TD10 : Cinématique – Corrigé

Exercice 1 : Accident de voiture

1. Pour un trajet en ville, on peut estimer que la voiture avance à la vitesse $v_0 = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ et la longueur d de déformation est de l'ordre de 1 m. La vitesse de la voiture passe donc de v_0 à 0 sur une distance de 1 m.
   On suppose que la décélération $a < 0$ de la voiture est constante, et on prend $t = 0$ au début du choc. La vitesse de la voiture au temps t est $v(t) = v_0 + at$ et la distance parcourue au temps t est $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.
   Le temps t_1 auquel la voiture s'arrête est tel que $v(t_1) = 0$. Soit $t_1 = -\dfrac{v_0}{a}$.
   On sait également que $x(t_1) = d$, en injectant l'expression de t_1 ci-dessus on trouve :
   $$\frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2} - \frac{v_0^2}{a} = d \quad \text{soit} \quad a = -\frac{v_0^2}{2d}$$
   L'application numérique avec notre estimation de v_0 et d donne $a \simeq -96$ m/s^2. Soit une accélération d'environ 10g.
2. Pour un choc sur l'autoroute, la seule chose qui change radicalement est v_0 qui vaut maintenant environ 130 km/h. On trouve alors $a \simeq 652$ m/s^2, soit une décélération d'environ 65 g. (La tête d'une personne moyenne pèse environ 5 kg, pendant ce type d'accident tout se passe comme si elle en pesait 325 !)
3. Il faut construire des voitures suffisamment solides pour protéger ses occupants, mais aussi assez *souples* pour permettre une déformation avec une distance d suffisamment grande.

Exercice 2 : Un piéton traverse la rue

1. Lorsque $\varphi = 0$, il faut que le piéton ait parcouru la distance L en un temps plus court que celui pris par la voiture pour parcourir la distance D. On doit donc avoir $\frac{L}{v} < \frac{D}{V}$ soit $v > \frac{LV}{D}$.
2. Lorsque φ est quelconque, les coordonnées $(x(t), y(t))$ du piéton en fonction du temps sont données par $x = vt\sin(\varphi)$ et $y = vt\cos(\varphi)$.
   Pour trouver la condition pour que la collision soit évitée, on peut commencer par déterminer le temps t_c auquel la voiture arrive au niveau du piéton (suivant x). La coordonnée $x_V(t)$ de la voiture est $x_V(t) = -D + Vt$. t_c est tel que $x_V(t_1) = x(t_1)$ soit $-D + Vt_1 = vt_1\sin(\varphi)$. Ce qui nous donne $t_1 = \frac{D}{V - v\sin(\varphi)}$.
   La collision est évitée si au temps t_1 la coordonnée y du piéton est supérieurs à L. On a donc la condition $y(t_1) > L$ soit $vt_1\cos(\varphi) > L$ ce qui donne $\frac{Dv\cos(\varphi)}{V - v\sin(\varphi)} > L$. On obtient la condition sur la vitesse v suivante :
   $$v > \frac{LV}{D\cos(\varphi) + L\sin(\varphi)} = v_{\mathrm{lim}}(\varphi)$$
3. Pour que le piéton puisse traverser avec la vitesse la plus faible possible, il faut que $v_{\mathrm{lim}}(\varphi)$ soit la plus faible possible et donc il faut que $f(\varphi) = D\cos(\varphi) + L\sin(\varphi)$ soit maximal. On cherche quand la dérivée s'annule :
   $$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow -D\sin(\varphi) + L\cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \tan(\varphi_{\mathrm{min}}) = \frac{L}{D}$$

Exercice 3 : Temps de chute

1. L'accélération est $veca = \vec{g} = -g\vec{e}_z$. Donc si $v(t = 0) = 0$ la vitesse est donnée par $\vec{v} = at = -gt\vec{e}_z$.
2. Notons $z(t)\vec{e}_z$ la position de l'objet en fonction du temps. On a $\dot{z}(t) = -gt$. Donc $z(t) = -g\frac{t^2}{2} + z(t = 0) = -g\frac{t^2}{2} + h$.
   L'objet touche le sol lorsque $z(t) = 0$ c'est à dire $g\frac{t^2}{2} = h$ ou $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 8{,}1\,\mathrm{s}$. La vitesse atteinte à ce moment sera $v = 9.8t \simeq 79{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \simeq 386\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
3. Le modèle utilisé ne prend pas en compte les frottements de l'air qui ont tendance à ralentir la chute et donc augmentent le temps de chute et diminuent la vitesse au moment de l'impact avec le sol.
4. On jette un caillou dans le puits et on chronomètre le temps qui sépare le moment où on lâche le caillou et le moment où l'on entend le son de l'impact. On note t le temps mesuré. La profondeur du puits est donc donnée par $h = g\frac{t^2}{2}$.
   Dans ce modèle on suppose que le son se propage instantanément entre le point d'impact du caillou et l'expérimentateur et on néglige les frottements de l'air.

