DS9 : Mécanique, thermodynamique, chimie – corrigé

Exercice 1 : Échappement d'un gaz

I – Compression d'un gaz

1. Une grandeur intensive est définie en un point du système et ne dépend pas de la quantité de matière du système. Exemple : p et T

   Une grandeur extensive est proportionnelle à la quantité de matière du système. Exemple : V.
2. On applique l'équation d'état des gaz parfaits : $\boxed{V_1 = \frac{nRT_0}{p_0} = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 5\,\ell}$
3. La transformation est lente et adiabatique. Comme il n'y a pas de frottement (mécaniquement réversible), la transformation est réversible. Comme il n'y a pas d'entropie créée (réversible) ni d'entropie échangée (adiabatique), l'entropie du gaz est constante, la transformation est isentropique.
4. On applique la loi de Laplace au gaz parfait au cours de la transformation adiabatique réversible :

$$\boxed{T_2 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 337\,\mathrm{K}} \tag{1}$$

   On obtient le volume à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits : $\boxed{V_2 = \dfrac{nRT_2}{p_2} = 3{,}7 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}$
5. On applique le premier principe au système $\Sigma = \{\text{gaz parfait}\}$ qui subit une transformation adiabatique :

$$\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12} = W_{12} \tag{2}$$

   Par définition de l'énergie interne d'un gaz parfait $\Delta U_{12} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_0)$

$$\boxed{W_{12} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_0) = 153\,\mathrm{J}} \tag{3}$$

6. La transformation est adiabatique et réversible donc isentropique, donc $\boxed{\Delta S_{12} = 0}$. Comme la transformation est réversible, $\boxed{S_{c12} = 0}$.
7. A l'équilibre, le piston est immobile et subit :
   - la force de pression exercée par le système Σ : $\vec{F}_\Sigma = p_2 S \vec{n}$, avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire correspondant à l'axe vertical ascendant
   - la force de pression exercée par l'atmosphère : $\vec{F}_a = -p_0 S \vec{n}$
   - la force exercée par l'opérateur : $\vec{F}$

   On applique le principe fondamental de la dynamique au piston au repos dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\vec{F}_\Sigma + \vec{F}a + \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = (p_0 - p_2) S \vec{n} \tag{4}$$

   On en déduit la norme : $\boxed{F = |p_0 - p_2| S = 500\,\mathrm{N}}$.
8. La transformation est monobare à la pression $p_e = p_2$: $\boxed{W_{13} = -p_2(V_3 - V_1)}$
9. On applique le premier principe à Σ pour une transformation adiabatique ($Q_{13} = 0$) :

$$\Delta U_{13} = W_{13} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_0) = \frac{p_2 V_3 - p_0 V_1}{\gamma - 1} \tag{5}$$

   On égalise les deux expressions du travail et on obtient : $\boxed{V_3 = \dfrac{V_1}{\gamma}\left[\gamma - 1 + \dfrac{p_0}{p_2}\right] = 3{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}$.

10. On obtient la température T_3 à partir de l'équation d'état des gaz parfaits : $\boxed{T_3 = \frac{p_2 V_3}{nR} = 343\,\mathrm{K}}$
11. $\boxed{W_{13} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_0) = 178\,\mathrm{J} > W_{12}}$
    Il faut fournir davantage de travail pour effectuer la compression dans le cas d'une transformation irréversible.
12. On utilise l'expression de ΔS_m donnée pour un gaz parfait : $\boxed{\Delta S_{13} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_3}{T_0}\right) - nR\ln\left(\frac{p_2}{p_0}\right)}$
    Comme la transformation est adiabatique, $S_{e13} = 0$. D'après le second principe :
    $$\boxed{S_{c13} = \Delta S_{13} - S_{e13} = 0{,}10\,\mathrm{J\,K^{-1}} > 0} \tag{6}$$
    La transformation est bien irréversible.

