

DM1 : Optique géométrique – corrigé

Exercice 1 : L'ARC-EN-CIEL

1 Premier arc-en-ciel

1. **Réflexion :** Le rayon réfléchi se trouve dans le plan d'incidence et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Réfraction : Le rayon se trouve dans le plan d'incidence et l'angle de réfraction i_2 est relié à l'angle d'incidence i_1 par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, où n_1 et n_2 sont les indices optiques du milieu 1 et du milieu 2.

2. Lorsque l'angle de réfraction i_2 est supérieur à $\pi/2$, il n'existe pas de rayon réfracté et la lumière est totalement réfléchie. L'angle d'incidence au delà duquel il y a réflexion totale est donné par $n_1 \sin i_{\text{lim}} = n_2$ donc $i_{\text{lim}} = \arcsin(n_2/n_1)$. Lorsque les deux milieux sont l'eau et l'air, on trouve $i_{\text{lim}} \simeq 48,8^\circ$.
3. La loi de Descartes pour la réfraction donne directement $n \sin r = \sin i$.
4. Comme $OA = OB$, le triangle AOB est isocèle et on a $\alpha = r$. La réflexion en B ne peut donc pas être totale car $\sin(\alpha) = \sin(r) = \sin(i)/n < 1/n$. Donc α reste toujours plus petit que l'angle limite α_{min} de réflexion totale qui est tel que $\sin(\alpha_{\text{lim}}) = 1/n$.
5. On a déjà montré que $\alpha = r$, un raisonnement similaire montre que $\alpha = \beta = \gamma = r$. Et la loi de la réfraction appliquée en C donne $\sin i' = n \sin \gamma = n \sin r = \sin i$ donc $i' = i$.
6. En A le rayon incident est dévié dans le sens horaire de $i - r$, il est ensuite dévié de $\pi - 2r$ en B et à nouveau de $i - r$ en C . Au total la déviation subie par le rayon est $D = 2i - 4r + \pi$.
7. Pour trouver l'expression demandée, on dérive la relation de réfraction $n \sin r = \sin i$ par rapport à l'angle d'incidence i . On obtient $n \cos r \frac{dr}{di} = \cos i$, d'où finalement $\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}$.
8. En partant toujours de la même relation on a directement $r(i) = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$.
9. En dérivant l'expression de D par rapport à i , on obtient :

$$\frac{dD}{di} = 2 - 4 \frac{dr}{di} = 2 - 4 \frac{\cos i}{n \cos\left(\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)\right)} \quad \text{soit} \quad \frac{dD}{di}(i_m) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos i_m}{n \cos\left(\arcsin\left(\frac{\sin i_m}{n}\right)\right)} = \frac{1}{2}$$

10. On élève l'équation précédente au carré, on obtient :

$$\frac{\cos^2 i_m}{n^2 \left(1 - \frac{\sin^2 i_m}{n^2}\right)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 i_m}{n^2 - \sin^2 i_m} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 \cos^2 i_m = n^2 - (1 - \cos^2 i_m) \Leftrightarrow \cos^2 i_m = \frac{n^2 - 1}{3}$$

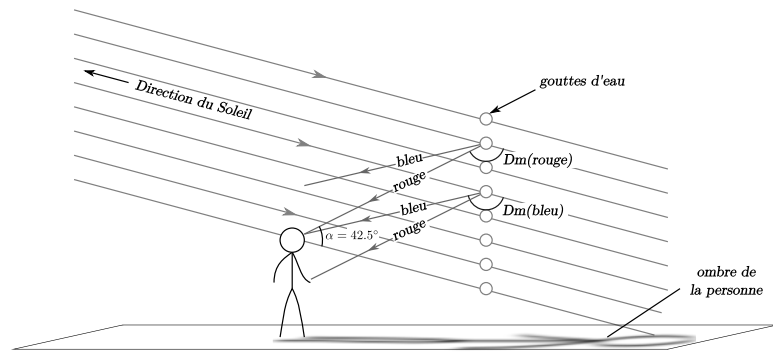
11. D'après la question précédente on a $i_m = \arccos \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$. En injectant cette expression dans l'expression de $D(i)$ on obtient :

$$D_m = D(i_m) = \pi + 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2-1}{3}} - 4 \arcsin\left(\frac{\sin i_m}{n}\right)$$

