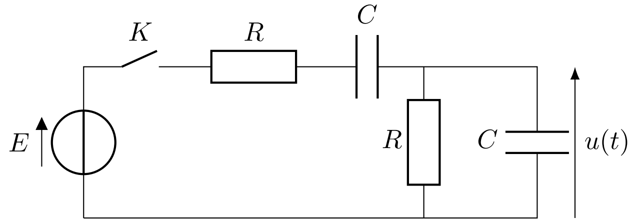
TD5 : Oscillateurs – exercices supplémentaires

Exercice 1 : Oscillateur à condensateurs

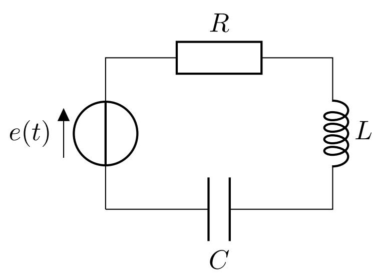
Dans le circuit ci-dessous, les condensateurs sont identiques et ont une capacité $C = 10\,\mu\text{F}$, les résistors sont identiques et ont une résistance $R = 10\,\text{k}\Omega$. Les condensateurs sont initialement déchargés lorsqu'on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. E = 10 V.



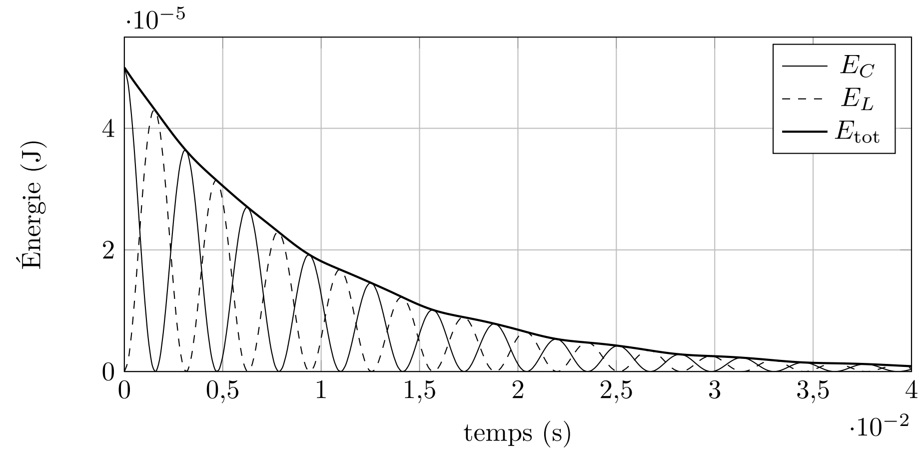
1. Déterminer une constante de temps du circuit.
2. Déterminer toutes les valeurs des tensions et des intensités au temps $t = 0^+$, ainsi qu'en régime permanent (faire des schémas équivalents si nécessaires).
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ en faisant apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du circuit. Dans quel régime se trouve-t-il ?
4. Résoudre l'équation différentielle pour trouver l'expression de $u(t)$. Tracer l'allure de $u(t)$.

Exercice 2 : Interprétation énergétique du facteur de qualité

On considère le circuit suivant dans lequel $e(t) = E$ si $t < 0$ et $e(t) = 0$ si $t \geq 0$. Avec $R = 100\,\Omega$, $L = 1{,}00\,\text{H}$ et $C = 1{,}00\,\mu\text{F}$.



1. Pour t>0, montrer que l'équation différentielle satisfaite par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur s'écrit
$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0 \tag{1}$$
avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.
2. Montrer que la tension $u_C(t)$ peut s'écrire :
$$u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \tag{2}$$
avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.
3. Déterminer les valeurs de A et B.
4. Montrer qu'on peut faire l'approximation :
$$u_C(t) \approx Ee^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = -\omega_0 CEe^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t) \tag{3}$$
On conservera cette approximation dans la suite du problème.
5. On représente ci-dessous l'évolution de l'énergie électrique totale E_{tot}, de l'énergie E_C stockée dans le condensateur et de l'énergie E_L stockée dans la bobine.



Commenter le graphique ci-dessous.
6. Exprimer l'énergie électrique $E_{\text{tot}}(t)$ de l'oscillateur en fonction de t.
7. Montrer que la variation relative d'énergie sur une période est inversement proportionnelle à Q :
$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} \propto \frac{1}{Q} \tag{4}$$
On donne le développement limité $e^x \approx 1 + x$ si $x \ll 1$.