华中师大一附中2019—2020学年度上学期高一期中检测
数学试题

时限：120 分钟　满分：150 分　命题人：蔡卉　胡立松　审题人：钟涛

Ⅰ卷（共16小题，满分80分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

1．函数 $f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{1-2^x}}$ 的定义域为

A．$(-1,0)$　　B．$(0,1)$　　C．$(-1,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

2．与函数 $y=2^{\log_4 x^{-2}}$ 为同一函数的是

A．$y=x$　　B．$y=\dfrac{1}{|x|}$　　C．$y=\dfrac{1}{x}$　　D．$y=-\dfrac{1}{x}$

3．已知集合 $A=\{0,2,a\},B=\{1,a^2\}$，若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 a 的值为

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

4．已知实数 $a=\log_2 3,b=(\dfrac{1}{3})^2,c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{10}$，则它们的大小关系为

A．$a>c>b$　　B．$c>a>b$　　C．$a>b>c$　　D．$b>c>a$

5.拟定从甲地到乙地通话 m 分钟的电话费（单位：元）由 $f(m)=1.06\times(0.5\times\langle m\rangle+1)$ 给出，其中 $m>0$，$\langle m\rangle$ 是**大于或等于** m 的最小整数（如 $\langle 3\rangle=3,\langle 3.7\rangle=4,\langle 3.1\rangle=4$），则从甲地到乙地通话时间为 5.5 分钟的话费为

A．3.71　　B．3.97　　C．4.24　　D．4.77

6．函数 $f(x)=(\dfrac{1}{2})^{\sqrt{-x^2-x+2}}$ 的单调递增区间为

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,-\dfrac{1}{2}]$　　C．$[-\dfrac{1}{2},1]$　　D．$[-\dfrac{1}{2},+\infty)$

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1-a)x+3a, & x<e\\ \ln x, & x\geq e\end{cases}$（$e$ 为自然对数的底数）的值域为 R，则实数 a 的取值范围是

A．$[\dfrac{e}{e-3},1]$　　B．$[\dfrac{e}{e-3},1)$　　C．$[\dfrac{1-e}{3-e},1]$　　D．$[\dfrac{1-e}{3-e},1)$

8．给出下列四个说法：

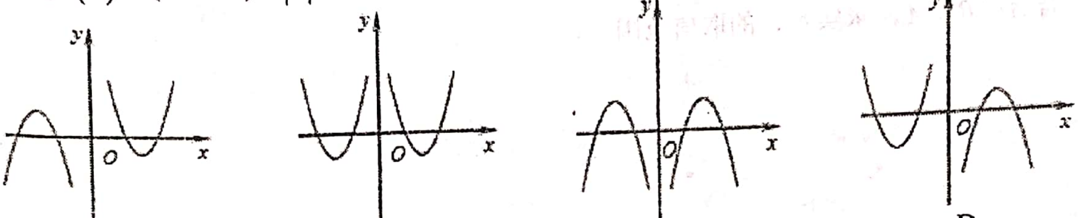
①已知函数 $f(x)$ 是定义在R上的偶函数，当 $x\leq 0$ 时，$f(x)=x(x+1)$，则当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-x$；

②若函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $(1,2)$，则函数 $y=f(2x)$ 的定义域为 $(0,\dfrac{1}{2})$；③ 若 $\log_a\dfrac{3}{5}<1$，则 a

的取值范围为$(\frac{3}{5},1)$；④ 函数$y=\log_a(3x-2)+2$（$a>0$且$a\neq1$）的图象必过定点$(1,0)$.其中正确说法的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9．函数$f(x)=(-x^2+3)\ln|x|$的图象大致为



A　　B　　C　　D

10．若对任意的$x,y\in R$，有$f(x)+f(y)-f(x+y)=3$，函数$g(x)=\frac{x}{x^2+1}+f(x)$，则$g(2)+g(-2)$的值为

A. 0　　B. 4　　C. 6　　D. 9

11．已知定义在R上的函数$f(x),g(x)$，其中函数$f(x)$满足$f(-x)=f(x)$且在$[0,+\infty)$上单调递减，函数$g(x)$满足$g(1-x)=g(1+x)$且在$(1,+\infty)$上单调递减，设函数$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$，则对任意$x\in R$，均有

A. $F(1-x)\geq F(1+x)$　　B. $F(1-x)\leq F(1+x)$

C. $F(1-x^2)\geq F(1+x^2)$　　D. $F(1-x^2)\leq F(1+x^2)$

12. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x,x<0\\-x^2,x\geq0\end{cases}$，$g(x)$为定义在R上的奇函数，且当$x<0$时，$g(x)=x^2-2x-5$，若$f(g(a))\leq2$，则实数$a$的取值范围是

A. $(-\infty,-1]\cup[0,2\sqrt{2}-1]$　　B. $[-1,2\sqrt{2}-1]$

C. $(-\infty,-1]\cup(0,2\sqrt{2}-1]$　　D. $[-1-2\sqrt{2},2\sqrt{2}-1]$

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．请把结果填在答题纸上的相应位置.）

13. 化简：$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}+\frac{1}{6}\lg\frac{1}{100}+2^{\log_{\frac{1}{2}}3}=$________.

