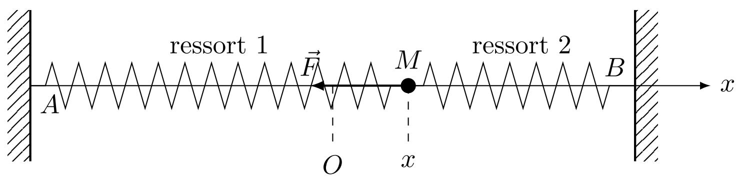
TD5 : Oscillateurs – corrigé

Exercice 1 : Oscillateur à deux ressorts



1. La force $\vec{F}$ subie par la masse m lorsqu'elle est déplacée de x par rapport à sa position d'équilibre est

$$\vec{F} = (-k(\underbrace{\ell_{\text{éq}} + x}_{\text{longueur du ressort 1}} - \ell_0) + k(\underbrace{\ell_{\text{éq}} - x}_{\text{longueur du ressort 2}} - \ell_0))\vec{e}_x = -2kx\vec{e}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe $\vec{e}_x$ donne l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

2. On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$
3. La solution générale est $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Les conditions initiales sont $x(0) = x_0 = A\cos(\varphi)$, et $\dot{x}(0) = -A\omega_0\sin(\varphi) = 0$. On en déduit que $\varphi = 0$ et $A = x_0$. On obtient donc

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$$

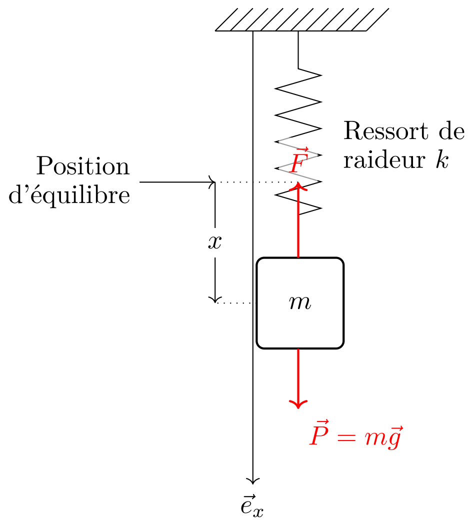
4. L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies potentielles des ressorts et de l'énergie cinétique de la masse. On obtient

$$\begin{aligned} E = E_{p1} + E_{p2} + E_c &= \frac{1}{2}k(\ell_{\text{éq}} + x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_{\text{éq}} - x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = kx^2 + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \\ &= k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + kx_0^2\sin^2(\omega_0 t) \\ &= k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + kx_0^2 \end{aligned}$$

On trouve bien une expression qui ne dépend pas du temps, l'énergie mécanique totale est donc constante.

Exercice 2 : Gadget à ressort

1. On modélise l'avion par une masse m suspendue à un ressort de raideur k. On note x le déplacement par rapport à la position d'équilibre.



2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0)\vec{e}_x$. Lorsqu'on projette cette équation sur l'axe $\vec{e}_x$, on obtient :

$$m\ddot{x} = mg - k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = g - \frac{k}{m}(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$$

La pulsation propre du système est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

3. Lorsque le système est à l'équilibre, $\ddot{x} = 0$ e $x = 0$ (car x est le déplacement par rapport à la position d'équilibre). On obtient donc :

$$g - \frac{k}{m}(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} = 92{,}7\,\text{cm}$$

4. Vu l'expression de ℓ_{eq} trouvée à la question précédente, l'équation différentielle du mouvement se simplifie en $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. La solution générale est

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les conditions initiales sont : $x(0) = \ell_0 - \ell_{\text{eq}} = -\frac{mg}{k}$ et $\dot{x}(0) = -v_0$ (car la vitesse est vers le haut et l'axe x est orienté vers le bas. On a alors :

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -\frac{mg}{k} \\ -A\omega_0\sin\varphi = -v_0 \end{cases} \Rightarrow A^2 = \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

et on obtient bien un mouvement d'amplitude :

