DS7 : Mécanique, chimie, particules chargées

- Durée : 4h.
- La calculatrice est autorisée.
- Chaque réponse doit être justifiée.
- Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : TOBOGGAN AQUATIQUE

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Ce problème propose d'étudier leur dimensionnement.

1 Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h, et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

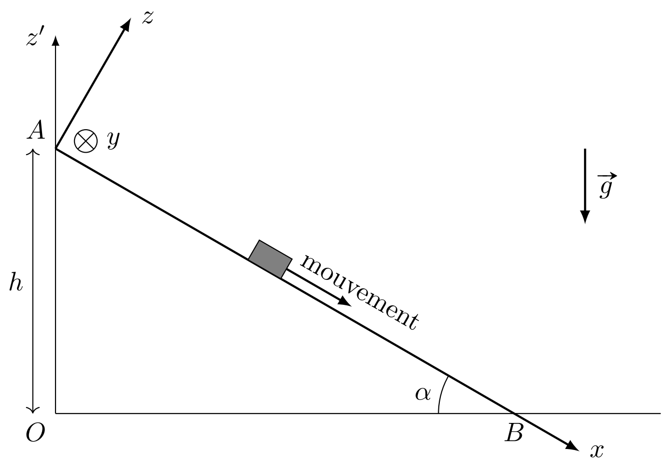

FIGURE 1 – Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de WaveIsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33\,\mathrm{m}$ et $\alpha \approx 45°$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tous les frottements.

1. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse v_B atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g. Faire l'application numérique.
2. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ seulement. La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x, \tag{1}$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

3. À l'aide du principe fondamental de la dynamique (aussi appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de N en fonction de m, g, et de l'angle α.
4. Exprimer le travail de la force $\vec{R}$, pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur AB et de T. Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ, h, m, g et de l'angle α.

5. À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ, h, g et de l'angle α .

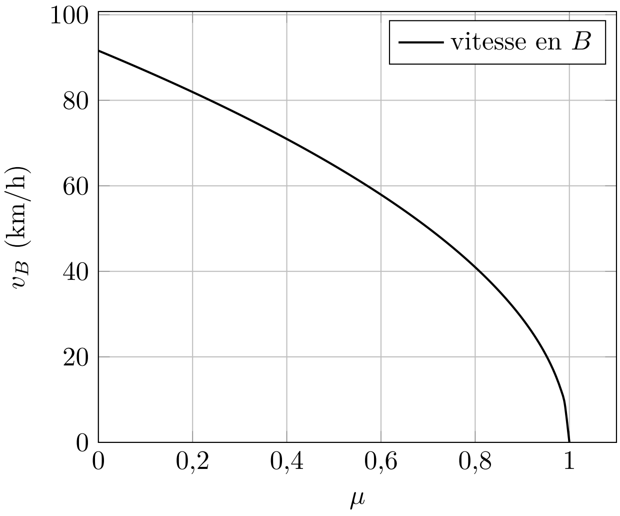

Figure 2 – Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ, pour $\alpha = 45°$.

6. Donner l'expression du coefficient du frottement μ en fonction de v_B. Faire l'application pour $v_B = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Vérifier que le résultat trouvé est compatible avec la figure 2.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

7. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression littérale en fonction de v_B, μ et g et une valeur numérique. (On prendra les valeurs numériques de la question 6)

2 Étude d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

2.1 Préliminaire : Étude des oscillations dans une cuvette

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette cylindrique de rayon a et de centre O. Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 3. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

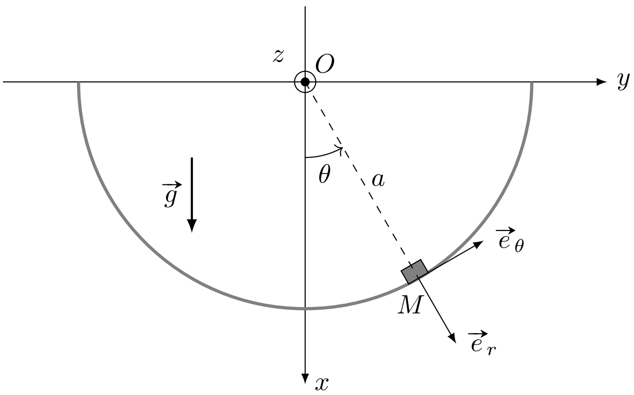

Figure 3 – le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz

8. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} de la masse m en fonction de m, a, g et θ. On choisira $E_{pp} = 0$ au point O.

9. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse m en fonction de m, a, et $\dot\theta = \frac{d\theta}{dt}$
10. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la masse m au cours du temps ? En déduire une équation différentielle satisfaite par $\theta(t)$.
11. Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation. Quel type d'équation différentielle obtient-on ? Donner la solution de l'équation simplifiée en supposant $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot\theta(0) = 0$.
12. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.
13. Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction des données du problème.

