

## TD20 : Forces centrales

### Exercice 1 : LA PLANÈTE MARS

1. On utilise la troisième loi de Kepler

$$\frac{T_T^2}{R_{TS}^3} = \frac{T_M^2}{R_{MS}^3} \quad \text{soit} \quad R_{MS} = R_{TS} \left( \frac{T_M}{T_T} \right)^{2/3} \approx 2,30 \times 10^8 \text{ km} \quad (1)$$

2. La relation entre le rayon de Mars  $R_M$ , son diamètre apparent  $\alpha$  et la distance Terre-Mars  $d_{TM} = R_{MS} - R_{TS}$  est

$$2R_M = \alpha d_{TM} \quad \text{soit} \quad R_M = \frac{\alpha}{2} (R_{MS} - R_{TS}) \approx 3534 \text{ km} \quad (2)$$

3. On applique à nouveau la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_M} \quad \text{soit} \quad m_M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \approx 6,86 \times 10^{23} \text{ kg} \quad (3)$$

4. L'énergie potentielle de pesanteur à la surface de Mars est

$$E_{pM} = \frac{-Gm_M m}{R_M} \approx -1,29 \times 10^8 \text{ J} \quad (4)$$

5. Pour que le vaisseau quitte l'attraction de la planète Mars, il faut lui donner une énergie cinétique suffisante pour que son énergie mécanique soit nulle soit

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = E_{pM} \quad \text{soit} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_M}{R_M}} \approx 5,1 \text{ km s}^{-1} \quad (5)$$

6. Pour quitter le système solaire, il faut échapper à l'attraction de Mars et du Soleil, l'énergie potentielle totale est  $E_p = E_{pM} + E_{pS}$ . En procédant de la même manière que pour la question précédente, on obtient

$$v_2 = \sqrt{2G \left( \frac{m_M}{R_M} + \frac{m_S}{R_{MS}} \right)} \approx 34,50 \text{ km s}^{-1} \quad (6)$$

### Exercice 2 : COMÈTE DE HALLEY

1. En appliquant la troisième loi de Kepler à la Terre et à la comète, on obtient

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_T^2}{R_{TS}^3} \quad \text{soit} \quad a = R_{TS} \left( \frac{T}{T_T} \right)^{2/3} \approx 18 \text{ au} \quad (1)$$

L'excentricité de l'ellipse est

$$e = \frac{a - d_p}{a} \approx 0,967 \quad (2)$$

où  $d_p$  est la distance du périhélie.

2. L'énergie mécanique de la comète est  $E_m = -\frac{Gmm_S}{2a}$ . Au périhélie, son énergie potentielle est  $E_p = -\frac{Gmm_S}{d_p}$ , on peut en déduire son énergie cinétique et sa vitesse au périhélie est

$$v_p = \sqrt{2Gm_S \left( \frac{1}{d_p} - \frac{1}{2a} \right)} \quad (3)$$

Or d'après la troisième loi de Kepler, on a  $m_S = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2}$ . On en déduit l'expression de  $v_p$  :

$$v_p = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{2a}{d_p} - 1} \approx 54,6 \text{ km s}^{-1} \quad (4)$$

De même, à l'aphélie, sa vitesse est

$$v_a = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{2a}{2a - d_p} - 1} \approx 912 \text{ m s}^{-1} \quad (5)$$

### Exercice 3 : TRAJECTOIRE D'UNE COMÈTE

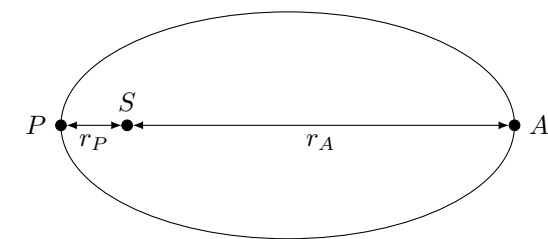
1. Pour une trajectoire parabolique,  $E_m = 0$  donc  $E_c = E_p$  et on peut calculer la vitesse  $v_P$  de la comète au périhélie comme :

$$\frac{1}{2} m v_P^2 = G \frac{mm_S}{r_P} \Leftrightarrow v_P = \sqrt{\frac{2Gm_S}{r_P}}. \quad (1)$$

Où  $m$  est la masse de la comète et  $m_S$  la masse du Soleil. On utilise la troisième loi de Képler pour exprimer  $Gm_S$  en fonction des caractéristiques de l'orbite de la Terre. On sait que  $v_T = \sqrt{\frac{Gm_S}{r_0}}$  donc  $Gm_S = r_0 v_T^2$ . On a alors

$$v_P = v_T \sqrt{\frac{2r_0}{r_P}} = v_T \sqrt{\frac{2}{\alpha}} = 20v_T = 600 \text{ km s}^{-1} \quad (2)$$

