

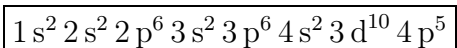
DS N°6

I. Breaking Bad

I.1 SYMBOLE BR

I.1.a Br est le symbole de l'élément chimique « Brome ».

I.1.b Z = 35 donc



Couche électronique	Nombre d'électrons	Couche électronique	Nombre d'électrons
$n = 1$	2	$n = 3$	18
$n = 2$	8	$n = 4$	7

Cette répartition des électrons explique la notation « 2-8-18-7 » utilisée dans la carte.

Les électrons de valence sont ceux des niveaux d'énergie 4s et 4p. On en dénombre 7.

I.1.c La configuration électronique indique que $n_{\max} = 4$ et finit en $4p^5$.

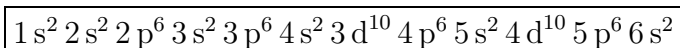
Le brome se situe donc dans la 5^{ème} colonne du bloc p (17^{ème} colonne) et dans la 4^{ème} période.

I.1.d Étude des isotopes :

Isotope	Nombre de masse A	Nombre de protons Z	Nombre de neutrons N
$^{79}_{35}\text{Br}$	79	35	44
$^{81}_{35}\text{Br}$	81	35	46

I.2 SYMBOLE BA

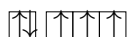
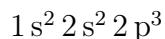
I.2.a Z = 56 donc



Le baryum se situe dans la 2^{ème} colonne du bloc s donc dans la 2^{ème} colonne.

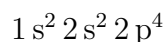
I.2.b L'azote a sa configuration électronique telle que $n_{\max} = 2$. Par ailleurs, il appartient à la 3^{ème} colonne du bloc p donc a une configuration électronique en p^3 . On obtient ainsi la configuration électronique de l'azote :

${}_7\text{N}$



On en déduit ainsi la configuration électronique de l'oxygène :

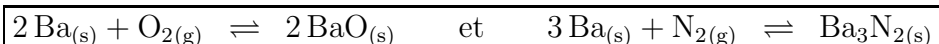
${}_8\text{O}$

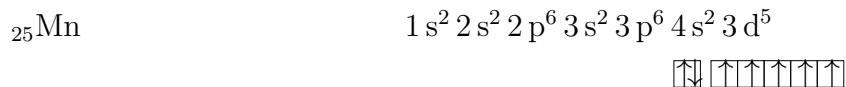


Ainsi, l'azote a tendance à former l'ion N^{3-} et l'oxygène l'ion O^{2-} . Par ailleurs, le baryum a tendance à former l'ion Ba^{2+} . Ainsi, on peut proposer comme formules brutes :

Oxyde de baryum : BaO Nitrure de baryum : Ba_3N_2

Les équations de combustion du baryum dans l'air sont ainsi :

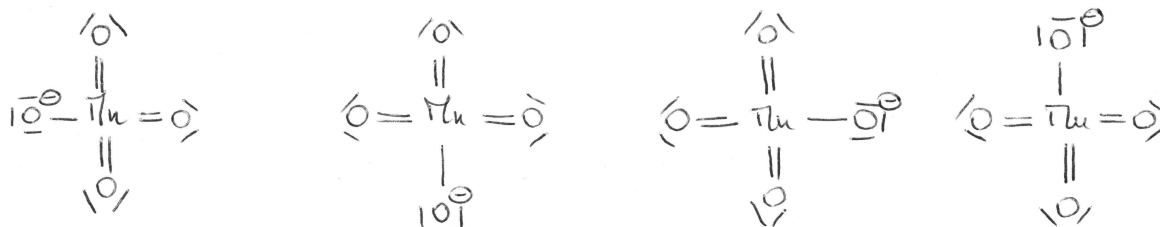


I.3 LE MANGANÈSE MN**I.3.a** La configuration électronique du manganèse est

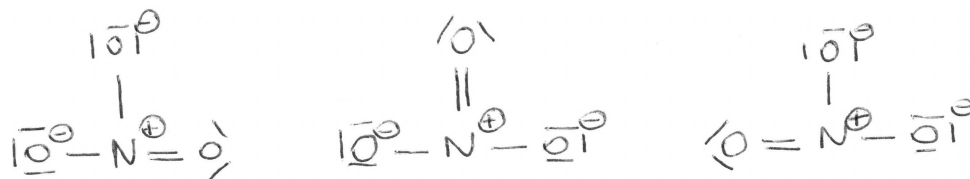
Le manganèse appartient au bloc d et possède 7 électrons de valence.

