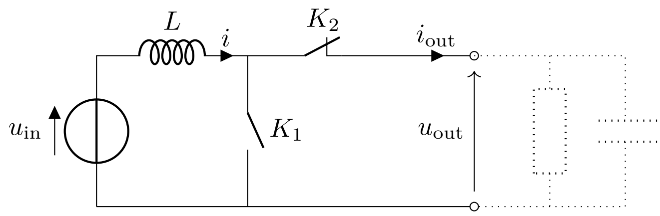
DM3 : Régimes transitoires

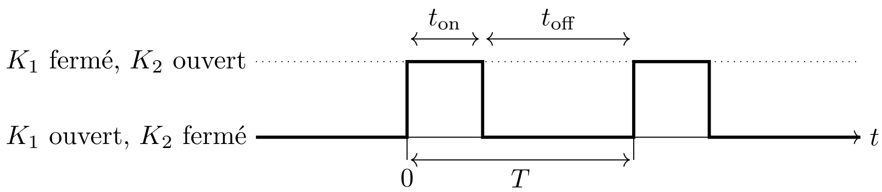
Le travail en groupe est fortement encouragé, vous rendrez une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Convertisseur Boost

On se propose d'étudier le circuit suivant qui représente un convertisseur de type *boost* dont le but est de convertir une tension continue u_{in} en une autre tension continue $u_{\text{out}} > u_{\text{in}}$. Ce type de circuit est notamment utilisé pour générer des tensions élevées dans les appareils fonctionnant sur batterie.



Les interrupteurs K_1 et K_2 sont commandés électroniquement, ils s'ouvrent et se ferment de manière cyclique. Lorsque K_1 est ouvet, K_2 est fermé et lorsque K_1 est fermé, K_2 est ouvert. K_1 est fermé pendant un temps noté t_{on} et est ouvert pendant un temps noté t_{off}. La période $t_{\text{on}} + t_{\text{off}}$ du cycle complet est notée T.



Le rapport $r = \dfrac{t_{\text{on}}}{T}$ est appelé le *rapport cyclique* du signal de commande de l'interrupteur.

On considère que le circuit fonctionne en régime permanent, c'est à dire que la tension de sortie u_{out} est **constante** au cours du temps, l'intensité i évolue de façon périodique.

1. Lors de la phase où K_1 est fermé, exprimer le taux de variation $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en fonction de u_{in} et L.
2. En déduire l'expression de $i(t)$, on notera i_{min} l'intensité au moment où l'interrupteur K_1 se ferme. Montrer qu'au moment où K_1 s'ouvre l'intensité vaut :
$$i_{\text{max}} = i_{\text{min}} + \frac{u_{\text{in}} t_{\text{on}}}{L}$$
3. Lorsque l'interrupteur K_1 est ouvert, déterminer $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en fonction de u_{in}, u_{out} et L.
4. En déduire l'expression de $i(t)$ lors de cette phase, c'est à dire pour $t \in [t_{\text{on}}, t_{\text{on}} + t_{\text{off}}]$.
5. Justifier que $i(t_{\text{on}} + t_{\text{off}}) = i(0) = i_{\text{min}}$. Tracer l'évolution temporelle de $i(t)$.
6. En déduire l'expression de u_{out} en fonction de u_{in} et r. On vérifiera que l'on a bien $u_{\text{out}} > u_{\text{in}}$
7. Montrer que lors de la phase où l'interrupteur K_1 est fermé on peut écrire :
$$i(t) = i_{\text{min}} + \frac{\Delta i}{t_{\text{on}}} t$$
et pendant la phase où l'interrupteur K_1 est ouvert :
$$i(t) = i_{\text{min}} + \frac{\Delta i (T - t)}{t_{\text{off}}}$$
avec $\Delta i = i_{\text{max}} - i_{\text{min}}$
8. Déterminer les expressions de l'énergie E_{on} fournie par le générateur pendant la phase où K_1 est fermé et de l'énergie E_{off} fournie par le générateur pendant la phase où K_1 est ouvert, en fonction de u_{in}, i_{min}, t_{on}, t_{off} et Δi.
Exprimer l'énergie totale fournie par le générateur sur un cycle complet.

