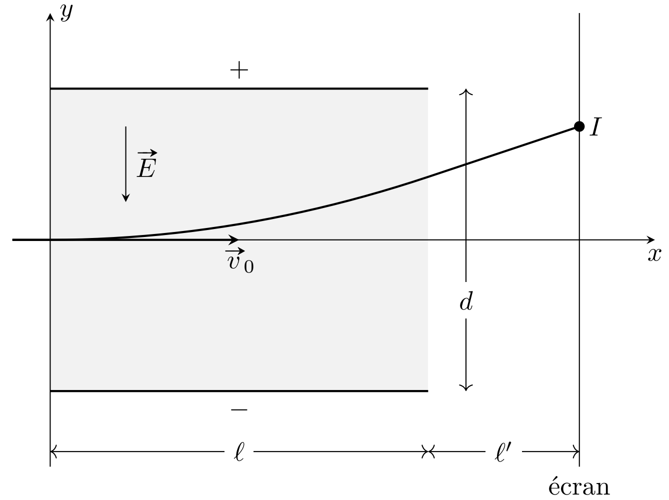
TD13 : Mouvement de particules chargées

Exercice 1 : Oscilloscope analogique

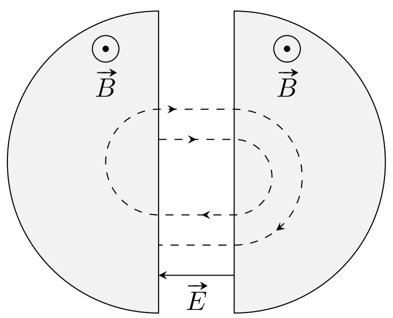
On considère deux plaques métalliques séparées par une distance d entre lesquelles on applique une tension U que l'on cherche à déterminer. Le champ électriques est supposé uniforme entre les deux armatures et nul en dehors. Un canon envoie un faisceau d'électrons de vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, de masse m_e et de charge $q = -e$.



1. Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ en fonction de U et d.
2. Établir l'équation de la trajectoire de l'électron entre les armatures métalliques en fonction de v_0, U, d, m_e et e.
3. En déduire l'équation de la trajectoire en sortie de la zone de champ électrique. Faire apparaître ℓ.
4. Montrer que l'ordonnée y du point d'impact du faisceau d'électrons est proportionnelle à la tension U. Quelle est l'intérêt de cette propriété dans un oscilloscope ?
5. Donner l'allure de la tension $U(t)$ à appliquer entre les plaques assurant la déviation horizontale (selon z) du spot pour assurer un balayage périodique à vitesse constante sur l'écran.

Exercice 2 : Cyclotron

Dans un accélérateur de type *cyclotron*, on incurve la trajectoire des particules à l'aide de champs magnétiques uniformes dans deux zones en forme de "D", appelées « dés » en français ou « dees » en anglais.



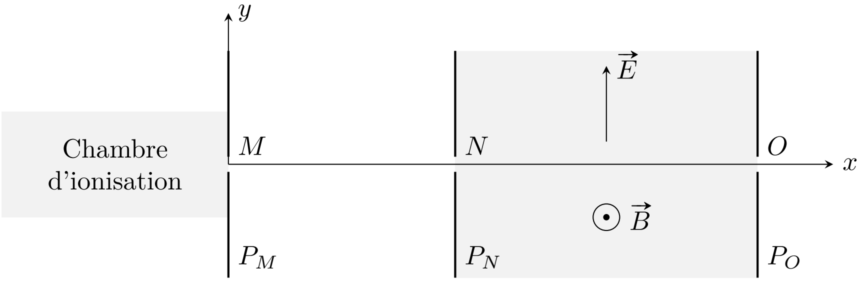
Entre les dés, se trouve une petite zone d'accélération où règne un champ électrostatique uniforme, qui accélère les particules en ligne droite. Après une accélération, la particule entre dans un dé , où elle parcourt un demi-cercle avant de revenir dans la zone d'accélération, dans laquelle on a, entre temps, inversé le sens de $\vec{E}$. Les rayons des arcs de cercle croissent jusqu'à ce que la particule quitte le cyclotron.