I.3.b En arrachant ses 7 électrons de valence au manganèse, on obtient l'ion Mn^{7+} qui a pour nombre d'oxydation +VII. En lui ajoutant 3 électrons, on obtient l'ion Mn^{3+} , de structure électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^5$.

La version correcte est la version en anglais.

I.3.c Pour l'ion MnO_4^- , on dénombre $N_v = 7 + 4 \times 6 + 1 = 32$. Le schéma de Lewis doit donc faire apparaître 16 doublets électroniques. On en déduit les quatre formules envisageables (formes mésomères) :**I.3.d** La représentation VSEPR de l'ion permanganate est la suivante :

Comme les liaisons ont strictement la même longueur, les moments dipolaires sont tels que $\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3 + \vec{\mu}_4 = \vec{0}$

On a donc $\vec{\mu}_{\text{tot}} = \vec{0}$: l'ion permanganate est apolaire.**I.4** Pour l'ion NO_3^- , on dénombre $N_v = 5 + 3 \times 6 + 1 = 24$. Le schéma de Lewis doit donc faire apparaître 12 doublets électroniques. On en déduit les trois formules envisageables (formes mésomères) :

Pour HNO_3 , on dénombre le même nombre d'électrons à répartir dans le schéma de Lewis, et donc toujours $D=12$ doublets. On en déduit les deux schémas envisageables (formes mésomères) :



I.5 Il faut assurer la conservation des éléments, de même que celle des charges. On obtient :

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 4 \quad \alpha_3 = 2 \quad \beta_1 = 1 \quad \beta_2 = 2 \quad \beta_3 = 2$$

I.6 Quantités de matière initiales :

$$n(\text{H}^+) = n(\text{NO}_3^-) = C V_S = 0,500 \text{ mol} \quad \text{et} \quad n(\text{Hg}) = n_0 = 0,10 \text{ mol}$$

On remarque que

$$\frac{n(\text{Hg})}{1} < \frac{n(\text{H}^+)}{4} = 0,125 \text{ mol} \quad \text{et} \quad \frac{n(\text{Hg})}{1} < \frac{n(\text{NO}_3^-)}{2} = 0,250 \text{ mol}$$

Le réactif limitant serait donc $\text{Hg}_{(\ell)}$.

I.7 Le tableau d'avancement molaire de la réaction est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccc|c} \text{Hg}_{(\ell)} & + & 4 \text{H}_{(\text{aq})}^+ & + & 2 \text{NO}_{3(\text{aq})}^- & \rightleftharpoons & \text{Hg}_{(\text{aq})}^{2+} & + & 2 \text{NO}_{2(\text{g})} & + & 2 \text{H}_2\text{O}_{(\ell)} & \parallel & \text{Tot gaz} \\ t=0 & n_0 & C V_S & & C V_S & & 0 & & 0 & & / & & 0 \\ t_{\text{éq}} & n_0 - \xi_{\text{éq}} & C V_S - 4 \xi_{\text{éq}} & & C V_S - 2 \xi_{\text{éq}} & & \xi_{\text{éq}} & & 2 \xi_{\text{éq}} & & / & & 2 \xi_{\text{éq}} \end{array}$$

L'activité de l'eau solvant et celle du mercure liquide sont égales à 1. Le quotient de réaction à l'état d'équilibre chimique s'écrit ainsi :

$$Q_f = \frac{[\text{Hg}^{2+}]_{\text{éq}} (c^0)^5}{[\text{H}^+]_{\text{éq}}^4 \times [\text{NO}_3^-]_{\text{éq}}^2} \frac{P_{\text{NO}_2}^2}{(P^0)^2} = \frac{n(\text{Hg}^{2+})_{\text{éq}} \times V_S^5 \times (c^0)^5}{n(\text{H}^+)_{\text{éq}}^4 \times n(\text{NO}_3^-)_{\text{éq}}^2} \frac{P_{\text{NO}_2}^2}{(P^0)^2}$$

Dans l'hypothèse d'une réaction qui atteint un état d'équilibre :

$$Q_{\text{éq}} = \frac{\xi_{\text{éq}} \times V_S^5 \times (c^0)^5}{(C V_S - 4 \xi_{\text{éq}})^4 \times (C V_S - 2 \xi_{\text{éq}})^2} \frac{4 \xi_{\text{éq}}^2 R^2 T^2}{(V_G P^0)^2} \quad (1)$$

