Groep Wetenschap & Technologie Kulak
Informatica
Informatieoverdracht & -verwerking

Examenvragen IOV

Academiejaar 2024-2025 — Vincent Van Schependom

Inleiding

Dit document bevat alle examenvragen die tijdens de hoorcolleges van het vak *Informatieoverdracht en -verwerking* werden aangehaald door professor De Lathauwer (A1 t.e.m. A4) en Ben Hermans (de rest). Ik typte ook de oplossingswijze uitgebreid uit. De uitkomsten zijn zeker correct, aangezien de eindoplossingen aan bord werden gebracht of mondeling werden meegedeeld tijdens de les. Tip voor toekomstige studenten: ga zeker naar de les en laat dit vak niet liggen tot in de blok. Veel plezier ermee!

1 Discrete informatiebronnen

1.1 Hoeveelheid informatie & efficiëntie

In de studierichting Ingenieurswetenschappen hebben studenten de keuze uit mogelijkheden A, B, C en D voor hun hoofd- en nevenrichting, zoals te zien is in Tabel 1.

Hoofdrichting	Nevenrichting	% studenten
A	B	40
A	C	30
B	C	20
B	D	10

Tabel 1: Voorkomende combinaties [maior,minor] met hun bijhorende kans.

Gemiddeld gaat 80% van de studenten verder in zijn/haar hoofdrichting; 20% gaat verder in zijn/haar nevenrichting.

Gevraagd:

1. Wat is de gemiddelde hoeveelheid informatie $H(A)$?
2. Hoeveel info geeft de Master-keuze nadat de Bachelor-keuze geweten is?
3. Wat is de waarschijnlijkheidsredundantie R_w voor optredende Bachelor-Master combinaties?

Oplossing:

1. $\text{Ba} = \{[A, B], [A, C], [B, C], [B, D]\}$ is de verzameling van voorkomende Bachelor-keuzes. Dan is de gemiddelde hoeveelheid informatie:

$$H(\text{Ba}) = -\sum_{i=1}^{4} p_i \log p_i = \boxed{1.846 \, \frac{\text{bit}_\text{i}}{\text{combinatie}}}$$

2. $\text{Ma} = \{A, B, C, D\}$ is de verzameling van voorkomende Master-keuzes. We gebruiken de voorwaardelijke hoeveelheid informatie voor de Master-keuze nadat de keuze in de Bachelor gekend is:

$$\begin{aligned} H(\text{Ma} \mid \text{Ba}) &= -\sum_{\text{Ba}=[A,B]}^{[B,D]} \sum_{\text{Ma}=A}^{D} P(\text{Ba}) \cdot P(\text{Ma} \mid \text{Ba}) \cdot \log P(\text{Ma} \mid \text{Ba}) \\ &= \ldots \\ &= \boxed{0.7219 \, \text{bit}_\text{i}/\text{student}} \end{aligned}$$

3. We maken alle mogelijke Bachelor-Master combinaties en zien dat we $\#\text{Ba}\cdot\#\text{Ma} = 8$ mogelijkheden hebben. De hoeveelheid informatie zou maximaal zijn voor gelijke kansen, d.w.z. voor $p = 1/8$. De maximale hoeveelheid informatie, $\max H(\text{Ba}, \text{Ma})$, is dan $\log 8$ ofwel $3\,\text{bit}_\text{i}/\text{student}$. Voor de effectieve hoeveelheid informatie die wordt doorgegeven vinden we

$$H(\text{Ba}, \text{Ma}) = H(\text{Ba}) + H(\text{Ma} \mid \text{Ba}) = 2.5679\,\text{bit}_\text{i}/\text{student}$$

Aan de hand hiervan kunnen we $R_w = 1 - \frac{H(\text{Ba},\text{Ma})}{\max H(\text{Ba},\text{Ma})} = \boxed{0.144}$ uitrekenen.

1.2 Broncodering

We beschouwen nu de gecombineerde gegevens [Ba, Ma].

Gevraagd:

1. Codeer de combinaties aan de hand van een Huffman-code.
2. Wat is de gemiddelde codewoordlengte voor je broncodering?
3. Bereken ook de efficiëntie.

Oplossing:

1. Bereken de kansen voor elke combinatie door de kansen van de Bachelor-keuze te vermenigvuldigen met de kans op een Master-keuze van 1) de maior en 2) de minor (aan de hand van de respectievelijke percentages 80% en 20%). Rangschik van meest waarschijnlijk (bovenaan) naar minst waarschijnlijk (onderaan) en doorloop het Huffman-procédé.

   Het bronalfabet is hier
   $$A = \{[AB, A], [AB, B], ..., [BD, D]\}$$
   en het broncodealfabet is hier
   $$B = \{1, 0\}$$
   Na het bepalen van de Huffman-code vinden we een verzameling codewoorden
   $$\boxed{C = \{00, 10, 11, 0100, 0101, 0110, 01110, 01111\}}$$
   waarbij de codewoorden c_i elk een lengte l_i hebben. Aangezien elk codewoord 1 op 1 correspondeert met een symbool a_i uit het bronalfabet A, en omdat bovendien $\#A = n = 8$, is ook $\#C = 8$ en dus $i \in \{1, ..., n = 8\}$.

2. We berekenen de gemiddelde codewoordlengte L van codewoorden c_i uit C:
   $$L = \sum_{i=1}^{8} p_i l_i = \boxed{2.62\,\text{symbolen/codewoord}}$$
   Aangezien een binair broncodealfabet slechts 2 symbolen (0 en 1) bevat (i.e. $r = \#B = 2$), kunnen we dit ook interpreteren als
   $$L = 2.62\,\text{symbolen/codewoord} = 2.62\,\text{bit/student} = 2.62 \text{ binary digits per student}$$

3. De efficiëntie van deze codering is
   $$\varepsilon = \frac{H(A)}{L \cdot \log r} = \frac{2.568\,\text{bit}_\text{i}/\text{symbool}}{2.62\,\text{symbolen/codewoord} \cdot 1\,\text{bit/symbool}} = \boxed{98\%}$$

2 Continue informatiebronnen

Beschouw volgende twee muzieksignalen, beiden mono-signaal aan een frequentie van 0-5 kHz:

- *Signaal 1*: Gaussiaans verdeeld met $\sigma = 0.08$
- *Signaal 2*: uniform verdeeld in het interval $[-A, +A]$, met de grootte van A zó dat dit signaal hetzelfde vermogen heeft als *Signaal 1*.

Gevraagd:

1. Bereken het verschil in gemiddelde hoeveelheid informatie.
2. Digitaliseer *Signaal 2* door het te
   - bemonsteren: maak gebruik van de ir-vuistregel.
   - kwantiseren: bepaal het aantal intervallen K, zodat dit een macht van 2 is en zodat de gemiddelde signaal-tot-kwantisatieruis **vermogens**verhouding minstens 100 dB bedraagt.

   a) Wat is het informatiedebiet?

   b) Wat is het transmissiedebiet?