II – Échappement

13. On applique l'équation d'état des gaz parfaits : $\boxed{p_4 = \frac{nRT_4}{V_4} = 1{,}8\,\mathrm{bar}}$
14. La quantité de matière restant dans le cylindre après l'ouverture du robinet est $n_5 = \frac{p_0 V_4}{RT_5}$ et la quantité de gaz sorti du cylindre est $\boxed{n' = n - n_5 = n - \frac{p_0 V_4}{RT_5} = 7{,}8 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}}$
15. Le système Σ subit une transformation monobare à la pression $p_e = p_0$ donc $W_{45} = -p_0(V_f - V_4) = -p_0 V'$ où V' est le volume occupé par le gaz à l'extérieur du cylindre. $\boxed{W_{45} = -n'RT_0 = -194\,\mathrm{J}}$
    $W_{45} < 0$ car on a une détente, le volume du système augmente.
16. L'entropie est une grandeur extensive : $\Delta S_{45} = \Delta S_{45}(\Sigma_1) + \Delta S_{45}(\Sigma_2)$, où Σ_1 désigne le système constitué du gaz resté dans l'enceinte, et Σ_2 désigne le système constitué du gaz sorti de l'enceinte.
    On utilise l'expression $S_m(T,p)$ pour Σ_1 :
    $$\Delta S_{45}(\Sigma_1) = (n - n')R\left[\frac{\gamma}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_5}{T_4}\right) - \ln\left(\frac{p_0}{p_4}\right)\right] \tag{7}$$
    On utilise l'expression $S_m(T,p)$ pour Σ_2 :
    $$\Delta S_{45}(\Sigma_2) = -n'R\ln\left(\frac{p_0}{p_4}\right) \tag{8}$$
    On en déduit la variation d'entropie : $\boxed{\Delta S_{45} = \frac{(n-n')R\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_5}{T_4}\right) - nR\ln\left(\frac{p_0}{p_4}\right) = 0{,}66\,\mathrm{J\,K^{-1}}}$
17. Dans cette question, nous sommes confrontés à un petit problème. On nous dit que le gaz qui reste dans l'enceinte n'échange pas d'énergie avec l'extérieur, c'est-à-dire que son évolution est adiabatique. On peut supposer que l'évolution de cette partie du gaz est également quasistatique, car l'évolution ne doit pas être si brutale que ça (robinet).
    Notons n_1 la quantité gaz qui restera dans l'enceinte à la fin de la transformation. L'évolution de cette partie de gaz étant adiabatique et quasistatique, on peut appliquer les lois de Laplace, et notament :
    $$P_4^{1-\gamma}T_4 = P_0^{1-\gamma}T_5^{\gamma} \quad \text{soit} \quad T_5 = T_4\left(\frac{P_4}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 254\,\mathrm{K} \tag{9}$$
    On trouve déjà une valeur différente de celle de l'énoncé. On peut maintenant appliquer le premier principe à l'ensemble du gaz, on a alors :
    $$\Delta U = \underbrace{\Delta U_1}_{\text{gaz resté}} + \underbrace{\Delta U_2}_{\text{gaz sorti}} = \frac{n_1 R}{\gamma - 1}(T_5 - T_4) + 0 = W_{45} + Q_{45} = -125\,\mathrm{J} \tag{10}$$
    Avec la nouvelle valeur de T_5, on trouve $n' = 6{,}7 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$ et $W_{45} = -168\,\mathrm{J}$. Et on finalement $Q_{45} = 43\,\mathrm{J}$ et la transformation ne peut pas être adiabatique.
    Cependant l'énoncé indique que la transformation subie par le gaz qui sort du robinet est *brutale* ce qui suggère qu'elle est adiabatique. Ça n'est pas possible !
18. On utilise le transfert thermique calculé à la question précédente pour déterminer l'entropie échangée $S_{e45} = \frac{Q_{45}}{T_0} = 0{,}14\,\mathrm{J\,K^{-1}}$. Puis on détermine l'entropie créée S_{c45} par $\boxed{S_{c45} = \Delta S_{45} - S_{e45} = 0{,}18\,\mathrm{J\,K^{-1}}}$. La transformation est irréversible à cause de la différence de pression.

