武昌区 2020 届高三年级元月调研考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-2<0\}$ ，$B=\{x\,|\,a-2<x<a\}$，若 $A\cap B=\{x\,|\,-1<x<0\}$，则 $A\cup B=$

A．$(-1,2)$　　B．$(0,2)$　　C．$(-2,1)$　　D．$(-2,2)$

2．已知复数 z 满足 $\dfrac{z}{z-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$a_1=1$，$a_3=2a_2+3$，则 $a_n=$

A．3^{n-2}　　B．3^{n-1}　　C．2^{n-1}　　D．2^{n-2}

4．已知 $a=\log_{0.1}0.2$，$b=\log_{1.1}0.2$，$c=1.1^{0.2}$，则 a，b，c 的大小关系为

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

5．等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，$AC=BC=2$，点 P 是斜边 AB 上一点，且 $BP=2PA$，那么 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=$

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

6．某学校成立了 A、B、C 三个课外学习小组，每位学生只能申请进入其中一个学习小组学习. 申请其中任意一个学习小组是等可能的，则该校的任意 4 位学生中，恰有 2 人申请 A 学习小组的概率是

A．$\dfrac{3}{64}$　　B．$\dfrac{3}{32}$　　C．$\dfrac{4}{27}$　　D．$\dfrac{8}{27}$

7．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$，设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，$T_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $\lambda T_n<9n+3$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

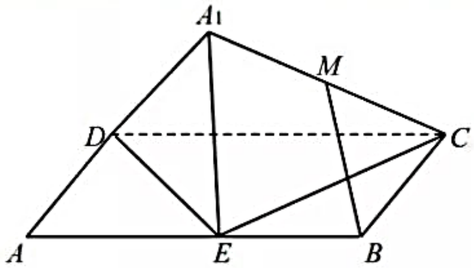
A．$(-\infty,48)$　　B．$(-\infty,36)$　　C．$(-\infty,16)$　　D．$(16,+\infty)$

8．已知过抛物线 $y^2=4x$ 焦点 F 的直线与抛物线交于点 A，B，$|AF|=2|FB|$，抛物线的准线 l 与 x 轴交于点 C，$AM\perp l$ 于点 M，则四边形 $AMCF$ 的面积为

A．$\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　　C．$5\sqrt{2}$　　D．$10\sqrt{2}$

9．如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=2AD$，E 为边 AB 的中点，将 ΔADE 沿直线 DE 翻折成 ΔA_1DE．若 M 为线段 A_1C 的中点，则在 ΔADE 翻折过程中，给出以下命题：

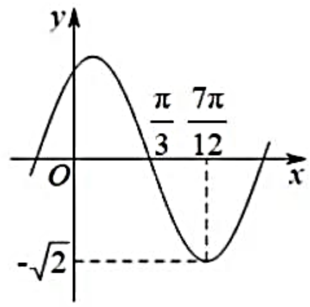
①线段 BM 的长是定值；
②存在某个位置，使 $DE\perp A_1C$；
③存在某个位置，使 $MB\parallel$ 平面 A_1DE．
其中，正确的命题是



A．①　　B．①③
C．②③　　D．①②③

10．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，给出下列说法：

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；
②直线 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 为函数 $f(x)$ 的一条对称轴；
③点 $(-\dfrac{2\pi}{3},0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个对称中心；
④函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后得到 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的图象．
其中正确说法的个数是



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

11．已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点，过 F_2 且倾斜角为60°的直线与双曲线的右支交于 A，B 两点，记 ΔAF_1F_2 的内切圆半径为 r_1，ΔBF_1F_2 的内切圆半径为 r_2，则 $\dfrac{r_1}{r_2}$ 的值等于

A．3　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

12．已知函数 $f(x)=xe^x-\ln x-x-2$，$g(x)=\dfrac{e^{x-2}}{x}+\ln x-x$ 的最小值分别为 a，b，则

A．$a=b$　　B．$a<b$
C．$a>b$　　D．a，b 的大小关系不确定

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中，x^3 项的系数是______.

14．已知一组数据 10，5，4，2，2，2，x，且这组数据的平均数与众数的和是中位数的 2 倍，则 x 所有可能的取值为______.

15．过动点 M 作圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 的切线，N 为切点. 若 $|MN|=|MO|$（O 为坐标原点)，则 $|MN|$ 的最小值为______.

16．用 M_I 表示函数 $y=\sin x$ 在闭区间 I 上的最大值，若正数 a 满足 $M_{[0,a]}=\sqrt{2}M_{[a,2a]}$，则 a 的值为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本题 12 分）

在 ΔABC 中，已知 $AB=\frac{5\sqrt{6}}{2}$，$AC=7$，D 是 BC 边上的一点，$AD=5$，$DC=3$.

