

DM5 : Filtrage – corrigé

Exercice 1 : FILTRE DE HARTLEY

- En utilisant les comportements de la bobine et du condensateur à basse et haute fréquence, on obtient les résultats suivants :
 - À basse fréquence, la bobine se comporte comme un fil et on a directement $\underline{s} = 0$ car la tension de sortie est prise aux bornes d'une bobine.
 - À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, la tension aux bornes des deux bobines est donc nulle. En faisant un pont diviseur de tension, on trouve que $\underline{s} = 0$ également.

C'est un filtre qui coupe les hautes et les basses fréquences, c'est donc un passse-bande.

- On commence par déterminer la tension \underline{u}_C aux bornes de C en fonction de \underline{e} . On utilise pour cela un pont diviseur de tension en calculant une impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$ des deux bobines et du condensateur. On a :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{2jL\omega/(jC\omega)}{2jL\omega + 1/(jC\omega)} = \frac{2L/C}{j(2L\omega - 1/(C\omega))} \quad (1)$$

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} \underline{e} = \frac{2\frac{L}{C}}{2\frac{L}{C} + jR(2L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{2L\omega})} \underline{e} \quad (2)$$

En utilisant un second pont diviseur de tension formé par les deux bobines en série, on a

$$\underline{s} = \frac{1}{2} \underline{u}_C = \frac{\frac{1}{2}}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{2L\omega})} \underline{e} \quad (3)$$

$\underline{H}(\omega)$

- En partant de l'équation (3), on a

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + jR\sqrt{\frac{C}{2L}} \left(\sqrt{2LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{2LC}\omega} \right)} \quad (4)$$

En notant $\underline{H}_0 = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ et $\underline{Q} = R\sqrt{\frac{C}{2L}}$, on retrouve bien l'expression demandée. On a les valeurs numériques suivantes :

- $\underline{Q} = 71$;
 - $\omega_0 = 7,1 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$;
 - $\underline{H}_0 = 0,5$.
- On commence par déterminer l'expression de $G_{\text{dB}}(\omega)$:

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = 20 \log(|\underline{H}|(\omega)) = 20 \log \left(\frac{\underline{H}_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} \right) \quad (5)$$

On détermine ensuite les expressions approchées de $G_{\text{dB}}(\omega)$ à haute et basse fréquence, c'est-à-dire lorsque $x \rightarrow \infty$ et lorsque $x \rightarrow 0$.

- Lorsque $x \rightarrow \infty$, on a

$$G_{\text{dB}}(\omega) \approx 20 \log \left(\frac{\underline{H}_0}{Qx} \right) = 20 \log(\underline{H}_0/Q) - 20 \log(x) \quad (6)$$

On a donc une asymptote de pente -20 dB/décade . Graphiquement, on trouve une pente de $\frac{-73 - (-43)}{1,5 - 0} = -20 \text{ dB/décade}$.

— Lorsque $x \rightarrow 0$, on a

$$G_{dB}(\omega) \approx 20 \log \left(\frac{H_0}{Q/x} \right) = 20 \log(H_0/Q) + 20 \log(x) \quad (7)$$

On a donc une asymptote de pente 20 dB/décade. Graphiquement, on trouve une pente de $\frac{-73 - (-43)}{-1.5 - 0} = 20$ dB/décade.

Les valeurs trouvées graphiquement sont donc compatibles avec les valeurs théoriques.

5. La valeur a correspond à l'ordonnée à l'origine des asymptote, d'après la question précédente on a

$$a = 20 \log(H_0/Q) = -43 \text{ dB} \quad (8)$$

La valeur de b correspond au gain pour ω_0 , c'est-à-dire pour $x = 1$. On a alors

$$b = 20 \log(H_0) = -6 \text{ dB} \quad (9)$$

6. En général, lorsque le diagramme de Bode présente une pente à 20 dB/décade, le filtre peut être utilisé comme dérivateur et lorsqu'il y a une pente à -20 dB/décade, il peut être utilisé comme intégrateur. Vérifions cela par le calcul :

— à basse fréquence, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{H_0}{Q} jx = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega \quad (10)$$

On a donc $\underline{s} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega \underline{e}$ et le filtre a bien un comportement dérivateur car le signal d'entrée est multiplié par $j\omega$.

