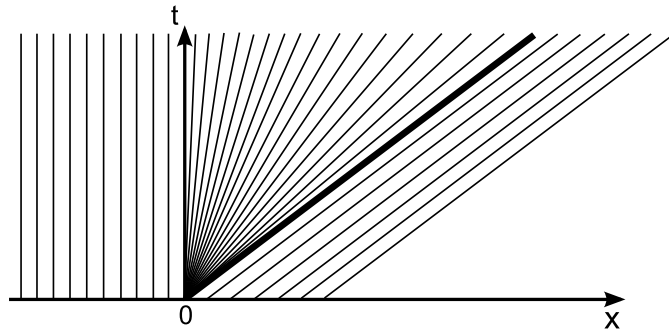


Abbildung 8.10: Verhalten der Eulergleichungen

Für die Beschreibung und Charakterisierung von Stoßwellen verweisen wir hier auf die Abschnitte über Stöße und die Rankine-Hugoniot Bedingung im Kapitel über Charakteristiken (Kap. 5)

8.5.2 Das Godunov Verfahren

Nach diesem längeren Exkurs über die exakte Lösung von Riemannproblemen kehren wir jetzt zu der ursprünglichen Problemstellung der Finite Vo-

lumen Verfahren zurück. Die allgemeine Formulierung der Verfahren in konservativer Form lautete:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

Das Ziel ist es, den numerischen Fluss $F^{n+\frac{1}{2}}$ an den Zellgrenzen möglichst gut abschätzen zu können. Godunov geht dabei wie folgt vor:

1. Durch die Finite Volumen Diskretisierung liegen stückweise konstante Anfangsdaten vor. An jeder Zellgrenze liegt also lokal ein Riemannproblem mit den Randdaten Q_i für $x < 0$ und Q_{i+1} für $x > 0$ vor.
2. Jedes der lokalen Riemannprobleme hat nach den Bemerkungen des letzten Abschnitts eine Lösung $\tilde{Q}_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$. Zu einem Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist dann:

$$\tilde{Q} = Q_{i+\frac{1}{2}}(x/t), \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

wobei Δt so gewählt sein muss, dass keine Welleninteraktionen zwischen den Lösungen der einzelnen Riemannprobleme auftreten.

3. Zu dem neuen Zeitlevel erzeugen wir wieder stückweise konstante Anfangsbedingungen durch die Zellmittel:

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{Q}(x, t^{n+1}) dx \quad (8.20)$$

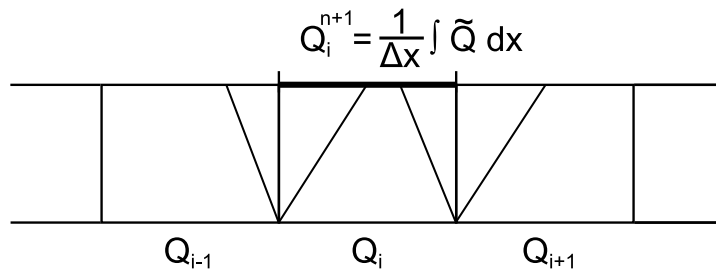


Abbildung 8.11: Godunov-Verfahren

Dies ist die erste Version des Godunov Verfahrens. In dieser Variante ist es nicht in der Form eines Finite Volumen Verfahrens. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Schritte 1.-3. äquivalent zu dem Finite Volumen Schema

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (8.21)$$

mit der numerischen Flussfunktion

$$F_{i+\frac{1}{2}} = f(Q_{i+\frac{1}{2}}(0)) \quad (8.22)$$

sind. Dabei ist $Q_{i+\frac{1}{2}}$ die Lösung des lokalen Riemannproblems an der entsprechenden Zellgrenze. Um einen neuen Zeitschritt zu rechnen muss also an jeder Zellgrenze ein Riemannproblem analytisch gelöst werden. Auch wenn diese Lösung theoretisch bekannt ist, ist der numerische Aufwand beträchtlich. Die Lösung des Riemannproblems für die Eulergleichungen ist im Allgemeinen durch eine Kombination von zwei Wellen, die eine Kontaktunstetigkeit einschließen, gegeben. Dabei können die Wellen sowohl Stöße als auch Verdünnungswellen sein. So gibt es allein zehn verschiedene Typen von Lösungen des RPs, auf die an jeder Zellgrenze geprüft werden muss.

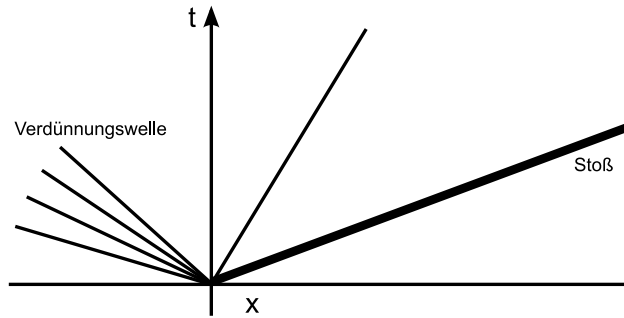


Abbildung 8.12: Eine mögliche Form der Lösung der Eulergleichungen

Selbst wenn der Charakter der Lösung bekannt ist, bedarf die Lösung der entstehenden Gleichungssysteme häufig iterativer Prozesse, ist also aufwendig. Um diesen Aufwand zu reduzieren gibt es zwei Ansätze. Zum Einen können Approximationen an den Zustand gemacht (sog. “approximate-state Riemann solver”) und das so resultierende Riemannproblem exakt gelöst werden. Oder aber man ersetzt die exakte Lösung des Riemannproblems durch eine Approximierte. Ein Beispiel für diese als “approximate Riemann solver” bezeichneten Verfahren wird im nächsten Abschnitt besprochen.