（1）求 B；

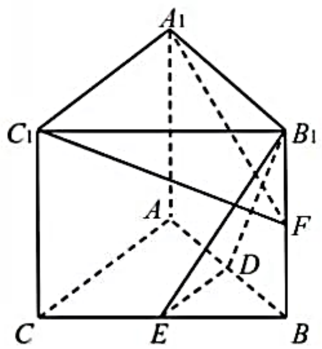
（2）求 ΔABC 的面积.

18.（本题 12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp AB$，$A_1A=AB=AC=2$，D，E，F 分别为 AB，BC，B_1B 的中点.

（1）证明：平面 $A_1C_1F\perp$ 平面 B_1DE；

（2）求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值.



19.（本题 12 分）

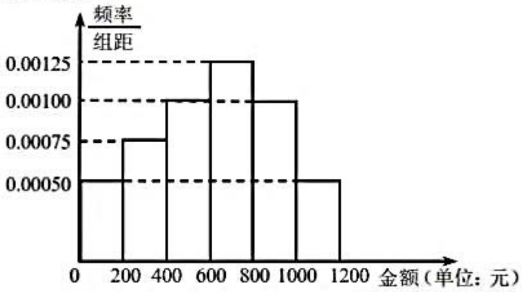
已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点与短轴一端点组成一个正三角形的三个顶点，且焦点到椭圆上的点的最短距离为 1.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若不过原点的直线 l 与椭圆交于 A，B 两点，求 ΔOAB 面积的最大值.

20.（本题 12 分）

某健身馆在 2019 年 7、8 两月推出优惠项目吸引了一批客户．为预估 2020 年 7、8 两月客户投入的健身消费金额，健身馆随机抽样统计了 2019 年 7、8 两月 100 名客户的消费金额，分组如下：[0，200)，[200，400)，[400，600)，…，[1000，1200]（单位：元），得到如图所示的频率分布直方图：



（1）请用抽样的数据预估 2020 年 7、8 两月健身客户人均消费的金额（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（2）若把 2019 年 7、8 两月健身消费金额不低于 800 元的客户，称为“健身达人”．经数据处理，现在列联表中得到一定的相关数据，请补全空格处的数据，并根据列联表判断是否有 95%的把握认为“健身达人”与性别有关？

	健身达人	非健身达人	总计
男	10		
女		30	
总计			

（3）为吸引顾客，在健身项目之外，该健身馆特推出健身配套营养品的销售，现有两种促销方案．

方案一：每满 800 元可立减 100 元；

方案二：金额超过 800 元可抽奖三次，每次中奖的概率为$\frac{1}{2}$，且每次抽奖互不影响，中奖 1 次打 9 折，中奖 2 次打 8 折，中奖 3 次打 7 折．

若某人打算购买 1000 元的营养品，请从实际付款金额的数学期望的角度分析应该选择哪种优惠方案．

附：

$P(K^2\geq k)$	0.150	0.100	0.050	0.010	0.005
k	2.072	2.706	3.841	6.635	7.879

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

21.（本题 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+x-e-1$．

（1）若 $f(x)\geq ax-e$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的值；

（2）若存在不相等的实数 x_1，x_2，满足 $f(x_1)+f(x_2)=0$，证明：$x_1+x_2<2$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本题 10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）. 在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{9}{3-2\cos^2\theta}$.

（1）写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）若 C_1 与 y 轴交于点 M，C_1 与 C_2 相交于 A、B 两点，求 $|MA|\cdot|MB|$ 的值.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（本题 10 分）

（1）已知 $f(x)=|x-a|+|x|$，若存在实数 x，使 $f(x)<2$ 成立，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $m>0$，$n>0$，且 $m+n=3$，求证：$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}\geq 3$.

武昌区 2020 届高三年级元月调研考试

理科数学参考答案及评分细则

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	D	D	D	A	C	B	C	A	A

二、填空题：

13. 240　　14. -11，3，17　　15. $\frac{7\sqrt{2}}{8}$　　16. $\frac{3\pi}{4}$或$\frac{9\pi}{8}$

三、解答题：

17.（本题 12 分）

在ΔABC中，已知$AB=\frac{5\sqrt{6}}{2}$，$AC=7$，D是BC边上的一点，$AD=5$，$DC=3$.

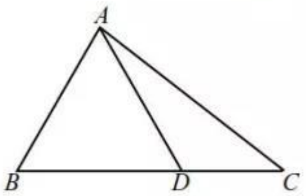
（1）求B；

（2）求ΔABC的面积.

