DM8 : Mécanique

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous rendrez une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Charge électrique sur un anneau

Un point matériel de M masse m, portant une charge q est libre de se déplacer sans frottements le long d'un anneau de rayon a contenu dans le plan vertical. M subit l'action d'une charge Q fixée au point A situé au sommet de l'anneau.

La force électrique subie par le point M est $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3}$, qui dérive de l'énergie potentielle électrostatique $E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 AM}$.

On se propose d'étudier les mouvements possibles de M en utilisant la méthode énergétique. L'angle θ est compris dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

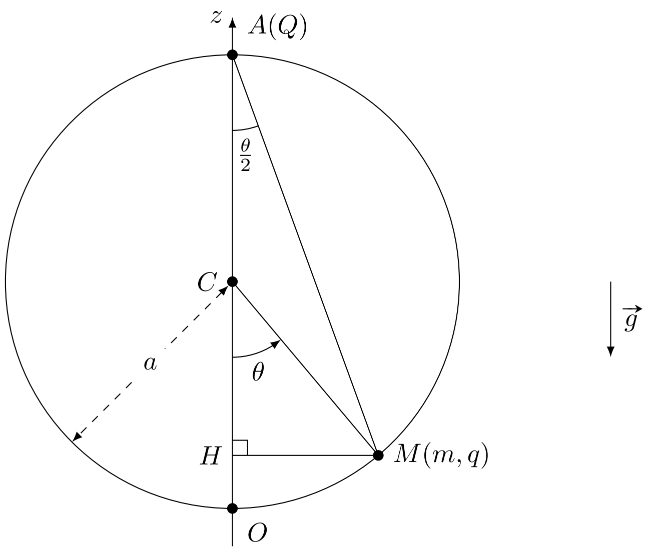


Figure 1 – Schématisation du problème étudié.

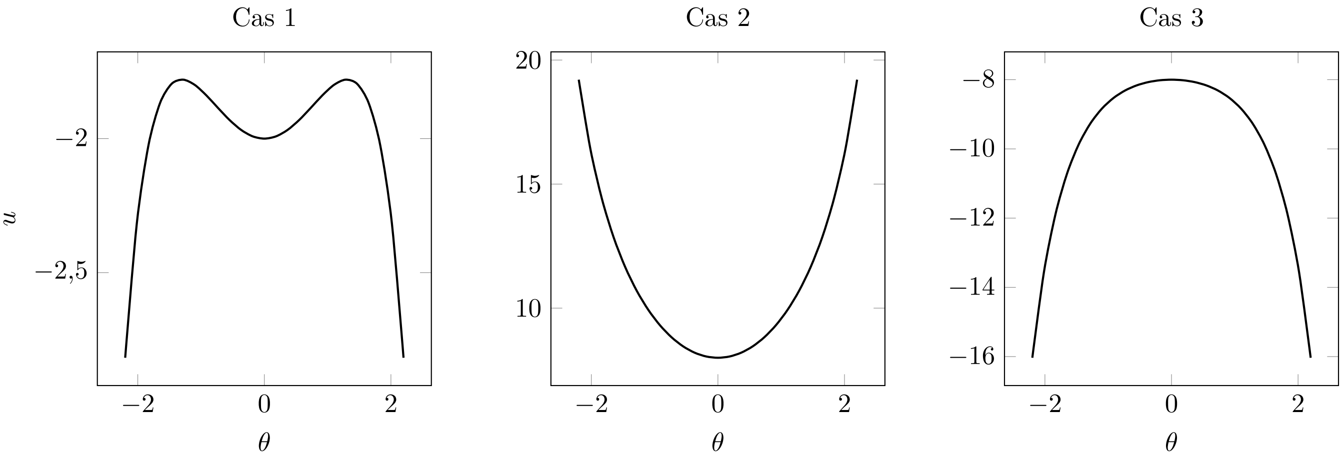
1. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le point M.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} du point M en fonction de m, g a et θ. On considérera que l'énergie potentielle de pesanteur de M est nulle en O.
3. Exprimer l'énergie potentielle électrostatique E_{pe} en fonction de θ.
4. Déduire des questions précédentes, l'énergie potentielle réduite totale du point M, définie par la relation

