



山东省九校 2019 年 12 月高三检测考试

数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{1-3i}{3+i}$, i 为虚数单位,则

- A. $|z| = i$ B. $\bar{z} = i$ C. $z^2 = 1$ D. z 的虚部为 $-i$

2. 已知集合 $A = \{x | 2^x \leq 1\}$, $B = \{x | y = \lg(x-1)\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$

- A. \emptyset B. $(0, 1)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 0]$

3. 已知点 A 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 且 $\angle xOA = \frac{7}{12}\pi$, 则点 A 的横坐标为

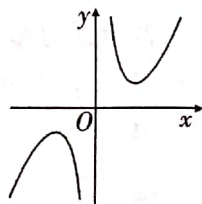
- A. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

4. 汽车维修师傅在安装好汽车轮胎后,需要紧固轮胎的五个螺栓,记为 A, B, C, D, E (在正五边形的顶点上),紧固时需要按一定的顺序固定每一个螺栓,但不能连续固定相邻的两个. 则不同固定螺栓顺序的种数为

- A. 20 B. 15 C. 10 D. 5

5. 若函数 $y = f(x)$ 的大致图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可以为

- A. $f(x) = \frac{x}{2^x + 2^{-x}}$ B. $f(x) = \frac{x}{2^x - 2^{-x}}$
C. $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{x}$ D. $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{x}$

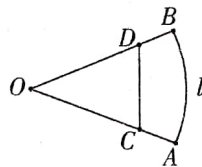


6. 已知直线 l_1, l_2 为双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线, 若 l_1, l_2 与圆 $N: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 相切, 则双曲线 M 离心率的值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



7. 如图是一个近似扇形的鱼塘, 其中 $OA = OB = r$, \widehat{AB} 长为 l ($l < r$). 为方便投放饲料, 欲在如图位置修建简易廊桥 CD , 其中 $OC = \frac{3}{4}OA$, $OD = \frac{3}{4}OB$. 已知 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, 则廊桥 CD 的长度大约为



- A. $\frac{3}{4}r - \frac{r^3}{32l^2}$ B. $\frac{3}{4}l - \frac{l^3}{32r^2}$ C. $\frac{3}{2}l - \frac{l^3}{4r^2}$ D. $\frac{3}{2}r - \frac{r^3}{4l^2}$

8. 吸烟有害健康, 小明为了帮助爸爸戒烟, 在爸爸包里放一个小盒子, 里面随机摆放三支香烟和三支跟香烟外形完全一样的“戒烟口香糖”, 并且和爸爸约定, 每次想吸烟时, 从盒子里任取一支, 若取到口香糖则吃一支口香糖, 不吸烟; 若取到香烟, 则吸一支烟, 不吃口香糖, 假设每次香烟和口香糖被取到的可能性相同, 则“口香糖吃完时还剩 2 支香烟”的概率为

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{20}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。

全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列结论正确的是

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$ B. 若 $a < b < 0$, 则 $(\frac{1}{a})^3 > (\frac{1}{b})^3$
C. 若 $x(x-2) < 0$, 则 $\log_2 x \in (0, 1)$ D. 若 $a > 0, b > 0, a+b \leq 1$, 则 $0 < ab \leq \frac{1}{4}$

10. 关于函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \cos(2x + \frac{\pi}{2}) - 1$ 的描述正确的是

- A. 其图象可由 $y = \sqrt{2}\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到
B. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增
C. $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 有 2 个零点
D. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$

11. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, D, E 分别是 AC, AB 上的两点, 且 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$, BD 与 CE 交于点 O . 则下列说法正确的为

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = -1$ B. $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
C. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. \overrightarrow{ED} 在 \overrightarrow{BC} 方向上的投影为 $\frac{7}{6}$

12. 已知四棱锥 $P-ABCD$, 底面 $ABCD$ 为矩形, 侧面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, $BC = 2\sqrt{3}, CD = PC = PD = 2\sqrt{6}$. 若点 M 为 PC 的中点, 则下列说法正确的为

- A. $BM \perp$ 平面 PCD B. $PA \parallel$ 平面 MBD
C. 四棱锥 $M-ABCD$ 外接球的表面积为 36π D. 四棱锥 $M-ABCD$ 的体积为 6



三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 直线 $y=x$ 与圆 $x^2-4x+y^2=0$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

14. 直线 $y=x$ 与曲线 $y=2\ln(x+m)$ 相切, 则 $m =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = \frac{1}{2}$, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n^2 - a_n S_n + a_n = 0 (n \geq 2)$, 则 $a_2 =$ _____; $S_{2019} =$ _____.

