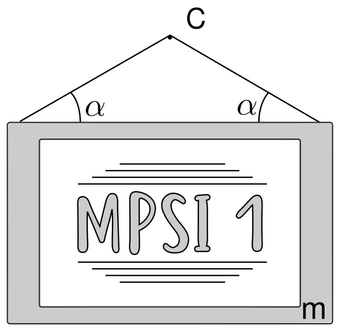
TD11 : Dynamique du point

Exercice 1 : Accrocher un cadre

On souhaite suspendre un cadre de masse m par un fil accroché à deux de ses extrémités et passant autour d'un clou C planté dans le mur. (voir schéma ci-contre).

1. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur le cadre et les représenter sur un schéma.
2. Déterminer la tension du fil de suspension en fonction de la masse m et de l'angle α.
3. A.N. On souhaite suspendre un cadre de masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ avec un fil dont le fabriquant indique qu'il peut supporter au maximum une charge de $5\,\mathrm{kg}$. Déterminer l'angle α minimum que l'on peut utiliser.



Exercice 2 : forces en coordonnées polaires

Un point matériel de masse m suit un mouvement dont l'équation horaire en coordonnées polaires est :

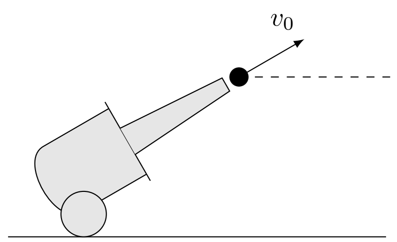
$$\begin{cases} r(t) = A\,(1 + \cos(\omega\, t)) \\ \theta(t) = \omega\, t \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la trajectoire suivie par le point matériel.
2. Déterminer la résultante des forces qu'il doit subir pour suivre cette trajectoire.

Exercice 3 : Tir balistique

Un canon d'artillerie tire des obus de masse m avec une vitesse initiale v_0 dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale. On négligera les frottements de l'air.

1. Faire un bilan des forces appliquées à l'obus au moment où il quitte le canon.
2. Déterminer l'équation horaire de la trajectoire de l'obus dans le référentiel terrestre supposé galiléen. (On choisira un repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ astucieusement)
3. Déterminer l'équation de la trajectoire de l'obus sous la forme $y = f(x)$
4. Exprimer la distance à laquelle l'obus touche le sol en fonction de α et v_0.
5. Déterminer la distance maximale d'un objectif atteignable par le canon en fonction de v_0 et l'angle α correspondant.
6. A.N. : Lors de la première guerre mondiale, l'armée allemande utilisa un canon surnommé "La grosse Bertha" qui tirait des obus de 800 kg avec une vitesse initiale de $333\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Calculer la portée maximale de ce canon.
7. La portée effective était en réalité de 9300 m. Commenter la différence avec la valeur obtenue à la question précédente.



Exercice 4 : Rayon de courbure

Un point matériel de masse m est lancé depuis l'origine avec une vitesse v_0 formant un angle α avec l'horizontale dans le champ de pesenteur terrestre.

1. Déterminer la hauteur maximale $h_{\max}$ atteinte en fonction de v_0, α et g.
2. Déterminer le rayon de courbure R de la trajectoire en son sommet en fonction de v_0, α et g.
3. Donner l'expression du rapport $\frac{R}{h_{\max}}$.

Exercice 5 : Freinage et distance d'arrêt

Lors d'un test de freinage, une voiture, assimilée à un point matériel G de masse $m = 1300\,\mathrm{kg}$, roule sur une route horizontale et freine alors que sa vitesse est $v_1 = 100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Le temps nécessaire à l'arrêt complet du véhicule est $T = 7\,\mathrm{s}$.

On suppose que la force de freinage F_0 est constante. Le référentiel lié au sol est supposé galiléen. La position de la voiture est repérée par son abscisse $x(t)$ mesurée sur l'axe (Ox) du mouvement. On choisit comme origine des temps l'instant du début du freinage, pour lequel la position de G est $x = 0$.

