DM1 : Optique géométrique

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

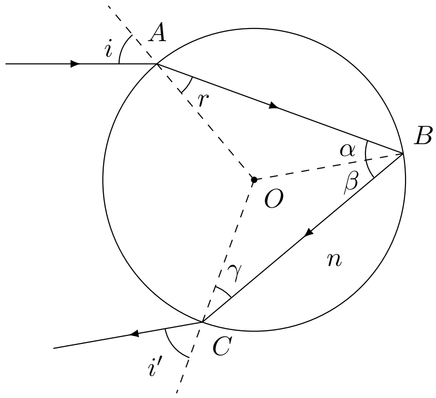
Exercice 1 : L'arc-en-ciel

L'objectif de ce problème est d'expliquer comment se forme un arc-en-ciel lorsque la pluie et le soleil sont simultanément présents.

1 Premier arc-en-ciel

1. Énoncer les lois de Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction entre deux milieux homogène isotropes d'indices n_1 et n_2.
2. Qu'est-ce que le phénomène de réflexion totale ? Calculer l'angle d'incidence limite au-delà duquel il y a réflexion totale lorsque les deux milieux sont l'eau d'indice 1.33 et l'air d'indice 1.

Un arc-en-ciel se produit lorsque les rayons du soleil sont réfléchis par des gouttes d'eau sphériques en suspension dans l'air. Le schéma suivant représente le trajet suivi par un rayon lumineux qui subit une seule réflexion à l'intérieur de la goutte d'eau.



3. Donner la relation entre l'angle de réfraction r à l'intérieur de la goutte, i et n.
4. Le rayon subit en B une réflexion sur l'interface eau-air. Cette réflexion peut-elle être totale ?
5. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = r$, et en déduire que $i' = i$.
6. Exprimer la déviation D subie par le rayon lumineux entre l'entrée et la sortie de la goutte en fonction de i et r.

Les rayons du soleil arrivant parallèlement les uns aux autres, ils éclairent parallèlement toute la goutte et couvrent donc tous les angles d'incidence entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Un rayon arrivant sur la goutte avec un angle d'incidence nul subira une déviation de 180°. Nous allons montrer qu'il existe un angle de déviation minimum D_m.

7. L'angle de réfraction r est une fonction de l'angle d'incidence i. En dérivant l'équation obtenue à la question 3, montrer que
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = r'(i) = \frac{\cos(i)}{n\cos(r(i))}$$
8. Déterminer l'expression de $r(i)$.
9. L'angle de déviation minimum D_m est atteint pour un angle d'incidence i_m tel que $\frac{\mathrm{d}D(i)}{\mathrm{d}i}(i_m) = 0$. Montrer alors que i_m vérifie la relation :
$$\frac{\cos(i_m)}{n\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sin(i_m)}{n}\right)\right)} = \frac{1}{2}$$
10. En utilisant l'égalité $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, montrer que l'on obtient
$$\cos^2(i_m) = \frac{n^2-1}{3}$$

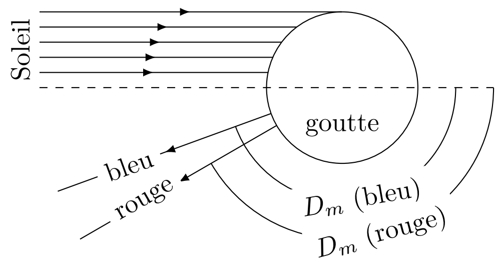
11. En déduire que la déviation minimale est donnée par la formule :

$$D_m = D(i_m) = 2 \arccos\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right) - 4 \arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}\right) + \pi$$

12. Calculer la valeur numérique de D_m.

On supposera dans la suite que la majeure partie de l'intensité renvoyée par la goutte d'eau l'est dans la direction D_m, il y a accumulation de la lumière dans cette direction.