Exercice 4 : La centrifugeuse

1. L'énoncé précise *un point du sujet* car tous les points du sujets n'ont pas la même vitesse car ils sont à des distances différentes de l'axe de rotation.
2. Si on considère que la vitesse angulaire est constante, l'accélération du point M dans le référentiel lié au sol est $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r$. Donc $a = R\omega^2$. Pour avoir une accélération égale à $30\,\mathrm{m/s^2}$, il faut que $\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{R}} = \sqrt{\frac{30}{5}} \simeq 2{,}45\,\mathrm{rad/s} = 0{,}4\,\mathrm{tour/s}$
3. Dans le référentiel du sol, la vitesse du point M est $\vec{v} = R\omega_0\vec{e}_\theta$ donc $v = 12{,}25\,\mathrm{m\,s^{-1}} \simeq 44\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
4. Le point M est immobile dans le référentiel lié au siège, donc son accélération est nulle $a(M/\mathcal{R}_{\text{siège}}) = 0$
5. La vitesse angulaire en fonction du temps pendant la phase d'accélération est $\omega(t) = \alpha \times t$, avec $\alpha = \frac{\omega_0}{10} = 0.245\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$
   L'accélération en coordonnées polaires est ($\dot{r} = 0$) : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -r\alpha^2t^2\vec{e}_r + r\alpha\vec{e}_\theta$. Donc à $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $\vec{a} = -7.5\vec{e}_r + 1.2\vec{e}_\theta$ (en $\mathrm{m\,s^{-2}}$)

Exercice 5 : Tourne-disque

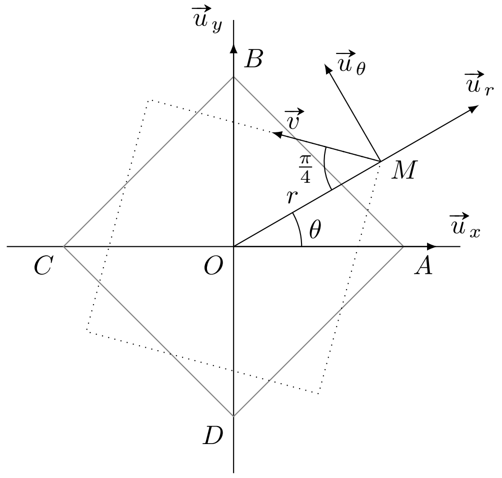
1. Dans $\mathcal{R}$, le point M a un mouvement circulaire uniforme.
2. La vitesse angulaire de rotation du point M (et de n'importe quel point du disque) est : $\omega_0 = 33$tour/min $= \frac{33\times2\pi}{60}$rad/s $= \frac{33\times360}{60} = 198°$/s
3. La vitesse instantanée du point M est $\vec{v}_M = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega_0\vec{e}_\theta \simeq 35\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$. De même la vitesse instantanée d'un point de la périphérie du disque est $v_P \simeq 55\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$
4. La distance parcourue par le point M en t_1=2min30s est $d = vt \simeq 52{,}5\,\mathrm{m}$. L'angle balayé par le rayon OM pendant ce temps est $\Delta\theta = \omega_0 t \simeq 519\,\mathrm{rad}$
5. $\vec{a}_M(t_1) = -R\omega_0^2\vec{e}_r \simeq 1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
6. Pour déterminer α et β on utilise les conditions : $\omega(t_1) = \alpha + \beta t_1 = \omega_0$ et $\omega(t_2) = \alpha - \beta t_2 = 0$. La seconde condition donne $\alpha = \beta t_2$ et en l'injectant dans la première on trouve finalement : $\beta = \frac{\omega_0}{t_2 - t_1}$ et $\alpha = \frac{t_2\omega_0}{t_2 - t_1}$. L'application numérique donne $\beta = 0{,}346\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$ et $\alpha = 55{,}3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
   La vitesse instantanée du point M est $\vec{v} = R\omega(t)\vec{e}_\theta$ et l'accélération instantanée est $\vec{a} = -R\omega(t)^2\vec{e}_r + R\dot{\omega}(t)\vec{e}_\theta$. Soit $\vec{a} = -R\omega(t)^2\vec{e}_r - R\beta\vec{e}_\theta$.

Exercice 6 : Mouvement hélicoïdal

1. En coordonnées cylindriques, les coordonnées du point M sont
   $$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = at \end{cases}$$
2. Dans le plan (x, y), le point M a une trajectoire circulaire et il a un mouvement à vitesse constante suivant l'axe z.
3. Le pas de l'hélice correspond à la distance vertical parcourue par le point M lorsqu'il a fait un tour autour de l'axe z, c'est-à-dire lorsque $\omega t = 2\pi$. On a donc
   $$p = z\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{2\pi a}{\omega}$$
   L'accélération de M est $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r$. Elle est dans le plan (x, y) (vitesse constante suivant z), perpendiculaire à la trajectoire (vitesse angulaire ω constante) et dirigée vers l'intérieur du virage (centripète).

