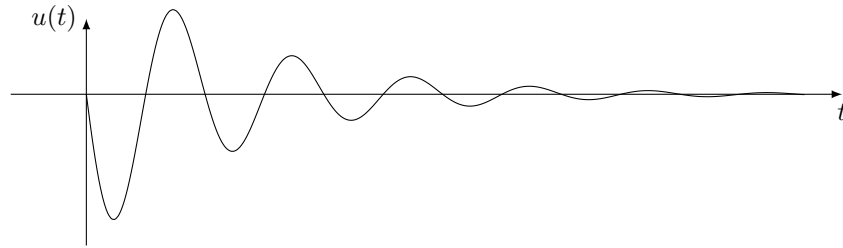


TD5 : Oscillateurs – corrigé

Exercice 1 : CIRCUIT RLC PARALLÈLE

- En régime permanent, condensateur=circuit ouvert et bobine=fil.
 - à $t = 0^-$ on a $\underline{u} = 0$, $i_C = 0$, $i_L = \frac{E}{R_g}$ et $i_R = \frac{u}{R} = 0$;
 - à $t = 0^+$ L'intensité dans la bobine est continue donc $i_L = \frac{E}{R_g}$ la tension aux bornes de C est continue donc $\underline{u} = 0$ donc $i_R = 0$ et la loi des nœuds donne $i_C = -i_L$;
 - lorsque $t \rightarrow \infty$ le régime permanent est atteint, la bobine se comporte comme un fil, le condensateur comme un interrupteur ouvert et $i_C = i_R = i_L = 0$ et $u = 0$.
- La tension $u(t)$ va commencer par être négative ($i_C(0^+) < 0$) puis va osciller avant de se stabiliser à 0. On obtient l'évolution ci-dessous :



- Lorsqu'on ouvre l'interrupteur le courant dans L va progressivement diminuer en partie pour charger C et en partie en passant dans R . Lorsque le courant dans L s'annule, le condensateur se décharge et le courant devient négatif. L'intensité oscillera jusqu'à ce que toute l'énergie ait été dissipée par la résistance.

Si R est très élevée, Q est aussi élevé donc on peut supposer que $Q \propto R$. L'analyse dimensionnelle donne $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ (Q doit être sans dimension)

- $u = L\frac{di_L}{dt}$, $i_L = -i_C - i_R$, $i_C = C\frac{du}{dt}$ et $i_R = \frac{u}{R}$ donc $\frac{u}{L} = -C\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{R}\frac{du}{dt}$. Ce qui nous donne l'équation différentielle :

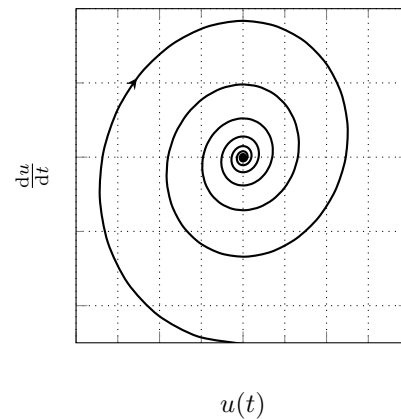
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = 0 \quad (1)$$

- On déduit de l'équation précédente (par identification à celle d'un oscillateur harmonique amorti) :

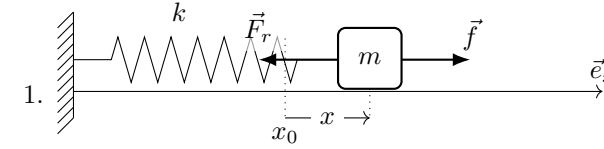
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (2)$$

On retrouve la même expression que dans la question précédente.