La valeur du champ magnétique uniforme et constant dans les dés est $B = 1\,\mathrm{T}$. L'amplitude de la tension sinusoïdale générant le champ électrostatique entre les dés est $U_m = 2{,}5 \times 10^3\,\mathrm{V}$. On, étudie un cyclotron qui accélère des protons de charge e et de masse m.

1. Montrer que dans un dé, le mouvement du proton se fait à vitesse constante (il est uniforme). Calculer le rayon du demi-cercle en fonction de la vitesse d'entrée dans le dé, notée v_0 et de $\omega_c = \frac{eB}{m}$.
2. Exprimer le temps mis par un proton pour parcourir un demi-tour dans un dé. Ce temps dépend-il de la vitesse du proton ? Calculer sa valeur numérique.
3. En déduire la fréquence f de la tension à appliquer entre les dés pour que le champ accélère au mieux les protons (on considère que le temps de passage entre les dés est négligeable devant les autres temps). Cette fréquence s'appelle la *fréquence cyclotron*.
4. Exprimer puis calculer numériquement en J puis en eV l'augmentation d'énergie cinétique d'un proton à chaque accélération.
5. La vitesse d'injection des protons étant quasi nulle, on désire que leur vitesse atteigne $25 \times 10^3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Calculer le nombre de tours que doit faire un proton dans le cyclotron ainsi que le temps nécessaire à cette opération.
6. Quel est le rayon du dernier arc de cercle parcouru par les protons lorsqu'ils ont atteint cette vitesse ? Commenter la valeur obtenue.

Exercice 3 : Selecteur d'isotopes

À la sortie d'une chambre d'ionisation, des ions néon $^{20}_{10}\mathrm{Ne}^+$et $^{22}_{10}\mathrm{Ne}^+$, de masses respectives m_1 et m_2, pénètrent avec une vitesse quasiment nulle par un trou M dans l'espace compris entre deux plaques métalliques verticales planes P_M et P_N, entre lesquelles est établie une différence de potentiel accélératrice $U = V_M - V_N$.



1. Les ions arrivent en N avec une vitesse horizontale. Établir l'expression littérale de cette vitesse. Calculer numériquement la vitesse des deux types d'ions à partir des données suivantes :
   — $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
   — $U = 2{,}00 \times 10^4\,\mathrm{V}$
   — masse d'un proton $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
2. Après le passage du trou N, les ions pénètrent dans une région où ils sont soumis à l'action simultanée de deux champs constants et uniformes :
   — un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$;
   — un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_y$.

   B étant fixé, montrer que, pour une certaine valeur de E , les ions $^{20}_{10}\mathrm{Ne}^+$peuvent avoir un mouvement rectiligne uniforme entre les points N et O. Donner la valeur numérique de E pour $B = 0{,}10\,\mathrm{T}$.
3. Qu'advient-il des ions $^{22}_{10}\mathrm{Ne}^+$dans ce cas ? Quelle est l'application du dispositif envisagé ?

Exercice 4 : Champs électrique et magnétique croisés

On considère un électron M injecté sans vitesse initiale dans une zone où règne un champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E} = E\vec{e}_x$ et un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{e}_z$ perpendiculaire à $\vec{E}$.

1. Déterminer un système d'équations différentielles couplées satisfaites par les coordonnées x et y de l'électron.
2. En intégrant l'équation sur $\ddot{y}$, exprimer $\dot{y}(t)$ en fonction de $x(t)$.
3. Utiliser l'expression de $\dot{y}(t)$ trouvée pour résoudre l'équation différentielle sur $\ddot{x}$. Montrer que $x(t)$ est
$$x(t) = \frac{E}{B\omega_c}\big(\cos(\omega_c t) - 1\big) \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{eB}{m} \tag{1}$$
4. En déduire que l'expression de $y(t)$ est
$$y(t) = \frac{E}{B}\left(\frac{1}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - t\right) \tag{2}$$
5. Représenter graphiquement l'allure de la trajectoire de l'électron. Quelle est la vitesse moyenne de l'électron ?