Stelling. De taal $L = \{ss \mid s \in \{a,b\}^*\}$ is niet contextvrij.

Bewijs. We bewijzen dit aan de hand van het pompend lemma voor contextvrije talen.
Stel dat er een pomplengte p bestaat zodanig dat elke string $w \in L$ met lengte $|w| > p$ kan opgedeeld worden in 5 stukken $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ zodanig dat $w = uvxyz$ en zodat

1. $\forall i \geq 0 : uv^ixy^iz \in L$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

Neem zo'n string w die (strikt) langer is dan p, namelijk

$$\begin{aligned} w &= s_1s_2 && (s_1 = s_2 = a^pb^p \in \{a,b\}^*) \\ &= a^pb^pa^pb^p \\ &= \underbrace{\underbrace{a\cdots a}_{p}\underbrace{b\cdots b}_{p}}_{|s_1|=2p}\underbrace{\underbrace{a\cdots a}_{p}\underbrace{b\cdots b}_{p}}_{|s_2|=2p} \end{aligned}$$

Stel dat $w = uvxyz$ en dat $|vy| > 0$ en $|vxy| \leq p$. Dan bevat vxy hoogstens p symbolen en zijn er 3 mogelijke gevallen:

1. $\underline{vxy \text{ zit volledig in } s_1}$: in dat geval worden er 1 of 2 symbolen uit s_1 gepompt en geen enkel uit s_2, wat wil zeggen dat het eerste deel van de resulterende strings uv^ixy^iz niet meer gelijk is aan het tweede deel en zulke strings dus onmogelijk kunnen behoren tot L.
2. $\underline{vxy \text{ zit volledig in } s_2}$: dit verloopt volledig analoog aan het vorige geval.
3. $\underline{vxy \text{ zit deels in } s_1 \text{ en deels in } s_2}$: omdat de lengte hoogstens p is, wordt er ofwel een symbool b uit s_1 gepompt, ofwel een symbool a uit s_2, ofwel beiden. In alle 3 de gevallen zullen de gepompte strings niet van de vorm ss (met $s \in \{a,b\}^*$) zijn en dus kunnen de resulterende strings uv^ixy^iz onmogelijk tot de taal behoren.

Gevolg: w kan niet gepompt worden en dus is L niet contextvrij. □