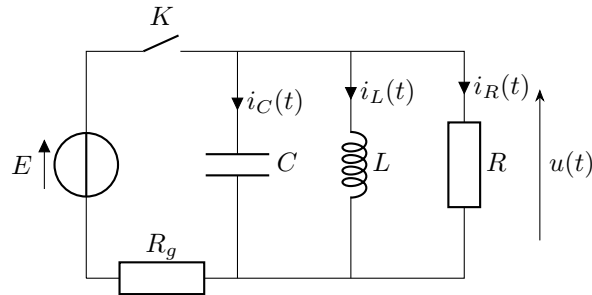


## TD5 : Oscillateurs

### Exercice 1 : CIRCUIT RLC PARALLÈLE

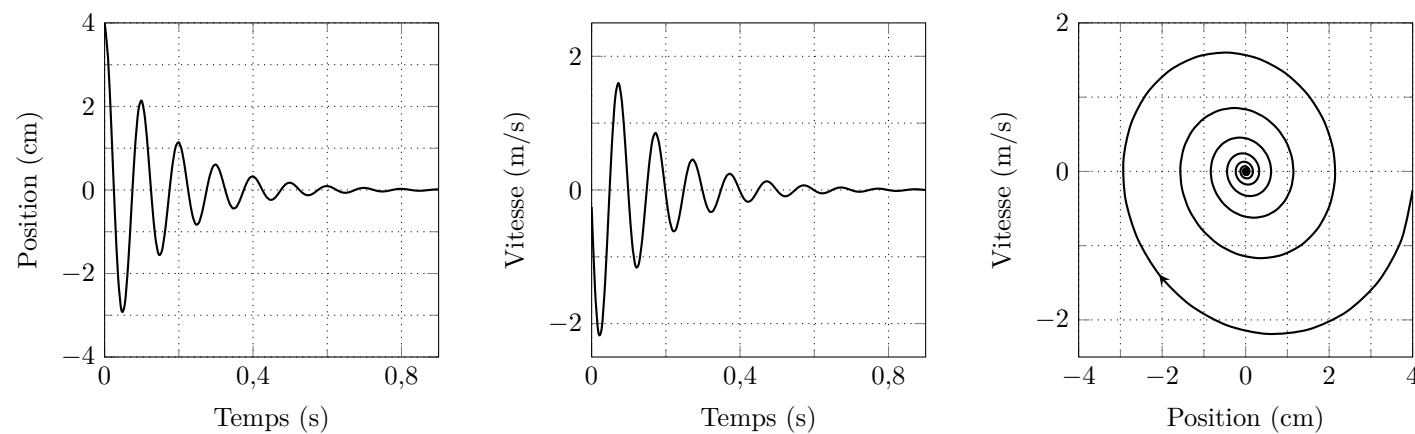


On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre. L'interrupteur K est initialement fermé pendant un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint. À  $t = 0$  on ouvre l'interrupteur et on observe l'évolution de la tension  $u(t)$ .

- Donner les valeurs des intensités  $i_C$ ,  $i_R$ , et  $i_L$  et de la tension  $u$  dans le circuit à  $t = 0^-$ ,  $t = 0^+$ , et  $t \rightarrow \infty$ .
- Tracer qualitativement l'allure de  $u(t)$  après l'ouverture de  $K$ .
- Comment le facteur de qualité  $Q$  du circuit dépend-il de  $R$ ? Proposer une expression de  $Q$  basée sur une analyse dimensionnelle.
- Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $u(t)$  pour  $t > 0$ .
- En déduire les expressions de la fréquence propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ . Comparer l'expression de  $Q$  avec celle trouvée à la question précédente.
- A.N. : On donne  $R = 40\ \Omega$ ,  $C = 200\ \mu\text{F}$  et  $L = 10\ \text{mH}$ . Calculer la pulsation propre du système et le facteur de qualité. Quelle est la durée du régime transitoire?
- Tracer l'allure du portrait de phase de la tension  $u(t)$ , c'est-à-dire le graphique représentant  $\frac{du}{dt}$  en fonction de  $u$ .

