DS5 : Molécules, ondes et cinématique – corrigé

— Durée : 4h.
— La calculatrice est autorisée.
— Chaque réponse doit être justifiée.
— Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : Solubilité de différentes espèces

1. Les différentes interactions de Van der Waals sont :
   — interactions de Keesom : interactions dipôle permanent – dipôle permanent entre molécules polaires ;
   — interactions de Debye : interactions dipôle permanent – dipôle induit entre molécules polaires et polarisables ;
   — interactions de London : interactions dipôle instantané – dipôle induit entre molécules polarisables.

   L'énergie de liaison des liaisons de Van der Waals est comprise entre 1 et $10\,\mathrm{kJ\,mol^{-1}}$.
2. Une liaison hydrogène est une liaison formée entre un atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif (N, O ou F) et le doublet non liant d'un autre atome. L'énergie de liaison associée est de l'ordre de $20\,\mathrm{kJ\,mol^{-1}}$.
3. L'eau est un solvant polaire et protique. Aucun des gaz proposés n'est polaire ou protique. Les seuls interactions de Van der Waals qui pourront participer à la solubilité des gaz dans l'eau sont donc liées à la polarisabilité du gaz (liaisons de Debye et London). Plus les molécules de gaz sont grosses, plus elles sont polarisables et plus ces interactions sont fortes. On s'attend donc à ce que les molécules plus grosses soient plus solubles , et c'est bien ce que l'on observe.
4. (a) On commence par déterminer les configurations électroniques des éléments pour déterminer leur nombre d'électrons de valence : $[_6\mathrm{C}] = 1s^2\underbrace{2s^22p^2}_{4\text{ e.v.}}$; $[_8\mathrm{O}] = 1s^2\underbrace{2s^22p^4}_{6\text{ e.v.}}$;$[_{16}\mathrm{S}] = 1s^22s^22p^6\underbrace{3s^23p^4}_{6\text{ e.v.}}$.

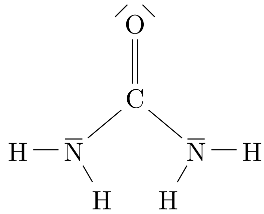
   Puis on propose les représentations de Lewis suivantes :
   — Pour CO_2 : $4 + 2\times 6 = 16$ e.v. soit 8 doublets : $\langle O = C = O \rangle$
   — Pour SO_2 : $6 + 2\times 6 = 18$ e.v. soit 9 doublets : $\langle O = \overline{S} = O \rangle$

   (b) Les molécules adoptent une géométrie qui minimise l'énergie d'interaction entre les paires d'électrons. L'énergie d'interaction est minimale lorsque les paires sont le plus éloignées possibles. Dans la molécule de SO_2, le doublet non liant présent sur le soufre repousse les électrons de liaison, ce qui à tendance à couder la molécule.

   (c) La molécule de CO_2 étant linéaire, les moments dipolaires des liaisons s'annulent et son moment dipolaire total est nul.
   Pour la molécule de SO_2, on commence par calculer le moment dipolaire d'une liaison $S - O$, on a $\mu_{\mathrm{SO}} = \ell_{\mathrm{SO}} \times \delta = \ell_{\mathrm{SO}} \times I_{\mathrm{SO}} \times e$. Enfin on fait la somme vectorielle des deux moments dipolaires de liaisons et on trouve que le moment dipolaire total est $\mu = 2\mu_{\mathrm{SO}}\cos(\alpha/2) = 5{,}44\times 10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$

   (d) La molécule de SO_2 est polaire tout comme la molécule d'eau. Elle est donc beaucoup plus soluble dans l'eau que la molécule de CO_2 qui est apolaire.
5. L'urée est un composé organique de formule $(NH_3)_2CO$. L'urée est soluble dans l'eau à hauteur de 119 g d'urée pour 100 g d'eau à 25 °C.

   (a) On détermine la configuration électronique de l'azote pour trouver ses électrons de valence (on a déjà déterminé les électrons de valence de C et O, et H n'en a qu'un) : $[_7\mathrm{N}] = 1s^2\underbrace{2s^22p^3}_{5\text{ e.v.}}$. La molécule d'urée possède donc $2\times(5+2)+4+6 = 24$ électrons de valence, soit 12 doublets. On place le carbone au centre de la structure et on propose la représentation de Lewis suivante :