Exercice 2 : Exploitation du diagramme E-pH du chlore

I – Diagramme du chlore

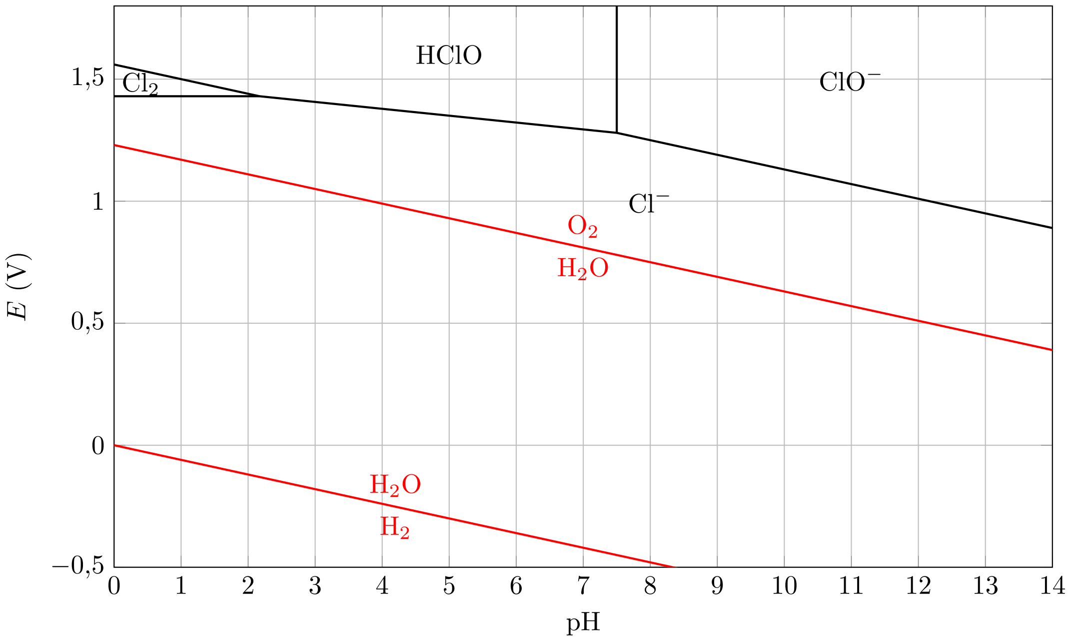

Figure 1 – Diagramme E-pH du chlore

1. On calcule le degré d'oxydation de l'atome de chlore dans les différents édifices chimiques, ainsi no(Cl) $= -I$ dans Cl^-, no(Cl) $= 0$ dans Cl_2, no(Cl) $= +I$ dans HClO et no(Cl) $= +I$ dans ClO^-.
   HClO et ClO^- ont le même nombre d'oxydation pour le chlore. Ces espèces sont liées par l'équilibre acide/base suivant
   $$\mathrm{HClO} \rightleftharpoons \mathrm{ClO^-} + \mathrm{H^+} \tag{1}$$
   donc HClO est l'acide et ClO^- la base. On obtient le diagramme de situation suivant :

$+I$	HClO	ClO^-
0	Cl_2	
$-I$	Cl^-	

   On obtient donc la correspondance suivante : A :Cl^- ; B :Cl_2 : C :HClO et D :ClO^-.
2. Par définition, $K_a = \frac{[\mathrm{ClO^-}][\mathrm{H^+}]}{[\mathrm{HClO}]c^\circ}$. Or cette équilibre est atteint sur la frontière verticale, il y a donc alors égalité des concentrations d'après l'énoncé, et ainsi $\mathrm{pK_a} = \mathrm{pH}$. Donc par lecture graphique $\boxed{\mathrm{pK_a} = 7{,}5}$.
3. La demi équation rédox du couple B/A est $\mathrm{Cl_2} + 2\,\mathrm{e^-} = 2\,\mathrm{Cl^-}$, ainsi l'équation de la frontière est donnée par
   $$E = E^\circ + \frac{0{,}06}{2}\log\frac{[\mathrm{Cl_2}]c^\circ}{[\mathrm{Cl^-}]^2}$$
   On nous signale qu'il y a égalité des concentrations en éléments sur la frontière, donc $2[\mathrm{Cl_2}] = [\mathrm{Cl^-}]$, et comme $2[\mathrm{Cl_2}] + [\mathrm{Cl^-}] = c$, nous avons que $[\mathrm{Cl_2}] = c/4$ et $[\mathrm{Cl^-}] = c/2$. Finalement $E = E^\circ - 0{,}03\log\left(\frac{c}{c^\circ}\right)$.
   Pour déterminer E on peut utiliser les informations sur la frontière entre B et C :
   $$2\,\mathrm{HClO} + 2\,\mathrm{H^+} + 2\,\mathrm{e^-} = \mathrm{Cl_2} + 2\,\mathrm{H_2O}(\ell), \tag{2}$$
   La formule de Nernst associée est :
   $$E = E^\circ + \frac{0{,}06}{2}\left(\log\left(\frac{[\mathrm{H^+}]^2}{c^{\circ 2}}\right) + \log\left(\frac{[\mathrm{HClO}]^2}{c^\circ[\mathrm{Cl_2}]}\right)\right) = E^\circ - 0{,}06\mathrm{pH} + 0{,}03\log\left(\frac{[\mathrm{HClO}]^2}{c^\circ[\mathrm{Cl_2}]}\right) \tag{3}$$
   ainsi la pente est de $-0{,}06$ V, et ainsi $E = 1{,}56 - 0{,}06 \times 2{,}17 = 1{,}43$ V.
   En conclusion, $\boxed{E^\circ = E + 0{,}03\log\left(\frac{c}{c^\circ}\right) = 1{,}40\,\mathrm{V}}$.

