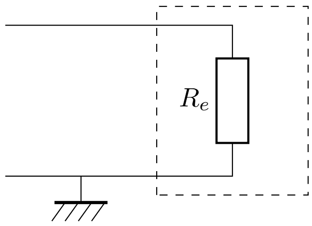
DS4 : Régime sinusoïdal forcé et chimie – corrigé

Exercice 1 : Perturbation de l'oscilloscope sur le fonctionnement d'un circuit

1 Perturbation en régime continu

1. En régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc l'entrée de l'oscilloscope est équivalente à



2. Une application directe de la loi d'Ohm donne

$$\boxed{U_0 = R\eta} \tag{1}$$

3. La tension U_m est la tension aux bornes d'une résistance équivalente à $R_{\text{eq}} = \frac{RR_e}{R+R_e}$ parcourue par un courant η. On a donc

$$\boxed{U_m = \frac{RR_e}{R+R_e}\eta} \tag{2}$$

4. L'erreur relative est

$$e_r\frac{U_0 - U_m}{U_m} = \frac{R\eta - \frac{RR_e}{R+R_e}\eta}{\frac{RR_e}{R+R_e}\eta} \tag{3}$$

Après simplification, on trouve

$$\boxed{e_r = \frac{R}{R_e}} \tag{4}$$

5. L'oscilloscope ne perturbe pas le circuit si $e_r \leq \alpha$ soit

$$\boxed{R \leq \alpha R_e = R_c} \tag{5}$$

6. Ici on a un pont diviseur de tension et

$$\boxed{U_0 = \frac{R}{R+R_0}E} \tag{6}$$

7. On a à nouveau un pont diviseur de tension et

$$\boxed{U_m = \frac{\frac{R_eR}{R_e+R}}{\frac{R_eR}{R_e+R} + R_0}E = \frac{R_eR}{R_eR + R_0(R_e+R)}E} \tag{7}$$

8. L'erreur relative est

$$e_r = \frac{U_0 - U_m}{U_m} = \frac{U_0}{U_m} - 1 = \frac{R(R_eR + R_0R_e + R_0R)}{(R+R_0)R_eR} - 1 = \frac{RR_0}{R_e(R+R_0)} \tag{8}$$

9. On a
$$e_r < \frac{RR_0}{R_eR} = \frac{R_0}{R_e} \tag{9}$$
Si $R_0 < \alpha R_e$ alors $e_r < \alpha$ et l'oscilloscope ne perturbe pas le circuit quelle que soit la valeur de R.
10. Cette fois, on écrit
$$e_r < \frac{RR_0}{R_eR_0} = \frac{R}{R_e} \tag{10}$$
Et si $R < \alpha R_e$ alors $e_r < \alpha$ et l'oscilloscope ne perturbe pas le circuit.
11. Dans tous les cas, la condition qui permet de s'assurer que l'oscilloscope ne perturbe pas le circuit est
$$\boxed{R \leq \alpha R_e = 10\,\mathrm{k\Omega}} \tag{11}$$
Comme beaucoup de résistances utilisées dans les circuits électriques ont des valeurs inférieures à $10\,\mathrm{k\Omega}$, Une résistance d'entrée de $1\,\mathrm{M\Omega}$ permet de s'assurer que l'oscilloscope ne perturbera pas ces circuits. Idéalement, il faudrait que la résistance d'entrée de l'oscilloscope soit encore plus élevée mais certaines contraintes techniques (notamment la vitesse d'acquisition élevée) ne permettent pas de choisir une résistance d'entrée arbitrairement grande.
12. On est en régime continu, remplacer la résistance par une bobine, revient à la remplacer par un fil qui a une résistance nulle. Dans ce cas il n'y a aucun risque de perturber le circuit. Par contre, un condensateur ayant une impédance infinie en régime continu, il est possible que l'oscilloscope perturbe le circuit s'il est branché aux bornes d'un condensateur.

