DM6 : Cinématique

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Centrifugeuse

La plus grande centrifugeuse au monde, d'un rayon $R = 60\,\mathrm{m}$, est celle de la cité des étoiles située près de Moscou. Elle soumet les cosmonautes à rude épreuve pour les préparer à encaisser les accélérations de la phase de décollage du vaisseau Soyouz. On utilise les coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$ pour décrire le mouvement circulaire de centre O, dans un plan horizontal, du cosmonaute M repéré par $r(t) = OM = R = 60\,\mathrm{m}$ et $\theta(t)$ (dont on donnera les caractéristiques plus loin). Sa trajectoire est représentée sur la figure 1 qui servira de document réponse à rendre avec votre copie.

1. Représenter les vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de la base locale polaire en $M(R, \frac{\pi}{6})$.
2. Exprimer les vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne en fonction de $\theta(t)$.
3. Montrer que $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$.
4. En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base polaire en fonction de R, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.
5. On note $v = R\dot{\theta}$, montrer que $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$.

Dans un premier temps, on considère un mouvement circulaire uniforme de M à vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega > 0$.

6. Exprimer puis calculer la vitesse angulaire ω_5 de rotation de la centrifugeuse lorsque le cosmonaute est soumis à une accélération de norme $5g$. On donne $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
7. Tracer l'allure de $\vec{a}$ en $M'(R, \frac{5\pi}{6})$ dans ce cas de figure.

Dans un second temps, on considère la décélération de M lorsque l'entraînement du cosmonaute est terminé, c'est-à-dire lorsque la vitesse angulaire $\dot{\theta} > 0$ n'est plus constante.

8. Dans quel sens tourne le point M et quel est le signe de $\ddot{\theta}$?
9. Représenter l'allure de $\vec{a}$ en $M''(R, \frac{7\pi}{6})$ dans ce cas de figure.

