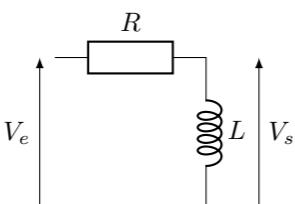


TD7 : Filtrage linéaire – corrigé

Exercice 1 : FILTRE RL

1.



2. À basses fréquences, la bobine se comporte comme un fil, la tension de sortie est alors nulle. À hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée. C'est donc un filtre passe-haut.

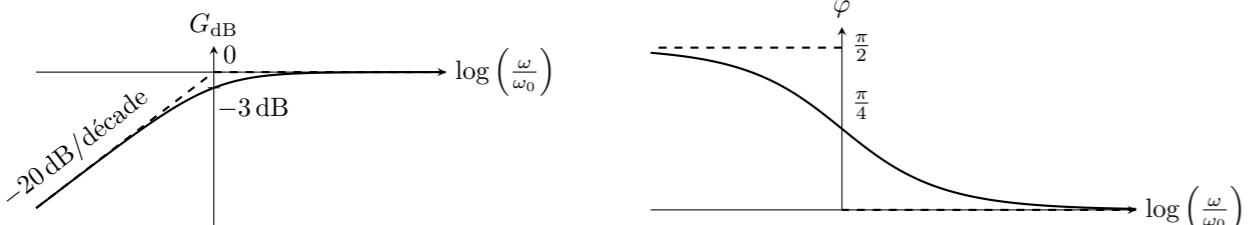
3. On remarque qu'il s'agit d'un pont diviseur de tension et on obtient directement :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

4. En notant $\omega_0 = \frac{R}{L}$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} \quad \text{donc} \quad G_{dB} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

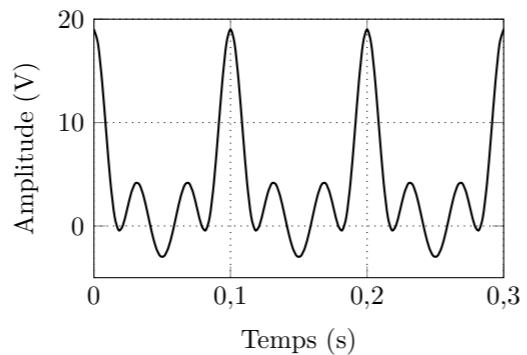
On obtient le diagramme de Bode suivant :



5. Si $G_{dB} = -3$ dB alors $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{2}$ et $\omega = \omega_0$. Donc la pulsation de coupure à -3 dB est $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

Exercice 2 : SPECTRE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

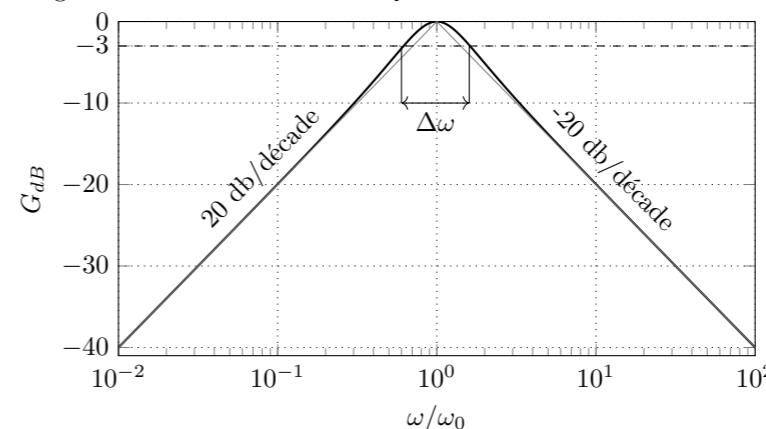
1. La valeur moyenne vaut 4 V
2. La fréquence fondamentale est 10 Hz
3. — Harmonique 1 (fondamentale) : $f=10$ Hz ; $A=6$ V
— Harmonique 2 : $f=20$ Hz ; $A=3$ V
— Harmonique 3 : $f=30$ Hz ; $A=5$ V
— Harmonique 4 : $f=40$ Hz ; $A=1$ V
4. Allure du signal ci-contre.



