

## DS5 : Filtrage et ondes – corrigé

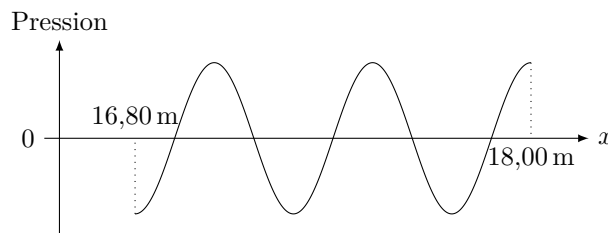
### Exercice 1 : MIRAGES ACOUSTIQUES

## 1 La propagation du son

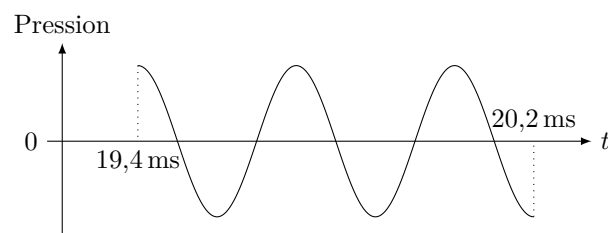
- Une onde correspond à la propagation dans l'espace (phénomène spatial) de la perturbation (phénomène temporel) d'une propriété physique d'un milieu.  
Pour une onde acoustique, la propriété physique du milieu qui est perturbée est la pression de l'air (ou d'un autre milieu). On peut aussi décrire une onde acoustique par le déplacement des particules (atomes ou molécules) qui le constituent.
- Le milieu de propagation d'une onde mécanique est forcément un milieu matériel (pas le vide). Les tremblements de terre et les vagues sont deux autres exemples d'ondes mécaniques.
- Les fréquences audibles par l'homme ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Les ultrasons sont des ondes sonores de fréquence supérieure à 20 kHz. On utilise les ultrasons dans l'échographie médicale. On les utilise aussi pour nettoyer des objets.
- La vitesse de la lumière étant très supérieure à celle du son, on peut considérer que le temps de parcours de la lumière de l'éclair est négligeable. Le temps séparant l'éclair du tonnerre correspond alors au temps de parcours du son. L'énoncé indique qu'il faut diviser le temps par 3 pour obtenir la distance en km, donc le son parcourt  $d = 1 \text{ km}$  en  $\delta t = 3 \text{ s}$ . Ainsi on obtient  $c_{\text{air}} = d/\Delta t \simeq 330 \text{ m s}^{-1}$ .

## 2 Principe du sonar

- Un sonar émet une onde sonore qui est en partie réfléchiée par un obstacle qu'elle rencontre. En mesurant le temps séparant l'émission de l'onde de l'écho reçu le sonar peut déterminer la distance qui le sépare de l'obstacle.
- La distance  $L$  est donnée par  $2L = c_{\text{mer}} \Delta t_e$ , soit  $L \simeq 29,1 \text{ m}$
- L'onde émise comporte 2,5 périodes et dure  $800 \mu\text{s}$ . La durée d'une période est donc  $T = 3,20 \times 10^{-4} \text{ s}$ , et la fréquence est  $f = 1/T = 3,12 \text{ kHz}$
- La longueur spatiale  $\Delta x$  de l'impulsion est  $\Delta x = c_{\text{mer}} \Delta t_i = 1,20 \text{ m}$ .
- À  $t = 12,0 \text{ ms}$ , le début de l'onde (la partie émise en premier) se trouve en  $x_1 = t c_{\text{mer}} = 18,00 \text{ m}$  et la fin de l'onde se trouve en  $x_2 = x_1 - \Delta x = 16,80 \text{ m}$ . L'onde est représentée sur la figure ci-dessous.



- Le détecteur placé sur le second sous-marin recevra l'onde émise par le premier avec un retard  $\Delta t_p = L/c_{\text{mer}} = 19,4 \text{ ms}$  dû à la propagation de l'onde. La fin de l'onde est reçue  $800 \mu\text{s}$  plus tard, soit à  $t_f = 20,2 \text{ ms}$ . L'onde reçue est représentée sur la figure ci-dessous.