2 Perturbation en régime sinusoïdal forcé

13. L'impédance d'entrée de l'oscilloscope est
$$\boxed{\underline{Z}_e = \frac{R_e}{1 + jR_eC_e\omega}} \tag{12}$$
14. On a
$$\boxed{\lim_{\omega\to 0} |\underline{Z}_e(\omega)| = R_e \quad \text{et} \quad \lim_{\omega\to\infty} |\underline{Z}_e(\omega)| = 0} \tag{13}$$
À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et il ne reste que la résistance R_e alors qu'à haute fréquence il se comporte comme un fil et l'impédance d'entrée de l'oscilloscope est nulle.
15. Par analogie avec la partie précédente, pour que l'oscilloscope minimise sa perturbation sur le circuit, il faut que $|\underline{Z}_e|$ soit aussi grande que possible. Les perturbations seront les plus importantes lorsque $|\underline{Z}_e|$ sera faible, c'est-à-dire à hautes fréquences.
16. On a
$$\boxed{\underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t}} \tag{14}$$
17. On a
$$\boxed{\underline{u}_0(t) = \underline{Z}\underline{i}(t) \quad \text{et donc} \quad U_0 = |\underline{u}_0(t)| = |\underline{Z}||\underline{i}(t)| = |\underline{Z}|I_0} \tag{15}$$
18. L'impédance équivalente de $\underline{Z}$ et $\underline{Z}_e$ associées en parallèle est
$$\underline{Z}_{\mathrm{eq}} = \frac{\underline{Z}\,\underline{Z}_e}{\underline{Z} + \underline{Z}_e} \tag{16}$$
On a alors
$$\boxed{\underline{u}_m(t) = \frac{\underline{Z}\,\underline{Z}_e}{\underline{Z} + \underline{Z}_e}\underline{i}(t) \quad \text{et} \quad U_m = |\underline{u}_m| = \left|\frac{\underline{Z}\,\underline{Z}_e}{\underline{Z} + \underline{Z}_e}\right| I_0} \tag{17}$$

19. L'erreur relative est :

$$\boxed{e_r = \left|\frac{U_0 - U_m}{U_m}\right| = \left|\frac{U_0}{U_m} - 1\right| = \left|\left|\frac{\underline{Z} + \underline{Z}_e}{\underline{Z}_e}\right| - 1\right|} \tag{18}$$

20. On peut considérer que $e_r \approx 0$ à condition que $\frac{\underline{Z}+\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e} \approx 1$, ont doit donc avoir

$$\boxed{|\underline{Z}| \ll |\underline{Z}_e|} \tag{19}$$

Ce résultat est parfaitement cohérent avec le résultat de la question 15, et maintenant on sait plus précisément quand on pourra considérer que $|\underline{Z}|$ est suffisamment petit.

21. On part de l'expression de e_r avec $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z}_e = \frac{R_e}{1+jR_eC_e\omega}$, On trouve alors

$$e_r = \left|\left|\frac{R + R_e + jRR_eC_e\omega}{R_e}\right| - 1\right| = \frac{1}{R_e}\sqrt{(R+R_e)^2 + (RR_eC_e\omega)^2} - 1 \tag{20}$$

La condition de non perturbation donne alors

$$\frac{1}{R_e}\sqrt{(R+R_e)^2 + (RR_eC_e\omega)^2} - 1 < \alpha \Leftrightarrow \sqrt{(R+R_e)^2 + (RR_eC_e\omega)^2} < (\alpha+1)R_e \tag{21}$$

Soit

$$(R+R_e)^2 + (RR_eC_e\omega)^2 < ((\alpha+1)R_e)^2 \Leftrightarrow (RC_e\omega)^2 < (\alpha+1)^2 - \left(1 + \frac{R}{R_e}\right)^2 \tag{22}$$

Comme $R < \alpha R_e$, on obtient

$$w < \frac{\sqrt{(1+\alpha)^2 - \left(1 + \frac{R}{R_e}\right)^2}}{RC_e} \tag{23}$$

Enfin en écrivant que $f = \frac{\omega}{2\pi}$. On trouve que la fréquence au dessus de laquelle l'oscilloscope induit une perturbation du circuit est

$$\boxed{f_c = \frac{\sqrt{(1+\alpha)^2 - \left(1 + \frac{R}{R_e}\right)^2}}{2\pi RC_e} = 1{,}4\,\mathrm{MHz}} \tag{24}$$

22. L'avance de phase de $u_m(t)$ sur $u_0(t)$ est

$$\varphi = \arg(\underline{u}_m) - \arg(\underline{u}_0) = \arg\left(\frac{\underline{u}_m}{\underline{u}_0}\right) = \arg\left(\frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z} + \underline{Z}_e}\right) = \arg\left(\frac{R_e}{R_e + R + jRR_eC_e\omega}\right) \tag{25}$$

On trouve donc

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{RR_eC_e\omega}{R + R_e}\right)} \tag{26}$$

3 Limitation des perturbations par utilisation d'une sonde atténuatrice

23. L'impédance équivalente $\underline{Z}_{\mathrm{eq}}$ de deux condensateurs associés en parallèle est telle que

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = jC_1\omega + jC_2\omega = j(C_1 + C_2)\omega \quad \text{donc} \quad \underline{Z}_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega} \tag{27}$$

24. L'impédance équivalente de l'entrée de l'oscilloscope avec le câble coaxial est

$$\underline{Z}_{ec} = \frac{R_e}{1 + jR_e(C_e + C_{\mathrm{coax}})\omega} \tag{28}$$

