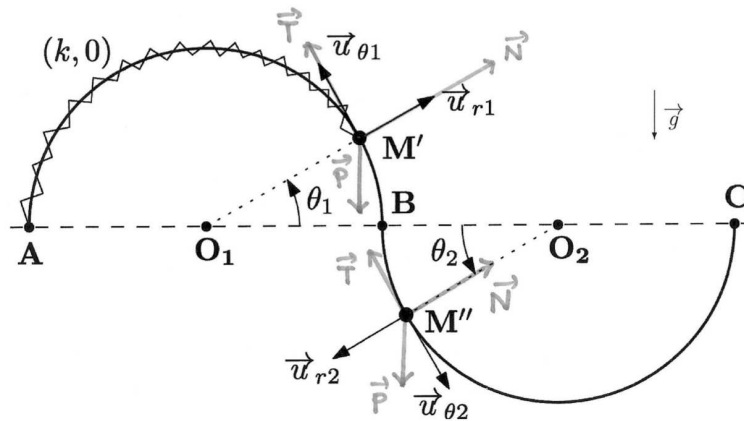


## FINALEMENT... RIEN QUE DE LA MÉCA ;-)

**I. Oscillateur**

- I.1**
- Référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen ;
  - Système : anneau assimilé à un point matériel M de masse  $m$  ;
  - Hypothèses : pas de frottements ;
  - Bilan des actions s'exerçant sur M sur la portion AB :
    - ★ le poids :  $\vec{P} = m \vec{g} = -mg (\sin(\theta_1) \vec{u}_{r1} + \cos \theta_1 \vec{u}_{\theta1})$
    - ★ l'action normale du fil :  $\vec{N} = N \vec{u}_{r1}$
    - ★ la force de rappel du ressort :  $\vec{T} = -k (\ell_1 - \ell_0) \vec{u}_{all1}$  avec  $\ell_1 = R(\pi - \theta_1)$ ,  $\ell_0 = 0$  et  $\vec{u}_{all1} = -\vec{u}_{\theta1}$ .  
On a donc  $\vec{T} = k R(\pi - \theta_1) \vec{u}_{\theta1}$ .

Ces forces sont représentées sur le schéma ci-après :



- I.2**
- le poids est une force conservative qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = mgz + C^{te}$ , avec  $z = R \sin(\theta_1)$  en prenant l'origine de l'axe des  $z$  en  $O_1$ .

On a donc

$$E_{pp} = mgR \sin(\theta_1) + C_1^{te}$$

- la force de rappel du ressort est conservative et dérive de l'énergie potentielle élastique :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k R^2 (\pi - \theta_1)^2 + C_2^{te}$$

L'énergie potentielle totale s'écrit ainsi :

$$E_p(\theta_1) = E_{pp} + E_{pe} = mgR \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} k R^2 (\pi - \theta_1)^2 + C^{te}$$

La constante est telle que  $E_p(A) = E_p(\theta_1 = \pi) = 0$ . On en déduit  $C^{te} = 0$  et finalement :

$$E_p(\theta_1) = mgR \sin(\theta_1) + \frac{1}{2} k R^2 (\pi - \theta_1)^2$$

- I.3** La force  $\vec{N}$  n'est pas conservative. Toutefois, étant perpendiculaire au vecteur vitesse, elle ne travaille pas.

L'énergie mécanique totale du système se conserve.

