Bewijs i.v.m. de voorwaarden van een directe som (algemener)

Vincent Van Schependom

9 januari 2025

Propositie. Gegeven is een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Zij $U_1, U_2, ..., U_k$ deelruimten van V. Dan is

$$W = \oplus_{i=1}^{k} U_i$$

als en slechts als

(a) $W = \sum_{i=1}^{k} U_i$

(b) voor alle $i = 1, ..., k$ geldt dat

$$U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k) = \{0\}$$

Bewijs. Veronderstel dat $W = \oplus_{i=1}^{k} U_i$. Voor een willekeurige vector $w \in W$ geldt dan dat er unieke vectoren $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, ..., u_k \in U_k$ bestaan, zó dat $w = \sum_{i=1}^{k} u_i$. Dus is zeker $W = \sum_{i=1}^{k} U_i$.

We beweren dat $U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k) = \{0\}$. Veronderstel immers dat

$$0 \neq v \in U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k).$$

Dan kunnen we die vector v schrijven als

$$v = v + 0 = 0 + v,$$

waarbij de eerste keer v als vector van U_i en de tweede keer v als vector van $(U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k)$ opgevat wordt. Bijgevolg zou de somruimte $U_i + (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k) = \sum_{i=1}^{k} U_i$ geen directe som zijn, wat een tegenspraak levert met het gegeven. De doorsnede $U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k)$ moet dus wel beperkt zijn tot $\{0\}$.

Veronderstel nu omgekeerd dat $W = \sum_{i=1}^{k} U_i$ en dat voor alle $i = 1, ..., k$ geldt dat

$$U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k) = \{0\}.$$

We tonen aan dat de som $W = \sum_{i=1}^{k} U_i = U_i + (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k)$ een directe som is. Veronderstel dat er een vector $w \in W$ is die op meerdere wijzen als som van een vector uit U_i en $(U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k)$ kan geschreven worden (met $i \in \{1, ..., k\}$). Veronderstel met andere woorden dat

$$w = u_i + u_j = u_i' + u_j',$$

met $u_i, u_i' \in U_i$ en $u_j, u_j' \in (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k)$. Dan volgt dat

$$u_i - u_i' = u_j' - u_j \in U_i \cap (U_1 + ... + U_{i-1} + U_{i+1} + ... + U_k) = \{0\}.$$

Bijgevolg moet $u_i = u_i'$ en $u_j = u_j'$.

□