解：（1）在ΔADC中，由余弦定理，得$\cos\angle ADC=-\frac{1}{2}$，

所以$\angle ADC=120^\circ$，从而$\angle ADB=60^\circ$.

在ΔABD中，由正弦定理，得$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$B=45^\circ$.　　……………（4 分）



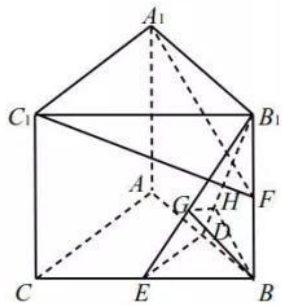
（2）由（1）知$\angle BAD=75^\circ$，且$\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

所以$S_{\Delta ABD}\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=\frac{25(\sqrt{3}+3)}{8}$，

$S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}DA\cdot DC\sin\angle ADC=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，

所以$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}=\frac{55\sqrt{3}+75}{8}$.　　……………（12 分）

18.（本题 12 分）



解：（1）因为$AC\perp AB$，$DE // AC$，所以$DE\perp AB$.

因为$AA_1\perp$平面ABC，$DE\subset$平面ABC，所以$AA_1\perp DE$.

因为$AB\cap AA_1=A$，所以$DE\perp$平面AA_1B_1B.

因为$A_1F\subset$平面AA_1B_1B，所以$DE\perp A_1F$.

易证$DB_1\perp A_1F$，因为$DB_1\cap D_1E=D$，

所以$A_1F\perp$平面B_1DE.

因为$A_1F\subset$平面A_1C_1F，

所以平面$A_1C_1F\perp$平面B_1DE.　　……………（4 分）

（2）方法一：过B作$BH\perp B_1D$，垂足为H，过H作$HG\perp B_1E$于G，连结BG，则可证$\angle BGH$为二面角$B-B_1E-D$的平面角.

在$Rt\Delta B_1BD$中，求得$BH=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$；在$Rt\Delta B_1BE$中，求得$BG=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

所以$\sin\angle BGH=\dfrac{BH}{BG}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………（12分）

方法二：建系，设（求）点的坐标，求两个法向量，求角的余弦，求正弦.

19.（本题12分）

解：（1）由$\begin{cases}\dfrac{b}{c}=\sqrt{3},\\ a-c=1,\end{cases}$及$a^2=b^2+c^2$，得$a=2$，$b=\sqrt{3}$.

所以，椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………（4分）

（2）当直线l的斜率存在时，设其方程为$y=kx+m(m\neq 0)$，代入椭圆方程，整理，得$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

由$\Delta>0$，得$4k^2-m^2+3>0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$.

于是$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{4k^2-m^2+3}}{4k^2+3}$.

又，坐标原点O到直线l的距离为$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$.

所以，ΔOAB的面积$S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=2\sqrt{3}\cdot|m|\cdot\dfrac{\sqrt{4k^2-m^2+3}}{4k^2+3}$.

因为$|m|\cdot\dfrac{\sqrt{4k^2-m^2+3}}{4k^2+3}=\dfrac{\sqrt{m^2(4k^2-m^2+3)}}{4k^2+3}\leq\dfrac{\dfrac{m^2+(4k^2-m^2+3)}{2}}{4k^2+3}=\dfrac{1}{2}$,

所以，$S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d\leq\sqrt{3}$.

当直线l的斜率不存在时，设其方程为$x=m$，同理可求得

$S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}|m|\cdot\sqrt{12-3m^2}\leq\sqrt{3}$.

所以，ΔOAB面积的最大值为$\sqrt{3}$. ……………………………（12分）

20.（本题12分）

解：（1）因为$\bar{x}=(100\times 0.00050+300\times 0.00075+500\times 0.00100+700\times 0.00125+900\times 0.00100+1100\times 0.00050)\times 200=620$（元），

所以，预估2020年7、8两月份人均健身消费为620元. ……………（2分）

（2）列联表如下：

	健身达人	非健身达人	总计
男	10	40	50
女	20	30	50
总计	30	70	100

因为$K^2=\dfrac{100(10\times 30-20\times 40)^2}{50\times 50\times 30\times 70}=4.762>3.841$，因此有 95%的把握认为“健身达人”

与性别有关系. ……………………………………（6 分）

（3）若选择方案一：则需付款 900 元；

若选择方案二：设付款 X 元，则 X 可能取值为 700，800，900，1000.