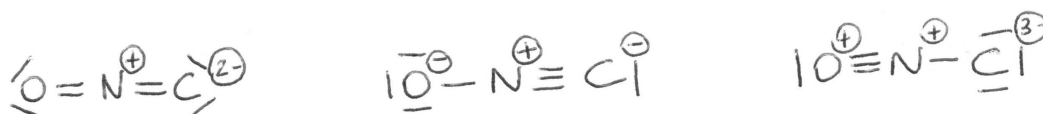
Par définition de l'état d'équilibre $Q_{\text{éq}} = K^0 = 0,02$

I.8 On veut déplacer l'équilibre dans le sens de la consommation de davantage de mercure liquide (sens direct). Il est ainsi nécessaire, à partir de l'état d'équilibre caractérisé par $Q = Q_{\text{éq}} = K^0$, de diminuer le quotient de réaction.

En déplaçant la paroi mobile, on peut modifier V_S . L'expression (1) montre que pour diminuer Q , il faut augmenter V_G .

À partir de l'état d'équilibre précédent, on a ainsi intérêt à tirer la paroi pour augmenter V_G .

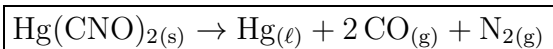
I.9 Pour l'ion CNO^- , on dénombre $N_v = 4 + 5 + 6 + 1 = 16$. Le schéma de Lewis doit donc faire apparaître 8 doublets électroniques. On en déduit les trois formules envisageables :



La forme la plus représentative pourrait être celle du milieu puisque l'oxygène, le plus électronégatif des trois éléments, porte une charge formelle négative.

I.10 Lors d'un choc.

I.10.a Compte-tenu des températures de fusion et d'ébullition des trois produits obtenus, la réaction sous $P = 1$ bar est la suivante :



I.10.b Le cristal a pour masse $m = \rho \times S \times \ell = 88,6$ g

La quantité de matière n associée à ce cristal est

$$n = \frac{m}{M(\text{Hg}(\text{CNO})_2)} = \frac{88,6}{284,6} \approx 0,31 \text{ mol}$$

Or, lorsque n moles de cristal sont consommées, il y a création de $2n$ moles de CO et n moles de N_2 , soit un total de $3n$ moles. Le volume V de gaz libéré sera ainsi

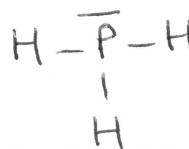
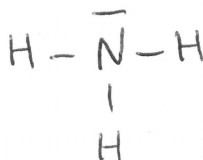
$$V = \frac{3nRT}{P} \approx 23 \text{ L}$$

Ce volume est relativement important et provoque le souffle traditionnel des explosions (propagation d'une onde de pression).

I.11 Le phosphore est situé juste en dessous de l'azote. Sa configuration électronique est ainsi :

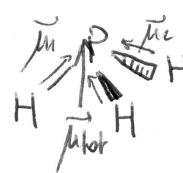
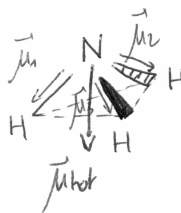


Pour les deux molécules, le nombre d'électrons de valence est $N_e = 5 + 3 = 8$, soit $D = 4$ doublets à répartir :



I.12 Étude de la géométrie.

I.12.a Les molécules sont représentées ci-contre :



I.12.b Les moments dipolaires des liaisons ont été représentés ($\chi(\text{N}) > \chi(\text{H})$ et $\chi(\text{P}) < \chi(\text{H})$). Ainsi, les deux molécules sont polaires, de moment dipolaire $\vec{\mu}_{\text{tot}} \neq \vec{0}$.

N est un des trois éléments les plus électronégatifs de la classification périodique. P étant juste en dessous de N, on a $|\chi(\text{N}) - \chi(\text{H})| > |\chi(\text{P}) - \chi(\text{H})|$.

Le moment dipolaire de NH_3 sera plus grand que celui de PH_3 .

I.12.c La phosphine étant une molécule plus grosse que l'ammoniac, elle sera plus polarisable que la molécule d'ammoniac.

I.12.d Au sein de l'ammoniac, il existe essentiellement des interactions de type Keesom et des liaisons hydrogène. Au sein de la phosphine, il existe essentiellement des interactions de type Keesom mais aucune liaison hydrogène. Même si la phosphine est plus polarisable que l'ammoniac, l'absence de liaisons hydrogène pour cette molécule fait toute la différence.

