Finalement... rien que de la méca ;-)

Jeudi 6 avril 2023 - Durée 4h

- ⋆ **Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans le désordre.**
- ⋆ **La calculatrice est autorisée.**
- ⋆ **Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.**
- ⋆ **Chaque réponse doit être justifiée. Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale.**

I. Oscillateur

Ce problème se consacre à l'étude énergétique d'un oscillateur, représenté sur la figure ci-après.

Un fil **ABC**, contenu dans un plan vertical, est constitué de deux demi-cercles de rayon R = 10 cm : **AB** concave de centre $\mathbf{O_1}$, et **BC** convexe de centre $\mathbf{O_2}$. Un petit anneau assimilé à un point matériel $(\mathbf{M}, m)$, avec m = 10 g, coulisse sans frottement sur le fil, tout en étant attaché à un ressort idéal de raideur k et de longueur à vide nulle, enroulé autour du fil, et dont l'autre extrémité est fixée en **A**. En **A** et en **C** se trouvent des butées ; on ne s'intéressera pas à ce qui se produit après que l'anneau est entré en contact avec une de ces butées. Le point **B** est purement mathématique.

L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur uniforme d'intensité $g = 10$ m.s^{-2} et $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$.

Comme représenté sur la figure, on repère la position de l'anneau :

— sur le demi-cercle **AB**, par la base polaire $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{O_1}, \overrightarrow{u}_{r1}, \overrightarrow{u}_{\theta 1})$
— sur le demi-cercle **BC**, par la base polaire $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{O_2}, \overrightarrow{u}_{r2}, \overrightarrow{u}_{\theta 2})$

On n'introduira aucune autre variable spatiale que celles définies dans cet énoncé.