**I.4** cf. question 1 :

$$\theta_1 = \pi - \frac{\ell}{R}$$

**I.5** On en déduit  $E_p(\ell) = mgR \sin\left(\pi - \frac{\ell}{R}\right) + \frac{1}{2}kR^2 \left(\pi - \left(\pi - \frac{\ell}{R}\right)\right)^2$

ou encore

$$E_p(\ell) = mgR \sin\left(\frac{\ell}{R}\right) + \frac{1}{2}k\ell^2$$

**I.6** • Bilan des actions s'exerçant sur M sur la portion BC :

- ★ le poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin(\theta_2)\vec{u}_{r_2} + \cos\theta_2\vec{u}_{\theta_2})$  ;
- ★ l'action normale du fil :  $\vec{N} = N\vec{u}_{r_2}$  ;
- ★ la force de rappel du ressort :  $\vec{T} = -k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}_{all2}$  avec  $\ell_2 = R(\pi + \theta_2)$ ,  $\ell_0 = 0$  et  $\vec{u}_{all2} = \vec{u}_{\theta_2}$ .  
On a donc  $\vec{T} = -kR(\pi + \theta_2)\vec{u}_{\theta_2}$ .

Ces forces sont représentées sur le schéma ci-avant.

**I.7** • L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit ici  $E_{pp} = mgz + C^{te}$ , avec  $z = -R \sin(\theta_2)$ .

On a donc

$$E_{pp} = -mgR \sin(\theta_2) + C_1^{te}$$

- L'énergie potentielle élastique s'écrit quant à elle :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kR^2(\pi + \theta_1)^2 + C_2^{te}$$

L'énergie potentielle totale s'écrit ainsi :

$$E_p(\theta_2) = E_{pp} + E_{pe} = -mgR \sin(\theta_2) + \frac{1}{2}kR^2(\pi + \theta_2)^2 + C^{te}$$

L'énergie potentielle étant continue en B, on doit avoir  $E_p(\theta_1 = 0) = E_p(\theta_2 = 0)$ . Ainsi :

$$\frac{1}{2}kR^2(\pi)^2 = \frac{1}{2}kR^2(\pi)^2 + C^{te} \quad \Leftrightarrow \quad C^{te} = 0$$

Et finalement

$$E_p(\theta_2) = -mgR \sin(\theta_2) + \frac{1}{2}kR^2(\pi + \theta_2)^2$$

**I.8** cf. question 6 :

$$\theta_2 = \frac{\ell}{R} - \pi$$

**I.9** L'énergie potentielle totale  $E_p(\ell)$  du point M s'écrit donc sur cette portion :

$$E_p(\ell) = -mgR \sin\left(\frac{\ell}{R} - \pi\right) + \frac{1}{2}kR^2\left(\pi + \frac{\ell}{R} - \pi\right)^2$$

ou encore

$$E_p(\ell) = mgR \sin\left(\frac{\ell}{R}\right) + \frac{1}{2}k\ell^2$$

L'expression de  $E_p(\ell)$  est identique à celle obtenue à la question 5. On peut donc l'utiliser quelle que soit la position de M sur le fil.