### 3 Son et température

11. À la température  $T_0 = 298 \text{ K}$ , on a  $c_0 = 347,0 \text{ m/s}$ .
12. Lorsque la température augmente de  $1 \text{ K}$ , la vitesse du son vaut  $c_1 = 347,6 \text{ m/s}$ , et la variation de vitesse est donc  $\Delta c = 0,6 \text{ m/s}$ .

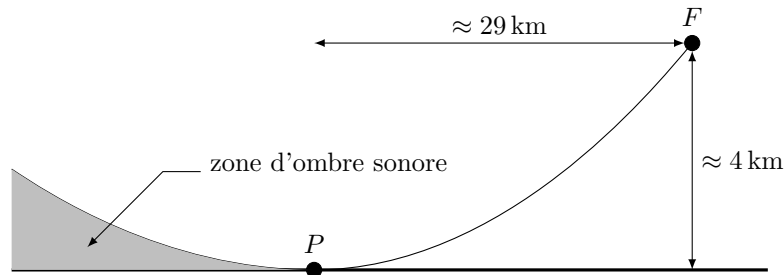
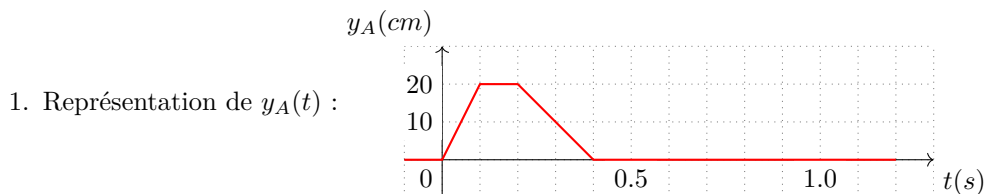


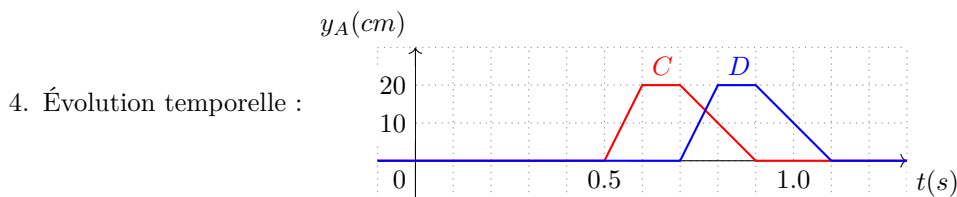
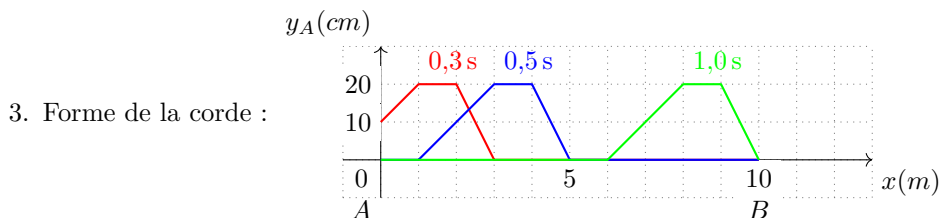
FIGURE 1 – Un orage silencieux. On représente la position d'une personne  $P$  et de la foudre  $F$ .

13. On a représenté sur la figure 1 l'allure de la trajectoire du son du tonnerre, dans le cas où il est à la limite d'être perçu par l'homme ainsi que la zone d'«ombre sonore», correspondant aux lieux où le tonnerre n'est pas perceptible. On appelle cela un mirage acoustique car comme pour les mirages optiques, le son ne se déplace pas en ligne droite et semble venir d'un endroit différent de sa source réelle.

#### Exercice 2 : ONDE SUR UNE CORDE



2. À  $t = 0,12 \text{ s}$  le point  $A$  est immobile  $v$  est nulle. À  $t = 0,3 \text{ s}$  sa vitesse est  $v = -1 \text{ m/s}$  et à  $t = 0,5 \text{ s}$  il est immobile, sa vitesse est donc nulle.



