DM6 : Cinématique – corrigé

Exercice 1 : Centrifugeuse

1. Voir figure 1
2. On projette les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, on obtient

$$\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y \tag{1}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y \tag{2}$$

3. On vérifie que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e}_y = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \tag{3}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{e}_y = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r \tag{4}$$

4. En utilisant les relations $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r \tag{5}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \tag{6}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta \tag{7}$$

5. On a $R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$ et on a immédiatement

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta \tag{8}$$

6. La vitesse angulaire ω_5 de rotation de la centrifugeuse lorsque le cosmonaute est soumis à une accélération de norme $5g$ est telle que :

$$R\omega_5^2 = 5g \;\Rightarrow\; \omega_5 = \sqrt{\frac{5g}{R}} = \sqrt{\frac{5 \times 9,81}{60}} = 0{,}90\,\mathrm{rad\,s^{-1}} = 8{,}6\,\mathrm{tr\,min^{-1}} \tag{9}$$

7. Voir figure 1
8. Le point M tourne dans le sens trigonométrique et comme il ralentit $\ddot{\theta} < 0$
9. Voir figure 1

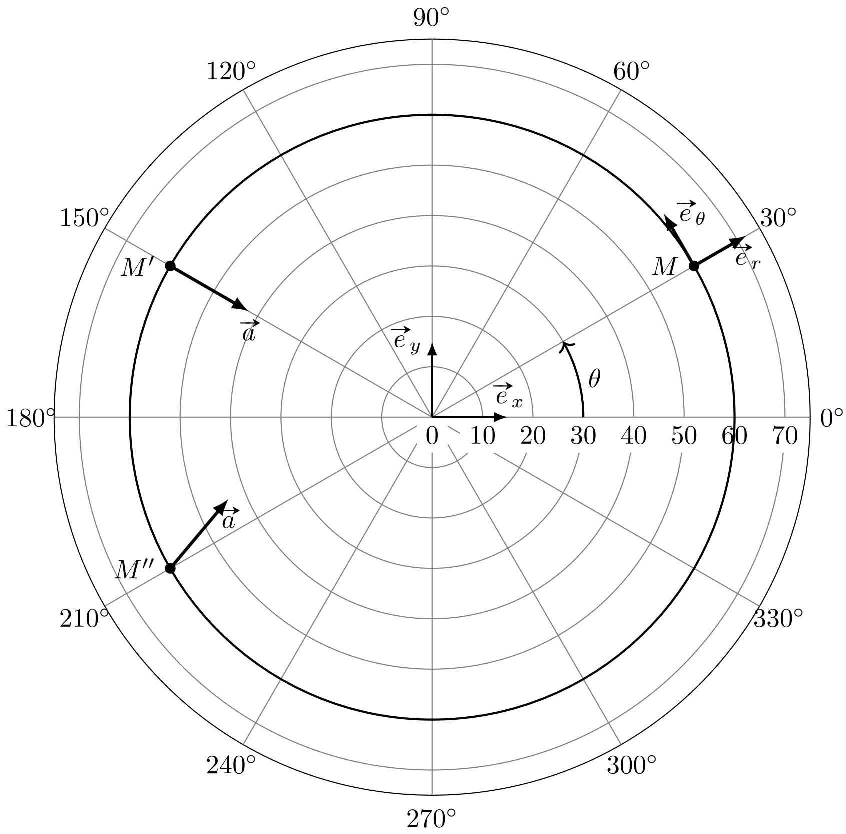

FIGURE 1 – Trajectoire du cosmonaute

Exercice 2 : TRAJECTOIRE ELLIPTIQUE

Un satellite décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre dont l'équation en coordonnées polaires est :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \tag{1}$$

ou p et $0 < e < 1$ sont deux paramètres constants, respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse. On sait par ailleurs que la conservation du moment cinétique implique :

$$r^2\dot{\theta} = C \tag{2}$$

avec C une constante positive qui dépend uniquement des conditions initiales du satellite.

1. On obtient $r_{\min} = p/(1+e)$ pour $\theta = 0$ puis $r_{\max} = p/(1-e)$ pour $\theta = \pi$.

On considère alors la représentation graphique suivante de la trajectoire du satellite

