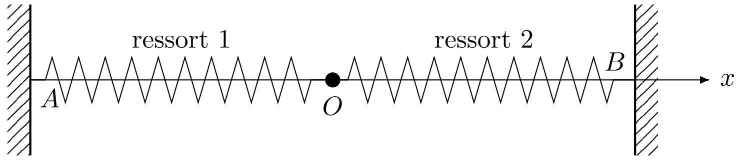
TD5 : Oscillateurs – corrigé

Exercice 1 : Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $\ell_{éq}$, et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 différente de 0.

1. Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
2. Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.
3. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4. Montrer que l'énergie mécanique totale du système est constante au cours du temps.

Exercice 2 : Gadget à ressort

On s'intéresse à un gadget constitué d'un petit avion en bois de masse $m = 100\,\mathrm{g}$, suspendu au plafond de la pièce par un ressort idéal et sans masse, de raideur $k = 2{,}3\,\mathrm{N/m}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 50\,\mathrm{cm}$. La hauteur sous plafond est $h = 2{,}50\,\mathrm{m}$, et l'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

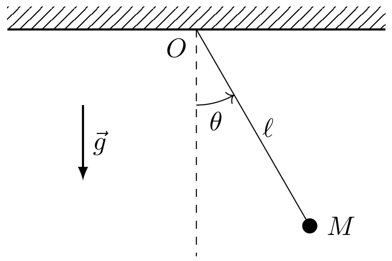
1. Proposer une modélisation simple du problème, assortie d'un schéma.
2. Mettre le problème en équations, et identifier la pulsation propre ω_0 du système.
3. Déterminer la position d'équilibre du système, et donner la longueur d'équilibre ℓ_e du ressort. Expliquer pourquoi $\ell_e \neq \ell_0$.

On lance l'avion de la position où la longueur du ressort vaut ℓ_0 avec une vitesse initiale dont la mesure algébrique vers le haut vaut v_0.

4. Vérifier qu'on obtient bien un mouvement d'amplitude
$$\sqrt{\left(\frac{m\,g}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$
autour de la position d'équilibre.
5. Déterminer la valeur minimale de $|v_0|$ pour que l'avion touche le sol. Pourquoi vaut-il mieux lancer l'avion vers le bas ?
6. Indiquer (en justifiant) s'il y a conservation de l'énergie. Le vérifier sur la réponse à la question 4.

Exercice 3 : Pendule simple

On s'intéresse à un *pendule simple*. Il s'agit d'une masse ponctuelle pendue par un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixe. On repère la position du point M par l'angle θ que fait le fil avec la verticale. On négligera tous les frottements. Le pendule est lâché sans vitesse initial depuis un angle θ_0.



1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse M.
2. Expliquer pourquoi la trajectoire est circulaire. Dans ces conditions, la vitesse du point M est $v = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
3. L'énergie mécanique du point M est $E = E_c + E_p$, avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (énergie cinétique) et $E_p = mgh$ (énergie potentielle) avec h l'altitude du point M. Justifier que l'énergie totale du système est constante et en déduire une équation différentielle sur θ.
4. L'équation différentielle obtenue est-elle celle d'un oscillateur harmonique ?

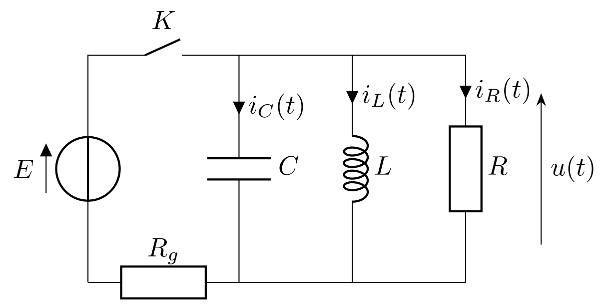
On se place maintenant dans le cas où le pendule oscille faiblement, c'est à dire $|\theta(t)| \ll 1$. Dans ce cas on peut écrire $\sin(\theta) \approx \theta$.

5. Utiliser cette approximation pour simplifier l'équation différentielle obtenue à la question 3. Et la mettre sous forme canonique.
6. En déduire la période d'oscillation du pendule. Montrer que la période d'oscillation est indépendante de l'amplitude d'oscillation. On parle alors d'*isochronisme* des oscillations.

Exercice 4 : Analogie entre oscillateur mécanique et oscillateur électrique

1. On considère une masse m accrochée à un ressort de raideur k et astreinte à se déplacer suivant un axe x horizontal. Déterminer l'équation différentielle de son mouvement.
2. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la charge q portée par le condensateur dans un circuit comportant un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L branchés en parallèle.
3. Expliciter l'analogie qui existe entre les oscillateurs mécanique et électrique.