1. Exprimer la force de freinage F_0 en fonction des données. Calculer F_0.
2. Estimer une limite inférieure pour le coefficient de frottement statique entre les roues de la voiture et la route.
3. Calculer la distance d'arrêt d.
4. Exprimer la distance d'arrêt d en fonction de la vitesse initiale v_1, ainsi que de F_0 et de m. Que se passe-t-il si la vitesse initiale est multipliée par deux ?
5. Montrer que si la vitesse V est exprimée en $\mathrm{km\,h^{-1}}$, la distance d'arrêt est approximativement : $d \simeq \left(\dfrac{V}{10}\right)^2$

Exercice 6 : Chute d'une goutte d'eau

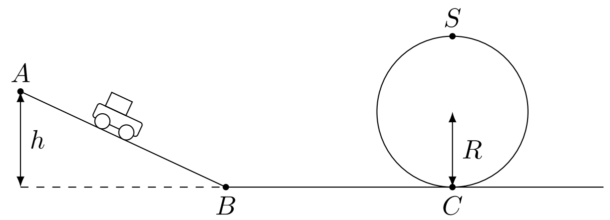
On considère la chute verticale d'une goutte d'eau sphérique dans l'atmosphère. Au cours de sa chute, la goutte est soumise à une force de frottement visqueux proportionnelle à sa vitesse v de valeur $f = 6\pi r\eta v$, avec r le rayon de la goutte et η la viscosité dynamique de l'air.

1. Établir l'équation différentielle de mouvement de la goutte.
2. Déterminer la vitesse limite v_{lim} atteinte par la goutte.
3. La goutte étant initialement au repos, exprimer la vitesse $v(t)$ à un instant t quelconque en fonction de v_{lim}, t et $\tau = \dfrac{v_{\mathrm{lim}}}{g}$. Tracer l'allure de $v(t)$. Que représente τ ? Calculer sa valeur numérique.
4. Au bout de quelle durée la vitesse limite est-elle atteinte à 1% près ? Calculer la distance parcourue par la goutte pendant ce temps.

Données : masse volumique de l'eau $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $r = 50\,\mathrm{\mu m}$, $\eta = 18{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{Nsm^{-2}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

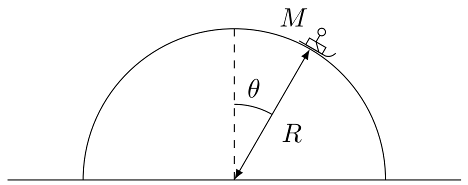
Exercice 7 : Circuit de voitures

Un circuit comporte deux tronçons rectilignes AB et BC. Le premier a pour hauteur h et le second se poursuit par un looping CS de rayon R. La voiturette utilisée est assimilée à un point matériel de masse m. Elle est lâchée sans vitesse initiale. On note g l'intensité du champ de pesanteur et on néglige tous les frottements.



1. Exprimer la vitesse v_B de la voiture au point B en fonction de g et h. Quelle est la vitesse de la voiture en C ?
2. Justifier que la force exercée par la piste sur la voiture est dirigée uniquement suivant la normale à la piste.
3. Exprimer la valeur R_N de la force normale exercée par la piste au sommet S du looping en fonction de m, g, R et v_S la vitesse au sommet.
4. La voiture perd contact avec la piste lorsque R_N s'annule. Déterminer en fonction de R la hauteur $h_{\min}$ pour laquelle la voiturette peut passer le looping.

Exercice 8 : Luge sur un igloo



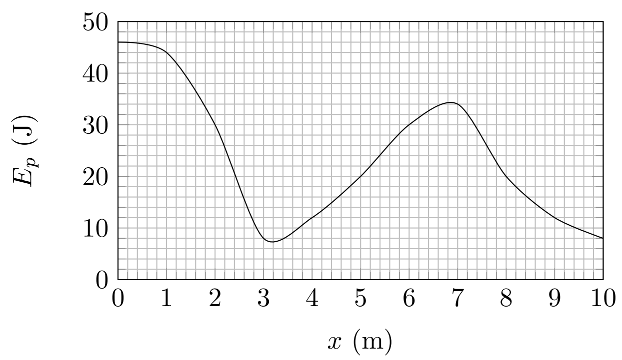
Une personne de masse m assimilable à un point matériel se laisse glisser en luge depuis le sommet de son igloo qui a une forme sphérique de rayon R. Sa position sur l'igloo est repérée par l'angle θ avec la verticale. On néglige tous les frottements.

1. Exprimer la force exercée par l'igloo sur la luge en fonction de m, g, R, θ et de la vitesse v correspondant à cet angle.
2. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique (ou la conservation de l'énergie mécanique), déterminer la vitesse v en fonction de g, R et θ.
3. Quelle est la valeur de l'angle θ_0 pour lequel la luge décolle de l'igloo ?
4. Déterminer en fonction de R la distance entre le bord de l'igloo et le point d'impact de la luge avec le sol.

Exercice 9 : Étude énergétique

Le graphique ci-contre représente l'énergie potentielle d'un point matériel M astreint à se déplacer suivant l'axe x.

