Examen Numerieke Wiskunde

24 januari 2025 ViS

Het examen bestaat uit 3 delen:

	Theorie
Duur	60 minuten
Tijdslot	*tijdslot individueel per student*
Voorbereiding	op rij 1 en rij 3, vooraan in het lokaal
Mondelinge verdediging	Bij prof. Van Den Abeele in A341
Hulpmiddelen	Eigen schrijfgerief
	Formularium is voorzien
Score	8 punten
	Bespreking practicum
Duur	10 minuten
Tijdslot	Aansluitend op mondelinge verdediging theorie
Voorbereiding	n.v.t.
Mondelinge verdediging	Bij de assistent in A352
Hulpmiddelen	Het verslag is voorzien bij Marie
Score	4 punten (volledig practicum)
	Oefeningen
Duur	160 minuten
Tijdslot	*elk moment voor en na het theoriegedeelte*
Mondelinge verdediging	n.v.t.
Hulpmiddelen	Handboek, slides, eigen notities, oefeningenbundel, grafisch rekenmachine
	Geen opgeloste oefeningen
Score	8 punten

Nog enkele algemene instructies:

- Het consulteren van hulpmiddelen die niet toegelaten zijn bij de verschillende onderdelen wordt aanzien als examenfraude.
- Je geeft telkens alles (vragen, antwoorden, klad) af.
- Zorg dat op kladpapier duidelijk de vermelding KLAD staat.
- ZORG DAT JE NAAM OP ELK BLAD STAAT.
- Werk gestructureerd en netjes.

Veel succes!

Theorie

Vraag 1

1. Bespreek de conditie van het probleem “zoek het nulpunt van een niet-lineaire functie”. Laat dit ook zien op tekeningen.
2. Geef 3 methodes voor het vinden van het nulpunt van een niet-lineaire functie, waaronder 1 meerstapsmethode en 1 niet-stationaire methode. Bespreek voor elk van de methoden het principe, de convergentiesnelheid en de voor- en nadelen.
3. Wat verstaat men onder de begrippen convergentiefactor en orde van convergentie?
4. Bespreek de voorwaarde(n) voor convergentie bij substitutiemethodes waarbij $x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right)$. Toon dit ook visueel aan.
5. Leg uit waarom de methode van Newton-Raphson voor enkelvoudige nulpunten steeds convergeert.
6. Toon aan dat de convergentiefactor een invloed heeft op de stabiliteit van een convergente substitutiemethode.
7. Wat is de numerieke betekenis van de convergentiefactor?
8. Verklaar waarom de methode van Halley sneller convergeert dan de methode van Newton-Raphson.

Vraag 2

Geef kort het antwoord op onderstaande vraag; het is niet nodig om dit heel uitgebreid uit te schrijven.
Verklaar waarom een gedeelde differentie onafhankelijk is van de volgorde van de gebruikte punten.

Oefeningen

Vraag 1

Beschouw onderstaand stelsel van lineaire vergelijkingen.

$$\begin{cases} -3x + y = 5 \\ -6x + 4y - z = 3 \\ -6x + 8y - 6z = 1 \end{cases}$$

1. Stel dat we handmatig de LU-ontbinding van dit stelsel zouden willen bepalen.
   (a) Is het noodzakelijk om een pivotering toe te passen? Verklaar waarom wel/niet.
   (b) Heeft het zin om optimale pivotering toe te passen? Verklaar waarom wel/niet.
   (c) Bereken de LU-ontbinding van de systeemmatrix, indien nodig met optimale pivotering.
2. Stel dat we iteratief de oplossing zouden willen berekenen aan de hand van de methode van Jacobi of de methode van Gauss-Seidel.
   Hint: voor deze vraag kan je gerust je GRM gebruiken.
   (a) Speelt de volgorde van de vergelijkingen een rol? Leg duidelijk uit waarom wel/niet.
   (b) Ben je zeker dat de methoden zullen convergeren?
   (c) Reken het resultaat van beide methoden uit na 2 iteratiestappen, gegeven dat $x_0 = [1,\ 1\,1]^\top$. Is de uitkomst zoals je verwacht, als je weet dat de exacte oplossing gelijk is aan $[-1\,, 30\,, -17]^\top/8$?

Vraag 2

In het practicum over numerieke integratie werden onder andere onderstaande twee (correcte) foutenplots teruggevonden voor de integraal

$$I_5 = \int_0^{10} 13(x - x^2) \exp\left(-\frac{3x}{2}\right) \mathrm{d}x,$$

waarop de convergentie van de middelpuntsregel te zien is:

Loglogplot van de middelpuntsregel met (dalend) lineair verband en met afvlakking op het eind.	Semilog foutenplot van de middelpuntsregel, de trapeziumregel en de regel van Simpson.

1. Op welke grafiek kan je het makkelijkst de convergentie-orde van de middelpuntsregel bepalen? Tijdens de oefenzitting gebruikten we steevast `semilogy` voor het maken van foutenplots. Is dat bij deze beste grafiek ook het geval? Verklaar waarom.
2. Gebruik de grafiek om de convergentie-orde van de middelpuntsregel te schatten en vergelijk die met de theoretische convergentie-orde.
   Hint: je kan gebruik maken van het feit dat $f(x) = 13(x - x^2)\exp\left(-\frac{3x}{2}\right)$ *volgende afgeleiden heeft:*

$$f'(x) = 13\left(1 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}x^2\right)\exp\left(-\frac{3x}{2}\right)$$
$$f''(x) = 13\left(-5 + \frac{33}{4}x - \frac{9}{4}x^2\right)\exp\left(-\frac{3x}{2}\right)$$

3. Op figuur (a) zien we dat de fout stagneert na 10^8 functie-evaluaties. Hoe kan je dit verklaren?

Vraag 3

1. Geef alle veeltermen met minimale graad die voldoen aan

$$p(-1) = p(0) = p(-1) = a, \quad p'(0) = 1$$

   door gebruik te maken van Hermite interpolatie.

2. Bepaal in detail de conditie tegenover zowel de absolute als de relatieve fouten wanneer we de gevonden veeltermen evalueren in a.

3. Geef twee methodes om de veelterm te evalueren en bespreek kort welke het meest stabiel is. Een uitgebreide foutenanalyse is dus niet nodig.