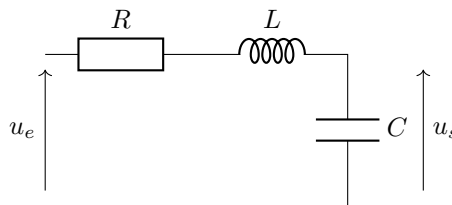
5. Le temps mis par une impulsion pour faire un aller-retour est  $T = \frac{2(x_B - x_A)}{c} = 2 \text{ s}$ . Les impulsions sont donc émises à  $f = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$ .
6. Lorsque la longueur de la corde augmente, la fréquence diminue, lorsque la célérité de l'onde augmente, la fréquence augmente.
7. Les paramètres qui influencent la célérité de l'onde sont principalement la tension de la corde et le type de corde (masse linéique).

**Exercice 3 : FILTRE PASSE-BAS DU DEUXIÈME ORDRE**

- D'après la question, la tension de sortie peut être prise aux bornes de  $R$ ,  $L$  ou  $C$ . Dans les trois cas, déterminons la nature du filtre
  - Si la tension de sortie est prise aux bornes de  $R$ , à basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, le courant qui circule dans le circuit est nul et la tension de sortie est nulle. À haute fréquence, c'est la bobine qui se comporte comme un interrupteur ouvert et pour la même raison la tension de sortie est nulle. Dans ce cas on a un filtre **passe-bande**.
  - Si la tension de sortie est prise aux bornes de  $L$ , la tension de sortie est nulle à basse fréquence car la bobine se comporte comme un fil. À haute fréquence la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert, le condensateur comme un fil, le courant est nul dans le circuit et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée. C'est un filtre **passe-haut**.
  - Si la tension de sortie est prise aux bornes de  $C$ , la tension de sortie est nulle à haute fréquence car le condensateur se comporte comme un fil. À basse fréquence le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, la bobine comme un fil, le courant est nul dans le circuit et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée. C'est un filtre **passe-bas**.

Il faut donc prendre la tension de sortie aux bornes de  $C$  pour avoir un filtre passe-bas.

- On a le circuit suivant



On utilise la formule du pont diviseur de tension pour trouver

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (1)$$

En faisant apparaître  $\omega_0$  et  $Q$ , on obtient

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \quad (2)$$

- On a

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \quad (3)$$

et

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = -10 \log \left( \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \right) \quad (4)$$

- Pour exprimer plus simplement la phase de la fonction de transfert, on écrit  $\underline{H}(\omega)$  sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{jQ\frac{\omega_0}{\omega}}{jQ\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right) - 1} = \frac{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}}{1 - jQ\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (5)$$

La phase de la fonction de transfert est

$$\varphi = \arg(\underline{H}(\omega)) = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left( Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \quad (6)$$

5. On écrit l'expression de  $G_{dB}(\omega)$  pour  $\omega \ll \omega_0$  et pour  $\omega \gg \omega_0$ .

— Pour  $\omega \ll \omega_0$  :

$$G_{dB}(\omega) \approx 0 \quad (7)$$

Et on a une asymptote horizontale à basse fréquence

— Pour  $\omega \gg \omega_0$  :

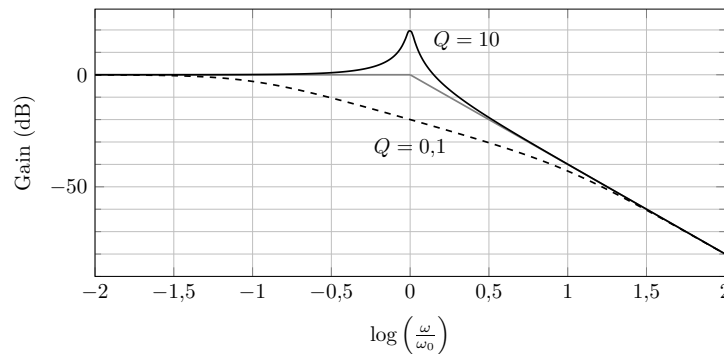
$$G_{dB}(\omega) \approx -40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (8)$$

On a donc une asymptote de pente  $-40 \text{ dB/décade}$  passant par l'origine.

