DS6 : Mécanique du point et chimie

- Durée : 4h.
- La calculatrice est autorisée.
- Chaque réponse doit être justifiée.
- Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : Lancer de poids

Une athlète de hauteur H bras levé, lance un poids de masse m avec une vitesse initiale v_0 située dans le plan (O, x, y), sous l'angle α par rapport à l'horizontale. Le but de ce problème est d'étudier la modélisation d'un lancer puis de déterminer les conditions du meilleur lancer. Les valeurs numériques relatives à ce problème sont données en fin d'énoncé.

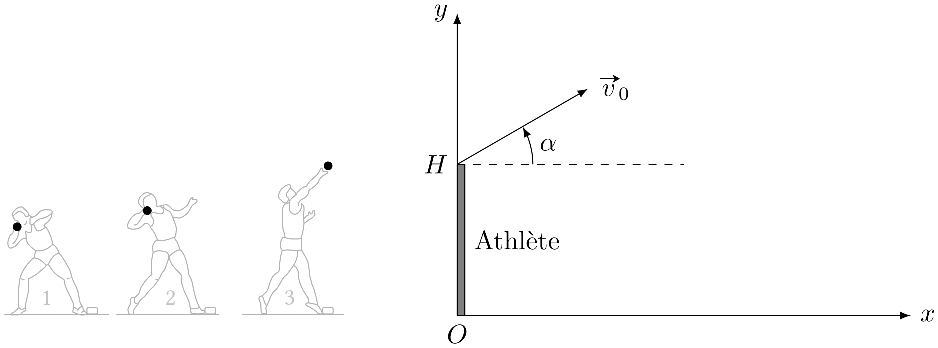

Figure 1 – Les trois phases du lancer de poids et la modélisation mécanique pour l'étude du mouvement.

La surface de la Terre, horizontale et plane, est confondue avec le plan (O, x, z). On étudie le mouvement du poids dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que le poids n'est soumis qu'à la force de pesanteur lorsqu'il a quitté la main de l'athlète au temps $t = 0\,\text{s}$. On négligera les frottements de l'air.

1. Déterminer les équations différentielles satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$ pour $t > 0$.
2. Quelle est la nature de la trajectoire suivant l'axe x ? Suivant l'axe y ?
3. Déterminer les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$.
4. Au sommet S de la trajectoire, donner la valeur de la composante verticale de la vitesse du poids. Exprimer en fonction de v_0, g et α, la durée T_S nécessaire pour que le poids atteigne le sommet de sa trajectoire.

On note (x_S, y_S) les coordonnées du sommet de la trajectoire du poids.

5. Établir les expressions de x_S et y_S en fonction de v_0, g, H et α.
6. Faire les applications numériques de T_S, x_S et y_S pour $\alpha = 30°$.

On cherche la valeur α_m de l'angle α qui permet de faire le meilleur lancer pour une vitesse v_0 donnée. On suppose α compris entre 0 et $\pi/2$.

7. À partir des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement, exprimer l'équation $y(x)$ de la trajectoire du poids.
8. Établir l'équation du second degré satisfaite par la coordonnée x_C du point de chute du poids sur le sol. On mettra cette équation sous la forme
$$Ax_C^2 + Bx_C + C = 0 \tag{1}$$
avec $A = \frac{g}{2v_0^2}$, B et C étant des paramètres ne dépendant que de H et α à déterminer.

Une étude de cette équation (non demandée [1]) permet d'exprimer la valeur maximale de x_C, notée x_{Cm} qui correspond au meilleur lancer. On trouve :
$$x_{Cm} = \frac{2H\sin(\alpha_m)\cos(\alpha_m)}{\cos^2(\alpha_m) - \sin^2(\alpha_m)} = H\tan(2\alpha_m) \tag{2}$$

1. Si vous avez fini tout le DS et qu'il vous reste du temps, vous pouvez essayer ! Avec un peu de chance et beaucoup de persévérance, vous pouvez espérer récolter quelques points bonus...

