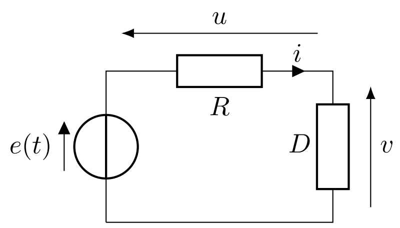
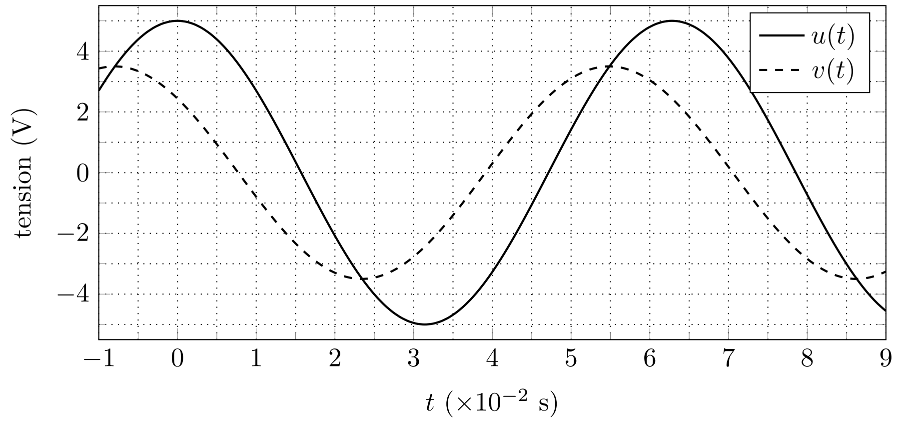
Régime sinusoïdal forcé – supplément

Exercice 1 : Dipôle inconnu

Dans le montage suivant, le GBF délivre une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω, R est une résistance et D un dipôle inconnu. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ les tensions aux bornes respectivement de R et D.



On visualise à l'oscilloscope $v(t)$ et $u(t)$ et on obtient le graph suivant :



On cherche à utiliser ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de D sachant de $R = 100\,\Omega$.

1. Déterminer les amplitudes U_m et V_m.
2. Déterminer la pulsation ω des signaux mesurés.
3. La tension v est-elle en avance ou en retard sur la tension u ? En déduire le signe de φ.
4. Déterminer graphiquement le décalage temporel Δt entre les tensions u et v. En déduire la valeur de φ.

On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance complexe du dipôle D.

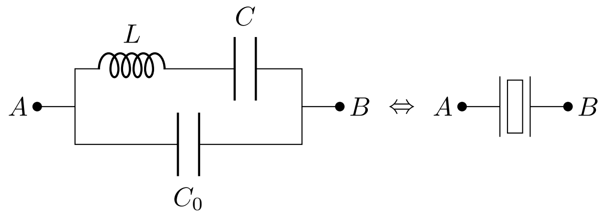
5. Exprimer l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de la tension complexe $\underline{u}$ et de R.
6. Donner la relation entre la tension complexe $\underline{v}$, $\underline{i}$ et $\underline{Z}$. En déduire l'expression de $\underline{Z}$ en fonction des tensions complexes $\underline{u}$ et $\underline{v}$ et de R.
7. Montrer que le module et l'argument de $\underline{Z}$ sont donnés par :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{RV_m}{U_m} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}) = \varphi$$

8. Exprimer X et Y en fonction de Z et de φ, en déduire les valeurs numériques de X et de Y. Quel(s) composants peut-on utiliser pour fabriquer le dipôle D ?

Exercice 2 : Le quartz

Dans cette exercice on souhaite étudier un quartz piezo-électrique. C'est un dipôle électrique composé d'un morceau de cristal de quartz disposé entre deux surfaces conductrices. Lorsqu'une tension est appliquée entre les deux surfaces, le cristal de quartz se déforme, induisant une modification de l'impédance du dipôle. Comme le cristal de quartz possède une fréquence de résonnance mécanique, le dipôle ainsi formé présente une résonnance électrique qui permet de l'utiliser pour fabriquer des oscillateurs très précis utilisés par exemple dans les horloges.
On modélise le quartz par le dipôle électrique ci-dessous :



où on notera $C = aC_0$ avec a une constante Dans la pratique $a \ll 1$. On donnera les réponses en fonction de L, C_0, a et ω.

1. Quel est le composant équivalent au quartz en régime permanent ?
2. Montrer que l'impédance équivalente du quartz à la pulsation ω est :

$$\underline{Z} = j\frac{aLC_0\omega^2 - 1}{(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3}$$

On pourra utiliser cette expression dans les questions suivantes même si elle n'a pas été démontrée.

3. Exprimer le module $Z = |\underline{Z}|$ et l'argument φ de $\underline{Z}$.
4. Donner les limites de Z lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.
5. Exprimer la pulsation ω_1 pour laquelle Z est nulle et la pulsation ω_2 pour laquelle $Z \to \infty$. Montrer que $\omega_2 = \sqrt{1+a}\,\omega_1$. Comment se comporte le quartz pour $\omega = \omega_1$ et pour $\omega = \omega_2$?
6. Représenter graphiquement $Z(\omega)$.
7. Que vaut la phase φ de $\underline{Z}$ dans les domaines suivants : $\omega < \omega_1$, $\omega_1 < \omega < \omega_2$ et $\omega > \omega_2$?
8. Représenter graphiquement $\varphi(\omega)$.