**I.10** L'équation vérifiée par  $\ell_e$  est  $\frac{dE_p}{d\ell}(\ell_e) = 0$

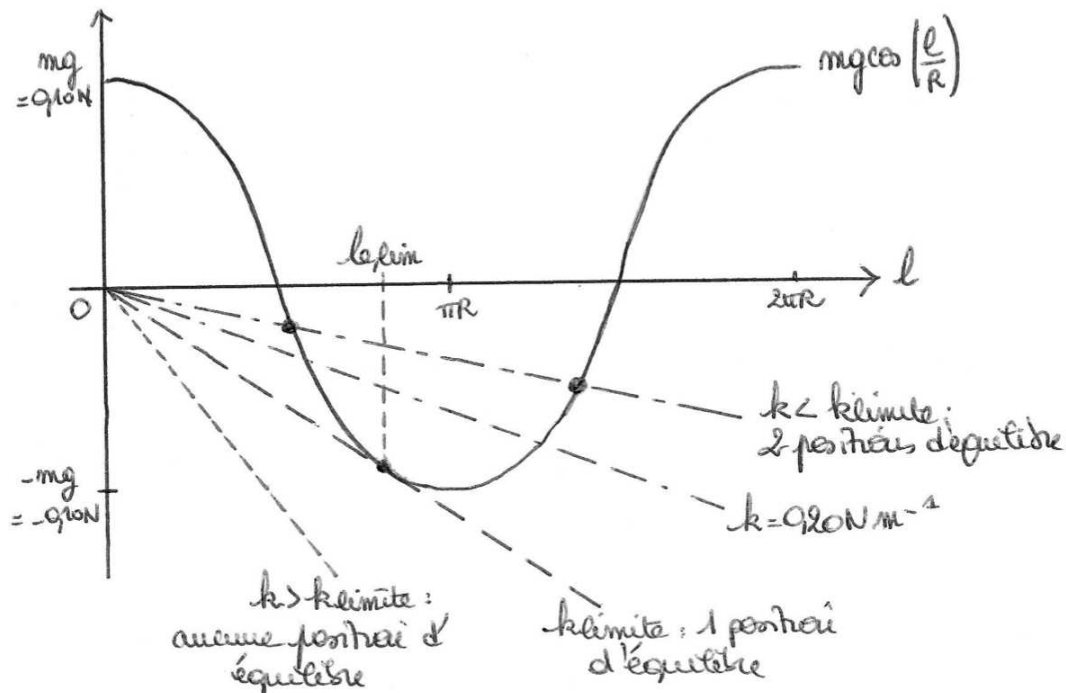
d'où

$$mg \cos\left(\frac{\ell_e}{R}\right) + k\ell_e = 0$$

**I.11** On peut réécrire l'équation

$$mg \cos\left(\frac{\ell_e}{R}\right) = -k\ell_e$$

La ou les position(s) d'équilibre correspondra(ont) à l'(aux) intersection(s) de la sinusoïde avec la droite linéaire de pente  $-k$ .



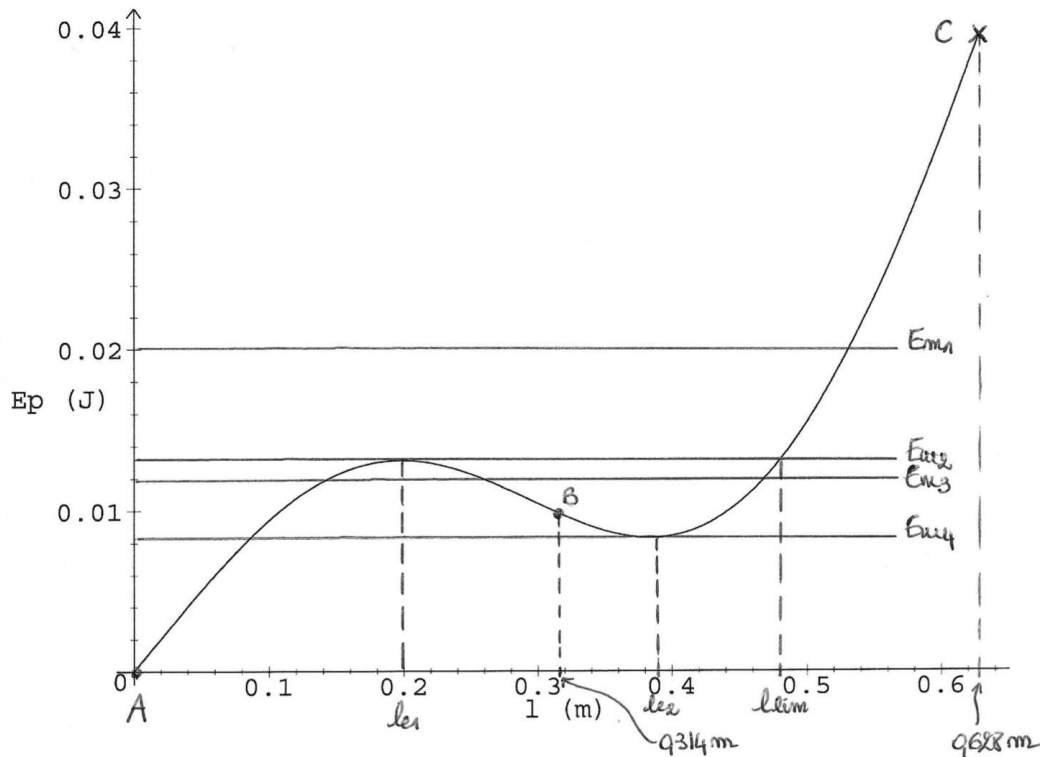
**I.12** Il s'agit du cas où la droite est tangente à la sinusoïde. On en déduit graphiquement :

