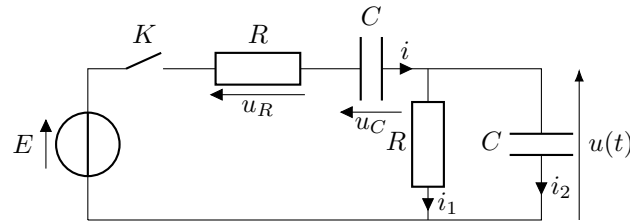


## TD5 : Oscillateurs – exercices supplémentaires – corrigé

### Exercice 1 : OSCILLATEUR À CONDENSATEURS

- On sait que la dimension de  $RC$  est un temps, donc la constante de temps recherchée est  $\tau = RC$ .
- On commence par annoter le circuit avec des tensions et des intensités



- À  $t = 0^-$  les condensateurs sont déchargés, donc  $u(0^-) = u_C(0^-) = 0$ . Comme  $u(0^-) = Ri_1(0^-)$ , on en déduit que  $i_1(0^-) = 0$ . De plus le circuit étant en régime permanent,  $i_2(0^-) = i(0^-) = 0$  (condensateurs = interrupteurs ouverts).
  - Les tensions étant continues aux bornes des condensateurs, on a  $u_C(0^+) = u(0^+) = 0$ . En déduit comme précédemment que  $i_1(0^+) = 0$ . La loi des mailles donne  $u_R(0^+) = E$  et donc  $i(0^+) = E/R$ . Enfin, la loi des nœuds permet d'écrire  $i_2(0^+) = i(0^+) = E/R$ .
3. Pour établir l'équation différentielle, on écrit les relations pour les composants et le circuit. On a
- $u_R = Ri$  (Ohm);
  - $i = C \frac{du_C}{dt}$  (condensateur);
  - $u = Ri_1$  (Ohm);
  - $i_2 = C \frac{du}{dt}$  (condensateur);
  - $u + u_R + u_C = E$  (mailles);
  - $i = i_1 + i_2$  (nœuds).

Avec ces équations, on arrive finalement à

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} u = 0 \quad (1)$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti avec

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \quad (2)$$

On trouve alors que  $Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$  et on en déduit que l'oscillateur est en régime apériodique.

4. Avec la méthode de résolution de l'équation différentielle du cours, on trouve pour le régime apériodique

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \quad (3)$$

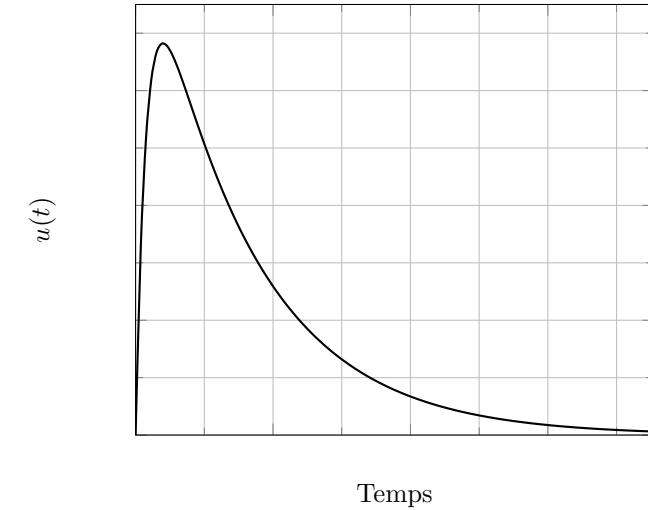
En utilisant les conditions initiales, on peut trouver  $A$  et  $B$  :

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \quad (4)$$

et

$$\frac{du}{dt}(0) = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{E}{RC} = A(r_1 - r_2) = A \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \Leftrightarrow A = \frac{QE}{\sqrt{1 - 4Q^2}} \quad (5)$$

On a l'allure suivante pour  $u(t)$  :



La tension  $u(t)$  est nulle à  $t = 0^+$  mais elle y est croissante car  $\frac{du}{dt} = \frac{E}{RC}$ . Puis elle tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

### Exercice 2 : INTERPRÉTATION ÉNERGÉTIQUE DU FACTEUR DE QUALITÉ

- C'est presque une question de cours, il faut savoir le faire les yeux fermés ! (loi des mailles + lois des composants).
- On calcule le facteur de qualité  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . On trouve  $\overline{Q} = 10$ . Donc cet oscillateur est en régime pseudo-périodique et la solution de l'équation à la forme indiquée (voir cours)
- $A$  et  $B$  sont déterminés à partir des conditions initiales que l'on trouve en étudiant les valeurs des tensions et des intensités à  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$ . On trouve que  $u_C(0^-) = E$  et  $\frac{du_C}{dt}(0^-) = 0$ . En utilisant ces conditions initiales, on trouve

$$A = E \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{\omega\tau} \approx \frac{E}{20} \quad (1)$$

4. Comme le facteur de qualité est assez grand ( $Q = 10$ ) on peut faire l'approximation  $\omega = \omega_0$ . On remarque également que  $B \ll A$ , on peut donc négliger le terme en  $\sin(\omega t)$  dans l'expression de  $u_C(t)$ . On obtient alors

$$u_C(t) \approx Ee^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\omega_0 C E e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

- Le graphique montre bien la décroissance de l'énergie totale avec le temps à cause de la dissipation dans la résistance et on voit également les échanges d'énergie entre le condensateur et la bobine.
- L'énergie totale de l'oscillateur est la somme de l'énergie du condensateur et de celle de la bobine. On a donc

$$E_{\text{tot}} = E_C + E_L = \frac{1}{2} C u_C(t)^2 + \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{2} C E^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} (\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2) = \frac{1}{2} C E^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \quad (3)$$

7. On calcule la variation relative d'énergie du circuit sur une période avec l'expression de  $E_{\text{tot}}(t)$  trouvée à la question précédente :

$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} = \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}} + e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}}}{e^{-\frac{2t}{\tau}}} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \quad (4)$$

On fait l'approximation que  $\frac{2T}{\tau} \ll 1$  (ce qui est un peu discutable vu les valeurs numériques!) et on trouve que

$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} \approx \frac{2T}{\tau} \approx \frac{2T_0}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}. \quad (5)$$

La variation relative d'énergie sur une période est bien inversement proportionnelle à  $Q$ .