Stelling. DFA_{min} is een DFA, equivalent met DFA, en alle toestanden zijn f-verschillend.

Bewijs. DFA_{min} is een DFA:

- Er zijn geen ε-bogen
- 2 verschillende bogen met hetzelfde symbool vanuit p en q versmelten wanneer de twee toestanden zelf versmelten door f-gelijkheid: stel namelijk dat p en q f-gelijk zijn. Dan zijn ook $p' = \delta(p, a)$ en $q' = \delta(q, a)$ f-gelijk. We bewijzen dat.

  De f-strings van p en q zijn gelijk, dus ook hun f-strings van de vorm as. De f-strings van p' zijn de strings s zodat as een f-string is van p. Hetzelfde geldt voor q'. Bijgevolg hebben p' en q' dezelfde f-strings en zijn ze f-gelijk.

De equivalentie van DFA en DFA_{min} bewijzen we door per inductie aan te tonen dat

$$w \text{ is een f-string van } Q_i \text{ (in DFA}_{\text{min}}) \quad \Longleftrightarrow \quad w \text{ is een f-string van alle } q \in Q_i \text{ (in DFA}_{\text{origineel}})$$

- Basisstap: als de lengte van de string w gelijk is aan 0, geldt dat $w = \varepsilon$. Nu geldt dat

$$\begin{aligned}
\varepsilon \text{ is een f-string van } Q_i &\Leftrightarrow Q_i \in \tilde{F} \\
&\Leftrightarrow Q_i \subseteq F \\
&\Leftrightarrow q \in F \qquad (\forall q \in Q_i) \\
&\Leftrightarrow \varepsilon \text{ is een f-string van alle } q \in Q_i
\end{aligned}$$

- Inductiehypothese: stel dat w is een f-string van $Q_i \Leftrightarrow w$ is een f-string van alle $q \in Q_i$ (met $|w| = n$).
- Inductiestap: beschouw de string $w' = aw$. We tonen aan dat de stelling ook geldt voor deze string van lengte $|w'| = n + 1$, m.a.w. we tonen aan dat

$$w' = aw \text{ is een f-string van } Q_i \Leftrightarrow w' = aw \text{ is een f-string van alle } q \in Q_i$$

  . Er geldt dat

$$\begin{aligned}
aw \text{ is een f-string van } Q_i &\Leftrightarrow \tilde{\delta}^*(Q_i, aw) \in \tilde{F} \\
&\Leftrightarrow \tilde{\delta}^*\left(\tilde{\delta}(Q_i, a), w\right) \in \tilde{F} && \text{(eigenschap op p.30)} \\
&\Leftrightarrow w \text{ is een f-string van } \tilde{\delta}(Q_i, a) \\
&\Leftrightarrow w \text{ is een f-string van alle } q \in \tilde{\delta}(Q_i, a) && \text{(inductiehypothese)} \\
&\Leftrightarrow aw \text{ is een f-string van alle } q \in Q_i
\end{aligned}$$

□