Stelling. De overgangen van DFA naar een MN(L)-relatie (op_1), en van de MN(L)-relatie naar een DFA (op_2), zijn elkaars inversen – op DFA-isomorfisme na.

We kunnen de stelling ook anders formuleren. Hiervoor beschouwen we twee operaties:

- $\text{op}_1(\text{DFA})$ levert als output een MN(L)-relatie $\sim_D$.
- $\text{op}_2(\text{MN}(L))$ levert ons als output een DFA.

Stelling. Voor elke DFA D geldt dat de DFA $D' = \text{op}_2(\text{op}_1(\text{DFA}))$ isomorf is met D.

Bewijs. We bewijzen eerst dat op_1 en op_2 effectief steeds de gewenste output hebben:

1. **Elke DFA D bepaalt een MN(L_D) (equivalentie)relatie $\sim_D$ op Σ^*.**
   Definieer voor elke (bereikbare) toestand volgende deelverzameling van Σ^*:

$$\text{reach}(q) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_s, w) = q\}$$

De verzameling met als elementen al deze verzamelingen $\text{reach}(q_i)$ vormt een partitie van Σ^*:

- Er bestaat geen $\text{reach}(q) = \emptyset$. Elke string $s \in \Sigma^*$ zit namelijk in een of andere $\text{reach}(q)$. De overgangsfunctie δ van een DFA is totaal, dus bij het parsen van s kunnen we voor elk symbool een boog volgen in de DFA, zodat we uiteindelijk in een of andere toestand terechtkomen. De string behoort dan precies tot de $\text{reach}(q)$ van deze toestand. Omdat we veronderstellen dat alle toestanden bereikbaar zijn, is geen enkele $\text{reach}(q)$ leeg.
- De $\text{reach}(q)$'s zijn disjunct. Een string $s \in \Sigma^*$ kan namelijk niet in twee $\text{reach}(q)$'s zitten, want we hebben in een DFA nooit een keuze naar welke toestand we zullen overgaan: er zijn nooit twee verschillende bogen met eenzelfde symbool. Bij het parsen van s belanden we dus in een unieke toestand q en bijgevolg geldt dat $s \in \text{reach}(q)$.
- De unie van alle $\text{reach}(q)$'s is precies Σ^*.

Omdat partities equivalentierelaties induceren en vice versa, kunnen we dus ook de geïnduceerde equivalentierelatie $\sim_D$ beschouwen:

$$x \sim_D y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ en } y \text{ behoren tot dezelfde} \, \text{reach}(q) \quad \Leftrightarrow \quad \delta^*(q_s, x) = \delta^*(q_s, y)$$

We tonen nu aan dat deze equivalentierelatie $\sim_D$ een MN(L)-relatie is. Herinner: **een equivalentierelatie $\sim$ tussen strings is een Myhill-Nerode relatie voor L als $\sim$ voldoet aan 3 voorwaarden**. We checken deze 3 voorwaarden nu voor $\sim_D$:

(a) De partitie is eindig. Inderdaad: DFA's hebben een eindig aantal toestanden en bijgevolg zijn er dus ook een eindig aantal $\text{reach}(q)$'s.

(b) Rechtscongruentie: we willen aantonen dat

$$x \sim_D y \quad \Rightarrow \quad xa \sim_D ya$$

Stel dat $x \sim_D y$. Dan geldt volgens de definitie van onze equivalentierelatie $\sim_D$ dat beide strings behoren tot $\text{reach}(q)$ voor een $q \in Q$, of nog dat $\delta^*(q_s, x) = \delta^*(q_s, y) = q$. Vanuit deze toestand q hebben we voor elk symbool $a \in \Sigma$ slechts één keuze met betrekking tot de boog die we nemen om over te gaan naar een nieuwe toestand. Noem deze nieuwe toestand $q' = \delta(q, a)$. We hebben nu met de strings xa en ya dezelfde toestand q' bereikt, wat precies wil zeggen dat $xa \sim_D ya$.

(c) $\sim_D$ verfijnt de partitie $\{L, \bar{L}\}$. We willen aantonen dat

$$x \sim_D y \quad \Rightarrow \quad (x \in L \Leftrightarrow y \in L)$$

Stel dat $x \sim_D y$. Als $x \in L$, dan wil dat zeggen dat $\delta^*(q_s, x) \in F$. Omdat $x \sim_D y$ geldt dat $\delta^*(q_s, x) = \delta^*(q_s, y)$ en dus geldt ook dat $y \in L$. We kunnen de andere richting analoog bewijzen.

2. **Elke MN(L)-relatie $\sim$ op Σ^* bepaalt een DFA D zodat $L = L_D$:**
   Gegeven een taal $L \in L_\Sigma$. We construeren de DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_s, F)$ als volgt:
   - $Q = \{x_\sim \mid x \in \Sigma^*\}$
   - $q_s = \varepsilon_\sim$
   - $F = \{x_\sim \mid x \in L\}$
   - $\delta(x_\sim, a) = (xa)_\sim$

   Dit is inderdaad een DFA:
   - Q en F hebben slechts een eindig aantal toestanden, omdat een MN(L)-relatie geassocieerd is met een eindige partitie. Er zijn dus slechts een eindig aantal equivalentieklassen.
   - De overgangsfunctie δ is goed gedefinieerd.
     Als $y, z \in \Sigma^*$ tot dezelfde equivalentieklasse $x_\sim$ behoren, dan bereiken ze eenzelfde toestand $q \in Q$. Na het volgen van een boog met een symbool $a \in \Sigma$ vanuit deze toestand, moeten we in de DFA voor beide strings in een eenzelfde nieuwe toestand q' terechtkomen, anders zouden er meerdere bogen met dat symbool a bestaan.
     We bewijzen dat we effectief in die toestand q' terechtkomen voor beide strings. Omdat volgens de MN(L)-relatie op de strings in Σ^* de rechtscongruentie $y \sim z \Rightarrow ya \sim za$ geldt, behoren de strings ya en za tot dezelfde equivalentieklasse $(xa)_\sim$. De definitie $\delta(x_\sim, a) = (xa)_\sim$ is dus goed.

