

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

JEUDI 19 SEPTEMBRE 2024 - DURÉE 2H

- ★ La calculatrice est autorisée.
- ★ Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.
- ★ Chaque réponse doit être justifiée.
- ★ Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

I. Instabilité de tôle ondulée

Lorsqu'une route en sable ou en gravier (masse volumique $\rho \approx 2000 \text{ kg.m}^{-3}$) est soumise au passage répété de véhicules, des bosses régulièrement espacées apparaissent à sa surface. Ce phénomène, appelé instabilité de tôle ondulée (*washboard road*), est d'une part très gênant pour les passagers et d'autre part très dangereux à cause de la perte d'adhérence induite par les bosses.

Expérimentalement, on constate que cette instabilité apparaît uniquement si les voitures se déplacent au delà d'une vitesse critique v_c .

On remarque également que ce phénomène ne dépend que des paramètres suivants : la masse m du véhicule, la largeur du pneu L , la masse volumique de la piste ρ , l'accélération de la pesanteur g et bien sûr la vitesse v du véhicule.

On prendra numériquement $g = 10$ en unité du système international.

1. À partir de v et g , il est possible de construire une quantité, notée ℓ_1 , homogène à une longueur. Déterminer l'expression de ℓ_1 .
2. De même, à partir des trois paramètres ρ , m et L , il est possible de construire une quantité, notée ℓ_2 , homogène à une longueur. Déterminer l'expression de ℓ_2 sachant que ρ et L apparaissent avec la même puissance.
3. Le rapport $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ est appelé nombre de Froude, noté F_r . Quel est sa dimension ?
4. Expérimentalement, on observe que l'instabilité se développe lorsque le nombre de Froude dépasse un nombre de Froude critique $F_{r,c}$. Donnez alors l'expression de la vitesse critique v_c en fonction de $F_{r,c}$.
5. Des expériences de laboratoire montrent que : $F_{r,c} = 5$. Quelle est alors la vitesse critique pour une voiture d'une tonne, dont les pneus ont une largeur de 20 cm ?

II. Miroir réel

Un miroir réel est constitué d'une fine couche métallique, appelée tain, considérée comme un miroir plan parfait, recouverte (pour la protéger) d'une lame de verre d'épaisseur e et d'indice n .

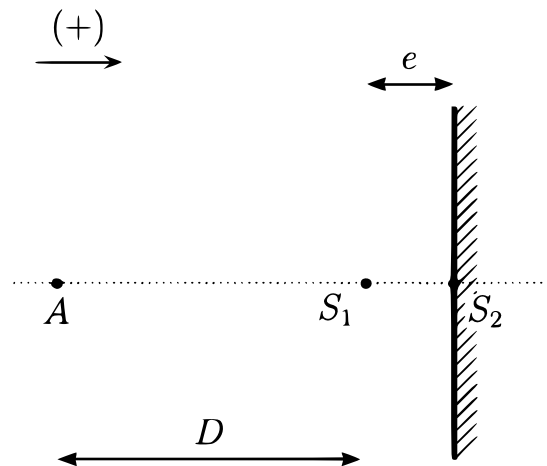
Soit un point objet A, soient S_1 et S_2 les points d'intersection de la normale au miroir passant par A avec les deux faces de la lame de verre. On note D la distance entre A et S_1 .

On supposera dans cet exercice que les conditions de Gauss sont réalisées et pourra utiliser la formule de conjugaison du dioptre plan vue en cours dans cette approximation, c'est-à-dire :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA'}}{n_2}$$

où A' est l'image conjuguée de A après passage par la lumière depuis le milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2 , et H est le projeté orthogonal de A sur le dioptre.

Dans la suite de l'exercice, on considérera que l'indice de l'air est exactement égal à 1.



II.1 Miroir équivalent - Méthode 1

1. On considère un rayon lumineux issu de A et arrivant vers le miroir avec un angle d'incidence i . Tracer la trajectoire complète de ce rayon sur un grand schéma.
2. Montrer par une construction géométrique soignée que ce miroir se comporte comme un miroir plan parfait équivalent (M_e) sur lequel il n'y aurait qu'une simple réflexion.
Représenter ce miroir sur la figure (on refera le schéma centré sur la lame d'une épaisseur suffisante).
3. Sachant que l'on est toujours dans les conditions de Gauss, déterminer la distance x entre le dioptre air/verre et le miroir équivalent.

