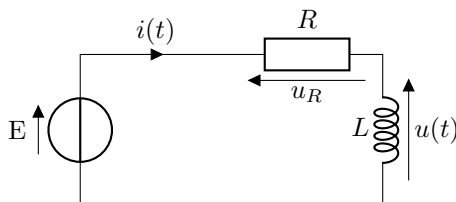


DM3 : Électricité et chimie – corrigé

Exercice 1 : CIRCUITS RL

A – Premier ordre

Pour $t > 0$, on a le circuit suivant :



1. Dans le schéma ci-dessus, on a :

- $u_R = Ri$ (loi d'Ohm)
- $u = L \frac{di}{dt}$ (bobine)
- $E = u + u_R$ (loi des mailles)

En injectant les deux premières équations dans la troisième, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{1/\tau} i = \frac{E}{L}$$

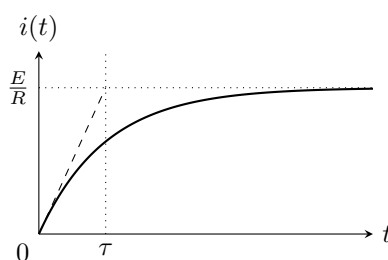
2. L'intensité du courant étant continue dans une bobine, on a $i(0^+) = i(0^-) = 0$ (interrupteur ouvert pour $t < 0$). La solution générale de l'équation différentielle est

$$i(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{R}$$

et la condition initiale nous permet de trouver $K = -\frac{E}{R}$ donc finalement

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

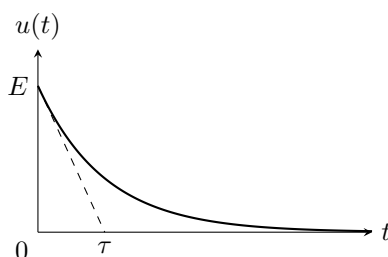
3. L'évolution de $i(t)$ est :



On trouve τ en cherchant l'abscisse de l'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote horizontale en $t \rightarrow +\infty$.

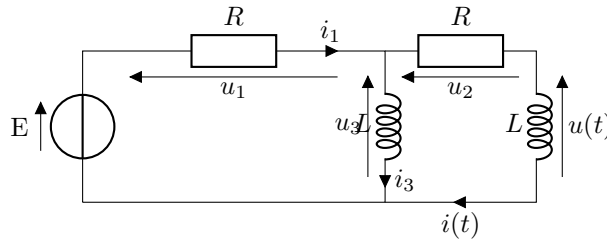
4. On a

$$u = L \frac{di}{dt} = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



B – Deuxième ordre

Pour $t > 0$ le circuit est :



5. On écrit les différentes relations dans ce circuit :

- $u_3 = L \frac{di_3}{dt}$ (bobine)
- $u = L \frac{di}{dt}$ (bobine)
- $u_1 = Ri_1$ (Ohm)
- $u_2 = Ri$ (Ohm)
- $i + i_3 = i_1$ (loi des nœuds)
- $E = u + u_1 + u_2$ (lois des mailles)
- $u_3 = u + u_2$ (lois des mailles)

En partant de la première loi des mailles, on a :

$$E = u + u_1 + u_2 = L \frac{di}{dt} + Ri_1 + Ri = L \frac{di}{dt} + R(i_3 + i) + Ri$$

En dérivant cette équation, on obtient :

$$0 = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di_3}{dt} + 2R \frac{di}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} u_3 + 2R \frac{di}{dt}$$

enfin en remplaçant u_3 par $u + Ri$ on obtient l'équation différentielle demandée :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau^2} i = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

6. On identifie cette équation avec celle d'un oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

et on trouve $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et $Q = \frac{1}{3}$. Comme $Q < \frac{1}{2}$, l'oscillateur se trouve en régime apériodique.