Ainsi, l'ammoniac aura une température d'ébullition plus grande que celle de la phosphine.

$$T_{\text{éb1}} = T_{\text{éb phosphine}} \quad \text{et} \quad T_{\text{éb2}} = T_{\text{éb ammoniac}}$$

I.12.e L'ammoniac est environ 3000 fois plus soluble dans l'eau que la phosphine. En effet, la molécule d'ammoniac est plus polaire que celle de phosphine. Par ailleurs, des liaisons hydrogène se feront entre molécules d'eau et molécules d'ammoniac, mais ne pourront avoir lieu entre molécules d'eau et molécules de phosphine.

I.13 La cinétique étant d'ordre 1 :

$$v = k_1 [\text{PH}_3]$$

Comme par ailleurs, $v = -\frac{1}{1} \frac{d[\text{PH}_3]}{dt}$, on a $-\frac{d[\text{PH}_3]}{dt} = k_1 [\text{PH}_3]$.

La loi de vitesse s'écrit donc

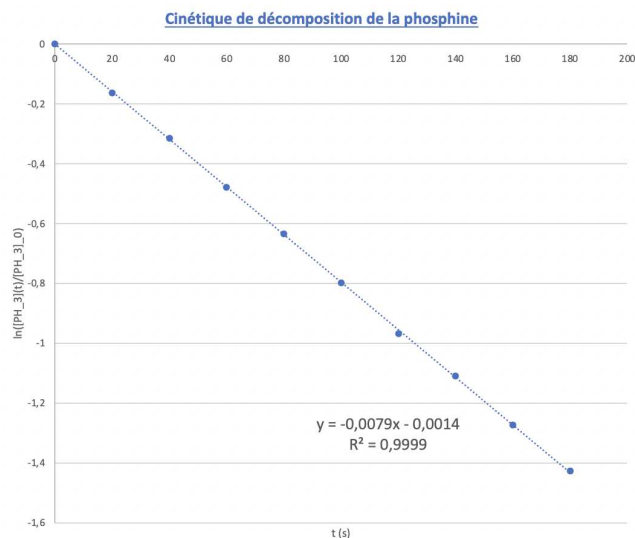
$$\ln \left(\frac{[\text{PH}_3](t)}{[\text{PH}_3]_0} \right) = -k_1 t \quad \text{ou} \quad [\text{PH}_3](t) = [\text{PH}_3]_0 \exp(-k_1 t)$$

Si on considère le graphe donnant t en abscisses et $\ln \left(\frac{[\text{PH}_3](t)}{[\text{PH}_3]_0} \right)$ en ordonnées, les points expérimentaux seront censés s'aligner selon une droite de pente $-k_1$ et d'ordonnée nulle à l'origine.

I.14 Le graphe en question est présenté ci-après :

La régression linéaire donne une cohérence des résultats expérimentaux avec l'ordre 1 (points quasiment parfaitement alignés et ordonnée à l'origine très proche de 0).

d'où $k_1 = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$



I.15 La loi d'Arrhénius s'écrit : $\ln \left(\frac{k_2}{k_1} \right) = -\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$

où T_1 et T_2 sont les températures en Kelvin correspondant à θ_1 et θ_2 .

On en déduit

$$k_2 = k_1 \exp \left(-\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right)$$

Application numérique :

$$k_2 = 2,6 \cdot 10^{-23} \text{ s}^{-1}$$

Le temps de demi-vie $\tau_{1/2}$ de la phosphine à θ_2 s'écrit :

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k_2}$$

Application numérique :

$$\tau_{1/2} = 2,6 \cdot 10^{22} \text{ s}$$

Compte-tenu de la valeur de $\tau_{1/2}$, il est clair que la phosphine est une molécule très stable.

II. Manège pendulaire

II.1 Le référentiel galiléen est défini par le principe d'inertie (1^{ère} loi de Newton) : il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme. En pratique, le caractère galiléen est vérifié quantitativement par la validité expérimentale du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD, 2^{nde} loi de Newton).

II.2 Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = (L + d \sin(\alpha)) \vec{u}_r + (h - d \cos(\alpha)) \vec{u}_z$

II.3 En coordonnées cylindriques, le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$. La nacelle décrit une trajectoire telle que $r = L + d \sin(\alpha) = C^{te}$, d'axe (Oz), à la hauteur $z = h - d \cos(\alpha) = C^{te}$, parcouru à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega$. M décrit donc une trajectoire circulaire d'équations :

$$r = L + d \sin(\alpha) \quad \theta = \omega t + C^{te} \quad \text{et} \quad z = h - d \cos(\alpha)$$

II.4 On repart de $\overrightarrow{OM} = (L + d \sin(\alpha)) \vec{u}_r + (h - d \cos(\alpha)) \vec{u}_z$. Dans cette expression, seul \vec{u}_r varie au cours du temps. On obtient alors :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (L + d \sin(\alpha)) \omega \vec{u}_\theta$$