2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0. Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté figure 4. On se place dans l'approximation où ce plan Oxy, qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

— Il est possible de mener l'étude dans le plan Oxy uniquement (figure 4, droite).

— Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y$.

— Dans le référentiel du plan Oxy, alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids $\vec{P}$, à $\vec{F}$, et à la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan (on néglige tout frottement).

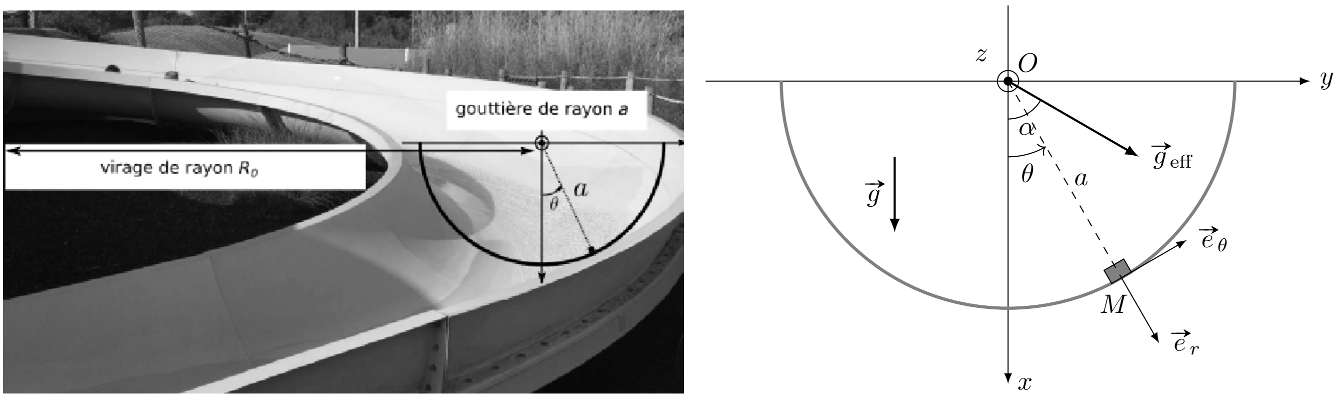

FIGURE 4 – Gauche : Photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

14. Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec $\vec{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g, R_0 et v_0.
15. Donner également l'expression de l'angle α entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe Ox en fonction de g, R_0 et v_0. Calculer $\|\vec{g}_{\text{eff}}\|$ et α pour $v_0 = 25\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ et $R_0 = 4{,}0\,\text{m}$. On se placera dans ces conditions par la suite.
16. Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous-partie 2.1, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question. Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas-ci.

Exercice 2 : TUBE CATHODIQUE

Dans ce problème, on se propose d'étudier un système d'affichage à tube cathodique, et notamment de petits tubes cathodiques embarqués sur le casque d'un pilote d'avion servant à afficher des informations relatives au vol.

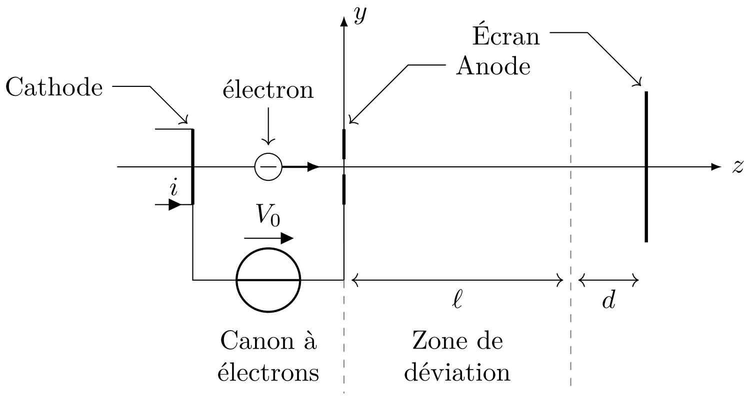

FIGURE 1 – Schéma de l'afficheur à tube cathodique étudié. L'échelle des distances n'est pas respectée.

1 Canon à électrons

Le canon à électrons est constitué d'une électrode métallique plane (appelée cathode) chauffée et émettant des électrons par effet thermoélectronique. La cathode est au potentiel 0 V. Les électrons sont émis avec une vitesse négligeable et sont ensuite accélérés sous l'effet d'un champ électrique, créé par la différence de potentiel régnant entre la cathode émettrice et une seconde électrode métallique plane (l'anode), parallèle à la cathode, portée au potentiel $V_0 = 2\,\mathrm{kV}$. On suppose, pour l'instant, que le faisceau électronique est parfaitement parallèle à l'axe de révolution Oz du tube cathodique, perpendiculaire aux deux électrodes et de diamètre négligeable. L'anode est percée en son centre pour permettre au faisceau d'électrons de passer.