— Pour  $\omega = \omega_0$

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log(Q) \quad (9)$$

6. On trace le diagramme de Bode, on remarque que pour  $Q = 10$  il y a une surtension en sortie par rapport à l'entrée.



7. Le gain à la pulsation de coupure vaut  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , on a donc

$$(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = 2 \Leftrightarrow y^2 + y \left( \frac{1}{Q^2} - 2 \right) - 1 = 0 \quad (10)$$

On a posé  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $y = x^2$ . La seule solution positive de cette équation est

$$y = x^2 = \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q^2} - 1 \right)^2} + 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad (11)$$

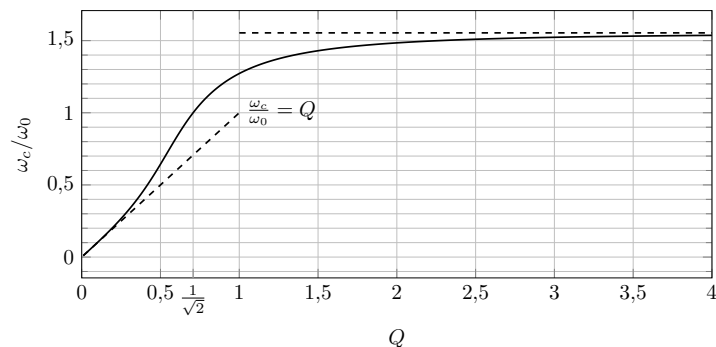
8. — Lorsque  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on a  $y = 1$  et  $\omega_c = \omega_0$  ;

— lorsque  $Q \gg 1$ , on a  $y \approx \sqrt{2} + 1$  et  $\omega_c \approx \sqrt{\sqrt{2} + 1} \omega_0$  ;

— lorsque  $Q \ll 1$ , on a  $y \approx \sqrt{1 + (K - 1)^2} + 1 - K$ , avec  $K = \frac{1}{2Q^2}$ .

Comme  $K \gg 1$  on a  $y \approx \sqrt{1 + K^2} - K = K \sqrt{1 + \frac{1}{K^2}} - K \approx K \left( 1 + \frac{1}{2K^2} \right) - K = \frac{1}{2K} = Q^2$   
et finalement  $\omega_c = Q\omega_0$ .

9. L'étude précédente nous permet de tracer l'évolution suivante



10. Ce filtre ne peut être utilisé ni en intégrateur ni en dérivateur car son diagramme de Bode ne fait pas apparaître d'asymptote de pente  $\pm 20$  dB/décade, par contre, comme tous les filtres passe-bas, il peut être utilisé comme moyenneur car si la fréquence fondamentale du signal d'entrée est suffisamment grande, seule sa composante continue est transmise par le filtre.
11. Un filtre du second ordre a l'avantage d'avoir une coupure plus raide ( $-40$  dB/décade) qu'un filtre du premier ordre ( $-20$  dB/décade).

#### Exercice 4 : FILTRE DE COLPITTS

1. — Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , la bobine se comporte comme un fil et les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, on a alors le circuit équivalent suivant :

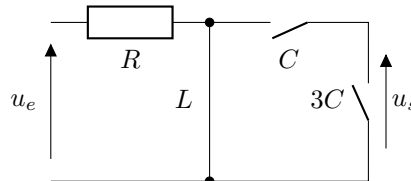


FIGURE 1 – Schéma du filtre de Colpitts étudié

Donc la tension aux bornes de  $L$  est nulle. **Par contre**, on ne peut pas en déduire que la tension  $u_s$  est nulle, car comme  $C$  se comporte comme un interrupteur ouvert, aucun courant ne circule dans cette branche et le condensateur  $3C$  pourrait rester chargé et on aurait une tension continue en sortie.

