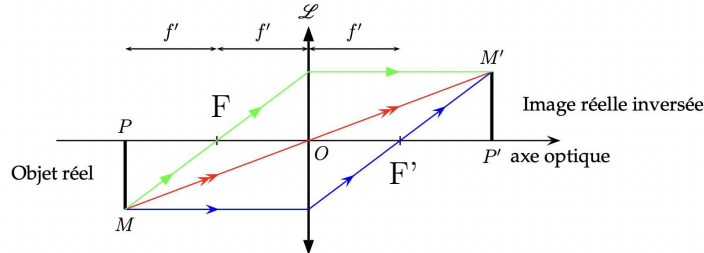


OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE ET ÉLECTRODINÉMIQUE

I. Étude d'un dispositif optique de photographie

I.1 Dans l'approximation de Gauss, les rayons sont paraxiaux, c'est-à-dire peu éloignés de l'axe optique et peu inclinés par rapport à l'axe optique.

I.2 La construction est la suivante :



$$\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

avec $\overline{OP} = -2f'$

On en déduit

$$\overline{OP'} = 2f'$$

Par ailleurs

$$\gamma = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = -1$$

L'image obtenue est ainsi réelle ($\overline{OP'} > 0$), de même taille ($|\gamma| = 1$) et inversée ($\gamma < 0$).

I.3 $OP = 35.10^3 \text{ km} \gg f'$ donc on peut considérer que l'objet est à l'infini.

L'image se formera ainsi dans le plan focal image de \mathcal{L} et $OP' = f'$.

I.4 Par définition

$$|\gamma| = \frac{d'}{d} = \frac{OP'}{OP}$$

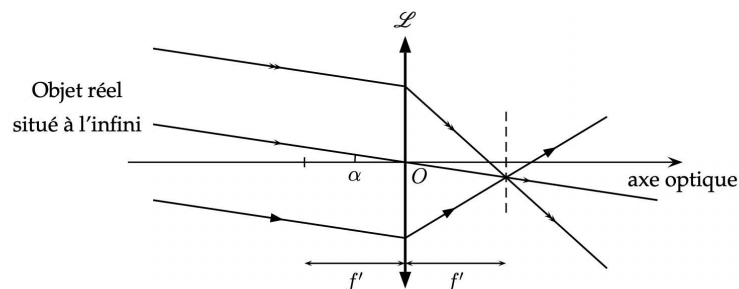
On en déduit

$$d = d' \frac{OP}{OP'} \quad \text{avec } OP = 35.10^6 \text{ m et } OP' = 5,0 \text{ m}$$

La dimension du plus petit objet détectable est donc $d = 7,0 \text{ m}$.

Le nombre N de pixels sur la largeur est $N = \frac{\ell}{d} = 1,0.10^4$.

I.5 Des rayons parallèles convergent au foyer secondaire image, dont on trouve la position en prolongeant le rayon passant par le centre :



I.6 Par définition, $f'_J = f'(\lambda_J)$, ce qui se traduit par :

$$f'_J = \frac{C}{n(\lambda_J) - 1} = \frac{C}{A + \frac{B}{\lambda_J^2} - 1} = \frac{C}{A - 1 + \frac{B}{\lambda_J^2}} = \frac{C}{(A - 1) \left(1 + \frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \right)}$$

d'où

$$f'_J = \frac{C}{A - 1} \left(1 + \frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \right)^{-1}$$

I.7 $\lambda_J \approx 6.10^{-7}$ m donc

$$\frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \simeq 2.10^{-3} \ll 1$$

On peut alors faire un DL de l'expression précédente pour obtenir :

$$f'_J = \frac{C}{A - 1} \left(1 - \frac{B}{(A - 1)\lambda_J^2} \right)$$

I.8 Le tableau donne

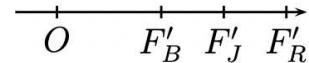
$$\lambda_B < \lambda_J < \lambda_R$$

donc

$$-\frac{1}{\lambda_B^2} < -\frac{1}{\lambda_J^2} < -\frac{1}{\lambda_R^2}$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit :

$$f'_B < f'_J < f'_R$$



I.9 Le stigmatisme se traduit par le fait que l'image d'un point est un point.

Le stigmatisme n'est pas vérifié ici car les foyers sont différents pour les longueurs d'ondes différentes.

Par conséquent, on obtient des aberrations chromatiques, c'est-à-dire que l'image d'un point non monochrome est une tache colorée, chaque couleur formant un point à une position légèrement différente. On a donc une image floue et irisée sur les bords.

