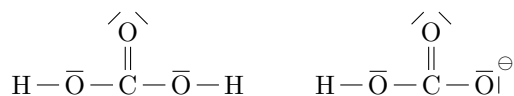


DS7 : Mécanique et chimie – corrigé

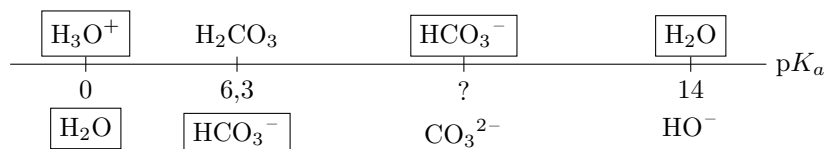
Exercice 1 : LA RHUBARBE

1 Acidité des pétioles

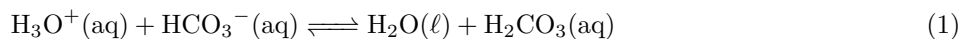
- On a $\text{pH} = -\log([\text{H}_3\text{O}^+]/c^\circ) = 2,7$
- Tremper les pétioles dans l'eau froide permet de diluer la solution d'acide qu'ils contiennent et donc de diminuer la concentration de H_3O^+ et d'augmenter le pH.
- On découpe les pétioles en tronçons pour favoriser la dilution de la solution acide qu'ils contiennent dans l'eau.
- L'ion HCO_3^- est l'ion hydrogénocarbonate, c'est une espèce amphotère, il est l'acide de CO_3^{2-} et la base de H_2CO_3 .
- On obtient les représentations de Lewis suivantes :



- On recense les différentes espèces présentes en les classant par valeur de $\text{p}K_a$ croissante :



Il va donc se produire une réaction entre H_3O^+ et HCO_3^- d'équation



Sa constante d'équilibre est

$$K = \frac{1}{K_a} = 10^{6,3} \quad (2)$$

- La constante d'équilibre de la réaction étant bien supérieure à 1×10^4 , elle est quasi-totale. On a initialement $n_0 = c_0 V = 2,0 \times 10^{-4}$ mol d'ions H_3O^+ et $n_1 = 1,0 \times 10^{-3}$ mol de HCO_3^- . Les coefficients stœchiométriques des deux espèces étant égaux, les HCO_3^- sont donc introduits en excès. On a le tableau d'avancement suivant :

	$\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$	+	$\text{HCO}_3^-(\text{aq})$	\rightleftharpoons	$\text{H}_2\text{O}(\ell)$	+	$\text{H}_2\text{CO}_3(\text{aq})$
État initial	n_0		n_1		–		0
État finale	0		$n_1 - n_0$		–		n_0

et à la fin de la réaction il restera

- 0 mol de H_3O^+ (en réalité une quantité ε très faible).
- $8,0 \times 10^{-4}$ mol de HCO_3^-
- $2,0 \times 10^{-4}$ mol de H_2CO_3

On détermine le pH en utilisant la relation

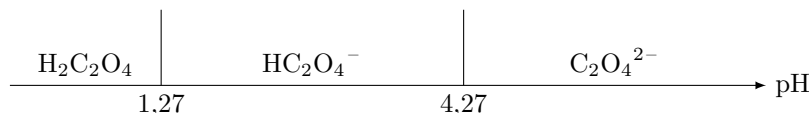
$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log\left(\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}\right) = 6,9 \quad (3)$$

- Le bicarbonate augmente le pH de la solution qui se trouve dans la rhubarbe qui sera donc moins acide.

9. L'acide ascorbique est un diacide, la courbe A correspond à $C_6H_8O_6$, la courbe B correspond à $C_6H_7O_6^-$ et la courbe C correspond à $C_6H_6O_6^{2-}$.
10. Le pH dans le pétiole de rhubarbe est de 2,7, la vitamine C est donc principalement sous sa forme la plus acide $C_6H_8O_6$. À l'issue de la réaction avec le bicarbonate de soude, le pH est de 6,9 et la vitamine C est majoritairement sous forme de $C_6H_7O_6^-$.
11. Dans une solution de pH = 5, on a environ 10 % de $C_6H_8O_6$, 90 % de $C_6H_7O_6^-$ et 0 % de $C_6H_6O_6^{2-}$.
12. On repère les différents pK_a en regardant pour quelles valeurs de pH deux formes de l'acide ascorbique sont présentes à 50 %. On trouve $pK_{a1} = 4,1$ et $pK_{a2} = 11,6$.