Exercice 3 : DIAGRAMME DE BODE

1. Il s'agit d'un filtre passe-bande car $|\underline{H}(\omega \rightarrow 0)| = 0$ et $|\underline{H}(\omega \rightarrow \infty)| = 0$
2. On calcule $G_{dB}(\omega) = 20 \log (|\underline{H}(\omega)|) = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)$
3. — Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $G_{dB}(\omega) \simeq -20 \log(Q\omega_0) + 20 \log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de 20dB/décade
— Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $G_{dB}(\omega) \simeq -20 \log(Q/\omega_0) - 20 \log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de -20dB/décade.
— On a également $G_{dB}(\omega = \omega_0) = 0$
- 4.

5. Diagramme de Bode tracé avec $Q = 1$:



6. On cherche ω_1 et ω_2 telles que $G(\omega_1) = G(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve que $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (fait dans le cours)

Exercice 4 : FILTRE MOYENNEUR

1. La fonction de transfert est celle d'une filtre passe-bas ($\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{H}(\omega)| = 0$ et $|\underline{H}(0)| = 1$. Donc la tension est prise aux bornes du condensateur (il se comporte comme un fil pour $\omega \rightarrow \infty$).
2. Pour réaliser un filtre moyenneur, il faut transmettre la composante continue du signal et éliminer toutes les autres.
3. On veut une atténuation de 40 dB à $f_0 = 1$ kHz et on peut écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}}$$

donc on a :

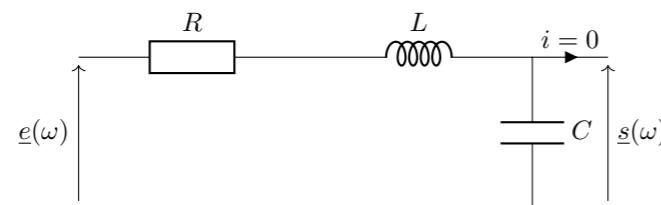
$$-20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c} \right)^2} \right) = -40 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{f_0}{f_c} \right)^2 = 10^4 \Leftrightarrow f_c = \frac{f_0}{\sqrt{10^4 - 1}} \approx 10 \text{ Hz}$$

Avec $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ on trouve $R \approx 16 \text{ k}\Omega$

4. Le signal donné comporte une composante continue de 2 V et une composante alternative de fréquence fondamentale $f_0 = 1$ kHz. Le filtre que l'on étudie élimine complètement tout ce qui a une fréquence supérieure à 1 kHz. Il ne restera plus que la composante continue et le signal de sortie sera $u_s(t) = 2$ V.
5. Ce filtre se comporte comme un intégrateur si $f \gg f_c$. Car dans ce cas, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega}$.
6. Dans ce cas, le signal est composé d'une composante continue de 2 V et d'harmoniques dont la fréquence est un multiple entier de 1 kHz. Le filtre élimine alors toute les harmoniques et ne laisse passer que la composante continue, il se comporte comme un moyenneur. En sortie on observe une tension constante de 2 V.
7. Lorsque l'oscilloscope est en mode AC, le signal mesuré passe par un filtre passe-haut qui coupe la composante continue du signal. Comme le signal mesuré est continu, l'oscilloscope affiche une tension continue de 0 V.
8. Le signal carré ayant une fréquence bien supérieure à la fréquence de coupure du filtre $f \gg f_c$, ce dernier se comporte comme un intégrateur. Or l'intégrale d'un signal carré est un signal triangulaire.

Exercice 5 : FILTRE INCONNU

- Il s'agit d'un filtre *pass-bas* car le gain aux hautes fréquences tend vers 0.
- La pulsation propre du filtre est la pulsation à laquelle on observe la résonance $\omega_0 \approx 800$ rad/s.
- Autour de ω_0 il se produit un phénomène de résonance, l'amplitude du signal de sortie est supérieurs à celle du signal d'entrée. La valeur de Q la plus probable est $Q = 10$ car à $\omega = \omega_0$. La tension de sortie est 10 fois plus grande que la tension d'entrée ($G_{\text{dB}} = 20$).
- On fabrique un circuit *RLC* série et on prend la sortie aux bornes du condensateur :



Pour déterminer les valeurs des composants, on utilise les expressions de ω_c et Q (cours sur l'oscillateur harmonique amorti).

