Les incertitudes dans les mesures physiques

1 La métrologie

1.1 Qu'est ce que la métrologie ?

Lorsque l'on effectue une mesure, celle-ci est inévitablement soumise à des imperfections. Pour rendre compte de ces problèmes de mesure, on doit associer chaque résultats à une incertitude.

La métrologie est la science des mesures et de ses applications. Elle s'intéresse notamment les méthodes de détermination d'erreurs et d'incertitudes lors d'un mesurage. Il existe des normes qui fixent les règles de calcul d'incertitudes ainsi que le vocabulaire à employer.

1.2 Valeur vraie et erreur

Définition

Valeur vraie : Valeur que l'on devrait obtenir si toutes les conditions de mesure sont parfaites.

Il est, en pratique, impossible de remplir ces conditions, c'est la raison pour laquelle nous attribuons une incertitude de mesure à chaque valeur mesurée.

Définition

Erreur : L'erreur correspond à la différence entre le résultat de la mesure et la valeur vraie.

Il existe deux catégories d'erreur.

1.3 Erreur aléatoire et erreur systématique

Définition

Erreur aléatoire : Composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, varie de façon imprévisible.

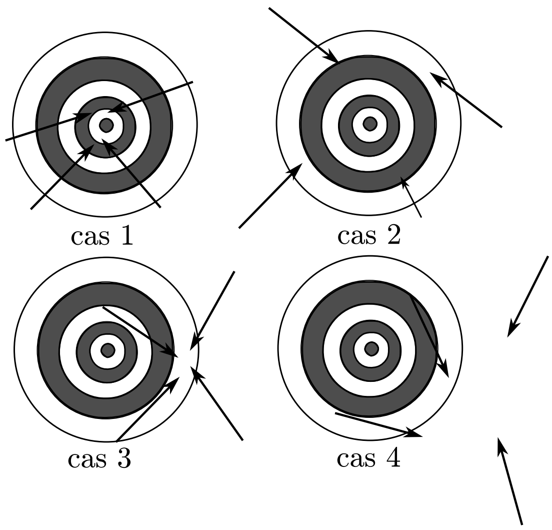
Si nous mesurons par exemple un temps à l'aide d'un chronomètre, le temps de réaction sera différent à chaque fois et le déclenchement différera pour chaque mesure : c'est une erreur aléatoire. Elle peut être déterminée par une étude statistique que nous détaillerons plus tard.

Définition

Erreur systématique : Composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible.

Il s'agit souvent d'erreurs dues à l'imprécision des appareils qui reste constante quelque soit la mesure ou bien d'erreur de méthode telle qu'une erreur de procédure, de calcul, de zéro mal défini... Ce type d'erreur décalera *systématiquement* la résultat de la mesure de la valeur vraie d'une certaine constante ce qui rend impossible sa détermination par des méthodes statistiques.

Pour comprendre les effets des erreurs aléatoires et systématiques, nous pouvons utiliser l'analogie de la cible. Les flèches représentent les mesures et le centre de la cible correspond à la valeur vraie :



cas 1 : Les mesures sont concentrées autour de la valeur vraie, les erreurs aléatoire et systématique sont faibles.

cas 2 : Les mesures sont éparpillées autour de la valeur vraie. L'erreur systématique est faible et l'erreur aléatoire est importante.

cas 3 : Les mesures sont concentrées autour d'une fausse valeur. L'erreur aléatoire est faible et l'erreur systématique est importante.

cas4 : Les mesures sont éparpillées autour d'une valeur fausse. Les erreurs aléatoire et systématique sont importantes.

1.4 Incertitude type

On peut estimer l'erreur aléatoire commise sur la mesure d'une grandeur x en donnant son **incertitude type** $u(x)$. Il s'agit de l'écart-type de la distribution de probabilité associée au résultat obtenu lors de la mesure de x. En pratique, on peut estimer $u(x)$ en effectuant un grand nombre de mesures $x_1, x_2, \ldots, x_N$ et en calculant son écart-type :

$$u(x) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2} \tag{1}$$

où μ est la valeur moyenne des x_i.

