

RÉGIMES TRANSITOIRES ET OSCILLATEURS

I. Bobine réelle et source de courant

- I.1** ★ Situation à $t = 0^-$: le générateur est éteint depuis longtemps donc un régime permanent est atteint à $t = 0^-$. La loi des mailles donne directement :

$$i(0^-) = 0$$

- ★ Situation à $t = 0^+$: la bobine assure la continuité de l'intensité du courant qui la traverse.

Ainsi, $i(0^+) = i(0^-) = 0$ et $i_R(0^+) = I_0$

La loi des mailles dans la maille de droite s'écrit :

$$Ri_R(0^+) - L \frac{di}{dt}(0^+) - ri(0^+) = 0$$

d'où

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{R}{L} I_0 = 7,5 \cdot 10^2 \text{ A.s}^{-1}$$

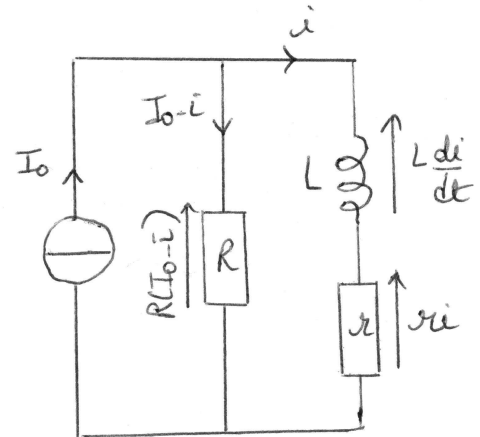
- ★ Situation à $t = \infty$: le régime permanent est atteint donc la bobine idéale se comporte comme un fil. Pour déterminer $i(\infty)$, on utilise un pont diviseur de courant pour obtenir directement :

$$i(\infty) = \frac{RI_0}{r + R} = 7,7 \text{ A}$$

- I.2** Le circuit annoté est représenté ci-contre.

La loi des mailles à droite pour $t > 0$ s'écrit :

$$R(I_0 - i) - L \frac{di}{dt} - ri = 0$$



d'où

$$\frac{di}{dt} + \frac{r + R}{L} i = \frac{RI_0}{L} \quad \text{ou encore} \quad \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{RI_0}{L}$$

On a posé

$$\tau = \frac{L}{R + r} = 10 \text{ ms}$$

- I.3** Théoriquement, il faut une durée infinie pour atteindre le régime permanent. Cependant, pour $t \gg \tau$, on ne peut plus mesurer expérimentalement la différence entre le régime observé et le régime permanent : on peut alors observer qu'il est atteint.

$$\text{Donc } t = \infty \text{ correspond à } t \gg \tau.$$

I.4 La solution de l'équation différentielle est $i(t) = i_{SH}(t) + i_{SP}$, donc ici :

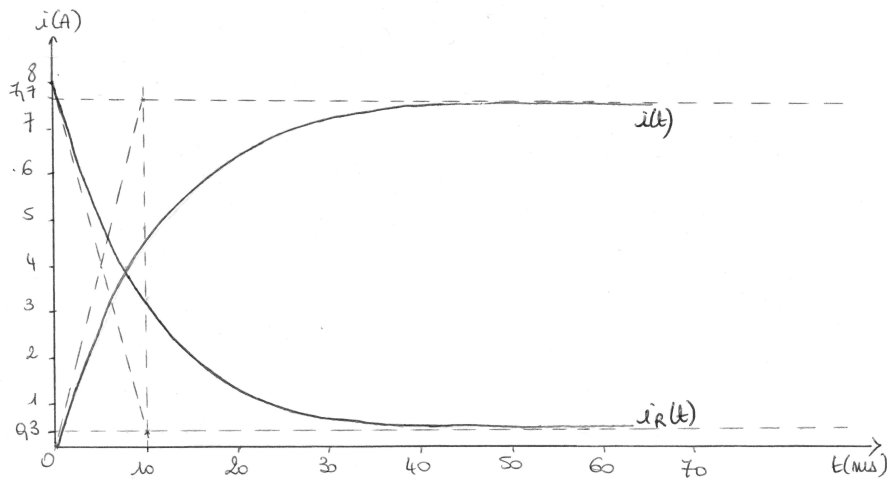
$$i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{RI_0}{R+r}$$

Les conditions initiales sont telles que $i(0^+) = 0 = A + \frac{RI_0}{R+r}$.

Finalement

$$\forall t > 0 \quad i(t) = \frac{RI_0}{R+r} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Le graphe correspondant est le suivant :



I.5 La loi des noeuds permet directement d'obtenir $i_R(t) = I_0 - i(t)$:

$$\forall t > 0 \quad i_R(t) = \frac{I_0}{R+r} \left(r + R \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Le tracé est reporté sur le graphe ci-avant.