14. 已知幂函数$f(x)=(2m-1)x^{-2n^2+n+3}(n\in Z)$为偶函数，且满足$f(3)<f(5)$，则$m+n=$________.

15. 已知$a>0$，且$a\neq1$，若函数$f(x)=a^{\ln(x^2-2x+3)}$有最大值，则关于x的不等式$\log_a(x^2-5x+7)>0$的解集为________.

16. 已知$a>0$且$a\neq1$，b为实数，函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x\geq0\\a^{-x}-1,\quad x<0\end{cases}$，若关于$x$的不等式$[f(x)]^2+af(x)-b^2<0$恰有1个整数解，则实数$a$的取值范围为________.

Ⅱ卷 （共6小题，满分70分）

三、解答题（本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

17.（本小题满分10分）

已知全集$U=R$，集合$A=\{x|\frac{x-5}{x-2}\le 0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+(a^2-1)<0\}$.

（Ⅰ）当$a=2$时，求$(C_UA)\cap(C_UB)$；

（Ⅱ）若$A\cup B=A$，求实数a的取值范围.

18.（本小题满分10分）

已知$f(x)=1+\log_3\frac{1-x}{1+x}$.

（1）求$f(\frac{1}{2019})+f(-\frac{1}{2019})$的值；

（2）当$x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$时，求函数$y=f(x)$的最大值.

19.（本小题满分12分）

某工厂生产一种仪器的元件，由于受生产能力和技术水平等因素的限制，会产生一些次品. 根据经验知道，次品数P（万件）与日产量x（万件）之间满足函数关系：$P=\begin{cases}\frac{x^2}{6}, & 1\le x<4\\ x+\frac{3}{x}-\frac{25}{12}, & x\ge 4.\end{cases}$

已知每生产1万件合格元件可盈利20万元，但每生产1万件次品将亏损10万元.（利润=盈利额－亏损额）

（1）试将该工厂每天生产这种元件所获得的利润T（万元）表示为日产量x（万件）的函数；

（2）当工厂将该元件的日产量x（万件）定为多少时获得的日利润最大，最大日利润为多少万元？

20.（本小题满分 12 分）

对于函数 $f(x)$，若在定义域 D 内存在实数 x_0 满足 $f(2-x_0)=-f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 为“类对称函数”.

（1）判断函数 $g(x)=x^2-2x+1$ 是否为“类对称函数”？若是，求出所有满足条件的 x_0 的值；若不是，请说明理由；

（2）若函数 $h(x)=3^x+t$ 为定义在 $[-1,3)$ 上的“类对称函数”，求实数 t 的取值范围.

21.（本题满分 12 分）

定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：①对任意 $x,y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 恒有 $f(xy)=f(x)+f(y)$；②当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，且 $f(2)=-1$.

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性和单调性，并加以证明；

（2）求关于 x 的不等式 $f(3x-2)+f(x)+4\geq 0$ 的解集.

22.（本题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2-mx(m\in R)$，$g(x)=-\ln x$.

（1）若存在实数 x，使得 $f(2^{-x})=-f(2^x)$ 成立，试求 m 的最小值；

（2）若对任意的 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq 2$ 恒成立，试求 m 的取值范围；

（3）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小者，设函数 $h(x)=\min\{f(x)+\frac{1}{4},g(x)\}(x>0)$，讨论关于 x 的方程 $h(x)=0$ 的实数解的个数.

11

高一数学期中试题参考答案及评分标准

第I卷

一、选择题：（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	B	C	C	D	B	C	C	C	A

二、填空题：

13. $\pi-3$ **14.** 2 **15.** $(2,3)$ **16.** $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}]\cup(3,8]$

三、解答题

17.解：由题意知 $A=(2,5],B=(a-1,a+1)$

（1）当 $a=2$ 时，$B=(1,3)$，则 $(C_UA)\cap(C_UB)=C_U(A\cup B)=(-\infty,1]\cup(5,+\infty)$ ……………5分；

（2）由于 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$，从而 $\begin{cases}a+1\le 5\\ a-1\ge 2\end{cases}$，则 $3\le a\le 4$ ……………………10分

18. 解：由 $\frac{1-x}{1+x}>0$，得 $-1<x<1$，定义域为 $(-1,1)$ 关于原点对称.……………………2分

故 $f(-x)+f(x)=2+\log_3\frac{1+x}{1-x}+\log_3\frac{1-x}{1+x}=2+\log_3(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1+x})=2$，从而函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(0,1)$ 对称.