8.5.3 Der Riemannlöser von Roe

Der Riemannlöser von Roe ersetzt den Godunov Fluss $F_{i+\frac{1}{2}} = f(Q_{i+\frac{1}{2}}(0))$ durch eine einfachere numerische Approximation. Der Ansatz von Roe ist es, das nichtlineare Riemannproblem durch ein lineares zu ersetzen. Das System von Erhaltungsgleichungen

$$Q_t + f(Q)_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q_t + \frac{\partial f}{\partial Q} Q_x = 0$$

kann mit $A(Q) = \frac{\partial f}{\partial Q}$ umgeschrieben werden in:

$$Q_t + A(Q)Q_x = 0.$$

Roe's Idee ist nun die Jakobimatrix $A(Q)$ durch eine konstante Matrix $\bar{A}(Q_l, Q_r)$ zu ersetzen. So entsteht ein lineares System, dessen exakte Lösung wesentlich leichter berechnet werden kann. Die Matrix \bar{A} muss einer Reihe von Bedingungen genügen, welche die Konsistenz mit dem ursprünglichen, nicht-linearen Problem sichern. Die Konstruktion von solchen Matrizen ist für allgemeine Probleme nicht trivial und auch rechnerisch aufwendig. Am Beispiel der 1D-Eulergleichungen suchen wir eine Matrix \bar{A} , welche den Sprung $(Q_r - Q_l)$ in drei Sprünge entlang der Eigenvektoren des Systems zerlegt. Im Fall der Eulergleichungen konnte Roe die gesuchte Matrix \bar{A} explizit angeben. Die Konstruktion dieser Matrix basiert auf der Einführung geschickt gemittelter Werte für die Zustandsgrößen. Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\tilde{u} - \tilde{c}$, \tilde{u} , $\tilde{u} + \tilde{c}$ mit den Roe-Mittelungen:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{\sqrt{\rho_l}u_l + \sqrt{\rho_r}u_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \\ \tilde{H} &= \frac{\sqrt{\rho_l}H_l + \sqrt{\rho_r}H_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \\ \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_l\rho_r} \\ \tilde{c} &= (\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \right).\end{aligned}$$

8.5.4 Der Riemannlöser von Schleicher

Ein anderer alternativer Ansatz zur approximativen Berechnung des Godunov Flusses (8.22) für die Eulergleichungen ist der Riemannlöser von Schleicher (1993). Schleichers Ansatz ist, dass die Lösungen des Riemannproblems zu

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial \tau} = 0$$

nur von einem einzelnen Parameter τ abhängen. Zur Erinnerung: Bei der Beschreibung von Verdünnungswellen haben wir den selben Ansatz mit dem Parameter $\xi = x/t$ gemacht. Dann gilt:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{dQ}{d\tau} + \frac{\partial \tau}{\partial t} A \frac{dQ}{d\tau} = 0. \quad (8.23)$$

Die Ableitung $\frac{dQ}{d\tau}$ ist also ein Vielfaches eines Eigenvektors der Matrix A . Mit dem Ansatz $\rho = \rho_0(1 + \tau)$ erhält man so zu jedem Eigenwert und dem zugehörigen Eigenvektor ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in

τ , welches einfach gelöst werden kann. Damit ergibt sich eine parametrisierte Kurve im Raum der Strömungszustände, welche alle Zustände aufzeigt, die entlang der Welle zu einem Eigenwert erreicht werden können. Mit dem selben Ansatz für die Gleichungen in konservativer Form erhält man ein Gleichungssystem für die Parametrisierung von Stößen. Zur Berechnung der Lösung des Riemannproblems verbindet man den linken und rechten Zustand durch eine Kombination von Verdünnungswellen und Stößen zu den Eigenvektoren $u \pm c$ (da u, p über die Kontaktdiskontinuität zu $\lambda = u$ konstant bleiben). So erhält man eine Gleichung für die Parametrisierungsparameter und diese liefern die Lösung des Riemannproblems. Das so entstehende Gleichungssystem muss nur für den Fall von Stößen iterativ gelöst werden. Experimentelle Resultate zeigen auch, dass in einem Großteil der Fälle ein einziger Iterationsschritt ausreicht um genügende Genauigkeit zu erreichen. Am Beispiel der zweidimensionalen Umströmung einer Tragfläche wurde gezeigt, dass nur in 1‰ der auftretenden Riemannprobleme nachiteriert werden musste.

Literaturverzeichnis

- [Alb] W. Albring, Angewandte Strömungslehre, Steinkopff, 1970
- [Becker] E. Becker, Gasdynamik, Teubner, 1966
- [Wess] Pieter Wesseling, Principles of Computational Fluid Dynamics, Springer, 2001
- [Wieg] K. Wieghardt, Theoretische Strömungslehre, Online: http://webdoc.sub.gwdg.de/univerlag/2006/wieghardt_book.pdf
- [Lel] Lele, Sanjiva K.. Compact Finite Difference Schemes with spectral-like resolution. Journal of Computational Physics 103, 16-42 (1992)
- [LeVeq] R. J. LeVeque, Numerical Methodes for Conservation Laws, Birkhäuser, 1990.
- [Schwarz] H. R. Schwarz, Numerische Mathematik, Teubner Stuttgart, 1988.
- [TaW] Tam, Christopher K.W., Webb, Jay C.. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics. Journal of Computational Physics 107, 262-281 (1993)
- [BrS] Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H.. Handbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun 1999
- [crs] <http://www.crs4.it>
- [Zie] Zierep, J.. Theoretische Gasdynamik. Braun, Karlsruhe 1991