Oplossing:

1. *Signaal 1* is Gaussisch verdeeld, dus heeft een vermogen van $P_{X_1} = \sigma^2$. *Signaal 2* is uniform verdeeld tussen $[-A, +A]$ en heeft een vermogen van

$$\begin{aligned} P_{X_2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-A}^{+A} x^2 \cdot \frac{1}{2A}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2A}\left[\frac{1}{3}A^3\right]_{-A}^{+A} \\ &= \frac{1}{6A}\left((+A)^3 - (-A)^3\right) \\ &= \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

Omdat het vermogen van *Signaal 1* gelijk moet zijn aan het vermogen van *Signaal 2*, moet gelden dat

$$\begin{aligned} P_{X_1} = P_{X_2} &\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{A^2}{3} \\ &\Leftrightarrow 0.08^2 = \frac{A^2}{3} \\ &\Leftrightarrow A = \sqrt{0.08^2 \cdot 3} \approx 0.1386 \end{aligned}$$

Zo vinden we de gemiddelde hoeveelheid informatie die geleverd wordt door beide bronnen:

$$\begin{aligned} H(X_1) &= \log_2(\sigma\sqrt{2\pi e}) &&= \boxed{-1.597\,\mathrm{bit_i/bemonstering}} \\ H(X_2) &= \log_2(2A) &&= \boxed{-1.851\,\mathrm{bit_i/bemonstering}} \end{aligned}$$

Het verschil bedraagt $\boxed{0.254\,\mathrm{bit_i/bemonstering}}$.

2. We digitaliseren *Signaal 2*:

- Bemonstering:
De bandbreedte (=maximale frequentie) bedraagt $B = f_m = 5\,\text{kHz}$. Het bemonsteringstheorema van Nyquist zegt ons dat we een signaal foutloos kunnen reconstrueren als $f_s \geq 2f_m$. De ingenieursvuistregel bouwt wat marge in en neemt de samplingfrequentie gelijk aan $f_s = 2.2f_m$. Voor dit signaal nemen we dus

$$f_s = 2.2 \cdot 5\,\text{kHz} = \boxed{11\,\text{kHz}}$$

- Kwantisatie:
De gemiddelde signaal-ruisverhouding moet ten minste $100\,\text{dB}$ bedragen. We zoeken $K = 2^n$ zodat geldt dat

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = K^2 - 1 \geq 100\,\text{dB} \tag{1}$$

We kunnen dit ook uitdrukken in decibel (dB), en wel als volgt:

$$\text{dB}\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 10 \cdot \log_{10}\left(\left(\frac{S}{N}\right)_0\right) = 10 \cdot \log_{10}(\text{vermogensverhouding})$$

Of nog: het aantal decibel is gelijk aan 10 keer de $\log_{10}$ van een **vermogens**verhouding (er wordt inderdaad gevraagd naar een vermogensverhouding, voor de amplitudeverhouding is het maal 20). We vatten de omzetting samen:

$$\begin{aligned}\text{dB} &= 10 \cdot \log_{10}(\text{vermogensverhouding})\\ &= 10 \cdot \log_{10}(\text{amplitudeverhouding}^2)\\ &= 20 \cdot \log_{10}(\text{amplitudeverhouding})\end{aligned}$$

We zoeken nu vanuit deze waarde van $100\,\text{dB}$ de overeenkomstige vermogensverhouding:

$$\begin{aligned}10 \cdot \log_{10}(\text{vermogensverhouding}) = 100\,\text{dB} &\Leftrightarrow \log_{10}(\text{vermogensverhouding}) = 10\,\text{dB}\\ &\Leftrightarrow \text{vermogensverhouding} = 10^{10}\end{aligned}$$

We vinden dus een vermogensverhouding van $\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 10^{10}$. Dit is gelijk aan 10000 miljoen. Als we dit invullen in de ongelijkheid 1, wordt de *min 1* verwaarloosbaar en krijgen we dus:

$$\begin{aligned}K^2 \geq 100\,\text{dB} &\Leftrightarrow K^2 \geq 10^{10}\\ &\Leftrightarrow K \geq 10^5\\ &\Leftrightarrow 2^n \geq 10^5\\ &\Leftrightarrow n \geq \log_2(10^5) \approx 16.6\end{aligned}$$

We nemen dus als exponent $n = 17$, zodat $K = 2^n = 2^{17}$ en we zien inderdaad dat voldaan is aan de voorwaarde $K^2 - 1 \geq 10^{10}$, want $K^2 = 2^{34} \approx 1.7 \times 10^{10}$, wat duidelijk groter is dan 10^{10} na de aftrekking van het getal 1.
Nu berekenen we de grootte van de kwantisatieintervallen:

$$\Delta(= a) = \frac{2A}{K} = \frac{2 \cdot 0.1386}{2^{17}} = 0.1386 \cdot 2^{-16}$$

We berekenen vervolgens de gemiddelde hoeveelheid informatie per bemonstering na kwantisatie. Omdat we hier te maken hebben met een uniforme verdeling is $p(x_i)$ overal gelijk, maar als dat niet zo zou zijn, kunnen we de som uit het formularium – die loopt van $i = 1$ tot K, en die dus heel veel termen kan bevatten – vereenvoudigen door alles in functie van K uit te drukken.

Bijvoorbeeld: 1/3 van de amplitudes heeft kans p_1, 1/6 heeft kans p_2 en 1/2 heeft kans p_3. Dan kunnen we de som van K termen herleiden tot eentje van slechts 3 termen. Voor deze oefening krijgen we – wegens de uniforme kansverdeling – een makkelijke uitdrukking:

$$
\begin{aligned}
H(x^{\Delta}) &= -\sum_{i=1}^{K} p(x_i) \cdot \Delta \cdot \log(p(x_i) \cdot \Delta) \\
&= -K \cdot \frac{1}{2A} \cdot \Delta \cdot \log\left(\frac{1}{2A} \cdot \Delta\right) \\
&= -\cancel{K} \cdot \frac{1}{\cancel{2A}} \cdot \frac{\cancel{2A}}{\cancel{K}} \cdot \log\left(\frac{1}{\cancel{2A}} \cdot \frac{\cancel{2A}}{K}\right) \\
&= -\log\left(\frac{1}{K}\right) \\
&= 17\,\mathrm{bit_i}/\mathrm{bemonstering}
\end{aligned}
$$

Dit stemt overeen met de approximatie:

$$H(x^{\Delta}) \approx H(x) - \log_2(\Delta) = 17\,\mathrm{bit_i}/\mathrm{bemonstering}$$

Aan de hand van $H(x^{\Delta})$ kunnen we nu het <u>informatiedebiet</u> uitrekenen:

$$
\begin{aligned}
H_t(x^{\Delta}) &= 2B \cdot H(x^{\Delta}) \\
&= \boxed{170\,\frac{\mathrm{kbit}}{\mathrm{s}}} \\
&\neq f_s \cdot H(x^{\Delta}) \text{ want we bereiken een maximum!}
\end{aligned}
$$

