

DS6 : Mécanique du point et chimie – corrigé

Exercice 1 : LANCER DE POIDS

1. Pour $t > 0$, le poids n'est soumis qu'à son poids \vec{P} . On lui applique le PFD dans le référentiel terrestre galiléen, on obtient $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$.

On écrit les vecteurs dans la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ où \vec{e}_x et \vec{e}_y sont des vecteurs unitaires dirigés suivant x et y . On a :

$$\vec{P} = -mg\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y \quad (1)$$

En projetant le PFD sur \vec{e}_x et \vec{e}_y , on obtient les équations différentielles

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad (2)$$

2. — Suivant l'axe x , l'accélération est nulle, le mouvement est uniforme (vitesse constante) ;
 — Suivant l'axe y , l'accélération est constante (non nulle), le mouvement est uniformément accéléré.
3. On intègre deux fois les équations 2 pour obtenir :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t + x_0 = v_0 \cos(\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + H \end{cases} \quad (3)$$

4. Au sommet de la trajectoire, la composante verticale de la vitesse du poids est nulle. On a donc

$$-gT_S + v_0 \sin(\alpha) = 0 \quad \text{donc} \quad T_S = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \quad (4)$$

5. On utilise l'expression de T_S trouvée à la question précédente dans les équations 3 pour obtenir

$$x_S = x(T_S) = \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad y_S = y(T_S) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\alpha) + H \quad (5)$$

6. L'application numérique donne $\overline{T_S} = 0,51 \text{ s}$, $\overline{x_S} = 4,4 \text{ m}$ et $\overline{y_S} = 3,3 \text{ m}$.

7. On utilise l'équation de $x(t)$ pour exprimer t en fonction de x et on injecte son expression dans l'équation de $y(t)$. On obtient $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$ et

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha)x + H \quad (6)$$

8. Le point du chute du poids satisfait l'équation $y(x_C) = 0$. On utilise l'équation 6 pour obtenir

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_C^2 + \tan(\alpha)x_C + H = 0 \quad \text{soit} \quad \underbrace{\frac{g}{2v_0^2}}_A x_C^2 - \underbrace{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}_B x_C - \underbrace{H \cos^2(\alpha)}_C = 0 \quad (7)$$

9. Vu la relation donnant $\tan^2(\alpha_m)$, on s'attend à ce que a soit homogène à l'inverse d'une longueur $[a] = L^{-1}$.
 L'expression de a donne

$$[a] = \frac{[g]}{[v_0]^2} = \frac{LT^{-2}}{(LT^{-1})^2} = L^{-1} \quad (8)$$

10. On commence par exprimer x_{Cm} en fonction de $\tan^2(\alpha_m)$. À partir de l'équation donnée pour x_{Cm} on obtient

$$x_{Cm} = 2H \frac{\tan(\alpha_m)}{1 - \tan^2(\alpha_m)} = 2H \sqrt{\frac{\tan^2(\alpha_m)}{(1 - \tan^2(\alpha_m))^2}} \quad (9)$$

De plus, on nous donne $\tan^2(\alpha_m) = \frac{1}{1+aH}$, donc $1 - \tan^2(\alpha_m) = \frac{aH}{1+aH}$. Et on obtient

$$x_{Cm} = 2H \sqrt{\frac{\frac{1}{1+aH}}{\left(\frac{aH}{1+aH}\right)^2}} = 2H \sqrt{\frac{1+aH}{(aH)^2}} = \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{4H}{a}} = \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2v_0^2 H}{g}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gH} \quad (10)$$

11. Comme on pouvait s'y attendre, plus l'athlète est grande, plus le meilleur lancer sera important. Cependant, une analyse rapide de l'équation précédente indique que la vitesse v_0 influence davantage la portée que H .
12. Les données numériques fournies donnent $\alpha_m = 40^\circ$ et $x_{Cm} = 12 \text{ m}$. C'est largement en dessous du record du monde de lancer féminin. On peut penser que c'est la vitesse v_0 qui a été sous-estimée dans notre modèle. Une vitesse $v_0 = 14 \text{ m s}^{-1}$ donnerait $x_{Cm} = 22 \text{ m}$, bien plus proche de la valeur réelle.

Exercice 2 : POURQUOI LE CIEL EST-IL BLEU ?

1. L'électron est au repos dans un référentiel galiléen, donc la somme des forces appliquées est nulle. La force \vec{f} est nulle car la vitesse de l'électron est nulle. Il reste $\vec{F}_A + \vec{F}_R = 0$. En projetant cette relation suivant \vec{e}_x , avec $r = a$, on obtient :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{A}{a^3} \quad \text{soit} \quad A = \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} \quad (1)$$

2. La force totale subie par l'électron est

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_A + \vec{F}_R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right) \vec{e}_x = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{(a+x)^3} - \frac{1}{(a+x)^2} \right) \vec{e}_x \quad (2)$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^3\right)} - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} \right) \vec{e}_x \quad (3)$$

On utilise le fait que $x/a \ll 1$ et le développement limité donné par l'énoncé pour simplifier l'expression précédente et obtenir

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - 3\frac{x}{a} - 1 + 2\frac{x}{a} \right) \vec{e}_x = - \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}}_k x \vec{e}_x \quad (4)$$

Cette force correspond à la force de rappel d'un ressort de raideur k .