（1）$f(\frac{1}{2019})+f(-\frac{1}{2019})=2$ ……………………4分

（2）令 $t=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上单调递减，且 $y=1+\log_3 t$ 单调递增，故有 $f(x)=1+\log_3\frac{1-x}{1+x}$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上单调递减，……………………8分

则 $f(x)_{\max}=f(-\frac{1}{2})=2$ ……………………10分

19.（1）当 $1\le x<4$ 时，合格的元件数为 $x-\frac{x^2}{6}$（万件），利润 $T=20(x-\frac{x^2}{6})-10\times\frac{x^2}{6}=20x-5x^2$（万元）

当 $x\ge 4$ 时，合格元件数为 $x-(x+\frac{3}{x}-\frac{25}{12})=\frac{25}{12}-\frac{3}{x}$（万件），利润 $T=\frac{125}{2}-\frac{90}{x}-10x$（万元）

从而该工厂每天生产这种元件所获得的利润为 $T=\begin{cases}20x-5x^2,1\le x<4\\ \frac{125}{2}-\frac{90}{x}-10x,x\ge 4\end{cases}$ ……………………5分

（2）当 $1\le x<4$ 时，$T=20x-5x^2=-5(x-2)^2+20$，则当 $x=2$（万件）时，利润T取最大值20（万

元）；

当 $x\ge 4$ 时，$T=\dfrac{125}{2}-\dfrac{90}{x}-10x$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=4$（万件）时，利润 T 取最大值 0（万元）；
……………11 分

综上所述，当日产量定为 2（万件）时，工厂可获得日利润最大，为 20 万元.
……………12 分

20. 解（1）假设存在实数 x_0，使得函数 $y=g(x)$ 为"类对称函数"，

则有 $f(2-x_0)=-f(x_0)$，即 $(2-x_0)^2-2(2-x_0)+1=-(x_0^2-2x_0+1)$，从而解得 $x_0=1$，
……………4 分

故存在唯一 $x_0=1$，使得函数 $y=g(x)$ 为"类对称函数".

（2）由于 $y=h(x)$ 为定义在 $[-1,3)$ 上的"类对称函数"，

从而存在实数 $x_0\in(-1,3)$ 有 $h(2-x_0)=-h(x_0)$ 即 $3^{2-x_0}+t=-3^{x_0}-t$ 成立

则问题转化为关于 x_0 方程 $-2t=3^{x_0}+3^{2-x_0}$ 在 $(-1,3)$ 上有解，等价于求 $y=3^x+3^{2-x}(-1<x<3)$ 的值域
……………7 分

令 $u=3^x(-1<x<3)$，则 $\dfrac{1}{3}<u<27$，从而 $m(u)=u+\dfrac{9}{u}$ 在 $(\dfrac{1}{3},3]$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{3},27)$ 上单调递增，
……………10 分

所以 $m(3)\le m(u)<m(\dfrac{1}{3})$，即 $y=m(u)$ 的值域为 $[6,\dfrac{82}{3})$

由 $6\le -2t<\dfrac{82}{3}$，则 $-\dfrac{41}{3}<t\le -3$
……………12 分

故 t 的取值范围为 $(-\dfrac{41}{3},-3]$

21.解：（1）由于 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，其定义域关于原点对称……………1 分

令 $x=y=1$，则有 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$

令 $x=y=-1$，则 $f(1)=f(-1)+f(-1)$，即 $f-1)=0$

令 $y=-1$，则 $f(-x)=f(-1)+f(x)$，即有 $f(-x)=f(x)$
……………3 分

所以 $y=f(x)$ 为偶函数

任取 $0<x_1<x_2$，则 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$，由题意知 $f(\dfrac{x_2}{x_1})<0$

从而 $f(x_2)-f(x_1)=f(\dfrac{x_2}{x_1}\cdot x_1)-f(x_1)=f(\dfrac{x_2}{x_1})<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$

所以 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又由于 $y=f(x)$ 为偶函数
……………6 分

故 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增

综上，$y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………7 分

（2）由于 $f(16)=4f(2)=-4$，及由（1）知 $y=f(x)$ 的奇偶性和单调性

从而关于 x 的不等式 $f(3x-2)+f(x)+4\geq 0$ 即 $f(|3x-2|)+f(|x|)\geq f(16)$

等价于 $\begin{cases}3x-2\neq 0\\ x\neq 0\\ |x(3x-2)|\leq 16\end{cases}$，解得 $-2\leq x\leq\frac{8}{3}$，且 $x\neq 0$，$x\neq\frac{2}{3}$

