

DM10 : Thermodynamique, Forces centrales

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous rendrez une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : PLANÈTES EXTRASOLAIRES

Une exoplanète est une planète tournant autour d'une étoile autre que notre soleil, c'est-à-dire une planète n'étant pas dans notre système solaire.

La première a été détectée en 1995 par l'équipe de l'astronome Michel Mayor. Cette première planète extrasolaire orbite autour d'une étoile de la séquence principale, 51 Peg. Cependant, les 334 exoplanètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009 n'ont pas été observées directement mais via les perturbations qu'elles provoquent sur leur étoile. Pour l'instant il est impossible d'observer visuellement la surface de ces planètes.

Une planète est dite tellurique si elle est analogue en masse et en composition à la Terre ; elle est dite géante si elle est comparable à Jupiter. Parmi les 334 planètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009, la plupart sont gigantesques, de type jovienne, et on n'en a pas encore trouvé de semblables à la Terre. De plus, il existe d'autres étoiles qui sont entourées d'un disque de poussière qui pourrait être un système planétaire en formation.

Toutefois il y en a trois qui semblent être différentes. Leur masse est comprise entre 7 et 20 fois celle de la Terre, ce qui en fait de très petites exoplanètes. Et elles seraient les premières planètes rocheuses découvertes jusqu'à aujourd'hui. La pesanteur sur ces exoplanètes serait trois fois plus importante que sur la Terre. Les étoiles qui abritent ces trois spécimens sont relativement près de nous. L'étoile 55 Can ε se trouve à 43,6 al (années lumières), Gliese 436 β à 33,2 al et Mu Arae δ à 50 al. Deux de ces étoiles sont de type spectral G, c'est-à-dire semblables à notre Soleil.

On s'intéresse tout spécialement au cas de l'étoile 51 Peg (Peg pour Pegasi car dans la constellation de Pégase), vraisemblablement accompagnée d'une planète orbitant en 4 jours. Cette étoile est de type solaire. Pour les calculs on supposera sa masse égale à celle du soleil. Le système constitué par l'étoile et sa planète est considéré comme isolé, dans le référentiel d'étude \mathcal{R} supposé galiléen.

Données numériques :

- | | |
|--|---|
| — Constante gravitationnelle $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI ; | — Distance Terre-Soleil 1 au = $1,5 \times 10^{11}$ m ; |
| — Masse du Soleil $M_S = 2,0 \times 10^{30}$ kg ; | — Rayon du Soleil $R_S = 7 \times 10^8$ m ; |
| — Masse de la Terre $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg ; | — Rayon de la Terre $R_T = 6,4 \times 10^6$ m ; |
| — Masse de Jupiter $M_J = 2,0 \times 10^{27}$ kg ; | — Rayon de Jupiter $R_J = 7,1 \times 10^7$ m. |

- Rappeler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle entre la planète P et son étoile E , de masses respectives m et M assimilées à des points matériels. Établir l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ correspondante en prenant $E_p(\infty) = 0$. On posera $\vec{EP} = r \vec{e}_r$ où \vec{e}_r est un vecteur unitaire.
- Montrer que le mouvement de P est plan en supposant que l'étoile est fixe dans \mathcal{R} .

On admettra par la suite que le mouvement est toujours plan même si l'étoile est mobile.

On commence par négliger la masse de la planète devant celle de l'étoile, ce qui permet de considérer l'étoile comme fixe.

- Pour un mouvement circulaire de rayon a et de période T , établir l'expression du rapport $X = \frac{a^3}{T^2}$ et commenter le résultat.
- Donner un ordre de grandeur du rayon de la trajectoire circulaire d'une planète orbitant en 4 jours autour de l'étoile 51 Peg.

On s'intéresse maintenant à une orbite elliptique, de demi-grand axe a et d'excentricité e . On rappelle que l'excentricité d'une ellipse est notamment le rapport c/a où c représente la distance d'un des foyers au centre de symétrie de la trajectoire.

- Soient v_m et v_M les valeurs respectivement minimale et maximale de la vitesse de la planète sur son orbite. Pour quelles points caractéristiques de cette orbite sont-elles obtenues ? Justifier précisément la réponse.
- On note r_m et r_M les distances à l'étoile correspondant respectivement à v_m et v_M . À partir de la conservation du moment cinétique, établir une relation entre r_m , r_M , v_m et v_M . En déduire le rapport $\frac{v_m}{v_M}$ en fonction de e uniquement.
- En utilisant la conservation de l'énergie mécanique obtenir indépendamment de ce qui précède une expression reliant v_m , v_M , a et e et les paramètres du système. Déterminer alors v_M en fonction de a , e , M et G .