4. $\boxed{\mathrm{HClO} + \mathrm{H}^+ + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{Cl}^- + \mathrm{H_2O}(\ell)}$
5. À partir de la demi-équation électronique on en déduit (formule de Nernst) que la pente est de $-0{,}03\,\mathrm{V}$. En prolongeant la frontière, on remarque qu'elle passe par les points $(2{,}17; 1{,}43)$ et $(10{,}5; 1{,}2)$, ce qui confirme une pente de $-0{,}03\,\mathrm{V}$.
6. La formule de Nernst pour ce couple donne $E = E^\circ + 0{,}03 \log \frac{[\mathrm{HClO}][\mathrm{H}^+]}{[\mathrm{Cl}^-]c^\circ}$. Or il y a égalité des concentrations sur la frontière, ainsi $E = E^\circ - 0{,}03\,\mathrm{pH}$. En $\mathrm{pH} = 2{,}17$, $E = 1{,}43\,\mathrm{V}$, ainsi $\boxed{E^\circ = 1{,}43 + 0{,}03 \times 2{,}17 = 1{,}50\,\mathrm{V}}$;

II – Diagramme de l'eau

On considère les espèces $\mathrm{H_2O}$, $\mathrm{O_2(g)}$ et $\mathrm{H_2(g)}$. La pression de tracé est fixée à 1 bar et la concentration de tracé à $1{,}0\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}$.

7. Demi-équation : $\mathrm{O_2} + 4\,\mathrm{H}^+ + 4\,\mathrm{e}^- = 2\,\mathrm{H_2O}$. Avec la formule de Nernst $\boxed{E = E^\circ - 0{,}06\,\mathrm{pH} = 1{,}23\,\mathrm{V} - 0{,}06\mathrm{pH}}$ avec les informations de l'énoncé (pression de 1 bar).
8. Demi-équation : $\mathrm{H_2O} + 2\,\mathrm{H}^+ + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{H_2} + \mathrm{H_2O}$. Avec la formule de Nernst : $\boxed{E = E^\circ - 0{,}06\mathrm{pH} = -0{,}06\mathrm{pH}}$.
9. Voir figure 1. On en conclut que parmi toutes les espèces du chlore, seule Cl^- est stable dans l'eau, toutes les autres espèces vont réagir avec l'eau pour produire du dioxygène.

III – Étude de la cellule d'électrolyse

10. À l'anode il se produit une oxydation, ainsi il se produit du $\mathrm{Cl_2}$ selon la réaction $\boxed{2\,\mathrm{Cl}^- = \mathrm{Cl_2} + 2\,\mathrm{e}^-}$.