Voor K intervallen of niveaus hebben we $n_q = \log_2(K)$ binary digits (bits) nodig. Het <u>transmissiedebiet</u> is gelijk aan de frequentie waaraan we samplen, vermenigvuldigd met deze hoeveelheid bits. We vinden dat dit transmissiedebiet gelijk is aan

$$
\begin{aligned}
r_b &= f_s \cdot \log_2(K) \\
&= 11\,\mathrm{kHz} \cdot 17\,\mathrm{bit} \\
&= \boxed{187\,\frac{\mathrm{kbit}}{\mathrm{s}}}
\end{aligned}
$$

3 Filters

Gevraagd

Ontwerp een laagdoorlaatfilter met minimale vertraging (hoogstens 0.8 ms) en maximale stopbandverzwakking – waarvan de laatste geprioriteerd dient te worden, gegeven volgende zaken:

- De bemonsteringsfrequentie bedraagt $f_{\text{sam}} = 100\,\text{kHz}$
- De doorlaatfrequentie bedraagt $f_p = 20\,\text{kHz}$
- De stopfrequentie f_s ligt ergens tussen de 20 kHz en de 23 kHz

Oplossing

We beginnen met de eisen die we zeker weten. De *lakse* voorwaarden behandelen we later. De **vertraging (die gelijk is aan de orde, $M-1$, maal de sampling periode!)** moet sowieso minder dan 0.8 ms bedragen. We bepalen een **bovengrens** voor M (maar leggen nog geen waarde vast!):

$$\begin{aligned}(M-1)T_{\text{sam}} \leq 0.8\,\text{ms} &\Leftrightarrow \frac{(M-1)}{f_{\text{sam}}} \leq 0.8\,\text{ms}\\ &\Leftrightarrow \frac{(M-1)}{100\,\text{kHz}} \leq 0.8\,\text{ms}\\ &\Leftrightarrow \frac{(M-1)}{10^5}\text{s} \leq 0.8 \times 10^{-3}\,\text{s}\\ &\Leftrightarrow M-1 \leq 0.8 \times 10^2 = 80\\ &\Leftrightarrow M \leq 81\end{aligned}$$

We berekenen de genormaliseerde frequenties:

$$\begin{aligned}\omega_p &= \frac{2\pi f_p}{f_{\text{sam}}} = \frac{2\pi \cdot 20}{100} = \frac{2\pi}{5}\\ \omega_s &= \frac{2\pi f_s}{f_{\text{sam}}} \in \left[\frac{2\pi}{5}, \frac{46\pi}{100}\right] = \left[\frac{2\pi}{5}, \frac{23\pi}{50}\right]\end{aligned}$$

De transitieband is $\omega_s - \omega_p$. Een **kleinere stopbandfrequentie** f_s (en dus ook $\omega_s \downarrow$) wil zeggen:

→ Kleinere transitieband

→ Grotere M nodig om dat te realiseren

→ Grotere vertraging en meer energieverbruik (willen we niet!)

→ Dus we nemen f_s zo **GROOT** mogelijk: $f_s = 23\,\text{kHz} \quad \Longrightarrow \quad \omega_s = \frac{23\pi}{50}$

Uit $\omega_p = \frac{20\pi}{50}$ en $\omega_s = \frac{23\pi}{50}$ volgt dat de breedte van de transitieband gelijk is aan

$$\omega_s - \omega_p = \frac{23-20}{50}\pi = \frac{3\pi}{50}$$

We gaan nu op zoek naar de correcte vorm van het window. Hiervoor zoeken we X zodat

$$\frac{3\pi}{50} = \frac{X}{M} \Leftrightarrow \frac{50X}{3\pi} = M$$

We berekenden al dat het aantal samples M maximum 81 mag zijn. We kunnen dus een bovengrens voor X bepalen:

$$\begin{aligned}M \leq 81 &\Leftrightarrow \frac{50X}{3\pi} \leq 81\\ &\Leftrightarrow 50X \leq 81 \cdot 3\pi\\ &\Leftrightarrow X \leq 15.27\end{aligned}$$

We kiezen voor het **Hamming** window, omdat dit het window is met de grootste stopbandverzwakking δ_s (zoals gevraagd), die voldoet aan de voorwaarde $X \leq 15.27$. We berekenen nu de waarde die we nodig hebben voor M (en hopen dat die effectief kleiner is dan 81):

$$\frac{3\pi}{50} \overset{\text{Hamming}}{=} \frac{15.14}{M} \quad \Leftrightarrow \quad M \approx 80.32$$

We ronden deze waarde af **naar boven** en vinden een (oneven!) waarde van $M = \boxed{81}$. Het is noodzakelijk dat deze waarde **oneven** is, zodat we steeds mooi rond 0 samplen.

4 Discrete transmissiekanalen

Een bron zendt (alle mogelijke) pakketjes uit van telkens twee bits. De foutkans voor elk afzonderlijk symbool bedraagt 1% en is onafhankelijk van een ander symbool. De kans op het doorsturen van een 0 of een 1 is even waarschijnlijk.

Gevraagd:

1. Bepaal de kanaalmatrix Q, $H(X), H(Y), H(X \mid Y)$ en $H(Y \mid X)$
2. Wat is de gemiddelde symboolfoutkans?
3. Het team onderzoekers dat de bron bestudeert, vindt de foutkans te groot en gaat kanaalcodering toepassen aan de hand van een (n, k) systematische lineaire blokcode met generatormatrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_k & P_{k\times(n-k)} \end{bmatrix} \quad \text{met } n = 5, k = 2$$

   Wat is de coderingsefficiëntie ε? Bepaal de minimumafstand d_{min}, het foutdetectievermogen e en het foutcorrectievermogen t van de blokcode.

4. Hoe groot is de kans op een niet-corrigeerbare fout bij het doorsturen van een codewoord? *Tip:* de kans dat er exact x symbolen fout zijn in een serie van y bits is $\binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} = \frac{y!}{x!(y-x)!}$

Oplossing: De matrix met bronvectoren is

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en de foutkansen voor beide symbolen (0 en 1) zijn gelijk, namelijk $p = 0.01$.

1. De kanaalmatrix Q geeft bevat alle kansen $q_{ji} = q(y_j \mid x_i)$, i.e. de kans dat een symbool y_j wordt ontvangen als een symbool x_i werd verzonden. De kolommen van deze matrix sommeren naar 1, want per verzonden symbool x_i wordt er sowieso een symbool y_j ontvangen. We vinden dat

$$Q = \begin{bmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{bmatrix}$$

   waarbij

$$\begin{aligned} a &= P(\text{symbool juist ontvangen}) \cdot P(\text{symbool juist ontvangen}) &&= 0.99^2 \\ b &= P(\text{symbool juist ontvangen}) \cdot P(\text{symbool fout ontvangen}) &&= 0.99 \cdot 0.01 \\ c &= P(\text{symbool fout ontvangen}) \cdot P(\text{symbool fout ontvangen}) &&= 0.01^2 \end{aligned}$$

   We mogen de kansen gewoon vermenigvuldigen, want de foutkansen zijn onafhankelijk.