2. Schéma :



3. Avec l'équation de l'ellipse, on note que  $r_P = \frac{p}{1+e}$  et  $r_A = \frac{p}{1-e} = \frac{1+e}{1-e} r_P$ . Et, avec  $e = 1 - x$ , on trouve

$$r_A = \frac{2-x}{x} r_P = \frac{2-x}{x} \alpha r_0 \approx 100r_0 = 1,5 \times 10^{10} \text{ km}. \quad (3)$$

À cette distance, sa vitesse est (comme pour la question 1)

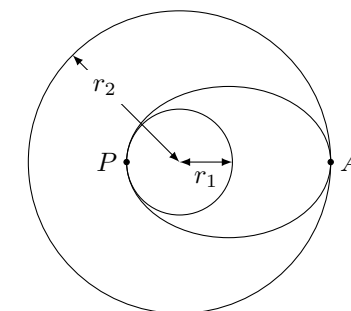
$$v_A = v_T \sqrt{\frac{2r_0}{r_A}} \approx 4,2 \text{ km s}^{-1} \quad (4)$$

4. la durée  $\tau$  correspond à une demi-période  $T$  de l'orbite de la comète, or la troisième loi de Képler donne  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} = \frac{4\pi^2}{r_0 v_T^2}$  donc on trouve

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{v_T} \sqrt{\frac{a^3}{r_0}} \approx \frac{\pi}{v_T} \sqrt{\frac{(r_A/2)^3}{r_0}} \approx 5,6 \times 10^9 \text{ s} = 176 \text{ ans} \quad (5)$$

### Exercice 4 : ORBITE DE TRANSFERT DE HOHMAN

1. Schéma



2. — Sur l'orbite basse :  $E_{m,1} = -\frac{Gmm_T}{2r_1}$  ;  
 — Sur l'orbite géostationnaire :  $E_{m,2} = -\frac{Gmm_T}{2r_2}$  ;  
 — Sur l'orbite de transfert :  $2a = 2r_1 + r_2 - r_1 = r_1 + r_2$  donc  $E_{m,t} = -\frac{Gmm_T}{r_1 + r_2}$  ;
3. — En  $P$  :  $\Delta E_P = E_{m,t} - E_{m,1} = Gmm_T \left( \frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)$   
 — En  $A$  :  $\Delta E_A = E_{m,2} - E_{m,t} = Gmm_T \left( \frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2r_2} \right)$

4. La durée  $\tau$  du transit est égale à une demi période de l'orbite de transfert. On utilise la troisième loi de Képler :

$$\frac{4\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \Leftrightarrow \tau = \pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_T}} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3}{Gm_T}} \quad (1)$$

5. La vitesse  $v_1$  sur l'orbite basse est  $v_1^2 = \frac{Gm_T}{r_1}$ . En  $P$ , on a  $E_{m,t} = -\frac{Gmm_T}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{Gmm_T}{r_1}$  soit  $v_P^2 = v_1^2 \frac{2r_2}{r_1+r_2}$ . On en déduit que (avec un raisonnement identique pour  $\Delta v_A$ )

$$\Delta v_P = v_1 \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \Delta v_A = v_2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}} \right) \quad (2)$$

#### Exercice 5 : MODÈLE CLASSIQUE D'UN TROU NOIR

- Si la vitesse de libération est égale à  $c$ , on a  $c^2 = \frac{2Gm}{R_S}$ . Soit  $R_S = \frac{2Gm}{c^2}$ .
- On trouve les résultats suivants
  - Pour la Terre :  $R_S = 8,9 \text{ mm}$  et une densité  $2,0 \times 10^{30} \text{ kg m}^{-3}$
  - Pour le Soleil :  $R_S = 3,0 \text{ km}$  et une densité  $1,8 \times 10^{19} \text{ kg m}^{-3}$

#### Exercice 6 : EXPÉRIENCE DE RUTHERFORD

- La force d'interaction  $\vec{F}$  entre le noyau d'hélium de charge  $2e$  et le noyau d'or de charge  $Ze$  et l'énergie potentielle  $E_p$  correspondante sont :

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad E_p = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1)$$

- La particule  $\alpha$  n'est soumise qu'à des forces conservatives, donc son énergie mécanique est constante. Comme la particule vient de l'infini où son énergie potentielle est nulle, son énergie mécanique est :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (2)$$