    À la cathode, il se produit une réduction, donc la formation de $\mathrm{H_2}$ selon la réaction $\boxed{2\,\mathrm{H}^+ + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{H_2(g)}}$.
11. On écrit les deux demi-équations électroniques qui interviennent ici :
    $\mathrm{Cl_2} + 2\,\mathrm{e}^- = 2\,\mathrm{Cl}^-$
    $\mathrm{Cl_2} + 2\,\mathrm{H_2O}(\ell) = 2\,\mathrm{ClO}^- + 4\,\mathrm{H}^+ + 2\,\mathrm{e}^-$
    Ainsi en combinant ces deux demi-équations pour éliminer les électrons échangés, nous obtenons, après simplification : $\boxed{\mathrm{Cl_2} + \mathrm{H_2O} = \mathrm{Cl}^- + \mathrm{ClO}^- + 2\,\mathrm{H}^+}$
12. C'est une réaction de $\boxed{\text{dismutation}}$.
13. $\boxed{m = c_s V_0 = 5\,\mathrm{g}\,\ell^{-1} \cdot 150\,\mathrm{m}^3 = 750\,\mathrm{kg}}$
14. Cherchons la quantité de dichlore formée par seconde :

$$\frac{\mathrm{d}n_{\mathrm{Cl_2}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|_{\max}}{2M_{\mathrm{Cl}}} \tag{4}$$

    Or la formation à l'anode d'une mole de $\mathrm{Cl_2}$ s'accompagne de la libération de 2 moles d'électrons, ainsi $\frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\mathrm{d}n_{\mathrm{Cl_2}}}{\mathrm{d}t}$.
    Finalement, $\boxed{i = e\mathcal{N}_a \frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}\frac{\left.\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|_{\max}}{M_{\mathrm{Cl}}} = 20\,\mathrm{A}}$.
15. $\boxed{P = Ui = 147\,\mathrm{W}}$, ce qui n'est pas excessif, sauf s'il faut la faire tourner en continu.

Exercice 3 : Exploration de la planète Mars

I – Etude préliminaire

I.1 – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

1. On utilise l'expression de la force gravitationnelle :

$$||\vec{F}|| = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad \text{donc} \quad \dim(G) = \dim(F) \times \frac{L^2}{M^2} \quad \text{or} \quad \dim(F) = MLT^{-2} \tag{1}$$

    Donc $\boxed{dim(G) = L^3T^{-2}M^{-1}}$ et l'unité SI de G est $\boxed{[\mathrm{G}] = \mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{kg}^{-1}}$.

2. On étudie un corps de masse m assimilable au point M en interaction gravitationnelle avec le Soleil, dans le référentiel héliocentrique galiléen, alors d'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \tag{2}$$

Or $\vec{F} = -GmM_S \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, alors $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. On en déduit $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{\mathrm{cste}}}$

3. Par définition du moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, et comme $\vec{L}_O$ est de direction constante $\vec{e}_z$, cela implique que le point M est astreint à se mouvoir dans un unique plan orthogonal à $\vec{L}_O$. De plus ce plan contient O, il s'agit donc du plan $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

   Alors le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On exprime alors le moment cinétique $\vec{L}_O = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$.

   On en déduit $\boxed{C = L_O/m}$. C'est $\boxed{\text{la constante des aires}}$.

4. On applique le principe fondamental de la dynamique au point matériel M de masse m

$$m\vec{a}(M) = -\frac{GmM_S}{R^2}\vec{e}_r \tag{3}$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire, on peut écrire

$$\vec{a}(M) = -\frac{V^2}{R}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta \tag{4}$$

En projetant selon $\vec{e}_r$, on a

$$-m\frac{V^2}{R} = -\frac{GmM_S}{R^2} \quad \text{soit} \quad V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \tag{5}$$

En prenant le rayon de l'orbite égale au demi-grand axe on a $\boxed{V_T = 2{,}98 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$ et $\boxed{V_M = 2{,}42 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$.

I.2 – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

5. On a

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{GmM_S}{2R} \quad \text{et} \quad E_m = E_c - \frac{GmM_S}{R} = -\frac{GmM_S}{2R}} \tag{6}$$

6. On a trouvé dans les questions précédentes, une expression constante pour la vitesse. Le mouvement est alors uniforme et dans ce cas, la distance parcourue est liée à la vitesse et à la durée (période T) par $2\pi R = VT$ d'où

$$T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_S}} \tag{7}$$

Cette relation peut aussi s'ecrite selon

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}} \tag{8}$$

ce qui correspond bien à la troisième loi de Kepler avec $R = a$, le demi-grand axe de la trajectoire.

