Examen Informatieoverdracht en -verwerking

9 Januari 2025 Vincent Van Schependom - Lieven De Lathauwer - Ben Hermans

Vraag 1

Een koning maakt een random walk op een 3x3 schaakbord met posities 1 tot en met 9. We kunnen dit modelleren door de hoeken te benoemen met H, de posities aan de zijden met R, en het midden met C.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

H	R	H
R	C	R
H	R	H

1. Bereken de gemiddelde hoeveelheid informatie voor een voorstelling $\{R, H, C\}$ na heel veel stappen.
2. We duiden nu elke positie aan m.b.v. diens getal. Wat zijn de kansen voor een voorstelling $\{1, 2, ..., 9\}$? Bereken ook hiervoor de gemiddelde hoeveelheid informatie.
3. Als we de positie van de koning doorsturen door eerst de rij en vervolgens de kolom door te geven, bestaat er dan een afhankelijkheid tussen de rijen en kolommen? Leg uit.
4. Maak een Huffman-codering voor een voorstelling $\{1, 2, ..., 9\}$. Bereken de gemiddelde codewoordlengte, de efficiëntie en de compressieverhouding van je codering.

Oplossing:

1. We kunnen dit probleem modelleren aan de hand van een Markov keten. Voor de overgangskansen vinden we dat

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} P(H\,|\,H) & P(H\,|\,C) & P(H\,|\,R) \\ P(C\,|\,H) & P(C\,|\,C) & P(C\,|\,R) \\ P(R\,|\,H) & P(R\,|\,C) & P(R\,|\,R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

We bereiken een steady state wanneer

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{p}_k = \mathbf{p} \quad \iff \quad (\mathbf{C} - \mathbb{I}_3)\mathbf{p} = 0.$$

Omdat dit stelsel oneindig veel oplossingen heeft, voegen we de voorwaarde $\sum_{i=1}^{3} p(x_i) = 1$ toe, waarbij $x_1 = H, x_2 = C$ en $x_3 = R$. We stoppen dit in de PlySmlt2 simultaneous equation solver van onze trusty TI-84 en er bolt een unieke oplossing uit.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} - \mathbb{I}_3 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \iff \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} P(H) \\ P(C) \\ P(R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

We kunnen nu de gemiddelde hoeveelheid informatie berekenen:

$$H(\{R, H, C\}) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i) \log p(x_i) = 1.48\,\text{bit}_\text{i}/\text{symbool}$$

2. Omdat er 4 H-steentjes zijn, 4 R-steentjes zijn en 1 C-steentje is, geldt dat

$$\begin{aligned} P(1) = P(3) = P(7) = P(9) = \frac{P(H)}{4} &= \frac{3}{40} \\ P(2) = P(4) = P(6) = P(8) = \frac{P(R)}{4} &= \frac{1}{8} \\ P(5) = P(C) &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Voor de gemiddelde hoeveelheid informatie vinden we nu dat

$$\begin{aligned} H(\{1, 2, ..., 9\}) &= -\sum_{i=1}^{9} P(i) \log P(i) \\ &= -\left[4 \cdot \frac{3}{40} \log\left(\frac{3}{40}\right) + 4 \cdot \frac{1}{8} \log\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} \log\left(\frac{1}{5}\right)\right] \\ &= 3.085\,\mathrm{bit_i/symbool} \end{aligned}$$

3. We controleren of $P(K_i, R_j) = P(K_i) \cdot P(R_j)$. Hiervoor berekenen we bijvoorbeeld de kolom- en rijkans voor K_2 en R_2:

$$\begin{aligned} P(K_2) &= P(2) + P(3) + P(8) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{9}{20} \\ &= P(4) + P(3) + P(6) = P(R_2) \end{aligned}$$

Omdat nu geldt dat

$$P(R_2, K_2) = P(C) = \frac{1}{5} \neq P(R_2) \cdot P(K_2) = \left(\frac{9}{20}\right)^2,$$

zijn de kansen duidelijk niet onafhankelijk.

4. De Huffman-code heeft een gemiddelde codewoordlengte van $L = 3.15\,\frac{\text{symbolen uit } B}{\text{codewoord}}$. De efficiëntie bedraagt dus

$$\varepsilon = \frac{H(\{1, 2, ..., 9\})}{L \cdot \log_2 2} = 0.98,$$

en de compressiefactor is gelijk aan

$$\frac{\lceil \log_2 9 \rceil}{3.15} = 1.27.$$

Vraag 2

Gegeven twee figuren met daarop het frequentiespectrum van twee filters; de linkerfiguur is een gewone plot en de rechterfiguur is een semilog plot. De ene filter is in het blauw getekend, de andere in het rood. Er geldt dat $M = 51$ en $f_{\text{sam}} = 100\,\text{MHz}$. De cut-off frequentie voor de blauwe figuur is 1. De stopfrequentie van de blauwe filter is aangeduid op de rechterfiguur.