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

5. Pour que l'avion touche le sol, il faut que $\ell_{\text{eq}} + x = h$ donc $x = h - \ell_{\text{eq}}$. Il faut donc que l'amplitude du mouvement soit au moins égale à $h - \ell_{\text{eq}}$. Donc

$$A \geq h - \ell_{\text{eq}} \Leftrightarrow \frac{v_0}{\omega_0} \geq \sqrt{(h - \ell_{\text{eq}})^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2} \Leftrightarrow v_0 \geq \omega_0\sqrt{(h - \ell_{\text{eq}})^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2} \Leftrightarrow v_0 \geq 7{,}3\,\text{m/s}$$

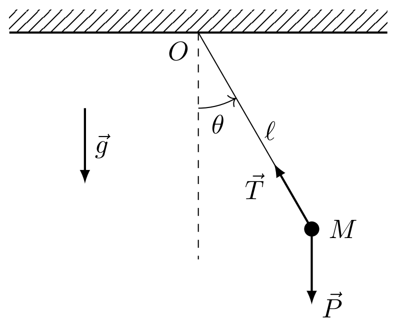
6. L'énergie doit être conservée car nous avons négligé tous les frottements. L'énergie totale du système est la somme de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = -mgx$ (on choisit l'origine à la position d'équilibre) et de l'énergie potentielle élastique $E_l = \frac{1}{2}k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0)^2$.
En utilisant l'expression de $x(t)$ obtenue plus haut ainsi que $\ell_{\text{eq}} - \ell_0 = \frac{mg}{k}$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) - mgA\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{(mg)A^2}{2k} = \text{constante} \end{aligned}$$

L'énergie totale du système ne dépend pas du temps, elle est donc conservée.

Exercice 3 : Pendule simple

1. Les forces qui s'exercent sur la masse M sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

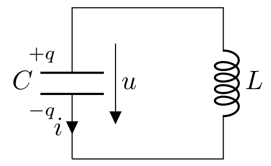


2. La trajectoire est circulaire car le fil reste tendu et le point M reste à une distance constante du point O.

3. L'énergie totale reste constante car on néglige les frottements de l'air. Comme l'altitude h du point M est donnée par $h = -\ell\cos\theta$, on obtient :
$$E = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell\cos\theta = \text{constante}$$
En dérivant l'équation précédente par rapport à t, on obtient :
$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta\dot{\theta} = 0$$
Comme cette équation est valable quel que soit t et comme $\dot{\theta}$ n'est pas identiquement nul, on en déduit que
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$
4. Cette équation différentielle n'est pas celle d'un oscillateur harmonique à cause du terme $\sin\theta$.
5. Dans ces conditions, l'équation différentielle devient
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$
6. La pulsation propre de cet oscillateur est $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et la période des oscillations est
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Exercice 4 : Analogie entre oscillateur mécanique et oscillateur électrique

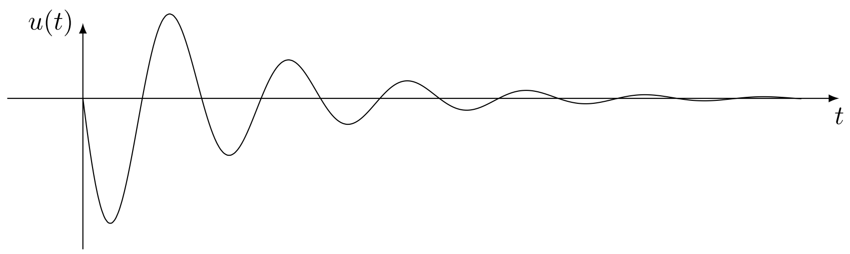
1. L'équation fondamentale de la dynamique donne presque directement $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
2. Le circuit étudié est le suivant



Dans ce circuit on a $q = Cu$, $u = -L\frac{di}{dt}$ et $i = \frac{dq}{dt}$, donc on obtient l'équation différentielle : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$
3. On peut donc faire l'analogie entre les deux situations : la charge correspond à la position $q \leftrightarrow x$ la bobine correspond à l'inertie de l'intensité donc à la masse $L \leftrightarrow m$ et l'inverse de la capacité est la raideur du ressort $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$ dans ces conditions $u = \frac{q}{C} \leftrightarrow k \times x = |F_r|$, la tension correspond à la force exercée par le ressort.