Exercice 3 : Dipôle inconnu

1. On trouve graphiquement $\boxed{U_m = 5\,\text{V} \text{ et } V_m = 3{,}5\,\text{V}}$.
2. La période du signal est $\boxed{T = 6{,}3 \times 10^{-2}\,\text{s}}$ et donc la pulsation est $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\,\text{rad/s}}$.
3. La tension v augmente avant la tension u donc elle est en avance et $\boxed{\varphi \text{ est positif}}$.
4. Graphiquement on trouve $\boxed{\Delta t = 0{,}8 \times 10^{-2}\,\text{s}}$ et le déphasage est $\boxed{\varphi = 2\pi\frac{0.8}{6.3} \simeq 0{,}8\,\text{rad}}$.
5. La loi d'Ohm donne directement $\boxed{\underline{u} = R\underline{i}}$.
6. Aux bornes du dipôle D on a $\underline{v} = \underline{Z}\underline{i}$. En utilisant l'expression de $\underline{i}$ de la question précédente, on obtient : $\boxed{\underline{Z} = R\frac{\underline{v}}{\underline{u}}}$.
7. La question précédente donne directement $\boxed{|\underline{Z}| = R\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = R\frac{V_m}{U_m} = 70\,\Omega}$. Et $\arg(\underline{Z}) = \arg(R) + \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{u}) = \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{u}) = \varphi$.
8. On a $X = Z\cos\varphi = 48{,}8\,\Omega$ et $Y = Z\sin\varphi = 50{,}2\,\Omega$. Pour fabriquer ce dipôle on peut utiliser une résistance de $48{,}8\,\Omega$ en série avec une bobine d'inductance L telle que $L\omega = 50{,}2\,\Omega$ soit $L \simeq 0{,}5\,\text{H}$ (C'est une grosse bobine !).

Exercice 4 : Le quartz

1. En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Le quartz est donc équivalent à $\boxed{\text{un interrupteur ouvert}}$ en régime permanent.
2. L'impédance $\underline{Z_1}$ équivalente au dipôle formé par L et C est : $\underline{Z_1} = \dfrac{1}{jC\omega} + jL\omega$. L'impédance $\underline{Z}$ équivalente à C_0 et $\underline{Z_1}$ en parallèle est :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + jC_0\omega = \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} + jC_0\omega = \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2} + jC_0\omega \quad (1)$$

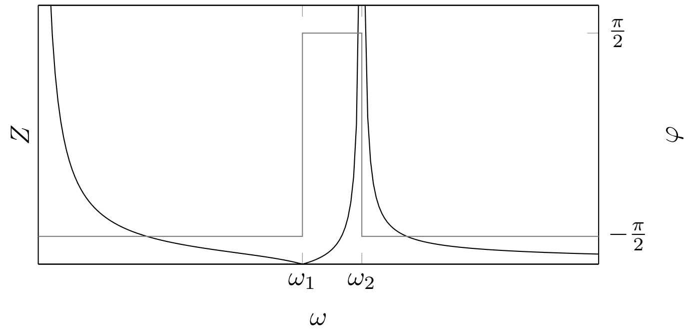
$$= j\frac{(C + C_0)\omega - LC\omega^2}{1 - LCC_0\omega^2} = j\frac{(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3}{1 - aLC_0^2\omega^2} \quad (2)$$

En prenant l'inverse, on trouve finalement l'expression demandée de l'impédance Z :

$$\boxed{\underline{Z} = j\frac{aLC_0\omega^2 - 1}{(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3}} \quad (3)$$

3. $|\underline{Z}| = \dfrac{|aLC_0\omega^2 - 1|}{|(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3|}$ et $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ selon le signe de $\dfrac{aLC_0\omega^2 - 1}{(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3}$ (S'il est positif, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ sinon $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$)
4. $\boxed{\lim\limits_{\omega\to 0} Z = \infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\omega\to\infty} Z = 0}$.
5. Z s'annule pour $1 - aLC_0\omega_1^2 = 0$ soit $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{aLC_0}}}$ et $Z \to \infty$ lorsque le dénominateur s'annule donc pour $(a+1)C_0\omega_2 - aLC_0^2\omega_2^3 = 0$ soit $\boxed{\omega_2 = \sqrt{(a+1)\dfrac{1}{aLC_0}} = \sqrt{a+1}\,\omega_1}$

   Pour $\omega = \omega_1$, le quartz se comporte comme un fil, et pour $\omega = \omega_2$ il se comporte comme un interrupteur ouvert.
6. Représentation schématique de $Z(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$



7. — Lorsque $\boxed{\omega < \omega_1,\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}}$
   — Lorsque $\boxed{\omega_1 < \omega < \omega_2,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}}$
   — Lorsque $\boxed{\omega > \omega_2,\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}}$
8. Voir figure ci-dessus.