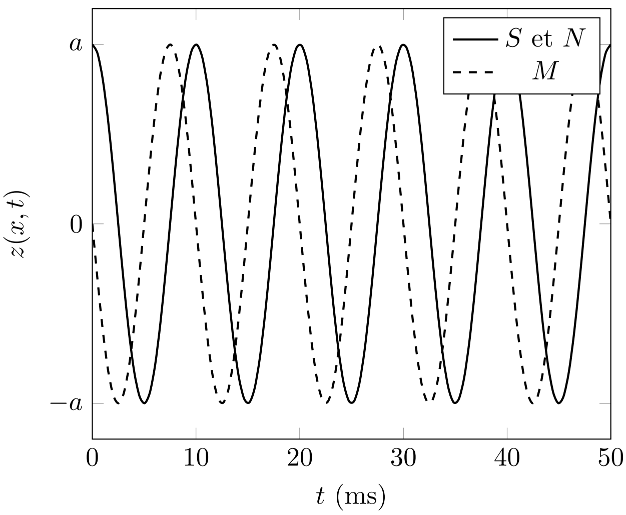


(b) Dans la molécule d'urée, les liaisons sont polarisées. Vu la géométrie de la molécule, il est très probable que la molécule soit globalement polaire. Mais la bonne solubilité de l'urée dans l'eau s'explique sûrement majoritairement par la présence de liaisons NH qui permettent à la molécule de former des liaisons hydrogène avec les molécules d'eau.

Exercice 2 : Cuve à ondes

I – Lame vibrante

1. La longueur d'onde est $\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = 3{,}6\,\text{mm}}$
2. Le nombre d'onde est $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1{,}75 \times 10^3\,\text{rad}\,\text{m}^{-1}$
3. L'onde se propage suivant les x croissants, donc on a $z(x,t) = z(0, t - x/c) = a\cos(2\pi f(t - x/c))$ soit finalement $\boxed{z(x,t) = a\cos(2\pi f t - kx)}$
4. Les oscillations aux points S et N sont en phase et les oscillations en M sont en retard de 3/4 de période. On a les représentations suivantes :



II – Interférences

5. Pour que les interférences entre les deux ondes soient destructives, il faut que le déphasage entre les deux soit de la forme $\Delta\varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi$. Comme $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$, on a la condition d'interférences destructives : $\boxed{d_2 - d_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda}$
6. (a) Sur la partie $x < -\frac{a}{2}$ de l'axe Ox, on a $d_2 - d_1 = a$. On en conclut donc qu'il existe un entier n tel que $\boxed{a = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda.}$

   (b) Sur le segment $[S_1S_2]$, $d_2 - d_1$ varie de $-a$ à a. On remarque sur la figure qu'il y a entre S_1 et S_2 8 positions qui donnent des interférences destructives.
   - En S_1, on a $d_2 - d_1 = a = (n_1 + \frac{1}{2})\lambda$;
   - En S_2, on a $d_2 - d_1 = -a = -\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda = \left(-n_1 - 1 + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

   Comme entre $-n_1 - 1$ et n_1 exclus il y a exactement $2n_1$ nombres entiers, on en conclut que $2n_1 = 8$ et donc $n_1 = 4$. Donc finalement $a = \frac{9}{2}\lambda$ ou $\boxed{\frac{a}{\lambda} = \frac{9}{2}}$

Exercice 3 : Détection d'étoiles doubles par interférométrie

1. On a $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$ et $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$. La fréquence des ondes lumineuses est $\boxed{f = 5{,}0 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}}$
2. On utilise directement la formule de Fresnel avec $A_1 = A_2 = A$ et on trouve $\boxed{S = \sqrt{2}A\sqrt{1+\cos(\Delta\varphi)}}$.
3. L'intensité lumineuse reçue en M est $I(M) = 2\beta\langle S^2\cos^2(\omega t)\rangle = \beta S^2$ (car $\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$) On a donc finalement

$$\boxed{I(M) = 2\underbrace{\beta A^2}_{I_0}(1+\cos(\Delta\varphi)) = 2I_0(1+\cos(\Delta\varphi))} \tag{1}$$

4. Le déphasage est $\boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda}}$. Comme les ondes lumineuses se propagent dans l'air, $\delta(M)$ correspond à la différence de distance parcourue par les deux ondes par rapport à un point où elles sont en phase donc on a finalement $\boxed{\delta(M) = S_2M - (HS_1 + S_1M) = r_2 - r_1 - HS_1}$
5. On a $r_1 = \sqrt{D^2 + y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = D\sqrt{1 + \frac{y^2 + (x-\frac{a}{2})^2}{D^2}}$ soit $\boxed{r_1 \approx D\left(1 + \frac{y^2+(x-\frac{a}{2})^2}{2D^2}\right)}$ car $\frac{y^2+(x-\frac{a}{2})^2}{D^2} \ll 1$. De la même manière, on a $\boxed{r_2 \approx D\left(1 + \frac{y^2+(x+\frac{a}{2})^2}{2D^2}\right)}$
6. On exprime la différence de marche δ en fonction de x. Comme $\varepsilon \ll 1$, on a $HS_1 \approx a\varepsilon$. On a alors

$$\delta = D\left(1 + \frac{y^2 + \left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{2D^2}\right) - D\left(1 + \frac{y^2 + \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{2D^2}\right) - a\varepsilon \tag{2}$$

$$= \frac{ax}{D} - a\varepsilon = a\left(\frac{x}{D} - \varepsilon\right) \tag{3}$$