(本题第一空2分,第二空3分.)

16. 已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[3] = 3, [1.5] = 1, [-1.7] = -2$. 令 $f(x) = x \cdot 2^x, g(x) = f(x - [x])$, 则下列说法正确的是 _____.

① $g(x)$ 是偶函数

② $g(x)$ 是周期函数

③ 方程 $g(x) - \sqrt{x} = 0$ 有4个根

④ $g(x)$ 的值域为 $[0, 2]$

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

在非直角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 的对边. 已知 $a=4, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5$, 求:

(1) $\frac{\tan A}{\tan B} + \frac{\tan A}{\tan C}$ 的值;

(2) BC 边上的中线 AD 的长.

18. (12分)

已知数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列, $a_1 = 1$ 且 $a_2, a_3 + 2, a_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

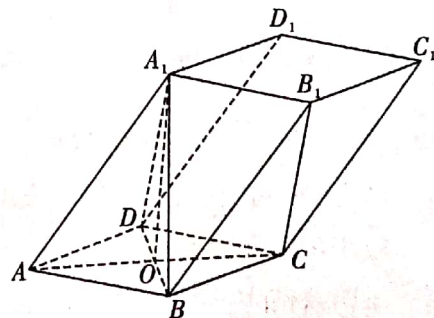
19. (12分)

已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面为菱形, $AB = AA_1 = 2, \angle BAD = \frac{\pi}{3}, AC \cap BD = O, AO \perp$ 平面 A_1BD ,

$A_1B = A_1D$.

(1) 证明: $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ;

(2) 求钝二面角 $B - AA_1 - D$ 的余弦值.



20. (12 分)

已知椭圆 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为 2.

(1) 求椭圆 L 的标准方程;

(2) 过点 $Q(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 L 交于 A, B 两点, 若以 AB 为直径的圆恰好过坐标原点, 求直线 l 的方程及 $|AB|$ 的大小.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x}$, $g(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性相同, 求 a 的取值范围;

(3) 当 $a \in [0, \frac{1}{e})$ 时, 函数 $y = g(x)$, $x \in (0, e]$ 有最小值, 记 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$.

证明: $-\frac{e}{2} < h(a) \leq -1$.

22. (12 分)

学生考试中答对但得不了满分的原因多为答题不规范, 具体表现为: 解题结果正确, 无明显推理错误, 但语言不规范、缺少必要文字说明、卷面字迹不清、得分要点缺失等, 记此类解答为“B 类解答”. 为评估此类解答导致的失分情况, 某市教研室做了一项试验: 从某次考试的数学试卷中随机抽取若干属于“B 类解答”的题目, 扫描后由近百名数学老师集体评阅, 统计发现, 满分 12 分的题, 阅卷老师所评分数及各分数所占比例大约如下表:

教师评分(满分 12 分)	11	10	9
各分数所占比例	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

某次数学考试试卷评阅采用“双评 + 仲裁”的方式, 规则如下: 两名老师独立评分, 称为一评和二评, 当两者所评分数之差的绝对值小于等于 1 分时, 取两者平均分为该题得分; 当两者所评分数之差的绝对值大于 1 分时, 再由第三位老师评分, 称之为仲裁, 取仲裁分数和一、二评中与之接近的分数的平均分为该题得分; 当一、二评分数和仲裁分数差值的绝对值相同时, 取仲裁分数和前两评中较高的分数的平均分为该题得分. (假设本次考试阅卷老师对满分为 12 分的题目中的“B 类解答”所评分数及比例均如上表所示, 比例视为概率, 且一、二评与仲裁三位老师评分互不影响).

(1) 本次数学考试中甲同学某题(满分 12 分)的解答属于“B 类解答”, 求甲同学此题得分 X 的分布列及数学期望 $E(X)$;

(2) 本次数学考试有 6 个解答题, 每题满分均为 12 分, 同学乙 6 个题的解答均为“B 类解答”, 记该同学 6 个题中得分为 $x_i (x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5)$ 的题目个数为 $a_i, a_i \in \mathbb{N} (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, $\sum_{i=1}^5 a_i = 6$. 计算事件“ $a_1 + a_4 + a_5 = 4$ ”的概率.