Exercice 5 : Circuit RLC parallèle

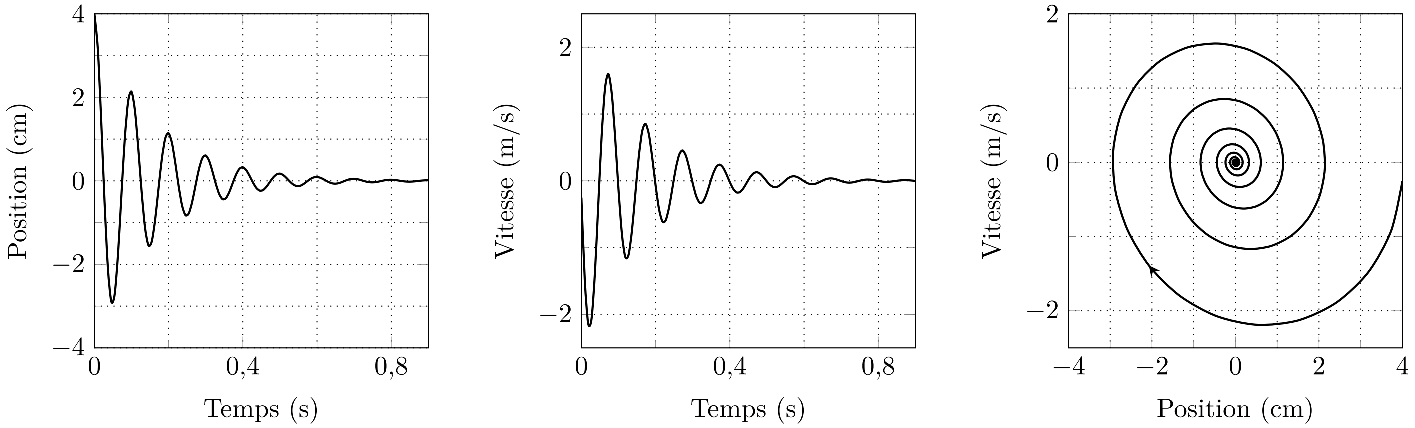


On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre. L'interrupteur K est initialement fermé pendant un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint. À $t = 0$ on ouvre l'interrupteur et on observe l'évolution de la tension $u(t)$.

1. Donner les valeurs des intensités i_C, i_R, et i_L et de la tension u dans le circuit à $t = 0^-$, $t = 0^+$, et $t \to \infty$.
2. Tracer qualitativement l'allure de $u(t)$ après l'ouverture de K.
3. Comment le facteur de qualité Q du circuit dépend-il de R ? Proposer une expression de Q basée sur une analyse dimensionnelle.
4. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ pour $t > 0$.
5. En déduire les expressions de la fréquence propre w_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C. Comparer l'expression de Q avec celle trouvée à la question précédente.
6. A.N. : On donne $R = 40\,\Omega$, $C = 200\,\mu\mathrm{F}$ et $L = 10\,\mathrm{mH}$. Calculer la pulsation propre du système et le facteur de qualité. Quelle est la durée du régime transitoire ?
7. Tracer l'allure du portrait de phase de la tension $u(t)$, c'est-à-dire le graphique représentant $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en fonction de u.

Exercice 6 : Oscillateur mécanique amorti

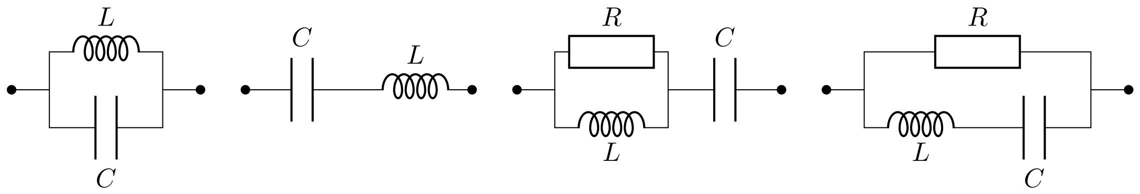
On étudie le mouvement d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k et soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\gamma \vec{v}$ (v est la vitesse de la masse). Le mouvement a lieu suivant l'axe x. On donne le portrait de phase du mouvement de la masse :



1. Faire un schéma du système décrit en représentant les différentes forces qui s'appliquent sur m.
2. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de l'oscillateur
3. L'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ de la masse est : $\ddot{x} + \dfrac{\gamma}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$. Exprimer le facteur de qualité et la fréquence propre de l'oscillateur en fonction de m, k et γ.
4. On donne $m = 1\,\mathrm{g}$. Déterminer k et γ.