- Avec les données fournies, on trouve $\omega_0 \approx 707 \text{ rad/s}$ et $Q \approx 6$
- Portrait de phase :



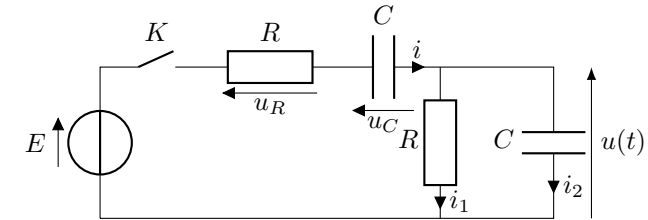
Exercice 2 : OSCILLATEUR MÉCANIQUE AMORTI



- Sur les graphiques, on trouve que la période d'une pseudo-oscillation est environ $\overline{T_0} \simeq 0,1 \text{ s}$ donc $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \simeq 63 \text{ rad s}^{-1}$.
On trouve le facteur de qualité en comptant le nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne soit divisée par 20, on trouve $Q \simeq 5$.
- On met l'équation différentielle sous la forme canonique : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$ et on trouve $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}$
- Avec $m = 1 \text{ g}$ et la valeur de ω_0 trouvée ci-dessus, on trouve $k = m\omega_0^2 \simeq 3,9 \text{ N/m}$ et $\gamma = \frac{\sqrt{km}}{Q} \simeq 0,012 \text{ N s m}^{-1}$

Exercice 3 : OSCILLATEUR À CONDENSATEURS

- On sait que la dimension de RC est un temps, donc la constante de temps recherchée est $\tau = RC$.
- On commence par annoter le circuit avec des tensions et des intensités



- À $t = 0^-$ les condensateurs sont déchargés, donc $u(0^-) = u_C(0^-) = 0$. Comme $u(0^-) = Ri_1(0^-)$, on en déduit que $i_1(0^-) = 0$. De plus le circuit étant en régime permanent, $i_2(0^-) = i(0^-) = 0$ (condensateurs = interrupteurs ouverts).
- Les tensions étant continues aux bornes des condensateurs, on a $u_C(0^+) = u(0^+) = 0$. En déduit comme précédemment que $i_1(0^+) = 0$. La loi des mailles donne $u_R(0^+) = E$ et donc $i(0^+) = E/R$. Enfin, la loi des nœuds permet d'écrire $i_2(0^+) = i(0^+) = E/R$.

- Pour établir l'équation différentielle, on écrit les relations pour les composants et le circuit. On a

- $u_R = Ri$ (Ohm) ;
- $i = C\frac{du_C}{dt}$ (condensateur) ;
- $u = Ri_1$ (Ohm) ;
- $i_2 = C\frac{du}{dt}$ (condensateur) ;
- $u + u_R + u_C = E$ (mailles) ;
- $i = i_1 + i_2$ (nœuds).

Avec ces équations, on arrive finalement à

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}u = 0 \quad (1)$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti avec

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \quad (2)$$

On trouve alors que $Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ et on en déduit que l'oscillateur est en régime aperiodique.

4. Avec la méthode de résolution de l'équation différentielle du cours, on trouve pour le régime apériodique

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \quad (3)$$

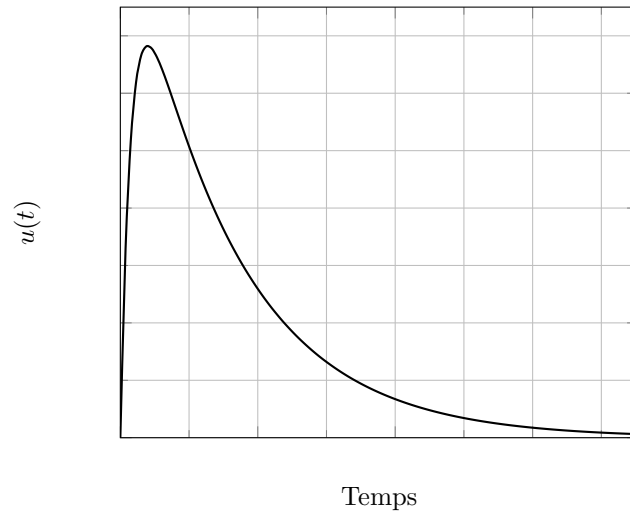
En utilisant les conditions initiales, on peut trouver A et B :

