Meine Seminarausarbeitung

Viel Schreiber

Betreuer: Dipl.-Inf. Carl Coder

Zusammenfassung Ein schöner Abstract. Das ist einfach die Kurzzusammenfassung.

1 Einleitung

1.1 Spielbeschreibung

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit der Umsetzung von Schiffe-Versenken in beliebig viele Dimensionen. Die generelle Funktionsweise von dem normalen Schiffe-Versenken bleibt erhalten, muss jedoch um einige Dinge erweitert werden, um auch in höheren Dimensionen gut spielbar zu sein.

Wir betrachten das Spielgeschehen zur Einfachheit halber nur aus der Sicht eines Spielers. Zu Beginn platziert der Gegner eine feste und bekannte Anzahl an Schiffen auf seinem Spielfeld. Es wird davon ausgegangen, dass die Schiffspositionen rein zufällig ausgewählt wurden. (Hier mehr Details mit Permutation) Natürlich sind die Schiffspositionen dem Spieler nicht bekannt. Die Gesamtheit aller gewählten Schiffspositionen wird auch die Schiffsverteilung genannt. Nun kann der Spieler anfangen, auf bestimmte Positionen auf dem Spielfeld, auch Zellen genannt, zu schießen. Nach jedem Schuss erfährt der Spieler von seinem Gegner, die Anzahl an getroffenen Schiffen. Falls keine Schiffe getroffen wurden ist die Anzahl 0. Da Schiffe überlappen können, kann die Anzahl auch größer als 1 sein. Sobald alle Schiffe versenkt wurden, ist das Spiel beendet.

Das Ziel des Spielers ist es, mit möglichst wenig Schüssen alle Schiffe zu versenken.

1.2 Inhalt

Zu Beginn wird das beschriebene Spielprinzip formalisiert, sodass man damit mathematisch arbeiten kann.

Anschließend werden verschiedene Spielstrategien vorgestellt.

Danach werden verschiedene Möglichkeiten präsentiert, die Spielstrategien so gut wie möglich zu optimieren, damit sie auch mit sehr vielen Dimensionen immernoch effizient berechenbar sind.

Zum Schluss werden dann die Strategien mithilfe der vorherigen Kenntnisse implementiert und die Ergebnisse in Bezug auf Laufzeiteffizienz verglichen.