2 Toxicité des feuilles

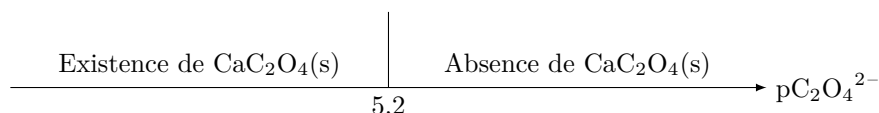
13. Diagramme de prédominance :



14. Dans l'urine, on trouve l'acide oxalique principalement sous la forme de $C_2O_4^{2-}$.
15. La concentration limite c_{lim} de précipitation de $CaC_2O_4(s)$ est donnée par

$$c_{\text{lim}}[Ca^{2+}] = K_S c^{\circ 2} \quad \text{soit} \quad \frac{c_{\text{lim}}}{c^{\circ}} = K_S \frac{c^{\circ}}{[Ca^{2+}]} \quad \text{donc} \quad p_{\text{lim}} = pK_S + \log\left(\frac{[Ca^{2+}]}{c^{\circ}}\right) = 5,2 \quad (4)$$

On obtient donc le diagramme d'existence suivant :



16. Le pH étant égal à 6, l'acide oxalique se trouve entièrement sous forme d'ions oxalate $C_2O_4^{2-}$. Vu le diagramme d'existence établi à la question précédente, on voit que si $[C_2O_4^{2-}] = 1 \times 10^{-4} \text{ mol } \ell^{-1}$, alors $pC_2O_4^{2-} < 5,2$ et il y aura précipitation de $CaC_2O_4(s)$. On établit un tableau d'avancement volumique

	$Ca^{2+}(aq)$	+	$C_2O_4^{2-}(aq)$	\rightleftharpoons	$CaC_2O_4(s)$
État initial	c_1		c_2		$0 = n_{CaC_2O_4}/V$
État final	$c_1 - x$		$c_2 - x$		$x = n_{CaC_2O_4}/V$

À l'équilibre, on a

$$(c_1 - x)(c_2 - x) = K_S c^{\circ 2} \quad (5)$$

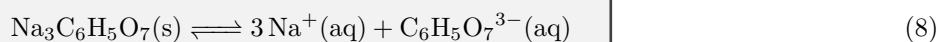
Avec $c_1 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol } \ell^{-1}$ et $c_2 = 1,0 \times 10^{-4} \text{ mol } \ell^{-1}$ on trouve finalement

$$x = 9,3 \times 10^{-5} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (6)$$

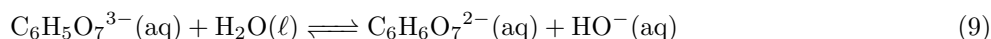
et on a

$$n(CaC_2O_4) = 9,3 \times 10^{-5} \text{ mol}, [Ca^{2+}] = 9,1 \times 10^{-4} \text{ mol } \ell^{-1} \quad \text{et} \quad [C_2O_4^{2-}] = 7,0 \times 10^{-6} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (7)$$

17. Réaction de dissolution



18. Lors de leur introduction dans l'eau, les ions citrate réagiront selon la réaction



de constante d'équilibre $K = \frac{K_e}{K_a} = 10^{-7,6}$. On en conclut que la réaction est très peu avancée et on a le tableau d'avancement volumique

	$\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}(\text{aq})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\ell)$	\rightleftharpoons	$\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_7^{2-}(\text{aq})$	+	$\text{HO}^-(\text{aq})$
État initial	c_i		–		0		0
État final	$c_i - x \approx c_i$		–		x		x

À l'équilibre, on a

$$\frac{x^2}{c_i c^\circ} = 10^{-7,6} \quad \text{soit après résolution} \quad x = 10^{-4,8} \quad (10)$$

Et le pH de la solution est

$$\text{pH} = \text{p}K_e + \log\left(\frac{x}{c^\circ}\right) = 9,2 \quad (11)$$

Le citrate de sodium a tendance à augmenter le pH de l'urine.