   Omdat 0 en 1 met gelijke kans voorkomen, weten we dat $\forall x \in \{00, 01, 10, 11\} : p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. We kunnen dus berekenen dat

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \log(p(x_i)) = -4 \cdot \left(0.5^2 \cdot \log(0.5^2)\right) = \boxed{2 \, \frac{\text{bit}_\text{i}}{\text{symbool}}}$$

We berekenen nu de voorwaardelijke hoeveelheid informatie $H(Y \mid X)$. Merk op dat de kolomsommen van Q over $q_{ji} \cdot \log(q_{ji})$ telkens dezelfde zijn en dat ook $p(x_1) = ... = p(x_4)$.

$$\begin{aligned}
H(Y \mid X) &= -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i) \cdot q_{ji} \cdot \log(q_{ji}) \\
&= -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \sum_{j=1}^{4} q_{ji} \cdot \log(q_{ji}) \\
&= -\cancel{4} \cdot \left[\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left(0.99^2 \cdot \log(0.99^2) + 2 \cdot 0.99 \cdot 0.01 \cdot \log(0.99 \cdot 0.01) + 0.01^2 \cdot \log(0.01^2)\right) \right] \\
&= \boxed{0.1616 \, \frac{\text{bit}_\text{i}}{\text{symbool}}}
\end{aligned}$$

We kunnen $H(Y)$ uitrekenen aan de hand van de formule, maar we kunnen dit ook beredeneren. Niet alleen de kanaalmatrix, maar ook de foutkansen (i.e. de ruis), zijn symmetrisch. We kunnen dus direct inzien dat elke $q(y_j) = 0.25$. Dit wil zeggen dat $H(X) = H(Y)$. Een andere manier om dit te bekijken:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ q(y_j) \\ \vdots \end{bmatrix} = Q \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ p(x_i) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Omdat we nu weten dat $H(X) = H(Y)$, volgt uit

$$\begin{aligned}
R &= H(X) - H(X \mid Y) \\
&= H(Y) - H(Y \mid X)
\end{aligned}$$

dat ook $H(X \mid Y) = H(Y \mid X) = 0.1616 \, \frac{\text{bit}_\text{i}}{\text{symbool}}$.

2. We berekenen de gemiddelde symboolfoutkans, die hetzelfde is bij zonder en ontvanger, omdat $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ een vierkante matrix is.

$$\begin{aligned}
P_e &= \sum_{j=1}^{4} q(y_j) \cdot p(e \mid y_j) \\
&= \sum_{j=1}^{4} q(y_j) \cdot [1 - p(x_j \mid y_j)] \\
&= \cancel{4} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot (1 - q_{11}^2) \\
&= 1 - 0.99^2 \\
&\approx \boxed{2\%}
\end{aligned}$$

3. De coderingsefficiëntie van de $(n, k) = (5, 2)$ blokcode bedraagt

$$\varepsilon = \frac{k}{n} = \frac{2}{5} = \boxed{0.4}$$

Door de bronvectoren $U_i = [0\,0], [0\,1], [1\,0], [1\,1] \in \mathbb{R}^k$ te vermenigvuldigen met de generatormatrix G, verkrijgen we codevectoren C_i. Omdat $[0\,0]$ een bronvector is, zal de kleinste hammingafstand d_min gewoonweg gelijk zijn aan het kleinste gewicht g (i.e. het aantal enen) van alle de codewoorden.

We kunnen nu zonder veel rekenwerk de matrix opstellen, die in de rijen de codevectoren $C_i \in \mathbb{R}^n$ bevat. Merk op: de eerste twee kolommen bevatten sowieso de bronvectoren, want de lineaire blokcode is **systematisch**: de k symbolen u_i, gegenereerd door de bron, komen voor als eerste k symbolen in het codewoord na kanaalcodering.

Snelle manier om de matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

met codevectoren te vinden:

- Kolom 1 en 2 bevatten als eerste $k = 2$ symbolen de bronvectoren U_i.
- Rij 1 bevat enkel nullen.
- Rij 2 bevat de tweede rij uit P.
- Rij 3 bevat de eerste rij uit P.
- Rij 4 bevat de som van de eerste twee rijen uit de P, **modulo 2**.

We zien meteen dat $d_{\text{min}} = 3$, omdat het laagste gewicht van een codevector, verschillend van de nulvector, gelijk is aan 3. Het bepalen van het foutdetectievermogen e en het foutcorrectievermogen t is kinderspel:

$$e = d_{\text{min}} - 1 = \boxed{2} \qquad \text{en} \qquad t = \left\lfloor \frac{d_{\text{min}} - 1}{2} \right\rfloor = \boxed{1}$$

4. Omdat het foutcorrectievermogen gelijk is aan $t = 1$, treedt een niet-corrigeerbare fout op indien er meer dan 1 bit fout is. We vinden dus dat

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - p(1 \text{ bit fout}) - p(0 \text{ bits fout}) \\ &= 1 - p(\text{bit}_1 \text{ fout}) - \ldots - p(\text{bit}_5 \text{ fout}) - p(\text{alle bits juist}) \\ &= 1 - \left(5 \cdot 0.01 \cdot 0.99^4\right) - \left(0.99^5\right) \\ &= \boxed{0.098\%} \end{aligned}$$

We verkleinen de foutkans dus met factor 2 door aan kanaalcodering te doen. Omdat we nu extra bits versturen, zal ook het netto transmissiedebiet r_b dalen.

5 Geleide fysische transmissie

In 1956 werd de eerste transatlantische coaxiale kabel in gebruik genomen. Hij functioneerde gedurende 20 jaar zonder noemenswaardige defecten en transporteerde 36 telefoonkanalen in de frequentieband van 20 tot 170 kHz. Deze frequentieband werd opgelegd door de mogelijkheden van de versterkers die waren uitgevoerd met radiobuizen en die een vermogenversterking van 60 dB realiseerden in de opgegeven frequentieband.

Gevraagd: Gegeven de transmissielijnparameters

$$\begin{aligned}
R &= 2 \times 10^{-5}\,\Omega/\text{km} & \text{weerstand} &= \text{verlieselement}\\
L &= 0.25 \times 10^{-3}\,\text{H/km} & \text{inductantie} &= \text{hoeveelheid opgeslagen magnetische energie}\\
C &= 4 \times 10^{-8}\,\text{F/km} & \text{capaciteit} &= \text{hoeveelheid opgeslagen elektrische energie}\\
G &= 3 \times 10^{-3}\,\text{S/km} & \text{conductantie} &= \text{`verliesstroom'} = \text{verlieselement}
\end{aligned}$$

Bereken voor de grootste frequentie van 170 kHz de maximale afstand tussen de versterkers zodat de verzwakking van het signaal telkens gecompenseerd werd.

