Homogénéité et optique géométrique

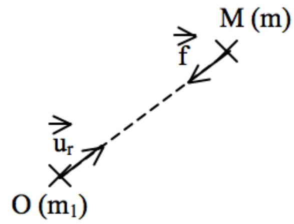
Jeudi 22 septembre 2022 - Durée 2h

- ⋆ **Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans le désordre.**
- ⋆ **La calculatrice est autorisée.**
- ⋆ **Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.**
- ⋆ **Chaque réponse doit être justifiée. Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale.**

Pour l'optique géométrique dans les conditions de Gauss

- Soient deux points conjugués par le dioptre plan A et A' :
$$\mathrm{A} \xrightarrow{\text{Dioptre plan}} \mathrm{A'}$$
La relation de conjugaison du dioptre est : $\dfrac{n}{\overline{\mathrm{HA}}} = \dfrac{n'}{\overline{\mathrm{HA'}}}$
avec H le projeté orthogonal de A sur le dioptre, n l'indice du milieu d'où viennent les rayons avant leur arrivée sur le dioptre et n' l'indice du milieu où se propagent les rayons après réfraction.
- Soient deux points conjugués A et A' par une lentille mince $\mathrm{L_1}$, de centre O et de distance focale image f_1', plongeant dans un milieu d'indice optique égal à 1 :
$$\mathrm{A} \xrightarrow{(\mathrm{L_1},\mathrm{O},f_1')} \mathrm{A'}$$
La relation de conjugaison de la lentille mince est : $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \dfrac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \dfrac{1}{f_1'}$.

I. Homogénéité



L'interaction gravitationnelle entre deux points matériels $\mathrm{O}(m_1)$ et $\mathrm{M}(m)$, est régie par la loi de Newton : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}_{\mathrm{O}\to\mathrm{M}} = -\,\mathrm{G}\,\dfrac{m_1 m}{r^2}\,\overrightarrow{u}_r$ (r étant la distance entre les points matériels O et M).

Par ailleurs, l'énergie E d'un photon est donnée par la relation $\mathrm{E} = \hbar\,\omega$, ω étant une pulsation.

1. En considérant les deux relations données ci-dessus, déterminer la dimension de la constante G ainsi que celle de la constante $\hbar$.
2. En utilisant l'homogénéité, construisez :
   — une masse, dite « masse de Planck », notée m_P. On déterminera m_P sous la forme $m_\mathrm{P} = \mathrm{G}^\delta.\hbar^\eta.c^\mu$;
   — un temps, dit « temps de Planck », noté t_P. On déterminera t_P sous la forme $t_\mathrm{P} = \mathrm{G}^\alpha.\hbar^\beta.c^\gamma$;
   — une distance, dite « longueur de Planck », notée ℓ_P. On déterminera ℓ_P sous la forme $\ell_\mathrm{P} = \mathrm{G}^\Delta.\hbar^\nu.c^\xi$.

   NB : Les résultats seront au final écrits en notations habituelles, c'est à dire en utilisant les fractions et les racines carrées $\sqrt{\ldots}$.
3. Calculer m_P, t_P et ℓ_P.

Données : $\overrightarrow{u}_r$ est un vecteur unitaire : $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{||\overrightarrow{\mathrm{OM}}||}$; constante de Planck réduite $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, avec h la constante de Planck, $h = 6,63.10^{-34}$ S.I ; constante gravitationnelle $\mathrm{G} = 6,67.10^{-11}$ S.I ; vitesse de la lumière $c = 3,00.10^8$ S.I. On retrouve régulièrement la pulsation ω dans des termes en « $\cos(\omega\, t)$ », t étant un temps.

II. Du dioptre à la lentille

II.1 Relation de conjugaison pour un dioptre sphérique

1. Énoncer les lois de Snell Descartes relatives à la réfraction pour un dioptre qui sépare deux milieux d'indice n_1 et n_2.
2. Soit un dioptre sphérique de centre C de sommet S séparant un milieu homogène transparent d'indice n_1 d'un milieu homogène transparent d'indice n_2.
   Un rayon issu d'un point source A rencontre le dioptre en I et se réfracte en semblant provenir de A′ considéré ici comme ponctuel (cf. Figure 1).

