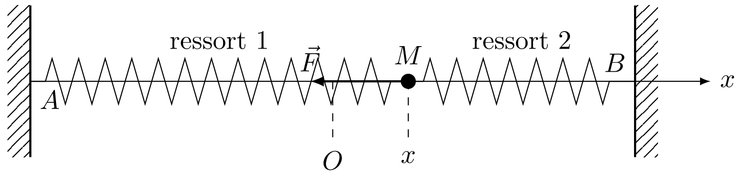
TD4 : Oscillateur harmonique – corrigé

Exercice 1 : Oscillateur à deux ressorts



1. La force $\vec{F}$ subie par la masse m lorsqu'elle est déplacée de x par rapport à sa position d'équilibre est

$$\vec{F} = (-k(\underbrace{\ell_{\text{éq}} + x}_{\text{longueur du ressort 1}} - \ell_0) + k(\underbrace{\ell_{\text{éq}} - x}_{\text{longueur du ressort 2}} - \ell_0))\vec{e}_x = -2kx\vec{e}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe $\vec{e}_x$ donne l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

2. On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$
3. La solution générale est $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Les conditions initiales sont $x(0) = x_0 = A\cos(\varphi)$, et $\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0$. On en déduit que $\varphi = 0$ et $A = x_0$. On obtient donc

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

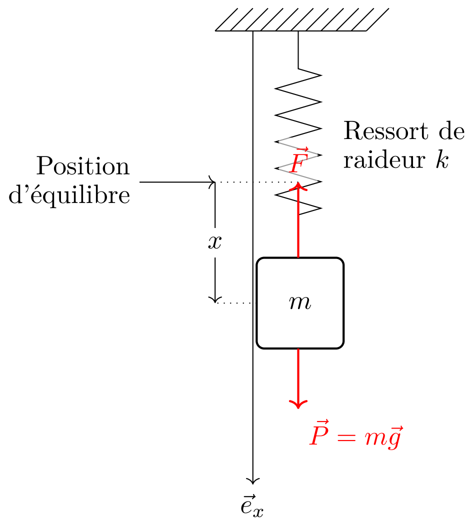
4. L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies potentielles des ressorts et de l'énergie cinétique de la masse. On obtient

$$\begin{aligned} E = E_{p1} + E_{p2} + E_c &= \frac{1}{2}k(\ell_{\text{éq}} + x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_{\text{éq}} - x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = kx^2 + k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \\ &= k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + kx_0^2\sin^2(\omega_0 t) \\ &= k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)^2 + kx_0^2 \end{aligned}$$

On trouve bien une expression qui ne dépend pas du temps, l'énergie mécanique totale est donc constante.

Exercice 2 : Gadget à ressort

1. On modélise l'avion par une masse m suspendue à un ressort de raideur k. On note x le déplacement par rapport à la position d'équilibre.



2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0)\vec{e}_x$. Lorsqu'on projette cette équation sur l'axe $\vec{e}_x$, on obtient :

$$m\ddot{x} = mg - k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = g - \frac{k}{m}(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$$

La pulsation propre du système est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

3. Lorsque le système est à l'équilibre, $\ddot{x} = 0$ e $x = 0$ (car x est le déplacement par rapport à la position d'équilibre). On obtient donc :

$$g - \frac{k}{m}(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} = 92{,}7\,\text{cm}$$

4. Vu l'expression de ℓ_{eq} trouvée à la question précédente, l'équation différentielle du mouvement se simplifie en $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. La solution générale est

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les conditions initiales sont : $x(0) = \ell_0 - \ell_{\text{eq}} = -\frac{mg}{k}$ et $\dot{x}(0) = -v_0$ (car la vitesse est vers le haut et l'axe x est orienté vers le bas. On a alors :

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -\frac{mg}{k} \\ -A\omega_0 \sin\varphi = -v_0 \end{cases} \Rightarrow A^2 = \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

et on obtient bien un mouvement d'amplitude :

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

5. Pour que l'avion touche le sol, il faut que $\ell_{\text{eq}} + x = h$ donc $x = h - \ell_{\text{eq}}$. Il faut donc que l'amplitude du mouvement soit au moins égale à $h - \ell_{\text{eq}}$. Donc

$$A \geq h - \ell_{\text{eq}} \Leftrightarrow \frac{v_0}{\omega_0} \geq \sqrt{(h - \ell_{\text{eq}})^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2} \Leftrightarrow v_0 \geq \omega_0\sqrt{(h - \ell_{\text{eq}})^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2} \Leftrightarrow v_0 \geq 7{,}3\,\text{m/s}$$

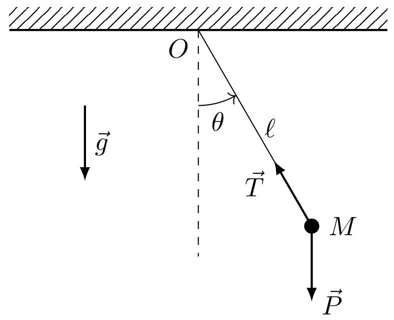
6. L'énergie doit être conservée car nous avons négligé tous les frottements. L'énergie totale du système est la somme de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = -mgx$ (on choisit l'origine à la position d'équilibre) et de l'énergie potentielle élastique $E_l = \frac{1}{2}k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0)^2$.
En utilisant l'expression de $x(t)$ obtenue plus haut ainsi que $\ell_{\text{eq}} - \ell_0 = \frac{mg}{k}$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) - mgA\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{(mg)A^2}{2k} = \text{constante} \end{aligned}$$

L'énergie totale du système ne dépend pas du temps, elle est donc conservée.

Exercice 3 : Pendule simple

1. Les forces qui s'exercent sur la masse M sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.



2. La trajectoire est circulaire car le fil reste tendu et le point M reste à une distance constante du point O.

3. L'énergie totale reste constante car on néglige les frottements de l'air. Comme l'altitude h du point M est donnée par $h = -\ell\cos\theta$, on obtient :
$$E = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell\cos\theta = \text{constante}$$
En dérivant l'équation précédente par rapport à t, on obtient :
$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta\dot{\theta} = 0$$
Comme cette équation est valable quel que soit t et comme $\dot{\theta}$ n'est pas identiquement nul, on en déduit que
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$
4. Cette équation différentielle n'est pas celle d'un oscillateur harmonique à cause du terme $\sin\theta$.
5. Dans ces conditions, l'équation différentielle devient
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$
6. La pulsation propre de cet oscillateur est $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et la période des oscillations est
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$