TD26 : Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Transformateur

1. Si les courants i_1 et i_2 sont positifs, la règle de la main droite indique que le champ magnétique créé sera dirigé suivant $+\vec{e}_\theta$.
2. D'après l'expression de $\vec{B}_1$ on peut dire que l'unité de μ_0 est $\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$
3. Le flux du champ magnétique à travers une spire est :

$$\varphi = \iint \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r}\vec{e}_\theta \cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}z\,\vec{e}_\theta = \int_{r=R}^{R+a}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r}\mathrm{d}z\mathrm{d}r$$

4. L'intégrale précédente donne :

$$\varphi = \frac{\mu_0 N_1 i_1 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

5. Le flux total à travers les N_1 spires du circuit C_1 est

$$\Phi = \frac{\mu_0 N_1^2 i_1 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

6. Le flux propre d'un circuit parcouru par un intensité i est $\Phi_p = Li$ où L est l'inductance propre du circuit
7. On en déduit directement l'inductance propre $L_1 = \Phi/i_1$ soit

$$L_1 = N_1^2\frac{a\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

8. Le calcul de L_2 est exactement le même que celui de L_1 il faut juste remplacer N_1 par N_2 et on obtient :

$$L_2 = N_2^2\frac{a\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

9. Le flux du champ magnétique créé par un circuit 1 parcouru par un courant i_1 à travers le circuit 2 est $\Phi_{12} = Mi_1$.
10. Dans le cas présent, on a $\Phi_{12} = N_2\varphi$ soit :

$$M = N_1 N_2\frac{a\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

11. La tension u_1 au primaire est donnée par :

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

12. La tension u_2 au secondaire est donnée par :

$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

13. On utilise le résultat de la question 12 pour écrire

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{u_2}{M} - \frac{L_2}{M}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

que l'on injecte dans le résultat de la question 11 pour obtenir :

$$u_1 = \frac{L_1}{M}u_2 + \frac{M^2 - L_1L_2}{M}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

14. Avec les expressions de L_1, L_2 et M, on remarque que $M^2 - L_1L_2 = 0$ et $\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$. On en déduit

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

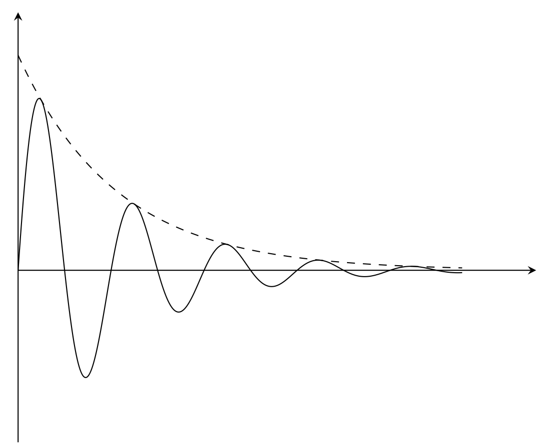
15. Les transformateurs permettent d'élever ou d'abaisser les tensions du réseau électrique.
16. Dans la modélisation que l'on a faite, il n'y a pas de pertes d'énergie et le rendement entre primaire et secondaire est égal à 1.
17. Pour des signaux continus, il n'y a pas de variation de champ magnétique dans le matériau magnétique donc pas de variation de flux, et donc pas de fem induite dans le secondaire. Un transformateur ne peut pas fonctionner avec des signaux continus.
18. On cherche à éviter la présence de courants de Foucault induits dans le matériau magnétique, en effet ils chauffent le matériau et induisent des pertes de puissance entre le primaire et le secondaire.

Exercice 2 : Oscillateur et induction

1. Le système étant au repos, le PFD appliqué à la barre donne $\sum\vec{F} = \vec{0}$ donc $\vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2} + \vec{P} = \vec{0}$ où $\vec{F}_{r1}$ et $\vec{F}_{r2}$ sont les forces exercées par chacun des ressorts.
La projection sur l'axe (Oz) donne : $-mg + 2k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ donc la longueur ℓ_{eq} des ressorts est $\boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$.
2. Le flux du champ magnétique à travers le circuit est $\boxed{\phi = \ell LB}$.
3. On applique la loi de Faraday $e_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ avec $\phi = \ell LB$ et $\ell = \ell_{eq} - z(t)$. Donc finalement $e_{ind} = L\dot{z}(t)B$
4. La force de Laplace qui s'exerce sur le circuit est $\vec{F}_l = i\vec{L}\wedge\vec{B}$ donc $\boxed{\vec{F}_l = -iLB\vec{e}_z}$
5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la barre : $m\vec{a} = \vec{F}_l + \vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2} + \vec{P}$. Avec $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$, $\vec{F}_{r1} = \vec{F}_{r2} = k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -kz(t)\vec{e}_z + \frac{mg}{2}\vec{e}_z$ et $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.
On obtient : $m\ddot{z} + iLB + 2kz = 0$; soit avec $i = \frac{e_{ind}}{R} = \frac{LB\dot{z}}{R}$, on obtient

$$\ddot{z} + \frac{L^2B^2}{mR}\dot{z} + \frac{2k}{m}z = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

