2019~2020学年度
武汉市部分学校新高三新起点质量监测
数学(理科)试题参考答案及评分细则

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	B	A	D	A	C	C	A	D	B

二、填空题:

13.8　　14. −1　　15.−4　　16. 1或$\frac{1}{e}$

三、解答题:

17. (10分)

解:(1)由 $S_n=n^2$,知$a_1=1$. ……2分

当$n\geq 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$($n=1$也成立).

$\therefore a_n=2n-1$. ……5分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3})$, ……7分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{4}[(1-\frac{1}{5})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1})+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3})]$

$=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{4n^2+8n+3}$. ……10分

18. (12分)

解:(1)因为 $a\cos B=c-\frac{1}{2}b$,由正弦定理知 $\sin A\cos B=\sin C-\frac{1}{2}\sin B$. ……2分

又 $\sin C=\sin(A+B)$,所以 $\sin A\cos B=\sin(A+B)-\frac{1}{2}\sin B$,

即 $\cos A\sin B=\frac{1}{2}\sin B$. ……4分

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$. $\because 0<A<\pi$, $\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ……6分

(2)由 $a=2\sqrt{3}$,$A=\frac{\pi}{3}$ 及余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得 $12=b^2+c^2-bc$.　①　……8分

因为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$,所以 $bc=8$.　②　……10分

由①②解得 $\begin{cases}b=4,\\c=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=2,\\c=4.\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC$的周长$a+b+c=6+2\sqrt{3}$. ……12分

19. (12分)

解:(1)取 AP中点O,连接OB、OD.

由$DA=DP$,$BA=BP$知,$OB\perp AP$,$OD\perp AP$. ……2分

又$OB\cap OD=O$ $\therefore AP\perp$平面 OBD,

又 $BD\subset$平面OBD,$\therefore AP\perp BD$. ……4分

(2)法一:由题 可得$OD=1$,$OB=\sqrt{3}$,故 $OD^2+OB^2=1+3=BD^2$,所以$OB\perp OD$. ……6分

所以可以O为原点,分别以 OP、OB、OD 为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $P(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$D(0,0,1)$，$A(-1,0,0)$，

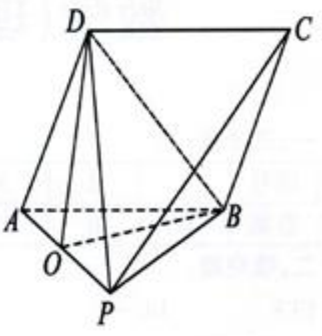
$\overrightarrow{BD}=(0,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{PB}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$． ……8分

设平面PBD的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ -\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$ 令 $y=1$ 得 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$．

同理可得平面ABD的一个法向量为$\vec{m}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$． ……10分

$\therefore \cos<\vec{n},\vec{m}>=\dfrac{3-1-3}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=-\dfrac{1}{7}$．



又二面角$P-BD-C$为锐二面角，所以二面角$P-BD-C$的余弦为$\dfrac{1}{7}$． ……12分

法二：设二面角$P-BD-O$，$A-BD-O$的大小分别为α,β，则

$\cos\alpha=\dfrac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle PBD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\beta=\dfrac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$， ……8分

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=2\times\dfrac{3}{7}-1=-\dfrac{1}{7}$． ……10分

即二面角$A-BD-P$的余弦为$-\dfrac{1}{7}$，

而二面角$P-BD-C$与二面角$A-BD-P$大小互补，故二面角$P-BD-C$的余弦为$\dfrac{1}{7}$． ……12分

20.（12分）

解：(1)设点$P(x,y)$，则$|x+2|-1=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$．

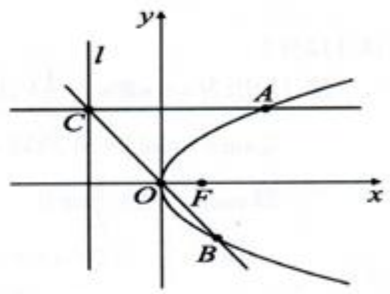
当$x\geqslant-2$时，$x+1=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，即$(x+1)^2=(x-1)^2+y^2(x\geqslant-1)$，

