# Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. L. Collatz anläßlich seines 60. Geburtstages gewidmet

Von J. Nitsche, Freiburg i. Br.

Die Anwendung des Ritzschen Verfahrens zur angenäherten Berechnung der Lösung eines elliptischen Randwertproblems stößt bei allgemeinen Gebieten auf Schwierigkeiten. Bei Dirichlet-Randbedingungen sind Teilräume $\mathfrak{H}_h$ zu verwenden, die die homogenen Randbedingungen erfüllen. Ansätze zur Konstruktion derartiger Funktionen stammen u. a. von Babuska [5], Rvachev-Shklyarov [10], Miyoshi [7] und Schultz [12]. Besonders einfach ist die Wahl bei Zlamal [13] und in [9] für Differentialgleichungen 2. Ordnung in der Ebene, vgl. auch Babuska [4]: Unter Zugrundelegen eines geeigneten, dem Gebiet einbeschriebenen Polygons $T$ werden in $T$ lineare Spline-Funktionen verwendet, welche über $T$ hinaus durch Null fortgesetzt werden. Für Lösungen in $W_2^2$ ergeben sich dabei quasi-optimale Fehler.

Handelt es sich um inhomogene Randbedingungen, so ist weiterhin die Kenntnis einer im Innern des Gebietes hinreichend glatten Funktion mit vorgeschriebenen Randwerten erforderlich, was ein erneutes Problem ist. Aus jüngster Zeit stammen zwei Ansätze, die diese Schwierigkeiten umgehen. Bei Beschränkung auf den einfachsten Fall

$$(1)\qquad \begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

läßt sich die Methode von Babuska [3] so beschreiben: Die Ritz-Näherungen des „gestörten“ Problems

$$(2)\qquad \begin{aligned} -\Delta \tilde{u} &= f \quad \text{in } \Omega \\ \tilde{u} + \psi_h^{-1}\tilde{u}_n &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

werden als Approximation an $u$ betrachtet. Der Übergang von $(1_2)$ zu der natürlichen Randbedingung $(2_2)$ erlaubt die Verwendung von beliebigen, d. h. keinen Randbedingungen unterworfenen Teilräumen $\mathfrak{H}_h$. Durch geeignete Wahl von $\psi_h$, das mit $h \to 0$ gegen $\infty$ strebt, in Abhängigkeit von Approximationseigenschaften von $\mathfrak{H}_h$ zeigt BABUSKA eine Reihe von Fehlerabschätzungen. Es werde etwa $u \in W_2^2(\Omega)$ angenommen, was mit $f \in L_2(\Omega)$, $g \in W_2^{3/2}(\partial\Omega)$ äquivalent ist. Dann gilt

$$(3) \qquad \| u - u_h \|_{1.\Omega} \leqq C(\varepsilon) h^{3/4-\varepsilon} \| u \|_{2.\Omega} (\varepsilon > 0).$$

Demgegenüber ist jedoch 1 als optimaler Exponent von $h$ zu erwarten.

Der zweite hier zu erwähnende Ansatz stammt von BRAMBLE und SCHATZ [6], die das Variationsproblem[1])

$$(4) \qquad \iint_\Omega |\Delta v - f|^2 + \psi_h \oint |v - g|^2 \Rightarrow \text{Min.!}$$

für $v \in \mathfrak{H}_h$ betrachten. Auch hier müssen keine Randbedingungen an $\mathfrak{H}_h$ gestellt werden. Bei Verwenden geeigneter Spline-Funktionen-Räume finden sie im Falle $\psi_h \approx h^{-3}$ u. a. quasi-optimale Abschätzungen der Gestalt

$$(5) \qquad \| u - u_h \|_{0.\Omega} \leqq c h^2 \| u \|_{2.\Omega}.$$

Dazu sind jedoch zumindest kubische Splines nötig bzw. genauer, es muß die Approximierbarkeit der Elemente $u \in W_2^r(\Omega)$ gemäß

$$(6) \qquad \| u - v \|_{k.\Omega} \leqq c h^{r-k} \| u \|_{r.\Omega}$$

durch Elemente $v \in \mathfrak{H}_h$ bei $r \geqq 4$ gesichert sein. Das Erfordernis höherer Ordnung der Splines in Verbindung mit dem Auftreten der 2. Ableitungen in dem Variationsintegral (4) führt auf vergleichsweise unhandliche Differenzenformeln.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir ein 3. Variationsprinzip zur Approximation der Lösung von (1), welches nur Ableitungen 1. Ordnung enthält und bei welchem selbst mit linearen Splines die Fehlerabschätzungen (5) wie auch (3) mit dem Konvergenzfaktor $h$ gültig sind.