- Comme la seule force appliquée à la particule  $\alpha$  est la force  $\vec{F}$  qui est centrale, donc de moment nul par rapport à  $O$ , le théorème du moment cinétique appliqué à la particule  $\alpha$  montre que son moment cinétique  $\vec{L}_O$  est une constante du mouvement. On a

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{v}_0 = (x_0 \vec{e}_x + b \vec{e}_y) \wedge m\vec{v}_0 \vec{e}_x = -mbv_0 \vec{e}_z \quad (3)$$

Au cours du temps, on a  $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

- On note  $C = r^2 \dot{\theta}$ , c'est une constante du mouvement. Donc  $\dot{\theta} = C/r^2$ . L'énergie mécanique s'écrit alors :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}}_{E_p^*(r)}. \quad (4)$$

$E_p^*(r)$  est l'énergie potentielle effective de la particule.

- Comme  $S$  est la position où  $r$  est minimum, on sait qu'en ce point  $\dot{r} = 0$ . La conservation de l'énergie mécanique s'écrit alors

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{mC^2}{2r_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}} \Leftrightarrow r_{\min}^2 - \frac{2K}{mv_0^2} r_{\min} - \frac{C^2}{v_0^2} = 0 \quad (5)$$

Cette équation a deux solutions dont la seule positive étant l'expression demandée.

$$r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{mbv_0^2}{K} \right)^2} \right] \quad (6)$$

- On remplace dans la relation précédente  $\frac{mbv_0^2}{K}$  par  $\frac{1}{\tan(\varphi/2)^2}$  et on utilise l'égalité  $1 + \frac{1}{\tan(x)^2} = \frac{1}{\sin(x)^2}$ . On obtient directement le résultat demandé.

- La distance d'approche est minimale pour  $\sin(\varphi/2) = 1$  soit  $\varphi/2 = \pi/2$  ou  $\varphi = \pi$ . La particule repart dans la direction opposée. Dans ce cas, on a  $r_{\min} = \frac{2K}{mv_0^2}$ .

- On donne l'énergie cinétique  $E_c$  des particules  $\alpha$ . On a alors

$$r_{\min} = \frac{K}{E_c} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E_c} \approx 2,3 \times 10^{-14} \text{ m} \quad (7)$$

#### Exercice 7 : PRÉCISION DU LANCEMENT D'UN SATELLITE GÉOSTATIONNAIRE

- L'énergie mécanique du satellite est  $E_0 = -\frac{Gm_T m}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2$ . Avec  $v_0^2 = Gm_T/r_0$  on a

$$E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1)$$

- L'énergie mécanique du satellite est  $E_m = -mv_0^2 + \frac{1}{2}m(v_0 + \Delta v)^2 \approx -\frac{1}{2}mv_0^2 + mv_0 \Delta v$ . On a négligé le terme en  $\Delta v^2$ . On sais aussi que l'énergie mécanique pour une orbite elliptique de demi grand axe  $a$  est

$$E_m = -\frac{Gmm_T}{2a} = -\frac{1}{2}mv_0^2 \frac{r_0}{a} \quad (2)$$

En égalant ces deux expressions de l'énergie mécanique, on obtient finalement

$$a = \frac{r_0}{1 - 2\frac{\Delta v}{v_0}} \approx r_0 \left( 1 + 2\frac{\Delta v}{v} \right) \quad (3)$$

On a fait un développement limité à l'ordre 1 de  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  et on a remplacé utilisé  $v_0 \approx v$ . Pour déterminer l'excentricité, on remarque que  $c = a - r_0 = 2r_0 \frac{\Delta v}{v}$  et on utilise l'expression de l'énoncé  $e = c/a$ .

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\frac{\Delta v}{v}}{1 + 2\frac{\Delta v}{v}} \approx 2\frac{\Delta v}{v} \quad (4)$$

- en appliquant la troisième loi de Képler, on a

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} \quad \text{donc} \quad \frac{T}{T_0} = \left( \frac{a}{r_0} \right)^{3/2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta T}{T_0} = \left( \frac{a}{r_0} \right)^{3/2} - 1 \approx 3\frac{\Delta v}{v} \quad (5)$$

- Pour que la vitesse de rotation apparente autour de la Terre n'excède pas un tour par an, il faut que  $\frac{\Delta T}{T} < \frac{1}{365}$  et donc on doit avoir

$$\frac{\Delta v}{v} < \frac{1}{3 \times 365} \approx 10^{-3} \quad (6)$$