Oplossing Examen Analyse & Calculus

23 januari 2024 Vincent Van Schependom

Open vragen

Vraag 1

Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}}{|x|} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

1. Toon aan dat f afleidbaar is in 0.
2. Bepaal de afgeleide functie f'.
3. Onderzoek en bespreek de extreme waarden van f.

Oplossing:

We berekenen de rechterafgeleide in $x = 0$ m.b.v. de definitie van afgeleiden:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{e^{-1/x^2}}{|x|}}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{e^{-1/x^2}}{x}}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{-1/x^2}}{x^2} \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2}} \\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(-2x^{-3})}{e^{1/x^2} \cdot (-2x^{-3})} \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{e^{1/x^2}} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

Analoog berekenen we de linkerafgeleide:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{e^{-1/x^2}}{|x|}}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{e^{-1/x^2}}{-x}}{x} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

Omdat $0 \in \text{def}(f)$ en $f'_l(0) = f'_r(0) = 0$, is f afleidbaar in 0 en is $f'(0) = 0$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}}{-x} & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Voor $x < 0$:

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-1/x^2}}{-x}\right) = \frac{(-x) \cdot e^{-1/x^2} \cdot (2x^{-3}) - e^{-1/x^2} \cdot (-1)}{x^2} = e^{-1/x^2}(x^{-2} - 2x^{-4})$$

Voor $x > 0$:

$$f_2'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-1/x^2}}{x}\right) = \frac{x \cdot e^{-1/x^2} \cdot (2x^{-3}) - e^{-1/x^2}}{x^2} = e^{-1/x^2}(2x^{-4} - x^{-2})$$

En dus wordt de afgeleide functie f' van f:

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}(x^{-2} - 2x^{-4}) & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ e^{-1/x^2}(2x^{-4} - x^{-2}) & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Om de kandidaat-extrema te bepalen, berekenen we de nulpunten van f_1' en f_2':

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (f_1'(x) = 0 \wedge x < 0) \vee (f_2'(x) = 0 \wedge x > 0) \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Maak een tekenschema. Je zal zien dat f_1' in $x = -\sqrt{2}$ wisselt van teken (van positief naar negatief) en dat f_2' van teken wisselt in $x = \sqrt{2}$ (ook van positief naar negatief). We besluiten dat f in beide punten een relatief maximum bereikt.

Aangezien nu ook geldt dat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, kunnen we concluderen dat f zowel voor $x = \sqrt{2}$ als voor $x = -\sqrt{2}$ een **absoluut** maximum bereikt.

Vraag 2

Beschouw de functie f en het gebied D:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = yz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 18 \text{ en } z = 2x\}$$

In welk(e) punt(en) bereikt f haar minimum?

Oplossing:

We stellen de Lagrangefunctie op:

$$L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R} : (x, y, z, \lambda, \mu) \mapsto yz + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 18\lambda + \mu z - 2\mu x$$

We berekenen de kritieke punten:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x\lambda - 2\mu \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial y} = z + 2\lambda y \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial z} = y + \mu \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 18 \\ 0 = \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = z - 2x \end{cases}$$

Na het oplossen van dit stelsel vinden we 4 kandidaat-extrema. We berekenen de functiewaarden van elk punt:

- $f(-3, -3, -6) = 18$
- $f(-3, 3, -6) = -18$
- $f(3, -3, 6) = -18$
- $f(3, 3, 6) = 18$

We vinden dus twee minima voor f op D, namelijk $\boxed{(-3, 3, -6) \text{ en } (3, -3, 6)}$.

Vraag 3

Beschouw het lichaam D dat ingesloten is tussen de oppervlakken $x^2 = y^2 + z^2$ en $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ in de halfruimte $x \geq 0$.

1. Beschrijf D door middel van (gepaste) cilindercoördinaten.
2. Bereken het volume van D.

Oplossing:

We berekenen eerst de doorsnede van beide oppervlakken.

$$\begin{aligned}
x^2 + 4y^2 + 4z^2 &= 4 \\
&\Updownarrow x^2 = y^2 + z^2 \\
(y^2 + z^2) + 4y^2 + 4z^2 &= 4 \\
&\Updownarrow \\
5y^2 + 5z^2 &= 2^2 \\
&\Updownarrow \\
y^2 + z^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2
\end{aligned}$$

We kunnen D op volgende manier beschrijven m.b.v. cilindercoördinaten:

$$\begin{cases} y = r\cos(\theta) \\ z = r\sin(\theta) \\ x = x \end{cases} \qquad\qquad |\mathrm{J}| = r$$

$$D = \left\{ (r, \theta, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ en } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ en } r \leq x \leq 2\sqrt{1 - r^2} \right\}$$

Het volume van D wordt dan:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D r\,dx\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2/\sqrt{5}} \left(\int_r^{2\sqrt{1-r^2}} r\,dx \right) dr \right) d\theta \\
&= \boxed{\frac{20 - 4\sqrt{5}}{15}\pi} \\
&\approx 2.3155
\end{aligned}$$

Meerkeuzevragen

Vraag 1

De booglengte van de kromme met vergelijking

$$y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{Bgsin}\sqrt{x}$$

voor $x \in [0, 1]$ is gelijk aan

- -1
- 0
- $\boxed{2}$
- $+\infty$

Oplossing:

Stel $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{Bgsin}\sqrt{x}$. De booglengte is dan gelijk aan

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

We berekenen eerst $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x - x^2} + \operatorname{Bgsin}\sqrt{x}\right) &= \frac{1}{2} \cdot (x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - 2x) + \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1 - 2x}{2 \cdot \sqrt{x - x^2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - x}} \\
&= \frac{2 - 2x}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - x}} \\
&= \frac{1 - x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - x}} \\
&= \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

En dus wordt de onbepaalde integraal:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx \\
&= \int \sqrt{1 + \frac{1 - x}{x}}\, dx \\
&= \int \sqrt{\frac{x + 1 - x}{x}}\, dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx \\
&= 2x^{\frac{1}{2}} + c
\end{aligned}$$

Tot slot berekenen we de booglengte:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \\
&= \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Vraag 2

Beschouw de volgende reeksen:

$$\text{(I)} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(II)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$

- (I) en (II) zijn beide divergent.
- $\boxed{\text{(I) is divergent en (II) is convergent.}}$
- (I) is convergent en (II) is divergent.
- (I) en (II) zijn beide convergent.

<u>**Oplossing**</u>:

Een nodige voorwaarde voor de convergentie van een reeks, is dat $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. We kijken of dit het geval is voor (I):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Omdat voor (I) geldt dat $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, besluiten we dat (I) **divergent** is.

Voor (II) passen we de worteltest toe:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Omdat $0 \leq L \leq 1$, besluiten we dat (II) **convergent** is.

Vraag 3

Van welke functie is onderstaande machtreeks de reeksontwikkeling?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$$

- $\boxed{-\ln\left(1-2x^2\right)}$
- $-\ln\left(1+2x^2\right)$
- $\ln\left(1-2x^2\right)$
- $\ln\left(1+2x^2\right)$

Vraag 4

Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Welke van onderstaande grafieken met niveaulijnen hoort bij de functie f? Dit was echt ontiegelijk makkelijk aangezien de grafiek van f in 3D ook gewoon gegeven was.

Vraag 5

y is de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' + (\sin x)y = e^{\cos x}$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 0$. $y(\pi)$ is gelijk aan

- 0
- $\frac{1}{e}$
- $\boxed{\frac{\pi}{e}}$
- π