8. Soit v_0 la vitesse qu'aurait la planète sur une orbite circulaire de rayon a . Déterminer $\frac{v_M}{v_0}$ en fonction de e uniquement. Calculer ce rapport pour $e = 0,67$ (Cas du candidat exoplanète 16 CygB)

On tient compte maintenant du rapport des masses de la planète et de l'étoile tout en supposant $m \gg M$. On peut supposer que les résultats obtenus dans les questions précédentes restent valables, sauf que l'étoile est maintenant considérée comme mobile.

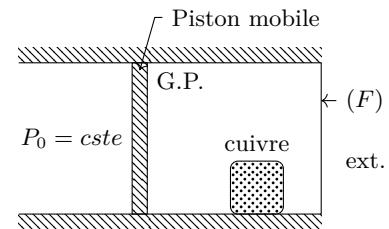
On s'intéresse à l'exoplanète 51-PegasiB d'excentricité $e = 0,014$ (trajectoire quasi circulaire) et de période de révolution très petite (4,2 jours) comparée aux périodes de révolution des planètes du système solaire.

9. Définir la position du barycentre O du système étoile-planète. En supposant O fixe dans le référentiel d'étude, trouver la relation entre les vitesses V de l'étoile et v de la planète.
10. Exprimer, pour une orbite circulaire, V en fonction de m , M , G et de la période T du mouvement.
11. D'après les observations, les plus courtes périodes mesurées sont de 4 jours, et la vitesse V de l'étoile est de 60 m s^{-1} . Évaluer la masse m de la planète. S'agit-il d'une planète tellurique ou géante ?
12. Dans le cas d'une orbite tellurique, dont la période T serait aussi de 4 jours, évaluer la masse m pour $e = 0,67$ et $V_M = 10 \text{ m s}^{-1}$, où V_M est la vitesse maximale de l'étoile qui sera aussi considérée de type solaire.

Exercice 2 : TRANSFORMATION THERMODYNAMIQUE

On étudie un système constitué de $n = 1 \text{ mol}$ d'air assimilé à un gaz parfait diatomique et d'une masse $m = 250 \text{ g}$ de cuivre solide. L'ensemble {air+cuivre} se trouve dans un cylindre schématisé ci-contre ; on précise que :

- le piston est mobile, de masse négligeable et glisse sans frottement, les autres parois sont fixes ;
- les éléments hachurés sont athermanes (c-à-d. imperméables aux transferts thermiques), tandis que la paroi (F) permet ces transferts ;
- l'ensemble se trouve dans l'atmosphère à la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$.



1. Que peut-on dire de la pression du gaz qui se trouve dans le cylindre ?
2. Définir la capacité thermique à volume constant C_V d'un système thermodynamique. Donner l'expression de C_V pour un gaz parfait diatomique.
3. Donner la capacité thermique C_c du morceau de cuivre.

La température extérieure étant restée très longtemps égale à $T_0 = 27^\circ\text{C}$, le fond (F) du cylindre est mis en contact avec un thermostat à la température T_1 ; on laisse le système atteindre l'équilibre. Le volume V occupé par le gaz subit une diminution relative de 5 % à partir de la valeur initiale V_0 .

4. Calculer la valeur numérique de V_0 .
5. Exprimer le volume final V_1 en fonction de V_0 , calculer la valeur numérique de $\Delta V = V_1 - V_0$.
6. En déduire la température T_1 finale en fonction de la température initiale T_0 .
7. Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique entre deux états d'équilibre quelconques d'un système fermé globalement immobile dans le référentiel d'étude.
8. Exprimer la variation d'énergie interne du système lors de la transformation précédente en fonction de $\Delta T = T_1 - T_0$, C_V et C_c . Calculer sa valeur numérique.
9. Exprimer le travail W reçu par le système en fonction de ΔV et P_0 . Calculer sa valeur numérique.
10. En déduire la valeur du transfert thermique Q reçu par le système. Interpréter le signe de Q .
11. Expliquer succinctement comment changent les résultats précédents s'il n'y a pas de cuivre dans le cylindre.

Données :

- capacité thermique massique du cuivre : $c = 400 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$;
- constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.