9. Déterminer de même l'énergie E_{out} consommée par le circuit alimenté par le convertisseur pendant un cycle complet, en déduire la valeur du rendement de ce convertisseur. Commenter.

Exercice 2 : Décharge d'un condensateur dans un circuit RC parallèle

On considère le circuit représenté sur la figure 1. Pour les applications numériques, on prendra $E = 15{,}0\,\text{V}$, $r = 10\,\Omega$, $R_2 = R_3 = R = 10\,\text{k}\Omega$, $C_1 = 30\,\text{nF}$.

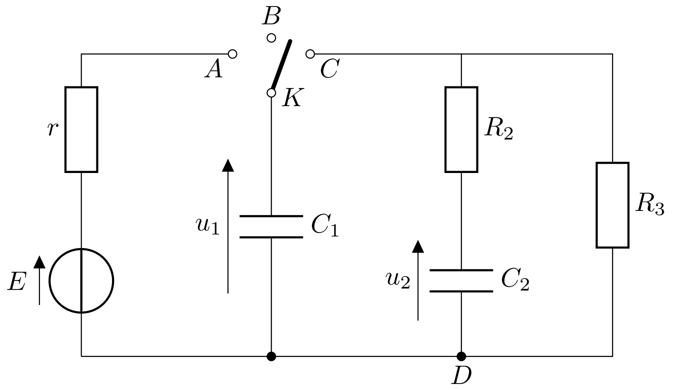


Figure 1 – Schéma du circuit étudié

Au départ, l'interrupteur est en position B depuis longtemps et tous les condensateurs sont déchargés. À l'instant $t = 0$, on le place dans la position A.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_1 pour $t > 0$.
2. Résoudre cette équation ; on exprimera $u_1(t)$ en fonction de E, r et C_1.
3. Tracer sans justification l'allure de $u_1(t)$. On fera en particulier figurer sur ce graphique les éventuelles asymptotes, ainsi que la tangente à l'origine (leurs équations ne sont pas demandées).
4. Déterminer la durée t_1 au bout de laquelle on peut considérer que le condensateur est chargé (il a alors atteint 99,9 % de sa charge maximale).
5. On laisse l'interrupteur en position A pendant $t_2 = 1{,}0\,\text{ms}$. Déduire des questions précédentes la valeur de $u_1(t_2)$.

Lorsque $t = t_2$, on bascule l'interrupteur en position C. Pour toutes les questions qui suivent, on effectuera un décalage de l'origine des temps : on posera $t' = t - t_2$ et, afin d'alléger l'écriture, on écrira t au lieu de t'.

6. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u_2 pour $t > 0$. On vérifiera qu'on peut la mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_2 = \omega_0^2 U, \tag{1}$$

et on indiquera les expressions de Q, ω_0 et U en fonction de C_1, C_2 et R .

7. Montrer que, quelles que soient les valeurs des composants, on n'obtiendra jamais d'oscillations.

Dans la suite du problème, on posera $C_1 = 3C$, $C_2 = 2C$ et $\tau = 6RC$.

8. Déterminer les valeurs de C et de τ.
9. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par u_2 ; on exprimera $u_2(t)$ en fonction de E et τ.
10. En déduire l'expression de $u_1(t)$ en fonction de E et τ.
11. Faire l'étude des variations des fonctions u_1 et u_2, et tracer l'allure des graphes des deux fonctions sur une même figure (ne pas effectuer les applications numériques).
12. En exploitant la loi des nœuds au point D, établir un bilan de puissance, et expliquer ce qu'il advient de l'énergie initialement emmagasinée dans le condensateur de capacité C_1.
13. En déduire à quel composant parmi les condensateurs de capacités C_1 et C_2, ainsi que le résistor de résistance R_3, correspond chacune des courbes représentées sur la figure 2.
14. Quel commentaire peut-on faire quant au comportement énergétique du condensateur de capacité C_2 ?

