

DM8 : Thermodynamique, mécanique du solide – corrigé

Exercice 1 : CHUTE D'UNE TARTINE BEURRÉE

1. On applique le PFD à la tartine dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on obtient

$$m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m(\delta\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \delta\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = mg(\cos(\theta)\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\vec{e}_r) - T\vec{e}_r + N\vec{e}_\theta \quad (1)$$

En projetant cette équation sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ , on obtient

$$\begin{cases} T = m\delta\dot{\theta}^2 + mg\sin(\theta) \\ N = mg\cos(\theta) - m\delta\ddot{\theta} \end{cases} \quad (2)$$

2. La tartine est soumise à son poids \vec{P} qui est une force conservative. De plus lorsqu'elle ne glisse pas sur la table, le point d'application de la force de réaction de la table est immobile dans le référentiel d'étude et donc cette force ne travaille pas.

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à la tartine, on en déduit que l'énergie mécanique est conservée. L'énergie mécanique s'exprime comme

$$E_m = E_p + E_c = -mg\delta\sin(\theta) + \frac{1}{2}J_{Ox}\omega^2 = -mg\delta\sin(\theta) + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}a^2 + \delta^2\right)\omega^2 \quad (3)$$

À l'instant initial, la tartine est immobile (donc $\omega = 0$) et elle est horizontale (donc $\theta = 0$). Donc l'énergie mécanique initiale est nulle et on a $E_m = 0$. En isolant ω et en introduisant $\eta = \frac{\delta}{a}$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\omega^2 = \underbrace{\frac{6g\eta}{a(1+3\eta^2)}}_{\omega_0^2} \sin(\theta) \quad (4)$$

3. L'équation obtenue à la question précédente permet de connaître $\dot{\theta}^2 = \omega^2 = \omega_0^2 \sin(\theta)$. En la dérivant par rapport au temps, on obtient aussi

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \omega_0\dot{\theta}\cos(\theta) \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} = \frac{1}{2}\omega_0^2\cos(\theta) \quad (5)$$

En injectant ces expressions dans les équations trouvées à la question 1, on trouve :

$$\begin{cases} T = m(g + \delta\omega_0^2)\sin(\theta) \\ N = m(g - \frac{1}{2}\delta\omega_0^2)\cos(\theta) \end{cases} \quad (6)$$

4. Comme $f \approx 1$, la tartine commence à glisser lorsque $T = N$. On utilise le fait que $\eta \ll 1$ pour simplifier l'expression de θ_0 :

$$\omega_0^2 \approx \frac{6g\eta}{a} \quad (7)$$

En utilisant les équations obtenues à la question précédente, on obtient

$$m(g + \delta\omega_0^2)\sin(\theta_0) = m\left(g - \frac{1}{2}\delta\omega_0^2\right)\cos(\theta_0) \quad \text{soit} \quad \tan(\theta_0) = \frac{1 - \frac{\delta\omega_0^2}{2g}}{1 + \frac{\delta\omega_0^2}{g}} \quad (8)$$

Or, on a $\frac{\delta\omega_0^2}{g} \approx 6\eta^2 \ll 1$, donc $\tan(\theta_0) \approx 1$ et finalement $\theta_0 \approx \frac{\pi}{4}$

Une fois que la tartine quitte la table, on suppose que la vitesse angulaire de la tartine est constante, c'est à dire que $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0)$. En intégrant cette expression par rapport au temps, on obtient

$$\theta(t) = \dot{\theta}(0)t + \theta_0 \quad (9)$$

5. Pour que la tartine atterrisse du côté pain, il faut que $\theta(\tau) < \frac{\pi}{2}$.
6. Pour évaluer le temps de chute de la tartine, on suppose que durant la chute elle n'est soumise qu'à son poids et que son centre de gravité tombe d'une hauteur h . On applique le PFD à la tartine dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on le projette sur l'axe Oz et on intègre deux fois pour trouver finalement $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Pour trouver $\theta(\tau)$, il faut estimer $\dot{\theta}(0) = \omega(0)$. On a $\omega(0) = \omega_0 \sqrt{\sin(\theta_0)} = \sqrt{\frac{6g\eta}{a} \sin(\theta_0)}$. Et finalement

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \sqrt{\frac{6g\eta}{a} \sin(\theta_0)} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \theta_0 + \sqrt{\frac{12h\eta}{a} \sin(\theta_0)} \approx 136^\circ \quad (10)$$

On en conclut que la tartine tombe du mauvais côté et que la loi de Murphy est vérifiée.