Oplossing: We berekenen de propagatieconstante

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}\\
&= \sqrt{(R + j \cdot 2\pi f \cdot L)(G + j \cdot 2\pi f \cdot C)}\\
&= 0.11851 + 3.37984j
\end{aligned}$$

De verzwakkingsconstante is dus gelijk aan $\alpha = 0.11851$ en de faseconstante is gelijk aan $\beta = 3.37984$. Nu geldt dat de verzwakking gelijk is aan

$$A = 20 \cdot \log_{10} e^{\alpha \cdot 10^3 \text{m}} = \alpha \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot \log_{10} e \qquad \textbf{(in dB per \underline{km}!)}$$

De verzwakking is kleiner dan of gelijk aan 60 dB als $A \cdot l \leq 60\,\text{dB}$, ofwel als

$$l \leq \frac{60}{0.11851 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot \log_{10} e} = \boxed{58\,\text{km}}$$

6 Ongeleide fysische transmissie

Een anonieme toerist ontdekte onlangs de verloren bibliotheek van Alexandrië. Een team van historisch aangelegde ingenieurs hebben hier wind van opgevangen en zijn van plan een missie te organiseren om alle informatie uit de bibliotheek over te brengen naar een veilige locatie. De hoeveelheid informatie schatten ze op ongeveer 3,6 Tbit (1 Tbit = 10^{12} bit). De bandbreedte van hun overdracht zal 100 MHz bedragen op een draaggolf van 1 GHz. Voor hun missie hebben ze reeds de volgende infrastructuur:

i. een paraboolantenne als zender met 1 kW zendvermogen, 1 m diameter en 80% efficiëntie

ii. een satelliet op 1000 km afstand tot de zender, met 20 dB ontvangstwinst en 80 dB interne versterking (van het signaal, niet de ruis), die zelf signalen isotroop uitstraalt

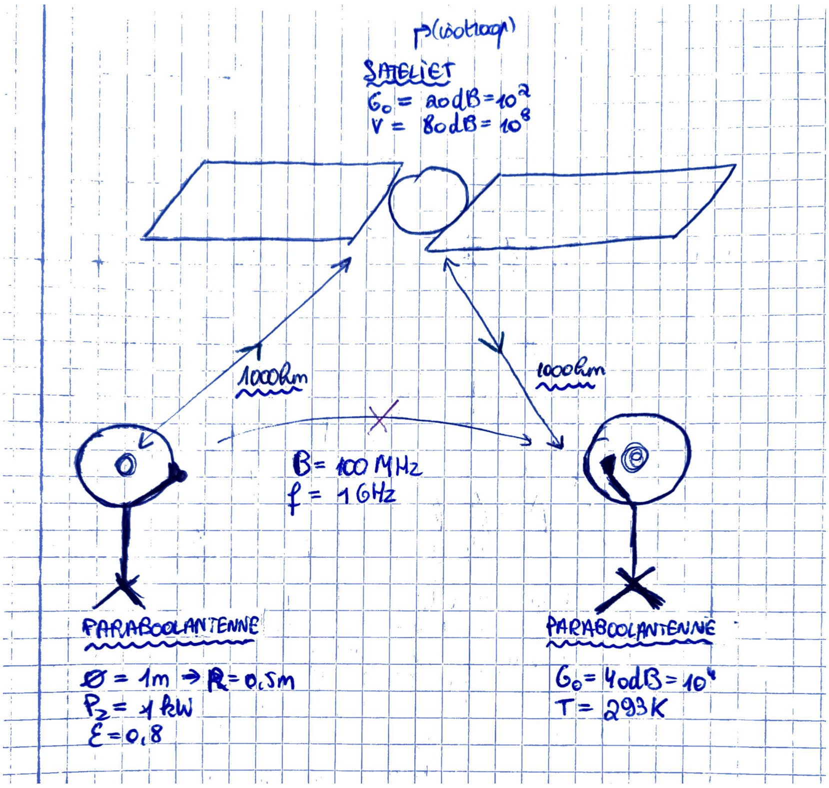
iii. een paraboolantenne om het signaal op de veilige plaats te ontvangen, 1000 km van de satelliet, met een ontvangstwinst van 40 dB en een lokale (ruis)temperatuur van 293 K

De zendantenne kan niet rechtstreeks naar de ontvangstantenne stralen maar moet via de satelliet gaan. Omdat ze te veel aandacht zouden trekken als ze te lang op de locatie van de gevonden bibliotheek blijven, wensen ze de klus te klaren binnen één uur. De infrastructuur kan desnoods aangepast worden op de volgende drie manieren.

1. Een vergroting van de bandbreedte naar oneindig voor 20000 euro
2. Een vergroting van de zendantenne aan 2000 euro per extra meter diameter
3. Een verhoging van de winst van de ontvangstantenne aan 1000 euro per extra dB

Verifieer of de huidige infrastructuur voldoende is om alle informatie in de gewenste tijd over te kunnen brengen en zo niet, bereken dan het bedrag dat het team van ingenieurs nog zal moeten spenderen.

Oplossing zie Figuur 1 voor een schets van de gegevens.



Figuur 1: Een schets van de gegevens.

Er is gevraagd of de huidige infrastructuur voldoende is om alle informatie ($3.6\,\text{Tbit}_\text{i}$) in de gewenste tijd van één uur = 3600 seconden over te kunnen brengen. We moeten dus controleren of

$$C \geq \frac{3.6\,\text{Tbit}_\text{i}}{3600\,\text{s}} \quad \overset{\text{Shannon}}{\Longleftrightarrow} \quad B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_o}{P_n}\right) \geq 1\,\frac{\text{Gbit}_\text{i}}{\text{s}} \tag{2}$$

We berekenen het ontvangen vermogen in de satelliet.
Merk op dat $R \neq r$! $R_1 = R_2$ is de afstand tussen de paraboolantenne en de satelliet (zelfde voor beide satellieten, namelijk 1000 km) en r_{p_1} is de straal van de verzendende paraboolantenne.

$$\begin{aligned}
P_{o,s} &= (\text{vermogensdichtheid bij straling})_{p_1} \cdot (\text{effectief oppervlak})_s \\
&= p_{p_1}(\theta, \phi, R_1) \cdot A_{e,o,s}(\theta, \phi) \\
&= \left(\frac{P_{z,p_1}}{4\pi R_1^2} \cdot \underbrace{G_{z,p_1}(\theta, \phi)}_{\downarrow}\right) \cdot \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_{o,s}(\theta, \phi)\right) \\
&= \frac{P_{z,p_1}}{4\pi R_1^2} \cdot \overbrace{\underbrace{A_{e,z,p_1}(\theta, \phi)}_{\downarrow} \cdot \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{\lambda^2}}} \cdot \frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{4\pi}} \cdot G_{o,s}(\theta, \phi) \\
&= \frac{P_{z,p_1}}{4\cancel{\pi} R_1^2} \cdot \overbrace{\varepsilon_{p_1} \cdot \cancel{\pi} r_{p_1}^2} \cdot G_{o,s}(\theta, \phi) \\
&= 5 \times 10^{-9}\,\text{W} = 5\,\text{nW}
\end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we het ontvangen vermogen van de ontvangende paraboolantenne. De satelliet is een isotrope straler, dus de vermogensdichtheid hangt enkel af van R, m.a.w. er is geen sprake van winst.

