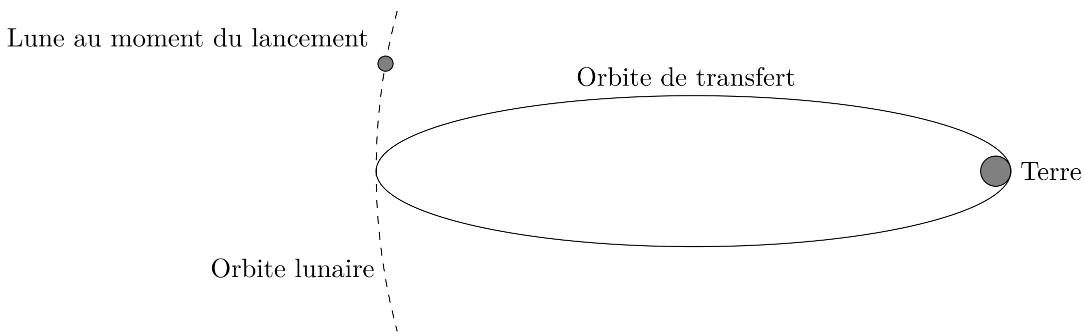
# DM9 : Forces centrales et thermodynamique

## Exercice 1 : De la Terre à la Lune

1. Le point $B$ a une trajectoire circulaire uniforme de rayon $r = R_T\cos(\lambda)$ et d'axe $Tz$ parcourue à la vitesse angulaire $\Omega$. Le mouvement étant circulaire uniforme, on peut se placer en coordonnées cylindriques d'axe $Tz$.
   On a alors $\boxed{v_B = R_T\cos(\lambda)\Omega}$
2. $E_{c,\text{finale}} = \frac{1}{2}m_F v_0^2$ et $E_{c,\text{initiale}} = \frac{1}{2}m_F v_B^2$. La variation d'énergie cinétique $\Delta E_c$ de la fusée est $\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}m_F(v_0^2 - v_B^2)}$
3. Pour avoir à fournir le moins d'énergie, il faut que cette variation d'énergie soit la plus faible possible. On ne peut pas faire varier $v_0$, il faut donc $v_B$ le plus grand possible. Cosinus étant une fonction décroissante, il faut donc $\lambda$ le plus faible.Comme $\lambda_2 > \lambda_1$, Kourou est donc plus intéressante de ce point de vue que Cap Canaveral.
4. $\boxed{\vec{F}_G = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$
5. On a $F(r) = -\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}t}$, avec $F(r) = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r^2}$. Donc $E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r} + K$. On choisit $K = 0$ pour que $\lim\limits_{r\to\infty} E_p(r) = 0$ et finalement $\boxed{E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r}}$.
6. On applique le principe fondamental de la dynamique à la fusée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen : $m_F\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r^2}\vec{e}_r$.
   En projetant sur $\vec{e}_r$, on obtient :$-m_F r\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r^2}$
   On en déduit $\boxed{v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_T}{r}}}$ et $\boxed{E_{c0} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{r}}$.
7. D'après la question précédente, $(r\dot{\theta})^2 = \mathcal{G}\frac{m_T}{r}$. La vitesse étant constante, on peut dire que $\dot{\theta} = 2\pi/T_0$.
   On a donc : $4\pi^2\frac{r^3}{T_0^2} = \mathcal{G}m_T$. On en déduit : $\boxed{\frac{T_0^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T}}$ (3ème loi de Kepler)
8. Applications numériques : $\boxed{v_0 = 7{,}91\cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$ et $\boxed{T_0 = 5{,}07\cdot 10^3\,\mathrm{s}}$.
9. D'après la question 6, $E_{c0} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{r}$. De plus, $E_{p0} = -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{r}$.
   On en déduit : $E_{m0} = -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{2r} = -\frac{K}{2r}$ avec $\boxed{K = \mathcal{G}m_T m_F}$
10. En utilisant le résultat admis à la question précédente (et démontré en cours) : $\boxed{E_{m1} = -\frac{K}{2a} = -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{d_{TL}}}$
11. La vitesse est passée de façon quasi instantanée de $v_0$ à $v_1$, donc l'énergie potentielle n'a pas varié : $E_{p1} = E_{p0} = -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{R_T}$.
    Comme $E_{m1} = E_{c1} + E_{p1}$, alors $-\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{d_{TL}} = \frac{1}{2}m_F v_1^2 - \mathcal{G}\frac{m_T m_F}{R_T}$. Soit $v_1^2 = 2\mathcal{G}m_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}}\right)$
    Et finalement $\boxed{v_1 = \sqrt{2\mathcal{G}m_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}}\right)} = 1{,}11\cdot 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$
    On note que cette vitesse est extrêmement proche de la vitesse de libération.
12. Puisque la Terre est l'astre attracteur, alors elle est située au foyer de l'ellipse.
    Compte tenu du temps de trajet, il faut allumer les moteurs à un instant $t$ tel que la Lune se retrouve à proximité de l'apogée à un instant $t+t_1$ (avec $t_1$ la durée de transfert telle que définie par l'énoncé). Il faut donc s'y prendre en avance pour tenir compte du mouvement de la Lune.