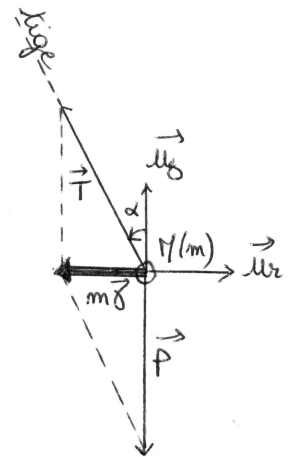
Et par conséquent

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -(L + d \sin(\alpha)) \omega^2 \vec{u}_r$$

- II.5**
- Référentiel : référentiel terrestre \mathcal{R} , galiléen ;
 - Système : nacelle assimilée à un point matériel M de masse m ;
 - Hypothèses : pas de frottements et pas de poussée d'Archimède ;
 - Bilan des actions s'exerçant sur la nacelle :

★ le poids : $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$;

★ l'action de la tige : $\vec{T} = -T \sin(\alpha) \vec{u}_r + T \cos(\alpha) \vec{u}_z$, avec $T = \|\vec{T}\|$.



II.6 La deuxième loi de Newton appliquée à la nacelle, dans le référentiel \mathcal{R} considéré galiléen, s'écrit :

$$m \vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{T}$$

Projection :

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{u}_r : & -m (L + d \sin(\alpha)) \omega^2 = & -T \sin(\alpha) \\ \text{sur } \vec{u}_z : & & 0 = -m g + T \cos(\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

La projection sur \vec{u}_z donne alors

$$T = \frac{m g}{\cos(\alpha)}$$

II.7 En éliminant T dans la projection sur \vec{u}_r de la 2^{ème} loi de Newton, il vient :

$$-m (L + d \sin(\alpha)) \omega^2 = -m g \tan(\alpha)$$

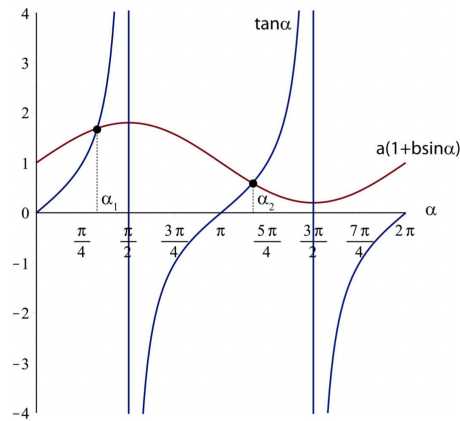
D'où

$$\frac{L \omega^2}{g} \left(1 + \frac{d}{L} \sin(\alpha) \right) = \tan(\alpha) \quad (2)$$

On trouve ainsi la relation demandée avec :

$$a = \frac{L \omega^2}{g} \quad \text{et} \quad b = \frac{d}{L}$$

II.8 Les valeurs de α correspondent à l'intersection des deux courbes.

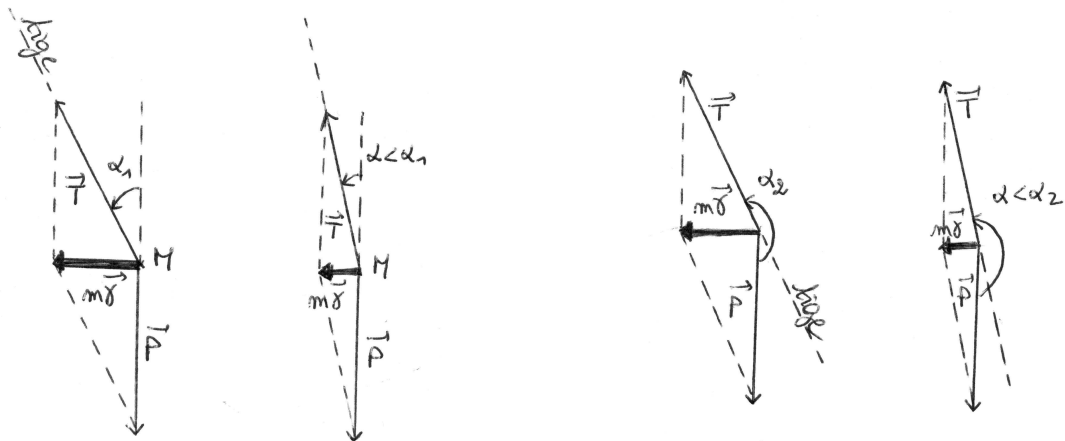


Il y a donc une solution $\alpha_1 \in [0, \pi/2]$ et une autre $\alpha_2 \in [\pi, 3\pi/2]$.