$$\begin{aligned}
P_{o,p_2} &= (\text{vermogensdichtheid bij straling})_s \cdot (\text{versterking})_s \cdot (\text{effectief oppervlak})_{p_2} \\
&= p_s(R_2) \cdot V_s \cdot A_{e,o,p_2}(\theta, \phi) \\
&= \left(\frac{P_{o,s}}{4\pi R_2^2}\right) \cdot V_s \cdot \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_{o,p_2}(\theta, \phi)\right) \qquad \text{met } \lambda = \frac{c}{f} \\
&= \frac{P_{o,s}}{4\pi R_2^2} \cdot V_s \cdot \frac{c^2}{4\pi f^2} \cdot G_{o,p_2}(\theta, \phi) \\
&= 2.8497 \times 10^{-12}\,\text{W}
\end{aligned} \tag{3}$$

Het ontvangen ruisvermogen bij de ontvangende paraboolantenne bedraagt

$$\begin{aligned}
P_{n,p_2} &= N_0 \cdot B \\
&= k \cdot T \cdot B \\
&= 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 293\,\text{K} \cdot 100 \times 10^6\,\text{Hz} \\
&= 4.0434 \times 10^{-13}\,\text{W}
\end{aligned} \tag{4}$$

Als we nu de gegeven bandbreedte van $B = 100\,\text{MHz}$ en onze uitkomsten (3) en (4) invullen in de formule van Shannon (2), vinden we dat de capaciteit van het ongeleide fysische transmissiekanaal gelijk is aan

$$\begin{aligned}
C &= B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_{o,p_2}}{P_{n,p_2}}\right) \\
&= 100\,\text{MHz} \cdot \log_2\left(1 + \frac{2.8497 \times 10^{-12}\,\text{W}}{4.0434 \times 10^{-13}\,\text{W}}\right) \\
&= 301\,\frac{\text{Mbit}_\text{i}}{\text{s}} \\
&= \boxed{0.301\,\frac{\text{Gbit}_\text{i}}{\text{s}} \leq 1\,\frac{\text{Gbit}_\text{i}}{\text{s}}}
\end{aligned}$$

We zien dus dat de huidige infrastructuur onvoldoende is om alle informatie in de gewenste tijd over te kunnen brengen. We bekijken nu de aanpassingen die zouden kunnen gebeuren aan de infrastructuur om alsnog binnen één uur tijd de gewenste hoeveelheid informatie door te sturen. We beginnen bij de goedkoopste *upgrade*, aangezien we geen dure aanpassing moeten aanschaffen indien we de klus al kunnen klaren met een goedkopere aanpassing:

- We berekenen eerst hoeveel het ontvangen vermogen in de satelliet precies moet bedragen opdat de capaciteit van het fysisch kanaal groter of gelijk is aan $1\,\frac{\mathrm{Gbit_i}}{\mathrm{s}}$:

$$\begin{aligned}
C \geq 1\,\frac{\mathrm{Gbit_i}}{\mathrm{s}} \iff && B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_{o,p_2}}{P_{n,p_2}}\right) &\geq 1 \times 10^9\,\frac{\mathrm{bit_i}}{\mathrm{s}} \\
\iff && \log_2\left(1 + \frac{P_{o,p_2}}{P_{n,p_2}}\right) &\geq \frac{10^9}{B} \\
\iff && \left(1 + \frac{P_{o,p_2}}{P_{n,p_2}}\right) &\geq 2^{10^9/B} \\
\iff && P_{o,p_2} &\geq P_{n,p_2}(2^{10^9/B} - 1) \\
\iff && \frac{P_{o,s}}{4\pi R_2^2} \cdot V_s \cdot \frac{c^2}{4\pi f^2} \cdot G_{o,p_2} &\geq 4.136 \times 10^{-10}\,\mathrm{W} \qquad (5)
\end{aligned}$$

- Optie 3: Een verhoging van de winst G_{o,p_2} van de ontvangstantenne kost 1000 euro per extra dB. We voldoen aan voorwaarde (5) a.s.a.

$$\frac{P_{o,s}}{4\pi R_2^2} \cdot V_s \cdot \frac{c^2}{4\pi f^2} \cdot G_{o,p_2} \geq 4.136 \times 10^{-10}\,\mathrm{W}$$
$$\Updownarrow$$
$$G_{o,p_2} \geq \frac{4.136 \times 10^{-10}\,\mathrm{W}}{\frac{P_{o,s}}{4\pi R_2^2} \cdot V_s \cdot \frac{c^2}{4\pi f^2}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned}
G_{o,p_2} &\geq 1.451\,541 \times 10^6 \\
&= 10 \cdot \log_{10}(1.451\,541 \times 10^6)\,\mathrm{dB} \\
&= 61.62\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

We zien dus dat we de winst van de antenne met $\boxed{21.62\,\mathrm{dB}}$ moeten verhogen, wat overeenkomt met een kost van $\boxed{21620 \text{ euro}}$.

- Optie 2: Een vergroting van de zendantenne kost ons 2000 euro per extra meter diameter. We voldoen aan voorwaarde (5) a.s.a.

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{o,s}}{4\pi R_2^2} \cdot V_s \cdot \frac{c^2}{4\pi f^2} \cdot G_{o,p_2} &\geq 4.136 \times 10^{-10}\,\mathrm{W} \\
&\Updownarrow \\
P_{o,s} &\geq \frac{4.136 \times 10^{-10}\,\mathrm{W} \cdot (4\pi)^2 \cdot R_2^2 \cdot f^2}{V_s \cdot c^2 \cdot G_{o,p_2}} \\
&\Updownarrow \\
\frac{P_{z,p_1}}{4R_1^2} \cdot \varepsilon_{p_1} \cdot r_{p_1}^2 \cdot G_{o,s} &\geq \frac{4.136 \times 10^{-10}\,\mathrm{W} \cdot (4\pi)^2 \cdot R_2^2 \cdot f^2}{V_s \cdot c^2 \cdot G_{o,p_2}} \\
&\Updownarrow \\
r_{p_1}^2 &\geq \frac{4.136 \times 10^{-10}\,\mathrm{W} \cdot (4\pi)^2 \cdot R_2^2 \cdot f^2 \cdot 4R_1^2}{V_s \cdot c^2 \cdot G_{o,p_2} \cdot P_{z,p_1} \cdot \varepsilon_{p_1} \cdot G_{o,s}} \\
&\Downarrow \\
r_{p_1} &\geq \sqrt{36.285\,\mathrm{m}^2} \\
&= 6.024\,\mathrm{m} \\
&\Updownarrow \\
d_{p_1} &\geq 12.05\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

  We hebben dus 11.05 m extra diameter nodig om aan de capaciteitsvoorwaarde te voldoen. De kost voor deze aanpassing bedraagt $11.05 \cdot 2000 = \boxed{22100 \text{ euro}}$.