## 1.

Im folgenden sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet der Ebene mit hinreichend glattem Rand. $|u|_{k.\Omega}$ und $\|u\|_{k.\Omega}$ sollen die übliche Bedeutung in den Sobolev-Räumen $W_2^k(\Omega)$ haben, vgl. z.B. AGMON [1]. Daneben be-

---

1) Der Einfachheit halber benützen wir die Abkürzung $\iint v$ bzw. $\oint v$ für $\iint_\Omega v\,dx\,dy$ bzw. $\int_{\partial\Omega} v\,ds$.

trachten wir Rand-(Pseudo-)Normen, für unsere Zwecke genügt die Definition

$$(7) \qquad |u|_{k.\partial\Omega} = \{\sum_{|\alpha|=k} \oint |D^\alpha u|^2\}^{1/2} \qquad \|u\|_{k.\partial\Omega} = \{\sum_{j\le k} |u|^2_{j.\partial\Omega}\}^{1/2}.$$

Hinsichtlich des Randwertproblems (1) setzen wir voraus, daß die Lösung in $W_2^2(\Omega)$ liegt. Die an $f$ und $g$ zu stellenden Forderungen sind bei SCHECHTER [11] angegeben.

Wir betrachten nun das in $W_2^2(\Omega)$ definierte quadratische Funktional

$$(8) \qquad J(w) = \iint w_x^2 + w_y^2 - 2\oint w w_n + \psi \oint w^2,$$

merken jedoch bereits jetzt an, daß $J$ für Elemente definiert ist, die in $W_2^1(\Omega)$ liegen und für die die 1. Ableitungen auf $\partial\Omega$ quadratisch integrierbar sind. Für Elemente aus endlich dimensionalen Teilräumen einfacher Struktur ist diese Eigenschaft stets gegeben. Zu einer Folge $\{\mathfrak{H}_h\}$ derartiger Teilräume bilden wir nun Näherungen $u_h \in \mathfrak{H}_h$ durch die Forderung ($u$ Lösung von (1))

$$(9) \qquad J(u - u_h) = \inf_{v\in\mathfrak{H}_h} J(u - v).$$

Zunächst ist leicht ersichtlich, daß sich die Näherungen $u_h$ allein aus den Daten des Problems, d. h. aus $f$ und $g$ berechnen lassen. Partielle Integration liefert nämlich

$$(10) \qquad J(v - u) = J(v) - 2\iint fv + 2\oint g(v_n - \psi v) + J(u).$$

Wiewohl $J$ in $W_2^2$ indefinit ist, läßt sich die positive Definitheit in den Teilräumen $\mathfrak{H}_h$ durch geeignete Wahl von $\psi = \psi(h)$ erreichen. Dann existiert auch eindeutig die Näherung $u_h \in \mathfrak{H}_h$ von (9). Dazu benötigen wir eine gewisse Eigenschaft der $\mathfrak{H}_h$, die wir formulieren wollen als[2])

**Voraussetzung 1.** Für $v \in \mathfrak{H}_h$ gilt

$$(11) \qquad |v|_{1.\partial\Omega} \leqq c_1 h^{-1/2} |v|_{1.\Omega}.$$

Diese Beziehung steht in gewisser Analogie zur Bernsteinschen Ungleichung in der Approximationstheorie. Das spezielle Wachstumsverhalten $h^{-1/2}$ ist für Spline-Räume typisch.

Bei Gültigkeit von (11) können wir abschätzen

$$\begin{aligned} J(v) &\geqq |v|^2_{1.\Omega} - 2\,\|v\|_{0.\partial\Omega} |v|_{1.\partial\Omega} + \psi(h) \|v\|^2_{0.\partial\Omega} \\ &\geqq \tfrac{1}{2}\,|v|^2_{1.\Omega} + (\psi(h) - 2c_1^2 h^{-1})\,\|v\|^2_{0\partial\Omega}. \end{aligned}$$

---

[2]) $c_1$ usw. bedeuten numerische Konstanten. Um anzudeuten, daß diese positiv sind, wird gegebenenfalls $\underset{=}{c}_2$ usw. geschrieben.