I.6 Energie emmagasinée par la bobine entre $t = 0$ et $t = \infty$:

$$\Delta E_L = \frac{1}{2} L [i(\infty)^2 - i(0^+)^2]$$

d'où

$$\Delta E_L = \frac{1}{2} L \left(\frac{RI_0}{R+r}\right)^2 = 15 \text{ J}$$

I.7 Puissances dissipées

I.7.a Puissance dissipée quand $t = \infty$ par r : $\mathcal{P}_r = ri^2(\infty)$.

d'où

$$\mathcal{P}_r = r \left(\frac{RI_0}{r+R}\right)^2 = 1,2 \cdot 10^2 \text{ W}$$

I.7.b Puissance dissipée quand $t = \infty$ par R : $\mathcal{P}_R = Ri_R^2(\infty)$.

d'où

$$\mathcal{P}_R = R \left(\frac{rI_0}{r+R}\right)^2 = 5,0 \text{ W}$$

Bien que r soit largement inférieure à R , c'est quand même au niveau de la bobine qu'il y a le plus d'effet Joule car le courant qui y circule est bien plus intense que dans le résistor.

- I.8** ★ Situation à $t' = 0^-$: d'après la question 3), la situation $t' = 0^-$ correspond à $t = \infty$. Par continuité de i , $i(t' = 0^+) = i(t' = 0^-)$.

On en déduit donc

$$i(t' = 0^+) = \frac{RI_0}{R + r} = 7,7 \text{ A}$$

- ★ Situation à $t' = \infty$: en $t' = \infty$, la situation est exactement la même qu'en $t = 0^-$.

Ainsi

$$i(t' = \infty) = 0$$

- I.9** On reprend le même raisonnement que précédemment en remplaçant I_0 par 0. Il vient :

$$\frac{di}{dt'} + \frac{i}{\tau} = 0$$

avec toujours $\tau = \frac{L}{R + r}$

- I.10** La solution de l'équation différentielle est

$$i(t') = i_{SH}(t') + i_{SP}$$

Donc ici

$$i(t') = B \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right)$$

Les conditions initiales sont telles que $i(t' = 0^+) = \frac{RI_0}{R + r} = B$.

Finalement

$$\forall t' > 0 \quad i(t') = \frac{RI_0}{R + r} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right)$$

- I.11** Directement

$$i_R(t') = -i(t') = -\frac{RI_0}{r + R} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right)$$

- I.12** • Détermination de $\Delta E'_R$:

$$\Delta E'_R = \int_{t'=0}^{+\infty} \mathcal{P}'_R dt' = \int_{t'=0}^{+\infty} Ri_R^2(t') dt' = R \left[\frac{RI_0}{R + r} \right]^2 \int_{t'=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2t'}{\tau}\right) dt'$$

Donc

$$\Delta E'_R = R \left[\frac{RI_0}{R + r} \right]^2 \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{2t'}{\tau}\right) \right]_{t'=0}^{+\infty}$$

d'où

$$\Delta E'_R = \frac{\tau}{2} R \left(\frac{RI_0}{R + r} \right)^2 = 14 \text{ J}$$

- Comparaison à ΔE_L :

On note que

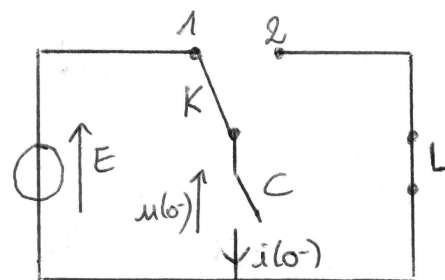
$$\Delta E'_R = \frac{R}{R + r} \Delta E_L$$

Ainsi, on constate que $\Delta E'_R$ est très proche de ΔE_L : une fois le générateur de courant éteint, c'est la bobine qui se comporte comme un générateur. L'énergie qu'elle délivre est dissipée dans les résistors par effet Joule, et c'est celui de plus grande résistance qui en dissipe la majeure partie.

II. Mouvement perpétuel - Oscillateur électrique

II.1 Le circuit à $t = 0^-$ est représenté ci-contre.

En effet, K est depuis longtemps dans la position 1 : on est en régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil.



On en déduit

$$i(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad q(0^-) = Cu(0^-) = CE$$

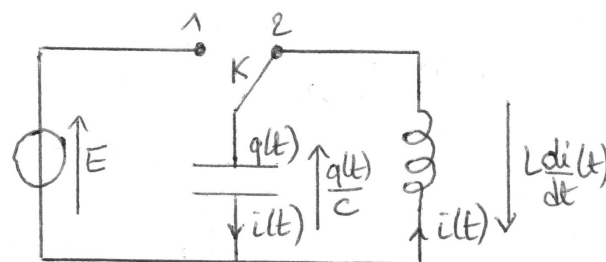
II.2 Par continuité de la charge d'un condensateur : $q(0^+) = q(0^-) = CE$.