II.9 Nacelles et forces dans ces deux positions :

Solution α_1 - STABLE

Solution α_2 - INSTABLE



Rapprochement de l'axe $Oz \rightarrow$ éloignement Éloignement de l'axe $Oz \rightarrow$ éloignement.

Pour $\alpha < \alpha_1$ (ou α_2), l'accélération normale est alors plus faible en norme. Cela implique que le rayon de courbure de la trajectoire va s'accroître. Or, dans le cas de gauche, la distance à l'axe est plus petite qu'à l'équilibre, donc M revient vers sa position d'équilibre. C'est une position stable. Inversement, dans le cas de droite, la distance à l'axe est plus grande qu'à l'équilibre, donc M s'éloigne encore plus de sa position d'équilibre. C'est une position instable. Bien sûr, on obtient le même résultat si on considère au contraire un angle supérieur à la position d'équilibre.

II.10 La relation (2) donne

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{g \tan(\alpha)}{L + d \sin(\alpha)}}$$

Application numérique : $|\omega| = 0,69 \text{ rad.s}^{-1} = 6,6 \text{ tr.min}^{-1}$

En exploitant cette même relation (2), l'expression de l'accélération subie par les passagers devient telle que

$$|\gamma| = g \tan(\alpha)$$

Application numérique :

$$|\gamma| = 0,58 g$$

Cette accélération est tout à fait supportable.

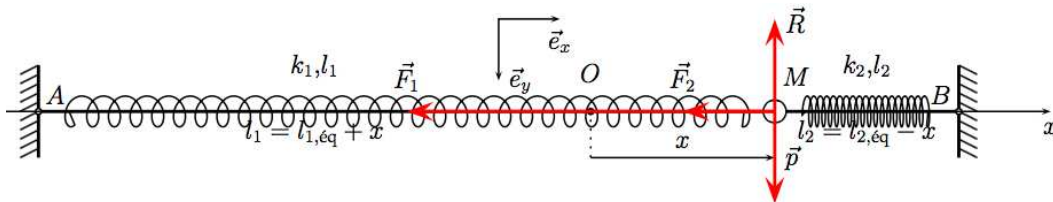
III. Oscillations mécaniques libres

III.1 Oscillations libres horizontales

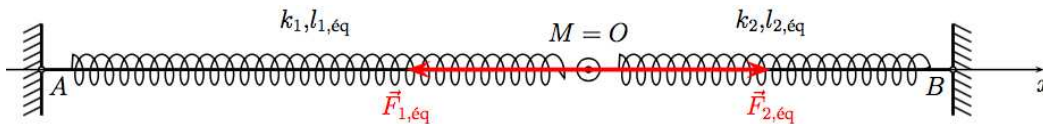
III.1 Absence de frottement

III.1.a Position du problème :

- Référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen ;
- Système : point matériel M de masse m ;
- Hypothèses : pas de frottements ;
- Bilan des actions s'exerçant sur m :
 - ★ le poids : $\vec{P} = mg\vec{e}_y$;
 - ★ l'action normale de la tige \vec{R} ;
 - ★ la force de rappel du ressort n°1 : $\vec{F}_1 = -k_1(l_1 - l_0)\vec{e}_x = -k_1(l_{1,\text{éq}} + x - l_0)\vec{e}_x$;
 - ★ la force de rappel du ressort n°2 : $\vec{F}_2 = +k_2(l_2 - l_0)\vec{e}_x = +k_2(l_{2,\text{éq}} - x - l_0)\vec{e}_x$.
- Cinématique : $\vec{OM} = x\vec{e}_x$, $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{e}_x$.



- III.1.b** À l'équilibre ($x = 0$) dans le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen, d'après la première loi de Newton, la somme vectorielle des forces appliquées à M est nulle. Sans représenter les forces verticales, et comme les deux ressorts sont étirés à l'équilibre (l'énoncé précise que $AB > 2l_0$), on obtient le schéma suivant :



Par projection sur l'axe horizontal, on en déduit :

$$-k_1(l_{1,\text{éq}} - l_0) + k_2(l_{2,\text{éq}} - l_0) = 0$$

Comme les deux ressorts sont tendus à l'équilibre :

$$l_{1,\text{éq}} > l_0 \quad \text{donc} \quad l_{1,\text{éq}} - l_0 \neq 0$$

d'où
$$k_1 = \frac{l_{2,\text{éq}} - l_0}{l_{1,\text{éq}} - l_0} k_2$$

Comme $l_{2,\text{éq}} < l_{1,\text{éq}}$ (cf. figure 2), on en déduit que $k_1 < k_2$.