$$u = \frac{E_p}{mga} = \frac{E_{pp} + E_{pe}}{mga} \tag{1}$$

   On montrera qu'elle se met sous la forme

$$u(\theta) = -\frac{4\lambda^3}{\cos(\theta/2)} + 1 - \cos(\theta) \tag{2}$$

   en précisant l'expression de λ^3. Quelle est la dimension physique de λ ?
5. Chercher les positions d'équilibre pour le point M. Le problème étant symétrique par rapport à l'axe Oz, on pourra se limiter à $\theta \in [0, \pi[$. On pourra distinguer les trois cas suivants :
   — $\lambda < 0$;
   — $0 < \lambda < 1$;
   — $\lambda > 1$.
6. On donne ci-dessous l'allure de la fonction $u(\theta)$ dans les trois cas précédents :



Associer à chaque courbe la valeur de λ correspondante. Indiquer, dans chaque cas, les positions d'équilibre et préciser leur nature stable ou instable.

7. Lorsque le point O est une position d'équilibre stable, déterminer une une approximation parabolique de l'énergie potentielle du point matériel de la particule autour de O de la forme $E_p(\theta) \approx A\theta^2$ et donner l'expression de A.
8. Donner l'expression de l'énergie mécanique du point M en fonction de θ et $\dot{\theta}$. Justifier que l'énergie mécanique de M est constante. (On dit que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement)
9. En dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps, déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\theta(\mathrm{t})$ et en déduire la période T des petites oscillations autour de O en fonction de a, g et λ.
10. Donner l'expression de T en fonction de λ et T_0, où T_0 est la période propre d'un pendule simple de longueur a.

Exercice 2 : Chambre à bulles

On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se forment au passage du proton et permettent de visualiser sa trajectoire).

Un proton de masse m et de charge e, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ en un point fixe O ; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -K\vec{v}$, où K est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse du proton à l'instant t.

Par la suite, on posera $\omega = \frac{eB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{K}$.

1. Faire le bilan des forces exercées sur le proton se déplaçant dans le liquide (on négligera le poids du proton) et établir l'équation différentielle satisfaite par la vitesse $\vec{v}$ du proton.

On désigne par $(Oxyz)$ un trièdre orthogonal direct lié au référentiel galiléen, et par $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base de vecteurs unitaires qui lui est associée. On choisit $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$.

2. Si la force de frottement est négligeable, que peut-on dire de l'énergie cinétique du proton ? Rappeler, dans ce cas, quelle est la trajectoire du proton et déterminer les caractéristiques de cette trajectoire.
3. Qualitativement, quelle sont les modifications apportées par la force de frottement fluide sur cette trajectoire ?
4. Montrer que le mouvement du proton se fait dans le plan (Oxy) et que l'équation différentielle de la question 1 peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles :
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = av_y - bv_x \\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -av_x - bv_y \end{cases} \tag{1}$$
Donner les expressions de a et b.
5. On pose j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$. Pour résoudre le système d'équations différentielles précédent, on introduit la vitesse complexe
$$\underline{V} = v_x + jv_y \tag{2}$$
Montrer que les équations différentielles réelles (1) sont équivalentes à une unique équation différentielle complexe.
6. Déterminer la solution $\underline{V}(t)$ de l'équation différentielle déterminée à la question précédente.
7. En déduire les expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$.
8. Déduire de $\underline{V}(t)$ l'expression de $\underline{X}(t) = x(t) + jy(t)$ en fonction de τ, ω, v_0 et t. Déterminer la limite, notée $\underline{X}_\infty$ de $\underline{X}(t)$ lorsque $t \to \infty$.
9. En déduire la position limite $M_\infty(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de ω, τ, et v_0. Donner l'allure de la trajectoire.