$P(x=700)=C_3^3(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，$P(x=800)=C_3^2(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}$，

$P(x=900)=C_3^1(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$，$P(x=1000)=C_3^0(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，

所以 $E(X)=700\times\frac{1}{8}+800\times\frac{3}{8}+900\times\frac{3}{8}+1000\times\frac{1}{8}=850$（元）

因为 $850<900$，所以选择方案二更划算. ……………………………（12 分）

21.（本题 12 分）

解：（1）令 $g(x)=f(x)-(ax-\mathrm{e})=\mathrm{e}^x+(1-a)x-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+1-a$.

由题意，知 $g(x)\geq 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，等价 $g(x)_{\min}\geq 0$.

当 $a\leq 1$ 时，由 $g'(x)\geq 0$ 知 $g(x)=\mathrm{e}^x+(1-a)x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $g(-1)=\frac{1}{e}-(1-a)-1<0$，所以 $a\leq 1$ 不合题意；

当 $a>1$ 时，若 $x\in(-\infty,\ln(a-1))$，则 $g'(x)<0$，若 $x\in(\ln(a-1),+\infty)$，则 $g'(x)>0$，

所以，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a-1))$ 单调递减，在 $(\ln(a-1),+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln(a-1))=a-2+(1-a)\ln(a-1)\geq 0$.

记 $h(a)=a-2+(1-a)\ln(a-1)$ $(a>1)$，则 $h'(a)=-\ln(a-1)$.

易知 $h(a)$ 在 $(1,2)$ 单调递增，在 $(2,+\infty)$ 单调递减，

所以 $h(a)_{\max}=h(2)=0$，即 $a-2+(1-a)\ln(a-1)\leq 0$.

而 $g(x)_{\min}=a-2+(1-a)\ln(a-1)\geq 0$，

所以 $a-2+(1-a)\ln(a-1)=0$，解得 $a=2$. ……………………………（6 分）

（2）因为 $f(x_1)+f(x_2)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}+x_1+x_2=2(\mathrm{e}+1)$.

因为 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}\geq 2\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，$x_1\neq x_2$，所以 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>2\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}$.

令 $x_1+x_2=t$，则 $2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+t-2\mathrm{e}-2<0$.

记 $m(t)=2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+t-2\mathrm{e}-2<0$，则 $m'(t)=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+1>0$，所以 $m(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $m(2)=0$，由 $2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+t-2\mathrm{e}-2<0$，得 $m(t)<m(2)$，

所以 $t<2$，即 $x_1+x_2<2$. ……………………………………（12 分）

另证：不妨设 $x_1<x_2$，因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+1>0$，所以 $f(x)$ 为增函数.

要证 $x_1+x_2<2$，即要证 $x_2<2-x_1$，即要证 $f(x_2)<f(2-x_1)$.

因为 $f(x_1)+f(x_2)=0$，即要证 $f(x_1)+f(2-x_1)>0$.

记 $h(x)=f(x)+f(2-x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}-2\mathrm{e}$，则 $h'(x)=\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})(\mathrm{e}^x+\mathrm{e})}{\mathrm{e}^x}$.

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$，从而 $h(x)=f(x)+f(2-x)>0$，得证.

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（本题 10 分）

解：（1）方程$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$可化为$x+y-2=0$.

方程$\rho^2=\dfrac{9}{3-2\cos^2\theta}$可化为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………（5分）

（2）将$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$代入$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$，得$2t^2+6\sqrt{2}t+3=0$.

设方程$2t^2+6\sqrt{2}t+3=0$的两根分别为t_1，t_2，则

$|MA|\cdot|MB|=|t_1|\cdot|t_2|=\dfrac{3}{2}$. ………………………………（10分）

23. [选修4-5：不等式选讲]（本题10分）

解：（1）**方法一**：因为$f(x)=|x-a|+|x|\geq|x-a-x|=|a|$，

因为存在实数x，使$f(x)<2$成立，所以$|a|<2$，解得$-2<a<2$.

方法二：当$a=0$时，符合题意.

当$a>0$时，因为$f(x)=|x-a|+|x|=\begin{cases}2x-a,\ x>a,\\ a,\quad 0\leq x\leq a,\\ -2x+a,x<0,\end{cases}$所以$f(x)_{\min}=a$.

因为存在实数x，使$f(x)<2$成立，所以$a<2$.

当$a<0$时，同理可得$a>-2$.

综上，实数a的取值范围为$(-2,2)$. ………………………………（5分）

（2）因为$m+n=3$，

所以$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{m+n}{3}(\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n})=\dfrac{1}{3}(\dfrac{n}{m}+\dfrac{4m}{n}+5)\geq\dfrac{1}{3}(2\sqrt{\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{4m}{n}}+5)=3$，

当且仅当$m=1,n=2$时取等号. ………………………………（10分）