整理得$y^2=4x$． ……2分

当$x\leqslant-2$时，$-x-3=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，即$(-x-3)^2=(x-1)^2+y^2(x\leqslant-3)$，

整理得$y^2=8x+8$，由$8x+8\geqslant0$知$x\geqslant-1$，矛盾，舍去．

$\therefore$ 所求轨迹方程为$y^2=4x$． ……4分



(2)设$AB:x=ty+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$C(-2,y_1)$．

由O、C、B三点共线知$x_2y_1+2y_2=0$，即$(ty_2+m)y_1+2y_2=0$，

所以$ty_1y_2+my_1+2y_2=0$．　① ……6分

由$\begin{cases}x=ty+m\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4ty-4m=0$，

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=4t,\\ y_1\cdot y_2=-4m.\end{cases}$　② ……8分

由①②得$-4tm+my_1+2(4t-y_1)=0$，即$4t(2-m)+(m-2)y_1=0$，此表达式对任意t恒成立，

$\therefore m=2$．即直线AB过定点，定点坐标为$(2,0)$． ……12分

21.（12分）

解：(1)X可能取值为3,4,5,6.

$P(X=3)=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，$P(X=4)=C_3^1(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$，$P(X=5)=C_3^2(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$，$P(X=6)=C_3^3(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$． ……2分

$\therefore X$的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\therefore EX=3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}=4.5$． ……4分

(2)(i)总分恰为 m 分的概率为 $A_m=(\frac{1}{2})^m$，

$\therefore$ 数列 $\{A_m\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

前10项和 $S_{10}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{10}})}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1023}{1024}$． ……6分

(ii)已调查过的累计得分恰为 n 分的概率为 B_n，得不到 n 分的情况只有先得 $n-1$ 分，再得2分，概率为 $\frac{1}{2}B_{n-1}$，$B_1=\frac{1}{2}$．

所以 $1-B_n=\frac{1}{2}B_{n-1}$，即 $B_n=-\frac{1}{2}B_{n-1}+1$ ……8分

$\therefore B_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}(B_{n-1}-\frac{2}{3})$.

$\therefore B_n-\frac{2}{3}=(B_1-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$， ……10分

$\therefore B_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n$． ……12分

22.(12分)

(1)证明：当 $m=2$ 时，$f(x)=x-\frac{1}{2}\sin x-\ln x+1$，$f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{x}$． ……1分

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)$ 为增函数，且 $f'(\frac{\pi}{3})=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{\pi}=\frac{3}{4}-\frac{3}{\pi}<0$，$f'(\pi)=\frac{3}{2}-\frac{1}{\pi}>0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点； …… 3分

当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时，$f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{x}\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}>0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上没有零点.

综上知，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点. ……5分

(2)证明：不妨设 $0<x_1<x_2$，由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $x_1-\frac{1}{2}\sin x_1-\frac{m}{2}\ln x_1+1=x_2-\frac{1}{2}\sin x_2-\frac{m}{2}\ln x_2+1$，

$\therefore \frac{m}{2}(\ln x_2-\ln x_1)=x_2-x_1-\frac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1)$． ……7分

设 $g(x)=x-\sin x$，则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，

$\therefore x_2-\sin x_2>x_1-\sin x_1$，从而 $x_2-x_1>\sin x_2-\sin x_1$，

$\therefore \frac{m}{2}(\ln x_2-\ln x_1)=x_2-x_1-\frac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1)>\frac{1}{2}(x_2-x_1)$，

$\therefore m>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$． ……9分

下面证明：$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$．

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $t>1$，即证明 $\frac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$，只要证明 $\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}<0$．(*)

设 $h(t)=\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}$，则 $h'(t)=-\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$，$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减.

$\therefore$ 当 $t>1$ 时，$h(t)<h(1)=0$，从而(*)得证，即 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$． ……11分

$\therefore m>\sqrt{x_1x_2}$，即 $x_1x_2<m^2$． ……12分