DM4 : Cinétique chimique et filtrage

Vous devez rendre une copie par groupe de 3 (ou 2, mais je préfère 3). Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Boire ou conduire...

I. Passage de l'alcool à travers la paroi stomacale

1 La vitesse de disparition de l'alcool dans l'estomac est $\boxed{v_1 = -\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

2 Si v_1 suit une loi cinétique d'ordre 1, on doit avoir $v_1 = k_1C_1 = -\frac{dC_1}{dt}$ d'où $C_1(t) = C_0\exp(-k_1t)$. On doit donc avoir $\ln(C_1) = \ln(C_0) - k_1t$. La courbe représentant $\ln(C_1)$ en fonction de t doit donc être une droite de pente $-k_1$. On vérifie graphiquement cette propriété avec les données de l'énoncé et on trouve $\boxed{k_1 = 2{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}}$.

3 à $t = 18$ min, il reste $0.2 \times 0.25 = 5 \times 10^{-2}$ mol d'éthanol dans l'estomac, ce qui signifie que $n_2 = 1 - 5 \times 10^{-2} = 0{,}95$ mol d'éthanol sont passées dans le sang. La concentration d'éthanol dans le sang est donc $\boxed{C_2 = \frac{n_2}{V_2} = 2{,}38 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell}$

4 La quantité d'alcool qui a disparu dans l'estomac est $n = C_0V_1 - C_1V_1 = V_1(C_0 - C_1) = V_1x$, et est identique à la quantité apparue dans le sang. La concentration en alcool à un instant t dans le sang est $C_2 = \frac{n}{V_2} = \frac{V_1}{V_2}x$. Donc la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $v = \dfrac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{V_1}{V_2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{V_1}{V_2}v_1$.

II. Oxydation de l'alcool dans le sang

5 La vitesse d'oxydation de l'alcool dans le sang est $\boxed{v_2 = -\dfrac{dC_2}{dt}}$.

6 Pour une loi cinétique d'ordre 0, l'évolution temporelle de la concentration est linéaire, on doit avoir $C_2(t) = C_2(0) - k_2t$. On trace $C_2(t)$ en fonction de t et on trouve bien une droite de coefficient directeur $-k_2$, ce qui donne $\boxed{k_2 = 1{,}18 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol}\ \ell^{-1}\mathrm{s}^{-1}}$

III. Boire ou conduire...

7 Concentration maximale admise : $\boxed{C_{\max} = \frac{0.5}{46} = 1{,}09 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell}$

8 La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = v - v_2 = \dfrac{V_1}{V_2}v_1 - k_2 = \dfrac{V_1}{V_2}k_1C_1 - k_2}$

9 Comme $C_1(t) = C_0\exp(-k_1t)$ on obtient $\boxed{\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = \frac{V_1}{V_2}k_1C_0\exp(-k_1t) - k_2}$.

Que l'on peut intégrer en $C_2(t) = K - \frac{V_1}{V_2}C_0\exp(-k_1t) - k_2t$. La condition initiale $C_2(0) = 0$ permet de déterminer que $K = \frac{V_1}{V_2}C_0$ ce qui nous donne l'expression demandée :

$$\boxed{C_2 = C_0\frac{V_1}{V_2}\big(1 - \exp(-k_1t)\big) - k_2t} \tag{1}$$

En buvant ses deux bières à 8%, le sujet absorbe 66 cℓ et 0.9 mole d'alcool.

10 l'instant $t_{\max}$ où la concentration C_2 est maximale est défini par $\frac{dC_2}{dt}(t_{\max}) = 0$

ce qui donne $t_{\max} = -\frac{1}{k_1}\ln\left(\frac{1}{C_0}\frac{k_2}{k_1}\frac{V_2}{V_1}\right) \simeq 1421\,\mathrm{s} \Rightarrow \boxed{t_{\max} \simeq 23{,}7\,\mathrm{min}}$

11 On trouve $C_2(t_{\max}) \simeq 2{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell > C_{\max}$. L'automobiliste ne peut donc pas conduire !

12 Au delà de $t_{\max}$ la courbe s'apparente à une droite de pente $-k_2$. On peut donc en déduire qu'il aura éliminé les $2{,}0 \times 10^{-2} - 1{,}09 \times 10^{-2} = 0{,}91 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell$ en $t = \frac{0{,}91\times10^{-2}}{1{,}18\times10^{-6}} \simeq 7700\,\mathrm{s}$ soit $\boxed{t \simeq 2\ \mathrm{h}\ 08\ \mathrm{min}}$.