19. Au moment du mélange le volume total est multiplié par 2, donc les concentrations sont divisées par 2, on a donc

$$c_1 = [\text{Ca}^{2+}] = 5,0 \times 10^{-4} \text{ mol } \ell^{-1} \quad \text{et} \quad c_2 = [\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}] = 5,0 \times 10^{-3} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (12)$$

20. On établit un tableau d'avancement volumique :

	$\text{Ca}^{2+}(\text{aq})$	+	$\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}(\text{aq})$	=	$\text{Ca}(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7)^-(\text{aq})$
État initial	c_1		c_2		0
État final	$c_1 - x$		$c_2 - x$		x

La constante d'équilibre de la réaction s'écrit

$$K_f = \frac{[\text{Ca}(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7)^-(\text{aq})]c^\circ}{[\text{Ca}^{2+}][\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}]} = \frac{xc^\circ}{(c_1 - x)(c_2 - x)} \quad (13)$$

La résolution de cette équation donne

$$[\text{Ca}(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7)^-] = x = 4,98 \times 10^{-4} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (14)$$

$$[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}] = c_2 - x = 4,5 \times 10^{-3} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (15)$$

$$[\text{Ca}^{2+}] = 2,3 \times 10^{-6} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (16)$$

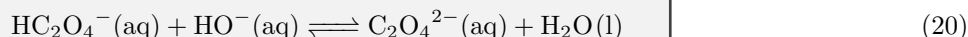
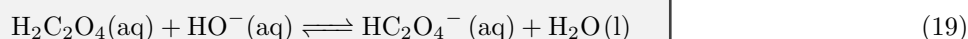
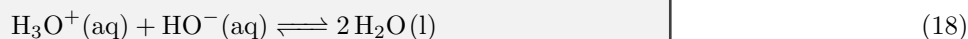
21. On calcule le quotient réactionnel lorsqu'on introduit l'acide oxalique, comme le pH de la solution est de 7, la totalité de l'acide oxalique est sous forme de $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$, on a alors :

$$Q = \frac{1}{c^\circ{}^2} [\text{C}_2\text{O}_4^{2-}][\text{Ca}^{2+}] = 2,3 \times 10^{-10} < \underbrace{10^{-8,2}}_{K_S} \quad (17)$$

Comme $Q < K_S$, il n'y aura pas de précipitation d'oxalate.

3 Titrage de l'acide oxalique dans la rhubarbe

22. L'acide chlorhydrique est un acide fort de formule HCl. La concentration en ions H_3O^+ d'une solution d'acide chlorhydrique à $5 \times 10^{-1} \text{ mol } \ell^{-1}$ est de ... $5 \times 10^{-1} \text{ mol } \ell^{-1}$! (C'est un acide fort, il est totalement dissocié)
23. Lorsqu'on ajoute de la soude dans la solution précédente, elle va réagir avec l'acide chlorhydrique et avec l'acide oxalique. Les réactions de titrage sont



24. Si les réactions de titrage étaient successives, on devrait observer 3 sauts de pH, correspondant aux 3 équivalences. Or ici on n'en observe que 1 ou 2. Les réactions de titrage sont donc en partie simultanées. Et notamment, la première acidité de $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ a un $\text{p}K_a = 1,27$ ce qui n'est pas beaucoup plus élevé que le $\text{p}K_a$ du couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$ qui vaut 0. Les deux réactions se produiront donc simultanément.
- Avec ce protocole, il est difficile de distinguer l'acide chlorhydrique de l'acide oxalique.
25. La constante d'équilibre de cette réaction est

$$K = \frac{c^{\circ 2}}{[\text{Ca}_{\text{eq}}^{2+}][\text{C}_2\text{O}_4^{2-}]_{\text{eq}}} = \frac{1}{K_S} = 10^{8,2} \quad (21)$$

26. Le volume équivalent du titrage est repéré par le changement de pente dans la conductivité corrigée, on a $V_{\text{eq}} = 10,8 \text{ mL}$. On obtient la concentration c en oxalate de la solution par

$$C_B V_{\text{eq}} = c V_1 \quad \text{donc} \quad c = \frac{C_B V_{\text{eq}}}{V_1} = 5,40 \times 10^{-2} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (22)$$

