TD17 : Forces centrales

Exercice 1 : La planète Mars

On donne les valeurs suivantes

Constante de gravitation	$G = 6{,}6743 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$
Rayon terrestre	$R_T = 6378\,\mathrm{km}$
Rayon de l'orbite de la Terre	$R_{TS} = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$
Durée du jour sidéral	$T_0 = 86\,164\,\mathrm{s}$
Période de rotation de la Terre autour du Soleil	$T_T = 365\,\mathrm{jours}$
Période de rotation de Mars autour du Soleil	$T_M = 1{,}9\,\mathrm{ans}$
Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

1. Calculer le rayon R_{MS} de l'orbite de Mars autour du Soleil.
2. Quand le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cette ordre, le diamètre apparent de Mars vu de la Terre est de $18{,}2''$. Calculer le rayon R_M de Mars.
3. Mars possède deux satellites : Phobos et Déimos. Déimos a une orbite circulaire de rayon $R = 24 \times 10^3\,\mathrm{km}$ qu'il décrit en $T = 30\,\mathrm{h}\ 20\,\mathrm{min}$. Calculer la masse de la planète Mars.
4. On veut envoyer un vaisseau de masse $m = 10\,\mathrm{kg}$ dans l'espace depuis la surface de la planète Mars. Déterminer l'énergie potentielle correspondant à la force de gravitation.
5. En déduire la vitesse minimal v_1 à fournir au vaisseau pour qu'il quitte l'attraction de Mars.
6. Déterminer également la vitesse minimale v_2 à fournir au vaisseau pour qu'il quitte le système solaire.

Exercice 2 : Comète de Halley

La période de la comète de Halley est $T = 76\,\mathrm{ans}$, la distance du périhélie (point de la trajectoire le plus proche du Soleil) est $0{,}59\,\mathrm{au}$ ($1\,\mathrm{au} \approx 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$ est le rayon moyen de l'orbite terrestre)

1. Calculer le demi grand axe a de l'ellipse et son excentricité e ($e = c/a$ où c est la distance entre le centre de l'ellipse et l'un de ses foyers)
2. Calculer les vitesses maximale et minimale de la comète.

Exercice 3 : Trajectoire d'une comète

La Terre décrit autour du Soleil (de centre S) une orbite quasiment circulaire de rayon $r_0 = 1{,}5 \times 10^8\,\mathrm{km}$ à la vitesse moyenne $v_T = 30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Une comète C passe extrêmement près du Soleil : distance au périhélie $r_p = \alpha r_0$ avec $\alpha = 5 \times 10^{-3}$.

Des mesures précises ont montré que la trajectoire de la comète est une ellipse de grande excentricité e. On pose $e = 1 - x$ avec $x = 10^{-4}$.

On redonne l'équation polaire d'une ellipse d'excentricité e et de paramètre p :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad 0 < e < 1 \tag{1}$$

1. Calculer la vitesse maximale de la comète en supposant sa trajectoire parabolique.
2. Représenter la trajectoire en faisant figure l'aphélie A, le périhélie P ainsi que les distances $r_P = SP$ et $r_A = SA$.
3. Jusqu'à quelle distance r_a la comète va-t-elle s'éloigner du Soleil ? Évaluer sa vitesse v_a à cette distance.
4. Quelle durée τ la comète met-elle pour atteindre cette position extrême depuis le périhélie ?

Exercice 4 : Orbite de transfert de Hohman

La mise en orbite d'un satellite géostationnaire s'accomplit en trois étapes :

- d'abord on place le satellite sur une orbite circulaire basse à l'altitude z_1 (de rayon $r_1 = R_T + z_1$)
- En un point P de la première orbite, on augmente la vitesse du satellite, ce qui rend son orbite elliptique dont l'apogée A se trouve sur l'orbite géostationnaire.
- en A, à l'altitude z_2 (de rayon $r_2 = R_T + z_2$), on donne une nouvelle impulsion au satellite pour circulariser son orbite.

1. Faire un schéma sur lequel apparaissent l'orbite de basse altitude, l'orbite géostationnaire, l'orbite de transfert, les points P et A.

Les réponses aux questions suivantes seront données en fonction de la masse m_T de la Terre, de la constante de gravitation G, de la masse m du satellite et des rayons r_1 et r_2 :

2. Donner l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur les trois orbites.
3. Exprimer la variation d'énergie communiquée par le réacteur du satellite en P et en A.
4. Exprimer la durée du transit entre P et A.
5. Donner l'expression de la norme des variations de vitesse Δv_P et Δv_A qui interviennent en P et en A.

Exercice 5 : Modèle classique d'un trou noir

L'horizon d'un trou noir est la distance limite en dessous de laquelle la vitesse de libération devient supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide c. La mécanique classique ne permet évidemment pas de décrire correctement les trou noirs (vitesses de l'ordre de c), mais on peut quand même essayer...