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

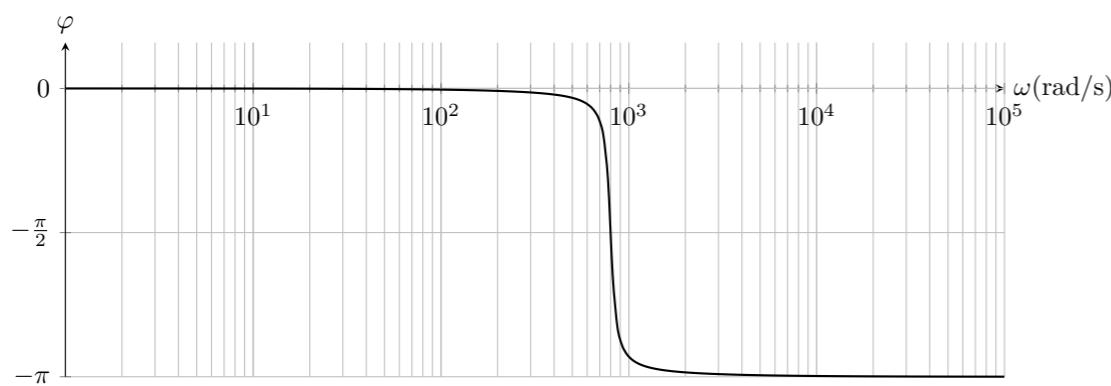
On a donc $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 800$ et $\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10$. On peut prendre $R = 10 \Omega$, $C = \frac{1}{RQ\omega_c} \approx 12 \mu\text{F}$, $L = \frac{1}{C\omega_c^2} \approx 125 \text{ mH}$

- On commence par déterminer la fonction de transfert de ce filtre (voir cours), on trouve

$$H(\omega) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} = \frac{1/jC\omega}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + j\frac{\omega}{\omega_c Q}}.$$

La phase de la fonction de transfert est :

$$\varphi = \arg \left(\frac{-j}{\frac{\omega}{Q\omega_c} - j \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)} \right) = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(Q \left(\frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right)$$

**Exercice 6 : UN FILTRE PARTICULIER**

- On utilise la formule du pont diviseur de tension pour déterminer la tension \underline{u}_C aux bornes du condensateur du bas et \underline{u}_R aux bornes de la résistance du haut. On a

$$\underline{u}_C = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{u}_R = \frac{R}{R + 1/jC\omega} \underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e} \quad (1)$$

Avec la loi des mailles, on a $\underline{u}_C + \underline{s} - \underline{u}_R = 0$ donc

$$\underline{u}_s = \underline{u}_R - \underline{u}_C = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1} \underline{e} \quad \text{et} \quad H(\omega) = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1} \quad (2)$$

- On montre facilement que $|H(\omega)| = 1$ pour toutes les fréquences donc le filtre n'a pas d'effet sur l'amplitude du signal. Par contre on a

$$\arg(H(\omega)) = \pi + \arctan(-RC\omega) - \arctan(RC\omega) = \pi - 2\arctan(RC\omega) \quad (3)$$

Le filtre ne modifie donc que la phase du signal, c'est un déphaseur.

- Il faut que $RC\omega = 1$, donc on doit avoir $RC = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi f}$. Pour $f = 1 \text{ kHz}$, on peut par exemple choisir $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,159 \mu\text{F}$.

Exercice 7 : FILTRAGE D'UN SIGNAL

- On cherche la fréquence de la composante fondamentale de $y(t)$. C'est la composante correspondant à $n = 0$, soit le terme en $\sin(\pi t/\tau)$. Par identification avec $\sin(\omega t)$, on en conclut que $\omega = \pi/\tau = 2\pi f$. Soit $f = \frac{1}{2\tau}$ et $T = 2\tau$
- L'équation donnée pour la décomposition de $y(t)$ ne fait intervenir que des harmoniques d'ordre impair. On en conclut directement que $a_p = 0$ si p est pair. Une harmonique d'ordre impair s'écrit

$$y_{2n+1}(t) = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2\pi(2n+1)ft) \quad (1)$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin((-1)^n 2\pi(2n+1)ft) \quad (2)$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2\pi(2n+1)ft - (-1)^n \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