1. Montrer que l'on peut négliger le poids des électrons devant la force de Lorentz dans le canon à électrons. Pour répondre à cette question, on pourra estimer l'ordre de grandeur des données manquantes.
2. Exprimer la vitesse v_0 acquise par les électrons lorsqu'ils franchissent l'anode en fonction de V_0, m et e, où m désigne la masse de l'électron et e la charge élémentaire.
3. Calculer v_0 numériquement.

2 Dispositif de déviation du faisceau

Le faisceau sortant du canon à électrons est supposé homocinétique (tous les électrons possèdent la même vitesse v_0) et est confondu avec l'axe de révolution Oz du tube cathodique. Nous étudions ici le dispositif permettant de dévier le faisceau dans le but de lui faire frapper un point quelconque de l'écran. Ce dispositif est constitué de deux paires de bobines plates identiques d'axes respectifs Ox et Oy dites « de Helmholtz » permettant de soumettre le faisceau à un champ magnétique constant et uniforme dans une zone de longueur $\ell = 5{,}0\,\mathrm{mm}$. Le faisceau traverse ainsi une zone plongée dans un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y$. On admettra qu'en dehors de cette zone, le champ magnétique est nul.

4. On suppose que le champ magnétique appliqué est d'environ 2 mT. Montrer qu'on peut à nouveau négliger la poids de l'électron par rapport à la force de Lorentz.
5. Écrire et projeter l'équation du mouvement d'un électron traversant cette zone.
6. Montrer que la vitesse d'un électron dans la zone de déviation a une norme constante.
7. On suppose que les composantes de vitesse v_x et v_y sont très petites devant v_z. Quelle est alors la valeur de v_z ?
8. Utiliser cette approximation pour simplifier les équations du mouvement obtenues à la question 5.
9. En déduire l'expression des composantes v_{xf} et v_{yf} de la vitesse d'un électron à la sortie de la zone de champ magnétique non nul, ainsi que l'expression des déviations transversales Δx_{mag} et Δy_{mag} subies par un électron du fait du champ magnétique. On donnera ces expressions en fonction de e, m, ℓ, B_x et/ou B_y et éventuellement de v_0.
10. Entre la sortie de la zone de déviation et l'écran, l'électron traverse une zone de longueur $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ où le champ magnétique est nul. Le spot obtenu sur l'écran peut être dévié au maximum de $\Delta x = \Delta y = \pm 4{,}5\,\mathrm{mm}$ selon les deux axes. Calculer numériquement la valeur maximale des composantes B_x et B_y.

On cherche dans cette question à évaluer la qualité de l'approximation faite dans la question 7

11. En vous appuyant sur un résultat vu en cours, ou en vous basant sur un raisonnement qualitatif, indiquez sans faire de calcul quelle sera la forme exacte de la trajectoire suivie par les électrons dans la zone de déviation.

12. En intégrant directement et sans approximation les équations différentielles régissant les composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$, que pouvez-vous dire des composantes v_{xf} et v_{yf} de la vitesse d'un électron à la sortie de la zone de champ magnétique non nul ?
13. Toujours sans faire d'approximation, montrer que $v_z(t)$ est régie par une équation différentielle du second ordre et donner l'expression de $v_z(t)$. On pourra introduire la grandeur ω_c définie par : $\omega_c = \frac{e}{m}\sqrt{B_x^2 + B_y^2}$.
14. En déduire que le temps de vol Δt de l'électron dans la zone de champ magnétique non nul est donné par l'équation : $\sin(\omega_c \Delta t) = \frac{\ell \omega_c}{v_0}$.
15. Déduire de ce qui précède l'expression et la valeur numérique de la composante v_{zf} à la sortie de la zone de champ magnétique non nul. On utilisera les valeurs de B_x et B_y calculée à la question 10. Conclure.

Données :

- Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- Masse d'un électron : $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Exercice 3 : Dosage d'un mélange d'acides

L'acide éthanoïque est un intermédiaire important de la chimie organique industrielle. Il sert notamment à la fabrication d'esters. C'est aussi l'acide principal contenu dans le vinaigre.