27. — Avant l'équivalence, lorsqu'on augmente V_B , on ajoute en solution des ions Cl^- et on supprime des ions $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$ qui réagissent avec les Ca^{2+} . On ajoute deux ions Cl^- pour chaque ion $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$ retiré et la conductivité ionique de deux ions Cl^- est légèrement supérieure à celle d'un ion $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$, la conductivité de la solution augmente donc légèrement lorsque V_B augmente.
- Après l'équivalence, on ajoute toujours en solution des ions Cl^- , mais aussi des Ca^{2+} qui ne réagissent plus. La conductivité de la solution augmente donc plus rapidement qu'avant l'équivalence.
28. On a montré que la concentration des ions oxalate est $c = 5,4 \times 10^{-2} \text{ mol } \ell^{-1}$. La quantité de matière d'oxalate présents dans S_1 était donc de $n = 5,4 \times 10^{-2} \text{ mol}$, cela correspond aussi à la quantité d'acide oxalique présent initialement. Dans $m_0 = 280 \text{ g}$ de rubarbe sèche, on avait $n = 5,4 \times 10^{-2} \text{ mol}$ d'acide oxalique, soit $m = nM(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) = 4,86 \text{ g}$. La masse d'acide oxalique pour 100 g de matière sèche est donc

$$1,74 \times 10^3 \text{ mg/100g} \quad (23)$$

Cette valeur correspond à une concentration habituelle d'acide oxalique, le résultat est donc cohérent.

Exercice 2 : REBOND D'UNE GOUTTE D'EAU

1 Forme des gouttes

1.1 Rôle de la tension superficielle

- Le volume de la goutte est $V = \pi a^2 e$. La surface de la goutte en contact avec l'air est $S = 2\pi a^2 + 2\pi a e$.
- En remplaçant dans l'énergie potentielle, on trouve

$$E_{p,t} = 2\pi A a^2 + \frac{2AV}{a} \quad (1)$$

- On cherche la valeur a_0 de a pour laquelle la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à a s'annule, on obtient :

$$\frac{dE_{p,t}}{da}(a_0) = 4\pi a_0 A - \frac{2AV}{a_0^2} = 0 \Leftrightarrow a_0^3 = \frac{V}{2\pi} \quad (2)$$

D'où le résultat demandé

$$a_0 = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3} \quad (3)$$

4. On reprend l'équation 2, avec $V = \pi a_0^2 e_0$ et on obtient

$$4\pi a_0 A - \frac{2A\pi a_0^2 e_0}{a_0^2} = 0 \Leftrightarrow e_0 = 2a_0 \quad (4)$$

La goutte prend la forme d'un cylindre aussi haut que large, c'est la forme cylindrique qui se rapproche le plus de la sphère qui est la forme géométrique qui possède la surface la plus petite pour un volume donné.

5. On calcule $E_{p,t}(a_0)$, et on obtient

$$E_{\min} = E_{p,t}(a_0) = 2\pi A a_0^2 + \frac{2AV}{a_0} \quad (5)$$

En utilisant (2), on a $\frac{2AV}{a_0} = 4\pi a_0^2 A$ et donc

$$E_{\min} = 6\pi A a_0^2 \quad (6)$$

6. — Lorsque $a \rightarrow 0$, on a

$$E_{p,t}(a) \approx \frac{2AV}{a} \quad (7)$$

— Lorsque $a \rightarrow \infty$:

$$E_{p,t}(a) \approx 2\pi A a^2 \quad (8)$$

On obtient alors l'allure suivante pour $E_{p,t}(a)$:

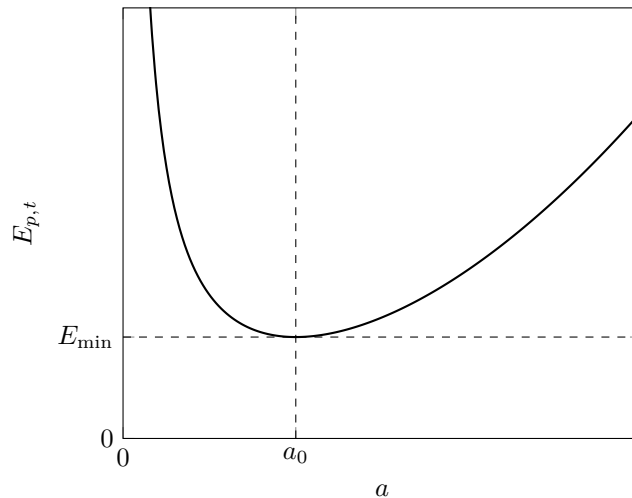


FIGURE 1 – Allure de $E_{p,t}(a)$.