— à haute fréquence, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{jQx} = \frac{H_0}{Q} \frac{1}{jx} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega} \quad (11)$$

On a donc $\underline{s} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{\underline{e}}{j\omega}$ et le filtre a bien un comportement intégrateur car le signal d'entrée est divisé par $j\omega$.

7. Pour produire ce signal, on utilise un GBF réglé pour produire un signal sinusoïdal avec une pulsation $\omega_1 = \omega_0$, d'amplitude E_1 avec un décalage (offset) égal à E_2 .

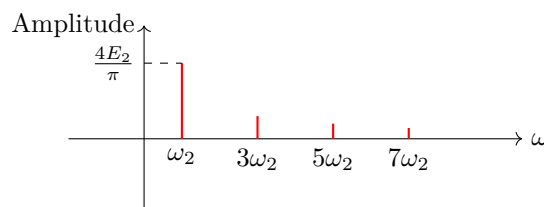
8. Le filtre étant un passe bande, la composante continue est totalement coupée. On a également $\omega_1 = \omega_0$. À cette pulsation, la fonction de transfert est $\underline{H}(\omega_0) = H_0 = \frac{1}{2}$. Le signal de sortie est donc

$$s_1(t) = \frac{E_1}{2} \cos(\omega_1 t) \quad (12)$$

9. La valeur efficace $e_2(t)$ est :

$$E_{2,\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e_2(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E_2^2 dt} = \sqrt{E_2^2} = E_2 \quad (13)$$

10. Le spectre de $e_2(t)$ est uniquement composé d'harmoniques impaires d'amplitude proportionnelle à $1/n$, où n est le numéro de l'harmonique. Il ressemble à ça :



On utilise l'expression du gain déterminé dans l'équation 5 pour déterminer les amplitudes des pics dans le signal de sortie. On a

Pulsation	Amplitude d'entrée (V)	Gain	Amplitude de sortie (V)
$\omega_2 = \omega_0/3$	1,27	$2,7 \times 10^{-3}$	$3,4 \times 10^{-3}$
$3\omega_2 = \omega_0$	0,42	$5,0 \times 10^{-1}$	$2,1 \times 10^{-1}$
$5\omega_2 = 5\omega_0/3$	0,25	$6,6 \times 10^{-3}$	$1,7 \times 10^{-3}$
$7\omega_2 = 7\omega_0/3$	0,18	$3,7 \times 10^{-3}$	$6,8 \times 10^{-4}$

On remarque que l'amplitude de sortie du pic de pulsation $3\omega_2$ est bien supérieure à l'amplitude des autres pics. Le signal de sortie sera donc proche d'un signal sinusoïdal de pulsation $3\omega_2$. D'où le nom de « tripleur de fréquence ».

11. On fait la même analyse qu'à la question précédente, en déterminant les amplitudes des différentes harmoniques du signal de sortie :

Pulsation	Amplitude d'entrée (V)	Gain	Amplitude de sortie (V)
$\omega_3 = \omega_0$	0,41	$5,0 \times 10^{-1}$	$2,0 \times 10^{-1}$
$3\omega_3 = 3\omega_0$	0,05	$2,7 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-4}$
$5\omega_3 = 5\omega_0$	0,02	$1,5 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{-5}$
$7\omega_3 = 7\omega_0$	0,01	$1,0 \times 10^{-3}$	$8,5 \times 10^{-6}$

On remarque que l'amplitude de sortie du pic de pulsation $\omega_3 = \omega_0$ est bien supérieure à l'amplitude des autres pics. Le signal de sortie sera donc proche d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_3 et d'amplitude $2,0 \times 10^{-1}$ V.