Stelling. DFA_{min} is een unieke DFA, equivalent met DFA, en alle toestanden zijn f-verschillend.

Bewijs. DFA_{min} is een DFA:

- Er zijn geen ε-bogen
- 2 verschillende bogen met hetzelfde symbool vanuit p en q versmelten wanneer de twee toestanden zelf versmelten door f-gelijkheid: stel namelijk dat p en q f-gelijk zijn. Dan zijn ook $p' = \delta(p, a)$ en $q' = \delta(q, a)$ f-gelijk. We bewijzen dat.

  De f-strings van p en q zijn gelijk, dus ook hun f-strings van de vorm as. De f-strings van p' zijn de strings s zodat as een f-string is van p. Hetzelfde geldt voor q'. Bijgevolg hebben p' en q' dezelfde f-strings en zijn ze f-gelijk.

De equivalentie van DFA en DFA_{min} bewijzen we door per inductie aan te tonen dat

$$w \text{ is een f-string van } S \in \tilde{Q} \text{ (in } \text{DFA}_{\text{min}}) \iff w \text{ is een f-string van alle } q \in S \text{ (in } \text{DFA}_{\text{origineel}})$$

- Basisstap: als de lengte van de string w gelijk is aan 0, geldt dat $w = \varepsilon$. Nu geldt dat

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{ is een f-string van } S &\Leftrightarrow S \in \tilde{F} \\ &\Leftrightarrow S \subseteq F && \text{definitie } \tilde{F} \\ &\Leftrightarrow \forall q \in S : q \in F \\ &\Leftrightarrow \varepsilon \text{ is een f-string van alle } q \in S \end{aligned}$$

- Inductiehypothese: stel dat de stelling geldt voor strings w van hoogstens lengte $|w| = n$.
- Inductiestap: beschouw de string $w' = bw$. We tonen aan dat de stelling ook geldt voor deze string van lengte $|w'| = n + 1$, m.a.w. we tonen aan dat

$$w' = bw \text{ is een f-string van } S \Leftrightarrow w' = bw \text{ is een f-string van alle } q \in S$$

  Er geldt dat

$$\begin{aligned} bw \text{ is een f-string van } S &\Leftrightarrow \tilde{\delta}^*(S, bw) \in \tilde{F} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\delta}^*\left(\tilde{\delta}(S, b), w\right) \in \tilde{F} && \text{(ind. definitie } \delta^*) \\ &\Leftrightarrow w \text{ is een f-string van } \tilde{\delta}(S, b) \\ &\Leftrightarrow w \text{ is een f-string van alle } q \in \tilde{\delta}(S, b) && \text{(inductiehypothese)} \\ &\Leftrightarrow bw \text{ is een f-string van alle } q \in S \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\tilde{q}_s = [q_s]_{\sim_f} \in \tilde{Q}$ dezelfde f-strings heeft als q_s, en deze verzameling strings vormt de taal die beide DFA's bepalen.

We bewijzen nu nog dat twee verschillende toestanden $P, S \in \tilde{Q}$ f-verschillend zijn: P en S bevatten f-verschillende toestanden uit Q. Aangezien de f-strings van P en S die van hun elementen (toestanden uit Q) zijn, zijn ze f-verschillend.

Zie p37 voor het bewijs van de minimaliteit:
"Als N een DFA is zonder onbereikbare toestanden en waarin elke twee toestanden f-verschillend zijn, dan bestaat er geen machine met strikt minder toestanden die dezelfde taal bepaalt."
Zie p45 voor het bewijs van de uniciteit.

□