- III.1.c** On peut établir l'équation différentielle du mouvement par projection du principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$$

À m constante : $m \vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

Par projection sur l'axe Ox

$$m\ddot{x} = -k_1(l_{1,\text{éq}} + x - l_0) + k_2(l_{2,\text{éq}} - x - l_0)$$

ou encore
$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x \underbrace{-k_1(l_{1,\text{éq}} - l_0) + k_2(l_{2,\text{éq}} - l_0)}_{=0 \text{ (cf. ci-avant)}}$$

On reconnaît (membre de droite) la condition à l'équilibre (question précédente) ce qui permet de simplifier l'équation :

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

III.1.d On obtient $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} > 0$ ce qui correspond bien à l'équation différentielle d'un Oscillateur Harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$ et de période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

III.1.e On a
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\frac{dx}{dt}(0) = 0$

On en déduit $A = x_0$ et $B = 0$

d'où
$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

III.2 En tenant compte des frottements.

III.2.a On ajoute la force $\vec{f} = -\mu \dot{x} \vec{e}_x$ au bilan des actions appliquées à M. Par projection sur Ox , on obtient alors :

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x - \mu \dot{x} \quad \text{de la forme} \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec
$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\mu}{m}$$

d'où

$$Q = \frac{m\omega_0}{\mu} = \frac{\sqrt{m(k_1 + k_2)}}{\mu}$$

Analyse dimensionnelle : $[k] = \frac{[\text{Force}]}{L} = M.T^{-2}$ donc $\left[\sqrt{m(k_1 + k_2)} \right] = M.T^{-1}$

$$[\mu] = \frac{[\text{Force}]}{L.T^{-1}} \quad \text{donc} \quad [\mu] = M.T^{-1}$$

$$\text{Le rapport } Q = \frac{\sqrt{m(k_1 + k_2)}}{\mu} \text{ est bien sans dimension.}$$

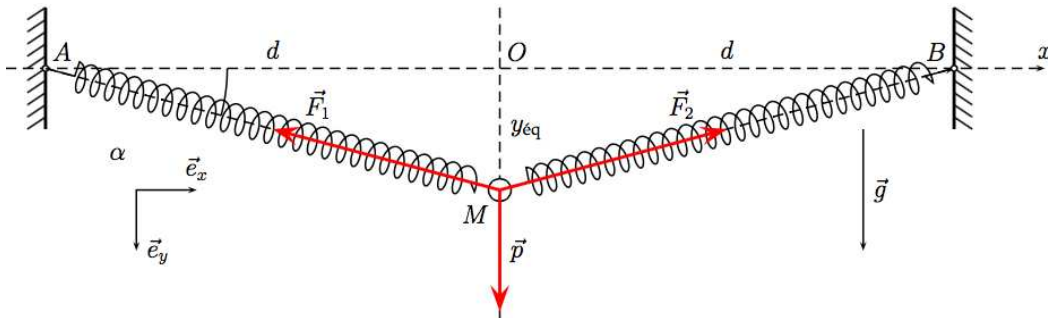
III.2.b On aura un mouvement amorti oscillatoire si $Q > \frac{1}{2}$, donc si

$$\mu < 2\sqrt{m(k_1 + k_2)} = \mu_0$$

III.2 Oscillations libres verticales (ou saut à l'élastique)

III.3 Le nouveau bilan à l'équilibre des actions s'exerçant sur la masse m est :

- ★ le poids : $\vec{P} = mg\vec{e}_y$;
- ★ la force de rappel du ressort n°1 : $\vec{F}_1 = -k_1 (l_1 - l_0) \vec{u}_1$,
avec $l_1 = \sqrt{d^2 + y_{\text{eq}}^2}$ et $\vec{u}_1 = \frac{\vec{AM}}{AM} = \cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y$;
- ★ la force de rappel du ressort n°2 : $\vec{F}_2 = -k_2 (l_2 - l_0) \vec{u}_2$
avec $l_2 = \sqrt{d^2 + y_{\text{eq}}^2}$ et $\vec{u}_2 = \frac{\vec{BM}}{BM} = -\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y$.



