

DM4 : Cinétique chimique et filtrage

Vous devez rendre une copie par groupe de 3 (ou 2, mais je préfère 3). Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : BOIRE OU CONDUIRE...

I. Passage de l'alcool à travers la paroi stomacale

- 1 La vitesse de disparition de l'alcool dans l'estomac est $v_1 = -\frac{dC_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$.
- 2 Si v_1 suit une loi cinétique d'ordre 1, on doit avoir $v_1 = k_1 C_1 = -\frac{dC_1}{dt}$ d'où $C_1(t) = C_0 \exp(-k_1 t)$. On doit donc avoir $\ln(C_1) = \ln(C_0) - k_1 t$. La courbe représentant $\ln(C_1)$ en fonction de t doit donc être une droite de pente $-k_1$. On vérifie graphiquement cette propriété avec les données de l'énoncé et on trouve $k_1 = 2,8 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.
- 3 à $t = 18 \text{ min}$, il reste $0,2 \times 0,25 = 5 \times 10^{-2} \text{ mol}$ d'éthanol dans l'estomac, ce qui signifie que $n_2 = 1 - 5 \times 10^{-2} = 0,95 \text{ mol}$ d'éthanol sont passées dans le sang. La concentration d'éthanol dans le sang est donc $C_2 = \frac{n_2}{V_2} = 2,38 \times 10^{-2} \text{ mol/l}$.
- 4 La quantité d'alcool qui a disparu dans l'estomac est $n = C_0 V_1 - C_1 V_1 = V_1(C_0 - C_1) = V_1 x$, et est identique à la quantité apparue dans le sang. La concentration en alcool à un instant t dans le sang est $C_2 = \frac{n}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} x$. Donc la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $v = \frac{dC_2}{dt} = \frac{V_1}{V_2} \frac{dx}{dt} = \frac{V_1}{V_2} v_1$.

II. Oxydation de l'alcool dans le sang

- 5 La vitesse d'oxydation de l'alcool dans le sang est $v_2 = -\frac{dC_2}{dt}$.
- 6 Pour une loi cinétique d'ordre 0, l'évolution temporelle de la concentration est linéaire, on doit avoir $C_2(t) = C_2(0) - k_2 t$. On trace $C_2(t)$ en fonction de t et on trouve bien une droite de coefficient directeur $-k_2$, ce qui donne $k_2 = 1,18 \times 10^{-6} \text{ mol l}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

III. Boire ou conduire...

- 7 Concentration maximale admise : $C_{\max} = \frac{0,5}{46} = 1,09 \times 10^{-2} \text{ mol/l}$
- 8 La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $\frac{dC_2}{dt} = v - v_2 = \frac{V_1}{V_2} v_1 - k_2 = \frac{V_1}{V_2} k_1 C_1 - k_2$
- 9 Comme $C_1(t) = C_0 \exp(-k_1 t)$ on obtient $\frac{dC_2}{dt} = \frac{V_1}{V_2} k_1 C_0 \exp(-k_1 t) - k_2$.
Que l'on peut intégrer en $C_2(t) = K - \frac{V_1}{V_2} C_0 \exp(-k_1 t) - k_2 t$. La condition initiale $C_2(0) = 0$ permet de déterminer que $K = \frac{V_1}{V_2} C_0$ ce qui nous donne l'expression demandée :

$$C_2 = C_0 \frac{V_1}{V_2} (1 - \exp(-k_1 t)) - k_2 t \quad (1)$$

En buvant ses deux bières à 8%, le sujet absorbe 66 cl et 0.9 mole d'alcool.

- 10 l'instant t_{\max} où la concentration C_2 est maximale est défini par $\frac{dC_2}{dt}(t_{\max}) = 0$
ce qui donne $t_{\max} = -\frac{1}{k_1} \ln\left(\frac{1}{C_0} \frac{k_2}{k_1} \frac{V_2}{V_1}\right) \simeq 1421 \text{ s} \Rightarrow t_{\max} \simeq 23,7 \text{ min}$
- 11 On trouve $C_2(t_{\max}) \simeq 2,0 \times 10^{-2} \text{ mol/l} > C_{\max}$. L'automobiliste ne peut donc pas conduire !
- 12 Au delà de t_{\max} la courbe s'apparente à une droite de pente $-k_2$. On peut donc en déduire qu'il aura éliminé les $2,0 \times 10^{-2} - 1,09 \times 10^{-2} = 0,91 \times 10^{-2} \text{ mol/l}$ en $t = \frac{0,91 \times 10^{-2}}{1,18 \times 10^{-6}} \simeq 7700 \text{ s}$ soit $t \simeq 2 \text{ h } 08 \text{ min}$.