Es genügt also

$$\psi(h) = \bar{c}_2 h^{-1} \tag{12}$$

mit $\bar{c}_2 > 2c_1^2$ zu wählen. Wir werden unten $\bar{c}_2$ weiter festlegen. Beim Abschätzen der linearen Terme in (10) ist noch $\iint fv$ zu betrachten. Wegen der in $W_2^1(\Omega)$ gültigen Beziehung

$$\|u\|_{0.\Omega} \leqq c_3\{|u|_{1.\Omega} + \|u\|_{0.\partial\Omega}\} \tag{13}$$

lassen sich alle linearen Terme durch

$$c(h, \|f\|_{0.\Omega}, \|g\|_{0.\partial\Omega})\{|v|_{1.\Omega} + \|v\|_{0.\partial\Omega}\} \tag{14}$$

dem Betrage nach majorisieren, womit die Definitheit von $J$ in $\mathfrak{H}_h$ sichergestellt ist.

## 2.

Wir wenden uns jetzt der Abschätzung des Fehlers $e_h = u - u_h$ zwischen der Lösung $u$ des Randwertproblems (1) und der Lösung $u_h$ des Variationsproblems (9) in $\mathfrak{H}_h$ zu. Dazu benötigen wir gewisse Approximationsaussagen. Wir unterstellen

**Voraussetzung 2.** Zu $u \in W_2^2(\Omega)$ existiere ein $P_h u \in \mathfrak{H}_h$ mit

$$\begin{aligned} \|u - P_h u\|_{k.\Omega} &\leqq c_4 h^{2-k} \|u\|_{2.\Omega} \\ \|u - P_h u\|_{k.\partial\Omega} &\leqq c_4 h^{3/2-k} \|u\|_{2.\Omega}. \end{aligned} \qquad (k = 0, 1) \tag{15}$$

Zunächst behandeln wir $J(e_h)$ und damit $|e_h|_{1.\Omega}$ sowie $\|e_h\|_{0.\partial\Omega}$. Es ist, wir unterdrücken vorübergehend den Index $h$,

$$\oint e e_n = \oint \{e(u - Pu)_n + e(Pu - u_h)_n\}$$

und daher mit (15) und (11) wegen $Pu - u_h \in \mathfrak{H}_h$

$$\left|\oint e e_n\right| \leqq c_5 \|e\|_{0.\partial\Omega} \{h^{1/2} \|u\|_{2.\Omega} + h^{-1/2} |Pu - u_h|_{1.\Omega}\}.$$

Weiter läßt sich umformen

$$|Pu - u_h|_{1.\Omega} \leqq |u - Pu|_{1.\Omega} + |e|_{1.\Omega} \leqq c_4 h \|u\|_{2.\Omega} + |e|_{1.\Omega},$$

so daß wir auf

$$\left|\oint e e_n\right| \leqq c_6 \|e\|_{0.\partial\Omega} \{h^{1/2} \|u\|_{2.\Omega} + h^{-1/2} |e|_{1.\Omega}\}$$

geführt werden. Unter Verwenden der Schwarzschen Ungleichung in der Form $|ab| \leqq \varepsilon a^2 + b^2/2\varepsilon$ mit geeignetem $\varepsilon$ läßt sich daraus

$$\left|\oint e e_n\right| \leqq \tfrac{1}{2} |e|_{1.\Omega}^2 + c_7 h^{-1} \|e\|_{0.\partial\Omega}^2 + c_7 h^2 \|u\|_{2.\Omega}^2$$

folgern. Ist daher die Konstante $\bar{c}_2$ in (12) passend gewählt, so ergibt sich

$$J(e) \geqq \tfrac{1}{2} |e|^2_{1.\Omega} + c_{10} h^{-1} \| e \|^2_{0.\partial\Omega} - c_{11} h^2 \| u \|^2_{2.\Omega}. \tag{16}$$

Wir erkennen daraus

$$J(e) \geqq -c_{11} h^2 \| u \|^2_{2.\Omega}. \tag{17}$$

Andererseits ist, wie mit (15) leicht folgt,

$$J(e) \leqq J(u - Pu) \leqq c_{12} h^2 \| u \|^2_{2.\Omega}. \tag{18}$$

Daher ist $|J(e)|$ und somit wegen (16) auch $|e|^2_{1.\Omega}$ sowie $h^{-1} \| e \|^2_{0.\partial\Omega}$ durch $h^2 \| u \|^2_{2.\Omega}$ abschätzbar. Heranziehen von (13) liefert den