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A \quad (4)$$

et

$$\frac{du}{dt}(0) = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{E}{RC} = A(r_1 - r_2) = A \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \Leftrightarrow A = \frac{QE}{\sqrt{1 - 4Q^2}} \quad (5)$$

On a l'allure suivante pour $u(t)$:



La tension $u(t)$ est nulle à $t = 0^+$ mais elle y est croissante car $\frac{du}{dt} = \frac{E}{RC}$. Puis elle tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

Exercice 4 : INTERPRÉTATION ÉNERGÉTIQUE DU FACTEUR DE QUALITÉ

- C'est presque une question de cours, il faut savoir le faire les yeux fermés! (loi des mailles + lois des composants).
- On calcule le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, On trouve $Q = 10$. Donc cet oscillateur est en régime pseudo-périodique et la solution de l'équation à la forme indiquée (voir cours)
- A et B sont déterminés à partir des conditions initiales que l'on trouve en étudiant les valeurs des tensions et des intensités à $t = 0^-$ et $t = 0^+$. On trouve que $u_C(0^-) = E$ et $\frac{du_C}{dt}(0^-) = 0$. En utilisant ces conditions initiales, on trouve

$$A = E \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{\omega\tau} \approx \frac{E}{20} \quad (1)$$

- Comme le facteur de qualité est assez grand ($Q = 10$) on peut faire l'approximation $\omega = \omega_0$. On remarque également que $B \ll A$, on peut donc négliger le terme en $\sin(\omega t)$ dans l'expression de $u_C(t)$. On obtient alors

$$u_C(t) \approx Ee^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\omega_0 CE e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

- Le graphique montre bien la décroissance de l'énergie totale avec le temps à cause de la dissipation dans la résistance et on voit également les échanges d'énergie entre le condensateur et la bobine.
- L'énergie totale de l'oscillateur est la somme de l'énergie du condensateur et de celle de la bobine. On a donc

$$E_{\text{tot}} = E_C + E_L = \frac{1}{2} C u_C(t)^2 + \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{2} C E^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} (\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2) = \frac{1}{2} C E^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \quad (3)$$

- On calcule la variation relative d'énergie du circuit sur une période avec l'expression de $E_{\text{tot}}(t)$ trouvée à la question précédente :

$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} = \frac{e^{-\frac{2t}{\tau}} + e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}}}{e^{-\frac{2t}{\tau}}} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \quad (4)$$

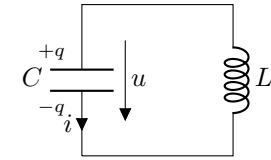
On fait l'approximation que $\frac{2T}{\tau} \ll 1$ (ce qui est un peu discutable vu les valeurs numériques!) et on trouve que

$$\frac{E_{\text{tot}}(t) - E_{\text{tot}}(t+T)}{E_{\text{tot}}(t)} \approx \frac{2T}{\tau} \approx \frac{2T_0}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}. \quad (5)$$

La variation relative d'énergie sur une période est bien inversement proportionnelle à Q .

Exercice 5 : ANALOGIE ENTRE OSCILLATEUR MÉCANIQUE ET OSCILLATEUR ÉLECTRIQUE

- L'équation fondamentale de la dynamique donne presque directement $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
- Le circuit étudié est le suivant



Dans ce circuit on a $q = Cu$, $u = -L \frac{di}{dt}$ et $i = \frac{dq}{dt}$, donc on obtient l'équation différentielle : $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$

- On peut donc faire l'analogie entre les deux situations : la charge correspond à la position $q \leftrightarrow x$ la bobine correspond à l'inertie de l'intensité donc à la masse $L \leftrightarrow m$ et l'inverse de la capacité est la raideur du ressort $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$ dans ces conditions $u = \frac{q}{C} \leftrightarrow k \times x = |F_r|$, la tension correspond à la force exercée par le ressort.