II – Etude de la trajectoire

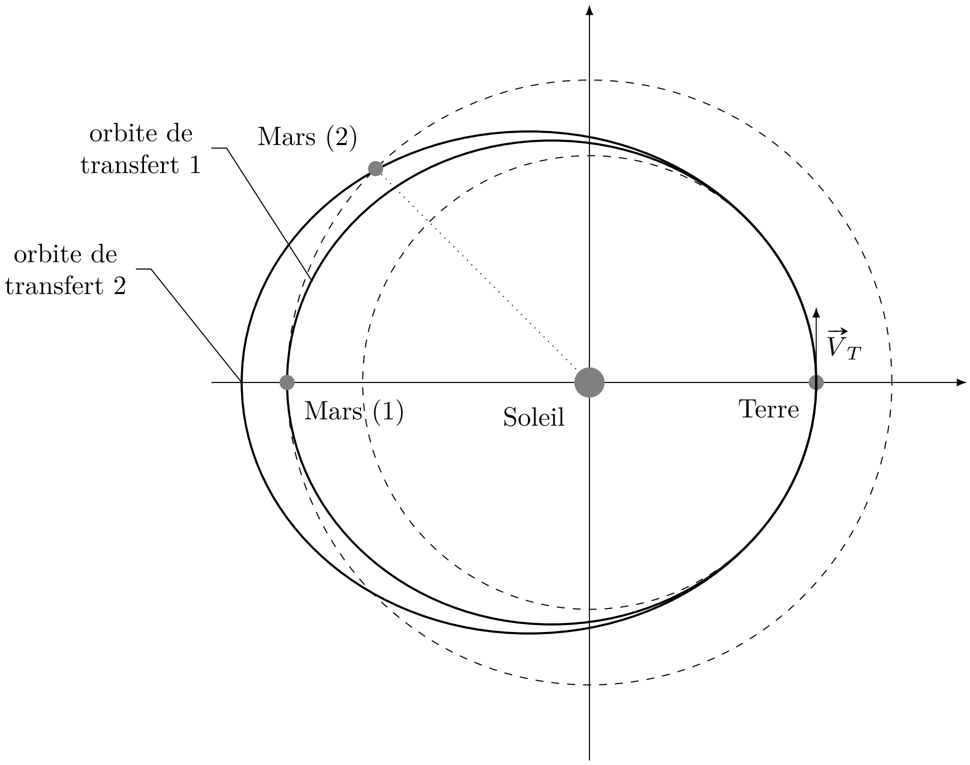

FIGURE 1 – Représentation des orbites de la Terre de de Mars.

II.1 – Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

7. Voir figure 1.
8. Sur l'orbite de transfert, le grand axe s'exprime par $2a = a_M + a_T$. On peut alors réutiliser les résultats précédents pour l'énergie mécanique :

$$E'_m = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{2a} = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{a_M + a_T} \tag{9}$$

De plus, on niveau du point de départ, il est aussi possible d'exprimer l'énergie potentielle

$$E'_p = E_p = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{a_T} \tag{10}$$

On en déduit l'énergie cinétique E'_c puis la vitesse V' qui doit avoir le vaisseau au départ de son orbite de transfert

$$E'_c = E'_m - E'_p = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{a_M + a_T} + \mathcal{G}\frac{mM_S}{a_T} = \mathcal{G}mM_S\left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{a_T + a_M}\right) = m \times \underbrace{\mathcal{G}\frac{M_S}{a_T}}_{V_T^2}\left(1 - \frac{1}{1 + a_M/a_T}\right) \tag{11}$$

On peut alors finalement isoler la vitesse $V'_T = \sqrt{2E'_c/m}$ d'où

$$\boxed{V'_T = V_T\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{1 + a_M/a_T}} = V_T\sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}}} \tag{12}$$

Au passage, on remarque que pour $a_M = a_T$ (cas hypothétique bien sur), on retrouve $V_T = V'_T$ (pas besoin de changement d'orbite), ce qui est rassurant.

On en déduit au final

$$\boxed{\Delta V_T = V_T\left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}} - 1\right) = 2{,}93\,\mathrm{km/s}} \tag{13}$$

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

9. Cette fois ci, on reprend la troisième loi de Kepler, adaptée aux trajectoires elliptiques. On trouve alors pour la période $T' = 2\Delta t$ de l'orbite de transfert

$$\boxed{\frac{(2\Delta t)^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_s} \quad \text{soit} \quad \Delta t = \frac{\pi}{2\sqrt{2\mathcal{G}M_S}}(a_T + a_m)^{3/2}} \tag{14}$$

L'application numérique donne alors $\boxed{\Delta t = 22{,}3 \times 10^6\,\mathrm{s} = 259\,\text{jours}}$.

