DM4 : Cinétique chimique et régime sinusoïdal forcé – corrigé

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous rendrez une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Boire ou conduire

I. Passage de l'alcool à travers la paroi stomacale

1 La vitesse de disparition de l'alcool dans l'estomac est $\boxed{v_1 = -\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.

2 Si v_1 suit une loi cinétique d'ordre 1, on doit avoir $v_1 = k_1C_1 = -\frac{dC_1}{dt}$ d'où $C_1(t) = C_0\exp(-k_1t)$. On doit donc avoir $\ln(C_1) = \ln(C_0) - k_1t$. La courbe représentant $\ln(C_1)$ en fonction de t doit donc être une droite de pente $-k_1$. On vérifie graphiquement cette propriété avec les données de l'énoncé et on trouve $\boxed{k_1 = 2{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}}$.

3 à $t = 18$ min, il reste $0.2 \times 0.25 = 5 \times 10^{-2}$ mol d'éthanol dans l'estomac, ce qui signifie que $n_2 = 1 - 5 \times 10^{-2} = 0{,}95$ mol d'éthanol sont passées dans le sang. La concentration d'éthanol dans le sang est donc $\boxed{C_2 = \frac{n_2}{V_2} = 2{,}38 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell}$

4 La quantité d'alcool qui a disparu dans l'estomac est $n = C_0V_1 - C_1V_1 = V_1(C_0 - C_1) = V_1x$, et est identique à la quantité apparue dans le sang. La concentration en alcool à un instant t dans le sang est $C_2 = \frac{n}{V_2} = \frac{V_1}{V_2}x$. Donc la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $v = \dfrac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{V_1}{V_2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{V_1}{V_2}v_1$.

II. Oxydation de l'alcool dans le sang

5 La vitesse d'oxydation de l'alcool dans le sang est $\boxed{v_2 = -\dfrac{dC_2}{dt}}$.

6 Pour une loi cinétique d'ordre 0, l'évolution temporelle de la concentration est linéaire, on doit avoir $C_2(t) = C_2(0) - k_2t$. On trace $C_2(t)$ en fonction de t et on trouve bien une droite de coefficient directeur $-k_2$, ce qui donne $\boxed{k_2 = 1{,}18 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol}\ \ell^{-1}\mathrm{s}^{-1}}$

III. Boire ou conduire...

7 Concentration maximale admise : $\boxed{C_{\max} = \frac{0.5}{46} = 1{,}09 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell}$

8 La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = v - v_2 = \dfrac{V_1}{V_2}v_1 - k_2 = \dfrac{V_1}{V_2}k_1C_1 - k_2}$

9 Comme $C_1(t) = C_0\exp(-k_1t)$ on obtient $\boxed{\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}t} = \frac{V_1}{V_2}k_1C_0\exp(-k_1t) - k_2}$.

Que l'on peut intégrer en $C_2(t) = K - \frac{V_1}{V_2}C_0\exp(-k_1t) - k_2t$. La condition initiale $C_2(0) = 0$ permet de déterminer que $K = \frac{V_1}{V_2}C_0$ ce qui nous donne l'expression demandée :

$$\boxed{C_2 = C_0\frac{V_1}{V_2}\big(1 - \exp(-k_1t)\big) - k_2t} \tag{1}$$

En buvant ses deux bières à 8%, le sujet absorbe 66 cℓ et 0.9 mole d'alcool.

10 l'instant $t_{\max}$ où la concentration C_2 est maximale est défini par $\frac{dC_2}{dt}(t_{\max}) = 0$

ce qui donne $t_{\max} = -\frac{1}{k_1}\ln\left(\frac{1}{C_0}\frac{k_2}{k_1}\frac{V_2}{V_1}\right) \simeq 1421\,\mathrm{s} \Rightarrow \boxed{t_{\max} \simeq 23{,}7\,\mathrm{min}}$

11 On trouve $C_2(t_{\max}) \simeq 2{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell > C_{\max}$. L'automobiliste ne peut donc pas conduire !

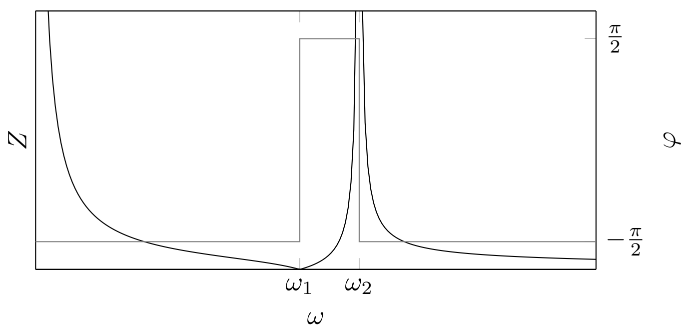
12 Au delà de $t_{\max}$ la courbe s'apparente à une droite de pente $-k_2$. On peut donc en déduire qu'il aura éliminé les $2{,}0 \times 10^{-2} - 1{,}09 \times 10^{-2} = 0{,}91 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell$ en $t = \frac{0{,}91\times10^{-2}}{1{,}18\times10^{-6}} \simeq 7700\,\mathrm{s}$ soit $\boxed{t \simeq 2\text{ h }08\text{ min}}$.