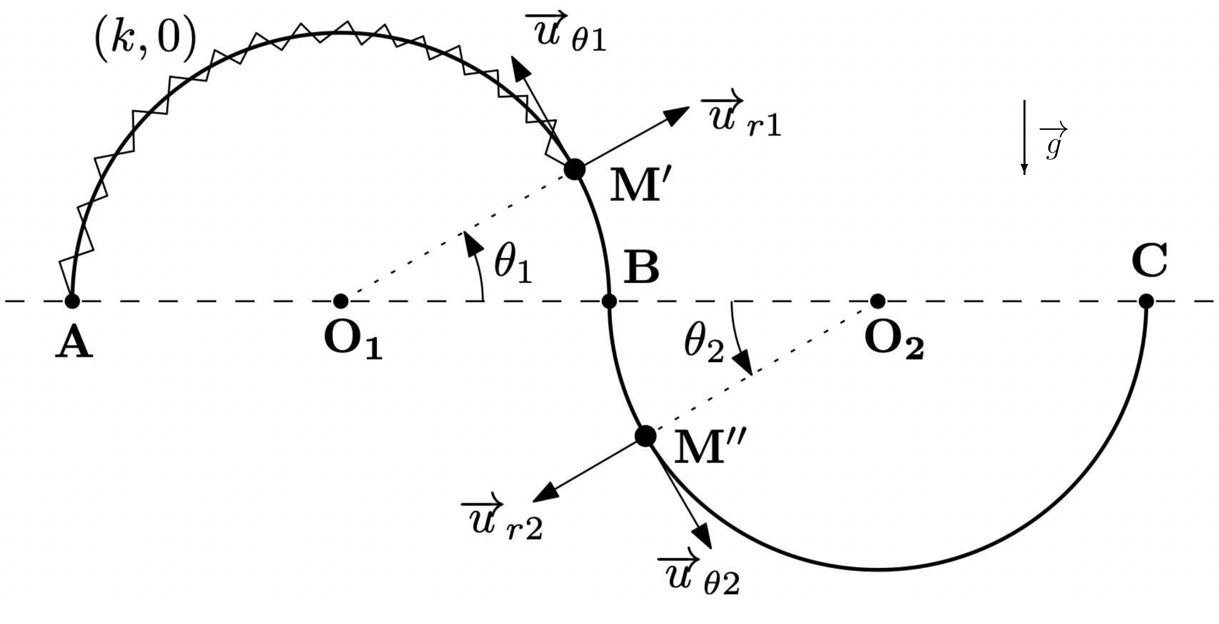


Figure 1 – Schéma de l'oscillateur étudié. Deux positions différentes $\mathbf{M'}$ et $\mathbf{M''}$ de l'anneau $(\mathbf{M}, \mathbf{m})$ ont été représentées pour définir les bases polaires ; le ressort n'est pas figuré pour la seconde position

I.1 Cas où l'anneau est sur le demi-cercle AB

1. Faire le bilan des forces s'appliquant sur l'anneau. On exprimera chacune des forces dans la base $\mathcal{B}_1$.
2. D'après vos connaissances, indiquer parmi ces forces, celles qui sont conservatives et, le cas échéant, donner l'expression de l'énergie potentielle associée. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $\mathrm{E_p}(\theta_1)$ du point M en fonction de k, m, g, θ_1 et R. On prendra l'origine de $\mathrm{E_p}$ en A.
3. L'énergie mécanique totale du système est-elle conservée ?
4. On introduit ℓ la longueur du ressort. Donner l'expression de θ_1 en fonction de R et ℓ.
5. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $\mathrm{E_p}(\ell)$ du point M en fonction de k, m, g, ℓ et R.

I.2 Cas où l'anneau est sur le demi-cercle BC

6. Exprimer chacune des forces s'exerçant sur l'anneau dans la base $\mathcal{B}_2$.
7. Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à chacune des forces conservatives. En déduire l'énergie potentielle totale $\mathrm{E_p}(\theta_2)$ en fonction de k, m, g, θ_2 et R (on utilisera la continuité de $\mathrm{E_p}$ en B).
8. Donner l'expression de θ_2 en fonction de ℓ et R.
9. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $\mathrm{E_p}(\ell)$ du point M en fonction de k, m, g, ℓ et R. Comparer à l'expression trouvée à la question 5.

I.3 Étude énergétique du problème complet

On traite à présent l'ensemble les deux demi-cercles. L'unique variable ℓ permet de repérer de façon univoque la position du point **M** sur le dispositif.

10. Déterminer l'équation vérifiée par la ou les éventuelle(s) position(s) d'équilibre ℓ_e du point **M**.
11. Cette équation n'est pas soluble algébriquement, on va donc la résoudre graphiquement. La réécrire comme l'égalité d'une fonction trigonométrique et d'une fonction linéaire, cette dernière ne dépendant que de k et ℓ. En traçant sur un même graphe chacune de ces deux fonctions en fonction de ℓ, montrer graphiquement que selon la valeur de k, on a 0, 1 ou 2 position(s) d'équilibre.
12. Dans le cas (limite) où on n'en a qu'une seule, estimer graphiquement la valeur numérique $\ell_{\mathrm{e,lim}}$ de ℓ_{e} et la valeur k_{lim} de k correspondante. Sur quel demi-cercle se trouve cette position d'équilibre ?
13. On choisit à présent $k = 0,20\ \mathrm{N.m^{-1}}$. D'après les questions précédentes, prévoir le nombre de position(s) d'équilibre, et sa (leur) position(s) par rapport à **B**.
14. Le graphe en annexe (**à rendre avec la copie**) présente la courbe $\mathrm{E_p}(\ell)$ pour cette valeur de k. Y placer les points A, B et C, puis retrouver le résultat de la réponse précédente, et déterminer (le cas échéant) la stabilité de la (des) éventuelle(s) position(s) d'équilibre.
15. On lâche sans vitesse initiale, depuis une position ℓ_0, l'anneau **M**. En raisonnant d'après le graphique de la figure en annexe, décrire le mouvement en fonction de la valeur de ℓ_0. On fera apparaître des éléments de raisonnement sur le graphique.
16. On choisit $\ell_0 = 40$ cm. En justifiant soigneusement, établir l'équation du mouvement vérifiée par $\mathrm{L} = \ell - \ell_{e2}$ où ℓ_{e2} est la position d'équilibre la plus proche de ℓ_0. Sans la résoudre, décrire le mouvement observé (nature, amplitude, période). On effectuera les applications numériques.