I.10 En décomposant

$$A_{CL} = \overline{F'_B F'_R} = \overline{F'_B O} + \overline{O F'_R}$$

on obtient

$$A_{CL} = f'_R - f'_B$$

En réduisant au même dénominateur, $\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{f'_R - f'_B}{f'_B f'_R}$, et comme $f'_B f'_R = f_J'^2$, on obtient directement :

$$\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{A_{CL}}{f_J'^2}$$

I.11 $\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{n_B - 1}{C} - \frac{n_R - 1}{C} = \frac{n_B - n_R}{C} = \frac{n_B - n_R}{f'_J (n_J - 1)}$ car $C = f'_J (n_J - 1)$

Or, $K = \frac{n_B - n_R}{n_J - 1}$ donc

$$\frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R} = \frac{K}{f'_J}$$

Par identification, on obtient

$$A_{CL} = K f'_J$$

Application numérique :

$$A_{CL} = 7,0 \text{ cm}$$

I.12 D'après le théorème de Thalès dans les triangles :

En pointillés : $\frac{D/2}{f'_B} = \frac{A_{CT}}{F'_B H} \Rightarrow A_{CT} = \frac{D}{2 f'_B} \overline{F'_B H}$

En traits pleins : $\frac{D/2}{f'_R} = \frac{A_{CT}}{H F'_R} \Rightarrow A_{CT} = \frac{D}{2 f'_R} \overline{H F'_R}$

I.13 $A_{CL} = \overline{F'_B H} + \overline{H F'_R} = \frac{2 A_{CT}}{D} (f'_B + f'_R)$

d'où $A_{CT} (f'_B + f'_R) = \frac{D}{2} A_{CL}$

Or, $2f'_J = (f'_B + f'_R)$, ce qui donne $A_{CT} = \frac{D}{2} \frac{A_{CL}}{2f'_J}$. Comme $A_{CL} = K f'_J$, on obtient

$$A_{CT} = \frac{D K}{4}$$

I.14 $A \xrightarrow{\text{Lentille équivalente: } \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_T}} A'$

$$\underbrace{A}_{\text{Point objet}} \xrightarrow{\mathcal{L}: \frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}} \underbrace{A_1}_{\text{Image de A par } (\mathcal{L})} \xrightarrow{\mathcal{L}_2: \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_1} = \frac{1}{f'_2}} \underbrace{A'}_{\text{Image de } A_1 \text{ par } (\mathcal{L}_2)}$$

En sommant les deux relations de Descartes, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'_T}$$

I.15 En remplaçant les expressions des distances focales en fonction des indices :

$$\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2} = \frac{n(\lambda) - 1}{C} + \frac{n_2(\lambda) - 1}{C_2} = \frac{\left(A + \frac{B}{\lambda^2}\right) - 1}{C} + \frac{\left(A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2}\right) - 1}{C_2}$$

d'où $\frac{1}{f'_T} = \left[\frac{A - 1}{C} + \frac{A_2 - 1}{C_2} \right] + \left[\frac{B}{C} + \frac{B_2}{C_2} \right] \frac{1}{\lambda^2}$

I.16 L'absence d'aberration chromatique se traduit par f'_T indépendante de λ .

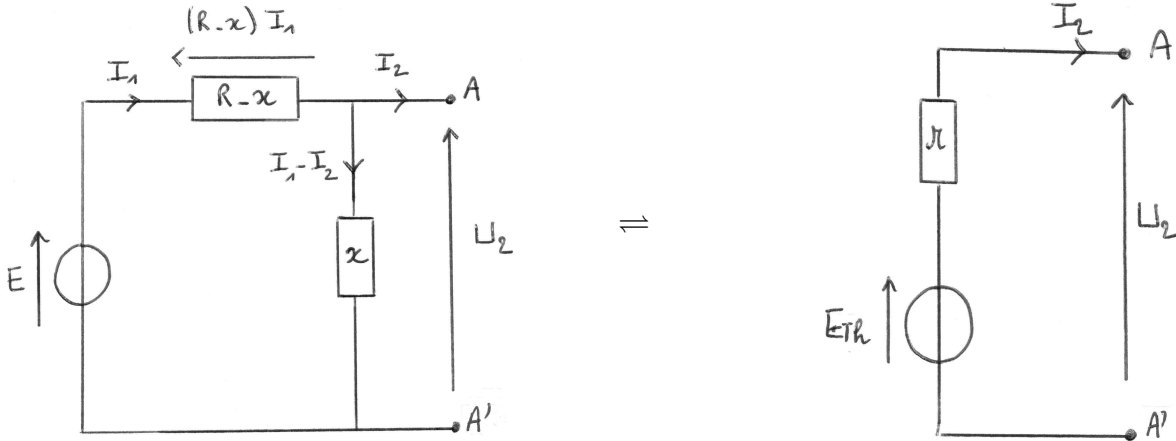
d'où $\frac{B}{C} + \frac{B_2}{C_2} = 0$

