DS3 : Chimie, électricité – corrigé

Exercice 1 : Élaboration d'une poudre de tungstène

1. $n(\mathrm{WO_3}) = \frac{m(\mathrm{WO_3})}{M(\mathrm{WO_3})} \approx 8{,}32 \times 10^{-3}$ mol. $n(\mathrm{H_2}) = \frac{pV}{RT} \approx 1{,}03 \times 10^{-2}$ mol.
2. À l'instant initial, il n'y a pas de produits, le quotient réactionnel est donc nul $\boxed{Q = 0}$.
3. On établit un tableau d'avancement :

	$\mathrm{WO_3(s)}$	+	$3\,\mathrm{H_2(g)}$	$\rightleftarrows$	$\mathrm{W(s)}$	+	$3\,\mathrm{H_2O(g)}$	tot gaz
E.I.	n_0		n_1		0		0	n_1
E.F.	$n_0 - \xi_f$		$n_1 - 3\xi_f$		ξ_f		$3\xi_f$	n_1

   À l'équilibre, on a

$$K = \frac{p(\mathrm{H_2O})^3}{p(\mathrm{H_2})^3} = \left(\frac{3\xi_f}{n_1 - 3\xi_f}\right)^3 \quad \text{soit} \quad \xi_f = \frac{\sqrt[3]{K} n_1}{3(1+\sqrt[3]{K})} \approx 2{,}01 \times 10^{-3}\,\mathrm{mol}$$

   À l'équilibre on a donc :
   - $n(\mathrm{WO_3}) = 6{,}31 \times 10^{-3}$ mol,
   - $n(\mathrm{H_2}) = 4{,}23 \times 10^{-3}$ mol,
   - $n(\mathrm{W}) = 2{,}01 \times 10^{-3}$ mol,
   - $n(\mathrm{H_2O}) = 6{,}04 \times 10^{-3}$ mol
4. On calcule le quotient réactionnel à l'instant initial :

$$\boxed{Q = \frac{n(\mathrm{H_2O})^3}{n(\mathrm{H_2})^3} \approx 0{,}171 < K} \tag{1}$$

   Donc le système évolue dans le sens de fabrication des produits.
5. De la même manière que dans la question 3, on trouve

$$\xi_f = \frac{\sqrt[3]{K} n_1 - n_2}{3\left(1+\sqrt[3]{K}\right)} \approx 1{,}08 \times 10^{-3}\,\mathrm{mol}$$

   où n_2 est la quantité de matière initiale de $\mathrm{H_2O}$. À l'équilibre on a donc :
   - $n(\mathrm{WO_3}) = 7{,}24 \times 10^{-3}$ mol,
   - $n(\mathrm{H_2}) = 5{,}77 \times 10^{-3}$ mol,
   - $n(\mathrm{W}) = 1{,}08 \times 10^{-3}$ mol,
   - $n(\mathrm{H_2O}) = 8{,}23 \times 10^{-3}$ mol
6. On calcule le quotient réactionnel, en supposant qu'il y a une quantité infime de tungstène, de sorte que l'activité du tungstène est prise égale à 1 on trouve :

$$\boxed{Q = \frac{n(\mathrm{H_2O})^3}{n(\mathrm{H_2})^3} = \left(\frac{n_2''}{n_1''}\right)^3 \approx 91{,}1 > K} \tag{2}$$

   Donc le système évolue dans le sens de fabrication des réactifs.
7. Comme il n'y a pas de tungstène solide à l'instant initial, la réaction ne pourra pas se faire et l'état final sera le même que l'état initial. On ne pourra pas atteindre l'équilibre.

Exercice 2 : Guirlande électrique

1 Système de base

1. Il n'y a qu'une maille donc $E = (R + r)i$ soit $\boxed{i = i_1 = i_{\text{ouvert}} = \frac{E}{r+R}}$. On en déduit $\boxed{P_{1,\text{ouvert}} = Ri^2 = \frac{R}{(r+R)^2}E^2}$.

   Le courant circulant dans la seconde guirlande étant nul, on en déduit que $\boxed{P_{2,\text{ouvert}} = 0}$.
2. On a la résistante équivalente $1/R_{eq} = 1/R + 1/R$. Cette pour trouver au final avec le même raisonnement qu'à la question précédente en remplaçant R par $R_{eq} = R/2$:
$$\boxed{i_{\text{fermé}} = \frac{E}{r + \frac{R^2}{2R}} = \frac{2E}{2r + R}} \tag{1}$$
   On peut retrouver les courants i_1 et i_2 en utilisant un pont diviseur de courant ou bien en remarquant qu'ils doivent être identiques par symétrie (résistances identiques pour les deux guirlandes) :
$$\boxed{i = i_1 + i_2 \quad \text{et} \quad i_1 = i_2 = \frac{i_{\text{fermé}}}{2} = \frac{E}{2r + R}} \tag{2}$$
3. On en déduit simplement $\boxed{P_{1,\text{fermé}} = Ri_1^2 = Ri_2^2 = P_{2,\text{fermé}} = \frac{R}{(2r+R)^2}E^2}$.
4. On observe ainsi que $P_{1,\text{ouvert}} \neq P_{1,\text{fermé}}$. La guirlande 1 va donc aussi se mettre à clignoter. En effet, lorsque la deuxième guirlande est allumée, un courant plus important est appelé et ce dernier va créer une chute de tension plus importante sur la résistance interne du générateur. Les deux guirlandes seront donc soumises à une tension légèrement plus faible.
5. Les expressions des puissances deviennent identiques lorsque $2r \ll R$. Cette condition n'est pas satisfaite pour les valeurs proposées.