II. Mouvement d'une particule chargée (d'après CCP PC 2014)

On suppose dans ce problème que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui revient à négliger toute correction relativiste. Les effets de la gravitation seront également négligés.

DONNÉES :
- ⋆ perméabilité et permittivité du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1} et $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}$ F.m^{-1} ;
- ⋆ charge électrique élémentaire : $e = 1,60.10^{-19}$ C ;
- ⋆ vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00.10^8$ m.s^{-1} ;
- ⋆ masse d'un proton : $m_\mathrm{P} = 1,67.10^{-27}$ kg ;
- ⋆ charge électrique d'un proton : $q_\mathrm{P} = e$.

II.1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1. On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen muni d'un repère cartésien $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ au point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\overrightarrow{e_z}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{v_0}$ (Figure 1).

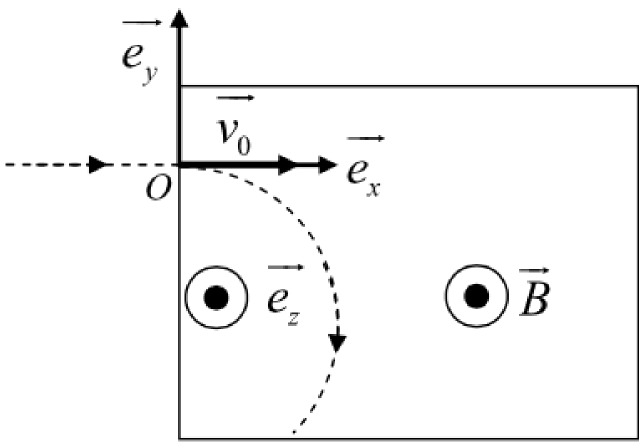


FIGURE 1 - Trajectoire d'une particule de charge q positive
dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme

   a) Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante. On la notera v_0.

   b) Montrer que la trajectoire est plane.

   c) On admet que la trajectoire est circulaire. Déterminer le rayon R de cette trajectoire en fonction de m, v_0, q et B.

2. Pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium (l'uranium 238 et l'uranium 235), il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en Figure 2, où règne un vide poussé.

   Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en U^+ (de charge électrique $q_{\mathrm{U}^+} = e$) d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable.

Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E}$ imposé par une tension entre les plaques P_1 et P_2 notée $W = V_{P_2} - V_{P_1}$.

Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ ($B = 0,10$ T) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2.

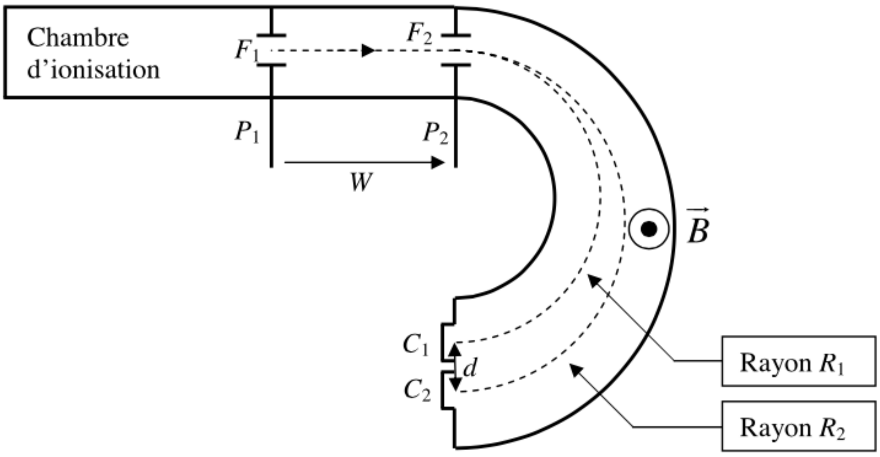


FIGURE 2 - Schéma de principe du spectrographe de masse

Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont : $m_{U5} = 235$ u.m.a. et $m_{U8} = 238$ u.m.a.. Une unité de masse atomique (u.m.a.) vaut : 1 u.m.a $\simeq 1,66.10^{-27}$ kg.