10. On sait d'après les questions précédentes que $\theta_M(\Delta t) = \pi + \theta_T(0)$ (lecture graphique sur le schéma). De plus, l'angle formé par Mars et l'axe des abscisse est donné par $\theta_M(t) = \Omega_M t + \alpha_0$ avec $\Omega_M = 2\pi/T_M$
En effet, α_0 représente bien l'écart angulaire entre Mars et la Terre (donc l'axe des abscisses) à l'instant initial. On en déduit que

$$\boxed{\alpha_0 + \Omega_M \Delta t = \pi \quad \text{soit} \quad \alpha_0 = \pi - 2\pi\frac{\Delta t}{T_M} = 0{,}78\,\mathrm{rad} \approx \pi/4} \tag{15}$$

Le lancé du vaisseau doit donc être effectué lorsque la Terre et Mars forment un angle d'environ $\pi/4$ par rapport au soleil.

11. La période de révolution sur l'orbite de transfert est donnée par $T' = 2\Delta t = 516\,\text{jours}$. Pendant cette durée, la Terre la position angulaire de la Terre va évoluer de $\Delta\theta_T = \theta_T(T') - \theta_T(0) = \Omega_T T' = 2\pi\frac{T'}{T_M} = 2\pi + 2{,}6\,\mathrm{rad}$.
La Terre va donc parcourir un tour complet plus environ 2,6 rad soit presque un autre demi-tour. On en déduit que la Terre et le vaisseau ne vont pas se croiser. Cette orbite de transfert ne peut donc pas être utilisée pour retourner sur Terre et il faut s'assurer que le vaisseau dispose d'un moyen de propulsion suffisant pour s'inserer sur une autre orbite de retour.

II.2 – Durée de la mission

12. On reprend le raisonnement de la question 10 en l'adaptant à cette nouvelle situation. Cette dois ci, on note t' l'instant du départ de Mars et on en déduit que pour une durée de retour Δt :

$$\theta_T(t_1 + \Delta t) = \pi + \theta_M(t_1) \Rightarrow \theta_T(t_1) + \Omega_T \Delta t = \pi + \theta_M(t_1) \tag{16}$$

soit $\boxed{\alpha_1 = \theta_M(t_1) - \theta_T(t_1) = \Omega_T \Delta t - \pi = 1{,}3\,\mathrm{rad}}$
L'angle obtenu est encore positif. En effet, lorsque le vaisseau part de Mars, la Terre, dont la vitesse angulaire est plus élevée va rattraper Mars puis la dépasser pour enfin se retrouver au bon endroit pour intercepter le vaisseau.

13. Cette durée s'exprime selon $T_t = \underbrace{\Delta t}_{\text{aller}} + \underbrace{(t_1 - \Delta t)}_{\text{séjour sur mars}} + \underbrace{\Delta t}_{\text{retour}}$. Il reste donc à exprimer la durée du séjour sur Mars. Cette tâche peut être effectuée à l'aide des angles α_0 et α_1. En effet, lorsque le vaisseau arrive sur Mars, cette dernière se trouve en $\theta_M(\Delta t) = \pi$ d'après la question 10.
Au moment du départ du vaisseau de la planète Mars, on a $\theta_M(t_1) = \theta_T(t_1) + \alpha_1 + 2p\pi$ avec p, un entier relatif. On en déduit en combinant ces deux relations que

$$\theta_M(t') - \theta_M(\Delta t) = \theta_T(t') + \alpha_1 - \pi \Rightarrow \Omega_M(t' - \Delta t) = \Omega_T(t' - \Delta t + \Delta t) + \alpha_1 - \pi \tag{17}$$

D'où l'on déduit finalement

$$(t' - \Delta t)_p = \frac{\Omega_T \Delta t + \alpha_1 + (2p-1)\pi}{\Omega_M - \Omega_T} \tag{18}$$