Exercice 6 : ASSOCIATIONS D'IMPÉDANCES COMPLEXES

$$\begin{aligned} \text{Dipôle 1 : } Z_{\text{eq}} &= \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}; \quad \text{Dipôle 2 : } Z_{\text{eq}} = j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right); \\ \text{Dipôle 3 : } Z_{\text{eq}} &= \frac{jLR\omega}{R + jL\omega} + \frac{1}{jC\omega}; \quad \text{Dipôle 4 : } Z_{\text{eq}} = \frac{jR(LC\omega^2 - 1)}{RC\omega + j(LC\omega^2 - 1)} \end{aligned}$$

Exercice 7 : CIRCUIT RLC PARALLÈLE EN RÉGIME FORCÉ

- L'impédance complexe équivalente à RLC en parallèle est : $Z_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + jR(C\omega - 1/(L\omega))}$, on peut faire apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ on obtient : $Z_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$. On trouve alors

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{Z_{\text{eq}}} = \frac{\underline{e}}{R} \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \quad (1)$$

- L'amplitude de l'intensité vaut

$$|\underline{i}| = \frac{|\underline{e}|}{R} \times \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \quad (2)$$

- Le déphasage ϕ entre la tension \underline{e} et l'intensité \underline{i} vaut $\phi = \arg(\underline{i}) - \arg(\underline{e}) = \arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$

- On a

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \times \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \cos(\omega t + \phi) \quad (3)$$

Exercice 8 : DÉTERMINER LES PARAMÈTRES D'UN OSCILLATEUR

1. Sur le graphique de la phase, on trouve que la pulsation propre est d'environ $\omega_0 \simeq 63 \text{ rad s}^{-1}$ et sur le graph de l'amplitude on trouve $\Delta\omega \approx 12 \text{ rad/s}$ ce qui nous donne $Q = \omega/\Delta\omega \approx 5$
2. On peut prendre par exemple $L = 1 \text{ H}$, $C = 250 \text{ }\mu\text{F}$ et $R = 12 \text{ }\Omega$
3. C'est la même question que dans l'exercice 2, avec les même valeurs numériques. La constante de raideur du ressort doit être $k \simeq 4 \text{ N m}^{-1}$

Exercice 9 : ÉQUIVALENCE DE COMPOSANTS

L'impédance équivalente au premier dipôle est $Z_1 = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$, l'impédance équivalente au second dipôle est $Z_2 = R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}$. En égalant les deux et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$R_2 = \frac{R_1}{1 + (R_1C_1\omega)^2} \quad \text{et} \quad C_2 = C_1 \left(1 + \frac{1}{(R_1C_1\omega)^2} \right) \quad (1)$$

Exercice 10 : IMPÉDANCE COMPLEXE D'UN CIRCUIT

1. C_1 et L_1 sont associés en parallèle, puis en série avec L et R . On obtient l'impédance équivalente :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{jL_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \quad (1)$$

Après calculs, on trouve la forme demandée avec

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{LC_1} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_1C_1} \quad (2)$$

2. Avec l'impédance équivalente trouvée, on trouve

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{X}{R}\right) \quad (3)$$

3. On peut remarquer que le circuit forme un pont diviseur de tension et on a

$$\underline{u} = \frac{Z_1}{\underline{Z}} \underline{e} \quad (4)$$

avec \underline{Z}_1 l'impédance équivalent à L_1 et C_1 en parallèle. on trouve finbalement

$$U_m = \frac{L\omega E_m}{\sqrt{R^2(1 - L_1C_1\omega^2)^2 + (L\omega(1 - L_1C_1\omega^2) + L_1\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = \frac{R(1 - L_1C_1\omega^2)}{L_1\omega + L\omega(1 - L_1C_1\omega^2)} \quad (5)$$