Avec l'expression de l'intensité trouvée à la question 3, et celle de $\delta(M)$ on trouve l'expression demandée

$$\boxed{I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D} - \varepsilon\right)\right)\right)} \tag{4}$$

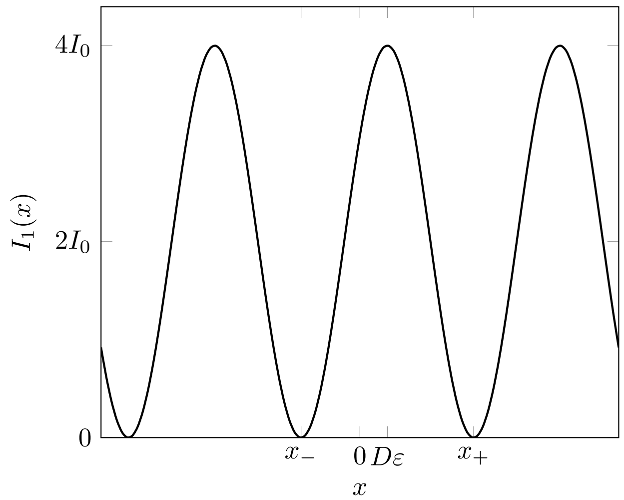
7. Un déphasage nul entre les deux ondes, correspond à une différence de marche nulle et donc $\boxed{x_0 = \varepsilon D}$
8. Les annulations de l'intensité autour de x_0 interviennent pour $\Delta\varphi = \pm\pi$, soit

$$\boxed{\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D} - \varepsilon\right) = \pm\pi \Leftrightarrow x_\pm = D\left(\varepsilon \pm \frac{\lambda}{2a}\right)} \tag{5}$$

L'interfrange est

$$\boxed{i = x_+ - x_- = \frac{D\lambda}{a}} \tag{6}$$

9. Représentation de $I(x)$:



10. Pour déterminer l'intensité $I_2(x)$, il faut changer ε en $-\varepsilon$ et on obtient

$$\boxed{I_2(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D}+\varepsilon\right)\right)\right)} \tag{7}$$

11. L'intensité totale est $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$. On a alors

$$I(x) = 2I_0\left[2+\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D}+\varepsilon\right)\right)+\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{x}{D}-\varepsilon\right)\right)\right] \tag{8}$$

On utilise la formule $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, on obtient :

$$\boxed{I(x) = 4I_0 + 4I_0\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon\right)} \tag{9}$$

12. — La valeur max de $I(x)$ est atteinte lorsque $\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) = 1$ et vaut $\boxed{I_{\text{max}} = 4I_0 + 4I_0\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon\right)}$;
    — La valeur min de $I(x)$ est atteinte lorsque $\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) = -1$ et vaut $\boxed{I_{\text{min}} = 4I_0 - 4I_0\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon\right)}$;
    — Le contraste s'exprime donc comme $C = \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon\right)$. Si $\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon\right) < 0$, alors il faut échanger I_{max} et I_{min} et le contraste devient $C = -\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon\right)$. Donc finalement, le contraste est $\boxed{C = \left|\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon\right)\right|}$

13. Le contraste s'annule lorsque $\frac{2\pi a}{\lambda}\varepsilon = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit $\boxed{a_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2\varepsilon}}$. Le contraste s'annule lorsque les figures d'interférences dues aux deux étoiles sont « en opposition de phase », c'est-à-dire lorsque un maximum d'intensité de la figure d'interférence due à l'étoile E_1 est superposé à un minimum d'intensité de la figure d'interférence de l'étoile E_2 .

14. La plus petite distance pour que les franges disparaissent est $a_{\text{min}} = a_0 = \frac{\lambda}{4\varepsilon}$. On en déduit que la distance angulaire entre les deux composantes de l'étoile double est $\boxed{2\varepsilon = \frac{\lambda}{2a_{\text{min}}} = 4{,}23\times10^{-6}\ \text{rad}}$. Cette distance angulaire est beaucoup plus petite que le pouvoir de résolution de l'œil qui est de l'ordre de 3×10^{-4} rad. On ne peut donc pas distinguer les deux composantes de l'étoile double à l'œil nu à travers la lunette.

