DM5 : Filtrage – corrigé

Exercice 1 : Filtre de Hartley

1. En utilisant les comportements de la bobine et du condensateur à basse et haute fréquence, on obtient les résultats suivants :
   — À basse fréquence, la bobine se comporte comme un fil et on a directement $\underline{s} = 0$ car la tension de sortie est prise aux bornes d'une bobine.
   — À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, la tension aux bornes des deux bobines est donc nulle. En faisant un pont diviseur de tension, on trouve que $\underline{s} = 0$ également.

   C'est un filtre qui coupe les hautes et les basses fréquences, c'est donc un $\boxed{\text{passe-bande}}$.

2. On commence par déterminer la tension $\underline{u}_C$ aux bornes de C en fonction de $\underline{e}$. On utilise pour cela un pont diviseur de tension en calculant une impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$ des deux bobines et du condensateur. On a :

$$Z_{\text{eq}} = \frac{2jL\omega/(jC\omega)}{2jL\omega + 1/(jC\omega)} = \frac{2L/C}{j(2L\omega - 1/(C\omega))} \tag{1}$$

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R}\underline{e} = \frac{2\frac{L}{C}}{2\frac{L}{C} + jR(2L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{2L\omega}\right)} \tag{2}$$

   En utilisant un second pont diviseur de tension formé par les deux bobines en série, on a

$$\boxed{\underline{s} = \frac{1}{2}\underline{u}_C = \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{2L\omega}\right)}}_{\underline{H}(\omega)}\underline{e}} \tag{3}$$

3. En partant de l'équation (3), on a

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + jR\sqrt{\frac{C}{2L}}\left(\sqrt{2LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{2LC}\omega}\right)} \tag{4}$$

   En notant $\boxed{H_0 = \frac{1}{2}}$, $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}}$ et $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}}$, on retrouve bien l'expression demandée. On a les valeurs numériques suivantes :
   — $Q = 71$;
   — $\omega_0 = 7{,}1 \times 10^4\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$;
   — $H_0 = 0{,}5$.

4. On commence par déterminer l'expression de $G_{\text{dB}}(\omega)$:

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log(G(\omega)) = 20\log(|\underline{H}|(\omega)) = 20\log\left(\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}\right) \tag{5}$$

   On détermine ensuite les expressions approchées de $G_{\text{dB}}(\omega)$ à haute et basse fréquence, c'est-à-dire lorsque $x \to \infty$ et lorsque $x \to 0$.
   — Lorsque $x \to \infty$, on a

$$G_{\text{dB}}(\omega) \approx 20\log\left(\frac{H_0}{Qx}\right) = 20\log(H_0/Q) - 20\log(x) \tag{6}$$

   On a donc une asymptote de pente $-20\,\text{dB/décade}$. Graphiquement, on trouve une pente de $\frac{-73-(-43)}{1.5-0} = -20\,\text{dB/décade}$.

— Lorsque $x \to 0$, on a

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) \approx 20\log\left(\frac{H_0}{Q/x}\right) = 20\log(H_0/Q) + 20\log(x) \tag{7}$$

On a donc une asymptote de pente 20 dB/décade. Graphiquement, on trouve une pente de $\frac{-73-(-43)}{-1.5-0} =$ 20 dB/décade.

Les valeurs trouvées graphiquement sont donc compatibles avec les valeurs théoriques.

5. La valeur a correspond à l'ordonnée à l'origine des asymptote, d'après la question précédente on a

$$\boxed{a = 20\log(H_0/Q) = -43\,\mathrm{dB}} \tag{8}$$

La valeur de b correspond au gain pour ω_0, c'est-a dire pour $x = 1$. On a alors

$$\boxed{b = 20\log(H_0) = -6\,\mathrm{dB}} \tag{9}$$

6. En général, lorsque le diagramme de Bode présente une pente à 20 dB/décade, le filtre peut être utilisé comme dérivateur et lorsqu'il y a une pente à -20 dB/décade, il peut être utilisé comme intégrateur. Vérifions cela par le calcul :

— à basse fréquence, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{H_0}{Q}jx = \frac{H_0}{Q\omega_0}j\omega \tag{10}$$

On a donc $\underline{s} = \frac{H_0}{Q\omega_0}j\omega\underline{e}$ et le filtre a bien un comportement dérivateur car le signal d'entrée est multiplié par $j\omega$.