7. On écrit l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{3}{\tau} r + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

Le discriminant est $\Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2}$ et les deux solutions sont

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{\tau} \pm \sqrt{\Delta} \right) = \frac{1}{2\tau} \left(-3 \pm \sqrt{5} \right)$$

et la solution générale de l'équation différentielle est :

$$i(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

8. Par continuité de l'intensité qui circule dans une bobine, on a $i(0^+) = i_3(0^+) = 0$.

On en déduit que $i_1(0^+) = 0$. Et donc $u_1(0^+) = u_2(0^+) = 0$ (loi d'Ohm)

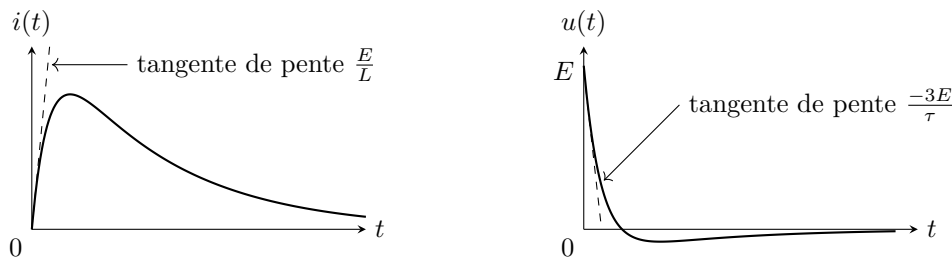
Donc d'après la loi des mailles, $u(0^+) = E = L \frac{di}{dt}(0^+)$, d'où $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$.

9. On a $\frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{3L}{\tau} \frac{di}{dt} - L \frac{i}{\tau^2}$ (d'après l'équation différentielle). En utilisant les résultats de la question précédente, on trouve

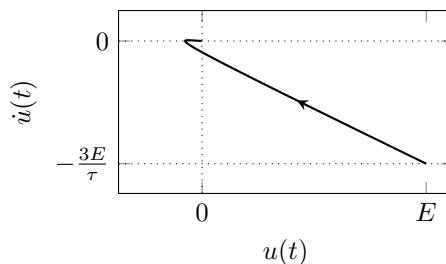
$$\frac{du}{dt}(0^+) = -3 \frac{E}{\tau}$$

10. Au bout d'un temps très long, c'est à dire lorsque le régime permanent est atteint, les deux bobines ne comportent comme des fils et on a $u(t) = 0$ et $i(t) = 0$ loi des mailles dans la maille de droite.

11. On donne les évolutions de $i(t)$ et $u(t)$ ci-dessous :



12. Le portrait de phase de $\dot{u}(t)$ en fonction de $u(t)$ est :



13. Au bout d'un temps très long, les deux bobines se comportent comme des fils, on a déjà montré que $i(\infty) = 0$ donc l'énergie stockée dans la bobine de droite est $E_1 = \frac{1}{2}Li^2 = 0$. Le courant qui circule dans la bobine de gauche est $i_3(\infty) = \frac{E}{R}$ et l'énergie stockée dans la bobine de gauche est

$$E_2 = \frac{1}{2}Li_3^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$$

Exercice 2 : OXYDATION DE L'AMMONIAC

1. Si les réactifs sont apportés en proportions stoechiométriques, on a $5n_{\text{NH}_3} = 4n_{\text{O}_2}$. De plus, dans l'air, on a $n_{\text{N}_2} = 4n_{\text{O}_2}$. En notant $\alpha = n_{\text{O}_2}$, la quantité de matière totale de gaz dans le mélange est :

$$n_{\text{tot}} = \alpha + 4\alpha + \frac{4}{5}\alpha = \frac{29}{5}\alpha \quad (1)$$

Et les fractions molaires de NH_3 , O_2 et N_2 dans le mélange sont :

$$x_{\text{NH}_3} = \frac{n_{\text{NH}_3}}{n_{\text{tot}}} = \frac{4}{29} \approx 0,14 \quad x_{\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2}}{n_{\text{tot}}} = \frac{5}{29} \approx 0,17 \quad x_{\text{N}_2} = \frac{n_{\text{N}_2}}{n_{\text{tot}}} = \frac{20}{29} \approx 0,69 \quad (2)$$

2. Dans le mélange, il y a initialement $n_1 = x_1 n_i = 10$ mol de NH_3 , il reste alors $n_{\text{air}} = n_i - n_1 = 90$ mol d'air composé à 80 % de N_2 et 20 % de O_2 . On a alors

$$n_1 = 10 \text{ mol} \quad n_2 = (n_i - n_1) \times 0,2 = 18 \text{ mol} \quad \text{et} \quad n_3 = (n_i - n_1 - n_2) = 72 \text{ mol} \quad (3)$$

