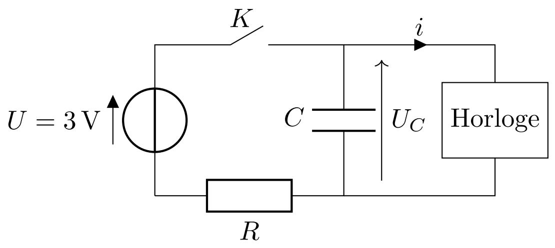
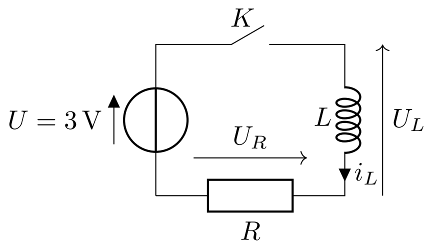
TD3 : Circuits linéaires du premier ordre – corrigé

Exercice 1 : Réveil

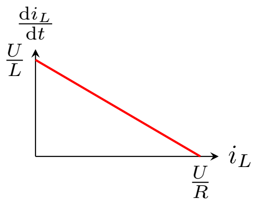


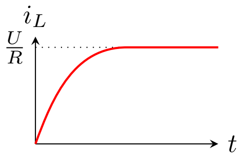
1. En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et le courant qui le travers est nul : $i_C = 0$. L'application de la loi des mailles donne : $U = U_C + U_R = U_C + Ri$. On en tire directement :
$$U_C = U - Ri.$$
2. Pour que U_C soit proche de la tension du générateurs, il faut choisir une résistance R petite, et plus précisément, il faut que $R \ll \frac{U}{i}$
3. Lorsqu'on débranche le réveil, l'alimentation électrique disparaît et le courant i qui alimente l'horloge provient uniquement du condensateur. La tension $U_C(t)$ va progressivement diminuer jusqu'à ce qu'elle soit insuffisante pour faire fonctionner l'horloge.
4. La tension $U_C(t)$ satisfait à l'équation différentielle : $i = -C\frac{dU_C}{dt}$. Comme l'intensité i est constante, on trouve immédiatement la solution qui tient compte de la condition initiale $U_C(0) = U$: $U_C(t) = U - \frac{i}{C}t$. La tension diminue linéairement avec le temps à $\frac{i}{C}$ volts par seconde.
5. On détermine l'instant t_l en résolvant l'équation : $U_C(t_l) = U_l$ et on obtient immédiatement $t_l = \frac{C}{i}(U - U_l)$
6. On trouve $t_l = 6 \times 10^5\,\text{s}$ soit environ 167 heures ou approximativement une semaine.

Exercice 2 : Surtension aux bornes d'une bobine



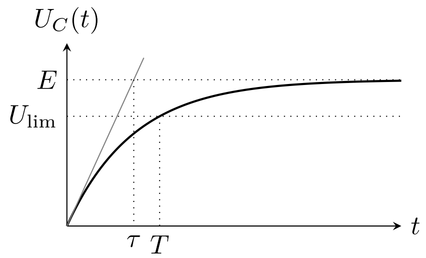
1. Au moment où l'on ferme l'interrupteur, l'intensité du courant qui circule dans la bobine est nulle. Comme l'intensité du courant qui circule dans la bobine est constante, on sait qu'à $t = 0^+$ elle sera encore nulle.
   Si on attend suffisamment longtemps on arrive en régime permanent et la bobine se comporte comme un fil. Dans ces conditions, l'intensité du courant dans le circuit est $i = U/R$.
   On en conclut que l'intensité dans la bobine va augmenter progressivement jusqu'à atteindre la valeur limite de $i = U/R$.
2. La tension aux bornes de la bobine est $U_L = L\frac{di_L}{dt}$. L'application de la loi des mailles donne : $U = U_R + U_L = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$. On obtient donc l'équation différentielle :
$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{U}{L}$$
3. L'équation différentielle obtenue à la question précédente donne directement le portrait de phase dont on déduit l'évolution de $i_L(t)$:





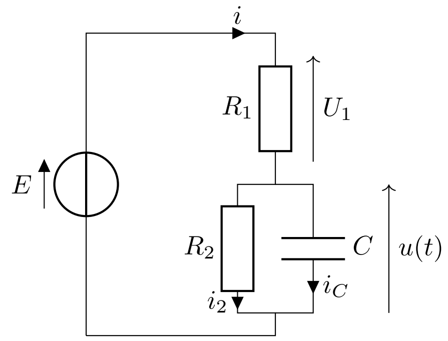
4. La résolution (habituelle) de l'équation différentielle donne
$$i_L(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$
5. Suffisamment longtemps signifie que le régime permanent est atteint donc que l'intensité est proche de sa valeur finale U/R. Il faut que $t \gg \tau$.
6. L'énergie emmagasinée par la bobine est $W_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{U}{R}\right)^2$
7. L'intensité du courant qui traverse la bobine est continue, donc lorsqu'on ouvre l'interrupteur elle ne peut pas passer instantanément à 0. L'interrupteur ne peut pas être considéré comme idéal.
8. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, l'intensité diminue extrêmement rapidement dans le circuit. Comme la tension aux bornes de L est proportionnelle à la dérivée de l'intensité, elle augmente énormément.
   Cela crée un arc électrique qui peut user les contacts de l'interrupteur avec le temps.
   La surtension aux bornes d'une bobine peut être utilisée pour convertir une tension faible vers une tension plus élevée.