L'impédance de la sonde est

$$\underline{Z}_S = \frac{R_S}{1 + jR_SC_S\omega} \tag{29}$$

On exprime alors la tension $\underline{u}_{\text{osc}}$ en fonction de $\underline{u}_D$ avec la formule du pont diviseur de tension

$$\underline{u}_{\text{osc}} = \frac{\underline{Z}_{\text{ec}}}{\underline{Z}_{\text{ec}} + \underline{Z}_S}\underline{u}_D = \frac{R_e(1 + jR_SC_S\omega)}{R_S(1 + jR_e(C_e + C_{\text{coax}})\omega) + R_e(1 + jR_SC_S\omega)} \tag{30}$$

Soit finalement

$$\boxed{\underline{u}_{\text{osc}} = \frac{R_e}{R_S + R_e}\frac{1 + jR_SC_S\omega}{1 + j\omega\frac{R_eR_S}{R_e+R_S}(C_e + C_S + C_{\text{coax}})}} \tag{31}$$

Par identification avec la forme proposée, on trouve

$$\boxed{k = \frac{R_e}{R_S + R_e} \quad \beta_1 = R_SC_S \quad \beta_2 = \frac{R_eR_S}{R_e + R_S}(C_e + C_S + C_{\text{coax}})} \tag{32}$$

25. On cherche C_S telle que $\beta_1 = \beta_2$. On doit donc avoir

$$R_SC_S = \frac{R_eR_S}{R_e + R_S}(C_e + C_{\text{coax}} + C_S) \Leftrightarrow (R_e + R_S)C_S = R_e(C_e + C_{\text{coax}} + C_S) \tag{33}$$

$$\Leftrightarrow R_SC_S = R_e(C_e + C_{\text{coax}}) \tag{34}$$

Et finalement

$$\boxed{C_S = \frac{R_e}{R_S}(C_e + C_{\text{coax}}) = 13\,\text{pF}} \tag{35}$$

26. Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on trouve

$$\boxed{k = \frac{R_e}{R_S + R_e} = 0{,}1} \tag{36}$$

C'est une sonde atténuatrice car la tension mesurée par l'oscilloscope est 10 fois plus faible que la tension réelle. Cela explique aussi pourquoi l'oscilloscope affiche une valeur 10 fois supérieure à la tension mesurée.

27. Il faut régler la sonde pour que la tension mesurée par l'oscilloscope soit une image fidèle de la tension réelle, le gain est indépendant de la fréquence et le déphasage entre la tension mesurée et la tension réelle est nul. Si la sonde n'était pas réglée, il y aurait un déphasage et un gain qui dépendraient de la fréquence. Si la tension mesurée n'est pas sinusoïdale, elle n'aurait même pas la même forme que la tension réelle.

28. On a déjà exprimé $\underline{Z}_e$ (que l'on avait appelée $\underline{Z}_{ec}$) dans l'équation (28)

$$\boxed{\underline{Z}_e = \frac{R_e}{1 + jR_e(C_e + C_{\text{coax}})\omega}} \tag{37}$$

29. L'impédance vue depuis le dipôle D en présence de la sonde est

$$\underline{Z}'_e = \underline{Z}_e + \underline{Z}_S = \frac{R_e}{1 + jR_e(C_e + C_{\text{coax}})\omega} + \frac{R_S}{1 + jR_SC_S\omega} \tag{38}$$

Comme la sonde est réglée, on utilise l'équation (34) pour montrer que

$$\boxed{\underline{Z}'_e = \frac{R_e}{1 + jR_SC_S\omega} + \frac{R_S}{1 + jR_SC_S\omega} = \frac{R_e + R_S}{1 + jR_SC_S\omega}} \tag{39}$$

30. On a alors

$$\boxed{\frac{\underline{Z}'_e}{\underline{Z}_e} = \frac{R_e + R_S}{R_e} = 10} \tag{40}$$

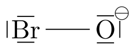
On voit donc que la sonde atténuatrice permet de faire en sorte que l'impédance d'entrée de l'oscilloscope vue par le dipôle D soit 10 fois supérieure à sa valeur sans la sonde. On a vu que plus l'impédance d'entrée de l'oscilloscope est grande, moins il perturbe le circuit. La sonde permet donc de moins perturber le circuit et donc éventuellement de faire des mesures à plus haute fréquence.

