DM5 : Filtrage, molécules – corrigé

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Étude et utilisation d'un filtre

1 Étude du filtre

1. — Lorsque $\omega \to 0$: Le condensateur se comporte comme un interrupeur ouver et on a un pont diviseur de tension formé par R_1 et R_2. La tension de sortie est donnée par

$$\boxed{\underline{u}_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\underline{u}_e} \tag{1}$$

— Lorsque $\omega \to \infty$, le condensateur se comporte comme un fil et on a directement

$$\boxed{\underline{u}_s = \underline{u}_e} \tag{2}$$

2. On commence par déterminer l'impédance équivalente de R_1 et C associés en parallèle

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega} \tag{3}$$

Puis on écrit la relation entre $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$ avec la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{R_2}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_1} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1+jR_1C\omega}}\underline{u}_{\text{e}} \tag{4}$$

finalement, on trouve

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{1 + jR_1C\omega}{1 + j\frac{R_2R_1C}{R_1+R_2}\omega}} \tag{5}$$

On a bien la forme demandée, avec $\alpha = \frac{R_2}{R_2+R_2}$, $\omega_1 = \frac{1}{R_1C}$ et $\omega_2 = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}$.

3. Avec les expressions de ω_1 et ω_2 trouvées à la question précédente, on a directement $\omega_1 = \alpha\omega_2$.
4. Il est évident que $\alpha < 1$ et donc on a directement $\omega_1 < \omega_2$.
5. On commence par écrire l'expression du gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\alpha\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}\right) = 20\log(\alpha) + 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) - 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) \tag{6}$$

— Lorsque $\omega \ll \omega_1$, on a aussi $\omega \ll \omega_2$ et

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) \tag{7}$$

Il y a une asymptote horizontale.

— Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, le gain devient

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \tag{8}$$

L'asymptote a une pente de 20 dB/décade.

— Lorsque $\omega \gg \omega_2$, on a aussi $\omega \gg \omega_1$ et le gain s'écrit

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \tag{9}$$

$$\approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 20\log(\alpha) - 20\log(\alpha) = 0 \tag{10}$$

Et on a une asymptote horizontale à nouveau.

6. Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, on peut écrire la fonction de transfert comme

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{\alpha}{\omega_1} j\omega \tag{11}$$

La multiplication par $j\omega$ montre le caractère dérivateur du filtre.

7. — Lorsque $\omega \to 0$, la fonction de transfert peut être approximée par

$$\underline{H}(\omega) \approx \alpha \in \mathbb{R} \tag{12}$$

On a donc $\varphi = 0$.

— Lorsque $\omega \to \infty$, la fonction de transfert devient

$$\underline{H}(\omega) \approx 1 \tag{13}$$

et on a à nouveau $\varphi = 0$

8. Le diagramme de Bode (et l'analyse qualitative) montre que le filtre laisse passer les signaux de haute fréquence et atténue (partiellement) les signaux de basse fréquence. C'est donc un filtre passe-haut.
9. On lit la fréquence de coupure graphiquement, on trouve $f_c = 800\,\text{Hz}$ et $\omega_c = 5 \cdot 10^3\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.
10. On calcule $G_{\text{dB}}(\omega_2)$:

$$G_{\text{dB}}(\omega_2) = 20\log(\alpha) + 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right) - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_2}\right)^2\right) \tag{14}$$

$$= 20\log(\alpha) + 10\log\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) - 10\log(2) \tag{15}$$

Comme on a supposé que $\omega_1 \ll \omega_2$, alors $\alpha \ll 1$ et $\frac{1}{\alpha^2} \gg 1$. Donc

$$G_{\text{dB}}(\omega_2) \approx 20\log(\alpha) - 20\log(\alpha) - 10\log(2) \approx -3\,\text{dB} \tag{16}$$