En utilisant l'équation de la trajectoire avec la relation entre α_m et x_{Cm}, on peut établir la relation (toujours pas demandée !)

$$\tan^2(\alpha_m) = \frac{1}{1+aH} \quad \text{avec} \quad a = \frac{2g}{v_0^2} \tag{3}$$

9. Montrer par une analyse dimensionnelle que l'expression de a conduit bien à une dimension correcte pour cette grandeur.
10. Exprimer x_{Cm} en fonction de $\tan^2(\alpha_m)$, puis établir l'expression

$$x_{Cm} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gH} \tag{4}$$

11. Comment la taille de l'athlète influence-t-elle la portée du meilleur lancer possible ?
12. Application numérique : Déterminer α_m et x_{Cm} à partir des données du problème. Comparer le résultat au record du monde féminin de lancer de poids qui est actuellement de 22,63 m (Natalya Lisovskaya 1987). Comment peut-on expliquer la différence entre la valeur calculée et la valeur expérimentale ?

Données :

- Masse du poids : $m = 4{,}0\,\mathrm{kg}$
- Vitesse du lancer : $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Gravité terrestre : $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
- Hauteur du lancer : $H = 2{,}0\,\mathrm{m}$

Exercice 2 : Pourquoi le ciel est-il bleu ?

Pour expliquer la couleur bleue du ciel (lorsqu'aucun nuage ne vient la cacher), nous allons considérer que l'atmosphère est constituée d'atomes d'hydrogène individuels et nous allons utiliser un modèle simplifié de ces atomes :

- Le noyau (proton) est fixe dans le référentiel d'étude que l'on suppose galiléen. L'électron, de charge $q_e = -e$ et de masse m se trouve à une distance r du noyau ;
- l'électron subit, de la part du noyau, une force électrostatique attractive $\vec{F}_A = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_x$;
- l'électron subit, de la part du noyau, une force répulsive de la forme $\vec{F}_R = \dfrac{A}{r^3}\vec{e}_x$;
- l'électron est freiné par une force de frottement de type fluide, proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -h\vec{v}$, avec h une constante.

On considère également que l'électron ne peut se déplacer que dans la direction $\vec{e}_x$ fixe dans le référentiel d'étude. Les valeurs numériques relatives à ce problème sont données en fin d'énoncé.

1. Expérimentalement, on trouve que, dans l'atome d'hydrogène, l'électron (situé au point M) est séparé en moyenne d'une distance a du noyau (situé à l'origine O du repère). Dans notre modèle simplifié, on considère qu'au repos, l'électron se trouve immobile à une distance $r = a$ de O. En déduire l'expression de A en fonction de a, e, et ε_0.

On note $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_R$, la force totale subie par l'électron lorsqu'il est au repos à une distance r du noyau. On suppose que l'électron ne se déplace jamais très loin de sa position d'équilibre, c'est-à-dire que $r \approx a$, que l'on écrira sous la forme $r = a + x$ avec $x \ll a$.

2. Montrer que dans ces conditions, la force totale subie par l'électron, de la part du noyau, se met sous la forme

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x \tag{1}$$

   On donnera l'expression de k en fonction de e, ε_0 et a. On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 suivant : $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ pour $x \ll 1$. À quel type de force classique cette forme correspond-t-elle ?
3. Calculer la valeur numérique de k.
4. Donner l'expression de la force $\vec{f}$ en fonction de $x(t)$.
5. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$. Quel type d'équation obtient-on ? La mettre sous forme canonique pour faire apparaitre une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q dont on donnera les expressions en fonction de h, k (défini dans l'équation 1) et m (la masse de l'électron).

6. Expérimentalement, on trouve que le facteur de qualité est de l'ordre de $Q \approx 10^6$. En déduire une estimation de la valeur de h.

On suppose maintenant que l'atome d'hydrogène étudié reçoit une onde lumineuse de pulsation ω, caractérisée par un champ électrique $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$. La force électrique subie par une charge q dans un champ électrique $\vec{E}$ est $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

7. En déduire la nouvelle équation différentielle satisfaite par le déplacement $x(t)$ de l'électron.
8. En régime forcé, le déplacement $x(t)$ de l'électron est de la forme
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{2}$$
Déterminer les expressions de X_m et φ en fonction de ω, ω_0, Q, E_0, m et e.
9. Calculer les valeurs ω_r et ω_b de ω pour (respectivement) la lumière rouge et la lumière bleue.
10. Donner une estimation de la valeur numérique de ω_0. En comparant cette valeur à celles de ω_b et ω_r, simplifier les expressions de X_m et φ pour la lumière visible (on pourra montrer que ce sont des constantes qui ne dépendent pas de ω).