13. D'après la 3ème loi de Kepler : $T^2/a^3 = T_0^2/R_T^3$, soit $T = T_0\left(\frac{d_{TL}}{2R_T}\right)^{3/2}$. De plus, $t_1 = \frac{T}{2}$ puisque l'on parcourt la moitié de l'ellipse en terme d'aire.

    Ainsi $\boxed{t_1 = \frac{T_0}{2}\left(\frac{d_{TL}}{2R_T}\right)^{3/2} \simeq 4{,}18 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \simeq 4{,}84\,\mathrm{jours}}$
14. Lors du départ de la terre, les applications numériques indiquent que pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert, la vitesse a dû être augmentée (d'environ 3 km/s). Il parait donc naturel que cela se passe dans l'autre sens pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite basse. On peut aussi évoquer la réduction du rayon de l'orbite, qui induit une diminution de l'énergie mécanique.
15. On a à nouveau un mouvement circulaire. On peut ainsi réutiliser le résultat démontré au début du problème dans le cas de la Terre ($v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_T}{r}}$) en adaptant les notations : $\boxed{v_2 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_L}{R_L}} = 1{,}68\,\mathrm{km\,s^{-1}}}$
16. L'énergie d'agitation thermique fait référence à l'énergie cinétique $E_c$ de la molécule $\frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{2}mv^2$ avec $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$ et $m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$. On en déduit $\boxed{v = \sqrt{3\frac{RT}{M}} = 4{,}33 \cdot 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$
17. La vitesse de libération est telle que $E_m = 0$ à la surface de l'astre (cas limite entre un état lié et un état de diffusion). On en déduit que $\frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{\mathcal{G}mm_L}{R_L} = 0$. d'où $\boxed{v_{lib} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_L}{R_L}} \approx 2{,}37 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}} > v}$.

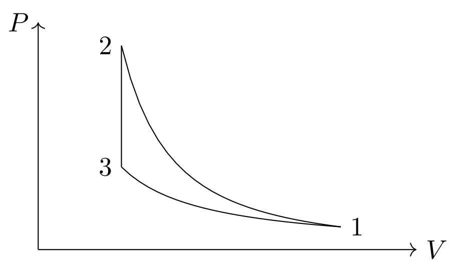
    Les deux valeurs de vitesses, vitesse quadratique moyenne et vitesse de libération sont proches. Même si $v_{\mathrm{lib}} \geq v$, les particules ont la possibilité de s'échapper petit à petit.

## **Exercice 2** : Transformation cyclique d'un gaz parfait

1. Pour un système au repos, la variation d'énergie interne $\Delta U$ d'un système thermodynamique entre deux états d'équilibre est donnée par $\boxed{\Delta U = W + Q}$, où $W$ est le travail reçu par le système et $Q$ la chaleur reçue par le système au cours de la transformation.
2. Au cours d'une transformation adiabatique, il n'y a pas d'échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur. Les transformations adiabatiques sont des transformations rapides.
3. Au cours d'une transformation isotherme, la température du système reste constante. Les transformations isothermes sont des transformations lentes pour que les échanges de chaleur aient le temps de se faire.
4. La transformation $1 \to 2$ est adiabatique, on a donc $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$ et donc $\boxed{P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma}$
5. Dans l'état 2 on peut écrire l'équation d'état des gaz parfait : $P_2V_2 = nRT_2$ avec $P_1V_1 = nRT_1$ on a

$$\boxed{T_2 = \frac{P_2V_2}{nR} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1}T_1 = \frac{P_2}{P_1}\frac{V_2}{V_1}T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \frac{V_2}{V_1}T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1} \quad (1)$$

6. Diagramme $(P, V)$ :




7. On choisit d'utiliser le premier principe entre 1 et 2 . On a $\Delta U = W_{12} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)$. Soit

$$\boxed{W_{12} = \frac{3}{2}nRT_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right) = \frac{3}{2}P_1V_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right)} \quad (2)$$

8. La transformation $2 \to 3$ est isochore donc $W_{23} = 0$. Dans ces conditions, on a $\Delta U_{23} = Q_{23} = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2)$. Soit

$$\boxed{Q_{23} = -W_{12} = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)} \tag{3}$$

9. Au cours de la transformation $3 \to 1$, la température reste constante donc $\Delta U_{31} = 0$ et $W_{31} = -Q_{31}$. On a aussi :

$$\boxed{W_{31} = -\int_{V_2}^{V_1} P\,\mathrm{d}V = -nRT_1 \int_{V_2}^{V_1} \frac{1}{V}\,\mathrm{d}V = -P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \quad \text{et} \quad Q_{31} = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \tag{4}$$

10. Au cours d'un cycle $\Delta U = 0$ donc $W = -Q$. Et

$$\boxed{W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = P_1 V_1 \left[\frac{3}{2}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right) - \ln\frac{V_1}{V_2}\right]} \tag{5}$$

11. On remarque sur le graphique de la question 6 que le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc le travail reçu par le système au cours d'un cycle est positif. $Q$ est donc négatif. Le système reçoit du travail et fournit de la chaleur au milieu extérieur.
12. À chaque cycle l'eau du réservoir reçoit un peu de chaleur de la part du gaz, elle va donc s'échauffer. On ne pourra plus considérer le réservoir comme un thermostat.