$$\ell_{e,\text{lim}} \approx 25\text{ cm} \quad \text{et} \quad k_{\text{lim}} \approx 0,35\text{ N.m}^{-1}$$

Comme  $\ell_{e,\text{lim}} < \pi R$ , cette position d'équilibre se trouve sur le 1/2-cercle AB.

**I.13** En reportant la droite correspondante sur le graphe de la question 11, et en comparant à  $k_{\text{lim}}$ , on constate qu'on observera 2 positions d'équilibre, placée de part et d'autre du point B.

**I.14** Le graphe annoté est le suivant :



Les positions d'équilibre sont des extrêma de  $E_p$ . On observe bien deux positions d'équilibre de part et d'autre du point B :

- ★  $l_{e1}$ , qui est instable car elle correspond à un maximum d' $E_p$  ;
- ★  $l_{e2}$ , qui est stable car elle correspond à un minimum d' $E_p$ .

**I.15** Le système est conservatif, donc  $E_m = C^{te} = E_m(t = 0)$ . Comme l'anneau est lâché sans vitesse initiale,  $E_c(t = 0) = 0$  et  $E_m(t = 0) = E_p(l_0)$ . On peut donc raisonner en traçant les droites  $E_m = C^{te}$  :

- ★  $l_0 > l_{lim}$  ( $E_m = E_{m1}$ ) :  $l$  décroît jusqu'à atteindre 0 : l'anneau coulisse jusqu'en A.
- ★  $l_0 = l_{lim}$  ( $E_m = E_{m2}$ ) :  $l$  décroît jusqu'à  $l_{e2}$ , où l'anneau s'immobilise.
- ★  $l_{e1} < l_0 < l_{lim}$  ( $E_m = E_{m3}$ ) :  $l$  oscille autour de  $l_{e2}$ .
- ★  $l_0 = l_{e1}$  ( $E_m = E_{m2}$ ) ou  $l_0 = l_{e2}$  ( $E_m = E_{m4}$ ) : l'anneau reste immobile.
- ★  $l_0 < l_{e1}$  ( $E_m = E_{m3}$ ) :  $l$  décroît jusqu'à atteindre 0 : l'anneau coulisse jusqu'en A.

**I.16**  $l_0$  est très proche de la position d'équilibre stable  $l_{e2}$ , de sorte qu'on va observer des oscillations de faible amplitude autour de  $l_{e2}$ , et qu'on aura toujours  $\frac{L}{R} \ll 1$ . La grandeur  $L$  sera ainsi solution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$  telle que :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \frac{d^2 E_p}{d\ell^2}(\ell_{e2})$$

Or 
$$\frac{dE_p}{d\ell}(\ell) = mg \cos\left(\frac{\ell}{R}\right) + k\ell \quad \text{et} \quad \frac{d^2 E_p}{d\ell^2}(\ell) = -\frac{mg}{R} \sin\left(\frac{\ell}{R}\right) + k$$

d'où 
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{R} \sin\left(\frac{\ell_{e2}}{R}\right)}$$

Les oscillations seront sinusoïdales d'amplitude  $l_0 - l_{e2} \approx 1$  cm et période propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0,67$  s.

## II. Mouvement d'une particule chargée (d'après CCP PC 2014)

- ★ Référentiel : référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen ;
- ★ Système : particule chargée de charge  $q > 0$  et de masse  $m$ , assimilée à un point matériel M ;
- ★ Hypothèses : pas de frottements, poids négligé ;
- ★ Bilan des actions :  $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  ou  $\vec{F}_e = q \vec{E}$ .