— à haute fréquence, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{jQx} = \frac{H_0}{Q}\frac{1}{jx} = \frac{H_0\omega_0}{Q}\frac{1}{j\omega} \tag{11}$$

On a donc $\underline{s} = \frac{H_0\omega_0}{Q}\frac{\underline{e}}{j\omega}$ et le filtre a bien un comportement intégrateur car le signal d'entrée est divisé par $j\omega$.

7. Pour produire ce signal, on utilise un GBF réglé pour produire un signal sinusoïdal avec une pulsation $\omega_1 = \omega_0$, d'amplitude E_1 avec une décalage (offset) égal à E_2.

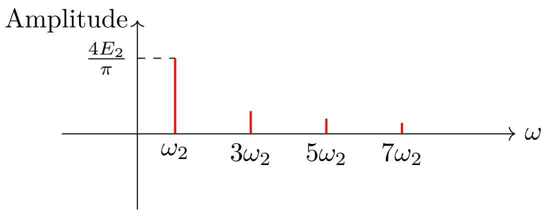
8. Le filtre étant un passe bande, la composante continue est totalement coupée. On a également $\omega_1 = \omega_0$. À cette pulsation, la fonction de transfert est $\underline{H}(\omega_0) = H_0 = \frac{1}{2}$. Le signal de sortie est donc

$$\boxed{s_1(t) = \frac{E_1}{2}\cos(\omega_1 t)} \tag{12}$$

9. La valeur efficace es $e_2(t)$ est :

$$\boxed{E_{2,\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e_2(t)^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T E_2^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{E_2^2} = E_2} \tag{13}$$

10. Le spectre de $e_2(t)$ est uniquement composé d'harmonique impaires d'amplitude proportionnelle à $1/n$, où n est le numéro de l'harmonique. Il ressemble à ça :



11. On utilise l'expression du gain déterminé dans l'équation 5 pour déterminer les amplitudes des pics dans le signal de sortie. On a

Pulsation	Amplitude d'entrée (V)	Gain	Amplitude de sortie (V)
$\omega_2 = \omega_0/3$	1,27	$2{,}7 \times 10^{-3}$	$3{,}4 \times 10^{-3}$
$3\omega_2 = \omega_0$	0,42	$5{,}0 \times 10^{-1}$	$2{,}1 \times 10^{-1}$
$5\omega_2 = 5\omega_0/3$	0,25	$6{,}6 \times 10^{-3}$	$1{,}7 \times 10^{-3}$
$7\omega_2 = 7\omega_0/3$	0,18	$3{,}7 \times 10^{-3}$	$6{,}8 \times 10^{-4}$

On remarque que l'amplitude de sortie du pic de pulsation $3\omega_2$ est bien supérieure à l'amplitude des autres pics. Le signal de sortie sera donc proche d'un signal sinusoïdal de pulsation $3\omega_2$. D'où le nom de « tripleur de fréquence ».

12. On fait la même analyse qu'à la question précédente, en déterminant les amplitudes des différentes harmoniques du signal de sortie :

Pulsation	Amplitude d'entrée (V)	Gain	Amplitude de sortie (V)
$\omega_3 = \omega_0$	0,41	$5{,}0 \times 10^{-1}$	$2{,}0 \times 10^{-1}$
$3\omega_3 = 3\omega_0$	0,05	$2{,}7 \times 10^{-3}$	$1{,}2 \times 10^{-4}$
$5\omega_3 = 5\omega_0$	0,02	$1{,}5 \times 10^{-3}$	$2{,}4 \times 10^{-5}$
$7\omega_3 = 7\omega_0$	0,01	$1{,}0 \times 10^{-3}$	$8{,}5 \times 10^{-6}$

On remarque que l'amplitude de sortie du pic de pulsation $\omega_3 = \omega_0$ est bien supérieure à l'amplitude des autres pics. Le signal de sortie sera donc proche d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_3 et d'amplitude $2{,}0 \times 10^{-1}$ V.