On montre donc que $\omega_c \approx \omega_2$

11. On trouve α en regardant le gain du filtre lorsque $\omega \to 0$ et on trouve $\alpha = 0{,}02$.
12. On a $\omega_1 = \alpha\omega_2 \approx 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$
13. On commence par calculer $\varphi(\omega_1)$ et $\varphi(\omega_2)$:

$$\varphi(\omega_1) = \arg(\underline{H}(\omega_1)) = \arg\left(1 + j\frac{\omega_1}{\omega_1}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \tag{17}$$

$$\approx \arctan(1) - \arctan(0) \approx \frac{\pi}{4} \tag{18}$$

$$\varphi(\omega_2) = \arg(\underline{H}(\omega_2)) = \arg\left(1 + j\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega_2}{\omega_2}\right) \tag{19}$$

$$\approx \frac{\pi}{2} - \arctan(1) \approx \frac{\pi}{4} \tag{20}$$

On a utilisé le fait que $\omega_2 \gg \omega_1$. On cherche alors les fréquences pour lesquelles $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et on retrouve $f_1 = 16\,\text{Hz}$ et $f_2 = 800\,\text{Hz}$, ce qui donne à nouveau $\alpha = 0{,}02$.

14. Si on place en sortie du filtre une résistance du même ordre de grandeur que R_2, tout se passe comme si on changeait la résistance R_2 pour une résistance $R_2' < R_2$. Dans ce cas, ω_1 ne change pas, mais α devient plus petit et donc ω_2 augmente. On augmente donc la fréquence de coupure du filtre et on diminue donc sa bande passante.

2 Utilisation du filtre

15. On utilise les diagrammes de Bode pour déterminer le gain et le déphasage des deux composantes du signal d'entrée :
    — à 10 Hz, on a $G_{\text{dB}} = -32{,}5$ donc $G = 10^{-\frac{32.5}{20}} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 30° = 0{,}52\,\text{rad}$.
    — à 50 Hz, on a $G_{\text{dB}} = -24$ donc $G = 10^{-\frac{24}{20}} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 65° = 1{,}13\,\text{rad}$.

    Le signal d'entrée est $e(t) = A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$ et le signal de sortie sera

$$\boxed{s(t) = A(2{,}4 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_1 t + 0.52) + 6{,}3 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_2 t + 1.13))} \tag{21}$$

16. Le gain à 100 Hz vaut -18 dB, ce qui correspond à un gain $G = 0.13$. Le déphasage à cette fréquence est d'environ 70°. L'amplitude de la sinusoïde en sortie du filtre est

$$\boxed{A' = V_{\text{eff}}\sqrt{2}G \approx 1{,}4\,\text{V}} \tag{22}$$

17. L'offset se trouvant à fréquence nulle, il aura un gain de $\alpha = 0{,}02$, et on aura en sortie un offset de 0,1 V.
18. On utilise la définition de la valeur efficace :

$$E_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,\text{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^2(t)\,\text{d}t} \tag{23}$$

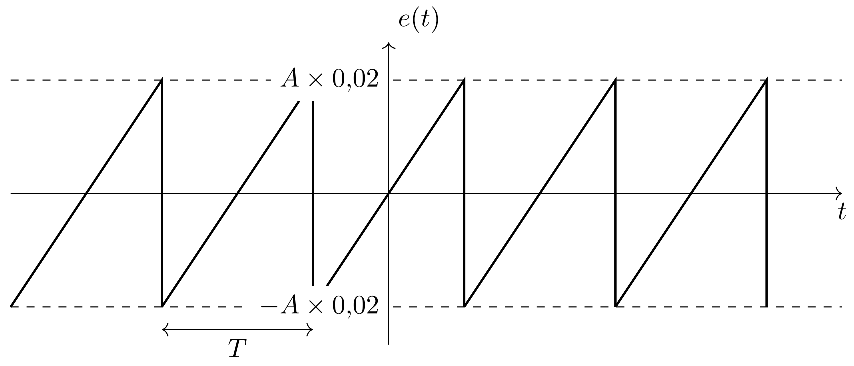
    avec

$$e(t) = \frac{2A}{T}t \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \tag{24}$$