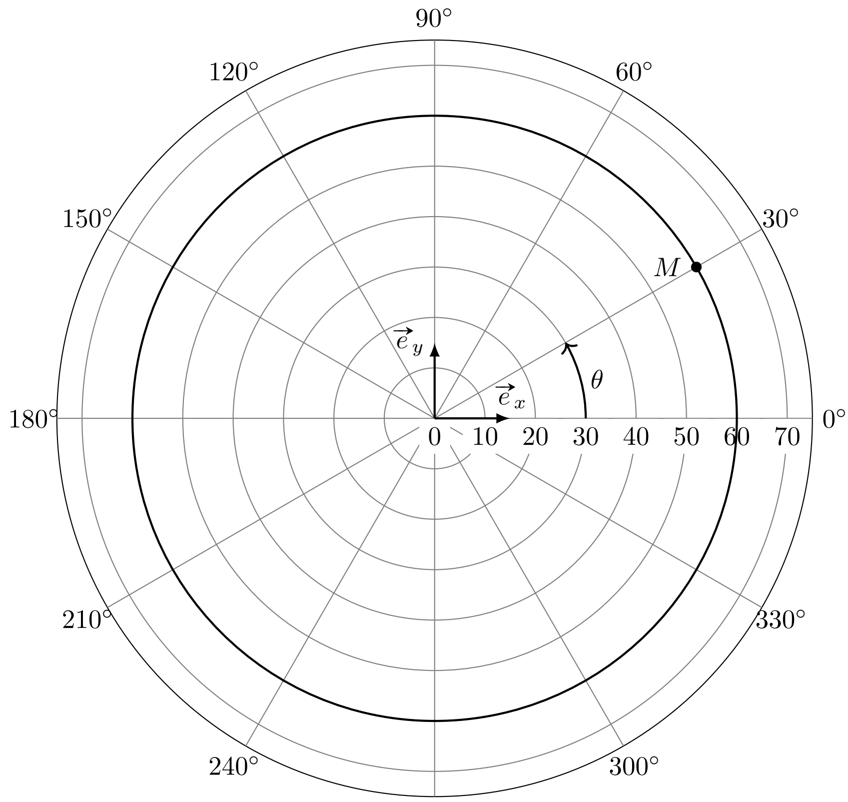


Figure 1 – Trajectoire du cosmonaute

Exercice 2 : Trajectoire elliptique

Un satellite décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \tag{1}$$

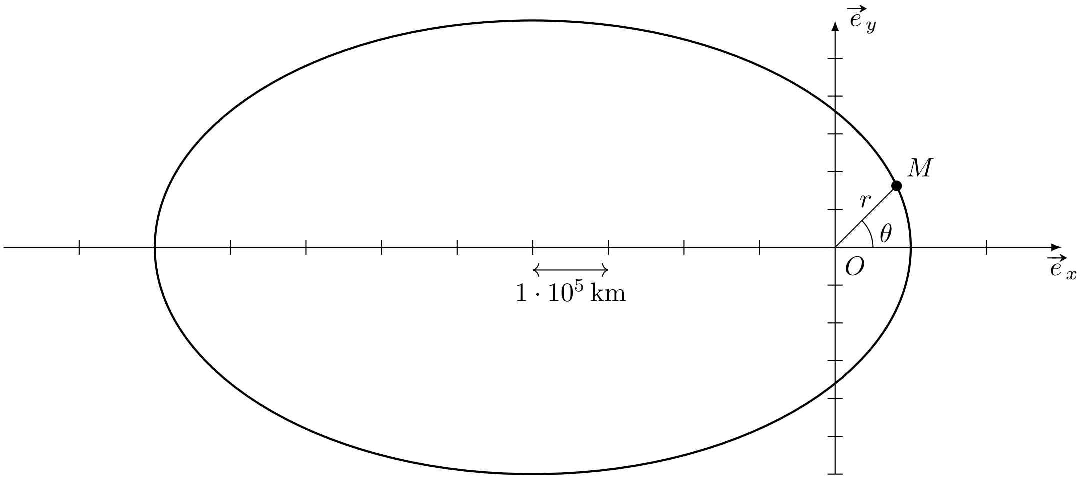
ou p et $0 < e < 1$ sont deux paramètres constants, respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse. On sait par ailleurs que la conservation du moment cinétique implique :

$$r^2\dot{\theta} = C \tag{2}$$

avec C une constante positive qui dépend uniquement des conditions initiales du satellite.

1. Etablir les expressions des rayons maximum et minimum $r_{\min}$ et $r_{\max}$ et préciser pour quels angles θ ces derniers sont obtenus.

On considère alors la représentation graphique suivante de la trajectoire du satellite



2. Exprimer ensuite e et p en fonction de $r_{\min}$ et $r_{\max}$ puis effectuer les applications numériques en vous aidant de lectures graphiques.
3. Reproduire le schéma précédent et y ajouter le vecteur vitesse du satellite au niveau du point M. En déduire le signe des composante v_r et v_θ du vecteur vitesse selon les vecteurs de base $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.
4. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de $\dot{r}$, C et r ainsi que des vecteurs de la base polaire $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.
5. Montrer que la dérivée temporelle du rayon r peut s'exprimer selon

$$\dot{r} = \frac{eC}{p}\sin(\theta) \tag{3}$$

6. En déduire l'expression du vecteur accélération et montrer que celui-ci est uniquement porté selon le vecteur de base $\vec{e}_r$.
7. Montrer finalement que la composante radiale de l'accélération a pour expression

$$a_r = \vec{a} \cdot \vec{e}_r = -\frac{C^2}{p} \times \frac{1}{r^2} \tag{4}$$

   Justifier la présence du terme $\frac{1}{r^2}$ à l'aide de vos connaissances physiques.

8. En quel point la norme de la vitesse est elle minimale ou maximale ? Représenter le(s) vecteur correspondant sur la trajectoire. Une démonstration est attendue.