3. Numériquement, on trouve $k = 1,5 \times 10^4 \text{ N m}^{-1}$.
4. La vitesse de l'électron est $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{e}_x$. La force \vec{f} est donc donnée par $\vec{f} = -\hbar \dot{x} \vec{e}_x$.
5. On applique le PFD à l'électron dans le référentiel d'étude que l'on a supposé galiléen, et on le projette sur \vec{e}_x pour obtenir

$$m\ddot{x} = -kx - \hbar \dot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{\hbar}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

On reconnaît là l'équation d'un oscillateur harmonique amorti avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\hbar}$.

6. On a $\hbar = \frac{\sqrt{km}}{Q}$, on trouve numériquement $\hbar = 1,2 \times 10^{-19} \text{ N s m}^{-1}$

7. On reprend le PFD de l'équation 5 et on ajoute la force électrique subie par l'électron $\vec{F}_e = -eE_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. On obtient

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t) \quad (6)$$

8. Pour trouver X_m et φ , on utilise la méthode des complexes en associant une grandeur $\underline{x}(t)$ à la grandeur réelle $x(t)$. L'équation différentielle 6 devient, en complexes :

$$-\omega^2 \underline{x} + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = -\frac{eE_0}{m} e^{j\omega t} \quad \text{soit} \quad \underline{x} = \frac{\frac{eE_0}{m} e^{j\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 - j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \quad (7)$$

On a alors $X_m = |\underline{x}|$ et $\varphi = \arg(\underline{x})$. Et on obtient

$$X_m = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \quad (8)$$

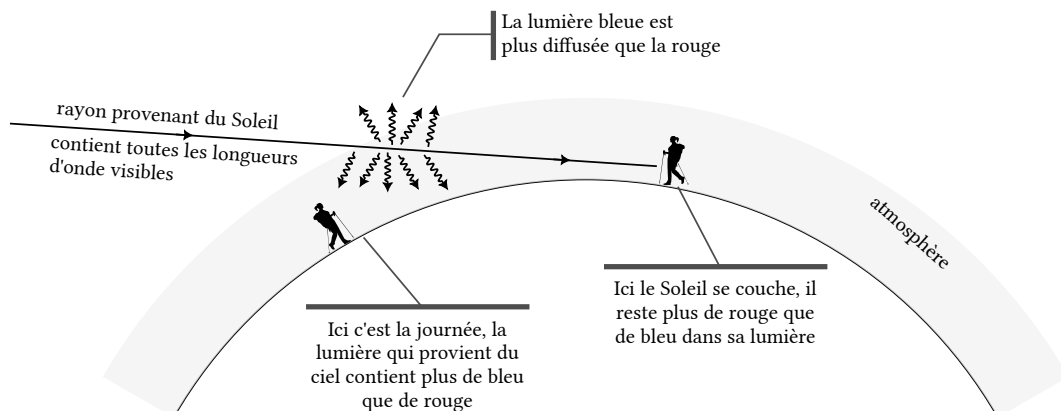
9. Les longueurs d'onde des lumières bleue et rouge sont respectivement $\lambda_b = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_r = 800 \text{ nm}$. On a $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$, ce qui donne numériquement $\omega_b = 4,7 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$ et $\omega_r = 2,4 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$.
10. Avec les données de l'énoncé, on trouve $\omega_0 = 1,3 \times 10^{17} \text{ rad s}^{-1}$. On a donc $\omega_0 \gg \omega$ pour tout le spectre de la lumière visible et les expressions (8) peuvent se simplifier en

$$X_m \approx \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \quad \text{et} \quad \varphi \approx \pi \quad (9)$$

11. L'accélération de l'électron est $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$. Avec l'expression de X_m trouvée à la question précédente, on trouve que l'amplitude de l'accélération est $a_m = \frac{eE_0}{m} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.
12. La puissance rayonnée est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération, donc la puissance rayonnée en lumière bleue est $P_b = K a_m(\text{bleu})^2 = K \left(\frac{eE_0}{m} \frac{\omega_b^2}{\omega_0^2}\right)^2$. Et de la même manière, la puissance rayonnée en lumière rouge est $P_r = K \left(\frac{eE_0}{m} \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)^2$. Le rapport des deux est donc

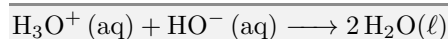
$$\eta = \frac{P_b}{P_r} = \frac{\omega_b^4}{\omega_r^4} = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4 \approx 16 \quad (10)$$

13. On voit que la puissance rayonnée est 16 fois plus importante en lumière bleue qu'en lumière rouge, les atomes diffusent donc beaucoup plus le bleu que le rouge, ce qui donne sa couleur bleue au ciel. Pour la même raison, lorsque le Soleil se couche, la lumière que l'on reçoit a traversé une couche d'atmosphère beaucoup plus épaisse qu'en journée et le bleu a été beaucoup plus diffusé que le rouge. Il reste donc relativement plus de rouge dans la lumière reçue.