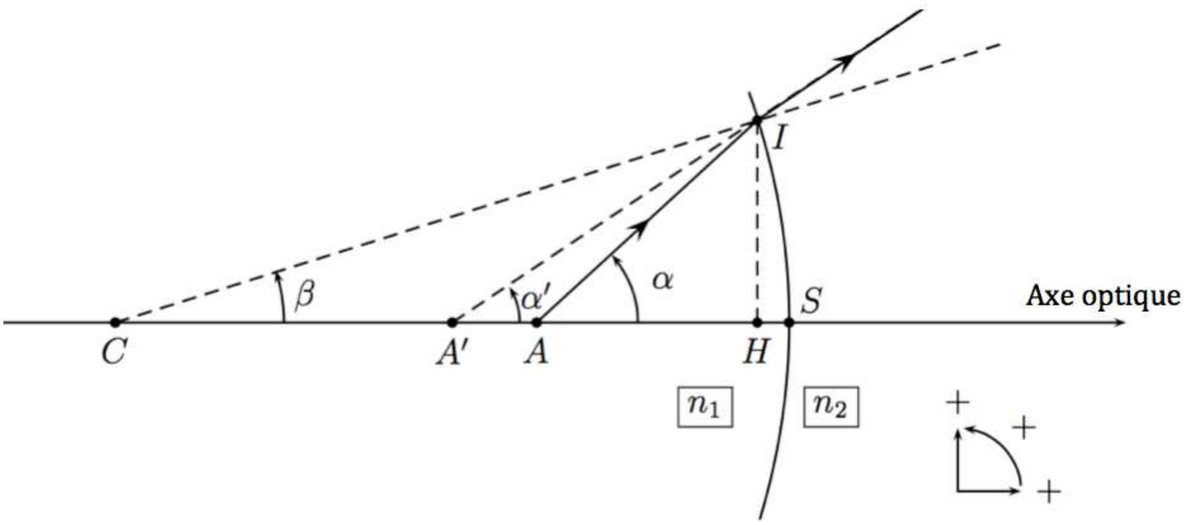


Figure 1 - Dioptre sphérique

   a) Préciser la signification du terme « homogène ».
   b) D'après le dessin, quel est le milieu le plus réfringent ?
   c) Exprimer les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 en fonction des angles orientés α, α' et β reportés sur la figure.
3. On se place dans les conditions de Gauss.
   a) Rappeler en quoi consistent les conditions de Gauss.
      Que peut-on dire de $\overline{\mathrm{SH}}$ dans les conditions de Gauss ?
   b) Dans ces conditions, donner une relation linéaire liant i_1, i_2, n_1 et n_2.
4. Relation de conjugaison du dioptre sphérique.
   a) Déduire des relations précédentes la relation de conjugaison du dioptre sphérique sous la forme :

$$\frac{n_2}{\overline{\mathrm{SA'}}} - \frac{n_1}{\overline{\mathrm{SA}}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{\mathrm{SC}}}$$

   b) Retrouver la relation de conjugaison du dioptre plan à partir de la relation donnée ci-dessus.

II.2 Passage à la lentille mince

L'objectif d'un appareil photographique jetable est constitué d'une lentille convexe plan L_1 dont la géométrie est présentée sur la figure 2 ci-après.

La lentille est en plastique d'indice $n = 1,450$. Les différentes dimensions sont $\overline{S_1C_1} = 15,75$ mm et $\overline{S_1P_1} = 2,900$ mm. Les résultats seront donnés avec quatre chiffres significatifs. Y compris dans les expressions littérales, on pourra remplacer n_0 par 1.

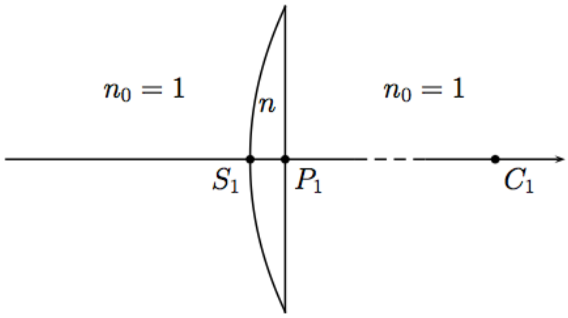


Figure 2 - Lentille mince

5. **Méthode pas à pas** : on cherche à déterminer la position de l'image A' par la lentille d'un objet A sur l'axe S_1C_1 tel que $\overline{S_1A} = -7035$ mm en déterminant la position des images successives par le dioptre sphérique puis par le dioptre plan. On notera A_1 l'image de A par le dioptre sphérique. On pourra utiliser les relations de conjugaison établies ou données dans la partie précédente.
   a) Écrire le diagramme objet/image pour le dioptre sphérique puis le diagramme objet/image pour le dioptre plan, en respectant les notations proposées par l'énoncé.
   b) Faire le tracé d'un rayon issu de A pour trouver la position de A_1 et celle de A' (pas à l'échelle mais retranscrivant le fait que $n > 1$).
   c) Déterminer $\overline{S_1A_1}$ en fonction de $\overline{S_1C_1}$, $\overline{S_1A}$ et n. Faire l'application numérique.
   d) Déterminer $\overline{S_1A'}$ en fonction de $\overline{P_1S_1}$, $\overline{S_1A_1}$ et n. Faire l'application numérique.
6. On souhaite caractériser la lentille par une seule relation de conjugaison. On notera F_1 son foyer objet et F'_1 son foyer image. On utilisera notamment les notations proposées dans les diagrammes objet/image suivants :

$$A_\infty \xrightarrow{\text{Dioptre sphérique}} A_2 \xrightarrow{\text{Dioptre plan}} F'_1 \qquad \text{(Diag 1)}$$

$$F_1 \xrightarrow{\text{Dioptre sphérique}} A_3 \xrightarrow{\text{Dioptre plan}} A'_\infty \qquad \text{(Diag 2)}$$

   a) En utilisant le diagramme (Diag 1) ainsi que les relations de conjugaison établies ou données dans la partie précédente, déterminer la position $\overline{S_1F'_1}$ en fonction de $\overline{S_1P_1}$, $\overline{S_1C_1}$ et n. Faire l'application numérique.
   b) En utilisant le diagramme (Diag 2) ainsi que les relations de conjugaison établies ou données dans la partie précédente, déterminer la position $\overline{S_1F_1}$ en fonction de $\overline{S_1C_1}$ et n. Faire l'application numérique.
   c) Déterminer numériquement la distance focale f'_1 de la lentille L_1 définie comme la distance algébrique $\overline{OF'_1}$, avec $S_1 \simeq P_1 = O$, le centre optique de la lentille (approximation des lentilles minces). La lentille L_1 est-elle convergente ou divergente ?
   d) Utiliser ces résultats pour retrouver la position de l'image A' de l'objet A par la lentille L_1. Comparer avec le résultat de la question 5. et conclure.

♫