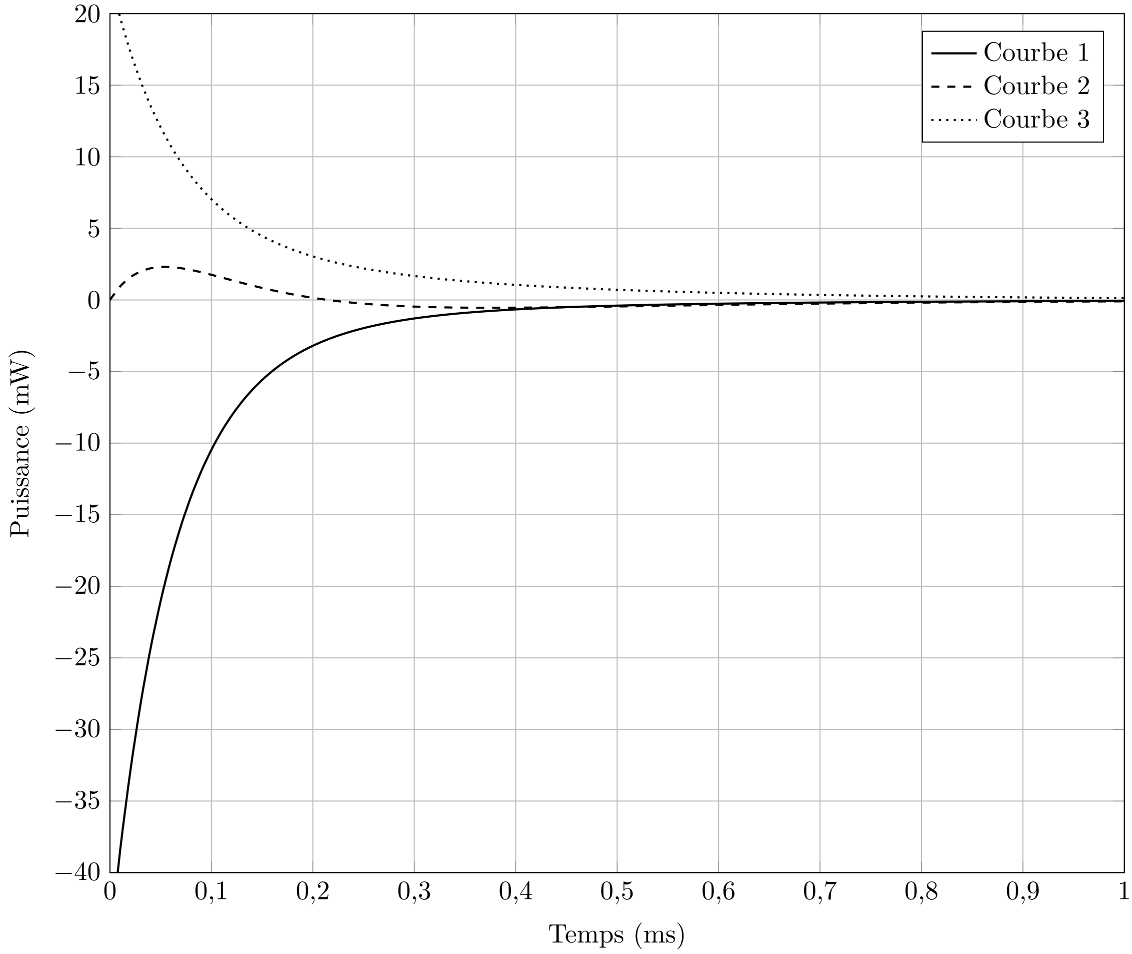


FIGURE 2 – Puissance consommée en fonction du temps par les deux condensateurs et la résistance R_3