K étant en position (2), i est le courant qui parcourt la bobine à $t > 0$. Or, à $t < 0$, la bobine n'est parcourue par aucun courant car K est en position (1). Par continuité du courant qui traverse une bobine : $i(0^+) = 0$.

II.3 Le circuit étudié annoté est représenté ci-contre.

La loi des mailles $\forall t > 0$ s'écrit :

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad i = \frac{dq}{dt}$$



d'où

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

II.4 On reconnaît ici l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre ω_0 telle que :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,4 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$$

II.5 La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$q(t) = q_{SH}(t) + q_{SP}$$

Donc ici

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Or

$$q(0^+) = CE = A \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dt}(0^+) = i(0^+) = B\omega_0 = 0$$

On en déduit

$$\forall t > 0 \quad q(t) = CE \cos(\omega_0 t)$$

II.6 Pour choisir la courbe correspondante à ce signal, on peut se baser sur la période propre des oscillations, qui vaut $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, ainsi que sur la valeur $q(0^+) = CE \neq 0$.

- ★ courbe (b) : ne convient pas car $q(0^+) = 0$ et non CE ;
- ★ courbe (c) : ne convient pas car $q(0^+) = -CE$ et non CE ;
- ★ courbe (d) : ne convient pas car $T_0 \neq 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$;

C'est donc la courbe (a) qui convient.

III. Circuit RLC

III.1 Équation différentielle

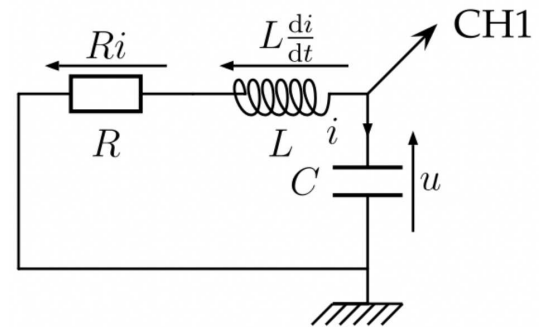
III.1.a On raisonne sur le circuit annoté ci-dessous. On applique la loi des mailles avec K fermé :

$$u + L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \text{avec } i = C \frac{du}{dt}$$

D'où
$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0$$

On pose
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On obtient
$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$



III.1.b L'équation caractéristique est $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

On a trois régimes possibles selon le signe du discriminant $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$:

- ★ pour $\Delta > 0$ ou $Q < 1/2$, régime aperiodique ;
- ★ pour $\Delta = 0$ ou $Q = 1/2$, régime critique ;
- ★ pour $\Delta < 0$ ou $Q > 1/2$, régime pseudo-périodique avec des oscillations amorties.

III.2 Résolution de l'équation différentielle

III.2.a L'équation caractéristique admet deux solutions :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j \Omega$$

La pseudo-pulsation Ω des oscillations libres est définie par
$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
.

Le temps caractéristique d'amortissement τ des oscillations libres est défini par
$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$
.

III.2.b La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $u(0^+) = u(0^-) = u_0$.

L'interrupteur est ouvert à $t = 0^-$ donc $i(0^-) = 0$. La continuité de l'intensité qui traverse la bobine impose
$$\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{i(0^-)}{C} = 0$$
.

III.2.c On est dans le cas du régime pseudo-périodique donc la solution s'écrit sous la forme :

$$u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

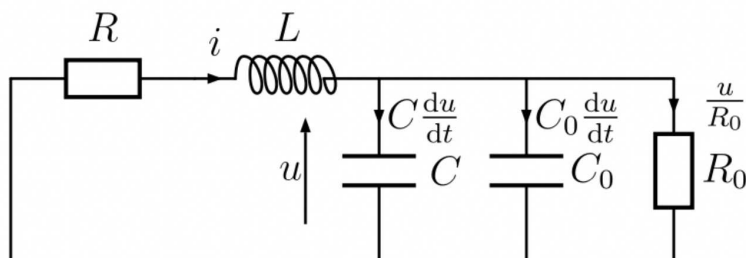
L'utilisation des conditions initiales donne $A = u_0$ et $B = \frac{u_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$.

d'où
$$u(t) = u_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \left[\cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right]$$

III.3 Utilisation d'un oscilloscope

III.3.a Les branchements de l'oscilloscope sont représentés sur la figure de la question **III.1.a** (Attention à bien mesurer u et non $-u$).