1. Welke windows worden hier gebruikt? Leg uit.
2. Wat is de vertraging?
3. Bepaal de doorlaatfrequentie, stopfrequentie en cut-off frequentie van de blauwe filter in Hertz.
4. Bereken de breedte van de transitieband van de blauwe filter. Komt die overeen met de uitdrukking het eerder bepaalde window?
5. Hoe zou een filter met een Hann window eruit zien? Teken deze filter op beide figuren en motiveer je schets.

Oplossing:

1. De filter in het blauw is het rechthoekig window:
   - Meer rimpelingen
   - Kleinere transitieband
   - $\delta_s = 21\,\text{dB}$ (figuur)

   De filter in het rood is het Blackman window:
   - Minder rimpelingen
   - Grotere transitieband
   - $\delta_s = 75\,\text{dB}$ (figuur)

2. De vertraging is gelijk aan

$$(M-1)\cdot T_{\text{sam}} = \frac{(M-1)}{f_{\text{sam}}} = \frac{50}{100\cdot 10^6} = 50\,\mu\text{s}.$$

3. Voor het rechthoekig window geldt voor de breedte van de transitieband gelijk is aan $6/M$. Omdat $\omega_s = 1.0588$ gegeven is op de figuur, kunnen we afleiden dat

$$\omega_s - \omega_p = \frac{6}{51} \quad \Longrightarrow \quad \omega_p = \omega_s - \frac{6}{51} = (1.0588 - 0.11765)\,\text{rad} = 0.9412\,\text{rad}.$$

   Omdat genormaliseerde frequenties gedefinieerd zijn als $\omega_x = \frac{2\pi\cdot f_x}{f_{\text{sam}}}$, geldt dat $f_x = \frac{\omega_x\cdot f_{\text{sam}}}{2\pi}$:

$$\begin{aligned}
f_p &= \frac{\omega_p\cdot f_{\text{sam}}}{2\pi} = \frac{0.9412\cdot 100\cdot 10^6}{2\pi} &&= 14.98\,\text{MHz}\\
f_c &= \frac{\omega_c\cdot f_{\text{sam}}}{2\pi} = \frac{1\cdot 100\cdot 10^6}{2\pi} &&= 15.92\,\text{MHz}\\
f_s &= \frac{\omega_s\cdot f_{\text{sam}}}{2\pi} = \frac{1.0588\cdot 100\cdot 10^6}{2\pi} &&= 16.85\,\text{MHz}
\end{aligned}$$

Vraag 3

Wanneer is de performantie van een (n,k)-blokcode het hoogst? Hiermee bedoelen we: wanneer is het foutdetectievermogen maximaal? We beperken ons tot $k=3$.

1. Geef de $(4,3)$-blokcode met de beste performantie en bepaal het foutdetecterend vermogen.
2. Bepaal alle codewoorden van de zonet bepaalde blokcode en geef ook het foutcorrectievermogen.
3. Bepaal de efficiëntie. Als je een extra kolom toevoegt, wat gebeurt er dan met de efficiëntie en de performantie van je blokcode?

Oplossing:

1. Voor de generatormatrix $\mathbf{G}$ vinden we dat

$$\mathbf{G} = \left[\ \mathbb{I}_3 \ \middle|\ \mathbf{P}\ \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

   De blokcode is *systematisch*, i.e. de eerste $k=3$ symbolen van een codevector $\mathbf{C}$ zijn gelijk aan de bronvector $\mathbf{U}$. Daarnaast is de blokcode *lineair*: de laatste $(k-n)=1$ symbolen van een codevector zijn een lineaire combinatie van rijen in de matrix $\mathbf{P}$, modulo 2. De codevectoren zijn dus van de vorm

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{G} = \left[\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \ \middle|\ (u_1a+u_2b+u_3c) \mod 2\ \right].$$

Om het foutdetecterend vermogen $e = d_{\min} - 1$ zo klein mogelijk te maken, moeten wen $d_{\min}$ minimaliseren. Hierbij is $d_{\min}$ de kleinste Hamming-afstand. Omdat de nulvector een codewoord is, is de kleinste Hamming-afstand gewoonweg het kleinste gewicht (i.e. het aantal eentjes) van de van nul verschillende codewoorden. Het aantal eentjes is minimaal voor een bronvector met slechts één enkele 1, dus voor $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ of $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. In dat geval is het laatste element van de overeenkomstige codevector $\mathbf{C}$ gelijk aan a, b of c. Opdat het gewicht van alle 3 de codevectoren, die overeenkomen met de eerder vermelde bronvectoren, 2 zou zijn, moet gelden dat $a = b = c = 1$.