a) Quel est le signe de la tension W ?

b) Donner l'expression littérale de la vitesse v_{U8} de l'isotope $^{328}U^+$ en F_2, en fonction de e, W et m_{U8}.

c) Calculer la valeur de la tension W pour que la distance entre les collecteurs C_1 et C_2 soit égale à $d = 2,0$ cm.

II.2 Le cyclotron

Le cyclotron, accélérateur de protons, est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit (Figure 3). Un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ ($B = 0,10$ T) règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe des demi-cylindres.

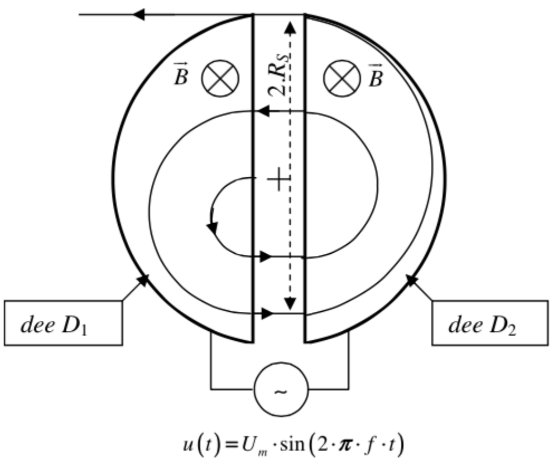


FIGURE 3 - Schéma de principe du cyclotron.

Un champ électrostatique variable $\overrightarrow{E}$ peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 1,0.10^3$ V lorsque le proton traverse cet espace.

Les protons sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_S = 50$ cm.

3. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_P, e et B. Qu'en déduisez-vous ?
4. Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative.
5. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un *dee* à l'autre.
6. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.
7. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e, R_S, B, m_P et U_m. Effectuer l'application numérique.
8. Puissance rayonnée : pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge q et d'accélération $a = ||\overrightarrow{a}||$ rayonne une puissance P_r, donnée par la formule de Larmor :

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

a) Montrer qu'une particule chargée de charge q, de vitesse v, qui décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon R, rayonne une puissance P_r de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q, c, μ_0 et R.

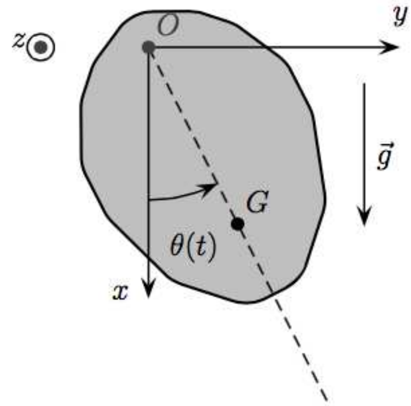
b) Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_S = 50$ cm.

c) Conclure.

III. Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre en un point

Un expérimentateur désire mesurer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. Il va pour cela utiliser tour à tour deux types différents de pendule.

III.1 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel



Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz).

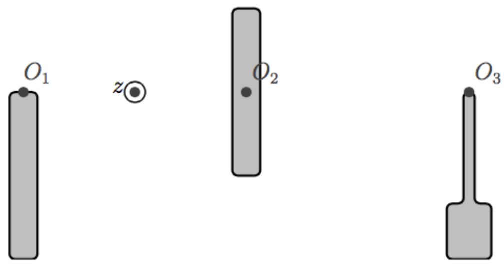
Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz). La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante. On notera a la distance OG.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{g}$ tel que $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{e_x}$.