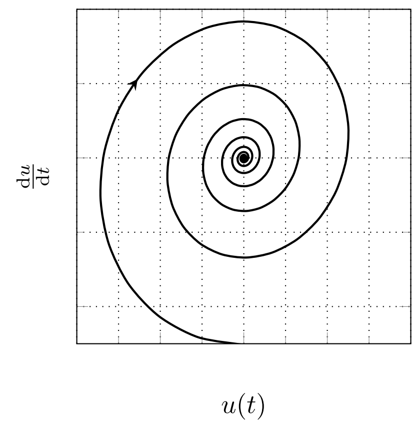
Exercice 5 : Circuit RLC parallèle

1. En régime permanent, condensateur=circuit ouvert et bobine=fil.
   - à $t = 0^-$ on a $u = 0$ $i_C = 0$, $i_L = \frac{E}{R_g}$ et $i_R = \frac{u}{R} = 0$;
   - à $t = 0^+$ L'intensité dans la bobine est continue donc $i_L = \frac{E}{R_g}$ la tension aux bornes de C est continue donc $u = 0$ donc $i_R = 0$ et la loi des nœuds donne $i_C = -i_L$;
   - lorsque $t \to \infty$ L'énergie est dissipée par la résistance et $i_C = i_R = i_L = 0$ et $u = 0$.
2. La tension $u(t)$ va commencer par être négative ($i_C(0^+) < 0$) puis va osciller avant de se stabiliser à 0. On obtient l'évolution ci-dessous :

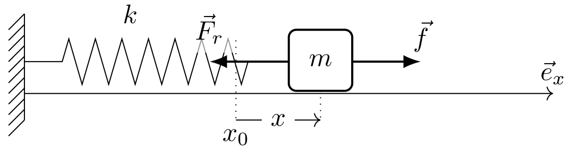


3. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur le courant dans L va progressivement diminuer en partie pour charger C et en partie en passant dans R. Lorsque le courant dans L s'annule, le condensateur se décharge et le courant devient négatif. L'intensité oscillera jusqu'à ce que toute l'énergie ait été dissipée par la résistance.

   Si R est très élevée, Q est aussi élevé donc on peut supposer que $Q \propto R$. L'analyse dimensionnelle donne $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ (Q doit être sans dimension)
4. $u = L\frac{di_L}{dt}$, $i_L = -i_C - i_R$, $i_C = C\frac{du}{dt}$ et $i_R = \frac{u}{R}$ donc $\frac{u}{L} = -C\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{R}\frac{du}{dt}$. Ce qui nous donne l'équation différentielle :
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \tag{1}$$
5. On déduit de l'équation précédente (par identification à celle d'un oscillateur harmonique amorti) :
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$
   On retrouve la même expression que dans la question précédente.
6. Avec les données fournies, on trouve $\omega_0 \approx 707\,\mathrm{rad/s}$ et $Q \approx 6$
7. Portrait de phase :



Exercice 6 : Oscillateur mécanique amorti

1. 

