

DM7 : Mécanique, acide-base – corrigé

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous rendrez une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : MASSE ACCROCHÉE À UN RESSORT TOURNANT

- Comme la masse est au repos dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées doit être nulle. Les forces subies par la masse sont
 - Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos(\alpha)\vec{e}_x - \sin(\alpha)\vec{e}_y)$;
 - La réaction de la tige (normale à la tige car pas de frottements) $\vec{R} = R\vec{e}_y$;
 - La force exercée par le ressort $\vec{F} = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_x$.

On projette les forces sur l'axe \vec{e}_x pour éliminer la réaction de la tige que l'on ne connaît pas et on obtient

$$-k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) + mg \cos(\alpha) = 0 \quad \text{soit} \quad \ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \cos(\alpha) \quad (1)$$

- Le point M a un mouvement circulaire uniforme de rayon $r = \ell'_{\text{eq}}$ et de vitesse angulaire ω .
- Le vecteur accélération pour un mouvement circulaire uniforme est $\vec{a} = -r\omega^2\vec{e}_r$. Ici on a $r = \ell'_{\text{eq}} \sin(\alpha)$ et $\vec{e}_r = \vec{u}$. Donc

$$\vec{a} = -\ell'_{\text{eq}} \sin(\alpha) \omega^2 \vec{u} \quad (2)$$

- On projette le vecteur précédent dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) et on obtient directement

$$\vec{a} = -\ell'_{\text{eq}} \sin(\alpha) \omega^2 (\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y) \quad (3)$$

- On écrit le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et comme à la question 1, on le projette sur \vec{e}_x pour obtenir

$$-m\ell'_{\text{eq}} \sin^2(\alpha) \omega^2 = mg \cos(\alpha) - k(\ell'_{\text{eq}} - \ell_0) \quad (4)$$

Ce qui donne en isolant ℓ'_{eq} :

$$\ell'_{\text{eq}} = \frac{k}{k - m \sin^2(\alpha) \omega^2} \quad (5)$$

On remarque effectivement que le dénominateur s'annule lorsque $\omega = \sqrt{\frac{k}{m \sin^2(\alpha)}}$ et $\ell'_{\text{eq}} \rightarrow \infty$. Cela signifie qu'au-delà de cette vitesse limite, le système n'est pas stable et le ressort s'allonge indéfiniment. En pratique il sortira très probablement de sa zone de déformation élastique et sera certainement endommagé.

- Cette fois, on projette le PFD sur l'axe \vec{e}_y pour obtenir

$$-mg \sin(\alpha) + R = -m\ell'_{\text{eq}} \sin(\alpha) \omega^2 \cos(\alpha) \quad (6)$$

d'où

$$R = mg \sin(\alpha) - m\ell'_{\text{eq}} \omega^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (7)$$

- La masse décolle de la tige lorsque la réaction de la tige s'annule, c'est à dire (pour $\alpha \neq 0$) pour :

$$mg - m\ell'_{\text{eq}} \omega_0^2 \cos(\alpha) = 0 \quad \text{soit} \quad g - \frac{k\ell_{\text{eq}}}{k - m\omega_0^2 \sin^2(\alpha)} \omega_0^2 \cos(\alpha) = 0 \quad (8)$$

En isolant ω^2 , on trouve

$$\omega_0^2 = \frac{gk}{\ell_{\text{eq}}k \cos(\alpha) + mg \sin^2(\alpha)} \quad (9)$$

En utilisant l'expression de ℓ_{eq} trouvée à la question 1, on obtient finalement

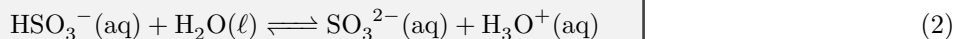
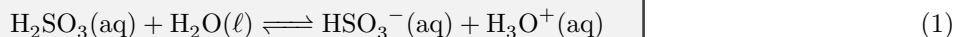
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gk}{mg + k\ell_0 \cos(\alpha)}} \quad (10)$$

8. — Lorsque $k \rightarrow \infty$, le ressort est infiniment raide et c'est équivalent à la situation où la masse serait attachée à une corde. On trouve dans ce cas $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_0 \cos(\alpha)}}$
- Lorsque $k \rightarrow 0$ le ressort est infiniment souple, donc la longueur à l'équilibre du ressort tend vers $+\infty$ et la moindre rotation fera décoller la masse.
9. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Comme $\sin(\alpha) = 1$, on trouve que ω_0 doit être égale à la pulsation limite pour laquelle le ressort s'allonge indéfiniment (voir question 5). C'est normal, si l'angle α est très faible, il faut que la longueur du ressort soit très grande pour que l'accélération soit suffisamment grande pour espérer que la composante suivant \vec{e}_y de l'accélération permette à la masse de décoller.
- Dit autrement, il faut que le rayon de la trajectoire soit très grand pour que la composante suivant \vec{e}_y de la force centrifuge soit assez importante pour faire décoller la masse.