Lorsque l'électron oscille à la pulsation ω, il diffuse dans toutes les directions (mais surtout dans le plan perpendiculaire à sa direction d'oscillation) un rayonnement électromagnétique dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération.
On considère que le Soleil émet des ondes lumineuses avec une amplitude E_0 constante sur tout le spectre visible. On note P_r et P_b les puissances diffusées par un atome d'hydrogène respectivement en lumière rouge et en lumière bleue.

11. Donner l'expression de l'amplitude de l'accélération de l'électron en fonction de e, E_0, m, ω_0 et ω.
12. Déterminer l'expression du rapport $\eta = \frac{P_b}{P_r}$ des puissances diffusées par l'atome d'hydrogène en fonction des longueurs d'onde λ_b et λ_r des lumières bleue et rouge. Calculer la valeur numérique de η.
13. Utiliser les résultats obtenus pour expliquer pourquoi le ciel est bleu lorsqu'il fait jour et pourquoi le Soleil couchant prend une couleur rouge. On pourra faire un schéma pour appuyer l'explication.

Données :

— Rayon de l'atome d'hydrogène : $a = 25\,\text{pm}$;
— Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\text{F}\,\text{m}^{-1}$;
— Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$;
— Masse de l'électron : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$;

Exercice 3 : Dosage d'un mélange d'acides

L'aluminium est utilisé comme adjuvant dans la plupart des vaccins (tétanos, coqueluche, hépatite B ...). Son rôle est d'activer la production d'anticorps. Cependant, une surdose de ce métal peut s'avérer nocive pour des personnes fragiles. Il est donc important de savoir sous quelle forme se trouve l'aluminium dans les vaccins afin de pouvoir le doser.
Une méthode possible de titrage de l'aluminium en solution aqueuse consiste à acidifier la solution à titrer par de l'acide chlorhydrique afin de convertir l'aluminium en ions Al^{3+}. Puis, on titre cette solution acidifiée d'ions Al^{3+} par de la soude. Les mesures sont réalisées à une température de 298 K.

Données :

— Masses molaires : $M(\text{O}) = 16{,}0\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$, $M(\text{H}) = 1{,}0\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$, $M(\text{Al}) = 27{,}0\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$, $M(\text{Cl}) = 35{,}5\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$

Titrage 1 : titrage d'une solution d'acide chlorhydrique

Un volume $V_0 = 20\,\text{m}\ell$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire C_1 est titré par une solution de soude de concentration $C = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mol}\,\ell^{-1}$. Le titrage est suivi par pH-métrie. La courbe est donnée sur la figure 1 en fin d'exercice.

1. Écrire l'équation de réaction mise en jeu lors de ce titrage et calculer la constante d'équilibre associée.
2. Déterminer graphiquement le volume équivalent V_e.
3. En déduire la valeur de la concentration molaire C_1 de la solution d'acide chlorhydrique.
4. L'équivalence aurait pu être repérée à l'aide d'un indicateur coloré acido-basique. En vous aidant du tableau ci-dessous, proposer, en justifiant, un indicateur coloré adapté à ce titrage et préciser le changement de couleur observé.

Indicateur coloré acido-basique	Couleur de la forme acide	Zone de virage	Couleur de la forme basique
Bleu de bromophénol	Jaune	3,0 – 4,6	Violet
Hélianthine	Rouge	3,1 – 4,4	Jaune
Vert de bromocrésol	Jaune	4,0 – 5,6	Bleu
Bleu de bromothymol	Jaune	6,2 – 7,6	Bleu
Phénolphtaléine	Incolore	8,0 – 10,0	Rouge

Titrage 2 : titrage d'une solution acidifiée d'ions Al^{3+}

Une masse m de chlorure d'aluminium hexahydraté $AlCl_3\,,6\,H_2O$ solide, est placée dans une fiole jaugée de $V_0 = 20\,\mathrm{m}\ell$. On ajoute un peu de solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire C_1. On agite jusqu'à dissolution totale du solide puis on complète avec la même solution d'acide chlorhydrique, jusqu'au trait de jauge. L'équation de réaction de dissolution du solide en milieu acide est la suivante :

$$\mathrm{AlCl_3, 6\,H_2O\,(s)} \rightleftharpoons \mathrm{Al^{3+}(aq) + 3\,Cl^-(aq) + 6\,H_2O(\ell)} \tag{1}$$

On appellera $(\mathscr{S})$ la solution obtenue. Dans cette solution, on notera :
- C_1 la concentration molaire en ions H_3O^+ ;
- C_2 la concentration molaire en ions Al^{3+}(aq).