- Optie 1: Een vergroting van de bandbreedte naar oneindig kost 20000 euro. We berekenen de capaciteit C voor $B \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{B\to\infty} C &= 1.4427 \cdot \frac{P_{o,p_2}}{N_{o,p_2}} \\
&= 1.4427 \cdot \frac{P_{o,p_2}}{k \cdot T} \\
&= 1.4427 \cdot \frac{2.8497 \times 10^{-12}\,\mathrm{W}}{1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 293\,\mathrm{K}} \\
&= 1\,016\,783\,447\,\frac{\mathrm{bit_i}}{\mathrm{s}} \\
&\approx 1.017\,\frac{\mathrm{Mbit_i}}{\mathrm{s}} \\
&\geq 1\,\frac{\mathrm{Mbit_i}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

We kiezen er dus voor om de winst van de ontvangstantenne te verhogen (optie 3), aangezien dit de goedkoopste manier is om een capaciteit van minstens 1 $\frac{\mathrm{Mbit_i}}{\mathrm{s}}$ te bewerkstelligen.

7 Doorlaatbandtransmissie

We bekijken internettoegang via een geostationaire satelliet die we ontvangen met een paraboolantenne met een diameter van 60 cm (efficiëntie van de antenne is $\varepsilon = 0.8$). Het zendvermogen aan boord van de satelliet is 100 W, de winst van de satellietantenne in de richting van de ontvangantenne op de grond is 20 dB; de afstand tussen satelliet en ontvangantenne is 40 000 km; de draaggolffrequentie is 10 GHz; de antenneruistemperatuur van de ontvangantenne op de grond is 50 K.
We bekijken het downloaden van informatie van de satelliet naar de ontvangantenne en wensen een transmissiedebiet van 5 Mbit/s. We kiezen voor een QAM-modulatietechniek en een golfvorm met factor $\alpha = 1$; we wensen de kans op foutieve ontvangst van een golfvorm kleiner te houden dan 4×10^{-9}.

Gevraagd:

1. Bereken de verhouding van de hoeveelheid energie per bit to.v. de ruisvermogendichtheid.
2. Hoe groot zijn de pakketjes van bits?

Oplossing:

1. We moeten de verhouding tussen de hoeveelheid energie per bit E_b en de ruisvermogensdichtheid N_o in de ontvangende paraboolantenne p berekenen. Deze verhouding is gelijk aan

$$\frac{E_b}{N_o} \tag{6}$$

Nu geldt voor de hoeveelheid energie per bit E_b dat

$$\left[\frac{\text{J}}{\text{bit}*}\right] = \boxed{E_b = \frac{P_o}{r_b}} = \frac{[\text{W}]}{[\text{bit/s}]} = \frac{[\text{J/s}]}{[\text{bit/s}]} \tag{7}$$

Merk op dat de gemiddelde hoeveelheid energie per bit $E_b = [\text{J/bit}]$ **niet gelijk is** aan de energie per bit_i, die gegeven wordt door (zie form. juist boven B3):

$$W = 0.693 \cdot N_o = \left[\frac{\text{J}}{\text{bit}_\text{i}}\right]$$

Het transmissiedebiet is gegeven en bedraagt $r_b = 5\,\text{Mbit/s} = 5 \times 10^6\,\text{bit/s}$.
Gebruikmakend van de radiovergelijking, berekenen we dat

$$\begin{aligned}
P_{o,p} &= p(\theta, \phi, R) \cdot A_{e,s}(\theta, \phi) \\
&= \left(\frac{P_{z,s}}{4\pi R^2} \cdot G_{z,s}(\theta, \phi)\right) \cdot \left(\varepsilon_p \cdot r_p^2 \pi\right) \\
&= \left(\frac{100\,\text{W}}{4\pi \cdot (40\,000 \times 10^3\,\text{m})^2} \cdot 10^2\right) \cdot \left(0.8 \cdot (0.3\,\text{m})^2 \pi\right) \\
&= 1.125 \times 10^{-13}\,\text{W}
\end{aligned}$$

Als we nu de waarden voor r_b en $P_{o,p}$ invullen in (7), vinden we dat

$$E_b = \frac{1.125 \times 10^{-13}\,\text{W}}{5 \times 10^6\,\text{bit/s}} = 2.25 \times 10^{-20}\,\frac{\text{J}}{\text{bit}}$$

Dit resultaat substitueren we samen met $N_o = k \cdot T$ in (6) en zo vinden we de gevraagde verhouding:

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{2.25 \times 10^{-20}\,\text{J/bit}}{1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K} \cdot 50\,\text{K}} = \boxed{32.61}$$

2. Er wordt gevraagd om de grootte n_s van de pakketjes van bits te berekenen.

Het aantal golfvormen voor onze doorlaatbandtransmissie bedraagt $M = 2^n$. Er is gegeven dat er wordt gekozen voor een QAM-modulatietechniek. Voor deze techniek kunnen we de symboolfoutkans P_g berekenen. Deze mag volgens de opgave ten hoogste 4×10^{-9} bedragen:

$$P_g \leq 4 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2 M}{M-1} \cdot \frac{E_b}{N_o}}\right) \text{ (formularium)} \qquad P_g \leq 4 \times 10^{-9} \text{ (gegeven)}$$

We berekenen dat dus moet gelden dat

$$\begin{aligned}
4 \times 10^{-9} \geq 4 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2 M}{M-1} \cdot 32.6}\right) &\overset{M=2^n}{\iff} 10^{-9} \geq Q\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2 2^n}{2^n - 1} \cdot 32.6}\right) \\
&\overset{\text{form.}}{\iff} 6 \leq \sqrt{\frac{3n}{2^n-1} \cdot 32.6} \\
&\implies 36 \leq \frac{3n}{2^n-1} \cdot 32.6 \\
&\iff \boxed{1.1043 \leq \frac{3n}{2^n-1}}
\end{aligned}$$

Als we nu een paar waarden voor n invullen, zien we dat moet gelden dat $n \leq 3$.
We kiezen n zo groot mogelijk, dus $\boxed{n = 3}$

Waarom zo groot mogelijk? Omdat er in doorlaatband geldt dat

$$r_b = n_s \cdot r_s \Leftrightarrow r_s = \frac{r_b}{n_s}, \qquad B = 2(1+\alpha)f_m, \qquad T_s = \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{r_s} \Leftrightarrow f_m = \frac{1}{2}r_s$$

Hieruit volgt:

$$B = \cancel{2}(1+\alpha) \cdot \frac{1}{\cancel{2}}r_s = (1+\alpha) \cdot \frac{r_b}{n_s}$$

We zien dus dat voor een gegeven transmissiebitrate r_b, de bandbreedte zal dalen bij stijgende $n_s = n =$ aantal bits per pakket (of per verzonden symbool/golfvorm). Of omgekeerd: voor een gegeven bandbreedte B kunnen we r_b toch nog opdrijven door n_s groter te maken.