Pour répondre à cette question, on supposera donc que la fréquence est très faible sans être parfaitement nulle. Dans ce cas les deux condensateurs forment un pont diviseur de tension et la tension de sortie est plus faible que la tension aux bornes de  $L$  qui est très proche de 0. On en conclut donc qu'à basse fréquence, la tension de sortie est proche de 0.

— Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , les condensateurs se comportent comme des fils et on a directement  $u_s = 0$ .

2. L'impédance complexe équivalente à deux condensateurs associés en série est

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} = \frac{C_1 + C_2}{j(C_1 + C_2)\omega} = \frac{1}{j\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\omega} = \frac{1}{jC_{eq}\omega} \quad (1)$$

donc

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (2)$$

3. Dans le circuit on voit que  $L$  est en parallèle avec  $C$  et  $3C$  associés en série, la pulsation propre du circuit est

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_{eq}} = \frac{1}{L \times \frac{3C}{4}} \quad \text{d'où} \quad \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}} \quad (3)$$

4. Pour déterminer la fonction de transfert, nous allons commencer par trouver la tension aux bornes de  $L$  avec un pont diviseur de tension (formé par  $R$  et  $\underline{Z}_{eq}(L, C, 3C)$ ), puis on trouvera la tension de sortie avec un second pont diviseur de tension (formé par  $C$  et  $3C$ ).

On a

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = jC_{eq}\omega + \frac{1}{jL\omega} = j\frac{3}{4}C\omega + \frac{1}{jL\omega} \quad (4)$$

et donc

$$\underline{u}_L = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R} u_e = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_{eq}}} u_e = \frac{1}{1 + R \left( \frac{1}{jL\omega} + j\frac{3}{4}C\omega \right)} u_e \quad (5)$$

Le second pont diviseur de tension donne alors

$$\underline{u}_s = \frac{\frac{1}{3jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{3jC\omega}} \underline{u}_L = \frac{\frac{1}{4}}{1 + j \left( \frac{3}{4}RC\omega - \frac{R}{L\omega} \right)} u_e \quad (6)$$

Dans la formule précédente, on écrit  $\omega = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{2}{\sqrt{3LC}}$  et on obtient

$$\underline{u}_s = \frac{\frac{1}{4}}{1 + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{3}}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{\sqrt{3}}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underline{u}_e \quad (7)$$

On note alors

$$A = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad Q = R \sqrt{\frac{3C}{4L}} \quad (8)$$

et on obtient bien

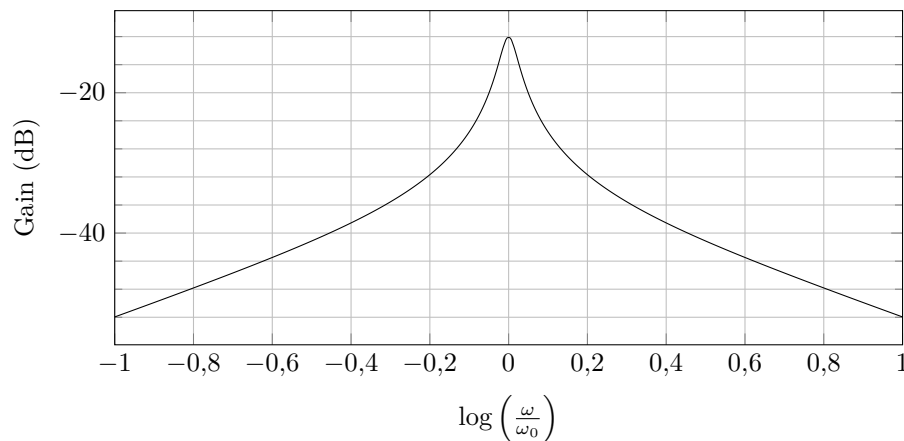
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (9)$$

5. On voit assez directement avec la fonction de transfert obtenue que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}(\omega)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{H}(\omega)| = 0 \quad (10)$$

Ce qui est compatible avec la réponse donnée à la question 1

6. La fréquence centrale du filtre est la fréquence pour laquelle le gain est maximum, on trouve  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .  $A$  est le gain à la fréquence  $f_0$ . On trouve graphiquement  $G_{\text{dB}}(f_0) = -12 \text{ dB} = 20 \log(A)$  et donc  $A = 10^{-\frac{12}{20}} = 0,25$ .
7. On commence par faire le graphique demandé en remarquant que  $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ .



On trace les asymptotes et on détermine qu'elles ont une pente de  $\pm 20 \text{ dB/décade}$  et d'ordonnée à l'origine  $G_{\text{dB}}(\omega_0) = -32 \text{ dB}$ . Les équations sont donc

$$G_{\text{dB}}(\omega) = -32 + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{pour} \quad \omega \rightarrow 0 \quad (11)$$

et

$$G_{\text{dB}}(\omega) = -32 - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{pour} \quad \omega \rightarrow \infty \quad (12)$$

8. — Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , on a

$$G_{\text{dB}}(\omega) \approx 20 \log\left(\frac{A}{Q}\right) + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (13)$$

— Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , on a

$$G_{\text{dB}}(\omega) \approx 20 \log\left(\frac{A}{Q}\right) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (14)$$

Et comme  $20 \log\left(\frac{1}{10}\right) \approx -32$ , on retrouve bien les équations données à la question précédente.

9. Graphiquement, on voit que la phase de la fonction de transfert est positive pour  $f < f_0$ , donc la tension de sortie sera en avance de phase sur la tension d'entrée pour des fréquences  $f < 1$  kHz.
10. On cherche  $\omega_1$  et  $\omega_2$  telles que  $|\underline{H}(\omega_{1,2})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ce qui correspond à un gain de  $-3$  dB. On doit alors avoir

$$Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 1 \quad (15)$$

voir le cours pour le calcul détaillé, on obtient finalement

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (16)$$

11. Graphiquement, on trouve

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f \approx 628 \text{ rad s}^{-1} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (17)$$

On impose à l'entrée de ce filtre le signal suivant :

$$u_e(t) = 2 + \cos\left(6300t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos(63000t) \quad (18)$$

12. Le signal est composé d'une composante continue et de deux composantes sinusoïdales. Sa valeur moyenne est égale à la composante continue donc

$$\langle s(t) \rangle = 2 \text{ V} \quad (19)$$

La fréquence fondamentale est

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{6300}{2\pi} \approx 1 \text{ kHz} \quad (20)$$

On a vu dans le cours que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques. De plus, un signal périodique qui comporte une composante continue peut s'écrire

$$s(t) = s_0 + s_{AC}(t) \quad \text{avec} \quad \langle s_{AC}(t) \rangle = 0 \quad (21)$$

la valeur efficace de ce signal est :

$$s_{\text{eff}}^2 = \langle (s_0 + s(t))^2 \rangle = \langle s_0^2 + s_{AC}^2(t) + 2s_0s(t) \rangle = s_0^2 + s_{AC,\text{eff}}^2 + 2s_0\langle s_{AC}(t) \rangle = s_0^2 + s_{AC,\text{eff}}^2 \quad (22)$$

Le carré de la valeur efficace du signal est la somme du carré de sa composante continue et du carré de la valeur efficace de sa partie alternative.

On sait également que la valeur efficace d'un signal sinusoïdal d'amplitude  $A$  est égale à  $\frac{A}{\sqrt{2}}$ , donc finalement, la valeur efficace du signal donné est

$$S = \sqrt{2^2 + \frac{1}{2} + \frac{3^2}{2}} = 3 \text{ V} \quad (23)$$

13. Comme le signal passe par un filtre passe-bande, la composante continue est complètement coupée.

La composante à haute fréquence a une fréquence  $f_h = 10$  kHz, le gain à cette fréquence vaut  $-52$  dB (lecture graphique du diagramme de Bode) ce qui correspond à un gain de  $10^{-\frac{52}{20}} \approx 2,5 \times 10^{-3}$  et donc l'amplitude de cette composante en sortie du filtre sera  $B_h \approx 1$  mV.