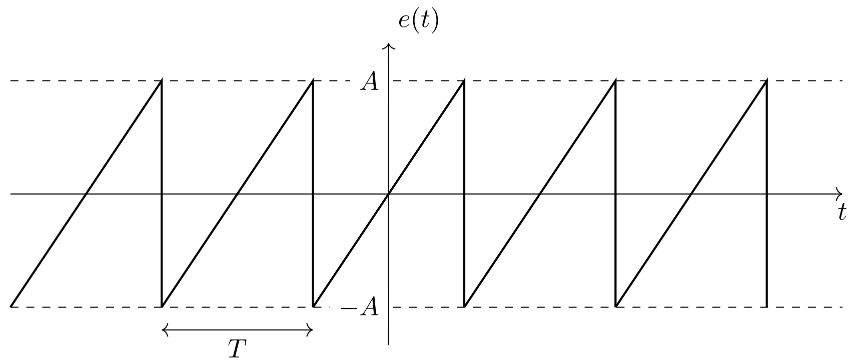
    On a donc

$$\boxed{E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{4A^2}{T^2}t^2\,\text{d}t} = \sqrt{\frac{4A^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}} = \sqrt{\frac{A^2}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}} \tag{25}$$

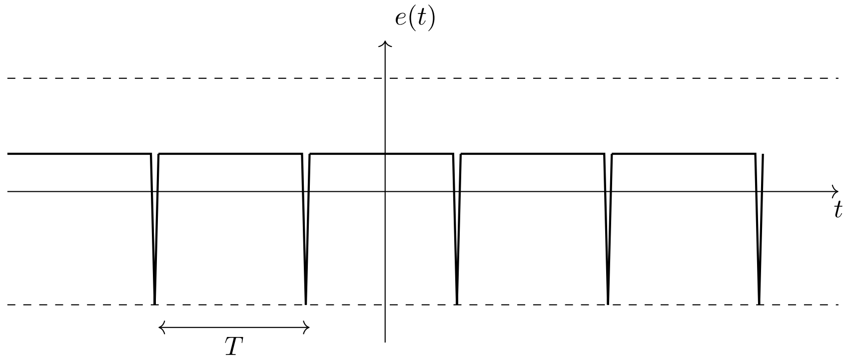
19. Pour $T = 1$ s, la période est très grande et $\omega \ll \omega_1$. Le gain sera donc de $\alpha = 0{,}02$, le signal de sortie sera atténué par rapport au signal d'entrée.



Pour $T = 10$ µs, la période est très faible et $\omega \gg \omega_2$. Le gain est donc de 1 et le signal est inchangé.

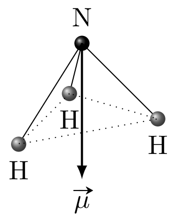


Pour $T = 10\,\text{ms}$, on a $f = 100\,\text{Hz}$ et on se trouve dans la zone où le filtre a un comportement dérivateur, la sortie sera donc proportionelle à la dérivée de l'entrée et on aura un signal de la forme :

