

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE ET ÉLECTRODYNAMIQUE

JEUDI 14 OCTOBRE 2021 - DURÉE 2H

- ★ La calculatrice est autorisée.
- ★ Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.
- ★ Chaque réponse doit être justifiée.
- ★ Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

I. Étude d'un dispositif optique de photographie

Dans cette partie, nous étudions la prise de photographies numériques terrestres sur un capteur électronique photosensible depuis une fusée.

I.1 Construction de l'image obtenue

Afin d'étudier les images de la surface de la Terre par un dispositif optique, nous nous plaçons dans le cadre de l'optique géométrique et de l'approximation de Gauss. L'espace entre l'objet photographié et la fusée sera considéré comme du vide pour le tracé des rayons lumineux.

- Comment qualifie-t-on les rayons lumineux utilisés dans l'approximation de Gauss ? Quelles sont leurs deux propriétés ?

Le dispositif optique permettant la photographie est modélisé simplement par une lentille sphérique mince convergente \mathcal{L} de distance focale image f' et un capteur.

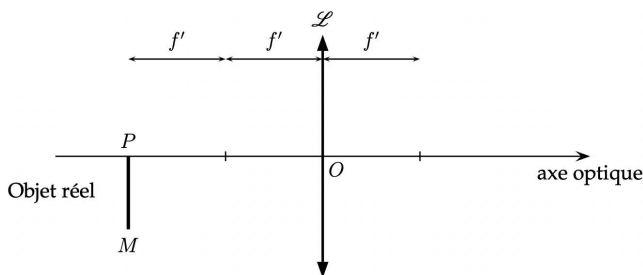


FIGURE 1 - À reproduire sur votre copie

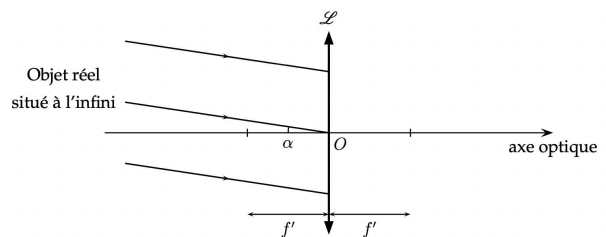


FIGURE 2 - À reproduire sur votre copie

- Sur votre copie, reproduire le schéma de la figure 1 en précisant les foyers objet F et image F'. Tracer avec soin la construction de l'image de l'objet réel PM. Caractériser l'image obtenue (réelle ou virtuelle, agrandie ou rétrécie, de même sens ou inversée) en justifiant numériquement.
- L'objet PM se situe sur Terre à une distance $OP = 35.10^3$ km de la fusée. La distance focale image de la lentille \mathcal{L} est de $f' = 5,0$ m. Où l'image de l'objet PM se situe-t-elle et que vaut la distance OP' ?
- La largeur d'un pixel du capteur est de $d' = 1,0$ μm . Quelle est la dimension d du plus petit objet détectable ?
L'emprise sur le sol de l'image réalisée est un carré de côté $\ell = 70$ km. En déduire le nombre N de pixels nécessaires sur la largeur du capteur.
- Sur votre copie, reproduire le schéma de la figure 2 et compléter avec soin le tracé des rayons lumineux provenant d'un objet réel situé à l'infini dont les rayons sont inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique.

I.2 Influence de la longueur d'onde

Pour un milieu transparent comme le verre de la lentille mince utilisée, dans le domaine du visible, son indice de réfraction n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de Cauchy

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{avec } A = 1,5 \text{ et } B = 3,8 \times 10^2 \text{ nm}^2.$$

La distance focale image f' de la lentille \mathcal{L} est donnée en fonction de son indice n par la relation

$$f'(\lambda) = \frac{C}{n(\lambda) - 1} \quad C \text{ étant une constante positive.}$$

Dans la suite, les notations adoptées sont synthétisées dans la table 1 :

Couleur du rayonnement	Longueur d'onde	Pour la lentille		
		Indice	Distance focale image	Foyer image
bleu	$\lambda_B = 486 \text{ nm}$	n_B	f'_B	F'_B
jaune	λ_J	n_J	f'_J	F'_J
rouge	$\lambda_R = 656 \text{ nm}$	n_R	f'_R	F'_R

TABLE 1 – Résumé des notations

6. Montrer que l'expression de la distance focale image f'_J associée au rayonnement jaune peut s'écrire

$$f'_J = \frac{C}{A - 1} \left(1 + \frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \right)^{-1}$$

7. Estimer λ_J et montrer que $\frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \ll 1$. Simplifier alors l'expression de la question précédente à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 du type $(1 + x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} 1 + \alpha x$.
8. Justifier sans calcul la position des foyers images F'_B et F'_R sur l'axe optique par rapport à F'_J . Représenter sur votre copie un schéma indiquant la position des foyers images F'_B, F'_J, F'_R et le centre optique O de la lentille \mathcal{L} .
9. Qu'est-ce que le stigmatisme ? Est-il vérifié ici ? Quelle en est la conséquence ?