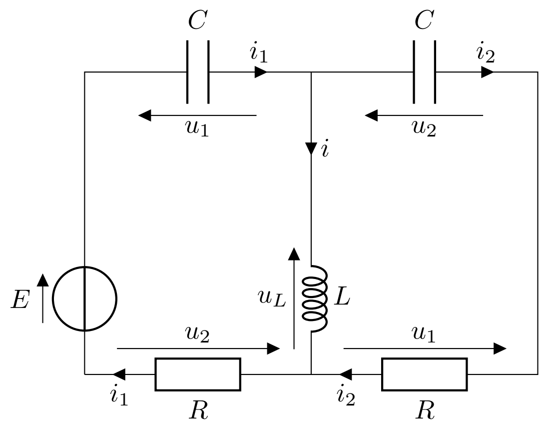
2 Système amélioré

6. Sur cet intervalle, l'interrupteur est ouvert. Le circuit ne comporte alors qu'une seule maille ($i = i_1$ et $i_2 = 0$). La loi des mailles donne :
$$E = ri + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + Ri_1 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R+r}{L}i_1 = \frac{E}{L} \tag{3}$$
   Soit finalement
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau_o} = \frac{E}{(R+r)\tau_o} \quad \text{avec} \quad \tau_o = \frac{L}{R+r}} \tag{4}$$
7. On peut considérer que le régime permanent est atteint au bout de quelques foit τ_o, par exemple $5\tau_o$. Il faut donc que $T/2 > 5\tau_o$ ou $\boxed{T > 10\tau_o}$.
8. En supposant que le régime permanent est atteint à $(T/2)^-$, on cherche alors la solution particulière de l'équation différentielle (constante). On trouve alors $\boxed{i_{1,p} = i_1(T/2^-) = \frac{E}{R+r}}$ qui est bien la valeur trouvée précédemment.
9. Cette fois ci, les deux mailles sont à considérer. On commence par écrire les deux lois des mailles ainsi que la loi des nœuds :
$$E = ri + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + Ri_1 \tag{5}$$
$$E = ri + Ri_2 \tag{6}$$
$$i = i_1 + i_2 \tag{7}$$
   On combine (6) et (7) pour exprimer i en fonction de i_1 :
$$i = i_1 + \frac{E - ri}{R} \Rightarrow i = \frac{i_1 + \frac{E}{R}}{1 + \frac{r}{R}} \tag{8}$$
   Et on injecte cette expression dans (5) :
$$\boxed{E = \frac{r}{1+\frac{r}{R}}\left(i_1 + \frac{E}{R}\right) + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + Ri_1 \Rightarrow \frac{E/L}{1+\frac{r}{R}} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R+2r}{\left(1+\frac{r}{R}\right)L}i_1 \quad \text{D'où le résultat}} \tag{9}$$

10. On trouve comme solution particulière de l'équation précédente $\boxed{i_{1,p} = \frac{E}{R+2r}}$ qui correspond bien au résultat attendu.
11. On peut considérer la transition "fermé" → "ouvert" où le temps caractéristique s'exprime comme $\tau_o = \frac{L}{r+R} \Rightarrow L = \tau_o(R+r)$
Pour le premier cas (courbe en traits pleins), on mesure $\tau = 0{,}04\,\mathrm{s}$ (intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote). On trouve au final $\boxed{L_a = 0{,}1\,\mathrm{H}}$.
Pour la seconde courbe, on constate que le régime transitoire est beaucoup plus long donc que $L_b \gg L_a$. En pratique, une valeur de $L_b = 5\,\mathrm{H}$ à été retenue pour tracer le graphique.
12. On retiendra L_b car cette valeur permet de "lisser" les variations du courant au niveau de la première guirlande (variation de $40\,\mathrm{mA}$ donc faible variation relative).

