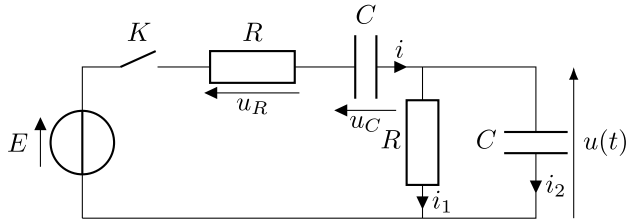
TD5 : Oscillateurs – exercices supplémentaires – corrigé

Exercice 1 : Oscillateur à condensateurs

1. On sait que la dimension de RC est un temps, donc la constante de temps recherchée est $\tau = RC$.
2. On commence par annoter le circuit avec des tensions et des intensités



— À $t = 0^-$ les condensateurs sont déchargés, donc $u(0^-) = u_C(0^-) = 0$. Comme $u(0^-) = Ri_1(0^-)$, on en déduit que $i_1(0^-) = 0$. De plus le circuit étant en régime permanent, $i_2(0^-) = i(0^-) = 0$ (condensateurs = interrupteurs ouvert).

— Les tensions étant continues aux bornes des condensateurs, on a $u_C(0^+) = u(0^+) = 0$. En déduit comme précédemment que $i_1(0^+) = 0$. La loi des mailles donne $u_R(0^+) = E$ et donc $i(0^+) = E/R$. Enfin, la loi des nœuds permet d'écrire $i_2(0^+) = i(0^+) = E/R$.

3. Pour établir l'équation différentielle, on écrit les relations pour les composants et le circuit. On a
   — $u_R = Ri$ (Ohm) ;
   — $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (condensateur) ;
   — $u = Ri_1$ (Ohm) ;
   — $i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (condensateur) ;
   — $u + u_R + u_C = E$ (mailles) ;
   — $i = i_1 + i_2$ (nœuds).

   Avec ces équations, on arrive finalement à

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2}u = 0} \tag{1}$$

   On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti avec

$$\boxed{\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2}} \tag{2}$$

   On trouve alors que $Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ et on en déduit que l'oscillateur est en régime apériodique.

4. Avec la méthode de résolution de l'équation différentielle du cours, on trouve pour le régime apériodique

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) \tag{3}$$

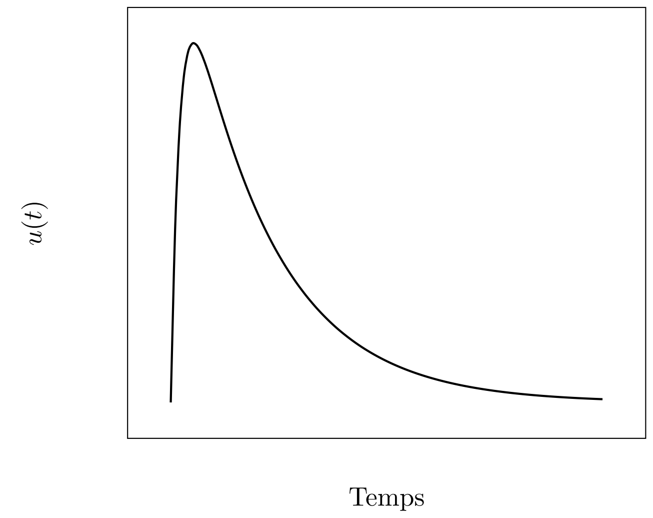
   En utilisant les conditions initiales, on peut trouver A et B :

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \tag{4}$$

   et

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{E}{RC} = A(r_1 - r_2) = A\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{1-4Q^2} \Leftrightarrow A = \frac{QE}{\sqrt{1-4Q^2}} \tag{5}$$

   On a l'allure suivante pour $u(t)$:



   La tension $u(t)$ est nulle à $t = 0^+$ mais elle y est croissante car $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{RC}$. Puis elle tend vers 0 lorsque $t \to \infty$.

Exercice 2 : Interprétation énergétique du facteur de qualité

1. C'est presque une question de cours, il faut savoir le faire les yeux fermés ! (loi des mailles + lois des composants).
2. On calcule le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, On trouve $Q = 10$. Donc cet oscillateur est en régime pseudo-périodique et la solution de l'équation à la forme indiquée (voir cours)
3. A et B sont déterminés à partir des conditions initiales que l'on trouve en étudiant les valeurs des tensions et des intensités à $t = 0^-$ et $t = 0^+$. On trouve que $u_C(O^-) = E$ et $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^-) = 0$. En utilisant ces conditions initiales, on trouve

$$\boxed{A = E \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{\omega\tau} \approx \frac{E}{20}} \tag{1}$$

4. Comme le facteur de qualité est assez grand ($Q = 10$) on peut faire l'approximation $\omega = \omega_0$. On remarque également que $B \ll A$, on peut donc négliger le terme en $\sin(\omega t)$ dans l'expression de $u_C(t)$. On obtient alors

$$\boxed{u_C(t) \approx Ee^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 CEe^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)} \tag{2}$$

5. Le graphique montre bien la décroissance de l'énergie totale avec le temps à cause de la dissipation dans la résistance et on voit également les échanges d'énergie entre le condensateur et la bobine.
6. L'énergie totale de l'oscillateur est la somme de l'énergie du condensateur et de celle de la bobine. On a donc

$$E_{\text{tot}} = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2 = \frac{1}{2}CE^2e^{-\frac{2t}{\tau}}\left(\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2\right) = \frac{1}{2}CE^2e^{-\frac{2t}{\tau}} \tag{3}$$

7. On calcule la variation relative d'énergie du circuit sur une période avec l'expression de $E_{\text{tot}}(t)$ trouvée à la question précédente :

$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} = \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}} + e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}}}{e^{-\frac{2t}{\tau}}} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \tag{4}$$

   On fait l'approximation que $\frac{2T}{\tau} \ll 1$ (ce qui est un peu discutable vu les valeurs numériques !) et on trouve que

$$\boxed{\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} \approx \frac{2T}{\tau} \approx \frac{2T_0}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}.} \tag{5}$$

   La variation relative d'énergie sur une période est bien inversement proportionnelle à Q.