1. Quel est le nom de la liaison permettant de faire tourner le solide autour de l'axe de rotation ?
2. Donner la définition du moment d'inertie d'un système de points.

   On considère trois objets représentés ci-contre de moment d'inertie J_1, J_2, J_3 par rapport à leur axe de rotation respectif (O_1z), (O_2z) et (O_3z). Les masses des objets sont les mêmes et les objets ne sont faits que d'un seul matériau (densité uniforme). Lequel des trois moments d'inertie est le plus faible ? Lequel est le plus élevé ? Justifier brièvement.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.
4. En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J, m, a et g.
5. On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \dfrac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

   a) On note T la période obtenue lorsque l'intensité du champ de pesanteur est g et T′ lorsqu'elle est $g + \Delta g$. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer T′ en fonction de T et de $\dfrac{\Delta g}{g}$. On rappelle que $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ où ε est une grandeur sans dimension telle que $|\varepsilon| \ll 1$.

   b) En déduire s en fonction de $\dfrac{\Delta g}{g}$.

III.2 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $\mathrm{M} = -\mathrm{K}\theta$ sur le pendule où K est une constante positive.

La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante.

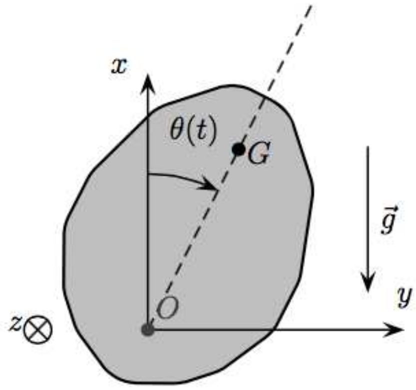
On notera a la distance OG.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{g}$ tel que $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_x}$.

L'énergie potentielle du ressort spiral ne dépend que de l'angle θ et de la constante K et est donnée par l'expression $\mathrm{E_p}(\theta) = \dfrac{1}{2}\mathrm{K}\theta^2$.



6. Exprimer l'énergie mécanique totale $\mathrm{E_m}$ du système pendule-ressort en fonction de $\mathrm{K}, \theta, m, a, g, \mathrm{J}$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
7. En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.
8. En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à vérifier pour que l'équation précédente soit celle d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous forme d'une relation entre K, m, g et a.
9. Déterminer dans ce cas la période T des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de K, J, g, a et m.
10. On considère encore que $\theta = 0$ est une position d'équilibre et on définit comme précédemment s par le rapport $s = \dfrac{\Delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}}$ où $\Delta\mathrm{T}$ représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

    Comme précédemment, on note T la période obtenue lorsque l'intensité du champ de pesanteur est g et $\mathrm{T}' = \mathrm{T} + \Delta\mathrm{T}$ lorsqu'elle est $g + \Delta g$. On rappelle que $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ où ε est une grandeur sans dimension telle que $|\varepsilon| \ll 1$.

    a) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer $\mathrm{T}^2\left(\dfrac{1}{\mathrm{T}'^2} - \dfrac{1}{\mathrm{T}^2}\right)$ en fonction de $\dfrac{\Delta\mathrm{T}}{\mathrm{T}}$.

    b) Exprimer indépendamment de la question précédente $\dfrac{1}{\mathrm{T}'^2} - \dfrac{1}{\mathrm{T}^2}$ en fonction de J, a, m et Δg.

    c) En déduire l'expression de s en fonction de m, a, K, g et Δg.
11. Un système 1 est plus sensible qu'un système 2 si $|s_1| > |s_2|$.

    Montrer que l'on peut choisir la constante K de telle sorte que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faibles du champ de pesanteur terrestre. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K, g, m et a.