I.3 Défaut d'observation longitudinal

L'aberration chromatique longitudinale d'une lentille (cf. figure 3), que l'on note A_{CL} , est définie par la distance algébrique $A_{CL} = \overline{F'_B F'_R}$ qui sépare les foyers images bleu et rouge.

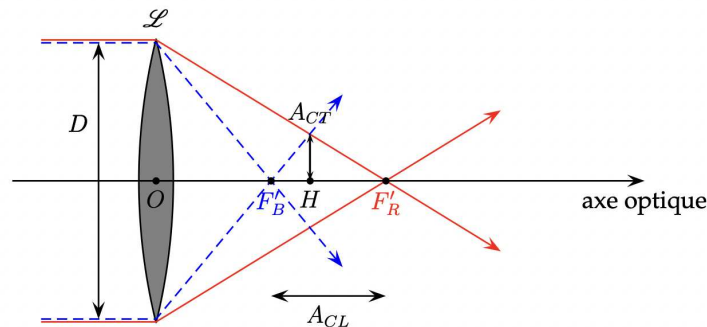


FIGURE 3 - Défauts d'observation longitudinal et transversal

10. Exprimer A_{CL} en fonction de f'_R et f'_B . En supposant que $f'_B f'_R = f_J'^2$, montrer que

$$\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{A_{CL}}{f_J'^2}.$$

On définit le pouvoir dispersif K d'un verre par la relation $K = \frac{n_B - n_R}{n_J - 1}$.

11. Montrer que $\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{K}{f'_J}$. En déduire l'expression de A_{CL} en fonction de K et f'_J . Faire l'application numérique pour $K = 1,4 \times 10^{-2}$ et $f'_J = 5,0$ m.

I.4 Défaut d'observation transversal

L'aberration chromatique transversale A_{CT} du dispositif optique est définie comme le rayon de la plus petite tache lumineuse produite par la superposition des faisceaux rouge et bleu provenant de rayons parallèles à l'axe optique et passant par les extrémités de la lentille \mathcal{L} de diamètre D (cf. figure 3).

12. À partir d'une étude géométrique sur la figure 3, établir deux expressions de A_{CT} en fonction de D , f'_B , f'_R et des distances algébriques $\overline{F'_B H}$ et $\overline{H F'_R}$.

13. Montrer que
$$A_{CT}(f'_B + f'_R) = \frac{D}{2} A_{CL}$$

En supposant que $f'_J = (f'_B + f'_R)/2$, déterminer l'expression de A_{CT} en fonction du pouvoir dispersif K et du diamètre D de la lentille.

I.5 Correction des défauts

Afin de limiter ces aberrations, une lentille sphérique mince \mathcal{L}_2 de centre optique O_2 en verre flint (verre plus dispersif que la lentille précédente) est ajoutée. L'indice n_2 du verre flint suit également la loi de Cauchy

$$n_2(\lambda) = A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2} \quad A_2 \text{ et } B_2 \text{ étant deux constantes positives et } A_2 > 1.$$

Sa distance focale image est donnée par la relation

$$f'_2(\lambda) = \frac{C_2}{n_2(\lambda) - 1} \quad C_2 \text{ étant une constante dont on cherche à déterminer le signe.}$$

Cette deuxième lentille est accolée à la première lentille \mathcal{L} de centre optique O . On suppose que les points O et O_2 sont confondus.

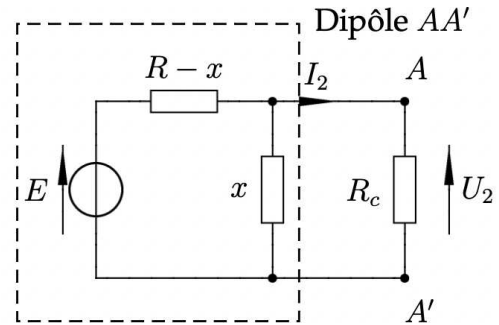
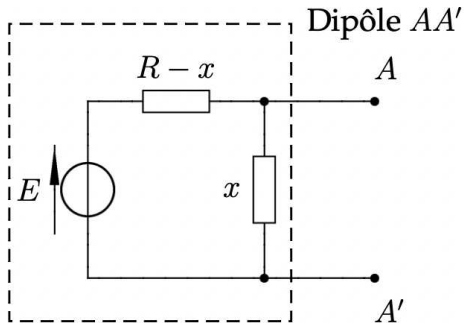
La distance focale image du système $\{\mathcal{L} + \mathcal{L}_2\}$ formé par les deux lentilles accolées est notée f'_T .