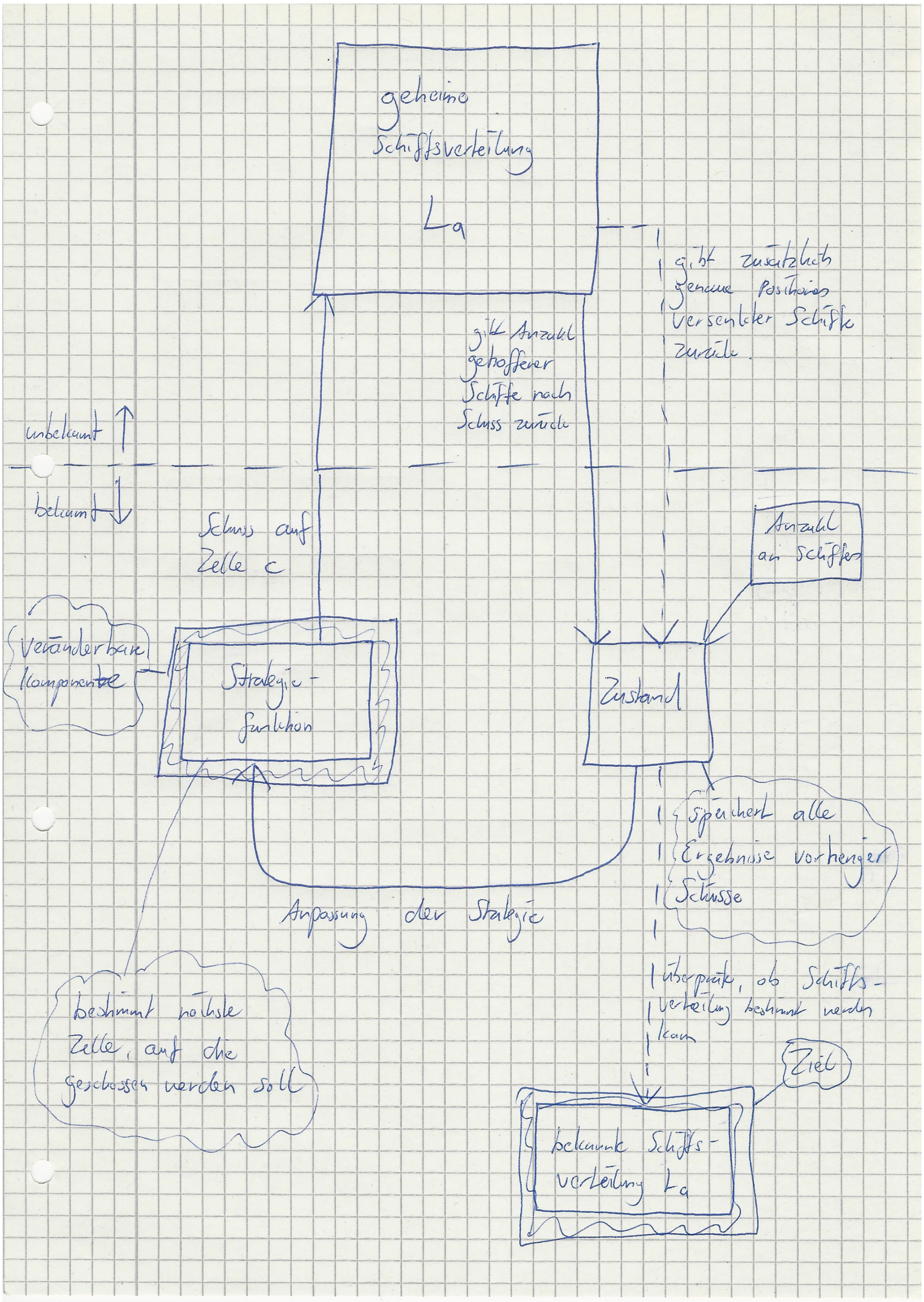

Abbildung 1. Bild

2 Formalisierung des Spielprinzips

Definition 1. *Sei* $C_{all} = \{1, \ldots, N\}^d$ *die Menge aller Zellen (cells) des Spielfeldes mit jeweils* N *Zellen in* d *Dimensionen.*

Definition 2. *Sei* l *eine mögliche Schiffsposition (location), welche mithilfe einer minimalen Ecke* $c_{min}(l)$ *und einer maximalen Ecke* $c_{max}(l)$ *bestimmt wird. Dann ist*

$$cells(l) = \{c \in C \mid c_{min}(l) \leq c \leq c_{max}(l)\}$$

die Menge aller Zellen, welche sich innerhalb der möglichen Schiffsposition l *befinden.*

Definition 3. *Sei*

$$L_{all} = \{\{k \in C_{all} \mid i \leq k \leq j\} \mid i, j \in C_{all} \wedge i \leq j\}$$

die Menge aller möglichen Schiffspositionen.

Definition 4. *Sei* $ship\_count$ *die Anzahl der platzierten Schiffe.*

Definition 5. *Sei* $all\_distributions = \{L \subseteq L_{all} \mid |L| = ship\_count\}$ *die Menge von allen möglichen Schiffsverteilungen.*

Definition 6. *Sei* $L_a \in all\_distributions$ *die eigentliche und geheime Schiffsverteilung.*

Definition 7. *Sei* $cell \in C_{all}$*. Dann ist*

$$hit(L, c) = |\{l \in L_{all} \mid c \in cells(l)\} \cap L_a|$$

die Treffer-Funktion, welche angibt, wie viele Schiffe h *bei einem Schuss auf Zelle* c *getroffen wurden.*

Definition 8. *Sei* $cells = \{c_1, \ldots, c_k\} \subseteq C_{all}$ *eine Menge an Zellen. Dann ist*

$$destroyed(cells) = \{l \in L_a \mid cells(l) \subseteq cells\}$$

die Menge an Schiffen, welche durch die Schüsse auf die Zellen cells bereits versenkt wurden.

3 Zustände

Definition 9. *Sei* $F = \{(c_1, h_1), \ldots, (c_t, h_t)\}$ *der Zustand nach* t *Schüssen.*

Definition 10. *Sei* F *der momentane Zustand. Dann ist* $C_{shot}(F) = \{c \in C_{all} \mid (c, h) \in F,\ h \in N_0\}$ *die Menge an Zellen, auf die bereits geschossen wurde.*

Definition 11. *Sei F der momentane Zustand. Dann ist $C_{left}(F) = C_{all} \setminus C_{shot}(F)$ die Menge an Zellen, auf die noch nicht geschossen wurde.*

Definition 12. *Sei F der momentane Zustand und $cell \in C_{left}(F)$ die beschossene Zelle. Dann ist*

$$fire(L, F, cell) = F \cup \{(cell, hit(L, cell))\}$$

die Schuss-Funktion, welche die Zelle dem Zustand F hinzufügt.