Or $\sin i_m = \sqrt{1 - \cos^2 i_m} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$ et $\frac{\sin i_m}{n} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}$. D'où l'expression demandée :

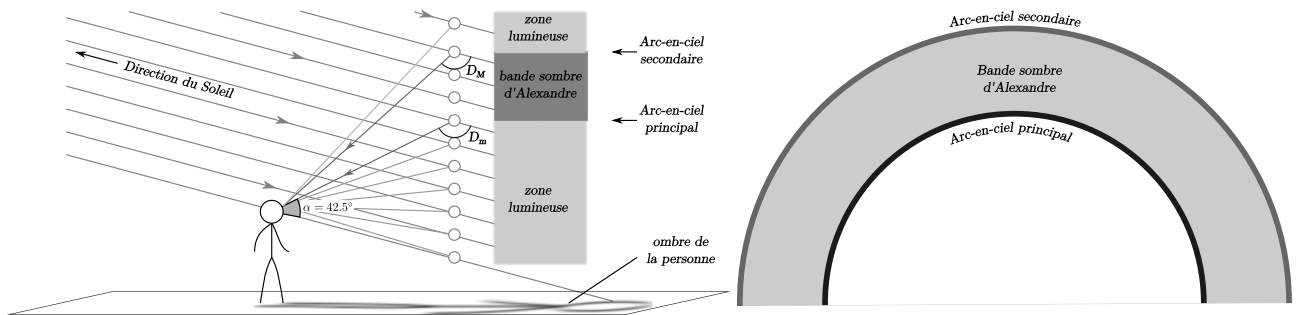
$$D_m = 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2-1}{3}} - 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} + \pi$$

12. Avec $n = 1.33$ on trouve $D_m \simeq 2,4 \text{ rad} \simeq 137,5^\circ$.
13. Pour observer l'arc-en-ciel, une personne doit se placer dos au soleil, et regarder dans une direction formant un angle α avec la direction de l'ombre de sa tête. On voit sur le schéma ci-dessous que $\alpha = \pi - D_m \simeq 42,5^\circ$.



2 Deuxième arc-en-ciel

14. En A le rayon subit une déviation dans le sens trigo de $i - r$, puis de $\pi - 2r$ en B et C , et enfin de $i - r$ en E .
Ce qui donne une déviation totale dans le sens trigo $2\pi - D = 2\pi + 2i - 6r$, soit $D = 6r - 2i$
15. Voir schéma ci-dessous :



16. Le second arc-en ciel est moins lumineux que le premier car la lumière a été atténuée par une réflexion interne (non totale) supplémentaire.
17. (voir Schéma ci-dessus). La bande sombre correspond à la zone dans laquelle les gouttes d'eau ne renvoie vers l'observateur aucun rayon ayant subi une seule réflexion interne (déviations trop importantes) et aucun rayon en ayant subi deux (déviations trop faibles).

Exercice 2 : PRINCIPE DE FERMAT

1. Pour se rendre de A à B , la lumière doit parcourir le chemin AM à la vitesse $\frac{c}{n_1}$, puis le chemin MB à la vitesse $\frac{c}{n_2}$. Le temps de parcours total est donc

$$T = \frac{AM}{c/n_1} + \frac{MB}{c/n_2} = \frac{1}{c} \left(n_1 \sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} \right) \quad (1)$$

2. Pour que le temps de parcours soit minimal, il faut que la dérivée de T par rapport à x soit nulle. On a donc

$$\frac{dT}{dx} = \frac{n_1}{c} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \frac{n_2}{c} \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0 \quad (2)$$

soit

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - n_2 \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0 \quad (3)$$

3. On peut exprimer les sinus des angles i_1 et i_2 en fonction des coordonnées des points, on a alors

$$\sin(i_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} \quad \text{et} \quad \sin(i_2) = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}. \quad (4)$$

L'équation (3) devient alors

$$n_1 \sin(i_1) - n_2 \sin(i_2) = 0 \quad (5)$$

Ce qui correspond bien à la loi de Snell-Descartes pour la réfraction.