I.17 B, C et B₂ sont des réels positifs. Ainsi, $C_2 < 0$. Or, $f'_2 = \frac{C_2}{n - 1}$ avec $n \geq 1$.

On en déduit $f'_2 < 0$ et \mathcal{L}_2 est divergente.

II. Montage potentiométrique

II.1 L'annotation du circuit ci-après (figure de gauche) tient compte de la loi des nœuds ainsi que des lois d'Ohm aux bornes de $R - x$ et de x . Le schéma de droite est le générateur de Thévenin équivalent.



Sur le schéma de droite

$$U_2 = E_{th} - r I_2 \quad (1)$$

On cherche donc à retrouver cette écriture en utilisant les lois de Kirchhoff dans le circuit de gauche, sachant que $U_2 = x (I_1 - I_2)$ (loi d'Ohm aux bornes de la résistance x).

Loi des mailles

$$x (I_1 - I_2) + (R - x) I_1 - E = 0$$

À partir de cette relation, on exprime le courant I_1 en fonction I_2 :

$$I_1 = \frac{E}{R} + \frac{x}{R} I_2$$

En réinjectant dans la loi d'Ohm aux bornes de la résistance x :

$$U_2 = x \left(\frac{E}{R} + \frac{x}{R} I_2 - I_2 \right) = \frac{x}{R} E - \frac{x}{R} (R - x) I_2 \quad (2)$$

Par identification, en utilisant les relations (1) et (2), on obtient :

$$E_{Th} = \frac{x}{R} E \quad \text{et} \quad r = \frac{x}{R} (R - x)$$

L'énoncé donne $E_{Th} = \alpha E$. On obtient ainsi

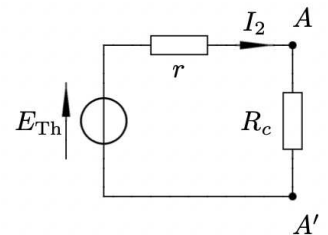
$$\alpha = \frac{x}{R} \quad \text{et} \quad r = \alpha (1 - \alpha) R$$

II.2 La puissance P_2 dissipée par effet Joule dans la résistance de charge R_c est la puissance électrique reçue par R_c de la part du circuit électrique :

$$P_2 = R_c I_2^2$$

avec I_2 l'intensité du courant qui traverse R_c .

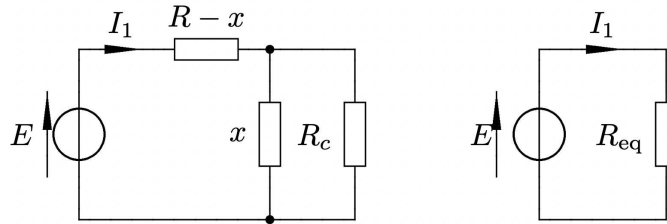
Pour calculer I_2 , on peut raisonner sur le montage représenté ci-contre et dans lequel on a remplacé le dipôle AA' par son équivalent.



La loi de Pouillet donne directement $I_2 = \frac{E_{Th}}{r + R_c}$ d'où $P_2 = R_c \frac{E_{Th}^2}{(r + R_c)^2}$ et en fonction des données :

$$P_2 = \frac{R_c \alpha^2 E^2}{[\alpha (1 - \alpha) R + R_c]^2}$$

II.3 La puissance fournie par la source de tension est $P_1 = E I_1$ où I_1 est l'intensité du courant débité par la source orienté en convention générateur. On calcule sa valeur en simplifiant le circuit comme indiqué ci-après :



R_{eq} est l'association $R - x$ en série avec $x // R_c$. Ainsi :

$$R_{eq} = R - x + \frac{x R_c}{x + R_c}$$

Donc
$$R_{eq} = \frac{(R - \alpha R)(\alpha R + R_c) + \alpha R R_c}{\alpha R + R_c} = \frac{R R_c + \alpha R^2 (1 - \alpha)}{\alpha R + R_c}$$

La puissance fournie par la source de tension est donc $P_1 = E I_1$ avec $I_1 = \frac{E}{R_{eq}}$ d'après la loi de Pouillet.