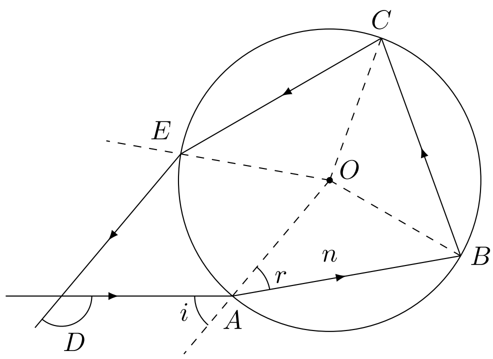
En réalité, l'indice de l'eau augmente avec la longueur d'onde λ, donc la déviation minimale de la lumière diminue avec λ. Sur le schéma ci-dessous on représente une goutte d'eau sur laquelle arrive les rayons du Soleil ainsi que les rayons extrêmes réfléchis pour de la lumière rouge et de la lumière bleue.



13. En vous appuyant sur cette représentation et sur un schéma aussi clair que possible, indiquer dans quelle direction un observateur doit regarder pour voir un arc-en-ciel, expliquer sa forme d'arc de cercle, et la présence de la couleur rouge à l'extérieur de l'arc. (on pourra indiquer quelles sont les gouttes d'eau qui pourront renvoyer de la lumière rouge vers l'observateur et quelles sont celles qui lui renvoient de la couleur bleue)

2 Deuxième arc-en-ciel

Un rayon entrant dans une goutte d'eau peut y subir deux réflexions avant d'en sortir, on obtient le trajet représenté sur le schéma suivant :



14. Exprimer la déviation D du rayon lumineux en fonction de r et i.
15. On peut montrer que cette fois il existe un angle de déviation maximum $D_M < D_m$ avec $D_M(rouge) > D_M(bleu)$. Expliquer en vous appuyant sur un schéma pourquoi cela conduit à l'apparition d'un second arc-en-ciel au dessus du premier dont l'ordre des couleurs est inversé par rapport au premier.
16. Expliquer pourquoi ce second arc-en-ciel est moins lumineux que le premier.
17. Expliquer en vous appuyant éventuellement sur un schéma l'existence de la *bande sombre d'Alexandre*, une bande moins lumineuse située entre les deux arcs-en-ciel.

Exercice 2 : Principe de Fermat

On se propose de démontrer les lois de Descartes de la réfraction à partir du principe de Fermat qui stipule que pour aller d'une point A à un point B, la lumière emprunte le chemin pour lequel le temps de parcours est minimal. On ne s'intéresse ici qu'à la relation entre l'angle d'incidence et l'angle de réfraction. On ne cherchera par à montrer que le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.

On se place dans la situation suivante où le point $A(0, y_A)$ se trouve dans un milieu d'indice n_1 et le point $B(x_B, y_B)$ dans un milieu d'indice n_2. L'interface entre les deux milieux est supposée plane, dans le plan (x, z). On étudie le problème dans le plan (x, y). On suppose que le rayon allant de A à B passe par le point M de l'interface de coordonnées $x, 0$.

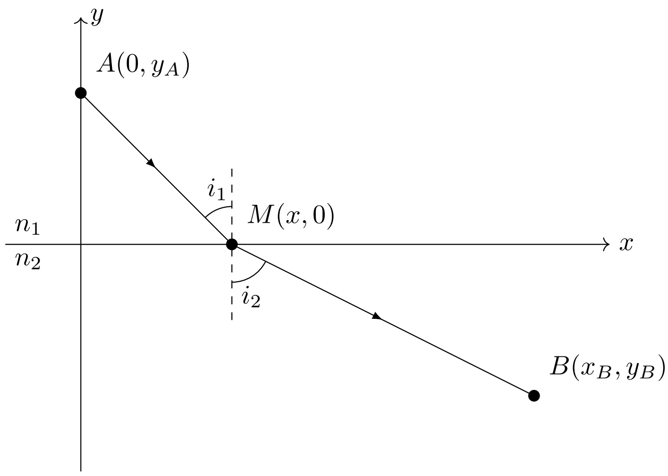


Figure 1 – Schéma de la situation étudiée

1. Exprimer le temps de parcours de la lumière T pour aller de A à B en fonction des coordonnées des points A, B et M.
2. Déterminer l'équation vérifiée par les coordonnées des points A, B, et M pour que le temps de parcours de la lumière soit minimal.
3. En déduire que les angles i_1 et i_2 doivent satisfaire la loi de Snell-Descartes de la réfraction.