Exercice 3 : DOSAGE D'UN MÉLANGE D'ACIDES

1. L'acide chlorhydrique est un acide fort qui se trouve en solution aqueuse sous la forme ($\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$) ; la soude est une base forte qui se trouve en solution aqueuse sous la forme ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$). La réaction de dosage est

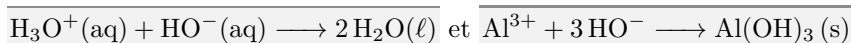


La constante d'équilibre associée est $K = \frac{c^{\circ 2}}{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-]} = \frac{1}{K_e} = 10^{14}$.

2. L'équivalence intervient au niveau du saut de pH, graphiquement on trouve $V_{\text{eq}} = 10 \text{ ml}$.
3. À l'équivalence, les réactifs ont été introduits en proportions stœchiométriques, c'est à dire que $n_{\text{HO}^-}(\text{versés à l'équivalence}) = n_{\text{H}_3\text{O}^+}(\text{initialement présents})$, soit $CV_{\text{eq}} = C_1V_0$ et finalement

$$C_1 = C \frac{V_{\text{eq}}}{V_0} = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol } \ell^{-1}$$

4. Au niveau du saut de pH, le pH passe de environ 4 à environ 10. Il faut choisir un indicateur coloré dont la zone de virage se situe dans cet intervalle. Le plus adapté semble être le bleu de bromothymol. On observera la solution passer du jaune au bleu à l'équivalence.
5. En solution, on trouve des ions H_3O^+ (venant de l'acide chlorhydrique) et des ions Al^{3+} . Les réactions mises en jeu lors de ce titrage sont



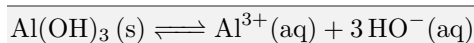
6. On remarque le point anguleux D qui marque l'apparition du précipité de $\text{Al}(\text{OH})_3(\text{s})$. Cela signifie qu'avant d'avoir versé 10 ml de soude, la réaction entre Al^{3+} et HO^- n'avait pas eu lieu. C'est donc l'espèce H_3O^+ qui est dosée en première.
7. Les ions HO^- qui ont servi à doser Al^{3+} sont ceux qui ont été versés entre les deux sauts de pH, c'est-à-dire entre $V_{\text{eq1}} = 10 \text{ ml}$ et $V_{\text{eq2}} = 25 \text{ ml}$, ce qui correspond à un volume $V_b = V_{\text{eq2}} - V_{\text{eq1}} = 15 \text{ ml}$.
À l'équivalence, les réactifs ont été introduits en proportions stœchiométriques, donc $n_{\text{Al}^{3+}}(\text{init.})/1 = n_{\text{HO}^-}(\text{versés pour ce dosage})/3$, donc $3V_0C_2 = V_bC$ et finalement

$$C_2 = C \frac{V_b}{3V_0} = 2,5 \times 10^{-2} \text{ mol } \ell^{-1}$$

8. La masse de chlorure d'aluminium qui a servi à préparer la solution (\mathcal{S}) est

$$m = C_2V_0M(\text{AlCl}_3, 6\text{H}_2\text{O}) = 1,2 \times 10^{-1} \text{ g}$$

9. Le produit de solubilité est la constante d'équilibre de l'équation de dissolution :



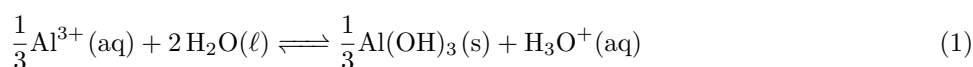
10. Au point D , on a $\text{pH} = 3,8$. On détermine la concentration en ions HO^- grâce au produit ionique de l'eau

$$[\text{HO}^-][\text{H}_3\text{O}^+] = c^{\circ 2} K_e \quad \text{donc} \quad [\text{HO}^-] = c^{\circ} 10^{\text{pH} - \text{p}K_e} = 6,3 \times 10^{-11} \text{ mol } \ell^{-1}$$

11. Au point D les ions Al^{3+} n'ont pas encore réagi, leur concentration est $C_D = \frac{C_2V_0}{V_0 + V_{\text{eq1}}} = 1,7 \times 10^{-2} \text{ mol } \ell^{-1}$.

12. Le produit de solubilité de l'hydroxyde d'aluminium est $K_s = [\text{HO}^-]^3[\text{Al}^{3+}]/c^{\circ 4} = 4,2 \times 10^{-33}$

13. La constante d'acidité du couple $\text{Al}^{3+}/\text{Al}(\text{OH})_3$ est la constante d'équilibre de la réaction



et s'écrit comme :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^{\circ 2} [\text{Al}^{3+}]^{1/3}} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-]}{c^{\circ 2} [\text{Al}^{3+}]^{1/3} [\text{HO}^-]} = \frac{K_e}{K_s^{1/3}} = 6,2 \times 10^{-4} \text{ et } \text{p}K_a = -\log(K_a) = 3,2$$

Al^{3+} est donc un acide faible, c'est normal qu'il soit dosé après les ions H_3O^+ .