

邢台市 2019~2020 学年高三上学期第四次月考 数学(理科)

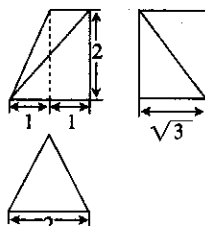
考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:集合与逻辑,函数与导数,三角函数与解三角形,平面向量,数列,立体几何,解析几何,排列组合,复数,选修 4-4。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \ln x < 1\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(0, 2)$ B. $(-1, 2)$ C. $(-1, e)$ D. $(0, e)$
2. 已知复数 $z = \frac{2}{\sqrt{3}-i}$, 则复数 z 的共轭复数 $\bar{z} =$
A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ D. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. 已知 $\tan \alpha = 3$, 则 $\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha =$
A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{7}{10}$ C. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7}{10}$
4. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = a \ln x + a$. 若 $f(-e) = 4$, 则 $f(0) + f(1) =$
A. -1 B. -2 C. 0 D. 1
5. 已知 l, m 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 且 $l \parallel \alpha, m \perp \beta$, 则下列命题中为真命题的是
A. 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $l \parallel \beta$ B. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp m$
C. 若 $l \perp m$, 则 $l \parallel \beta$ D. 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp \alpha$
6. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的最长棱的长为
A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{5}$
7. 楼道里有 9 盏灯, 为了节约用电, 需关掉 3 盏互不相邻的灯, 为了行走安全, 第一个和最后一个不关, 则关灯方案的种数为
A. 10 B. 15 C. 20 D. 24



8. 已知 P 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的一点, F 是抛物线 C 的焦点, O 为坐标原点, 若 $|PF| = 2$, $\angle PFO = \frac{\pi}{3}$, 则抛物线 C 的方程为

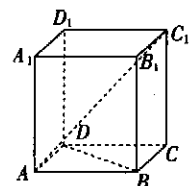
A. $y^2 = x$ B. $y^2 = 2x$ C. $y^2 = 4x$ D. $y^2 = 6x$

9. 若直线 $l: (m-n)x - (m+2n)y - 3(m-2n) = 0$ 与曲线 $y = -2 + \sqrt{9-x^2}$ 有两个相异的公共点, 则 l 的斜率 k 的取值范围是

A. $[\frac{3}{7}, +\infty)$ B. $(0, \frac{3}{7}]$ C. $(0, \frac{3}{7})$ D. $(\frac{3}{7}, \frac{24}{7})$

10. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=8, AD=6$, 异面直线 BD 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$, 则该长方体外接球的表面积为

A. 98π B. 196π
C. 784π D. $\frac{1372}{3}\pi$



11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为椭圆上不同于左、右顶点的任意一点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 且 $S_{\triangle IPF_1} = \lambda S_{\triangle IF_1F_2} - S_{\triangle IPF_2}$, 若椭圆的离心率为 e , 则 $\lambda =$

A. $\frac{1}{e}$ B. 1 C. e D. 2

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 S . 若 $\sin(A+C) = \frac{2S}{b^2 - c^2}$, 则 $\tan C + \frac{1}{2 \tan(B-C)}$ 的最小值为

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

第 II 卷

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 已知向量 $a = (1, m)$, $b = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, 若 $a \perp b$, 则 $m =$
14. $(2x - \frac{1}{x})^7$ 的展开式中 x 的系数为 . (用数字作答)
15. 若 $\ln x_1 - x_1 - y_1 + 2 = 0$, $x_2 + 2y_2 - 4 - 2 \ln 2 = 0$, 则 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值为 .
16. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线上的点 $M(-1, \sqrt{3})$ 关于另一条渐近线的对称点恰为右焦点 F , 点 P 是双曲线上的动点, 则 $|PM| + |PF|$ 的最小值为 .

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2n^2 + kn + k$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

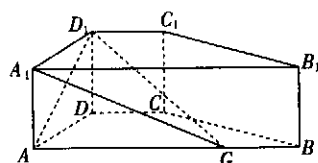
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 右焦点为 $F(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 设 O 为坐标原点, 若点 A 在直线 $y=1$ 上, 点 B 在椭圆 C 上, 且 $OA \perp OB$, 求线段 AB 长度的最小值.

19. (12 分)

如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 60^\circ$, $CD = 1$, $AD = 2$, $AB = 4$, 点 G 在线段 AB 上, $AG = 3GB$, $AA_1 = 1$.

- (1) 证明: $D_1G \parallel$ 平面 BB_1C_1C .
- (2) 求二面角 A_1-D_1G-A 的余弦值.



20. (12 分)

已知直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, $M(2, y_0) (y_0 \neq 0)$ 为弦 AB 的中点, 过 M 作 AB 的垂线交 x 轴于点 P .

- (1) 求点 P 的坐标;
- (2) 当弦 AB 最长时, 求直线 l 的方程.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} 且满足 $f(-x) + f(x) = x^2$, 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) < x$.

- (1) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的单调性并加以证明;
- (2) 若方程 $f(x) = x$ 有实数根 x_0 , 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个不动点. 设正数 x_0 为函数 $g(x) = xe^x + a(1-e^x) + x + 1$ 的一个不动点, 且 $f(x_0) + \frac{1}{2} \geq f(1-x_0) + x_0$, 求 a 的取值范围.

22. (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{6} \sin \alpha, \\ y = \sqrt{6} \cos \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 2$.

- (1) 求 C 的普通方程和 l 的直角坐标方程;
- (2) 直线 l 与 x 轴的交点为 P , 经过点 P 的直线 m 与曲线 C 交于 A, B 两点, 若 $|PA| + |PB| = 4\sqrt{3}$, 求直线 m 的倾斜角.