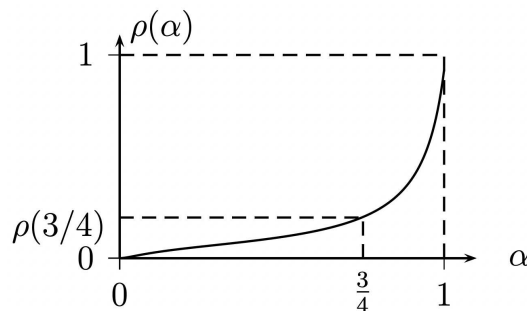
On en déduit

$$P_1 = \frac{E^2}{R_{eq}} = \frac{E^2 (\alpha R + R_c)}{R R_c + \alpha R^2 (1 - \alpha)}$$

II.4 Le rendement d'écrit $\rho = \frac{P_2}{P_1}$, ce qui permet d'obtenir après simplification :

$$\rho = \frac{\alpha^2 R R_c}{[\alpha (1 - \alpha) R + R_c](\alpha R + R_c)}$$

II.5 L'expression numérique de ρ à tracer est : $\rho(\alpha) = \frac{\alpha^2 * 8.10^4}{[1000 \alpha (1 - \alpha) + 80] (1000 \alpha + 80)}$:



Le rendement est maximum et presque égal à 1 (100 %) pour $\alpha = 1$.

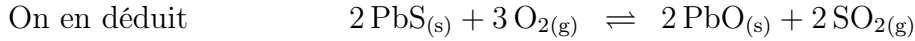
Pour $\alpha = 3/4$, on calcule (application numérique) ou on relève sur la courbe :

$$\rho\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0,2$$

Le rendement correspond à environ 20 %, ce qui est très faible : 80 % de l'énergie dépensée (par la source E) disparaît par effet Joule dans le potentiomètre au lieu d'être transmise à la résistance de charge.

III. Grillage de la galène

III.1 Les nombres stœchiométriques permettent de rendre compte de la conservation de la charge ainsi que de la conservation de chaque élément chimique dans une réaction chimique.



donc

$$\alpha = 3 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 2$$

III.2 On a directement

$$n_{\text{PbS},0} = \frac{m_0}{M}$$

En supposant le volume occupé par le solide négligeable, on peut déterminer la quantité de matière totale d'espèces moléculaires en phase gazeuse en appliquant la loi des gaz parfaits :

$$n_{\text{air},0} = \frac{p^0 V_0}{R T}$$

L'air initial étant modélisé par un mélange de dioxygène et de diazote, on en déduit les quantités respectives de ces deux espèces dans la phase gazeuse :

$$n_{\text{O}_2,0} = x_{\text{O}_2,0} n_{\text{air},0} = \frac{x_{\text{O}_2,0} p^0 V_0}{R T} \quad \text{et} \quad n_{\text{N}_2,0} = x_{\text{N}_2,0} n_{\text{air},0} = \frac{x_{\text{N}_2,0} p^0 V_0}{R T}$$

Le système contient initialement $n_{\text{PbS},0} = 0,418$ mol de galène solide et une phase gazeuse contenant $n_{\text{O}_2,0} = 2,47$ mol de dioxygène et $n_{\text{N}_2,0} = 9,89$ mol de diazote.

III.3 Quotient réactionnel :

$$Q = \frac{a_{\text{PbO}_{(s)}}^2 a_{\text{SO}_{2(g)}}^2}{a_{\text{PbS}_{(s)}}^2 a_{\text{O}_{2(g)}}^3}$$

En remplaçant l'activité des corps condensés purs par 1 et celle des gaz parfaits par leur pression partielle divisée par la pression standard, on trouve :

$$Q = \frac{P_{\text{SO}_2}^2 p^0}{P_{\text{O}_2}^3}$$

À l'instant initial, le système ne contient pas de gaz SO_2 , donc $P_{\text{SO}_2} = 0$.

Ainsi

$$Q_i = 0$$

$Q_i < K^0$: la réaction n'est donc pas à l'équilibre chimique et évoluera dans le sens direct.