Données :

- Numéros atomiques : hydrogène, $Z = 1$; carbone $Z = 6$; oxygène $Z = 8$.
- Produit ionique de l'eau à 298 K : $K_e = 10^{-14}$;
- Constante d'acidité dans l'eau à 298 K : $K_a\left(CH_3COOH/CH_3COO^-\right) = 10^{-4,8}$;
- Pour les concentrations utilisées ici, les conductivités molaires λ_i sont données dans le tableau suivant. Conductivités ioniques molaires limites à 298 K :

Ion	Na^+	H_3O^+	HO^-	CH_3COO^-	Cl^-
$\lambda_i(\mathrm{S\,cm^{-1}\,mol^{-1}})$	50	350	199	41	76

1. Donner la configuration électronique des atomes d'hydrogène H, de carbone C et d'oxygène O. Indiquer pour chacun quels sont les électrons de valence.
2. Écrire une représentation de Lewis pour la molécule d'acide éthanoïque.

L'éthanol (CH_3CH_2OH) contenu dans le vin s'oxyde facilement en acide éthanoïque (CH_3COOH). On obtient alors une solution appelée vinaigre. On souhaite déterminer ici la quantité d'acide éthanoïque contenu dans un litre de vinaigre à l'aide d'un dosage conductimétrique.

Mode opératoire :

On prépare un mélange M d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique et de vinaigre. Un litre de mélange M contient $V_1 = 50\,\mathrm{m\ell}$ de vinaigre et $n_1 = 2{,}5 \times 10^{-2}$ mol d'acide chlorhydrique. On prélève $V_0 = 10\,\mathrm{m\ell}$ de ce mélange, on y ajoute $90\,\mathrm{m\ell}$ d'eau distillée.
On dose par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration C_b. Le dosage est suivi par conductimétrie. On trace la conductivité de la solution, σ, en fonction du volume de solution d'hydroxyde de sodium ajouté, V_b. La courbe obtenue, $\sigma = f(V_b)$ (figure 1) présente trois parties : (AB), (BC), et (CD).

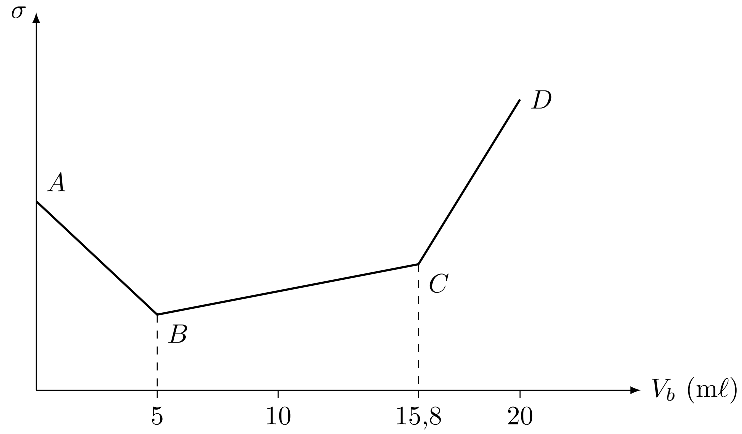

Figure 1 – Dosage conductimétrique du mélange M par une solution d'hydroxyde de sodium.

3. Partie (AB)
   (a) Écrire l'équation bilan de la réaction de dosage qui se produit dans cette partie et calculer sa constante d'équilibre.
   (b) Faire le bilan des ions majoritaires présents en solution au point A ; puis le bilan des ions qui apparaissent et disparaissent au cours du dosage de A à B. Justifier qualitativement pourquoi la conductivité de la solution diminue.
   (c) Exprimer la conductivité en fonction des conductivités molaires et des concentrations des espèces ioniques majoritaires dans la solution après l'addition du titrant.
   (d) Exprimer ces concentrations en fonction de C_b , V_b , n_0 (quantité de matière initiale d'acide chlorhydrique dans le volume V_0) et V_T (volume total de la solution).
   (e) En considérant que dans cette partie de la courbe, le volume total de la solution ne varie pas, retrouver que $\sigma = f(V_b)$ est une droite de pente négative.
4. Partie (BC)
   (a) Écrire l'équation-bilan de la réaction de dosage qui se produit dans cette partie et calculer sa constante d'équilibre.
   (b) Faire le bilan des ions majoritaires présents en solution au point B ; puis le bilan des ions qui apparaissent et disparaissent au cours du dosage de B à C . Justifier qualitativement pourquoi la conductivité de la solution augmente.
5. Que se passe-t-il après le point C ? Pourquoi la conductivité augmente-t-elle ? Justifier que la pente de CD soit supérieure à celle de BC.
6. Calculer la concentration C_M en acide éthanoïque dans le mélange M, sachant que $C_b = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}$.
7. Calculer la concentration C_V en acide éthanoïque dans le vinaigre.
8. Calculer le pH d'un vinaigre où la concentration en acide éthanoïque est égale à $C_0 = 1{,}0\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}$.