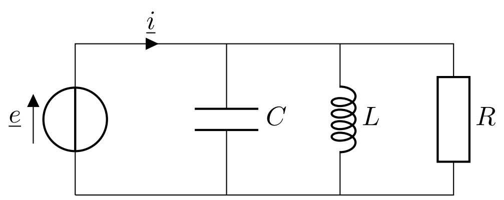
Exercice 7 : Associations d'impédances complexes

Calculer l'impédance complexe équivalente des dipôles suivants :



Exercice 8 : Circuit RLC parallèle en régime forcé

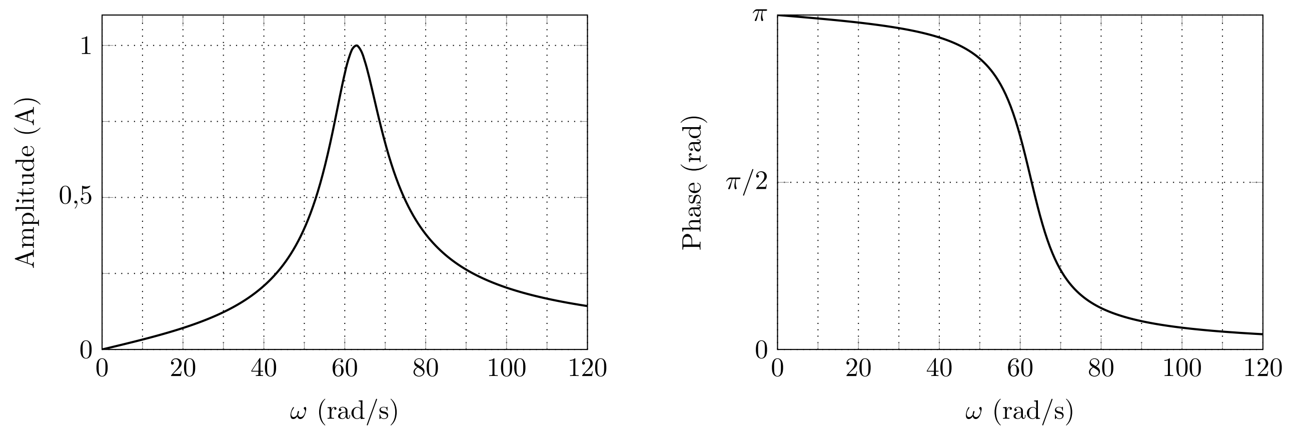
On étudie le circuit ci-contre où le générateur fournit une tension sinusoïdale de fréquence ω.



1. À l'aide de la méthode des complexes, déterminer l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de $\underline{e}$. Faire apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du circuit.
2. Que vaut l'amplitude de l'intensité ?
3. Que vaut le déphasage ϕ entre la tension $\underline{e}$ et l'intensité $\underline{i}$
4. La tension réelle est $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Écrire l'expression de l'intensité réelle.

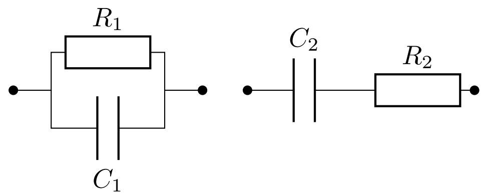
Exercice 9 : Déterminer les paramètres d'un oscillateur

Les graphiques ci-dessous montrent l'amplitude et la phase d'un oscillateur en fonction de la pulsation de l'excitation.



1. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de cet oscillateur.
2. Quelles sont les valeurs des composants que l'on doit choisir pour fabriquer cet oscillateur avec un circuit RLC série ($\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$)
3. Quel constante de raideur de ressort doit-on choisir pour faire osciller une masse $m = 1\,\mathrm{g}$ à la fréquence ω_0 ? On pourra retrouver la pulsation propre d'un système {masse + ressort} par analyse dimensionnelle.

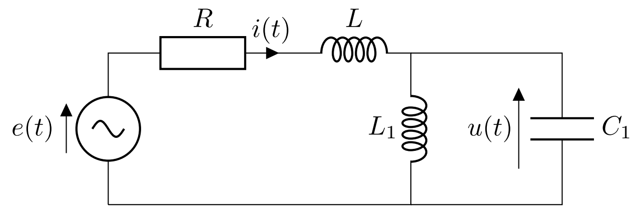
Exercice 10 : Équivalence de composants



Les deux dipôles suivants sont utilisés dans un circuit en régime sinusoïdal à la fréquence ω. Exprimer R_2 et C_2 en fonction de R_1, C_1 et ω pour que les deux dipôles soient équivalents.

Exercice 11 : Impédance complexe d'un circuit

Une source de tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ alimente un circuit composé d'une bobine réelle (R, L) en série avec l'association en parallèle d'une bobine d'inductance L_1 et d'un condensateur de capacité C_1. La bobine est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.



1. Montrer que l'impédance complexe du circuit peut se mettre sous la forme
$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{avec} \quad X = L\omega\left(\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}\right) \tag{1}$$
Donner les expressions de ω_1 et ω_2.
2. En déduire les expressions de I_m et φ en fonction de E_m, R et X.
3. Déterminer de même l'amplitude et la phase de la tension u.