Exercice 2 : Étude et utilisation d'un filtre

I – Étude du filtre

1. — Lorsque $\omega \to 0$: Le condensateur se comporte comme un interrupeur ouver et on a un pont diviseur de tension formé par R_1 et R_2. La tension de sortie est donnée par

$$\boxed{\underline{u}_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\underline{u}_e} \tag{1}$$

— Lorsque $\omega \to \infty$, le condensateur se comporte comme un fil et on a directement

$$\boxed{\underline{u}_s = \underline{u}_e} \tag{2}$$

2. On commence par déterminer l'impédance équivalente de R_1 et C associés en parallèle

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega} \tag{3}$$

Puis on écrit la relation entre $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$ avec la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{R_2}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_1} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1+jR_1C\omega}}\underline{u}_{\text{e}} \tag{4}$$

finalement, on trouve

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{1 + jR_1C\omega}{1 + j\frac{R_2R_1C}{R_1+R_2}\omega}} \tag{5}$$

On a bien la forme demandée, avec $\alpha = \frac{R_2}{R_2+R_2}$, $\omega_1 = \frac{1}{R_1C}$ et $\omega_2 = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}$.

3. Avec les expressions de ω_1 et ω_2 trouvées à la question précédente, on a directement $\omega_1 = \alpha\omega_2$.
4. Il est évident que $\alpha < 1$ et donc on a directement $\omega_1 < \omega_2$.
5. On commence par écrire l'expression du gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\alpha\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}\right) = 20\log(\alpha) + 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) - 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) \tag{6}$$

— Lorsque $\omega \ll \omega_1$, on a aussi $\omega \ll \omega_2$ et

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) \tag{7}$$

Il y a une asymptote horizontale.

— Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, le gain devient

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \tag{8}$$

L'asymptote a une pente de 20 dB/décade.

— Lorsque $\omega \gg \omega_2$, on a aussi $\omega \gg \omega_1$ et le gain s'écrit

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \tag{9}$$

$$\approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 20\log(\alpha) - 20\log(\alpha) = 0 \tag{10}$$

Et on a une asymptote horizontale à nouveau.

6. Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, on peut écrire la fonction de transfert comme

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{\alpha}{\omega_1}j\omega \tag{11}$$

La multiplication par $j\omega$ montre le caractère dérivateur du filtre.

7. — Lorsque $\omega \to 0$, la fonction de transfert peut être approximée par

$$\underline{H}(\omega) \approx \alpha \in \mathbb{R} \tag{12}$$

On a donc $\varphi = 0$.

— Lorsque $\omega \to \infty$, la fonction de transfert devient

$$\underline{H}(\omega) \approx 1 \tag{13}$$

et on a à nouveau $\varphi = 0$

8. Le diagramme de Bode (et l'analyse qualitative) montre que le filtre laisse passer les signaux de haute fréquence et atténue (partiellement) les signaux de basse fréquence. C'est donc un filtre passe-haut.
9. On lit la fréquence de coupure graphiquement, on trouve $f_c = 800\,\mathrm{Hz}$ et $\omega_c = 5 \times 10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
10. On calcule $G_{\mathrm{dB}}(\omega_2)$:

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_2) = 20\log(\alpha) + 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right) - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_2}\right)^2\right) \tag{14}$$

$$= 20\log(\alpha) + 10\log\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - 10\log(2) \tag{15}$$

Comme on a supposé que $\omega_1 \ll \omega_2$, alors $\alpha \ll 1$ et $\frac{1}{\alpha^2} \gg 1$. Donc

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_2) \approx 20\log(\alpha) - 20\log(\alpha) - 10\log(2) \approx -3\,\mathrm{dB} \tag{16}$$

On montre donc que $\omega_c \approx \omega_2$

11. On trouve α en regardant le gain du filtre lorsque $\omega \to 0$ et on trouve $\alpha = 0{,}02$.
12. On a $\omega_1 = \alpha\omega_2 \approx 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$
13. On commence par calculer $\varphi(\omega_1)$ et $\varphi(\omega_2)$:

$$\varphi(\omega_1) = \arg(\underline{H}(\omega_1)) = \arg\left(1 + j\frac{\omega_1}{\omega_1}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \tag{17}$$

$$\approx \arctan(1) - \arctan(0) \approx \frac{\pi}{4} \tag{18}$$

$$\varphi(\omega_2) = \arg(\underline{H}(\omega_2)) = \arg\left(1 + j\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega_2}{\omega_2}\right) \tag{19}$$

$$\approx \frac{\pi}{2} - \arctan(1) \approx \frac{\pi}{4} \tag{20}$$

On a utilisé le fait que $\omega_2 \gg \omega_1$. On cherche alors les fréquences pour lesquelles $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et on retrouve $f_1 = 16\,\mathrm{Hz}$ et $f_2 = 800\,\mathrm{Hz}$, ce qui donne à nouveau $\alpha = 0{,}02$.

14. Si on place en sortie du filtre une résistance du même ordre de grandeur que R_2, tout se passe comme si on changeait la résistance R_2 pour une résistance $R_2' < R_2$. Dans ce cas, ω_1 ne change pas, mais α devient plus petit et donc ω_2 augmente. On augmente donc la fréquence de coupure du filtre et on diminue donc sa bande passante.