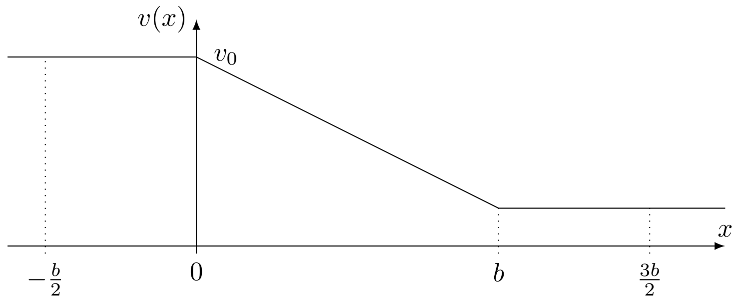
6. D'après l'équation précédente on trouve $\frac{\omega}{Q} = 2\alpha$ donc $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}}$
7. Si $\omega_0^2 - \alpha^2 > 0$ alors $\omega_0 > \alpha$ donc $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} > \frac{1}{2}$. L'oscillateur se trouve donc en régime pseudo-périodique.
8. En utilisant les conditions initiales données, on trouve $A = \frac{V_0}{\omega_0}$ et $\varphi = 0$. On représente l'allure de $z(t)$ ci-dessous :



9. Le travail de la force de Laplace est égal à la variation d'énergie cinétique de la barre. $\Delta E_c = -\frac{1}{2}mV_0^2 = W_l$. Ce travail est converti en chaleur par effet Joule dans la barre.

Exercice 3 : Une spire dans un champ magnétique (CCP TSI 2006)

1. Lorsque la spire pénètre dans la zone où règne le champ magnétique, le flux du champ magnétique à travers elle augmente, il y aura alors un courant induit dans la spire et elle va subir une force de freinage.
2. On choisit d'orienter le contour de la spire de N vers P, la normale à la spire est alors orientée dans la direction $\vec{e}_z$. Dans ces conditions, le flux du champ magnétique à travers la spire est :
   — pour $x < 0$, $\Phi = 0$
   — pour $0 \leq x \leq b$, $\Phi = Bax$
   — pour $x > b$, $\Phi = Bab$
3. La force électromotrice induite dans la spire est alors :
$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$
Elle est non nulle que lorsque $0 \leq x \leq b$ et vaut
$$e(t) = -Bav$$
et l'intensité qui circule dans la spire dans ce cas est
$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{Bav}{R}$$
On a choisi e et i allant de N vers P.
4. La force de Laplace est non nulle uniquement lorsque $0 \leq x \leq b$ et vaut
$$\vec{F}_L = iaB\vec{e}_x = -\frac{B^2a^2v}{R}\vec{e}_x$$
5. Le PFD donne
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_L = -\frac{B^2a^2}{R}\vec{v}$$
En écrivant $\vec{v} = v\vec{e}_x$ On obtient l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2a^2}{mR}v = 0$$
6. En utilisant la relation fournie, on obtient
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v + \frac{B^2a^2}{mR}v = 0$$
Soit en divisant par v :
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{B^2a^2}{mR} = 0$$
7. On intègre l'équation précédente, avec la condition initiale $v(0) = v_0$ on obtient :
$$v(x) = v_0 - \frac{B^2a^2}{mR}x$$
Cette équation est valable pour $0 \leq x \leq b$. On obtient l'allure suivante pour $v(x)$:



8. La spire conductrice pourra entrer totalement dans la zone de champ magnétique à condition que $v(b) \geq 0$, c'est à dire que
$$v_0 > \frac{B^2a^2b}{mR}$$
9. La condition précédente étant vérifiée, la variation d'énergie cinétique de la spire est
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m\left(v_0 - \frac{B^2a^2b}{mR}\right)^2 = \frac{B^2a^2b}{R}\left(v_0 - \frac{B^2a^2b}{2mR}\right)$$
L'énergie cinétique perdue par la spire a été convertie en chaleur par effet Joule dans la résistance de la spire.