### Exercice 2 : OSCILLATEUR MÉCANIQUE AMORTI

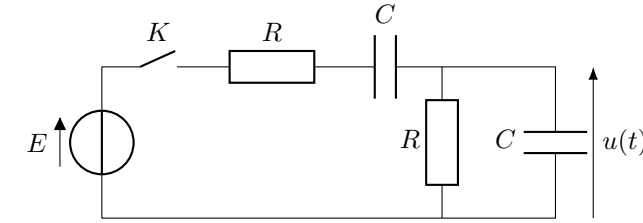
On étudie le mouvement d'une masse  $m$  accrochée à un ressort de raideur  $k$  et soumise à une force de frottement visqueux  $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$  ( $v$  est la vitesse de la masse). Le mouvement a lieu suivant l'axe  $x$ . On donne le portrait de phase du mouvement de la masse :



- Faire un schéma du système décrit en représentant les différentes forces qui s'appliquent sur  $m$ .
- Déterminer graphiquement la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur.
- L'équation différentielle satisfaite par la position  $x(t)$  de la masse est :  $\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ . Exprimer le facteur de qualité et la fréquence propre de l'oscillateur en fonction de  $m$ ,  $k$  et  $\gamma$ .
- On donne  $m = 1\ \text{g}$ . Déterminer  $k$  et  $\gamma$ .

### Exercice 3 : OSCILLATEUR À CONDENSATEURS

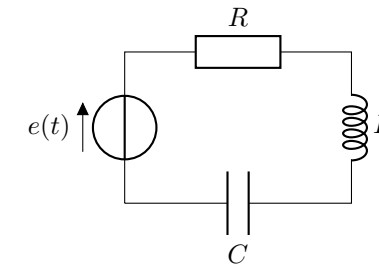
Dans le circuit ci-dessous, les condensateurs sont identiques et ont une capacité  $C = 10\ \mu\text{F}$ , les résistors sont identiques et ont une résistance  $R = 10\ \text{k}\Omega$ . Les condensateurs sont initialement déchargés lorsqu'on ferme l'interrupteur  $K$  à  $t = 0$ .  $E = 10\ \text{V}$ .



- Déterminer une constante de temps du circuit.
- Déterminer toutes les valeurs des tensions et des intensités au temps  $t = 0^+$ , ainsi qu'en régime permanent (faire des schémas équivalents si nécessaires).
- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u(t)$  en faisant apparaître la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  du circuit. Dans quel régime se trouve-t-il?
- Résoudre l'équation différentielle pour trouver l'expression de  $u(t)$ . Tracer l'allure de  $u(t)$ .

### Exercice 4 : INTERPRÉTATION ÉNERGÉTIQUE DU FACTEUR DE QUALITÉ

On considère le circuit suivant dans lequel  $e(t) = E$  si  $t < 0$  et  $e(t) = 0$  si  $t \geq 0$ . Avec  $R = 100\ \Omega$ ,  $L = 1,00\ \text{H}$  et  $C = 1,00\ \mu\text{F}$ .



- Pour  $t > 0$ , montrer que l'équation différentielle satisfaite par la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur s'écrit

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad (1)$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ .

- Montrer que la tension  $u_C(t)$  peut s'écrire :

$$u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad (2)$$

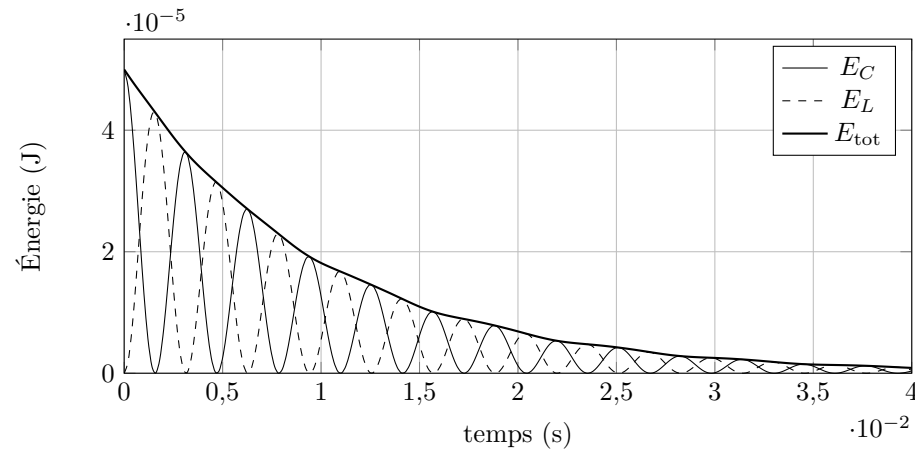
avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  et  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ .

- Déterminer les valeurs de  $A$  et  $B$ .
- Montrer qu'on peut faire l'approximation :

$$u_C(t) \approx E e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = -\omega_0 C E e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t) \quad (3)$$

On conservera cette approximation dans la suite du problème.

- On représente ci-dessous l'évolution de l'énergie électrique totale  $E_{\text{tot}}$ , de l'énergie  $E_C$  stockée dans le condensateur et de l'énergie  $E_L$  stockée dans la bobine.



Commenter le graphique ci-dessus.

- Exprimer l'énergie électrique  $E_C(t)$  de l'oscillateur en fonction de  $t$ .
- Montrer que la variation relative d'énergie sur une période est inversement proportionnelle à  $Q$  :

$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} \propto \frac{1}{Q} \quad (4)$$

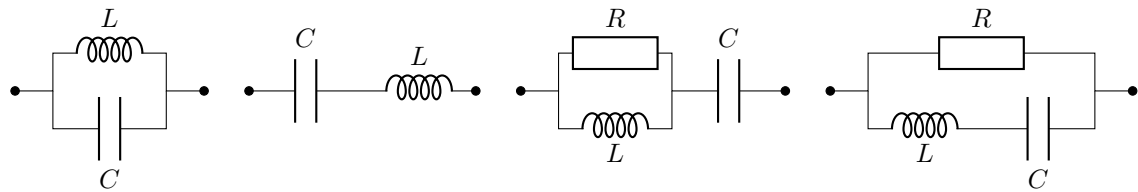
On donne le développement limité  $e^x \approx 1 + x$  si  $x \ll 1$ .

#### Exercice 5 : ANALOGIE ENTRE OSCILLATEUR MÉCANIQUE ET OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE

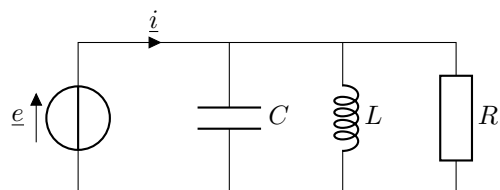
- On considère une masse  $m$  accrochée à un ressort de raideur  $k$  et astreinte à se déplacer suivant un axe  $x$  horizontal. Déterminer l'équation différentielle de son mouvement.
- Écrire l'équation différentielle satisfaite par la charge  $q$  portée par le condensateur dans un circuit comportant un condensateur de capacité  $C$  et une bobine d'inductance  $L$  branchés en parallèle.
- Expliciter l'analogie qui existe entre les oscillateurs mécanique et électrique.

#### Exercice 6 : ASSOCIATIONS D'IMPÉDANCES COMPLEXES

Calculer l'impédance complexe équivalente des dipôles suivants :