Exercice 4 : La cycloïde

I. **Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.**

1. Comme la roue roule sans glisser sur le sol, la distance parcourue est égale à la longueur de l'arc de cercle compris entre $M(t)$ et $H(t)$, soit $\boxed{\overline{OH} = R\theta(t)}$.
2. En projetant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur les axes Ox et Oz on obtient $\boxed{\overrightarrow{AM} = -R\sin(\theta)\vec{u}_x - R\cos(\theta)\vec{u}_z}$.
3. On décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$. Or on a déjà vu que $\overrightarrow{OH} = R\theta(t)\vec{u}_x$, on voit clairement sur le schéma que $\overrightarrow{HA} = R\vec{u}_z$ et on a trouvé $\overrightarrow{AM}$ à la question précédente. En additionnant les trois on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = [R\theta(t) - R\sin(\theta)]\,\vec{u}_x + [R - R\cos(\theta)]\,\vec{u}_z}$$

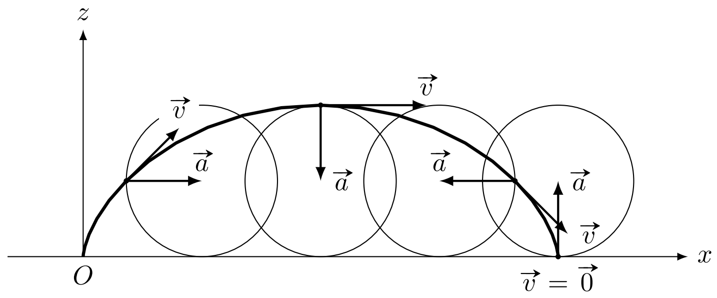
Ce qui correspond bien aux équations demandées.

II. **Vecteur vitesse.**

4. La vitesse du point A est la même que celle du point H et est constante. On a $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = v_0\vec{u}_x$. Or d'après la question 1, $\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_x$. La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ est donc constante est vaut $\boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}}$.
5. Comme la distance AM est fixe égale à R, le mouvement est circulaire. En outre on vient de montrer que la vitesse de rotation est constante. Le mouvement est donc également uniforme.
6. Les composantes du vecteur vitesse s'obtiennent par dérivation de celles du vecteur position, on obtient :

$$\begin{cases} v_x(t) = R\dot{\theta}(t)\,[1-\cos\theta(t)] \\ v_z(t) = R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

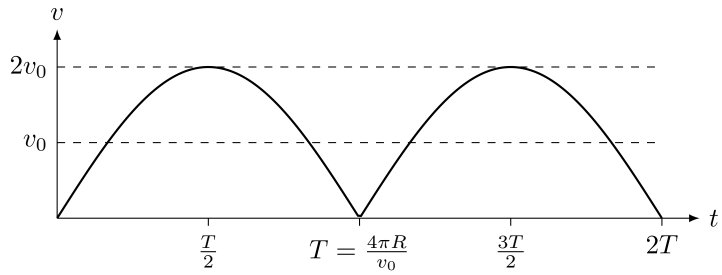
7. Schéma :



8. La norme v de $\vec{v}$ est : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\dot{\theta}\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}$ soit $\boxed{v = v_0\sqrt{2 - 2\cos\theta}}$

9. On a $1 - \cos\theta = 1 - \cos 2\frac{\theta}{2} = 1 - (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

   L'expression précédente se simplifie alors en $\boxed{v = 2v_0\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$



III. **Vecteur accélération.**

10. On obtient les composantes du vecteur accélération en dérivant celles du vecteur vitesse, on obtient :

$$\begin{cases} a_x = R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ a_z = R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

11. Voir schéma précédent.

12. La norme de v $\boxed{\text{augmente pour } \theta \in [0, \pi]}$ et elle $\boxed{\text{diminue pour } \theta \in [\pi, 2\pi]}$

13. Le point correspondant à $\theta_4 = 2\pi$ est un *point de rebroussement*, la vitesse de M est nulle alors que l'accélération ne l'est pas.

14. La norme a du vecteur accélération vaut $\boxed{a = R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R}}$ et est donc constante. Pour le pneu en question elle vaut : $\boxed{a \simeq 3{,}7 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$.

15. On peut exprimer le vecteur $\boxed{\vec{a} \text{ comme } \vec{a} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{AM} = \dot{\theta}^2\overrightarrow{MA}}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc effectivement toujours dirigé de M vers A.