14. Établir la relation entre f'_T , f' et f'_2 .
15. Déterminer l'expression de $\frac{1}{f'_T}$ en fonction de A , B , C , A_2 , B_2 , C_2 et λ .
16. Établir une relation entre C , B , C_2 et B_2 permettant de supprimer totalement les aberrations chromatiques transversales et longitudinales.
17. Quel est nécessairement le signe de C_2 ? En déduire la nature convergente ou divergente de la lentille \mathcal{L}_2 .

II. Montage potentiométrique

On souhaite réaliser à partir d'une source de tension parfaite de force électromotrice constante E ($E > 0$), une source de tension continue de force électromotrice réglable αE (avec $0 \leq \alpha \leq 1$).

Cette source de tension servira à alimenter une résistance dite « de charge » R_c (cf. figure 2 ci-dessous).



1. On réalise le montage de la figure 1 ci-dessus à l'aide d'un potentiomètre de résistance maximale R : $0 \leq x \leq R$.

Déterminer la force électromotrice $E_{Th} = \alpha E$ et la résistance interne r du modèle équivalent Thévenin au dipôle AA' (dipôle entouré par des pointillés).

Exprimer α en fonction de x et R et en déduire l'expression de r en fonction de R et α .

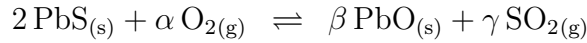
2. On branche maintenant R_c aux bornes du dipôle AA' précédent (figure 2 ci-dessus).
Déduire de la question précédente la puissance P_2 dissipée dans la résistance de charge R_c en fonction de E , α , R_c et R .
3. Calculer la puissance P_1 fournie par la source de tension E au reste du circuit en fonction de E , α , R_c et R .

4. En déduire le rendement en puissance du montage $\rho = \frac{P_2}{P_1}$ en fonction de α , R_c et R .
5. Sur votre calculette puis votre copie, tracer l'allure de $\rho(\alpha)$ pour $R_c = 80 \, \Omega$ et $R = 1,0 \, k\Omega$.
Pour quelle valeur de α le rendement ρ est-il maximum ?
Quelle est sa valeur pour $\alpha = 3/4$? Que pensez-vous de la valeur obtenue ?

III. Grillage de la galène

La galène est le principal minerai de plomb. Elle est constituée essentiellement de sulfure de plomb, espèce chimique de formule PbS et de masse molaire $M = 239,3 \text{ g.mol}^{-1}$.

Lors du traitement du minerai dans le but d'obtenir du plomb, on procède tout d'abord à une opération appelée grillage, dont l'équation de réaction est donnée ci-dessous :



Cette opération est réalisée à 700°C , température à laquelle la constante d'équilibre de la réaction a pour valeur $K^0 = 3,0 \cdot 10^{46}$.

1. Rappeler les règles de conservation que doivent respecter les nombres stœchiométriques dans l'équation symbolisant une réaction chimique, et donner les valeurs de α , β et γ .

Dans une enceinte de volume initial $V_0 = 1,00 \text{ m}^3$, on introduit une masse $m_0 = 100 \text{ g}$ de galène PbS , ainsi que de l'air sous pression standard p^0 et à température de $T = 700^\circ\text{C}$.

Grâce à une paroi coulissante, la pression est maintenue constante dans l'enceinte pendant toute la transformation. Grâce à un thermostat, la température est maintenue constante.

2. Déterminer les quantités de matière apportées de galène, de dioxygène et de diazote dans le système initial : $n_{\text{PbS},0}$ et $n_{\text{O}_2,0}$ et $n_{\text{N}_2,0}$.
3. Montrer que le système précédent n'est pas initialement à l'équilibre chimique et déterminer son sens d'évolution.
4. Déterminer l'état final du système : nombre de phases en présence, quantité de matière de solide(s), pressions partielles dans la phase gazeuse.
5. Quelle masse maximale de galène m'_0 peut-on espérer convertir en oxyde de plomb dans ces conditions ? En excès de galène, quelle sera la pression partielle résiduelle en dioxygène gazeux ?

DONNÉES :

- ★ La pression standard est $p^0 = 1 \text{ bar}$.
- ★ Les gaz sont considérés comme parfaits.
- ★ La constante des gaz parfaits vaut : $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- ★ L'air pourra être modélisé comme un mélange de dioxygène et de diazote, de fractions molaires respectives $x_{\text{O}_2} = 0,20$ et $x_{\text{N}_2} = 0,80$.