We hebben net de parameters a, b en c gelijkgesteld aan 1 om een minimaal gewicht van $d_{\min} = 1$ te bekomen. Hieruit volgt direct dat het foutdetecterend vermogen gelijk is aan $e = 2 - 1 = 1$.

2. De codevectoren kunnen op een snelle manier berekend worden vanwege de systematische & lineaire aard van de blokcode, zoals hierboven al werd aangehaald. We vinden:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

We zien dus inderdaad dat voor $a = b = c = 1$ geldt dat $d_{\min} = 2$. Het foutcorrigerend vermogen is gelijk aan

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

3. De efficiëntie bedraagt $\varepsilon = k/n = 75\%$. Als we een extra kolom toevoegen, vermindert de efficiëntie ($\varepsilon' = k/n' = 60\%$), maar zal de performantie van de blokcode niet veranderen. De minimale Hamming-afstand $d'_{\min}$ blijft gelijk aan 2.

Vraag 4

Een signaal wordt verstuurd in basisband aan een transmissiedebiet van 60 kbit/s. Hiervoor worden M verschillende golfvormen gebruikt met factor $\alpha = 0.75$. Verder geldt dat $E_b/N_0 = 100$. We willen een foutkans die minder dan 10^{-6} bedraagt.

1. Hoeveel golfvormen kunnen we maximaal versturen?
2. Wat is de bandbreedte van dit signaal?
3. We passen FDM toe van 100 tot 180 kHz met enkel-zijband modulatie, waarbij enkel de hoogste zijband wordt behouden. Hoeveel signalen kunnen we maximaal multiplexen? Stel dat we maximale spreiding willen – ook bij 100 kHz, maar niet bij 180 kHz. Bepaal dan de draaggolffrequenties en teken het spectrum.

Oplossing:

1. We voldoen aan de eis die wordt opgelegd voor de foutkans wanneer

$$
\begin{aligned}
P_g \leq 10^{-6} &\iff \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-6} \\
&\Longleftarrow 2Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1} \cdot 100}\right) \leq 10^{-6} && \frac{2(M-1)}{M} < 2 \\
&\iff Q\left(\sqrt{\frac{600\log_2 M}{M^2-1}}\right) \leq 5 \cdot 10^{-7} \\
&\iff \sqrt{\frac{600\log_2 M}{M^2-1}} \geq 4.8 \\
&\iff \frac{\log_2 M}{M^2-1} \geq \frac{4.8^2}{600} = 0.0384 \\
&\iff M \leq 9
\end{aligned}
$$

We kiezen $M = 8$ zodat het een macht van 2 is: $M = 2^3 = 2^{n_s} \to n_s = 3$.

2. In basisband geldt dat $B = (1+\alpha) f_m$. De maximale frequentie is niet gegeven, maar kunnen we als volgt berekenen:

$$
\begin{cases} T_s = \dfrac{1}{2f_m} = \dfrac{1}{r_s} \\ r_b = r_s \cdot n_s \end{cases} \iff \begin{cases} f_m = r_s/2 \\ r_s = r_b/n_s \end{cases} \iff f_m = \frac{r_b}{2n_s}
$$

We vinden dus dat

$$
B = (1+\alpha) \cdot \frac{r_b}{2n_s} = (1+0.75) \cdot \frac{60 \cdot 10^3}{2 \cdot 3} \implies B = 17\,500\,\mathrm{Hz} = 17.5\,\mathrm{kHz}
$$

3. We hebben 80 kHz beschikbare bandbreedte om X signalen tussen te moduleren. Aangezien we Single Sideband modulatie doen (waarbij enkel de hoogste zijband behouden wordt), blijft de bandbreedte beperkt tot 17.5 kHz – ook al zitten we nu in doorlaatband en niet meer in basisband. We vinden dat we

$$
X = \left\lfloor \frac{80 \cdot 10^3}{17.5 \cdot 10^3} \right\rfloor = 4
$$

signalen kunnen multiplexen in doorlaatband. De overige $(80 - 4 \cdot 17.5)$ kHz delen we door 4, aangezien er vóór elke *raised cosine* in het frequentiespectrum spreiding vereist is. Zo vinden we dat de spaties 2.5 kHz breed zijn.