故不等式的解集为 $[-2,0)\cup(0,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},\frac{8}{3}]$ ……………………12 分

22. 解：（1）依题意，$4^{-x}-m\cdot 2^{-x}=-(4^{x}-m\cdot 2^{x})$，则 $m(2^{x}+2^{-x})=4^{x}+4^{-x}$

$\because 2^{x}+2^{-x}\geq 2$，$\therefore m=\frac{4^{x}+4^{-x}}{2^{x}+2^{-x}}$，令 $t=2^{x}+2^{-x}$，则 $t\geq 2$，$m(t)=t-\frac{2}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，所以

$m(t)\geq m(2)=1$，即 $m\geq 1$，从而 m 的最小值为 1. ……………………3 分

（2）问题等价于 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leq 2$，由于 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{m}{2}$

① 若 $m\leq -2$，即 $\frac{m}{2}\leq -1$ 时，$y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，从而 $f(x)_{\max}=f(1)=1-m, f(x)_{\min}=f(-1)=1+m$，$\therefore 1-m-(1+m)\leq 2$，得 $m\geq -1$ 与 $m\leq -2$ 矛盾，舍去；

②若 $-2<m<2$，即 $-1<\frac{m}{2}<1$ 时，$y=f(x)$ 在 $[-1,\frac{m}{2})$ 上单调递减，$[\frac{m}{2},1]$ 上单调递增，故

$f(x)_{\min}=f(\frac{m}{2})=-\frac{m^2}{4}, f(x)_{\max}=\max\{f(-1),f(1)\}$

当 $-2<m\leq 0$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=1-m$，

则 $1-m+\frac{m^2}{4}\leq 2$，解得 $2-2\sqrt{2}\leq m\leq 2+2\sqrt{2}$，$\therefore 2-2\sqrt{2}\leq m\leq 0$

当 $0<m<2$ 时，$f(x)_{\max}=f(-1)=1+m$，

则 $1+m+\frac{m^2}{4}\leq 2$，解得 $-2-2\sqrt{2}\leq m\leq -2+2\sqrt{2}$，$\therefore 0<m\leq -2+2\sqrt{2}$

③ 若 $m\geq 2$，即 $\frac{m}{2}\geq 1$ 时，$y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，从而 $f(x)_{\max}=f(-1)=1+m, f(x)_{\min}=f(1)=1-m$，$\therefore 1+m-(1-m)\leq 2$，得 $m\leq 1$ 与 $m\geq 2$ 矛盾，舍去

综上，m 的取值范围为 $[2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2}]$.　　　　　　　　　　　……………………8 分

（3）①当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)=-\ln x<0$，则 $h(x)\le g(x)<0$，故 $h(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上没有实数解.

②当 $x=1$ 时，$f(1)+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}-m, g(1)=0$

若 $m>\frac{5}{4}$ 时，则 $f(1)+\frac{1}{4}<0$，$\therefore h(1)<0$，则 $x=1$ 不是 $h(x)=0$ 的实数解

若 $m\le\frac{5}{4}$ 时，则 $f(1)+\frac{1}{4}\ge 0$，$\therefore h(1)=\min\{f(1)+\frac{1}{4},g(1)\}=g(1)=0$，

则 $x=1$ 是 $h(x)=0$ 的一个实数解.

③当 $0<x<1$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，故只需讨论 $f(x)+\frac{1}{4}=0$ 在 $(0,1)$ 的实数解的个数，则由 $x^2-mx+\frac{1}{4}=0$ 得 $m=x+\frac{1}{4x}, x\in(0,1)$ 即问题等价于直线 $y=m$ 与函数 $y=x+\frac{1}{4x}, x\in(0,1)$ 图像的交点个数.

由于 $y=x+\frac{1}{4x}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $[\frac{1}{2},1)$ 上单调递增，结合 $y=x+\frac{1}{4x}$ 在 $(0,1)$ 的图像可知

当 $m<1$ 时，$y=m$ 与函数 $y=x+\frac{1}{4x}, x\in(0,1)$ 的图像没有交点，即 $h(x)=0$ 没有实数解；

当 $m=1$ 或 $m\ge\frac{5}{4}$ 时，$h(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上有一个实数解；

当 $1<m<\frac{5}{4}$ 时，$h(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上有两个实数解；

综上，当 $m<1$ 或 $m>\frac{5}{4}$ 时，$h(x)=0$ 有 1 个实数解

当 $m=1$ 或 $\frac{5}{4}$ 时，$h(x)=0$ 有 2 个实数解

当 $1<m<\frac{5}{4}$ 时，$h(x)=0$ 有 3 个实数解.　　　　　　　　　　……………………14 分