II – Utilisation du filtre

15. On utilise les diagrammes de Bode pour déterminer le gain et le déphasage des deux composantes du signal d'entrée :
    — à $10\,\mathrm{Hz}$, on a $G_{\mathrm{dB}} = -32{,}5$ donc $G = 10^{-\frac{32.5}{20}} \approx 2{,}4 \times 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 30° = 0{,}52\,\mathrm{rad}$.
    — à $50\,\mathrm{Hz}$, on a $G_{\mathrm{dB}} = -24$ donc $G = 10^{-\frac{24}{20}} \approx 6{,}3 \times 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 65° = 1{,}13\,\mathrm{rad}$.

Le signal d'entrée est $e(t) = A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$ et le signal de sortie sera

$$\boxed{s(t) = A(2{,}4 \times 10^{-2}\sin(\omega_1 t + 0.52) + 6{,}3 \times 10^{-2}\sin(\omega_2 t + 1.13))} \tag{21}$$

16. Le gain à $100\,\mathrm{Hz}$ vaut $-18\,\mathrm{dB}$, ce qui correspond à un gain $G = 0.13$. Le déphasage à cette fréquence est d'environ $70°$. L'amplitude de la sinusoïde en sortie du filtre est

$$\boxed{A' = V_{\mathrm{eff}}\sqrt{2}G \approx 1{,}4\,\mathrm{V}} \tag{22}$$

17. L'offset se trouvant à fréquence nulle, il aura un gain de $\alpha = 0{,}02$, et on aura en sortie un offset de $0{,}1\,\mathrm{V}$.
18. On utilise la définition de la valeur efficace :

$$E_{\mathrm{Eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{23}$$

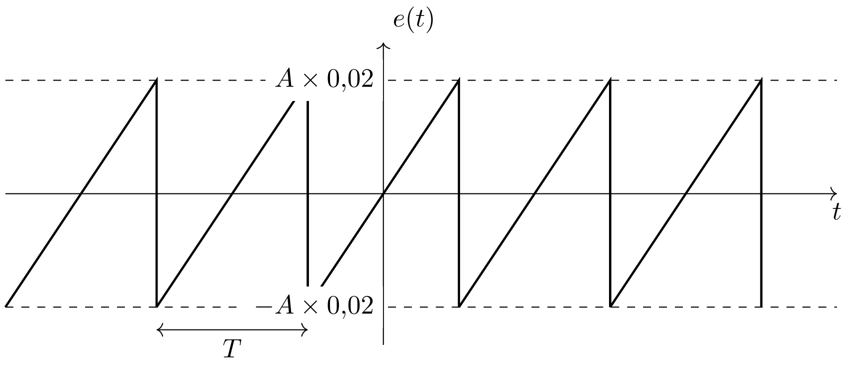
avec

$$e(t) = \frac{2A}{T}t \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \tag{24}$$

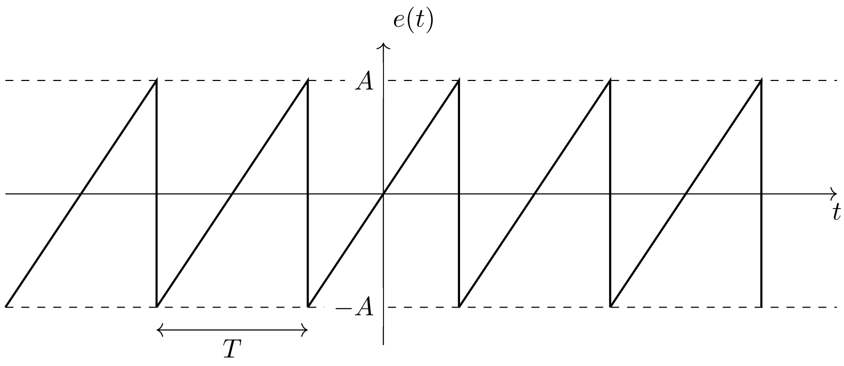
On a donc

$$\boxed{E_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{4A^2}{T^2}t^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{4A^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}} = \sqrt{\frac{A^2}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}} \tag{25}$$

19. Pour $T = 1\,\mathrm{s}$, la période est très grande et $\omega \ll \omega_1$. Le gain sera donc de $\alpha = 0{,}02$, le signal de sortie sera atténué par rapport au signal d'entrée.



Pour $T = 10\,\mathrm{\mu s}$, la période est très faible et $\omega \gg \omega_2$. Le gain est donc de 1 et le signal est inchangé.



Pour $T = 10\,\mathrm{ms}$, on a $f = 100\,\mathrm{Hz}$ et on se trouve dans la zone où le filtre a un comportement dérivateur, la sortie sera donc proportionelle à la dérivée de l'entrée et on aura un signal de la forme :