Definition 13. *Sei F ein Zustand. Dann ist*

$$distributions(F) =$$

die Menge aller Schiffsverteilungen, auf die die Treffer-Informationen vom Zustand F zutreffen. In anderen Worten, die Menge an zum Zustand F noch möglichen Schiffsverteilungen.

Definition 14. *Sei F ein Zustand. Dann ist*

$$distribution\_count(F) = |distributions(F)|$$

3.1 Aussagen über Zustände

Definition 15. *Sei F der momentane Zustand. Dann ist*

$$finished(F) \Leftrightarrow |destroyed(F)| = ship\_count$$

wahr gdw. alle Schiffe zerstört wurden.

Definition 16. *Sei F der momentane Zustand. Dann ist*

$$determined(L, F) \Leftrightarrow distribution\_count(F) = 1$$

wahr gdw. die richtige Schiffsverteilung bereits bestimmt ist.

Satz 1 *Sei F der momentane Zustand. Dann ist*

$$determined(L, F) \Leftrightarrow distribution\_count(F) = 1$$

wahr gdw. die richtige Schiffsverteilung bereits bestimmt ist.

finished vs determined TODO

Satz 2 *Sei $L \in distributions(F)$ eine mögliche Schiffsverteilung zum Zustand F. Dann ist*

$$P(L = L_a \mid F) = \frac{1}{distribution\_count(F)}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass L die richtige Schiffsverteilung ist.

Beweis. Strukturelle Induktion über F:
Induktionsanfang: $F = \emptyset$:
Zu Beginn herrscht per Definition eine Gleichverteilung, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Schiffsverteilung gewählt wird, ist für alle Schiffsverteilungen gleich:

$$P(L = L_a \mid F) = P(L = L_a) = \frac{1}{|all\_distributions|} = \frac{1}{distribution\_count(F)}$$

Induktionsschritt mit: $F' = F \cup (c, s)$ und $L \in distributions(F')$:

$$P(L = L_a \mid F') = \begin{cases} \frac{1}{distributions(F)} = \frac{1}{distribution\_count(F)} \end{cases}$$

□

4 Schuss-Strategien

Definition 17. *Eine Funktion der Form*

$$strat\colon F \to C_{left}(F)$$

wird Strategiefunktion genannt. Diese weißt jedem Zustand die Zelle zu, auf die als nächstes geschossen werden soll.

Definition 18. *Sei*

$$all\_strategies(F) = \{strat\colon F \to C_{left}(F)\}$$

die Menge an allen möglichen Strategiefunktionen.

4.1 Greedy-Strategie

Die Greedy-Strategie versucht bei jedem Schuss die erwartete Anzahl an ausgeschlossenen Schiffsverteilungen zu maximieren.

Definition 19. *Sei F der momentane Zustand. Sei außerdem $c \in C_{left}(F)$ die beschossene Zelle und $h \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$distributions\_removed(L, F, c) = distribution\_count(F) - distribution\_count(fire(L, F, c))$$

die Anzahl an Schiffsverteilungen, die nach diesem Schuss ausgeschlossen werden könnten.

Satz 3 *Sei F der momentane Zustand. Sei außerdem $c \in C_{left}(F)$ die beschossene Zelle. Dann ist*

$$\mathbb{E}(distributions\_removed(F, c)) = \frac{1}{distribution\_count(F)} * \sum_{L \in distributions(F)} distributions\_removed(L$$

Beweis. Definition des Erwartungswertes.

Definition 20. *Sei F ein Zustand. Dann ist*

$$strat_{greedy}(F) = \max_{c \in C_{left}(F)} \mathbb{E}(distributions\_removed(F, c))$$

die Zelle, bei welcher bei Beschuss die Anzahl an erwarteten ausgeschlossenen Schiffsverteilungen maximal ist.

Diese Strategie funktioniert ziemlich gut und lässt sich verhältnismäßig schnell berechnen, ist jedoch nicht die optimale Strategie.

4.2 Optimale-Strategie

Um eine optimale Schuss-Strategie zu definieren, werden ein paar Definitionen benötigt, um den Begriff 'Optimal' zu definieren.