We berekenen de draaggolffrequenties:

$$
\begin{aligned}
f_{c_1} &= (100 + 2.5)\,\mathrm{kHz} && = 102.5\,\mathrm{kHz} \\
f_{c_2} &= f_{c_1} + (17.5 + 2.5)\,\mathrm{kHz} && = 122.5\,\mathrm{kHz} \\
f_{c_3} &= f_{c_2} + 20\,\mathrm{kHz} && = 142.5\,\mathrm{kHz} \\
f_{c_4} &= f_{c_3} + 20\,\mathrm{kHz} && = 162.5\,\mathrm{kHz}
\end{aligned}
$$

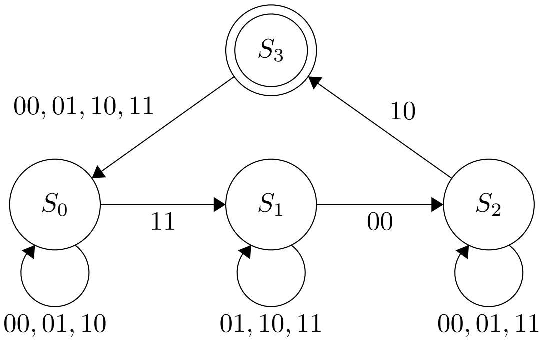
Vraag 5

We ontwerpen een (kinder)slot met 3 cijfers. De invoer voor het slot zijn combinaties A_1A_0, die een binaire voorstelling zijn van de cijfers die werden gegeven. Bijvoorbeeld: 01 wil zeggen dat het cijfer 1 werd ingevoerd; 11 wil zeggen dat het cijfer 3 werd ingevoerd. De uitvoer van het slot is Y en is gelijk aan 0 wanneer een verkeerde combinatie werd ingevoerd en 1 wanneer de juiste combinatie – namelijk 3, gevolgd door 0, gevolgd door 2 – werd ingevuld. Wanneer een fout cijfer wordt gegeven, verwerpt het slot de volledige sequentie niet, maar blijft het in dezelfde toestand. Wanneer de correcte combinatie werd ingevuld, moet het slot automatisch terug naar de begintoestand gaan in de volgende klokcyclus.

1. Teken een Moore toestandsdiagram van dit slot.
2. Codeer de toestanden aan de hand van straight-forward codering en Gray codering. Wat zijn de voordelen van elke codering? Tip: wat stelt de straight-forward codering van een toestand voor?
3. Stel de waarheidstabel op voor de ingang, huidige toestand, volgende toestand en de output.
4. Bepaal de SOP uitdrukkingen voor de volgende toestand en de output.
5. Stel Karnaugh kaarten op voor de volgende toestand en de output. Bepaal minimale uitdrukkingen in Booleaanse logica met AND, OR en NOT.
6. Teken de schakeling op een overzichtelijke manier op poortniveau.
7. Voer in een andere kleur (of in het potlood) technologiemapping (CMOS) uit.

Oplossing

1. Toestandsdiagram:



Hierbij is de output voor S_0, S_1 en S_2 gelijk aan $Y = 0$; de output voor S_3 is gelijk aan $Y = 1$. Omdat de output enkel afhangt van de toestand, is dit inderdaad een Moore FSM.

2. Toestandscodering:

straight-forward			Gray		
S_0	$\rightarrow$	00	S_0	$\rightarrow$	00
S_1	$\rightarrow$	01	S_1	$\rightarrow$	01
S_2	$\rightarrow$	10	S_2	$\rightarrow$	11
S_3	$\rightarrow$	11	S_3	$\rightarrow$	10

Bij de straight-forward is de codering van een toestand simpelweg een binaire voorstelling van het aantal juiste cijfers die al werden ingegeven om in deze toestand te geraken. De naam zegt het zelf: de codering is straight-forward en makkelijk te begrijpen. De Gray codering zorgt voor een minimaal aantal bit-flips. Er verandert telkens 1 bit bij een overgang – de overgangen $S_0 \leftrightarrow S_2$ en $S_1 \leftrightarrow S_3$ zijn immers onmogelijk.