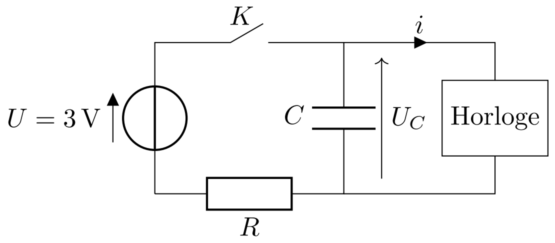
TD4 : Circuits linéaires du premier ordre

Exercice 1 : Réveil

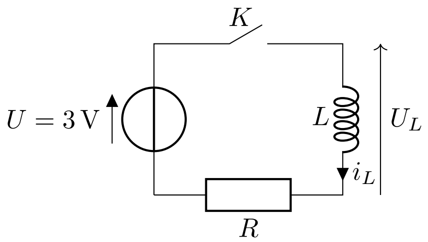


On souhaite fabriquer un réveil qui reste à l'heure lorsqu'il est débranché. Le circuit d'horloge consomme une intensité i constante et nécessite une tension minimum U_l. Le schéma électrique de l'ensemble est représenté sur la figure ci-contre.

- En fonctionnement normal, lorsque le réveil est branché, l'interrupteur K est fermé.
- Lorsque le réveil est débranché, l'interrupteur K est ouvert.

1. On considère que le réveil est branché depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint, exprimer la tension U_C aux bornes du condensateur en fonction de U, R et i.
2. Comment doit-on choisir R pour que la tension U_C soit aussi proche que possible de la tension U du générateur ? On considérera désormais cette condition remplie et en régime permanent $U_C = U$.
3. On débranche le réveil (on ouvre K) à $t = 0$, décrire qualitativement l'évolution de la tension $U_C(t)$.
4. Exprimer l'évolution temporelle de la tension $U_C(t)$.
5. Exprimer l'instant t_l où le circuit d'horloge cesse de fonctionner en fonction de i, C, U et U_l.
6. Faire l'application numérique avec $U = 3\,\text{V}$, $i = 2{,}5\,\mu\text{A}$, $U_l = 1{,}5\,\text{V}$, et $C = 1\,\text{F}$. Donner t_l en heures.

Exercice 2 : Surtension aux bornes d'une bobine



On considère le circuit ci-contre où une bobine est branchée à un générateur avec par l'intermédiaire d'une résistance en série. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur K et on observe l'évolution de l'intensité du courant dans la bobine

1. Décrire qualitativement comment évolue l'intensité i_L au cours du temps. Justifier la réponse.
2. Écrire l'équation différentielle satisfaite par l'intensité $i_L(t)$
3. Résoudre l'équation différentielle précédente pour trouver l'évolution temporelle de $i_L(t)$.

On suppose que l'interrupteur K reste fermé *suffisamment longtemps* pour que le régime permanent soit atteint. puis on ouvre l'interrupteur.

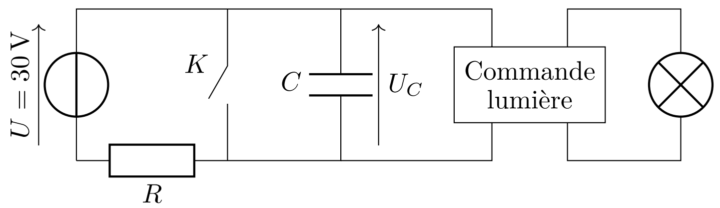
4. Préciser ce que signifie *suffisamment longtemps*. Donner, en fonction de R et L, une estimation du temps pendant lequel l'interrupteur doit rester fermé.
5. Exprimer l'énergie W_L emmagasinée dans la bobine.
6. L'intensité du courant qui traverse un interrupteur idéal ouvert est nulle. L'interrupteur K peut-il être considéré comme idéal ?
7. Justifier que lorsqu'on ouvre l'interrupteur K la tension aux bornes de L augmente considérablement. Quels problèmes cela peut-il poser ? À quoi ce phénomène peut-il servir ?

Exercice 3 : Minuterie

On souhaite étudier le circuit de minuterie d'éclairage ci-dessous.

Le composant chargé de commander l'allumage de la lumière est un comparateur qui maintient la lumière allumée tant que sa tension d'entrée est inférieure à une tension limite U_{lim} que l'on prend égale à $20\,\text{V}$.

Ce composant possède une alimentation électrique propre qui fournit l'énergie nécessaire à l'allumage de la lampe. On admettra qu'il est sans effet sur le fonctionnement du circuit RC.



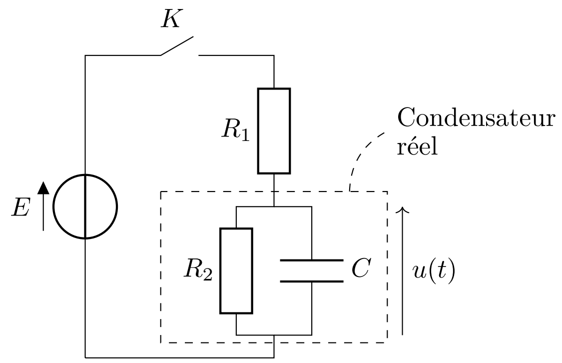
À $t = 0$ on ouvre l'interrupteur K, le condensateur est totalement déchargé.