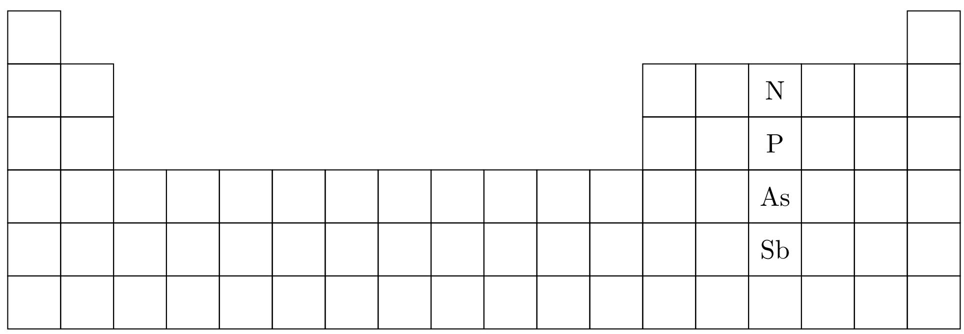


Exercice 2 : Chimie de l'azote

1. Carbone : $Z = 6$; $1s^2 2s^2 2p^2$
   Azote : $Z = 7$; $1s^2 2s^2 2p^3$
2. $\mathrm{H}-\overline{\mathrm{N}}-\mathrm{H}$ (avec un H lié sous N)
3. La liaison N−H est polarisée car l'azote est beaucoup plus électronégatif que l'hydrogène.



4. Les 4 éléments ont leur dernière sous couche de valence de la forme p^3, ils sont donc dans la troisième colonne du bloc p. En regardant la dernière sous-couche s remplie, on peut déterminer la période de chacun.



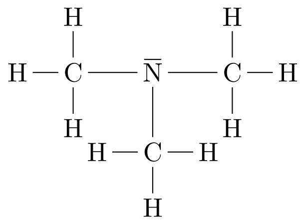
5. L'électronégativité est la capacité d'un élément à capter des électrons. L'électronégativité augmente vers le haut du tableau périodique, donc $\boxed{\text{EN(Sb)} < \text{EN(As)} < \text{EN(P)} < \text{EN(N)}}$
6. Hormis l'ammoniac NH_3, la température d'ébullition augmente avec Z. Les molécules PH_3, AsH_3 et SbH_3 sont apolaires et aprotiques, donc les interactions intermoléculaires se résument à celles de London qui dépendent de la polarisabilité des molécules, elles-même dépendant de la taille de la molécule.

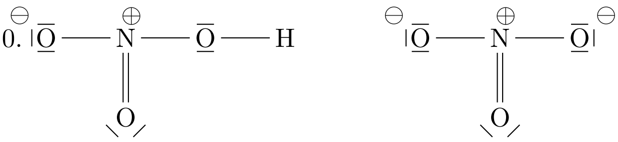
   Au sein d'une même famille, la taille des éléments augmente avec Z, donc SbH_3 est plus volumineux que AsH_3 qui est plus volumineux que PH_3.

   Donc $\boxed{T_{eb}(\mathrm{SbH_3}) > T_{eb}(\mathrm{AsH_3}) > T_{eb}(\mathrm{PH_3})}$.

   On constate une anomalie dans l'évolution de la température d'ébullition pour NH_3. Ceci est dû aux liaisons hydrogène intermoléculaires possibles pour l'ammoniac qui augmentent fortement l'énergie d'interaction intermoléculaire, donc la température d'ébullition.
7. Cette solubilité est élevée car la molécule d'ammoniac est polaire et protique comme la molécule d'eau.

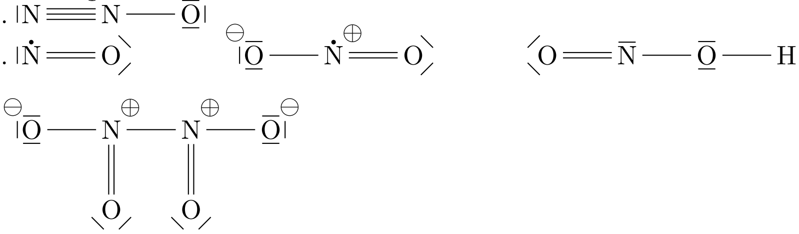
8. Si : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3^2$, 4 électrons de valence.

9. 

10. 

11. $\boxed{\% = \dfrac{2M_{\mathrm{N}}}{4M_{\mathrm{H}} + 2M_{\mathrm{N}} + 3M_{\mathrm{O}}} = 0{,}35}$

12. 

13. 

14. Ce sont des radicaux, i.e. ils possèdent un électron célibataire, donc ils sont très réactifs.

15.