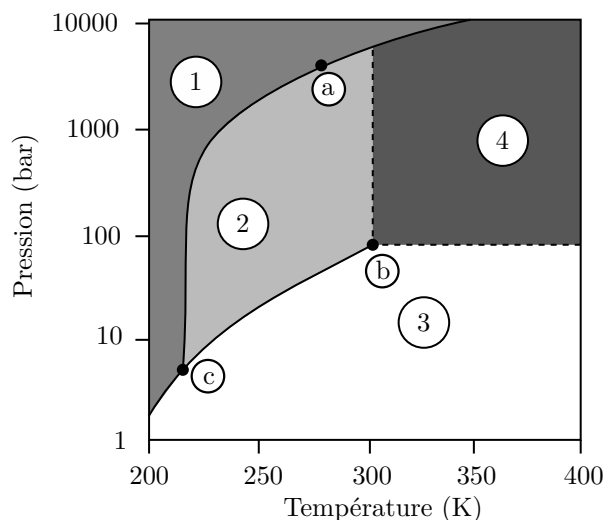
Exercice 2 : STOCKAGE DU CO₂

Les activités humaines ont accru sensiblement le taux de la concentration de CO₂ dans l'atmosphère : autour de 280 ppm il y a 250 ans, il est actuellement de 387 ppm (soit une augmentation de 38 %). Afin de ne pas dépasser la limite de 450 ppm au-delà de laquelle les conséquences les plus dramatiques du réchauffement climatique seront inévitables de nombreuses options sont envisagées afin de limiter les rejets de CO₂ dans l'atmosphère.

Une première proposition un peu simple consiste à former des blocs de CO₂ solide à l'aide d'installations frigorifiques puis de les laisser tomber dans des fosses marines. On effectue les approximations suivantes :

- L'océan est un fluide homogène au repos, de température constante, incompressible et indilatable.
- Les blocs de CO₂ sont incompressibles et indilatables. Ils ont de plus une masse constante tout au long de la descente dans la fosse (approximation forte).

On donne ci-dessous le diagramme de phases de CO₂.



Caractéristiques des points a, b, c :

Point a, $T_a = 280$ K, $P_a = 4 \times 10^3$ bar ;

Point b, $T_b = 304$ K, $P_b = 70,4$ bar ;

Point c, $T_c = 216$ K, $P_c = 5,11$ bar.

FIGURE 1 – Diagramme du phases du CO₂.

- 1:solide ; 2:liquide ; 3:gaz ; 4:supercritique.
- Le point c est le point triple, les trois états solide, liquide et gaz coexistent. Le point b est le point critique, au-delà de ce point il n'y a plus de différence entre liquide et gaz.
- À pression (1 bar) et température (300 K) ambiantes, le CO₂ se trouve dans la zone 3 il est donc gazeux. Il va donc se sublimer.
- Pour que le CO₂ reste solide au fond d'une fosse océanique, la température étant de l'ordre de 280 K il faut que la pression soit d'au moins $P_{\min} = 4 \times 10^3$ bar.
- La profondeur minimale pour que le CO₂ reste solide est donnée par $h_s = \frac{P_{\min} - P(0)}{\rho g} \approx 40$ km. C'est bien plus profond que la fosse la plus profonde sur Terre (environ 13 km). Le CO₂ ne pourra donc pas rester solide, au mieux il sera liquide.
- Dans le modèle du gaz parfait, on considère que les particules du gaz sont ponctuelles et n'ont pas d'interactions à distance. Dans ces conditions on a $PV = nRT$.

7. On calcule le produit PV pour les différentes valeurs données, on obtient :

P (bar)	0,804	0,868	0,968	1,060	1,130	1,179
V (m ³)	0,658	0,610	0,547	0,499	0,468	0,449
PV (kJ)	52,9	52,9	52,9	52,9	52,9	52,9

On observe que le produit PV ne dépend pas de la pression P , ces données sont compatibles avec le modèle du gaz parfait.

On donne ci-dessous le diagramme de Clapeyron et des données thermodynamiques relatives à CO_2 .