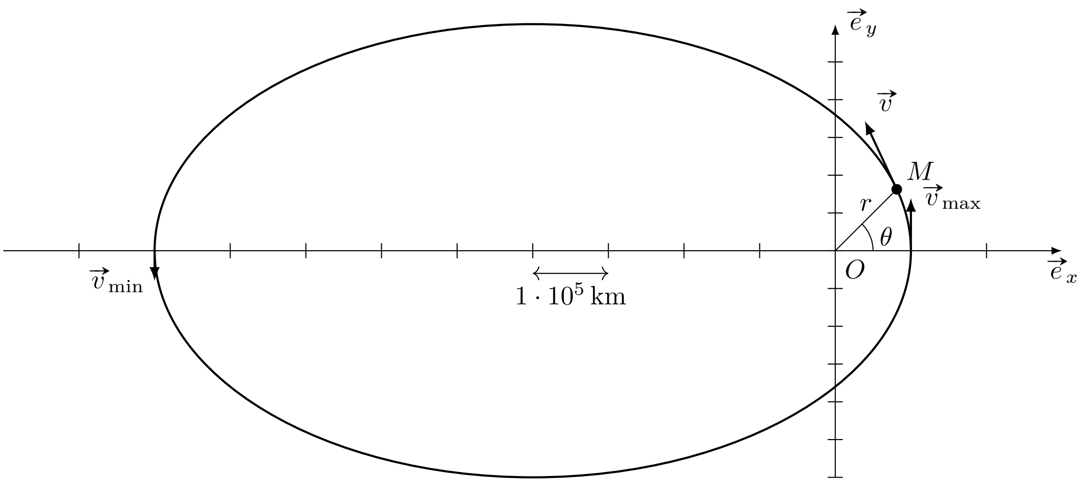

FIGURE 1 – Trajectoire du satellite

2. On a

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \tag{3}$$

$$\frac{p}{r_{\min}} + \frac{p}{r_{\max}} = 1 + e + 1 - e = 2 \Rightarrow p = 2\frac{r_{\max} r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \tag{4}$$

On mesure ensuite $r_{\min} \approx 1 \cdot 10^5$ km et $r_{\max} \approx 9 \cdot 10^5$ km. On en déduit

$$\boxed{e = 0{,}8 \text{ et } p = 1{,}8 \cdot 10^5\,\text{km}} \tag{5}$$

3. Voir figure 1. On obtient graphiquement que $v_r > 0$ puis que $v_\theta > 0$
4. On a en base polaire $\vec{OM} = r\,\vec{e}_r$. On dérive cette expression et on obtient

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \tag{6}$$

Or on sait d'après l'énoncé que $r\dot{\theta} = r^2\theta/r = C/r$. On obtient alors au final

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + \frac{C}{r}\vec{e}_\theta} \tag{7}$$

5. On a affaire à une fonction composée $r(\theta(t))$. On obtient alors pour la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} \times \frac{pe\sin(\theta)}{(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{e}{p}\sin(\theta)r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{r} = \frac{eC}{p}\sin(\theta) \tag{8}$$

d'où le résultat.
De plus, on observe que l'on a bien $\dot{r} \geq 0$ et donc $v_r \geq 0$ quelque soit $\theta \in [0, \pi]$ comme observé sur le schéma de la trajectoire.
6. On a $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ d'où l'on déduit

$$\vec{a} = \frac{eC}{p}\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e}_r + \frac{eC}{p}\sin(\theta)\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta - \dot{r}\frac{C}{r^2}\,\vec{e}_\theta - \frac{C}{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_r \tag{9}$$

La composante du vecteur accélération selon le vecteur $\vec{e}_\theta$ a pour expression

$$a_\theta = \frac{eC}{p}\sin(\theta)\dot{\theta} - \underbrace{\dot{r}\frac{C}{r^2}}_{=\dot{r}\dot{\theta}} = \frac{eC}{p}\sin(\theta)\dot{\theta} - \frac{eC}{p}\sin(\theta)\dot{\theta} = 0 \tag{10}$$

d'où le résultat.
7. On a

$$a_r = \frac{eC}{p}\dot{\theta}\cos(\theta) - \frac{C}{r}\dot{\theta} = \frac{eC}{p}\dot{\theta}\cos(\theta) - C\frac{1+e\cos(\theta)}{p}\dot{\theta} = -\frac{C}{p}\dot{\theta} \tag{11}$$

On utilise une dernière fois la conservation du moment cinétique $r^2\dot{\theta} = C$ et on obtient finalement le résultat attendu

$$\boxed{a_r = -\frac{C^2}{pr^2}} \tag{12}$$

L'accélération radiale est liée à la force gravitationelle qui s'exercice entre le satellite et la Terre via le principe fondamental de la dynamique. En effet, cette dernière est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance Terre/Satellite.
8. Le vecteur vitesse a pour norme $||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{r}^2 + (C/r)^2}$ soit

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\frac{eC}{p}^2\sin^2\theta + \frac{C^2}{p^2}(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{C}{p}\sqrt{e^2\sin^2(\theta) + e^2\cos^2(\theta) + 2e\cos(\theta) + 1} = \frac{C}{p}\sqrt{e^2 + 2e\cos(\theta) + 1} \tag{13}$$

La norme de la vitesse est donc minimale lorsque $\cos(\theta) = -1$ soit pour $\theta = \pi$. On obtient alors

$$\boxed{||\vec{v}||_{\min} = \frac{C}{p}(e-1)} \tag{14}$$

De même, la norme de la vitesse est maximale lorsque $\cos(\theta) = 1$ soit pour $\theta = 0$. On obtient ainsi

$$\boxed{||\vec{v}||_{\max} = \frac{C}{p}(e+1)} \tag{15}$$

Dans les deux cas, on obtient $\sin(\theta) = 0$ et donc le vecteur vitesse est porté selon $\vec{e}_\theta$ car $\dot{r} = 0$.