**Satz 1.** *Es gelten die Fehlerabschätzungen*

$$\| e_h \|_{1.\Omega} \leqq ch \| u \|_{2.\Omega} \tag{19}$$

$$\| e_h \|_{0.\partial\Omega} \leqq ch^{3/2} \| u \|_{2.\Omega}. \tag{20}$$

Es ist zu erwarten, daß der Fehler in der $L_2$-Norm um eine Potenz in $h$ besser ist als in der $W_2^1$-Norm. Zur Herleitung dieses Resultates betrachten wir analog der Vorgehnsweise in [8], vgl. auch AUBIN [2], die Variationsgleichungen. Es gilt für $v \in \mathfrak{H}_h$

$$\iint e_x v_x + e_y v_y - \oint e v_n + e_n v + \psi \oint e v = 0. \tag{21}$$

Wir wählen speziell $v = Pw$ mit der Lösung $w$ des Randwertptoblems

$$\begin{aligned} -\Delta w &= e \quad \text{in } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es gilt dann $w \in W_2^2(\Omega)$ und $\| w \|_{2.\Omega} \leqq c_{13} \| e \|_{0.\Omega}$. Wegen

$$\| e \|^2_{0.\Omega} = -\iint e\Delta w = -\oint e w_n + \iint e_x w_x + e_y w_y$$

ergibt sich mit (21)

$$\begin{aligned} \| e \|^2_{0.\Omega} = {} & \iint e_x (w - Pw)_x + e_y (w - Pw)_y \\ & - \oint e (w - Pw)_n - \oint e_n (w - Pw) \\ & + \psi \oint e (w - Pw). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der bereits bewiesenen Abschätzungen (19), (20) und der Approximierbarkeit (15) finden wir für alle rechts stehenden Terme mit Ausnahme von $\oint e_n (w - Pw)$ unmittelbar die Schranke $h^2 \| u \|_{2.\Omega} \| e \|_{0.\Omega}$. Mit Hilfe der schon benützten Aufspaltung

$$e = u - Pu + (Pu - u_h)$$

und damit

$$|e|_{1.\partial\Omega} \leqq |u - Pu|_{1.\partial\Omega} + |Pu - u_h|_{1.\partial\Omega}$$
$$\leqq c_4 h^{1/2} \| u \|_{2.\Omega} + c_1 h^{-1/2}\{|u - Pu|_{1.\Omega} + |e|_{1.\Omega}\}$$
$$\leqq c_{14}\{h^{1/2} \| u \|_{2,\Omega} + h^{-1/2} |e|_{1.\Omega}\}$$

folgt aber auch für dieses Integral unschwer die gewünschte Abschätzung. Nach Kürzen des Faktors $\| e_h \|_{0.\Omega}$ ergibt sich so

**Satz 2.** *Es gilt*

(22) $$\| e_h \|_{0.\Omega} \leqq e h^2 \| u \|_{2.\Omega}.$$

## 3.

Wir wollen noch zeigen, daß bei geeigneter Gitterwahl die schon in [9] benützten linearen Spline-Funktionen die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllen.

Zunächst wiederholen wir einige Begriffe. Eine Triangulierung $\Gamma = \Gamma_T$ eines Polygons $T$ heiße $\alpha$-$\varkappa$-regulär, wenn keiner der Dreieckswinkel kleiner als $\alpha$ ($> 0$) ist und das Verhältnis irgend zweier Seitenlängen durch $\varkappa$ beschränkt ist; $|\Gamma|$ sei das Maximum dieser Längen. Eine in $T$ stetige und in den Teildreiecken von $\Gamma$ lineare Funktion werde (lineare) Spline-Funktion genannt. Stimmen die Funktionswerte einer solchen Funktion $s$ in den Gitterpunkten mit $u$ überein, so wird $s = Ju$ die (lineare) Interpolation der Funktion $u$ genannt.

