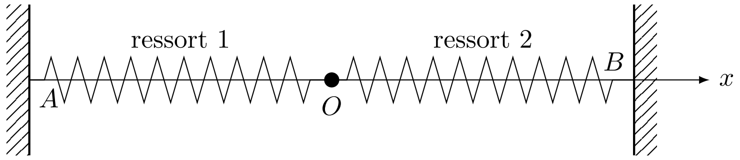
TD4 : Oscillateur harmonique

Exercice 1 : Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $\ell_{\text{éq}}$, et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 différente de 0.

1. Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
2. Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.
3. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4. Montrer que l'énergie mécanique totale du système est constante au cours du temps.

Exercice 2 : Gadget à ressort

On s'intéresse à un gadget constitué d'un petit avion en bois de masse $m = 100\,\text{g}$, suspendu au plafond de la pièce par un ressort idéal et sans masse, de raideur $k = 2{,}3\,\text{N/m}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 50\,\text{cm}$. La hauteur sous plafond est $h = 2{,}50\,\text{m}$, et l'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

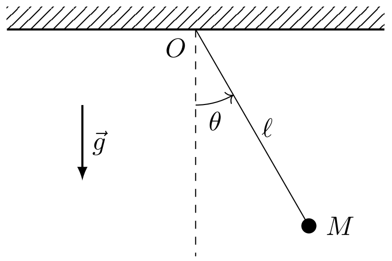
1. Proposer une modélisation simple du problème, assortie d'un schéma.
2. Mettre le problème en équations, et identifier la pulsation propre ω_0 du système.
3. Déterminer la position d'équilibre du système, et donner la longueur d'équilibre ℓ_e du ressort. Expliquer pourquoi $\ell_e \neq \ell_0$.

On lance l'avion de la position où la longueur du ressort vaut ℓ_0 avec une vitesse initiale dont la mesure algébrique vers le haut vaut v_0.

4. Vérifier qu'on obtient bien un mouvement d'amplitude
$$\sqrt{\left(\frac{m\,g}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$
autour de la position d'équilibre.
5. Déterminer la valeur minimale de $|v_0|$ pour que l'avion touche le sol. Pourquoi vaut-il mieux lancer l'avion vers le bas ?
6. Indiquer (en justifiant) s'il y a conservation de l'énergie. Le vérifier sur la réponse à la question 4.

Exercice 3 : Pendule simple

On s'intéresse à un *pendule simple*. Il s'agit d'une masse ponctuelle pendue par un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixe. On repère la position du point M par l'angle θ que fait le fil avec la verticale. On négligera tous les frottements. Le pendule est lâché sans vitesse initial depuis un angle θ_0.



1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse M.
2. Expliquer pourquoi la trajectoire est circulaire. Dans ces conditions, la vitesse du point M est $v = \ell \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
3. L'énergie mécanique du point M est $E = E_c + E_p$, avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (énergie cinétique) et $E_p = mgh$ (énergie potentielle) avec h l'altitude du point M. Justifier que l'énergie totale du système est constante et en déduire une équation différentielle sur θ.
4. L'équation différentielle obtenue est-elle celle d'un oscillateur harmonique ?

On se place maintenant dans le cas où le pendule oscille faiblement, c'est à dire $|\theta(t)| \ll 1$. Dans ce cas on peut écrire $\sin(\theta) \approx \theta$.

5. Utiliser cette approximation pour simplifier l'équation différentielle obtenue à la question 3. Et la mettre sous forme canonique.
6. En déduire la période d'oscillation du pendule. Montrer que la période d'oscillation est indépendante de l'amplitude d'oscillation. On parle alors d'*isochronisme* des oscillations.