1^{ère} loi de Newton à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

Projection sur l'axe Oy :

$$mg - k \left(\sqrt{d^2 + y_{\text{eq}}^2} - l_0 \right) \sin(\alpha) - k \left(\sqrt{d^2 + y_{\text{eq}}^2} - l_0 \right) \sin(\alpha) = 0$$

Or $\sin(\alpha) = \frac{y_{\text{eq}}}{l}$ et $l = \sqrt{d^2 + y_{\text{eq}}^2}$

d'où

$$mg = 2k \left[1 - \frac{l_0}{\sqrt{y_{\text{eq}}^2 + d^2}} \right] y_{\text{eq}}$$

III.4 Si $y_{\text{eq}} \ll d$ alors

$$\sqrt{y_{\text{eq}}^2 + d^2} \simeq d$$

On obtient alors

$$y_{\text{eq}} = \frac{mgd}{2k(d - l_0)}$$

Application numérique :

$$y_{\text{eq}} = 20 \text{ cm}$$

On note qu'en première approximation, on a bien $y_{\text{eq}} < d$.

III.5 Hors équilibre, le mouvement restera vertical si $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, il faudra donc, par exemple lâcher M à partir de la position ($x(0) = 0$) sans vitesse initiale horizontale.

III.6 Comme le mouvement est purement vertical, la cinématique est

$$\overrightarrow{OM} = y \overrightarrow{e_y} \quad \overrightarrow{v} = \dot{y} \overrightarrow{e_y} \quad \overrightarrow{\gamma} = \ddot{y} \overrightarrow{e_y}$$

1^{ère} loi de Newton à $m = C^{te}$ $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = m \overrightarrow{\gamma}$

d'où

$$m \ddot{y} = mg - 2k \left[1 - \frac{l_0}{\sqrt{y^2 + d^2}} \right] y$$

L'équation différentielle étant non linéaire, l'oscillateur n'est pas linéaire.

III.7 On simplifie l'équation différentielle précédente : $\sqrt{y^2 + d^2} \simeq d$.

On obtient alors
$$m \ddot{y} = mg - 2k \left[1 - \frac{l_0}{d} \right] y$$

ou encore

$$\ddot{y} + \frac{2k(d - l_0)}{md} y = g$$

ce qui correspond cette fois à un oscillateur linéaire (et même harmonique) de pulsation propre $\omega_{0,y}$

telle que $\omega_{0,y} = \sqrt{\frac{2k(d - l_0)}{md}}$.

IV. Fentes d'Young

IV.1 Il s'agit du phénomène d'interférences.

IV.2 S_1 et S_2 font référence aux sources secondaires. On n'observe des interférences entre deux ondes émises par deux sources sinusoïdales S_1 et S_2 que si ces sources sont cohérentes, c'est-à-dire :

synchrones (de même fréquence) et telles que le déphasage reste constant : $\varphi_{01} - \varphi_{02} = C^{te}$

IV.3 On a démontré dans le cours que $\delta(M) = \frac{a x}{D}$

IV.4 L'interfrange i est la distance entre les centres de deux franges consécutives de même nature.

IV.5 Deux franges consécutives de même nature sont séparées d'un déphasage $\Delta\varphi(M) = \pm 2\pi$.

On en déduit
$$\frac{2\pi a \Delta x_{\text{cons}}}{\lambda D} = \pm 2\pi$$

Finalement
$$i = |\Delta x_{\text{cons}}| = \frac{\lambda D}{a}$$

Application numérique :
$$i = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

IV.6 Point O.

IV.6.a En O, la différence de marche est $\delta(O) = 0$

IV.6.b En utilisant la formule de Fresnel, on en déduit qu'en O, l'intensité lumineuse est maximale et égale à $4I_0$. Ainsi, les interférences y sont constructives et la frange est brillante.

IV.7 Déphasage correspondant :
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \delta(N)}{\lambda} = 7\pi$$

L'interférence en N est destructive et la frange est sombre.

IV.8 On déplace S verticalement de $y = 1,0 \text{ cm}$ du côté de S_1 .

IV.8.a Les différences de marche avant et après fentes s'ajoutent.

On en déduit
$$\delta'(M) = \frac{a x}{D} + \frac{a y}{d}$$

IV.8.b Notons O' le centre de cette frange centrale déplacée et $x_{O'}$ sa côte. La frange centrale étant telle que $\delta(O') = 0$, on en déduit

$$\frac{a x_{O'}}{D} + \frac{a y}{d} = 0$$

d'où
$$x_{O'} = -\frac{y D}{d}$$

Comme $x_{O'} < 0$, le déplacement s'opère vers S_2 . La distance de déplacement est de $0,20 \text{ m}$.