Exercice 2 : Cinétique de la dismutation de l'ion bromite

L'ion hypobromite BrO^- se dismute spontanément en ion bromure Br^- et en ion bromate ${BrO_3}^-$ selon la réaction suivante :

$$3\,BrO^-(aq) \longrightarrow {BrO_3}^-(aq) + 2\,Br^-(aq) \tag{1}$$

1. On a les configurations électroniques suivantes :
   — $[O] = \underbrace{1s^2}_{\text{cœur}}\underbrace{2s^2 2p^4}_{\text{valence}}$
   — $[Br] = \underbrace{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6}_{\text{cœur}}\ \underbrace{4s^2}_{\text{valence}}\ \underbrace{3d^{10}}_{\text{cœur}}\ \underbrace{4p^5}_{\text{valence}}$
2. L'oxygène est dans la ligne commençant par $2s$, donc la deuxième ligne et dans la quatrième colonne du bloc p, donc la 16ème colonne.
   Le brome est dans la ligne commençant par $4s$, donc la 4ème ligne et dans la 5éme colonne du bloc p, c'est-à-dire la 17ème colonne.
3. Il manque au brome un électron pour avoir la configuration électronique d'un gaz noble (dernière colonne), il formera donc préférentiellement l'ion Br^-.
4. L'ion BrO^- possède $n_e = 7+6+1 = 14$ électrons de valence, il y aura donc 7 doublets à placer. On obtient la représentation de Lewis suivante :



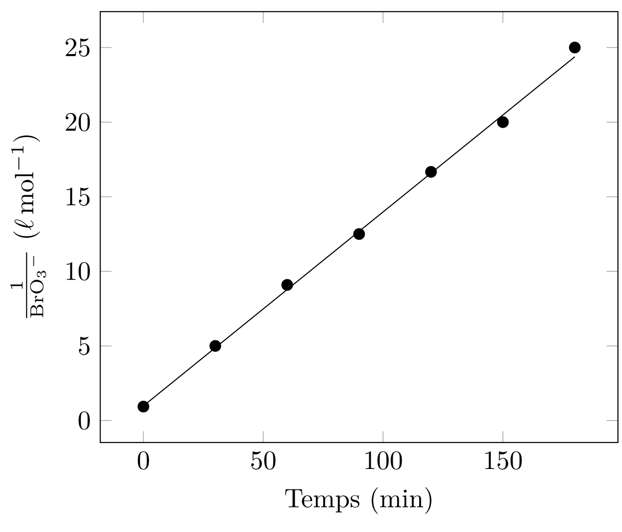
5. L'ion bromate possède $n_e = 7+3\times 6+1 = 26$ électrons de valence, soit 13 doublets. On obtient alors les deux configurations de Lewis possibles suivantes :

6. Comme l'oxygène est plus électronégatif que le brome, la représentation de Lewis la plus probable est celle où la charge négative est portée par l'oxygène, donc celle de gauche dans la réponse à la question précédente.

On donne ci-dessous l'évolution de la concentration en ions bromite d'une solution aqueuse à 25 °C en fonction du temps :

Temps (min)	0	30	60	90	120	150	180
$[BrO_3-]$ $(\mathrm{mol}\,\ell^{-1})$	1,07	0,20	0,11	0,08	0,06	0,05	0,04

7. Si la réaction est d'ordre 2 par rapport à ${BrO_3}^-$, on en reportant les points dans le graphe donnant $\frac{1}{[BrO_3-]}$ en fonction de t, on devrait obtenir une droite croissante de cœfficient directeur $a = 3k$. On obtient le graphique suivant



Les points sont bien alignés, l'hypothèse de l'ordre 2 est validée. On trouve une droite de pente $a = 13 \times 10^{-2}\,\ell\,\mathrm{mol}^{-1}\,\mathrm{min}^{-1}$, ce qui correspond à une constante de vitesse

$$\boxed{k = \frac{a}{3} = 4{,}4 \times 10^{-2}\,\ell\,\mathrm{mol}^{-1}\,\mathrm{min}^{-1}} \tag{2}$$

8. On note $c(t)$ la concentration en ${BrO_3}^-$ à l'instant t, on a alors

$$\frac{1}{c(t)} = \frac{1}{c(0)} + 3kt \tag{3}$$

Pour déterminer l'expression du temps de demi-réaction, on écrit

$$c(\tau_{1/2}) = \frac{c(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{c(\tau_{1/2})} = \frac{1}{c(0)} + 3k\tau_{1/2} = \frac{2}{c(0)} \tag{4}$$

Donc finalement

$$\boxed{\tau_{1/2} = \frac{1}{3kc(0)} \approx 7{,}2\,\mathrm{min}} \tag{5}$$

9. Cette fois, on veut que

$$c(T) = \alpha c(0) \quad \text{avec} \quad \alpha = 10^{-3} \tag{6}$$

On trouve de la même manière qu'à la question précédente

$$\frac{1}{c(T)} = \frac{1}{\alpha c(0)} = \frac{1}{c(0)} + 3kT \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha c(0)} = 3kT \tag{7}$$

et finalement

$$\boxed{T = \frac{1-\alpha}{3k\alpha c(0)} \approx 7{,}2 \times 10^{3}\,\mathrm{min}} \tag{8}$$