1. Expliquer qualitativement pourquoi ce circuit se comporte comme une minuterie d'éclairage. Quels sont les paramètres qui influencent le temps d'allumage de la lampe ?
2. Établir l'équation différentielle donnant l'évolution de la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur au cours du temps.
3. Résoudre l'équation différentielle précédente en faisant apparaître une constante de temps τ. Tracer l'évolution de la tension $U_C(t)$ en faisant apparaître τ, et U. Comment trouver graphiquement la durée T d'éclairage ?
4. Donner l'expression de la durée T d'allumage de la lampe en fonction de τ, U et U_{lim}. Calculer T pour $R = 100\,\text{k}\Omega$ et $C = 200\,\mu\text{F}$

Exercice 4 : Résistance de fuite d'un condensateur

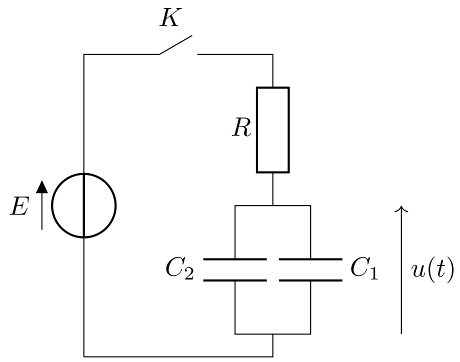
Dans un condensateur réel, le matériau qui sépare les armatures métalliques n'est pas un isolant parfait et il est traversé par un courant de fuite. On modélise un condensateur réel par un condensateur idéal C en parallèle avec une résistance R_2.

À $t = 0$ le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur K. On étudie la charge du condensateur par un générateur de tension E à travers la résistance R_1.



1. Tracer qualitativement l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$. La réponse devra être correctement justifiée.
2. Quelle doit être la valeur de R_2 pour un condensateur idéal ? Tracer sur le même graphique l'évolution de $u(t)$ dans le cas d'un condensateur idéal.
3. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la tension $u(t)$.
4. Résoudre l'équation différentielle précédente et trouver l'expression de $u(t)$ en fonction de E, R_1, R_2 et t.
5. Donner l'expression du temps nécessaire pour que la tension aux bornes de C soit divisée par 100 lorsque l'alimentation électrique est coupée. Donner une estimation de ce temps pour $C = 100\,\mu\text{F}$ et $R_2 = 100\,\text{M}\Omega$.

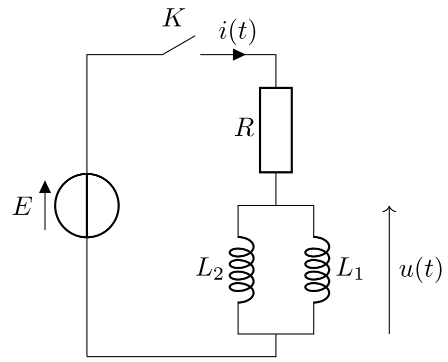
Exercice 5 : Associations de condensateurs



On considère le circuit ci-contre avec deux condensateurs différents associés en parallèle. À $t = 0$ les deux condensateurs sont totalement déchargés et on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.
2. Trouver un composant équivalent aux deux condensateurs en parallèle.

Exercice 6 : Associations de bobines

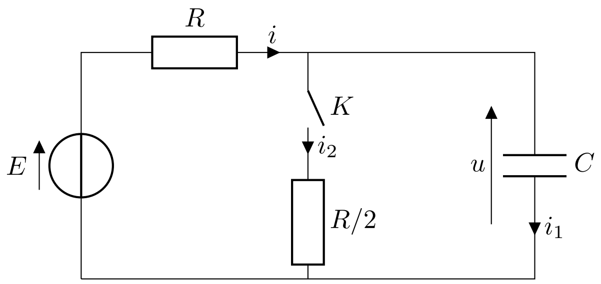


On considère le circuit ci-contre avec deux bobines différentes associées en parallèle. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $i(t)$.
2. Trouver un composant équivalent aux deux bobines en parallèle.

Exercice 7 : Régime transitoire

Considérons le circuit ci-dessous. On note i l'intensité dans la résistance R, i_1 l'intensité dans le condensateur de capacité C, i_2 l'intensité dans la résistance $R/2$ et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.



On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps.

1. Préciser les valeurs de i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^-$ juste avant la fermeture de l'interrupteur.
2. Préciser les valeurs de i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^+$.
3. Même question quand t tend vers l'infini.
4. En utilisant la loi des nœuds, exprimer l'intensité i en fonction de u.
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. Montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{3u}{RC} = \frac{E}{RC} \tag{1}$$

   Faire apparaître le temps caractéristique τ dans l'équation différentielle.

6. Résoudre cette équation puis tracer l'allure de $u(t)$. Vérifier qu'elle est cohérente avec les valeurs initiales et finales déterminées précédemment.