Exercice 2 : Dipôle inconnu

1. On trouve graphiquement $\boxed{U_m = 5\,\text{V et } V_m = 3{,}5\,\text{V}}$.
2. La période du signal est $\boxed{T = 6{,}3\times10^{-2}\,\text{s}}$ et donc la pulsation est $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\,\text{rad/s}}$.
3. La tension v augmente avant la tension u donc elle est en avance et $\boxed{\varphi \text{ est positif}}$.
4. Graphiquement on trouve $\boxed{\Delta t = 0{,}8\times10^{-2}\,\text{s}}$ et le déphasage est $\boxed{\varphi = 2\pi\frac{0.8}{6.3} \simeq 0{,}8\,\text{rad}}$.
5. La loi d'Ohm donne directement $\boxed{\underline{u} = R\underline{i}}$.
6. Aux bornes du dipôle D on a $\underline{v} = \underline{Z}\underline{i}$. En utilisant l'expression de $\underline{i}$ de la question précédente, on obtient : $\boxed{\underline{Z} = R\frac{\underline{v}}{\underline{u}}}$.
7. La question précédente donne directement $\boxed{|\underline{Z}| = R\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = R\frac{V_m}{U_m} = 70\,\Omega}$. Et $\arg(\underline{Z}) = \arg(R) + \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{u}) = \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{u}) = \varphi$.
8. On a $X = Z\cos\varphi = 48{,}8\,\Omega$ et $Y = Z\sin\varphi = 50{,}2\,\Omega$. Pour fabriquer ce dipôle on peut utiliser une résistance de $48{,}8\,\Omega$ en série avec une bobine d'inductance L telle que $L\omega = 50{,}2\,\Omega$ soit $L \simeq 0{,}5\,\text{H}$ (C'est une grosse bobine !).

Exercice 3 : Le quartz

1. En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Le quartz est donc équivalent à $\boxed{\text{un interrupteur ouvert}}$ en régime permanent.
2. L'impédance $\underline{Z_1}$ équivalente au dipôle formé par L et C est : $\underline{Z_1} = \dfrac{1}{jC\omega} + jL\omega$. L'impédance $\underline{Z}$ équivalente à C_0 et $\underline{Z_1}$ en parallèle est :
$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + jC_0\omega = \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} + jC_0\omega = \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2} + jC_0\omega \tag{1}$$
$$= j\frac{(C + C_0)\omega - LC\omega^2}{1 - LCC_0\omega^2} = j\frac{(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3}{1 - aLC_0^2\omega^2} \tag{2}$$
En prenant l'inverse, on trouve finalement l'expression demandée de l'impédance Z :
$$\boxed{\underline{Z} = j\frac{aLC_0\omega^2 - 1}{(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3}} \tag{3}$$
3. $|\underline{Z}| = \dfrac{|aLC_0\omega^2 - 1|}{|(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3|}$ et $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ selon le signe de $\dfrac{aLC_0\omega^2 - 1}{(a+1)C_0\omega - aLC_0^2\omega^3}$ (S'il est positif, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ sinon $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$)
4. $\boxed{\lim_{\omega\to0} Z = \infty}$ et $\boxed{\lim_{\omega\to\infty} Z = 0}$.
5. Z s'annule pour $1 - aLC_0\omega_1^2 = 0$ soit $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{aLC_0}}}$ et $Z \to \infty$ lorsque le dénominateur s'annule donc pour $(a+1)C_0\omega_2 - aLC_0^2\omega_2^3 = 0$ soit $\boxed{\omega_2 = \sqrt{(a+1)\dfrac{1}{aLC_0}} = \sqrt{a+1}\,\omega_1}$
Pour $\omega = \omega_1$, le quartz se comporte comme un fil, et pour $\omega = \omega_2$ il se comporte comme un interrupteur ouvert.
6. Représentation schématique de $Z(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$



7. — Lorsque $\boxed{\omega < \omega_1,\ \varphi = -\frac{\pi}{2}}$
   — Lorsque $\boxed{\omega_1 < \omega < \omega_2,\ \varphi = \frac{\pi}{2}}$
   — Lorsque $\boxed{\omega > \omega_2,\ \varphi = -\frac{\pi}{2}}$
8. Voir figure ci-dessus.