III.4 On réalise un tableau d'avancement entre l'état initial et l'état final, où l'avancement est noté ξ_f :

	$2 \text{PbS}_{(s)}$	$3 \text{O}_{2(g)}$	$2 \text{PbO}_{(s)}$	$2 \text{SO}_{2(g)}$	$n_{\text{tot gaz}}$
$t = 0$	$n_{\text{PbS},0}$	$n_{\text{O}_2,0}$	0	0	$n_{\text{O}_2,0} + n_{\text{N}_2,0}$
t_f	$n_{\text{PbS},0} - 2 \xi_f$	$n_{\text{O}_2,0} - 3 \xi_f$	$2 \xi_f$	$2 \xi_f$	$n_{\text{O}_2,0} + n_{\text{N}_2,0} - \xi_f$

Comme $K^0 = 3,0 \cdot 10^{46} \gg 1$, la réaction est quantitative

Par ailleurs :

$$\frac{n_{\text{PbS},0}}{2} = \frac{0,418}{2} < \frac{n_{\text{O}_2,0}}{3} = \frac{2,47}{3}$$

Le réactif limitant est donc $\text{PbS}_{(s)}$ et l'avancement maximal est $\xi_{\text{max}} = \frac{n_{\text{PbS},0}}{2} = 0,209$ mol.

Comme le réactif limitant est un corps condensé pur et qu'on s'attend à une réaction très avancée, il va se produire une rupture d'équilibre, c'est-à-dire une disparition totale de $\text{PbS}_{(s)}$ avant que l'état d'équilibre chimique ne soit atteint.

Dans ce cas, l'avancement final vaut exactement $\xi_f = \xi_{\max} = 0,209 \text{ mol}$.

Ainsi, à l'état final, le système se comporte de deux phases :

- ★ Le solide pur $\text{PbO}_{(s)}$: $n_{\text{PbO},f} = 0,418 \text{ mol}$;
- ★ Une phase gazeuse, mélange de $\text{O}_{2(g)}$, $\text{SO}_{2(g)}$ et $\text{N}_{2(g)}$ aux pressions partielles :

$$P_{\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2,0} - 3\xi_f}{n_{\text{tot gaz}}} p^0 = 0,152 \text{ bar} \quad P_{\text{SO}_2} = \frac{2\xi_f}{n_{\text{tot gaz}}} p^0 = 0,0344 \text{ bar}$$

$$P_{\text{N}_2} = p^0 - P_{\text{O}_2} - P_{\text{SO}_2} = 0,814 \text{ bar}$$

- III.5** • La quantité maximale de $\text{PbS}_{(s)}$ que l'on peut convertir est limitée par la quantité de dioxygène initialement présente. Dans le cas où O_2 est limitant, l'avancement maximal sera

$$\xi_{\max} = \frac{n_{\text{O}_2,0}}{3}$$

La réaction étant quasi-totale, la quantité de $\text{PbS}_{(s)}$ convertie est alors égale à :

$$n_{\text{PbS}} = 2\xi_{\max} = \frac{2}{3} n_{\text{O}_2,0}$$

La masse de $\text{PbS}_{(s)}$ que l'on peut convertir au maximum avec cette quantité de dioxygène est

$$m'_0 = \frac{2}{3} n_{\text{O}_2,0} \times M = 394 \text{ g.}$$

- En excès de $\text{PbS}_{(s)}$, la réaction est quasi-totale. Un gaz dans un mélange ne peut en effet disparaître totalement. Il reste alors des traces de dioxygène et il s'est formé $2\xi_{\max} = \frac{2}{3} n_{\text{O}_2,0} = 1,65 \text{ mol}$ de $\text{PbO}_{(s)}$ et de $\text{SO}_{2(g)}$.

La phase gazeuse est alors constituée de 1,65 mol de SO_2 et des 9,89 mol de N_2 initiaux (et de traces négligeables de dioxygène). On peut alors calculer la pression partielle de $\text{SO}_{2(g)}$ par :

$$P_{\text{SO}_2} = \frac{1,65}{1,65 + 9,89} p^0 = 0,143 \text{ bar}$$

Tous les constituants étant présents dans l'état final, la loi de l'équilibre chimique est valide, le quotient réactionnel est alors égal à la constante d'équilibre K^0 :

$$Q = \frac{P_{\text{SO}_2}^2 p^0}{P_{\text{O}_2}^3} = K^0$$

On en déduit

$$P_{\text{O}_2} = \left(\frac{P_{\text{SO}_2}^2 p^0}{K^0} \right)^{1/3} \approx 9.10^{-17} \text{ bar}$$

Cette pression partielle est bien, comme prévu, absolument négligeable devant celle des autres gaz, ce qui valide l'hypothèse de la réaction quasi-totale.