2. Sur les graphiques, on trouve que la période d'une pseudo-oscillation est environ $T_0 \simeq 0{,}1\,\mathrm{s}$ donc $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \simeq 63\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

   On trouve le facteur de qualité en comptant le nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne soit divisée par 20, on trouve $Q \simeq 5$.
3. On met l'équation différentielle sous la forme canonique : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on trouve $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}$
4. Avec $m = 1\,\mathrm{g}$ et la valeur de ω_0 trouvée ci-dessus, on trouve $k = m\omega_0^2 \simeq 3{,}9\,\mathrm{N/m}$ et $\gamma = \frac{\sqrt{km}}{Q} \simeq 0{,}012\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

Exercice 7 : Associations d'impédances complexes

Dipôle 1 : $Z_{\text{eq}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$; Dipôle 2 : $Z_{\text{eq}} = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$;
Dipôle 3 : $Z_{\text{eq}} = \frac{jLR\omega}{R + jL\omega} + \frac{1}{jC\omega}$; Dipôle 4 : $Z_{\text{eq}} = \frac{jR(LC\omega^2 - 1)}{RC\omega + j(LC\omega^2 - 1)}$

Exercice 8 : Circuit RLC parallèle en régime forcé

1. L'impédance complexe équivalente à RLC en parallèle est : $Z_{\text{eq}} = \dfrac{R}{1 + jR(C\omega - 1/(L\omega))}$, on peut faire apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ on obtient : $Z_{\text{eq}} = \dfrac{R}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$.
   On trouve alors $\underline{\text{i}} = \dfrac{\underline{\text{e}}}{Z_{\text{eq}}} = \dfrac{\underline{\text{e}}}{R}\left(1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$
2. L'amplitude de l'intensité vaut $|\underline{\text{i}}| = \dfrac{|\underline{\text{e}}|}{R} \times \sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$
3. Le déphasage ϕ entre la tension $\underline{\text{e}}$ et l'intensité $\underline{\text{i}}$ vaut $\phi = \arg(\underline{\text{i}}) - \arg(\underline{\text{e}}) = \arctan\left(Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$
4. On a $i(t) = \dfrac{E_0}{R} \times \sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t + \phi)$

Exercice 9 : Déterminer les paramètres d'un oscillateur

1. Sur le graphique de la phase, on trouve que la pulsation propre est d'environ $\omega_0 \simeq 63\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ et sur le graph de l'amplitude on trouve $\Delta\omega \approx 12\,\text{rad/s}$ ce qui nous donne $Q = \omega/\Delta\omega \approx 5$
2. On peut prendre par exemple $L = 1\,\text{H}$, $C = 250\,\mu\text{F}$ et $R = 12\,\Omega$
3. C'est la même question que dans l'exercice 6, avec les même valeurs numériques. La constante de raideur du ressort doit être $k \simeq 4\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$

Exercice 10 : Équivalence de composants

L'impédance équivalente au premier dipôle est $Z_1 = \dfrac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$, l'impédance équivalente au second dipôle est $Z_2 = R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega}$. En égalant les deux et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$R_2 = \frac{R_1}{1 + (R_1C_1\omega)^2} \quad \text{et} \quad C_2 = C_1\left(1 + \frac{1}{(R_1C_1\omega)^2}\right) \tag{1}$$

Exercice 11 : Impédance complexe d'un circuit

1. C_1 et L_1 sont associés en parallèle, puis en série avec L et R. On obtient l'impédance équivalente :
   $$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{jL_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \tag{1}$$
   Après calculs, on trouve la forme demandée avec
   $$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{LC_1} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L1C_1} \tag{2}$$
2. Avec l'impédance équivalente trouvée, on trouve
   $$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{X}{R}\right) \tag{3}$$
3. On peut remarquer que le circuit forme un pont diviseur de tension et on a
   $$\underline{u} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z}}\underline{e} \tag{4}$$
   avec $\underline{Z_1}$ l'impédance équivalent à L_1 et C_1 en parallèle. on trouve finbalement
   $$U_m = \frac{L\omega E_m}{\sqrt{R^2(1 - L_1C_1\omega^2)^2 + (L\omega(1 - L_1C_1\omega^2) + L_1\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = \frac{R(1 - L_1C_1\omega^2)}{L_1\omega + L\omega(1 - L_1C_1\omega^2)} \tag{5}$$