Definition von Optimalität

Definition 21. *Sei L die gewählte Schiffsverteilung und F der momentane Zustand und sei $determined(L, F)$ wahr. Dann ist*

$$shots\_to\_finish(L, F) = \sum_{l \in L_a} |cells(l) \setminus C_{shot}(F)|$$

die Anzahl an Schüssen, die noch benötigt werden, um alle Schiffe der bereits bekannten Schiffsverteilung zu versenken.

Definition 22. *Sei L die gewählte Schiffsverteilung und F der momentane Zustand. Sei außerdem $strat \in all\_strategies$ die verwendete Schuss-Strategie. Dann ist*

$$shots\_left(L, F, strat) = \begin{cases} shots\_to\_finish(L, F) & , determined(L, F) \\ shots\_left(L, fire(L, F, strat(F)), strat) + 1 & , sonst \end{cases}$$

die Anzahl an Schüssen, die benötigt werden, um alle Schiffe der bereits bekannten Schiffsverteilung mit der Schuss-Strategiefunktion strat zu versenken.

Satz 4 *Sei F der momentane Zustand und $strat \in all\_strategies$ die verwendete Schuss-Strategie. Dann ist*

$$\mathbb{E}(shots\_left(F, strat)) = \frac{1}{distribution\_count(F)} * \sum_{L \in distributions(F)} shots\_left(L, F, strat)$$

die erwartete Anzahl an Schüssen, die benötigt werden, um alle Schiffe zu versenken.

Beweis.

$$\mathbb{E}(shots\_left(F, strat)) = \tag{4.1}$$
$$\sum_{L \in distributions(F)} P(L_a = L \mid F) * shots\_left(L, F, strat) = \tag{4.2}$$
$$\frac{1}{distribution\_count(F)} * \sum_{L \in distributions(F)} shots\_left(L, F, strat) \tag{4.3}$$

□

Nun kann definiert werden, was es für eine Strategie heißt, optimal zu sein:

Definition 23. *Eine Strategiefunktion $strat \in all\_strategies$ heißt optimal, falls für alle $strat_{alt} \in all\_strategies$ gilt:*

$$\mathbb{E}(shots\_left(F, strat)) \leq \mathbb{E}(shots\_left(F, strat_{alt}))$$

Herleitung

Lemma 1. *Sei F der momentane Zustand, c die Zelle, auf die geschossen werden soll und $strat \in all\_strategies$ die verwendete Schuss-Strategie. Dann ist*

$$\mathbb{E}(shots\_left(F, c, strat)) = \mathbb{E}(shots\_left(fire(L_a, F, c), strat)) + 1$$

die erwartete Anzahl an Schüssen, die benötigt werden, um alle Schiffe zu versenken, falls der nächste Schuss auf Zelle c abgefeuert wird.

Beweis. Trivial

Definition 24. *Sei F der momentane Zustand und $strat \in all\_strategies$ die verwendete Schuss-Strategie. Dann ist*

$$min\_expected\_shots(F, strat) = \min_{c \in C_{left}(F)} \mathbb{E}(shots\_left(F, c, strat))$$

die minimale erwartete Anzahl an Schüssen um alle Schiffe zu versenken, falls die nächste beschossene Zelle frei gewählt werden kann und danach die Schuss-Strategie $strat$ verwendet wird.

Definition 25. *Sei F ein Zustand. Dann ist*

$$strat_{opt}(F) = c \in C_{left}(F) \mid min\_expected\_shots(F, strat_{opt}) = \mathbb{E}(shots\_left(F, c, strat_{opt}))$$

die optimale Strategiefunktion. Diese wählt für den Zustand F eine Zelle aus, welche nach Beschuss die Anzahl an benötigten Schüssen um alle Schiffe zu versenken, minimiert.

Satz 5 (Optimalität) *Sei $strat_{opt}$ die optimale Strategiefunktion und $strat_{alt} \in all\_strategies$ eine andere Strategiefunktion. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(shots\_left(F, strat_{opt})) \leq \mathbb{E}(shots\_left(F, strat_{alt}))$$

Beweis.

$$\mathbb{E}(shots\_left(F, strat_{opt})) = \mathbb{E}(shots\_left(F, strat_{opt}(F), strat_{opt})) = \tag{4.4}$$

$$\min_{c \in C_{left}(F)} \mathbb{E}(shots\_left(F, c, strat)) \leq \mathbb{E}(shots\_left(F, c_{other}, strat)), c_{other} \in C_{left}(F) \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow \tag{4.6}$$

$$\mathbb{E}(shots\_left(F, strat_{opt})) \leq \mathbb{E}(shots\_left(F, strat_{alt})) \tag{4.7}$$

$\square$

Dennis:

5 Effiziente Berechnung von Schiffspositionen

Definition 26. *Sei F der momentane Zustand und $cell \in C_{left}(F)$ die beschossene Zelle und $h \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$hypothetically\_fire(F, cell, hits) = F \cup \{(cell, hits)\}$$

die Schuss-Funktion, welche die Zelle dem Zustand F hinzufügt.