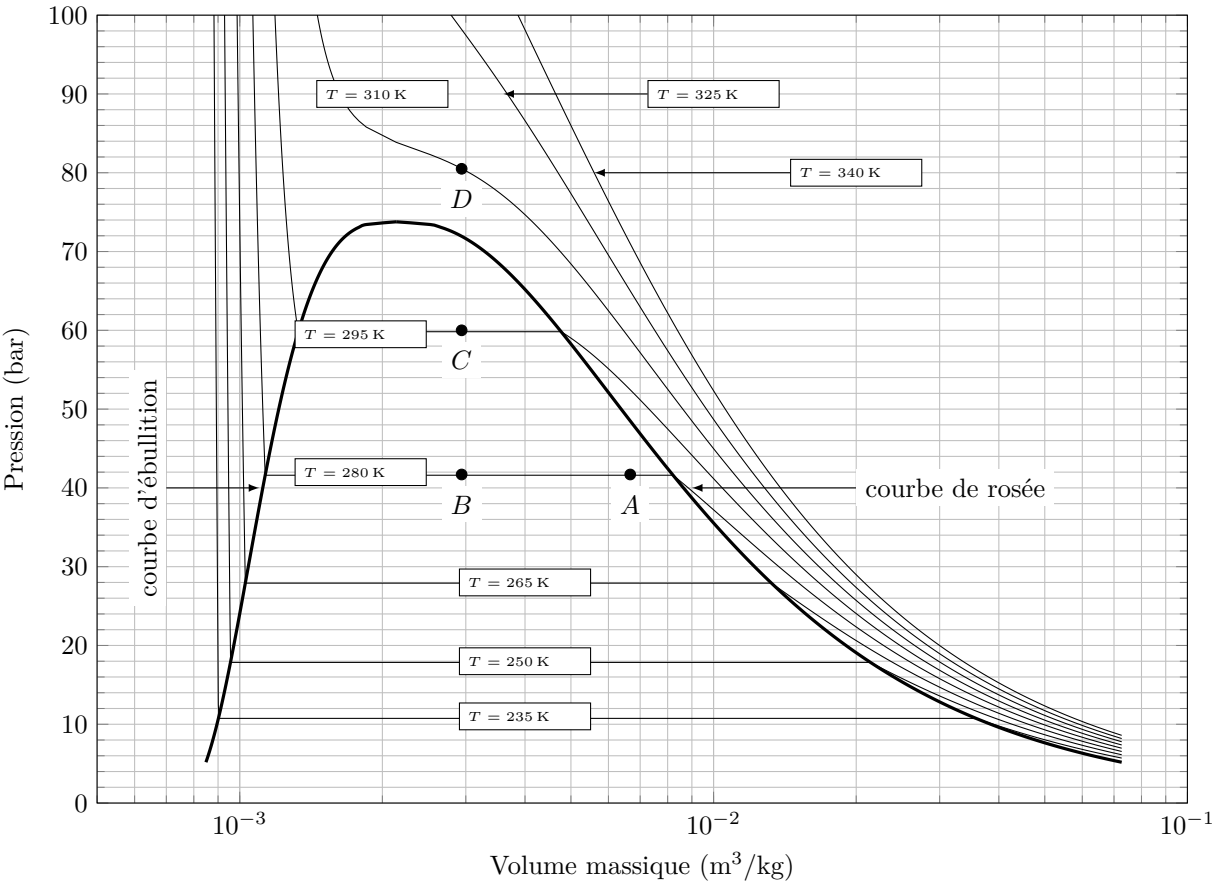


FIGURE 2 – Diagramme de Clapeyron du CO_2 . L’abscisse est logarithmique, sont représentées les isothermes pour les températures suivantes : 340 K, 325 K, 310 K, 280 K, 265 K, 250 K, 235 K

8. Voir diagramme.
9. Voir diagramme.
10. Sur les données thermodynamiques et sur le diagramme de Clapeyron, on observe qu’à 295 K et 59 bar, le volume massique du gaz n’est pas très différent de celui du liquide (il est moins de 4 fois plus grand). Il y a donc peu de chance pour que le gaz puisse être considéré comme parfait.
11. On peut calculer les coordonnées des points A , B , C et D sur le diagramme de Clapeyron. On a $n_0 = \frac{PV}{RT} \approx 404$ mol, la masse correspondante est donc $m = M_{\text{CO}_2} n_0 \approx 18$ kg.
12. Voir tableau ci-dessous.
13. La masse de vapeur est donnée par $m_v = m \frac{v - v_l}{v_g - v_l}$. Attention, l’échelle sur le graphique est logarithmique, on ne peut pas mesurer les distances graphiquement à la règle, il faut faire le calcul.
- On obtient donc les données suivantes :

Point	A	B	C	D
Température (K)	280	280	295	310
Volume (ℓ)	120	53	53	53
Volume massique ($10^{-3}\text{m}^3/\text{kg}$)	6.67	2.94	2.94	2.94
État	L+V	L+V	L+V	Supercritique
Pression (bar)	41.9	41.9	59.5	79
Masse de vapeur (kg)	14.3	4.7	8.7	–

14. Entre A et B la pression est constante, le travail fourni pour comprimer le CO_2 est donc $W = -P(V_B - V_A)$.
Avec $P = 41,9 \text{ bar}$, $V_A = mv_A \approx 120 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ et $V_B = mv_B \approx 53 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. On trouve $W \approx 281 \text{ kJ}$