Exercice 7 : Course poursuite

1. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du chien M fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec le vecteur $\vec{u}_r$. Les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont donc : $\left(-v_0\cos\frac{\pi}{4}, v_0\cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$.



2. On a donc $(\dot{r}, r\dot{\theta}) = \left(-\frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$, ce qui donne les deux équations différentielles demandées.
3. On commence par trouver $r(t)$:

$$\dot{r}(t) = -\frac{v_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow r(t) = r(0) - \frac{v_0}{\sqrt{2}}t = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{v_0}{\sqrt{2}}t = \frac{a - v_0 t}{\sqrt{2}}$$

Puis $\theta(t)$:

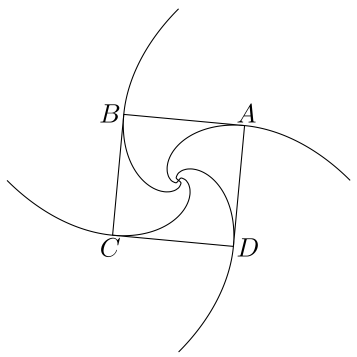
$$r\dot{\theta}(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{v_0}{r\sqrt{2}} = \frac{v_0}{a - v_0 t} \Leftrightarrow \theta(t) = K - \ln(a - v_0 t)$$

La condition initiale $\theta(0) = 0$ donne $K = \ln(a)$ donc finalement :

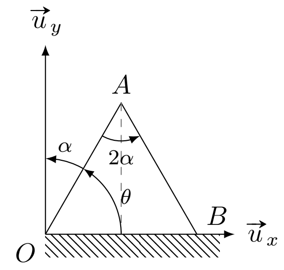
$$\theta(t) = -\ln\left(1 - \frac{v_0}{a}t\right)$$

Les chiens se rencontrent en $r = 0$, on cherche donc t_f tel que $r(t_f) = 0 = \frac{a - v_0 t}{\sqrt{2}}$. Ce qui donne $t_f = \frac{a}{v_0}$

4. Il faut exprimer r en fonction de θ, pour se débarrasser du ln, on calcule $\exp(-\theta) = 1 - \frac{v_0}{a}t$ et on trouve que $r(\theta) = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\theta}$. C'est une **spirale logarithmique** dot l'allure est tracée ci-dessous :



Exercice 8 : Échelle double

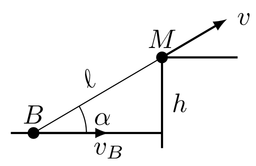


1. On a la relation $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$
2. En coordonnées polaires, le vecteur vitesse du point A s'écrit $\vec{(v)}_A = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta = -l\dot{\alpha}\vec{u}_\theta$.

   L'accélération est : $\vec{a}_A = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} = -l\ddot{\alpha}\vec{u}_\theta - l\dot{\alpha}^2\vec{u}_r$.
3. Le point B est astreint à se déplacer sur l'axe x, on a $\overrightarrow{OM} = 2l\sin\alpha\,\vec{u}_x$.
4. $\vec{v}_B = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 2l\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{u}_x$.

   Et $\vec{a}_B = \dfrac{d\vec{v}_B}{dt} = (\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha)2l\,\vec{u}_x$

Exercice 9 : Marin qui tire sa barque



On note ℓ la longueur de la corde, x la distance de la barque au quai et h la hauteur du quai. On a $v = -\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}$ et $v_B = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. De plus $\ell = \sqrt{h^2 + x^2}$. Donc $v = -\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = -\frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{\ell}v_B$. Soit encore $v = \cos(\alpha)v_B$ et finalement $\boxed{v_B = \frac{v}{\cos(\alpha)}}$

Exercice 10 : Deux camions en tirent un troisième

On note x_1, x_2 et x_3 les abscisses respectives des trois camions et L la longueur de la corde. Comme la longueur de la corde est constante, on a $L = x_1 - x_3 + x_2 - x_3 = x_1 + x_2 - 2x_3$. (On a négligé la longueur de corde dans la poulie, mais le résultat resterait inchangé)

On a donc $x_3 = \frac{x_1 + x_2 - L}{2}$ et l'accélération du camion A_3 est $\boxed{a_3 = \frac{\mathrm{d}^2 x_3}{\mathrm{d}t^2} = \frac{a_1 + a_2}{2}}$. L'accélération du camion A_3 est égale à la moyenne des accélérations des deux autres camions.