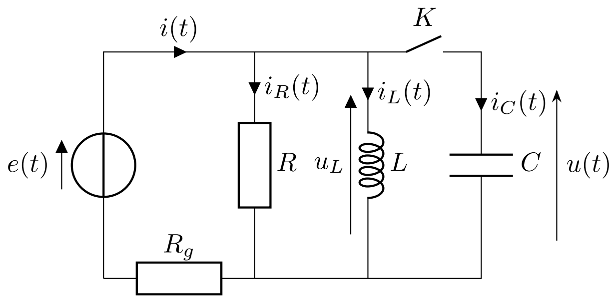
DM4 : Électricité régime transitoire et forcé – corrigé

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Circuit RLC parallèle en régime transitoire et forcé



1. Pour $t < 0$, le circuit est en régime permanent, on peut donc écrire $i_C = 0$ et $u_L = 0$ et on sait que le condensateur est déchargé donc $u = 0$. Comme $u_L = 0$ la loi d'Ohm donne $i_R = 0$ et donc $i = i_L$. Enfin la loi des mailles avec la loi d'Ohm donnent $i = i_L = \frac{E}{R_g}$.
2. À $t = O^+$, on commence par écrire les relations de continuité pour le condensateur et la bobine : $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{R_g}$, et $u(0^+) = u(0^-) = 0$. On en déduit alors comme pour la question précédente que $i_R(0^+) = 0$. De même, on trouve à nouveau que $i = \frac{E}{R_g}$. La loi des mailles donne enfin $i_C = i - i_R - i_L = 0$. On trouve les mêmes valeurs qu'à $t = 0^-$.
3. Lorsque $t \to \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine se comporte comme un fil et on trouve exactement les mêmes valeurs qu'aux deux questions précédentes.
4. Les trois questions précédentes montrent que, lorsque l'on ferme l'interrupteur, il ne se passe rien dans le circuit, ajouter l'interrupteur déchargé ne perturbe pas l'évolution du circuit car la tension aux bornes de L est déjà nulle. Le circuit est déjà dans son état d'équilibre final et les grandeurs électriques ne vont pas varier.
5. Pour trouver l'équation différentielle, on part de la loi des mailles et de la loi d'Ohm aux bornes de R_g.

$$\begin{aligned} E &= u + R_g i && (1)\\ &= u + R_g(i_R + i_L + i_C) \quad \text{(Loi des nœuds)} && (2)\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_g}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{L} + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{(Ohm, condensateur, bobine + dérivation)} && (3)\\ & && (4) \end{aligned}$$

On trouve donc finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R_{\text{eq}}C}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_g}} \tag{5}$$

6. En identifiant à l'écriture canonique de l'équation différentielle, on en déduit

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R_{\text{eq}}\sqrt{\frac{C}{L}}} \tag{6}$$

7. Pour que l'intensité du courant soit en phase avec la tension d'alimentation, il faut que l'impédance totale du dipôle connecté aux bornes du générateur soit réelle. On calcule l'impédance équivalente Z_{eq} :

$$\begin{aligned} Z_{\text{eq}} &= R_g + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}} && (7)\\ &= R_g + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} && (8) \end{aligned}$$

Pour que Z_{eq} soit réelle, il faut que

$$C\omega = \frac{1}{L\omega} \quad \text{soit} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \tag{9}$$

8. On écrit la relation entre les tensions complexes en utilisant un pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{Z_1}{Z_{\text{eq}}} \tag{10}$$

où Z_1 est l'impédance équivalente de R, L et C en parallèle. On trouve alors

$$\underline{u} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}}{R_g + \frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}}\underline{e} = \frac{1}{1+\frac{R_g}{R}+jR_g\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}\underline{e} \tag{11}$$

Pour que $u(t)$ soit en phase avec $e(t)$ il faut à nouveau que $\omega = \omega_0$.

9. L'amplitude I_m de $i(t)$ est donnée par $I_m = \frac{E}{|Z_{\text{eq}}|}$. On calcule $|Z_{\text{eq}}|$:

$$|Z_{\text{eq}}| = \left|R_g + \frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}\right| = \left|\frac{\frac{R_g}{R_{\text{eq}}}+jR_g\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}{\frac{1}{R}+j\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}\right| = \sqrt{\frac{\left(\frac{R_g}{R_{\text{eq}}}\right)^2+R_g^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}} \tag{12}$$

On a donc finalement

$$\boxed{I_m = \sqrt{\frac{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}{\left(\frac{R_g}{R_{\text{eq}}}\right)^2+R_g^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}E} \tag{13}$$

10. on fait apparaitre ω_0 et Q pour obtenir finalement

$$\boxed{I_m = \frac{1}{R_g}\sqrt{\frac{\left(\frac{R_{\text{eq}}}{R}\right)^2+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}E} \tag{14}$$