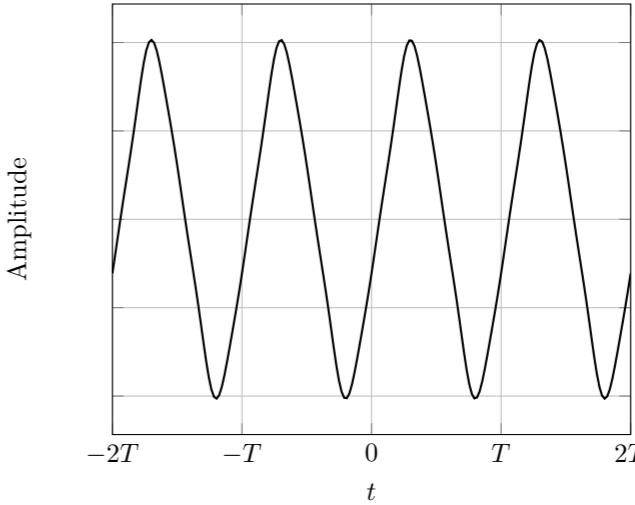
$$= \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2\pi(2n+1)ft + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2}) \quad (4)$$

On a donc pour $p = 2n+1$ impair, $a_p = \frac{8}{\pi^2 p^2}$ et $\varphi_p = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2}$.

- Le module de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est $G(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_c})^2}}$. On calcule le gain pour les trois premières composantes filtrées non nulles, c'est-à-dire pour $p = 1$, $p = 3$ et $p = 5$. On trouve $G(f) = 0,93$, $G(3f) = 0,64$ et $G(5f) = 0,45$. On trouve alors $a'_p/a_1 = G(pf)/p^2$, soit $a'_1/a_1 = 0,93$, $a'_3/a_1 = 7,1 \times 10^{-2}$, $a'_5/a_1 = 1,8 \times 10^{-2}$.

Le déphasage introduit par le filtre passe-bas d'ordre 1 est $\Delta\varphi(f) = -\arctan\left(\frac{f}{f_c}\right)$. Et on a $\varphi'_p = \varphi_p + \Delta\varphi(pf)$. On trouve $\varphi'_1 = -1,95 \text{ rad}$, $\varphi'_3 = 0,695 \text{ rad}$, $\varphi'_5 = -2,68 \text{ rad}$,

- On trace la fonction correspondante : $y'(t) = a'_1 \cos(2\pi ft + \varphi'_1) + a'_3 \cos(3 \times 2\pi ft + \varphi'_3) + a'_5 \cos(5 \times 2\pi ft + \varphi'_5)$



Exercice 8 : FILTRE RC-RC

1. On utilise les comportements asymptotiques des composants.
 - Lorsque $\omega \rightarrow 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, il n'y a pas de courant qui circule dans les résistances et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée (loi des mailles + loi d'Ohm).
 - Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, les condensateurs se comportent comme des fils, la tension \underline{s} est prise aux bornes d'un fil et est donc nulle.
2. Pour déterminer la fonction de transfert, on va utiliser un double pont diviseur de tension. On commence par noter Z_{eq} l'impédance équivalente de la résistance et du condensateur de droite. La tension aux bornes du condensateur de gauche est alors

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} \underline{e} \quad (1)$$

En utilisant un pont diviseur de tension formé par la résistance et le condensateur de droite, on a

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R} \underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R} \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} \underline{e} \quad (2)$$

Il ne reste plus qu'à faire les calculs avec $\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R + \underline{Z}_C}{R + 2\underline{Z}_C}$, et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$. On trouve finalement

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 - R^2 C^2 \omega^2) + 3jRC\omega} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (3)$$

3. On calcule le gain en dB : $G_{\text{dB}} = -10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 9 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$

On détermine les équations des asymptotes :

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $G_{\text{dB}}(\omega) \approx 1$ et on a une asymptote horizontale.
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $G_{\text{dB}}(\omega) \approx -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ et on a une asymptote oblique de pente -40 dB/décade.

On obtient le diagramme de Bode suivant :