NOM :

Prénom :

Classe :

Annexe de l'exercice « Oscillateur », à rendre avec la copie

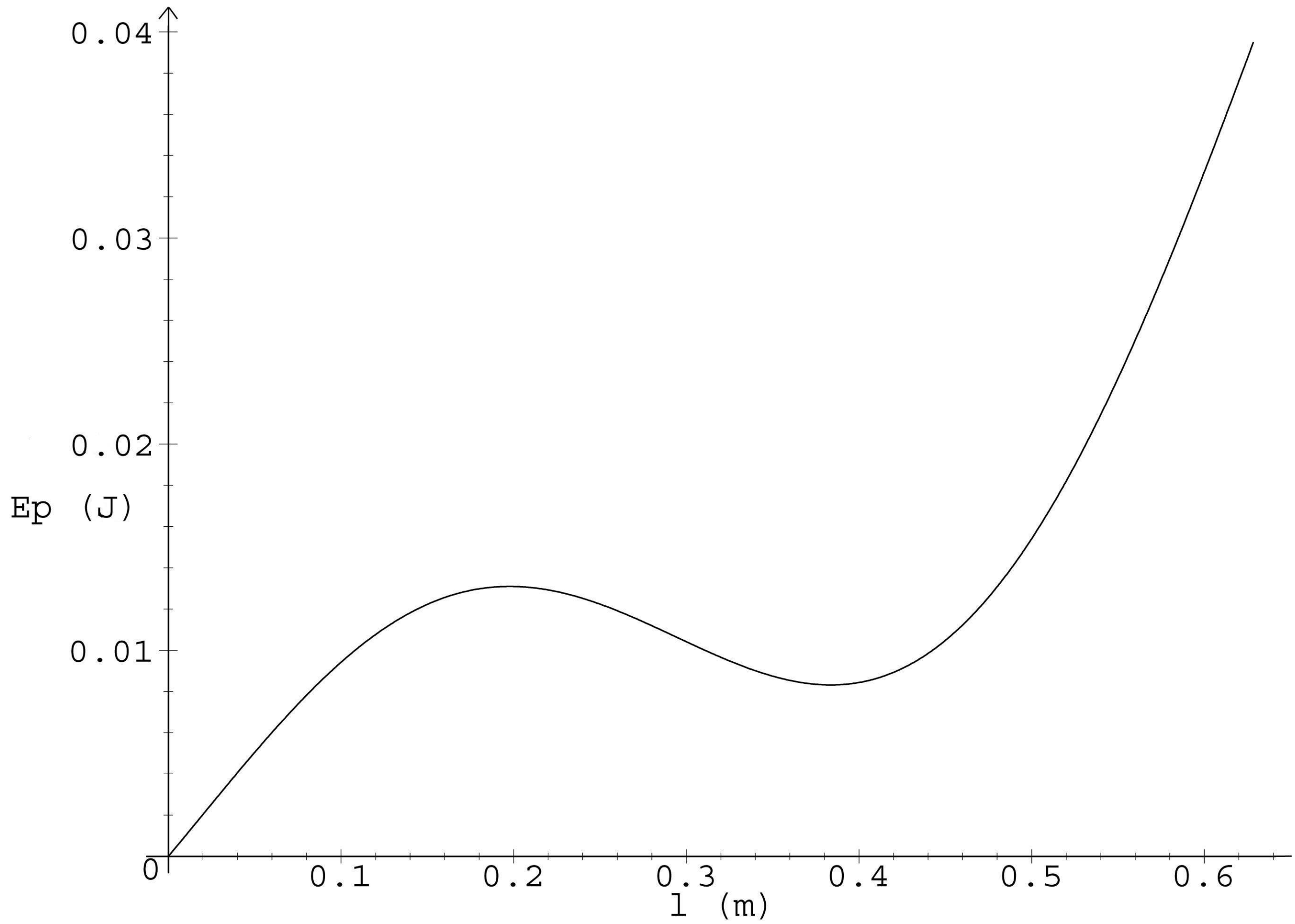


Figure 2 – Graphe de $E_p(\ell)$ pour $k = 0,20$ N.m^{-1}

♫