### II.1 Étude de la trajectoire.

**II.1.a** Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la particule dans  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_m) = q \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v} = 0$$

L'énergie cinétique est donc constante. Comme la masse est supposée constante :

On peut en déduire que la vitesse est constante. On notera  $\|\vec{v}\| = v_0$ .

**II.1.b** Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dans  $\mathcal{R}$  :

$$m \vec{\gamma} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \iff m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qB\dot{y} \\ -qB\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit en projection sur  $Oz$  :  $m\ddot{z} = 0$

Soit  $\dot{z} = C^{te} = 0$  car  $v_{0z} = 0$

puis  $z = C^{te} = 0$  car  $z_0 = 0$

La trajectoire est plane (plan  $(xOy)$ ).

**II.1.c** Le mouvement est circulaire. Notons  $R$  son rayon et  $C$  le centre de la trajectoire (de coordonnées  $(0, -R, 0)$ ).  $\theta$  est l'angle orienté depuis l'axe  $(Cy)$  vers  $\vec{CM}$ ,  $\vec{e}_r = \frac{\vec{CM}}{\|\vec{CM}\|}$  et  $\vec{e}_\theta$  est tel que  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  soit une base orthonormée directe.

Dans ce système de coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{CM} = R \vec{e}_r \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = -v_0 \vec{e}_\theta$$

et  $\vec{\gamma} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

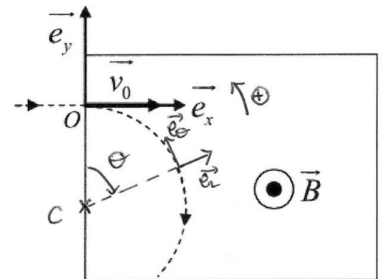
La force de Lorentz s'écrit par ailleurs

$$q \vec{v} \wedge \vec{B} = -qv_0 \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z = -qv_0 B \vec{e}_r$$

En projection sur  $\vec{e}_r$  :  $-\frac{mv_0^2}{R} = -qv_0 B$

d'où

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$



**II.2** Séparation des isotopes.

**II.2.a** Les ions doivent être accélérés entre  $P_1$  et  $P_2$ . Ils sont soumis à la seule force électrique  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  entre  $P_1$  et  $P_2$ . Les particules ont tendance à descendre les énergies potentielles, puisque  $E_p = qV$  et que  $q > 0$ , les particules de charge positive ont tendance à descendre les potentiels électriques. Puisque l'on va de  $P_1$  vers  $P_2$ , c'est que  $V(P_2) < V(P_1)$ .

d'où

$$W = V_{P_2} - V_{P_1} < 0$$

**II.2.b** Si la particule sort de  $F_1$  avec une vitesse nulle, elle arrive en  $F_2$  avec la vitesse  $v_{U8}$  telle que, d'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_{m,2} - E_{m,1} = W_{nc} = 0$$

car seule la force électrostatique s'applique et elle est conservative.

D'où 
$$E_{m,2} = E_{m,1} \Leftrightarrow E_{c,2} + qV_{P_2} = E_{c,1} + qV_{P_1} \simeq qV_{P_1}$$

Donc 
$$\frac{1}{2}m_{U8}v_{U8}^2 = q(V_{P_1} - V_{P_2}) = -qW$$

Et finalement

$$v_{U8} = \sqrt{\frac{-2eW}{m_{U8}}}$$

**II.2.c** Les deux isotopes partent du même point, la distance entre les collecteurs  $d$  est donc égale à la différence entre les deux diamètres des trajectoires :

$$d = D_{U8} - D_{U5} = 2(R_{U8} - R_{U5})$$

En utilisant le lien entre la tension  $W$  et la valeur de vitesse en  $F_2$ , on obtient :

$$R_{U8} = \frac{m_{U8}v_{U8}}{eB} = \sqrt{\frac{-2Wm_{U8}}{eB^2}}$$

D'où 
$$d = 2(R_{U8} - R_{U5}) = 2\sqrt{\frac{-2W}{qB^2}}(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}})$$

ou encore

$$W = -\frac{qd^2B^2}{8(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}})^2}$$