Exercice 2 : ÉTUDE ET UTILISATION D'UN FILTRE

I – Étude du filtre

1. — Lorsque $\omega \rightarrow 0$: Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et on a un pont diviseur de tension formé par R_1 et R_2 . La tension de sortie est donnée par

$$\underline{u}_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \underline{u}_e \quad (1)$$

- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, le condensateur se comporte comme un fil et on a directement

$$\underline{u}_s = \underline{u}_e \quad (2)$$

2. On commence par déterminer l'impédance équivalente de R_1 et C associés en parallèle

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega} \quad (3)$$

Puis on écrit la relation entre \underline{u}_s et \underline{u}_e avec la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{R_2}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_1} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}} \underline{u}_e \quad (4)$$

finalement, on trouve

$$\underline{H}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + jR_1C\omega}{1 + j\frac{R_2R_1C}{R_1 + R_2}\omega} \quad (5)$$

On a bien la forme demandée, avec $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, $\omega_1 = \frac{1}{R_1C}$ et $\omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}$.

3. Avec les expressions de ω_1 et ω_2 trouvées à la question précédente, on a directement $\omega_1 = \alpha\omega_2$.
 4. Il est évident que $\alpha < 1$ et donc on a directement $\omega_1 < \omega_2$.
 5. On commence par écrire l'expression du gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log \left(\alpha \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} \right) = 20 \log(\alpha) + 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right) - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \right) \quad (6)$$

- Lorsque $\omega \ll \omega_1$, on a aussi $\omega \ll \omega_2$ et

$$G_{\text{dB}} \approx 20 \log(\alpha) \quad (7)$$

Il y a une asymptote horizontale.

- Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, le gain devient

$$G_{\text{dB}} \approx 20 \log(\alpha) + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \quad (8)$$

L'asymptote a une pente de 20 dB/décade.

- Lorsque $\omega \gg \omega_2$, on a aussi $\omega \gg \omega_1$ et le gain s'écrit

$$G_{\text{dB}} \approx 20 \log(\alpha) + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) \quad (9)$$

$$\approx 20 \log(\alpha) + 20 \log \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = 20 \log(\alpha) - 20 \log(\alpha) = 0 \quad (10)$$

Et on a une asymptote horizontale à nouveau.

6. Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, on peut écrire la fonction de transfert comme

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{\alpha}{\omega_1} j\omega \quad (11)$$

La multiplication par $j\omega$ montre le caractère dérivateur du filtre.

7. — Lorsque $\omega \rightarrow 0$, la fonction de transfert peut être approximée par

$$\underline{H}(\omega) \approx \alpha \in \mathbb{R} \quad (12)$$

On a donc $\varphi = 0$.

- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, la fonction de transfert devient

$$\underline{H}(\omega) \approx 1 \quad (13)$$

et on a à nouveau $\varphi = 0$

8. Le diagramme de Bode (et l'analyse qualitative) montre que le filtre laisse passer les signaux de haute fréquence et atténue (partiellement) les signaux de basse fréquence. C'est donc un filtre passe-haut.
 9. On lit la fréquence de coupure graphiquement, on trouve $f_c = 800 \text{ Hz}$ et $\omega_c = 5 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.
 10. On calcule $G_{\text{dB}}(\omega_2)$:

$$G_{\text{dB}}(\omega_2) = 20 \log(\alpha) + 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right) - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_2} \right)^2 \right) \quad (14)$$

$$= 20 \log(\alpha) + 10 \log \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) - 10 \log(2) \quad (15)$$

Comme on a supposé que $\omega_1 \ll \omega_2$, alors $\alpha \ll 1$ et $\frac{1}{\alpha^2} \gg 1$. Donc

$$G_{\text{dB}}(\omega_2) \approx 20 \log(\alpha) - 20 \log(\alpha) - 10 \log(2) \approx -3 \text{ dB} \quad (16)$$

On montre donc que $\omega_c \approx \omega_2$

11. On trouve α en regardant le gain du filtre lorsque $\omega \rightarrow 0$ et on trouve $\alpha = 0,02$.
 12. On a $\omega_1 = \alpha \omega_2 \approx 100 \text{ rad s}^{-1}$
 13. On commence par calculer $\varphi(\omega_1)$ et $\varphi(\omega_2)$:

$$\varphi(\omega_1) = \arg(\underline{H}(\omega_1)) = \arg \left(1 + j \frac{\omega_1}{\omega_1} \right) - \arg \left(1 + j \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \quad (17)$$

$$\approx \arctan(1) - \arctan(0) \approx \frac{\pi}{4} \quad (18)$$

$$\varphi(\omega_2) = \arg(\underline{H}(\omega_2)) = \arg \left(1 + j \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) - \arg \left(1 + j \frac{\omega_2}{\omega_2} \right) \quad (19)$$

$$\approx \frac{\pi}{2} - \arctan(1) \approx \frac{\pi}{4} \quad (20)$$

On a utilisé le fait que $\omega_2 \gg \omega_1$. On cherche alors les fréquences pour lesquelles $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et on retrouve $f_1 = 16 \text{ Hz}$ et $f_2 = 800 \text{ Hz}$, ce qui donne à nouveau $\alpha = 0,02$.