7. On calcule la dérivée seconde de $E_{p,t}$ par rapport à a . On a

$$\frac{d^2 E_{p,t}}{da^2} = 4\pi A + \frac{4VA}{a^3} \quad \text{donc} \quad \frac{d^2 E_{p,t}}{da^2}(a_0) = 12\pi A \quad (9)$$

Autour de a_0 , on peut donc approximer l'énergie potentielle de tension superficielle par :

$$E_{p,t} \approx E_{p,t}(a_0) + \frac{1}{2} \underbrace{12\pi A}_k (a - a_0)^2 \quad (10)$$

Et on obtient bien la même forme que l'énergie potentielle d'un ressort de longueur à vide a_0 et de constante de raideur $k = 12\pi A$. (À la constante additive $E_{p,t}(a_0)$ près)

1.2 Influence de la pesanteur

8. L'énergie potentielle de pesanteur est

$$E_{p,g} = mgz \quad (11)$$

où z est l'altitude du centre de gravité de la goutte.

9. La masse de la goutte est $m = \rho_e V$. En notant que $V = \pi a_0^2 e_0$ et que $e_0 = 2a_0$, on obtient

$$m = 2\pi\rho_e a_0^3 \quad (12)$$

10. On a $z = \frac{e}{2}$ et $e = \frac{V}{\pi a^2}$. On a déjà montré (question précédente) que $V = 2\pi a_0^3$. Et en utilisant l'expression (12) trouvée pour la masse à la question précédente, on trouve finalement que

$$E_{p,g} = mg\frac{e}{2} = 2\pi\rho_e a_0^3 g \frac{V}{2\pi a^2} = \frac{2\pi\rho_e g a_0^6}{a^2} \quad (13)$$

11. On note $E_p = E_{p,t} + E_{p,g}$ et on cherche a_1 tel que

$$\frac{dE_p}{da}(a_1) = 0 = 4\pi A a_1 - \frac{2AV}{a_1^2} - \frac{4\pi\rho_e g a_0^6}{a_1^3} \quad (14)$$

12. On remplace a_1 par $a_0(1 + \varepsilon)$ et en faisant les développements limités à l'ordre 1 suivants

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{(a_0(1 + \varepsilon))^2} = a_0^{-2}(1 + \varepsilon)^{-2} \approx a_0^{-2}(1 - 2\varepsilon) \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_1^3} \approx a_0^{-3}(1 - 3\varepsilon) \quad (15)$$

On obtient l'équation

$$0 = 4\pi A a_0(1 + \varepsilon) - \frac{2AV}{a_0^2}(1 - 2\varepsilon) - \frac{4\pi\rho_e g a_0^6}{a_0^3}(1 - 3\varepsilon) \quad (16)$$

$$0 = \underbrace{4\pi A a_0 - \frac{2AV}{a_0^2}}_{=0} + \left(4\pi A a_0 + \underbrace{\frac{4AV}{a_0^2}}_{=8\pi A a_0}\right)\varepsilon + \frac{12\pi\rho_e g a_0^6\varepsilon}{a_0^3} - \frac{4\pi\rho_e g a_0^6}{a_0^3} \quad (17)$$

$$4\pi\rho_e g a_0^3 = 12\pi a_0(A + \rho_e g a_0^2)\varepsilon \quad (18)$$

Et finalement

$$\varepsilon = \frac{\rho_e g a_0^2}{3(A + \rho_e g a_0^2)} = \frac{1}{3\left(1 + \frac{A}{\rho_e g a_0^2}\right)} \quad (19)$$

13. On trouve $\varepsilon > 0$ ce qui est cohérent avec le fait que la goutte s'écrase sous l'effet de la pesanteur, ce qui fait légèrement augmenter son rayon.
14. Avec les valeurs numériques données en début d'énoncé, on trouve

$$\varepsilon = 4,1 \times 10^{-2} \quad (20)$$

Ce résultat est plutôt cohérent avec l'approximation $\varepsilon \ll 1$ mais on se trouve à la limite. En fonction de la précision souhaitée sur les résultats, il est possible que cette approximation ne soit pas suffisante.

2 Modèle mécanique du rebond de la goutte

15. La conservation de l'énergie mécanique de la goutte lors de la chute de la goutte (les frottements avec l'air sont négligés et on l'étudie dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen) impose que

$$E_m(0) = E_m(t_0) \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \quad (21)$$

16. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse située en haut de la goutte dont la cote sur l'axe z est $e(t)$ et la vitesse est $\vec{v} = \dot{e} \vec{e}_z$. Les forces appliquées sont :

- Son poids $\vec{P} = \vec{0}$ (hypothèse);
- La force de frottement $\vec{F} = -f\dot{e} \vec{e}_z$;
- La force de rappel du ressort $\vec{T} = -k(e(t) - e_0) \vec{e}_z$.