1. Indiquer sur le graphique les valeurs de x correspondant à des positions d'équilibre. Indiquer s'il s'agit de positions d'équilibre stable ou instable.
2. À $t = 0$ le point M se trouve en $x = 5$ m. Sachant que son énergie cinétique vaut 10 J, indiquer les valeurs de x accessibles.
3. Combien vaut l'énergie mécanique de M ?
4. Quelle devrait être la valeur de son énergie cinétique pour que sa trajectoire ne soit pas bornée pour $x > 0$?



Exercice 10 : Petits problèmes

1. Un objet lancé verticalement vers le haut passe par la même altitude h aux temps $t = 2\,\mathrm{s}$ et $t = 10\,\mathrm{s}$. Déterminer h.
2. Tous les êtres humains vivant sur la Terre se regroupent au même endroit et sautent au même moment. Déterminer le déplacement subit par la Terre pendant le saut.
3. Le champ de gravitation à la surface de la Lune est de $1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$. Déterminer la hauteur maximale à laquelle vous seriez capable de sauter sur la Lune.
4. Les galeries Lafayette du boulevard Haussmann de Paris reçoivent environ 25 millions de visiteurs par an et comptent 6 étages. Estimer l'énergie électrique annuelle utilisée par le magasin pour faire fonctionner ses escalators.

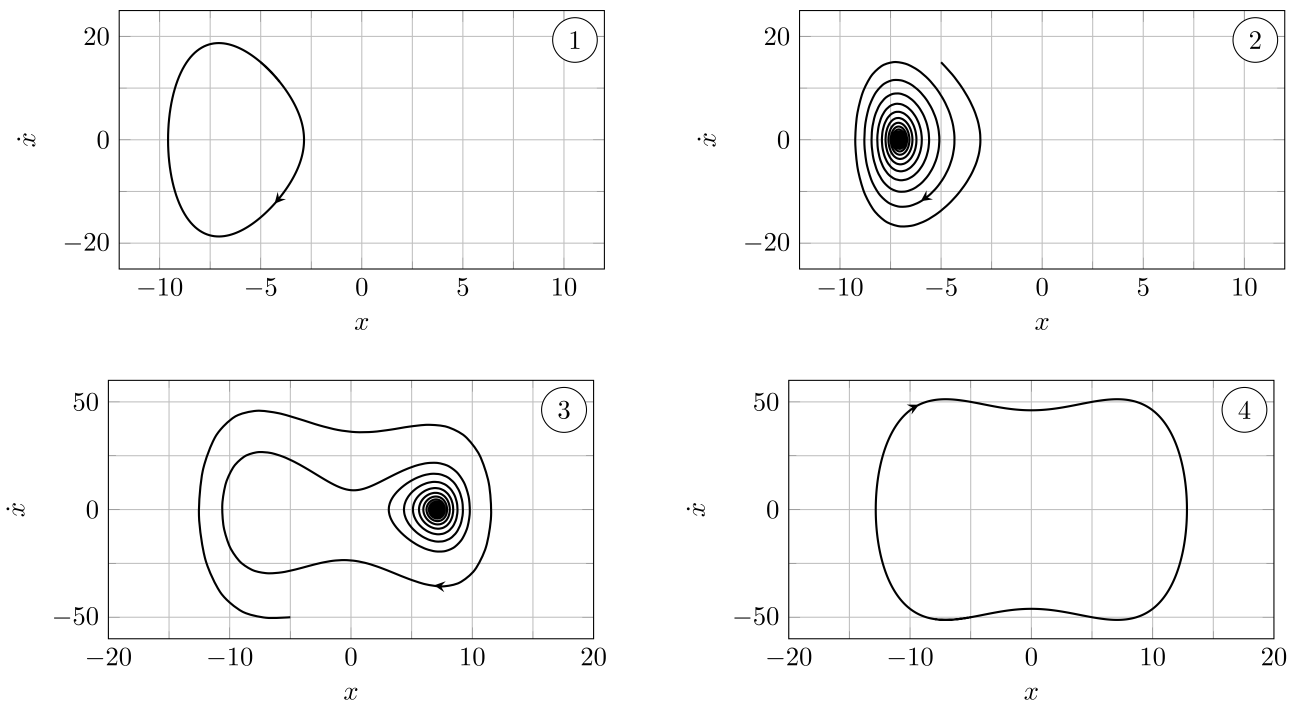
Exercice 11 : Puits double

On considère un point matériel M de masse m ne pouvant se déplacer que suivant un axe Ox dont l'énergie potentielle est

$$E_p(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

où x est l'abscisse de M

1. Tracer le graphique représentant $E_p(x)$ pour $a = 1$, $b = -100$ et $c = 1000$ (unité SI).
2. Quelles sont les positions d'équilibre ? Discuter leur stabilité.
3. Le point M se trouve initialement en $x = -7{,}07$. Quelle énergie cinétique faut-il lui communiquer pour qu'il puisse explorer le puits de droite. On suppose les frottements très faibles.
4. On donne 4 portraits de phase correspondant au trajectoires du point M Décrire pour chacun le mouvement du point M.