II.2 Miroir équivalent - Méthode 2

4. On note A_1 l'image de A par le dioptre air/verre, A_2 l'image de A_1 par le miroir plan, et A' l'image de A_2 par le dioptre verre/air. Placer ces points sur la droite (AS_2) en vous aidant du tracé réalisé à la première question (on refera une figure).
5. Déterminer par le calcul la position de A_1 en utilisant la relation de conjugaison du dioptre plan. On exprimera en particulier $\overline{S_1A_1}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.
6. En déduire la position de A_2 . On exprimera en particulier $\overline{S_2A_2}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.
7. En déduire finalement la position de A' . On exprimera en particulier $\overline{S_1A'}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.
8. On considère que deux systèmes optiques sont équivalents s'ils possèdent la même relation de conjugaison. Montrer que ce miroir réel est équivalent à un miroir plan parfait (M_e) placé de telle sorte que $\overline{S_1S_e} = \frac{e}{n}$.

Feuille à compléter et à rendre avec votre copie

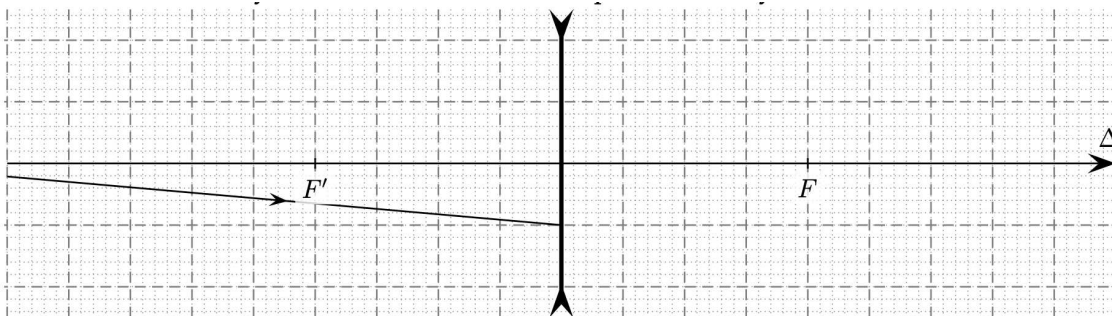
III. Tracés de rayons

Nom : _____

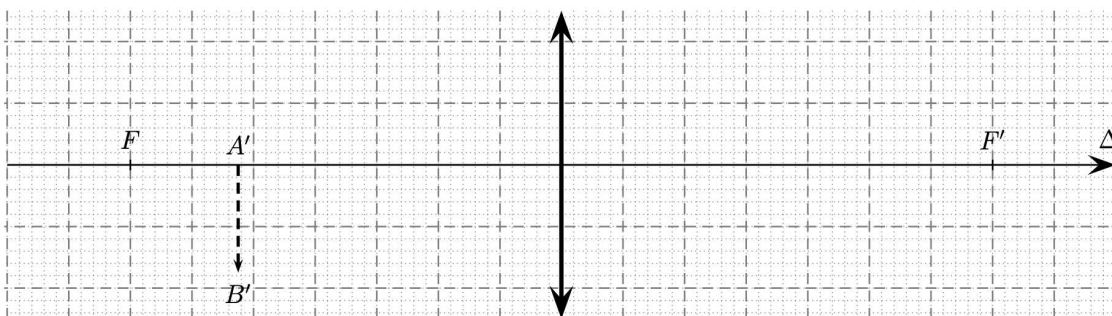
Prénom : _____

Classe : _____

1. On considère un rayon arrivant sur la lentille. Représenter le rayon transmis.



2. $A'B'$ est une image. Déterminer graphiquement son objet AB par la lentille en traçant des rayons.



3. AB est un objet. Déterminer graphiquement l'image $A'B'$ correspondante en traçant des rayons.