Exercice 2 : ACIDE SULFURIQUE

1 L'acide sulfureux

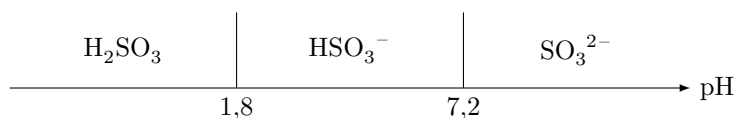
1. Les équations de dissociation de H_2SO_3 sont



2. La solution étant électriquement neutre, la somme des charges en solution doit être nulle et on a

$$[\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{HSO}_3^-] - 2[\text{SO}_3^{2-}] = 0 \quad (3)$$

3. On a le diagramme de prédominance suivant :



À un pH de 2,5, la solution est clairement dans le domaine de prédominance de HSO_3^- , et la quantité de SO_3^{2-} est complètement négligeable. L'équation (3) devient donc

$$[\text{HSO}_3^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (4)$$

4. Avec la valeur de pH, on a directement $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,5}$, et la question précédente permet de trouver $[\text{HSO}_3^-] = 3,2 \times 10^{-3} \text{ mol } \ell^{-1}$. On trouve la concentration de H_2SO_3 en utilisant la constante d'équilibre K_{a1} :

$$K_{a1} = \frac{[\text{HSO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{SO}_3]} \quad \text{soit} \quad [\text{H}_2\text{SO}_3] = \frac{[\text{HSO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a1}} = \underline{6,3 \times 10^{-4} \text{ mol } \ell^{-1}} \quad (5)$$

Pour déterminer la concentration de SO_3^{2-} , on utilise de la même manière l'expression de K_{a2} :

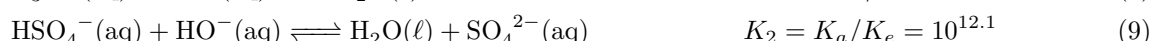
$$K_{a2} = \frac{[\text{SO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_3^-]} \quad \text{soit} \quad [\text{SO}_3^{2-}] = \frac{[\text{HSO}_3^-]K_{a2}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \underline{6,3 \times 10^{-8} \text{ mol } \ell^{-1}} \quad (6)$$

2 L'acide sulfurique

5. Considérons une masse m de solution. Elle contient une masse d'acide sulfurique $m_{\text{H}_2\text{SO}_4} = 0,98m$ d'acide sulfurique et elle a un volume $V = m/\rho$. La concentration molaire de la solution est

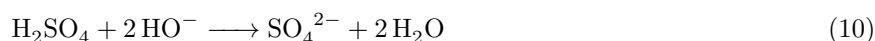
$$c = \frac{n_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{V} = \frac{m_{\text{H}_2\text{SO}_4}}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4} V} = \frac{0,98m}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4} m/\rho} = \frac{0,98\rho}{M_{\text{H}_2\text{SO}_4}} \approx \underline{18,4 \text{ mol } \ell^{-1}} \quad (7)$$

6. Le pH-mètre utilise deux électrodes, pour mesurer une différence de potentiel. Il y a une électrode de référence dont le potentiel est connu, et une électrode de verre dont le potentiel dépend de la concentration en ions H_3O^+ en solution.
7. La courbe 1 représente le pH de la solution, la courbe 2 représente la proportion de SO_4^{2-} (il y en a peu au début, puis la quantité augmente au cours du dosage) et la courbe 3 représente la proportion de HSO_4^- (il y en a beaucoup au début et ils sont consommés au cours du dosage).
8. Avant l'équivalence, il y a en solution H_3O^+ , HSO_4^- et SO_4^{2-} . Les réactions qui peuvent se produire sont



Les constantes d'équilibre de ces deux réactions ne sont pas suffisamment différentes pour que l'on observe deux sauts de pH. Les deux espèces (HSO_4^- et H_3O^+) sont dosées simultanément.

9. Sur la courbe de titrage, on repère le moment où $[\text{SO}_4^{2-}] = [\text{HSO}_4^-]$, c'est le moment où le pH de la solution est égal au $\text{p}K_a$ du couple acide-base. On retrouve bien $\underline{\text{p}K_a \approx 2}$.
10. D'après la courbe de dosage, on trouve $V_{\text{eq}} = 10,8 \text{ ml}$. Comme on dose simultanément H_3O^+ et HSO_4^- , on peut écrire la réaction globale de dosage comme



En notant n_0 la quantité de matière initiale d'acide introduit en solution, on a, à l'équivalence : $n_0 = 2c_A V_0 = C_B V_{\text{eq}}$. Où C_A est la concentration de l'acide dosé. On a donc

$$C_A = \frac{C_B V_{\text{eq}}}{2V_A} = 1,80 \times 10^{-1} \text{ mol } \ell^{-1} \quad (11)$$

Comme on a dilué la solution commerciale d'un facteur 100 avant le dosage, on trouve que la concentration initiale de la solution commerciale est de $\underline{c = 18,0 \text{ mol } \ell^{-1}}$.