14. Si on place en sortie du filtre une résistance du même ordre de grandeur que R_2 , tout se passe comme si on changeait la résistance R_2 pour une résistance $R'_2 < R_2$. Dans ce cas, ω_1 ne change pas, mais α devient plus petit et donc ω_2 augmente. On augmente donc la fréquence de coupure du filtre et on diminue donc sa bande passante.

II – Utilisation du filtre

15. On utilise les diagrammes de Bode pour déterminer le gain et le déphasage des deux composantes du signal d'entrée :

- à 10 Hz , on a $G_{\text{dB}} = -32,5$ donc $G = 10^{-\frac{32,5}{20}} \approx 2,4 \times 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 30^\circ = 0,52 \text{ rad}$.
- à 50 Hz , on a $G_{\text{dB}} = -24$ donc $G = 10^{-\frac{24}{20}} \approx 6,3 \times 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 65^\circ = 1,13 \text{ rad}$.

Le signal d'entrée est $e(t) = A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$ et le signal de sortie sera

$$s(t) = A(2,4 \times 10^{-2} \sin(\omega_1 t + 0.52) + 6,3 \times 10^{-2} \sin(\omega_2 t + 1.13)) \quad (21)$$

16. Le gain à 100 Hz vaut -18 dB , ce qui correspond à un gain $G = 0.13$. Le déphasage à cette fréquence est d'environ 70° . L'amplitude de la sinusoïde en sortie du filtre est

$$A' = V_{\text{eff}} \sqrt{2} G \approx 1,4 \text{ V} \quad (22)$$

17. L'offset se trouvant à fréquence nulle, il aura un gain de $\alpha = 0,02$, et on aura en sortie un offset de 0,1 V.

18. On utilise la définition de la valeur efficace :

$$E_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^2(t) dt} \quad (23)$$

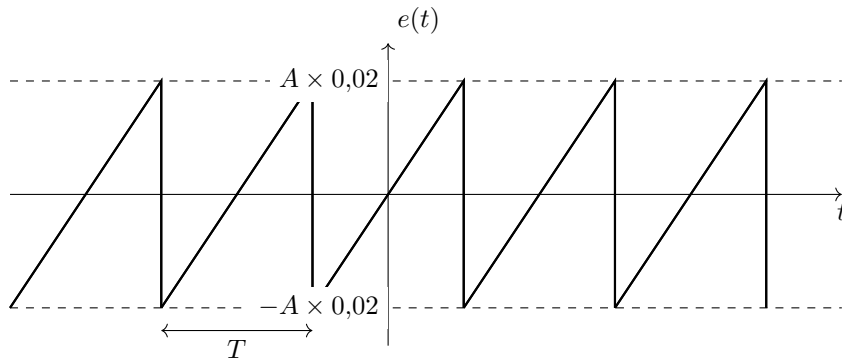
avec

$$e(t) = \frac{2A}{T}t \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (24)$$

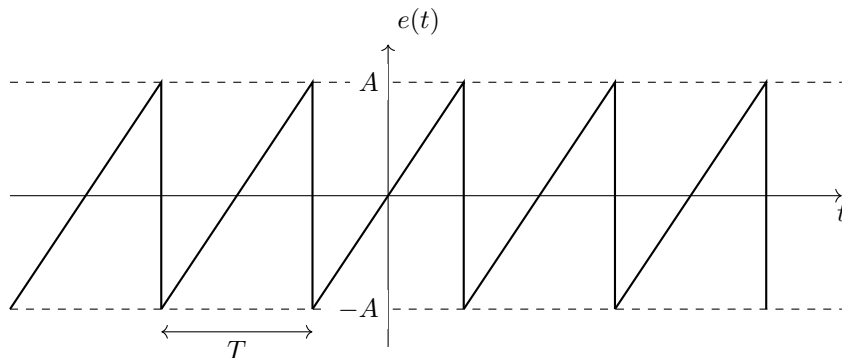
On a donc

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{4A^2}{T^2} t^2 dt} = \sqrt{\frac{4A^2}{T^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}} = \sqrt{\frac{A^2}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}} \quad (25)$$

19. Pour $T = 1$ s, la période est très grande et $\omega \ll \omega_1$. Le gain sera donc de $\alpha = 0,02$, le signal de sortie sera atténué par rapport au signal d'entrée.



Pour $T = 10 \mu\text{s}$, la période est très faible et $\omega \gg \omega_2$. Le gain est donc de 1 et le signal est inchangé.



Pour $T = 10$ ms, on a $f = 100$ Hz et on se trouve dans la zone où le filtre a un comportement dérivateur, la sortie sera donc proportionnelle à la dérivée de l'entrée et on aura un signal de la forme :