Application numérique :

$$W = -5,1 \text{ kV}$$

**II.3** La trajectoire circulaire de longueur  $L = \pi R$  (un demi-tour) est parcourue à la vitesse constante  $v = \frac{eBR}{m_P}$  (calculée ci-dessus) en un temps :

$$T_{1/2} = \frac{L}{v} = \frac{\pi R}{v} \quad \text{d'où} \quad T_{1/2} = \frac{\pi m_P}{eB}$$

Ce temps est indépendant du rayon. On peut donc en déduire que le temps pour effectuer un demi-tour est toujours le même.

**II.4** On utilise une tension  $u(t)$  alternative sinusoïdale pour que le proton soit accéléré de manière optimale. En effet, il faut à chaque demi-tour changer le sens dans lequel on accélère la particule, d'où le fait de changer la tension de signe. De plus, on peut prendre un signal périodique car  $T_{1/2}$  est une constante (indépendante de la vitesse ou du rayon).

**II.5** On a ainsi

$$\frac{T}{2} = T_{1/2} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_{1/2}}$$

d'où

$$f = \frac{eB}{2\pi m_P}$$

*Application numérique :*

$$f = 1,5 \text{ MHz}$$

**II.6** Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est  $R_S$ . Or on avait  $v_S = \frac{eR_S B}{m_P}$  d'où

$$E_{CS} = \frac{1}{2} m_P v_S^2 = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}$$

*Application numérique :*

$$E_{CS} = 1,9 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,12 \text{ MeV}$$

**II.7** Notons  $2N$  le nombre de demi-tours effectués (et donc le nombre d'accéléérations subies). À chaque accélération, le proton gagne :

$$\Delta E_c = eU_m$$

d'où

$$\Delta E_{C,2N} = 2NeU_m = E_{CS}$$

Or

$$E_{CS} = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}$$

On en déduit

$$N = \frac{eB^2 R_S^2}{4m_P U_m}$$

*Application numérique :*

$$N = 60 \text{ tours}$$

**II.8** Puissance rayonnée.**II.8.a** Pour une trajectoire circulaire uniforme  $a = \frac{v^2}{R}$ . On en déduit

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left( \frac{v^2}{R} \right)^2 = \alpha v^4 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c R^2}$$

**II.8.b** L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon est

$$E = P_r T_{1/2} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R_S^2} \left( \frac{eB R_S}{m_P} \right)^4 \frac{\pi m_P}{eB}$$

d'où

$$E = \frac{\mu_0 e^5 B^3 R_S^2}{6\pi c m_P^3}$$

*Application numérique :*

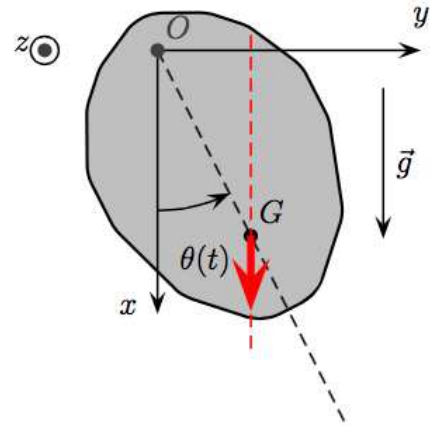
$$E = 3,9 \cdot 10^{-33} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$$

**II.8.c** Cette énergie rayonnée est négligeable devant l'énergie cinétique de la particule et il est donc raisonnable d'estimer que la perte par rayonnement est nulle, c'est à dire que l'énergie de la particule est constante à l'intérieur d'un "dee".