Le volume $V_0 = 20\,\mathrm{m}\ell$ de solution $(\mathscr{S})$ est titré par une solution de soude de concentration $C = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}$. Le titrage est suivi par pH-métrie. Au cours du titrage, on remarque l'apparition d'un précipité blanc de $Al(OH)_3$ (s). La courbe est donnée sur la figure 1 en fin d'exercice.

5. Écrire les équations des deux réactions mises en jeu lors de ce titrage.
6. Quels est l'espèce chimique qui est dosée la première ? Justifier la réponse.
7. Déterminer la concentration molaire en ions Al^{3+} dans la solution $(\mathscr{S})$.
8. Quelle masse m de chlorure d'aluminium hexahydraté a servi à la préparation de la solution $(\mathscr{S})$?

Par l'exploitation du point anguleux D, on souhaite retrouver la valeur du produit de solubilité K_s de l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$(s)

9. Donner l'équation de réaction dont la constante d'équilibre est le produit de solubilité de l'hydroxyde d'aluminium K_s.
10. Déterminer la concentration molaire en ions HO^-(aq) dans le bécher au point D.
11. En tenant compte de la dilution, évaluer la concentration molaire en ions Al^{3+} dans le bécher au point D.
12. En déduire une valeur à 298 K du produit de solubilité K_s de l'hydroxyde d'aluminium.
13. En déduire la valeur du pK_a du couple $Al^{3+}/Al(OH)_3$ (On écrira la réaction de dissociation de l'acide dans l'eau avec un coefficient stœchiométrique égal à 1 devant H_3O^+). Commenter.

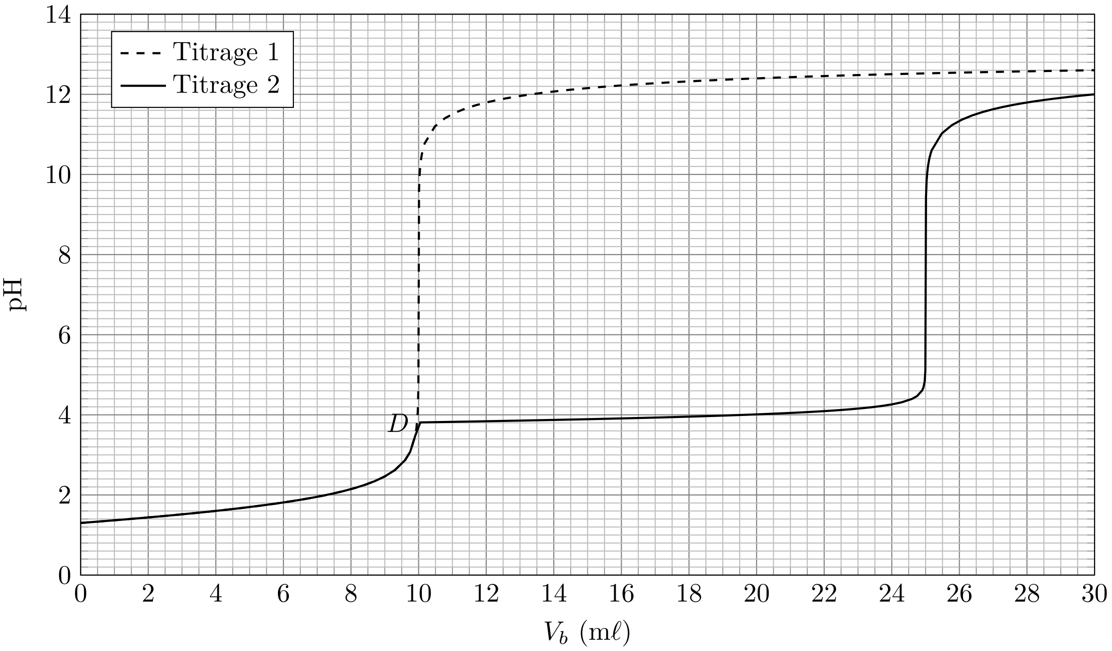

Figure 1 – Courbes de titrage