#### Exercice 7 : CIRCUIT RLC PARALLÈLE EN RÉGIME FORCÉ

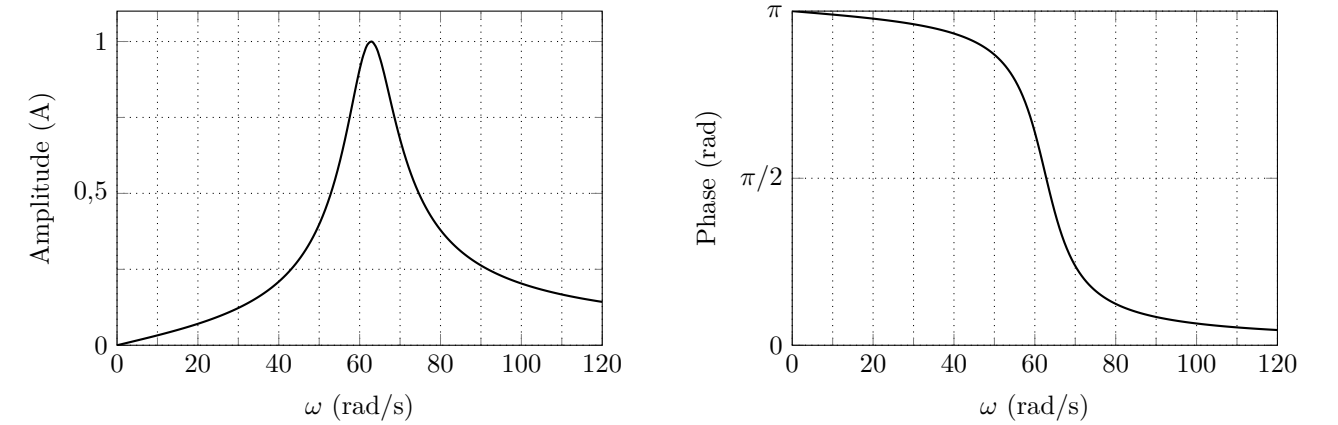


On étudie le circuit ci-contre où le générateur fournit une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .

- À l'aide de la méthode des complexes, déterminer l'intensité complexe  $\underline{i}$  en fonction de  $\underline{e}$ . Faire apparaître la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  du circuit.
- Que vaut l'amplitude de l'intensité ?
- Que vaut le déphasage  $\phi$  entre la tension  $\underline{e}$  et l'intensité  $\underline{i}$  ?
- La tension réelle est  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . Écrire l'expression de l'intensité réelle.

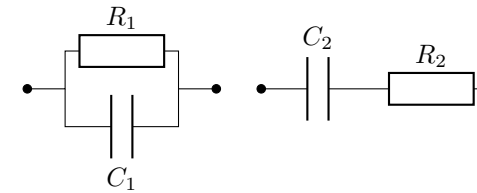
#### Exercice 8 : DÉTERMINER LES PARAMÈTRES D'UN OSCILLATEUR

Les graphiques ci-dessous montrent l'amplitude et la phase d'un oscillateur en fonction de la pulsation de l'excitation.



- Déterminer graphiquement la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  de cet oscillateur.
- Quelles sont les valeurs des composants que l'on doit choisir pour fabriquer cet oscillateur avec un circuit RLC série ( $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ) ?
- Quel constante de raideur de ressort doit-on choisir pour faire osciller une masse  $m = 1 \text{ g}$  à la fréquence  $\omega_0$  ? On pourra retrouver la pulsation propre d'un système {masse + ressort} par analyse dimensionnelle.

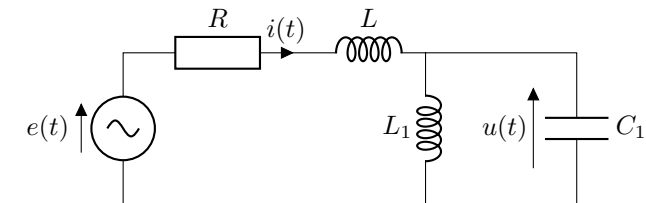
#### Exercice 9 : ÉQUIVALENCE DE COMPOSANTS



Les deux dipôles suivants sont utilisés dans un circuit en régime sinusoïdal à la fréquence  $\omega$ . Exprimer  $R_2$  et  $C_2$  en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et  $\omega$  pour que les deux dipôles soient équivalents.

#### Exercice 10 : IMPÉDANCE COMPLEXE D'UN CIRCUIT

Une source de tension  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  alimente un circuit composé d'une bobine réelle ( $R, L$ ) en série avec l'association en parallèle d'une bobine d'inductance  $L_1$  et d'un condensateur de capacité  $C_1$ . La bobine est parcourue par un courant d'intensité  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ .



- Montrer que l'impédance complexe du circuit peut se mettre sous la forme

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{avec} \quad X = L\omega \left( \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \quad (1)$$

Donner les expressions de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

- En déduire les expressions de  $I_m$  et  $\varphi$  en fonction de  $E_m$ ,  $R$  et  $X$ .
- Déterminer de même l'amplitude et la phase de la tension  $u$ .