Attention : $u(x)$ est l'incertitude type associée au résultat d'une mesure unique, c'est l'estimation de l'erreur que l'on fait lorsqu'on effectue une mesure unique. C'est aussi une estimation de la variabilité du résultat obtenu lors d'une mesure unique. Si on a effectivement fait N mesures, on pourra retenir leur valeur moyenne μ comme meilleure estimation de la valeur vraie, et dans ce cas, l'incertitude à retenir est l'incertitude sur la valeur de μ qui est

$$u(\mu) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{2}$$

On augmente la précision du résultat en effectuant un grand nombre de mesures.

1.5 Présentation d'un résultat

Soit x le résultat de la mesure d'une grandeur A et $u(x)$ l'incertitude associée. On présentera le résultat final sous la forme

$$A = (x \pm u(x))\,\text{unité} \quad \text{ou} \quad A = x\,\text{unité} \pm \frac{u(x)}{|x|}\% \tag{3}$$

Les chiffres significatifs du résultats doivent être compatibles avec l'incertitude associée. Par exemple un résultat du genre $\ell = (1{,}432 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$ n'a pas de sens, il faut écrire $\ell = (1{,}4 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$. On donnera toujours une incertitude avec 1 chiffre significatif (2 maximum).

2 Évaluation des incertitudes aléatoires

2.1 Incertitude de type A : incertitude de répétabilité

Lorsqu'on peut effectuer un grand nombre de mesures, on peut faire un traitement statistique des résultats et estimer l'incertitude type sur une mesure unique en calculant l'écart-type de l'ensemble des valeurs obtenues voir équation (1).

On a vu aussi que l'on peut utiliser la moyenne des valeurs obtenues pour avoir une meilleure estimation de la valeur vraie, l'incertitude sur cette moyenne étant réduite (équation 2)

2.2 Incertitude de type B

L'incertitude de type B s'applique lorsqu'on effectue un mesurage unique. Il est alors nécessaire d'estimer l'erreur :

- s'il s'agit d'une erreur intrinsèque à l'appareil de mesure, l'incertitude de mesure est généralement fournie dans la notice de l'appareil.
- S'il s'agit d'une lecture d'un appareil gradué, on retiendra que l'incertitude-type associée est

$$u(x) = \frac{\delta}{\sqrt{3}} \tag{4}$$

  où δ représente un écart d'une demi-graduation.
- s'il s'agit d'une erreur due à l'expérimentateur (déclenchement de chronomètre, mesure de distance, etc...), il faut en faire une estimation (pas facile !).

3 Comparaison de deux résultats

Si deux personnes mesurent la même grandeur A, ils trouveront très probablement des résultats différents $x_1 \pm u(x_1)$ et $x_2 \pm u(x_2)$. Dans ce cas, il est important de déterminer si les mesures obtenues sont compatibles ou non. Dans ce cas on calculera l'**écart normalisé** E_N entre les deux mesures :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}} \tag{5}$$

Et par convention, on considérera que deux mesures sont **compatibles** si leur écart normalisé est inférieur à 2.

Un écart normalisé supérieur à 2 signifie, pour des distributions de probabilité gaussiennes, que la probabilité d'observer une telle différence entre les deux mesures de même valeur vraie est inférieure à 5 %.

Autrement dit, la probabilité d'observer un écart normalisé supérieur à 2 pour dex mesures compatibles est inférieure à 5 %.

4 Propagation des incertitudes

4.1 Définition

Il arrive très souvent que le résultat de plusieurs mesurages x_1,...,x_n soient utilisés pour calculer une autre grandeur q. L'incertitude sur q dépend alors de l'incertitude sur les n autres grandeurs x_i : on dit qu'il y a propagation des incertitudes.

4.2 Cas général $q = f(x_1, x_2...)$

Si les erreurs sur les x_i mesures sont indépendants, on a :

$$u(q) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2} \tag{6}$$

4.3 Cas particuliers

- Somme ou différence : $q = x_1 + x_2$

$$u(q) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2} \tag{7}$$

- Produit $q = x_1 x_2$ ou rapport $q = x_1/x_2$

$$\frac{u(q)}{q} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2} \tag{8}$$

4.4 Méthode de Monte-Carlo

En général, si le calcul de la propagation des incertitudes est trop laborieux (cf équation 6), on peut recourir à une méthode statistique par la méthode de Monte-Carlo : on simule un grand nombre d'expérience aléatoirement en introduisant une part d'aléatoire dans chacune et on calcul l'écart-type des valeurs obtenues. (voir document sur le traitement des données)