Exercice 3 : Circuit en régime transitoire

1. Soit $q_1 = Cu_1$ la charge portée par l'armature de gauche du condensateur de gauche et $q_2 = Cu_2$ la charge portée par l'armature de gauche du condensateur de droite. La charge située sur les armatures internes des condensateurs est $-q_1 + q_2$ et elle demeure constante car elle ne peut pas s'échapper. Puisque les condensateurs sont initialement déchargés, cette charge est nulle : on a donc $-q_1 + q_2 = 0$ soit $q_1 = q_2$. Les condensateurs portent effectivement la même charge à tout instant.
2. Puisqu'ils ont la même capacité, la tension à leurs bornes est également identique : $u_1 = u_2$. En régime stationnaire, le courant ne circule plus dans le circuit, donc la tension aux bornes des résistors s'annule si bien que la loi des mailles donne $u_1 + u_2 = E$. On en déduit $\boxed{u_1 = u_2 = \frac{E}{2}}$.
3. D'après la loi des mailles, $E = u_1 + u_2 + 2Ri = 2u_1 + 2Ri$.
Or $i = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ donc $u_1(t)$ vérifie l'équation différentielle : $2RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + 2u_1 = E$ soit $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{u_1}{RC} = \frac{E}{2RC}$.
C'est l'équation d'un système linéaire du premier ordre de constante de temps $\tau = RC = 0{,}2\,\mathrm{ms}$.
La durée typique du régime transitoire est $\boxed{\Delta t \approx 5\tau = 1{,}0\,\mathrm{ms}}$.
4. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $\boxed{u_1(0^+) = u_2(0^+) = \frac{E}{2}}$. Par continuité de l'intensité circulant dans une bobine, $\boxed{i(0^+) = 0}$.
5.



Dans le circuit ci-dessus pour $t > 0$ on a $i_1 = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ et $i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$.
D'après la loi de nœuds $i = i_1 - i_2$ et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} - LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}$.
Dans la maille de gauche, la loi des mailles s'écrit $\boxed{E = u_1 + u_L + Ri_1 = u_1 + RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} - LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}}$.
Dans la maille de droite , la loi des mailles s'écrit $\boxed{0 = u_2 - u_L + Ri_2 = u_2 + RC\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}}$.
6. En additionnant les deux équations précédentes membre à membre on obtient :

$$\boxed{E = u_1 + u_2 + RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = U + RC\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}} \tag{1}$$

En soustrayant les deux équations membre à membre on obtient :

$$E = u_1 - u_2 + RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + 2LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} - 2LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \quad (2)$$

Sous forme canonique, elle s'écrit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{2L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2LC}u = \frac{1}{2LC}E} \quad (3)$$

7. La solution de la première équation est $U(t) = E + Ae^{-t/(RC)}$ où A est une constante à déterminer avec les conditions initiales : $U(0^+) = u_1(0^+) + u_2(0^+) = E$.
   Or $U(0^+) = E + A$ donc $A = 0$. Pour conclure, $\boxed{U = E \text{ et est constante.}}$
8. La deuxième équation est celle d'un oscillateur harmonique amorti. Sous forme canonique, elle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u = \omega_0^2E \quad (4)$$

   où l'on identifie la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \omega_0 \times \frac{2L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2L}{C}}$.
   Numériquement on obtient $\boxed{Q = 1/2}$ ce qui signifie que l'on se trouve en $\boxed{\text{régime critique}}$.
9. L'équation caractéristique associée $r^2 + 2\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ a une seule solution réelle $r = -\omega_0$.
   La solution de l'équation homogène est alors de la forme $u_H(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$. Une solution particulière est $u_P(t) = E$. La solution générale de l'équation différentielle est alors : $u(t) = u_H(t) + u_P(t) = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$.
   Les constantes A et B sont obtenues avec les conditions initiales.

$$u\left(0^+\right) = u_1\left(0^+\right) - u_2\left(0^+\right) = 0. \text{ Or } u\left(0^+\right) = E + A \text{ donc } A = -E. \quad (5)$$

   La dérivée $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ est liée au courant i qui passe dans la bobine. Son expression est $i(t) = i_1(t) - i_2(t) = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} - C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Initialement on a donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.
   Or $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = (B - \omega_0(A + Bt))\,e^{-\omega_0 t}$. Il vient $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = B - \omega_0 A = 0$ d'où $B = A\omega_0 = -E\omega_0$.
   Pour conclure, $\boxed{u(t) = E \times (1 - (1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t})}$.
   L'intensité du courant vaut $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = CE\omega_0 e^{-\omega_0 t}(1 - (1 - \omega_0 t)) = CE\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$ donc $\boxed{i(t) = \frac{Et}{2L}e^{-\omega_0 t}}$
10. On a :

$$\boxed{u_1(t) = \frac{u(t) + U(t)}{2} = \frac{E}{2} \times \left(2 - (\omega_0 t + 1)\,e^{-\omega_0 t}\right) \text{ et } u_2(t) = \frac{u(t) - U(t)}{2} = \frac{E}{2} \times (\omega_0 t + 1)\,e^{-\omega_0 t}} \quad (6)$$

   Et on obtient les évolutions suivantes :