III.3.b Compte tenu de modélisation proposée pour l'oscilloscope, le schéma devient celui de la figure ci-après, avec R_0 et C_0 en parallèle avec C :



III.3.c On applique à nouveau la loi des mailles avec K fermé :

$$u + L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Avec la loi des noeuds, on a $i = i_C + i_{C_0} + i_{R_0}$ donc $i = C \frac{du}{dt} + C_0 \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0}$. Ce qui donne après calculs :

$$L(C + C_0) \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + R(C + C_0) \right) \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0} \right) u = 0$$

On en déduit

$$\alpha_1 = \frac{L}{R_0} + RC + RC_0 \quad \text{et} \quad \alpha_0 = 1 + \frac{R}{R_0}$$

III.3.d On retrouve la première équation différentielle si $C_0 \ll C$, $\frac{R}{R_0} \ll 1$ et $\frac{L}{R_0} \ll R(C + C_0)$. Ce qui se réécrit

$$C_0 \ll C, R \ll R_0 \text{ et } \frac{L}{R_0} \ll R(C + C_0)$$

Les valeurs usuelles de R , C et L sont respectivement de l'ordre du $k\Omega$, du nF et du mH . Comme C_0 est de l'ordre du pF et R_0 de l'ordre du $M\Omega$, les deux premières conditions sont vérifiées. En effectuant les calculs, la troisième condition est également vérifiée.

III.4 $u(t)$ est telle que :

$$u(t + mT) = \exp\left(-\frac{m\omega_0 T}{2Q}\right) u(t)$$

Ainsi

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \left(\exp\left(\frac{m\omega_0 T}{2Q}\right) \right) = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

On a donc

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\omega_0}{2Q} \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

d'où

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

III.5 On utilise un signal de type créneau (entre 0 V et u_0) avec une période suffisamment grande pour observer les oscillations libres du circuit. Il faut donc une période T telle que $\frac{T}{2} > \tau$.

III.6 Choisissons $t = 0$ s (1^{er} max) et $m = 4$ (5^{ème} max). On lit $u(0) = 4$ V et $u(4T) = 0,5$ V, ce qui donne :

$$\delta = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{4}{0,5} \right) = 0,52$$

Or en utilisant un résultat précédent, on a

$$Q = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\delta^2}}$$

Application numérique :

$$\boxed{Q = 6,1}$$

Cela correspond bien au nombre d'oscillations visibles, environ 7-8.

III.7 On suppose $Q \gg 1$

III.7.a Dans le cas où $R = 0$ Ω , il n'y a pas d'amortissement et on retrouve le cas de l'oscillateur harmonique :

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du}{dt} = -u_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

L'énergie électromagnétique stockée dans le circuit est la somme de celle de la bobine \mathcal{E}_{bob} et du condensateur \mathcal{E}_{cond} .

$$\mathcal{E}_{cond} = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} C u_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\mathcal{E}_{bob} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L C^2 u_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C u_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad \text{car } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Soit en faisant la somme :

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} C u_0^2}$$

L'énergie électromagnétique est constante, elle se conserve en l'absence de pertes par effet Joule.

III.7.b Dans le cas où $R \neq 0$ et $Q \gg 1$, alors B tend vers 0 et $\Omega \simeq \omega_0$. La solution $u(t)$ s'écrit :

$$u(t) \simeq u_0 \exp \left(-\frac{\omega_0}{2Q} t \right) \cos(\omega_0 t)$$

L'intensité s'écrit :

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = C u_0 \exp \left(-\frac{\omega_0}{2Q} t \right) \left(-\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{2Q} \cos(\omega_0 t) \right)$$

Comme $Q \gg 1$ $i(t) \simeq -C u_0 \omega_0 \exp \left(-\frac{\omega_0}{2Q} t \right) \sin(\omega_0 t)$

On en déduit $\mathcal{E}_{cond} = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} C u_0^2 \exp \left(-\frac{\omega_0}{Q} t \right) \cos^2(\omega_0 t)$

$$\mathcal{E}_{bob} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L C^2 u_0^2 \omega_0^2 \exp \left(-\frac{\omega_0}{Q} t \right) \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C u_0^2 \exp \left(-\frac{\omega_0}{Q} t \right) \sin^2(\omega_0 t)$$

En sommant

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}Cu_0^2 \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q}t\right)}$$

L'énergie électromagnétique ne se conserve plus et diminue au cours du temps à cause des pertes par effet Joule.

On peut ainsi écrire l'énergie perdue par effet Joule au cours d'une période $E_J = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)$.

$$E_J = \frac{1}{2}Cu_0^2 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{Q}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 T}{Q}\right)\right]$$

En utilisant le développement limité :

$$1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 T}{Q}\right) \simeq 1 - 1 + \frac{\omega_0 T}{Q} \simeq \frac{2\pi}{Q}$$

Avec par ailleurs $T = \frac{2\pi}{\Omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}$, on obtient

$$\boxed{E_J = \frac{2\pi}{Q}\mathcal{E}}$$