Le PFD projeté sur l'axe z donne alors

$$m\ddot{e} = -f\dot{e} - \underbrace{k(e(t) - e_0)}_{\delta} \quad (22)$$

Que l'on peut mettre sous la forme

$$\ddot{\delta} + \frac{f}{m} \dot{\delta} + \frac{k}{m} \delta = 0 \quad (23)$$

On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$.

17. La solution générale de cette équation (voir cours) est

$$\delta(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) (B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (24)$$

Comme $Q^2 \gg 1$, on a $\omega \approx \omega_0$ et on obtient le résultat demandé

$$\delta(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) (B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)) \quad (25)$$

On trouve B et C en utilisant les conditions initiales $\delta(0) = 0$ et $\dot{\delta}(0) = -v_0$, on trouve $B = 0$ et $C = -\frac{v_0}{\omega_0}$ et on a finalement

$$\delta(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t) \quad (26)$$

18. Comme Q est grand, les oscillations sont faiblement amorties, les maxima de $\delta(t)$ sont ceux du sinus et on a $T_n \approx T_0 + n \frac{2\pi}{\omega_0}$. On a alors

$$\delta(T_n) = \frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 T_0}{2Q} - \frac{2\pi n}{2Q}\right) = \underbrace{\frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 T_0}{2Q}\right)}_{\delta(T_0)} \exp\left(-\frac{n\pi}{Q}\right) \quad (27)$$

On cherche donc n tel que

$$\exp\left(-\frac{n\pi}{Q}\right) = 0,1 \Leftrightarrow n = -\frac{Q}{\pi} \ln(0,1) = \frac{Q}{\pi} \ln(10) \approx 0,73 Q \quad (28)$$

Pour $Q = 5$, on trouve $n \approx 4$.

19. Comme le patin est fixe sur la plaque dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la somme des forces qui s'appliquent dessus est nulle et on a

$$\vec{R} - \vec{F} - \vec{T} = 0 \quad (29)$$

où \vec{F} et \vec{T} sont les forces exercées sur la masse située en haut de la goutte (question 16). On a alors

$$R \vec{e}_z = -f \dot{\delta} \vec{e}_z - k \delta \vec{e}_z \Leftrightarrow R = -f \dot{\delta} - k \delta \quad (30)$$

20. On utilise l'expression trouvée à la question précédente de R et l'expression de $\delta(t)$ trouvée à la question 17 pour exprimer R on a :

$$\delta(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t) \quad (31)$$

et

$$\dot{\delta}(t) = -v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \cos(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{v_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t)}_{\text{négligé car } 2Q \text{ fois plus petit que l'autre terme}} \quad (32)$$

En notant d'autre part que $k = m\omega_0^2$ et $f = m\frac{\omega_0}{Q}$, on trouve l'expression demandée :

$$R = m\omega_0 v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 t)\right) \quad (33)$$

21. Le patin décolle lorsque R s'annule pour la première fois, c'est-à-dire, lorsque

$$\sin(\omega_0 \tau) + \frac{1}{Q} \cos(\omega_0 \tau) = 0 \Leftrightarrow \tan(\omega_0 \tau) = -\frac{1}{Q} \quad (34)$$

Comme on recherche $\tau > 0$, on doit avoir

$$\omega_0 \tau = \pi - \arctan\left(\frac{1}{Q}\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{\omega_0} \left(\pi - \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)\right) \quad (35)$$

L'application numérique donne $\tau = 4,6 \text{ ms}$, ce qui est plutôt en accord avec l'observation O2.

22. Lorsqu'on néglige le terme en $\frac{1}{Q}$ dans l'expression de τ , on trouve

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \left(\frac{2\pi\rho_e a_0^3}{12\pi A}\right)^{1/2} = \pi \sqrt{\frac{\pi\rho_e}{6A}} a_0^{3/2} \quad (36)$$

On obtient bien

$$\log(\tau) = \text{constante} + \frac{3}{2} \log(a_0) \quad (37)$$

23. On voit que les points expérimentaux sont bien alignés suivant une droite dont on peut calculer le coefficient directeur. On trouve un coefficient directeur de

$$\alpha = \frac{\log(1,5 \times 10^{-2}) - \log(1,5 \times 10^{-3})}{\log(2 \times 10^{-3}) - \log(5 \times 10^{-4})} \approx 1,7 \quad (38)$$

Ce résultat ne semble pas trop différent de la prédiction théorique, mais il faudrait voir avec les barres d'erreurs sur les points de mesure car il n'est pas exclu que la différence entre les deux valeurs soit significative.