   Tot slot bewijzen we nog dat de DFA de gegeven taal $L \in L_\Sigma$ effectief bepaalt, of nog dat $L_{\text{DFA}} = L$:

   $$x \in L_{\text{DFA}} \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \delta^*(\varepsilon_\sim, x) \in F \quad \Longleftrightarrow \quad x_\sim \in F \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x \in L$$

   We bewijzen de overgang door per inductie op de lengte van x aan te tonen dat

   $$\delta^*(\varepsilon_\sim, x) = x_\sim$$

   - Basisstap: als $|x| = 0$, is $x = \varepsilon$ en geldt per definitie van δ^* dat $\delta^*(\varepsilon_\sim, x) = \varepsilon_\sim$
   - Inductiehypothese: stel dat de stelling geldt voor strings x van lengte hoogstens $|x| = n$
   - Inductiestap: we bewijzen dat de stelling ook geldt voor strings van lengte $n + 1$. Zo'n string x' kunnen we schrijven als $x' = xa$ met $|x| = n, a \in \Sigma$. Nu geldt dat

   $$\begin{aligned}
   \delta^*(\varepsilon_\sim, x') &= \delta^*(\varepsilon_\sim, xa) && x' = xa \\
   &= \delta\left(\delta^*(\varepsilon_\sim, x), a\right) && \text{eigenschap } \delta^* \\
   &= \delta(x_\sim, a) && \delta^*(\varepsilon_\sim, x) \overset{\text{inductiehypothese}}{=} x_\sim \\
   &= (xa)_\sim && \text{definitie } \delta \\
   &= (x')_\sim \quad \text{q.e.d.} && x' = xa
   \end{aligned}$$

We willen nu bewijzen dat voor iedere DFA D, de DFA $D' = \mathrm{op}_2(\mathrm{op}_1(D))$ isomorf is met D. We stellen daarvoor een bijectie op tussen de toestanden van D en de equivalentieklassen van de bijhorende $\mathrm{MN}(L_D)$-relatie:

$$b_1 : Q_D \to \{x_{\sim_D} \mid x \in \Sigma^*\} : q \mapsto \mathrm{reach}(q)$$

Dan bestaat er omgekeerd dus ook een bijectie

$$b_2 : \{x_{\sim_D} \mid x \in \Sigma^*\} \to Q_{D'} : x_{\sim_D} \mapsto q' \mid x \in \mathrm{reach}(q')$$

tussen de equivalentieklassen van de $\mathrm{MN}(L_D)$-relatie en de toestanden van de DFA D'. We kunnen nu ook de bijectie

$$b = (b_2 \circ b_1) : Q_D \to Q_{D'}$$

tussen de toestanden van D en de toestanden van D' beschouwen die ontstaat wanneer we de voorgaande twee bijecties samenstellen. We tonen aan dat b effectief voldoet aan de eigenschappen voor isomorfisme:

- $\underline{b(F_D) = F_{D'}}$: er geldt dat $b(F_D) = b_2(b_1(F_D))$. De bijectie b_1 mapt elke toestand $q_f \in F_D$ naar een equivalentieklasse in $\mathrm{MN}(L_D)$ zodat elke string in die equivalentieklasse tot L_D behoort. De bijectie b_2 mapt elke equivalentieklasse die strings uit L_D bevat naar een aanvaardende eindtoestand in D'. Dus elke aanvaardende eindtoestand uit D wordt door b gemapt op een aanvaardende eindtoestand uit D'. Met dezelfde redenering zien we dat ook het omgekeerde geldt.

- $\underline{b(q_s) = q_{s'}}$: er geldt dat $b(q_s) = b_2(b_1(q_s))$. De starttoestand q_s wordt gemapt op $\varepsilon_\sim$ door b_1 en $\varepsilon_\sim$ wordt gemapt op q'_s door b_2, dus q_s wordt gemapt op q'_s door b.

- $\underline{b(\delta(q,a)) = \delta'(b(q),a)}$: voor elke toestand $q \in Q$ en elk symbool $a \in \Sigma$ worden q en $\delta(q,a)$ gemapt door b_1 op twee equivalentieklassen in $\mathrm{MN}(L_D)$ zodat alle strings uit de tweede equivalentieklasse kunnen verkregen worden door een a te zetten achter een string uit de eerste equivalentieklasse. Vervolgens mapt b_2 deze twee equivalentieklasses op twee toestanden in D' zodat er een a-overgang is van de eerste toestand naar de tweede toestand. Dit betekent dat $b(\delta(q,a)) = \delta'(b(q),a)$.

$\square$