Nach Lemma 6 aus [9] existieren bei zweimalig stetig differenzierbarem Rand $\partial\Omega$ für $h \leqq h_0$ mit geeignetem positiven $h_0$ und $a < \pi/8$, $\varkappa = 2$ stets solche Polygone $\Gamma$ mit Eckpunkten auf $\partial\Omega$ und Seitenlänge $\leqq h$ und zugehörige $\alpha$-$\varkappa$-reguläre Triangulierungen mit $|\Gamma| \leqq h$. Da der Abstand zwischen $\partial\Omega$ und $\partial T$ von der Ordnung $h^2$ ist, kann durch eine Streckung mit dem Faktor $(1 + ch^2)$ erreicht werden, daß das neue Polygon (wir bezeichnen es wieder mit $T$) das Gebiet $\Omega$ überdeckt. Das Verhältnis der von $\Omega$ überdeckten Fläche eines der Dreiecke von $\Gamma$ zur Dreiecksfläche ist durch $1 - ch^2$ nach unten beschränkt, während $|\Gamma| \approx h$ richtig bleibt.

Unseren Betrachtungen legen wir eine solche Triangulierung zugrunde. Nach dem Calderonschen Erweiterungssatz (vgl. Agmon [1]) läßt sich $u \in W_2^2(\Omega)$ zu einem $u \in W_2^2(T)$ fortsetzen, wobei sich die Norm maximal um eine multiplikative Konstante ändert. Für $Pu = Ju$ wurde in [9] bereits die Abschätzung $(15_1)$ gezeigt. $(15_2)$ erledigt sich ganz entsprechend. Damit ist Voraussetzung 2 als gültig erkannt.

Jetzt sei $\Delta$ ein solches Dreieck aus $\Gamma$, das mit $\partial\Omega$ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Wegen der $\alpha$-$\varkappa$-Regularität und unserer Konstruktion ist die Fläche von $\Omega \cap \Delta$ durch $c(\alpha, \varkappa)\,|\Gamma|^2$ nach unten beschränkt. Andererseits ist die Länge des in $\Delta$ verlaufenden Teils von $\partial\Omega$ durch $c(\alpha, \varkappa)\,|\Gamma|$ beschränkt. Da schließlich jede in $\Delta$ lineare Funktion daselbst konstante 1. Ableitungen besitzt, gilt

$$\int\limits_{\Delta \cap \partial\Omega} (v_x^2 + v_y^2) \leqq c\,|\Gamma|^{-1} \iint\limits_{\Delta \cap \Omega} (v_x^2 + v_y^2).$$

Die Summation über alle $\Delta$ aus $\Gamma$ läßt das Erfülltsein von Voraussetzung 1 erkennen.

## Literatur

[1] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. D. Van Nostrand Comp., Inc. Princeton, New Jersey, New York 1965.

[2] J. P. Aubin, Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels. Bull. Soc. math. France, Mémoire **12** (1967) 139p.

[3] I. Babuska, Numerical Solution of Boundary Value Problems by the Perturbated Variational Principle. Techn. Note BN-624, University of Maryland, 1969.

[4] I. Babuska, Error-Bounds for Finite Element Method. Techn. Note BN-630, Univ. of Maryland, 1969.

[5] I. Babuska, Approximation by Hill Functions. To appear.

[6] J. H. Bramble and A. H. Schatz, Rayleigh-Ritz-Galerkin Methods for Dirichlet's Problem Using Subspaces Without Boundary conditions. To appear Comm. p. appl. Math. 23 (1970) 653—675

[7] T. Miyoshi, On the Convergence of Rith-Galerkin's Method. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A 4 (1968/69), 149—177.

[8] J. Nitsche, Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens. Numer. Math. **11** (1968) 346—384.

[9] J. Nitsche, Lineare Spline-Funktionen und die Methoden von Ritz für elliptische Randwertprobleme. Arch. for Rat. Mech. and Anal. 36 (1970) 348—355.

[10] B. L. Rvachev and L. I. Shklyarov, On the Application of the Bubnov-Galerkin Method to the Solution of Boundary Problems for Domains of Complex Shape. Diff. Equ. **1** (1965) 1211—1216.

[11] M. Schechter, On $L^p$ Estimates and Regularity. Math. Scand. **13** (1963) 47—69.

[12] M. H. Schultz, Rayleigh-Ritz-Galerkin Methods for Multidimensional Problems. SIAM J. Numer. Anal. **6** (1969) 523—538.

[13] M. Zlamal, On the Finite Element Method. Numer. Math. **12** (1968) 394—409.

*Eingegangen am 21. 5. 1970*