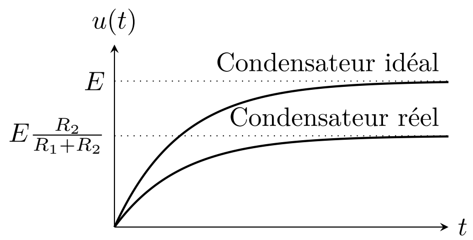
Exercice 3 : Minuterie



1. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, le condensateur va se charger par l'intermédiaire de la résistance R et la tension à ses bornes augmentera progressivement. Tant que la tension U_C reste inférieurs à U_{lim} la lampe reste allumée.
   Le temps d'allumage de la lampe dépend du temps de charge du condensateur. Il augmente avec la capacité du condensateur et avec la résistance R.
2. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, on applique la loi des mailles et on trouve $U = U_C + Ri = U_C + RC\frac{dU_C}{dt}$. Donc finalement : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{U}{RC}$
3. La résolution de l'équation différentielle donne : $U_C(t) = U\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$
4. On doit résoudre l'équation : $U_{\text{lim}} = U\left(1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)\right)$ ce qui nous donne : $T = -\tau \ln\left(1 - \frac{U_{\text{lim}}}{U}\right)$
   L'application numérique donne : $T \simeq 22\,\text{s}$

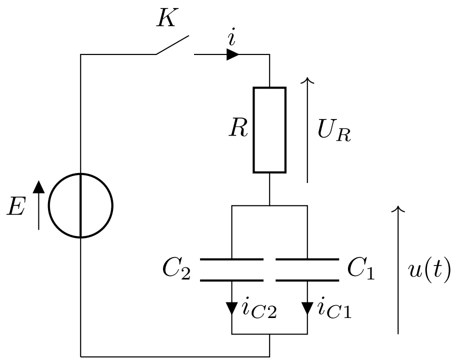
Exercice 4 : Résistance de fuite d'un condensateur





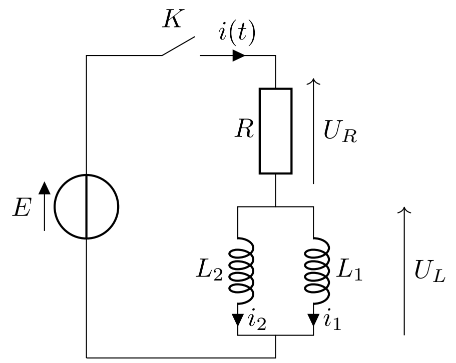
1. À $t = 0^-$ le condensateur est déchargé et la tension à ses bornes vaut 0 V. Comme la tension aux bornes du condensateur est continue, à $t = 0^+$ elle vaut toujours 0 V.
   Lorsque $t \to \infty$ on atteint le régime permanent et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. La tension à ses bornes vaut alors $u(\infty) = E\frac{R_2}{R_1+R_2}$. La tension augmente continûment de 0 à $u(\infty)$.
2. Pour un condensateur idéal $R_2 = \infty$ et la tension à ses bornes en régime permanent vaut $u(\infty) = E$.
3. La loi des mailles donne : $E = u + U_1 = u + R_1 i$. La loi des nœuds donne $i = i_2 + i_C = \frac{u}{R_2} + C\frac{du}{dt}$. Donc finalement l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ est :
$$\frac{du}{dt} + u\left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right) = \frac{E}{R_1C}$$
4. On note $\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right)$, la résolution de l'équation différentielle donne : $u(t) = u(\infty)\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)$
5. Lorsque l'alimentation est coupée, la tension aux bornes de C est : $u(t) = u(0)\exp(-t/\tau)$ avec $\tau = R_2C$. La tension est divisée par 100 lorsque $\exp(-t/\tau) = 1/100$ soit $-t/\tau = \ln(1/100) = -\ln(100)$ donc pour $t = \tau\ln(100)$. Avec $\ln(100) \simeq 5$ on trouve $t \simeq 5 \times 10^4\,\text{s}$

Exercice 5 : Associations de condensateurs



1. La loi des mailles donne $E = U_R + u = Ri + u$. Et la loi des nœuds donne $i = i_{C1} + i_{C2} = C_1\dfrac{du}{dt} + C_2\dfrac{du}{dt} = (C_1 + C_2)\dfrac{du}{dt}$. Donc finalement :
$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad C = C_1 + C_2$$
2. Cela montre que les deux condensateurs en parallèle sont équivalents à un seul condensateur de valeur $C = C_1 + C_2$.