Maar er staat een beperking op: we kunnen niet zo maar oneindig de bitrate opdrijven en onder de beperkte bandbreedtelimiet blijven: hoe meer golfvormen we namelijk versturen, hoe meer verschillende amplitudes we versturen, hoe kleiner het verschil tussen de amplitudes, en uiteindelijk hoe moeilijker voor de ontvanger om de verschillende amplitudes van elkaar te onderscheiden. Bij heel hoge n_s hebben we dus een grote kans om golfvormen foutief te onderscheiden aan de ontvangstkant.

QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) voert amplitude modulatie uit op zowel een sinusgolf als een cosinusgolf, beiden met dezelfde draaggolffrequentie f_c.

8 Multiplexing

Een digitaal signaal met een transmissiedebiet van 80 kbit/s wordt in basisband verstuurd met QAM-16 modulatie. Voor de golfvorm wordt een factor $\alpha = 0.5$ gebruikt.

Gevraagd:

1. Bepaal de vereiste bandbreedte.
2. Een aantal dergelijke signalen worden nu met FDM verstuurd in de band van 140-240 kHz. We gebruiken enkel-zijband-modulatie waarbij de onderste zijband wordt behouden. Hoeveel signalen kunnen er maximaal worden gemultiplext?
3. Wat zijn de draaggolffrequenties als we zorgen voor maximale spreiding in de band 140-240 kHz?
4. Teken het spectrum.

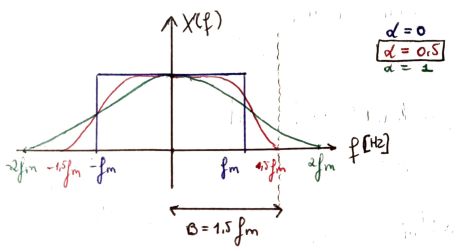
Oplossing:

1. We moeten de bandbreedte B berekenen.

   Er is gegeven dat het transmissiedebiet gelijk is aan $r_b = 80 \times 10^3$ bit/s.

   Bovendien is er gegeven dat we aan QAM-16 modulatie doen. Dit wil zeggen dat er 16 golfvormen worden gebruikt. We kunnen hieruit het aantal bits per pakket (of per verzonden symbool/golfvorm) berekenen:
   $$M = 16 \quad \Longrightarrow \quad 2^{n_s} = 16 \quad \Longrightarrow \quad n_s = 4\,\text{bit/symbool}$$
   Omdat we r_b en n_s kennen, kunnen we berekenen hoeveel symbolen/seconde er worden verzonden:
   $$r_b = n_s \cdot r_s \quad \Longrightarrow \quad n_s = \frac{r_b}{r_s} = \frac{80 \times 10^3\,\text{bit/s}}{4\,\text{bit/symbool}} = 20 \times 10^3\,\text{symbolen/s} = 20 \times 10^3\,\underline{\text{baud}}$$
   Nu volgt, door de definitie van de symboolperiode T_s dat
   $$\begin{aligned} T_s = \frac{1}{r_s} = \frac{1}{2f_m} &\Rightarrow r_s = 2f_m \\ &\Rightarrow f_m = \frac{20 \cdot 10^3}{2} \\ &\Rightarrow f_m = 10\,\text{kHz} \end{aligned}$$

   We kunnen nu de bandbreedte voor een golfvorm berekenen. Een illustratie van het frequentiespectrum is te zien in Figuur 2. We berekenen dat
   $$B \overset{\text{basisband}}{=} (1+\alpha)f_m = (1+0.5) \cdot 10\,\text{kHz} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B = 15\,\text{kHz}}$$



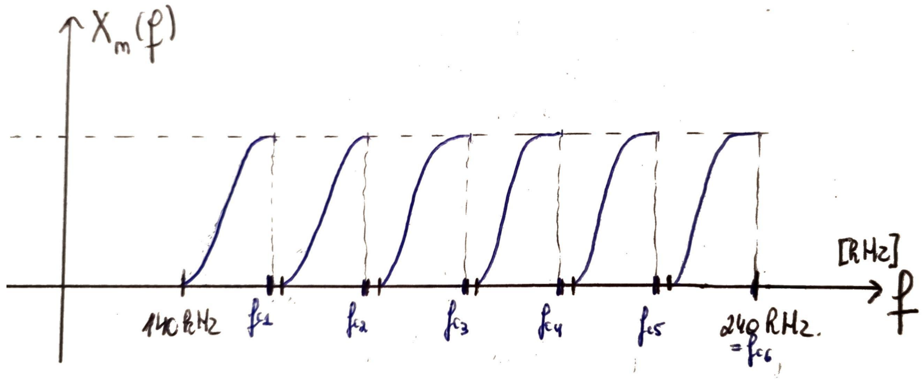
Figuur 2: De frequentie-inhoud $X(f)$ – met *raised cosine roll-off* – van de verzonden golfvorm $x(t)$

2. We berekenen hoeveel signalen er kunnen worden gemultiplext.

   Er is gegeven dat we in doorlaatband de frequenties 140-240 kHz gebruiken. We beschikken dus over een doorlaatbandbreedte van 100 kHz.

   We maken gebruik van enkel-zij-band-modulatie waarbij de onderste zijband wordt behouden. We gaan er vanuit dat we beschikken over een **ideale laagdoorlaatfilter** en dat we aan de hand van deze filter enkel de frequentie-inhoud voor negatieve frequenties (links van de verticale as) in Figuur 2 versturen. Op die manier verbruiken we 15 kHz per verzonden (halve) golfvorm.

   We zien dus dat we $\boxed{\text{6 golfvormen}}$ van 15 kHz kunnen verzenden over de beschikbare doorlaatbandbreedte van 100 kHz tussen 140 kHz en 240 kHz.



Figuur 3: Het **(positieve deel van het)** spectrum van de doorlaatband met de frequentie-inhouden van de verzonden golfvormen. Het negatieve gedeelte bevat exact hetzelfde, maar dan **gespiegeld**.

3. We bepalen nu de draaggolffrequenties $f_{c,i}$ ($i \in \{1, ..., 6\}$) voor alle 6 golfvormen, op een manier zó dat er maximale spreiding is. Hiermee bedoelen we dat we de volledige bandbreedte van 140 kHz tot en met 240 kHz benutten, maar dat de spreiding tussen de golven binnen dit frequentie-interval zo groot mogelijk is.

   We hebben een *overschot*bandbreedte van $100\,\text{kHz} - 6 \cdot 15\,\text{kHz} = 10\,\text{kHz}$. Deze 'overschot' verdelen we over de 5 *tussenstukken* tussen de frequentiespectra van de golven. Zo vinden we dat er in het frequentiespectrum van de doorlaatband $\frac{10\,\text{kHz}}{5} = 2\,\text{kHz}$ tussen elke golfvorm zit. Dit wordt geïllustreerd in Figuur 3.

   We kunnen nu de draaggolffrequenties bepalen:

$f_{c,1}$	$f_{c,2}$	$f_{c,3}$	$f_{c,4}$	$f_{c,5}$	$f_{c,6}$
155 kHz	172 kHz	189 kHz	206 kHz	223 kHz	240 kHz