3. On a le tableau d'avancement suivant :

	4 NH_3	+	5 O_2	\rightleftharpoons	4 NO	+	$6 \text{ H}_2\text{O}$	n_{gaz}
État initial	n_1		n_2		0		0	$n_1 + n_2 + n_3$
État final	$n_1 - 4\xi_{\text{éq}}$		$n_2 - 5\xi_{\text{éq}}$		$4\xi_{\text{éq}}$		$6\xi_{\text{éq}}$	$n_1 + n_2 + n_3 + \xi_{\text{éq}}$

4. On écrit l'équation des gaz parfaits dans l'état initial, on a $PV_0 = n_i RT$. Donc

$$V_0 = \frac{n_i RT}{P} = 8,9 \text{ m}^3 \quad (4)$$

À l'équilibre, la quantité de matière totale de gaz dans le système est $n_{\text{eq}} = n_1 + n_2 + n_3 + \xi_{\text{eq}} = n_i + \xi_{\text{eq}}$ (voir tableau d'avancement, ne pas oublier N_2). On aura donc d'après l'équation des gaz parfaits :

$$V_{\text{eq}} = \frac{n_{\text{eq}}RT}{P} = \frac{RT}{P}(n_i + \xi_{\text{eq}}) \quad (5)$$

Finalement, en utilisant l'équation 4, on obtient

$$V_{\text{eq}} = V_0 \left(1 + \frac{\xi_{\text{eq}}}{n_i} \right) \quad (6)$$

5. On écrit l'expression de la constante d'équilibre, on a

$$K^\circ = \frac{p(\text{NO})^4 p(\text{H}_2\text{O})^6}{p^\circ p(\text{NH}_3)^4 p(\text{O}_2)^5} = \frac{RT}{p^\circ V_{\text{eq}}} \frac{(4\xi_{\text{eq}})^4 (6\xi_{\text{eq}})^6}{(n_1 - 4\xi_{\text{eq}})^4 (n_2 - 5\xi_{\text{eq}})^5} \quad (7)$$

Et en utilisant l'équation 6, on obtient :

$$K^\circ = \frac{P}{p^\circ} \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3 + \xi_{\text{eq}}} \frac{(4\xi_{\text{eq}})^4 (6\xi_{\text{eq}})^6}{(n_1 - 4\xi_{\text{eq}})^4 (n_2 - 5\xi_{\text{eq}})^5} \quad (8)$$

Comme $K^\circ \gg 10^4$, on peut considérer que la réaction est totale. Dans ces conditions, il faut déterminer le réactif limitant. Comme $n_1/4 < n_2/5$, le réactif limitant est NH_3 et on a $\xi_{\text{eq}} = \frac{n_1}{4} = 2,5 \text{ mol}$

6. Les pressions partielles des gaz à l'équilibre sont donc

$$p(\text{NH}_3) \approx 0 \text{ bar} \quad (9)$$

$$p(\text{O}_2) = \frac{n_2 - 5\xi_{\text{eq}}}{n_i + \xi_{\text{eq}}} P \approx 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ bar} \quad (10)$$

$$p(\text{N}_2) = \frac{n_3}{n_i + \xi_{\text{eq}}} P \approx 7,0 \cdot 10^{-1} \text{ bar} \quad (11)$$

$$p(\text{NO}) = \frac{4\xi_{\text{eq}}}{n_i + \xi_{\text{eq}}} P \approx 9,8 \cdot 10^{-2} \text{ bar} \quad (12)$$

$$p(\text{H}_2\text{O}) = \frac{6\xi_{\text{eq}}}{n_i + \xi_{\text{eq}}} P \approx 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ bar} \quad (13)$$

7. Pour déterminer l'ordre de grandeur de la pression de NH_3 à l'équilibre, on reprend l'équation 8 en remplaçant ξ_{eq} par la valeur déterminée précédemment, sauf pour le terme $n_1 - 4\xi_{\text{eq}}$. On obtient alors

$$n_f(\text{NH}_3) = n_1 - 4\xi_{\text{eq}} = \left(\frac{P}{p^\circ} \frac{1}{n_i + \xi_{\text{eq}}} \frac{(4\xi_{\text{eq}})^4 (6\xi_{\text{eq}})^6}{K^\circ (n_2 - 5\xi_{\text{eq}})^5} \right)^{1/4} \approx 9,6 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \quad (14)$$

Ce qui correspond à une pression de l'ordre de

$$p(\text{NH}_3) = \frac{n_f}{n_i + \xi_{\text{eq}}} p \approx 9 \cdot 10^{-15} \text{ bar} \quad (15)$$

C'est vraiment très faible et complètement indétectable.