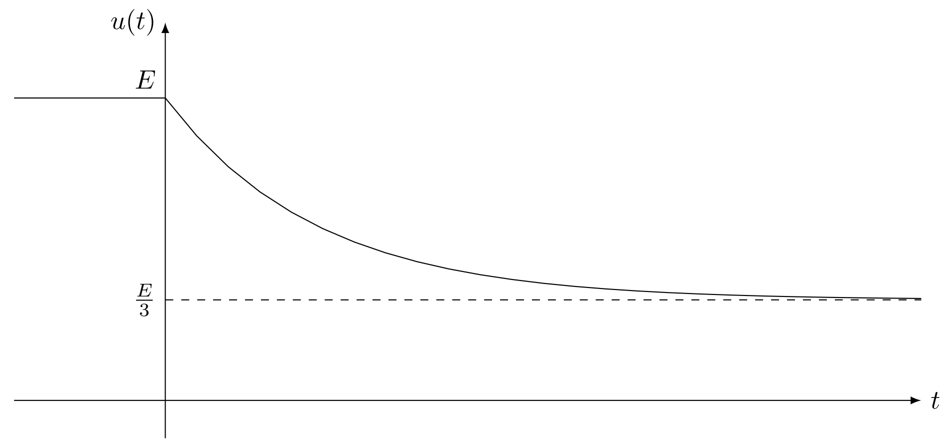
Exercice 6 : Associations de bobines



1. La loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2$. On peut dériver cette relation par rapport à t pour obtenir $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{U_L}{L_1} + \dfrac{U_L}{L_2} = U_L\left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right)$.
Si on note $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}$ on a $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{U_L}{L}$, ou $U_L = L\dfrac{di}{dt}$
et la loi des mailles $E = U_L + U_R = L\dfrac{di}{dt} + Ri$
2. Cela montre que les deux bobines en parallèle sont équivalentes à une bobine d'inductance L telle que $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}$

Exercice 7 : Régime transitoire

1. À $t = 0^-$, l'interrupteur est ouvert depuis suffisamment longtemps pour considérer que l'on a un régime permanent. Ainsi, $i_1(0^-) = 0$. (le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert). Comme de plus K est ouvert : $i_2(0^-) = 0$. D'après la loi des nœuds, on en déduit que $i(0^-) = 0$ et d'après la loi d'additivité des tensions, on a alors $E = u_R(0^-) + u(0^-) = Ri(0^-) + u(0^-)$ soit $u(0^-) = E$.
2. La tension aux bornes d'un condensateur est continue, on a donc $u(0^+) = u(0^-) = E$. D'après la loi d'Ohm appliquée à la résistance $R/2$, on a $u(0^+) = R/2 i_2(0^+) \Leftrightarrow i_2(0^+) = 2E/R$. D'après la loi d'additivité des tensions, on a $E = u_R(0^+) + u(0^+) = Ri(0^+) + E$ d'où $i(0^+) = 0$. Enfin, d'après la loi des nœuds $i_1(0^+) = i(0^+) - i_2(0^+) \Leftrightarrow i_1(0^+) = -\frac{2E}{R}$.
3. Quand t tend vers $+\infty$ le régime permanent est établi. On a donc $i_1(+\infty) = 0$. Le circuit est équivalent à une résistance $R_{eq} = R + R/2 = 3R/2$ car les deux résistances sont alors en série. On a donc
$$i(+\infty) = i_2(+\infty) = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{2E}{3R} \tag{1}$$
On en déduit avec la loi d'Ohm
$$u(+\infty) = \frac{R}{2} \times \frac{2E}{3R} = \frac{E}{3} \tag{2}$$
4. On a $i = i_1 + i_2$ or $i_2 = 2u/R$ (loi d'Ohm) et $i_1 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On obtient finalement :
$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2u}{R} \tag{3}$$
5. D'après la loi des mailles, on a $E = u_R + u = Ri + u \Leftrightarrow i = \frac{E-u}{R}$. Ainsi,
$$\frac{E}{RC} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{3u}{RC} \tag{4}$$
On pose $\tau = \frac{RC}{3}$ et il vient :
$$\frac{E}{3\tau} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} \tag{5}$$
6. La solution de cette équation différentielle s'écrit
$$u(t) = u_h(t) + u_p\,, \tag{6}$$
avec $u_h(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ et $u_p = \text{cte} = \frac{E}{3}$ d'où
$$u(t) = \frac{E}{3} + Ke^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$
D'après l'étude des conditions initiales faite précédemment, on a $u(0^+) = E$ d'où
$$\frac{E}{3} + K = E \Leftrightarrow K = \frac{2E}{3} \tag{8}$$
Finalement, on a
$$u(t) = \frac{E}{3}(1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{9}$$
L'allure de $u(t)$ est la suivante :



Attention : à la valeur en $t = 0^-$, à la continuité en 0, à l'asymptote et à l'allure exponentielle décroissante.