### III. Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre en un point

- Référentiel : terrestre galiléen ;
- Système : pendule de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$  et de moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe  $(Oz)$  ;
- Hypothèses : pas de frottements, liaison pivot parfaite.
- Bilan des actions s'exerçant sur le pendule :

- ★ le poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$  qui s'applique en  $G$ , de moment scalaire  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mga \sin(\theta)$  ;
- ★ les actions de la liaison pivot, de résultante  $\vec{F}$ , qui s'appliquent au niveau de l'axe  $(Oz)$ , de moment  $\mathcal{M}_{Oz}(\text{pivot}) = 0$ .



**III.1**

Il s'agit d'une liaison pivot.

**III.2** Par définition

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

Le moment d'inertie augmente lorsque les masses sont loin de l'axe de rotation. Ainsi, le solide 2 est celui pour lequel les masses sont le plus proche de l'axe de rotation, il a donc le moment d'inertie le plus faible, le solide 3 au contraire a les masses les plus éloignées de l'axe de rotation, il a donc le moment d'inertie le plus élevé.

**III.3** TMC scalaire

$$\frac{d\mathcal{L}_{0z}(\text{pendule})}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\text{pivot})$$

d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J} \sin \theta = 0$$

**III.4** Dans le cas des petites oscillations,  $\sin \theta \simeq \theta$ . On en déduit  $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J} \theta = 0$ . On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$  :

$$\text{de pulsation propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}} \text{ et de période } T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

**III.5** Influence d'une variation d'intensité  $\Delta g$ .

**III.5.a** Compte-tenu des notations proposées par l'énoncé, on a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad \text{et} \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{J}{ma(g + \Delta g)}}$$

Donc

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\Delta g}{g}}} = T \left(1 + \frac{\Delta g}{g}\right)^{-1/2}$$

d'où

$$T' \approx T \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}\right)$$

**III.5.b** Comme

$$s = \frac{T' - T}{T}$$

On en déduit

$$s = -\frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$



**III.6** L'énergie mécanique du pendule est

$$E_m = E_{p,pes} + E_{p,ressort} + E_c$$

Soit donc

$$E_m = mgx + \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + C^{te}$$

Comme  $x = a \cos(\theta)$

$$E_m = mga \cos(\theta) + \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + C^{te}$$

**III.7** Les forces extérieures sont conservatives ou ne travaillent pas. Comme il s'agit d'un solide, les forces intérieures ne travaillent pas. D'après le théorème de la puissance mécanique dans le référentiel galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = -mga\dot{\theta} \sin(\theta) + K\dot{\theta}\theta + J\ddot{\theta}\dot{\theta}$$

En divisant par  $J\dot{\theta} \neq 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{J}\theta - \frac{mga}{J} \sin(\theta) = 0$$

**III.8** Si l'angle  $\theta$  reste petit, alors on obtient

$$\ddot{\theta} + \frac{K - mga}{J}\theta = 0$$

Les solutions sont stables pour  $\frac{K - mga}{J} > 0$  c'est-à-dire pour  $K > mga$ .

**III.9** Dans ce cas, on a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{K - mga}}$$

**III.10** Influence d'une variation d'intensité  $\Delta g$ .

**III.10.a** Comme  $T^2 \left( \frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} \right) = T^2 ((T + \Delta T)^{-2} - T^{-2})$

On a immédiatement

$$T^2 \left( \frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} \right) \approx -2 \frac{\Delta T}{T}$$

**III.10.b** Par ailleurs  $\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2 J} (K - ma(g + \Delta g) - K + mag)$

d'où

$$\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} = -\frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J}$$

**III.10.c** On a ainsi

$$-2 \frac{\Delta T}{T} = -T^2 \frac{ma\Delta g}{4\pi^2 J}$$

d'où

$$s = \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{ma\Delta g}{K - mag}$$

**III.11** Pour que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier, il faut que  $\left| \frac{s_2}{s_1} \right| > 1$ .

Le 2<sup>ème</sup> pendule est plus sensible que le premier pour  $K < 2mag$ .