5.1 Verteilungsfunktionen

Definition 27. *Sei C_{pos} eine Menge an Zellen, die belegt werden sollen. Sei außerdem C_{neg} eine Menge an Zellen, die nicht belegt werden sollen.*
Dann ist

$$location\_count(C_{pos}, C_{neg})$$

die Anzahl der möglichen Schiffspositionen $l \in L_{all}$ für die gilt: $C_{pos} \subseteq cells(l)$ und $C_{neg} \cap cells(l) = \emptyset$.

Definition 28. *Sei $cell\_combinations(F) = \mathcal{P}(C_{shot}(F))$.*

Definition 29. *Sei $comb \in cell\_combinations(F)$. Dann ist*

$$location\_count(F, comb) = location\_count(comb, C_{shot}(F) \setminus comb)$$

eine Kurzform.

Definition 30. *Sei $comb \in cell\_combinations(F)$. Dann ist*

$$max\_shared\_ship\_count(F, comb) = \min\{location\_count(F, comb)\} \cup \{h \mid (c, h) \in F \wedge c \in comb\}$$

Definition 31. *Sei*

$$hit\_count(F, c, s) = \sum_{comb \in \{x \in cell\_combinations(F) \mid c \in x\}} s(comb)$$

Definition 32. *Sei*

$$\begin{aligned}
&share_functions(F) = \{s \colon cell_combinations(F) \to \mathbb{N}_0 \mid \\
&\quad \forall (c, h) \in F \colon hit_count(F, c, s) = h \wedge \\
&\quad \forall comb \in cell_combinations(F) \colon 0 \leq s(comb) \leq max_shared_ship_count(F, comb) \\
&\}
\end{aligned}$$

die Menge an Share-Funktionen, die das LGS (...) lösen.

Satz 6 *Sei F der momentane Zustand und $s \in share\_functions(F)$ eine Verteilungsfunktion. Dann ist*

$$distribution\_count(F, s) = \left(\prod_{comb \in cell\_combinations(F)} \binom{location\_count(F, comb)}{s(comb)} \right)$$

die Anzahl an möglichen Schiffsverteilungen für die Verteilungsfunktion s.

Beweis. Für jede Teilkombination $comb \in cell\_combinations_F$ gibt es $location\_count_F(comb)$ Positionen, die genau die Zellen der Teilkombination belegen. Aus diesen Positionen werden dann mit der Funktion s_F genau $s_F(comb)$ Positionen für Schiffe ausgewählt. Daher gibt es für jede Teilkombination $\binom{location\_count_F(comb)}{s_F(comb)}$ verschiedene Schiffspositionen.

Die gesamte Anzahl an möglichen Schiffsverteilungen ergibt sich dann einfach aus der Multiplikation der Anzahl an Schiffspositionen der einzelnen Teilkombinationen.

Definition 33. *Sei*

$$distribution\_count(F) = \sum_{s \in share\_functions(F)} distribution\_count(s)$$

Satz 7 *Sei F der momentane Zustand. Sei außerdem $c \in C_{left}(F)$ die beschossene Zelle und $h \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$P(hit(c) = h \mid F) = \frac{distribution\_count(hypothetically\_fire(F, c, h))}{distribution\_count(F)}$$

die Wahrscheinlichkeit zu dem Zustand F, dass bei dem Schuss genau h Schiffe getroffen werden.

Beweis. Vor dem Schuss gibt es noch im Zustand F genau $distribution\_count(F)$ mögliche Schiffsverteilungen. Nach dem Schuss gibt es nur noch $distribution\_count(hypothetically\_fi$ mögliche Schiffsverteilungen. Nach Satz () folgt ...

Satz 8 *Sei F der momentane Zustand. Sei außerdem $c \in C_{left}(F)$ die beschossene Zelle. Dann ist*

$$\mathbb{E}(distributions\_removed(F, c)) = \sum_{h=0}^{ship\_count - |D_F|} P(hit(c) = h) * distributions\_removed(F, c, h)$$

Joel und Samuel:

6 Implementierung der Strategien

7 Vergleich der Strategien