Analyse dimensionnelle

1 Le Système International d'Unités (S.I.)

1.1 Distinction entre grandeur et unité

Une *grandeur physique* est une caractéristique de certains corps, ou de certains phénomènes physiques ou chimiques. Par exemple la masse, la température, une force, une longueur, ...

Au cours d'une expérience, on est amené à effectuer la *mesure* de la valeur prise par les grandeurs physiques pertinentes pour le problème étudié, dans les circonstances de l'expérience. En pratique, effectuer une mesure consiste à choisir un étalon (une référence), et compter à combien d'étalons correspond la valeur prise par la grandeur dans les circonstances de l'expérience. Cet étalon constitue une *unité* possible pour exprimer le résultat de la mesure ; pour chaque grandeur on dispose ainsi d'une infinité d'unités pour exprimer le résultat d'une mesure. Le choix de l'unité est *a priori* arbitraire. Par exemple, pour une mesure de longueur, on peut exprimer le résultat en mètres (m), en nanomètres (nm), en années-lumières (a.l.), en yards (yd), en hauteurs de Tour Eiffel, ...

1.2 Grandeurs fondamentales et grandeurs dérivées

Dans l'état actuel de notre manière de décrire le monde, 7 *grandeurs fondamentales* indépendantes permettent de déduire toutes les autres grandeurs, dites *grandeurs dérivées*.

À chaque grandeur on associe une *dimension* qui simplifie les écritures lors de l'analyse dimensionnelle :

masse	longueur	temps	quantité de matière	intensité électrique	température	intensité lumineuse
M	L	T	N	I	Θ	J

Les grandeurs dérivées sont liées aux grandeurs fondamentales soit par une définition (Ex : accélération), soit par une loi physique empirique (c.-à-d.déduite de l'expérience) (Ex : force d'interaction gravitationnelle).

1.3 Unités et Système International

Puisque le choix de l'étalon est arbitraire, chacun est libre de définir une unité à l'aide de ce qui est à sa disposition (Ex : coudée de Chartres, coudée d'Amiens, ...) mais lorsqu'on souhaite travailler en équipe cela devient ingérable (Ex : sonde Mars Climate Orbiter – 120 millions de dollars – perdue en 1999). D'où la nécessité du *Système International d'Unités* (S.I.), initié à la Révolution par la mise en place à l'échelle de la France du système métrique.

Les grandeurs dérivées s'expriment soit :

- avec une unité usuelle (fixée par le système S.I.) (ex : volt (V), joule (J), newton (N))
- par une combinaison d'unités fondamentales(ex : $\mathrm{m.s^{-1}}$, $\mathrm{mol.m^{-3}}$)
- par une combinaison d'unités fondamentales et d'unités usuelles (ex : $\mathrm{J.s^{-1}}$, $\mathrm{Pa.m^{-2}}$)

2 Équations aux dimensions (analyse dimensionnelle)

2.1 Définitions

Soit une grandeur physique X ; on désigne par $\dim(X)$ sa dimension. $dim(X)$ s'exprime en fonction des dimensions des grandeurs fondamentales ; c'est ce qu'on appelle l'*équation aux dimensions* pour la grandeur X :

$$\dim(X) = M^a.T^b.L^c.N^d.I^e.\theta^f.J^g$$

Trouver cette équation aux dimensions, c'est faire de l'*analyse dimensionnelle*.

Ceci permet de déduire que l'unité S.I. ξ de la grandeur X s'exprime en fonction des unités S.I. fondamentales :

$$\xi = [X] = \mathrm{kg}^a.\mathrm{s}^b.\mathrm{m}^c.\mathrm{mol}^d.\mathrm{A}^e.\mathrm{K}^f.\mathrm{cd}^g$$

2.2 Application : période d'oscillation d'un pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'une masse m accrochée à un fil de longueur ℓ dans le champ de gravité terrestre d'intensité g. On cherche l'expression de la période T du pendule en fonction de m, ℓ et g sous la forme

$$T = K m^{\alpha} \ell^{\beta} g^{\gamma} \tag{1}$$

Où K est une constante sans dimension. L'équation précédente ammène l'équation aux dimensions suivante :

$$T = M^{\alpha} L^{\beta} (LT^{-2})^{\gamma} \tag{2}$$

Cette équation est homogène si les dimensions des deux membres sont les mêmes, c'est-à-dire si :

$$\begin{cases} 1 = -2\gamma \\ 0 = \alpha \\ 0 = \beta + \gamma \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2} \\ \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3}$$

Et on trouve ainsi que la période du pendule simple s'exprime comme :

$$T = K\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{4}$$

Cet exemple simple montre la puissance de l'analyse dimensionnelle, car sans avoir à aucun moment utilisé les lois du mouvement, on a réussi à montrer que la période du pendule simple ne dépend pas de la masse du pendule, et qu'elle est proportionnelle à $\sqrt{\ell}$.

2.3 Vérification de l'homogénéité

Toute relation obtenue en Sciences Physiques doit être *homogène*, c'est-à-dire satisfaire aux conditions suivantes :

Expression	**Homogène si ...**
$X = Y$	$\dim(X) = \dim(Y)$
$X + Y$	$\dim(X) = \dim(Y)$
$\ln(X)$	$\dim(X) = 1$
$\exp(X)$	$\dim(X) = 1$
$\sin(X)$, $\cos(X)$, $\tan(X)$	$\dim(X) = 1$

Remarque : Bien qu'un angle ait une unité, il s'agit d'une grandeur sans dimension car c'est défini comme le rapport de deux longueurs (longueur de l'arc de cercle intercepté divisée par la longueur du rayon du cercle).