La composante à basse fréquence a une fréquence  $f_b = f_0 = 1$  kHz, le gain à cette fréquence vaut  $A = 0,25$  et l'amplitude de cette composante en sortie du filtre sera  $B_b = 250$  mV  $\gg B_h$ . On pourra donc considérer qu'il ne restera que cette composante dans le signal en sortie du filtre et on aura

$$u_s(t) = 0,25 \cos\left(6300t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (24)$$

La phase de cette composante n'a pas changé car la phase du filtre à cette fréquence est nulle.

14. Lorsque  $\omega \gg \omega_0$ , la fonction de transfert du filtre devient

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{A\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega} \quad (25)$$

Comme le signal est divisé par  $j\omega$ , le filtre a un comportement intégrateur.

15. On se place ici exactement dans la situation décrite à la question précédente, la pulsation du signal d'entrée est bien supérieure à la pulsation de coupure, le filtre a un comportement intégrateur et on observe en sortie un signal triangulaire de même fréquence, centré sur 0 V car la composante continue est coupée

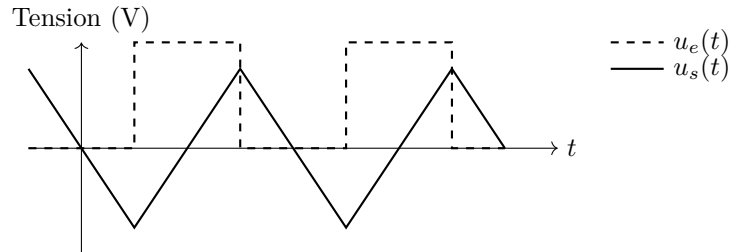


FIGURE 2 – Signaux en entrée et en sortie du filtre, les échelles verticales sont différentes pour les deux signaux.

L'équation 25 indique que  $\frac{du_s}{dt} = \frac{A\omega_0}{Q} u_{e,AC}$  (car l'intégration n'a lieu que pour les composantes alternatives). Donc, pour une partie positive du signal carré, on peut calculer la pente du signal triangulaire :

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{A\omega_0}{Q} K \quad (26)$$

avec  $K$  l'amplitude de la partie alternative du signal d'entrée. Ici  $K = 3 \text{ V}$ .

Sur la figure précédente, on voit que l'amplitude du signal de sortie correspond à son augmentation pendant un quart de période, donc l'amplitude du signal de sortie est

$$U_s = \frac{A\omega_0}{Q} K \frac{T}{4} = \frac{2\pi A\omega_0 K}{Q\omega} \approx 47 \text{ mV} \quad (27)$$

16. De la même manière qu'à la question 14, on peut montrer que pour des pulsations  $\omega \ll \omega_0$ , la fonction de transfert peut s'écrire

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{A}{Q\omega_0} j\omega \quad (28)$$

La multiplication par  $j\omega$  montre que le filtre a un caractère dérivateur.

17. Cette fois, le signal de sortie est un signal carré centré sur 0 V.

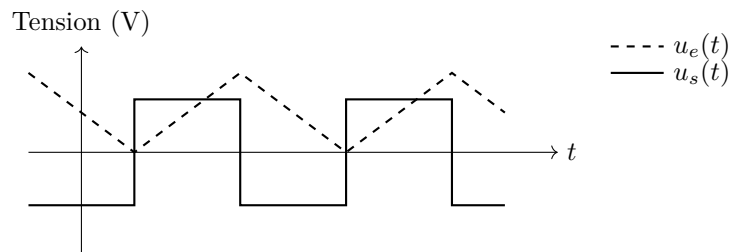


FIGURE 3 – Signaux en entrée et en sortie du filtre, les échelles verticales sont différentes pour les deux signaux.

La dérivée du signal d'entrée est  $K = 60 \text{ V s}^{-1}$ . La relation trouvée à la question précédente montre que l'amplitude du signal de sortie sera

$$U_s = \frac{AK}{Q\omega_0} \approx 0,24 \text{ mV} \quad (29)$$