Il existe alors différentes durées possible pour le séjour sur Mars en fonction de l'entier relatif p. Des applications numériques montrent que la durée minimale est obtenue pour $p = -1$ et à une durée de $\boxed{t' - \Delta t = 454\,\text{jours}}$.
On en déduit au final la durée totale du voyage $T_t = 971\,\text{jours} \approx 2{,}7\,\text{ans}$.
Le lancement est possible aux instants t_n tels que $\theta_M(t) - \theta_T(t) = \alpha_0 + 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donc lorsque

$$(\Omega_M - \Omega_T)t_n + \alpha_0 = \alpha_0 + 2n\pi \Rightarrow t_n = \frac{2n\pi}{\Omega_M - \Omega_T} \tag{19}$$

soit $\boxed{|t_{n+1} - t_n| = \frac{2\pi}{\Omega_T - \omega_M} = 780\,\text{jours}}$

14. Voir figure 1.
15. On a en $\theta = 0$, $r(0) = a_T = \frac{p}{1+e}$ et en $\theta = 3\pi/4$, $r(\theta) = a_M = \frac{p}{1-e/\sqrt{2}}$. On peut alors combiner ces deux résultats pour en déduire l'excentricité e :

$$\boxed{\frac{a_T}{a_M} = \frac{1-e/\sqrt{2}}{1+e} \Rightarrow e\left(a_T + a_M/\sqrt{2}\right) = a_M - a_T \quad \text{donc} \quad e = \frac{a_M - a_T}{a_T + a_M/\sqrt{2}} \approx 0{,}25} \tag{20}$$

16. En $\theta = \pi$, on obtient $r(\pi) = \frac{p}{1-e}$ en en $\theta = 0$, on a $r(0) = \frac{p}{1+e} = a_T$. La somme de ces deux rayons peut être relié au demi-grand axe de l'ellipse :

$$a = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2} = \underbrace{\frac{p}{1+e}}_{=a_T} \times \frac{1}{1-e} = \frac{a_T}{1-e} = 200 \times 10^6\,\text{km} \tag{21}$$

On peut ensuite exprimer l'énergie mécanique en s'inspirant de la question 5 :

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_s}{2a} = -\mathcal{G}mM_s\frac{1-e}{2a_T} \tag{22}$$

On peut combiner ce dernier résultat avec l'expression de la vitesse V_T pour obtenir au final :

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2}mV_T^2 \times (1-e)} \tag{23}$$

17. En $\theta = 0$, au départ de la terre, on a $E_m = E_p + E_c$ avec $E_p = -\frac{\mathcal{G}mM_S}{a_T} = -mV_T^2$ d'où l'on déduit

$$\boxed{\frac{1}{2}mV_T''^2 = -\frac{1}{2}mV_T^2 \times (1-e) + mV_T^2 = mV_T^2\left(1 - \frac{1-e}{2}\right) \quad \text{soit} \quad V_T'' = V_T\sqrt{1+e}} \tag{24}$$

18. On trouve $\Delta V_T' = V_T'' - V_T = V_T\left(\sqrt{1+e} - 1\right) = 3{,}53\,\text{km/s} > 2{,}93\,\text{km/s}$
19. On sait que $C = L_O/m$ est une constante que l'on peut par exemple exprimer à l'instant initial de l'orbite de transfert

$$\boxed{C = C(0) = r^2(0)\dot{\theta}(0) = a_T^2\frac{V_T''}{a_T} = a_T V_T''} \tag{25}$$

20. L'expression de la constante des aires permet d'écrire $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C/r^2 \Rightarrow \mathrm{d}\theta = (C/r^2)\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{r^2}{C}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t$. On en déduit que

$$\Delta t' = \int_{t=0}^{\Delta t'} \mathrm{d}t = \int_{\theta=0}^{\theta_M(\Delta t')} \frac{r^2}{C}\mathrm{d}\theta = \frac{p^2}{C}\int_{\theta=0}^{3\pi/4} \frac{1}{\left(1+e\cos(\theta)\right)^2}\mathrm{d}\theta = \frac{a_T^2(1+e)^2}{a_T V_T''} \times 2{,}15 \tag{26}$$

d'où au final

$$\boxed{\Delta t' = 2{,}15 \times \frac{a_T}{V_T''}(1+e)^2 = 175\,\text{jours}} \tag{27}$$

La valeur obtenue est plus faible que Δt, le trajet est donc plus court. Cependant, il requiert plus de carburant donc le vaisseau sera plus imposant.