Régimes transitoires – corrigé

Exercice 1 : Décharge d'un condensateur dans un circuit RC parallèle

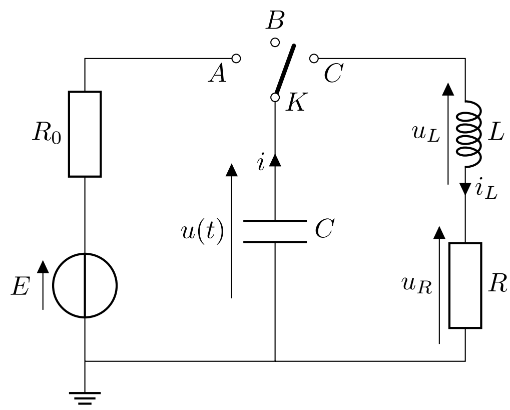
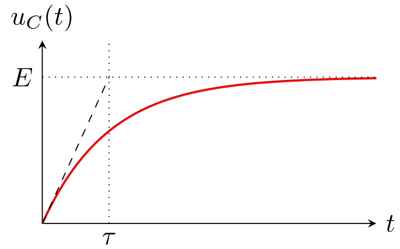


Figure 1 – Schéma du circuit étudié

1. Le circuit est en régime permanent, donc le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i = 0$ et donc $u_R = Ri = 0$. La bobine se comporte comme un fil, donc $u_L = 0$ et d'après la loi des mailles, $u_C = u_L + u_R = 0$. Le condensateur est donc déchargé.
2. La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$.
3. On applique la loi des mailles dans la maille de gauche, puis avec la loi d'Ohm et celle du condensateur, on obtient :
$$\boxed{E + R_0 i + u = 0 = E - R_0 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}} \tag{1}$$
avec $\boxed{\tau = R_0 C}$
4. La solution générale de l'équation différentielle est
$$u(t) = u_H(t) + u_P(t) = Ae^{-t/\tau} + E \tag{2}$$
On utilise la condition initiale $u(0^+) = 0$ pour trouver que $A = -E$ et finalement
$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \tag{3}$$
5. On a l'évolution suivante :



Pour mesurer cette tension, il faut brancher la masse de l'oscilloscope sur la masse du GBF et la voie 1 de l'oscilloscope entre le condensateur et la résistance R_0.
6. Si le régime permanent est atteint, on peut utiliser les résultats de la partie précédente pour montrer directement que $\boxed{u(0^+) = E}$ et comme l'intensité du courant qui circule dans la bobine est continue, on a $i(0^+) = i_L(0^-) = 0$. Et donc $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = -i_L(0^+)/C = 0}$.

7. On applique la loi des mailles à la maille de droite, on a

$$u = u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = -LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

Soit finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0} \tag{5}$$

avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

8. On suppose qu'on est en régime pseudo-périodique.
   (a) Pour être en régime pseudo-périodique, il faut que l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle n'ait pas de racines réelles, donc que son discriminant soit négatif. L'équation caractéristique s'écrit

   $$r^2 + \frac{w_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \tag{6}$$

   Le discriminant est $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$. Pour être en régime pseudo-périodique, on doit donc avoir : $\frac{1}{Q^2} - 4 < 0$ et donc $Q > \frac{1}{2}$.

   (b) Les racines de l'équation caractéristique sont

   $$r_{1,2} = -\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{1/\tau} \pm i\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\Omega} \tag{7}$$

   La solution générale de l'équation différentielle est donc

   $$\boxed{u(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi)} \tag{8}$$

   (c) La pseudo période est

   $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}} \tag{9}$$

   (d) En utilisant les conditions initiales déterminées à la question 6, on a $u(0) = E$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. Soit

   $$A\cos(\varphi) = E \quad \text{et} \quad A\left(-\frac{1}{\tau}\cos(\varphi) - \Omega\sin(\varphi)\right) = 0 \tag{10}$$

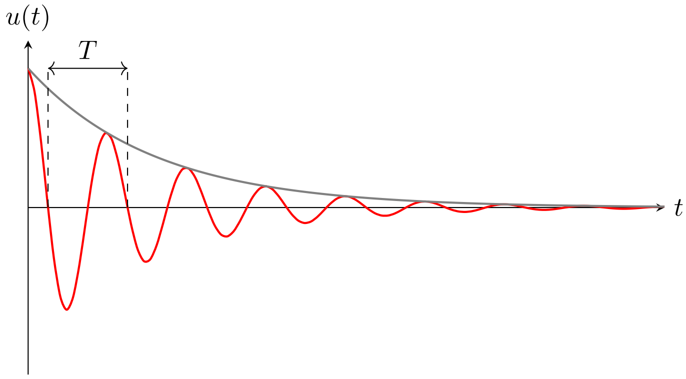
   En divisant la seconde équation par la première, on obtient $-\frac{1}{\tau} - \Omega\tan(\varphi) = 0$ soit

   $$\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\Omega\tau}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right)} \tag{11}$$

   et la permière équation donne

   $$\boxed{A = \frac{E}{\cos(\varphi)} = \frac{E}{\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\right)\right)} = E\sqrt{\frac{4Q^2}{4Q^2 - 1}}} \tag{12}$$

9. On a le graphe suivant :



10. L'énergie initiale du condensateur est $\boxed{E_{C,i} = \frac{1}{2}CE^2}$ et son énergie finale est $\boxed{E_{C,f} = 0}$.
11. L'énergie initiale de la bobine est $\boxed{E_{L,i} = \frac{1}{2}Li(0)^2 = 0}$ et son énergie finale est $\boxed{E_{L,f} = 0}$.
12. L'énergie E_J dissipée dans la résistance entre $t = 0$ et $t = \infty$ est égale à la différence entre l'énergie initialement contenue dans le circuit et l'énergie finale. On a donc $\boxed{E_J = E_{C,i} = \frac{1}{2}CE^2}$