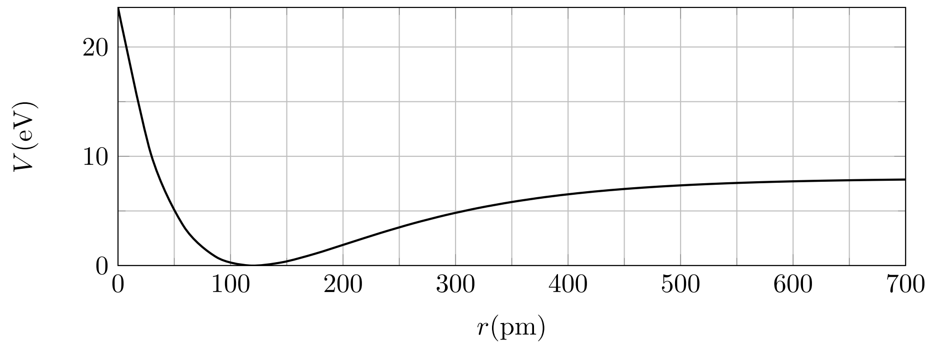
Exercice 12 : Vibrations de la molécule de monoxyde de carbone

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier le problème on considérera que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes suivant l'axe (Ox).

L'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est bien représentée par l'équation empirique

$$V(r) = V_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta(r-r_0)}\right)^2$$

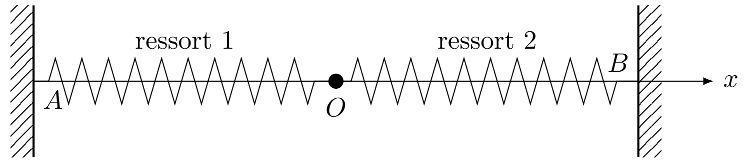
où r est la distance entre les noyaux des deux atomes et r_0, V_0 et β sont des constantes. On donne le graph de $V(r)$ ci-dessous :



1. Quelle est la dimension de β ?
2. Que représentent physiquement r_0, V_0, et β ? Faire apparaître r_0 et V_0 sur le graphique et donner leurs valeurs.
3. Quel sera le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à V_0 ?
4. Montrer qu'autour de la position $r = r_0$, l'interaction entre les deux atomes peut être modélisée par la force de rappel d'un ressort de raideur k dont on donnera l'expression.
5. En déduire la pulsation des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.
6. Que se passe-t-il si l'énergie mécanique de l'atome d'oxygène est supérieure à V_0 ?

Exercice 13 : Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B.

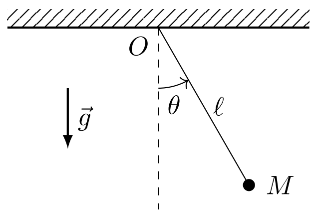


Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $\ell_{\text{éq}}$, et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 différente de 0.

1. Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
2. Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.
3. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4. Montrer que l'énergie mécanique totale du système est constante au cours du temps.

Exercice 14 : Pendule simple

On s'intéresse à un *pendule simple*. Il s'agit d'une masse ponctuelle pendue par un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixe. On repère la position du point M par l'angle θ que fait le fil avec la verticale. On négligera tous les frottements. Le pendule est lâché sans vitesse initial depuis un angle θ_0.



1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse M.
2. Expliquer pourquoi la trajectoire est circulaire. Dans ces conditions, la vitesse du point M est $v = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
3. L'énergie mécanique du point M est $E = E_c + E_p$, avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (énergie cinétique) et $E_p = mgh$ (énergie potentielle) avec h l'altitude du point M. Justifier que l'énergie totale du système est constante et en déduire une équation différentielle sur θ.
4. L'équation différentielle obtenue est-elle celle d'un oscillateur harmonique ?

On se place maintenant dans le cas où le pendule oscille faiblement, c'est à dire $|\theta(t)| \ll 1$. Dans ce cas on peut écrire $\sin(\theta) \approx \theta$.

5. Utiliser cette approximation pour simplifier l'équation différentielle obtenue à la question 3. Et la mettre sous forme canonique.
6. En déduire la période d'oscillation du pendule. Montrer que la période d'oscillation est indépendante de l'amplitude d'oscillation. On parle alors d'*isochronisme* des oscillations.