1. La distance entre le centre du trou noir et son horizon est appelé rayon de Schwartzschild R_S. Exprimer R_S en fonction de c, G et de la masse m du trou noir.
2. Faire l'application numérique pour un trou noir ayant la masse du Soleil $m_S = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ et pour un trou noir ayant la masse de la Terre $m_T = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$. En déduire la densité minimale des ces deux trous noirs.

Exercice 6 : Expérience de Rutherford

L'expérience de Rutherford, également connue sous le nom d'expérience de la feuille d'or, menée en 1909 par Hans Geiger et Ernest Marsden sous la direction d'Ernest Rutherford, montra que la partie chargée positivement de la matière est concentrée en un espace de petit volume (maintenant appelé noyau atomique).

Dans cette expérience, on envoie un faisceau de noyaux d'hélium (particules alpha) ayant toutes la même énergie cinétique sur un mince feuille d'or. On remarque la la grande majorité des particules alpha traverse la feuille d'or en conservant leur trajectoire alors que certaines sont fortement déviées par le noyau des atomes d'or.

On modélise la situation en considérant que la particule alpha de charge $2e$ vient de l'infini avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$ et s'approche avec une paramètre d'impact b d'un noyau cible de numéro atomique Z situé en O et immobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

La trajectoire de la particule est une branche d'hyperbole représentée sur le schéma ci-dessous. On négligera le poids de la particule α.

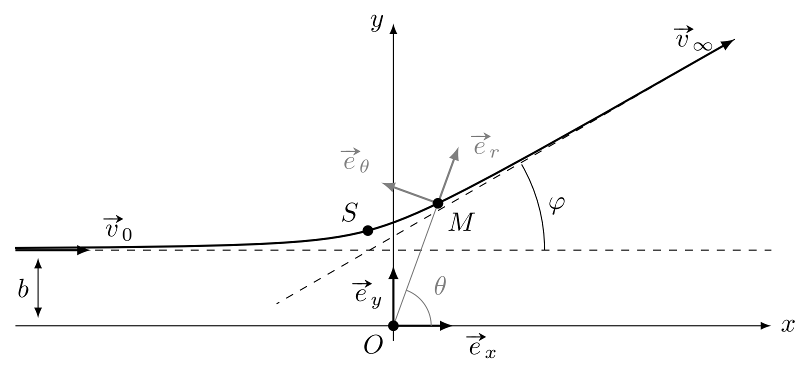

Figure 1 – Expérience de Rutherford

1. Exprimer la force électrique subie par la particule α sous la forme $\vec{F} = K/r^2\,\vec{e}_r$, et donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.

2. Montrer que l'énergie mécanique de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur en fonction des conditions initiales.
3. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur en fonction des conditions initiales. Donner l'expression de $\vec{L}_O$ au cours du temps en fonction de r et $\dot{\theta}$.
4. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^*(r) \tag{1}$$

en donnant l'expression de $E_p^*(r)$. Comment appelle-t-on cette grandeur ?

5. On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de $E_m(r_{\min})$ et en déduire

$$r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right] \tag{2}$$

6. On peut montrer que l'angle de déviation φ de la particule est donné par

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{mbv_0^2} \tag{3}$$

Montrer que la relation que lie $r_{\min}$ à φ est

$$r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1+\frac{1}{\sin(\varphi/2)}\right) \tag{4}$$

7. Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ, la distance d'approche est-elle minimale ? En déduire, dans cas, l'expression de $r_{\min}$ en fonction de K, m et v_0.
8. Sachant que l'énergie typique d'une particule α est de 5 MeV, déterminer numériquement la valeur de $r_{\min}$ et en déduire une estimation de la taille du noyau.

Exercice 7 : Précision du lancement d'un satellite géostationnaire

On souhaite placer un satellite en orbite geostationnaire en le plaçant à une distance r_0 du centre de la Terre avec une vitesse v_0 horizontale.

1. Exprimer l'énergie mécanique E_0 du satellite sur cette orbite.
2. En réalité, on place bien le satellite à une distance r_0 du centre de la Terre, mais sa vitesse est $v = v_0 + \Delta v$ avec $\Delta v \ll v$. Déterminer le demi grand axe a et l'excentricité e de l'ellipse de la trajectoire en fonction de r_0 et $\Delta v/v$ (On rappelle que $e = c/a$ où c est la distance entre le centre de l'ellipse et l'un de ses foyers)
3. Calculer l'écart relatif $\Delta T/T_0$ de la période de rotation du satellite par rapport à la période T_0 d'un satellite géostationnaire.
4. Quelle valeur de $\Delta v/v$ maximale peut-on tolérer pour un satellite géostationnaire si on veut que sa rotation apparente autour de la Terre n'excède pas un tour par an ?