DS5 : Filtrage et ondes

— Durée : 4h.
— La calculatrice est autorisée.
— Chaque réponse doit être justifiée.
— Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : Mirages acoustiques

Ce problème s'attache à expliquer le phénomène de mirages acoustiques. Les citations (en italique dans le texte) sont extraites du chapitre «Mirages acoustiques» de l'ouvrage Les Lois du monde de R. Lehoucq, J.-M. Courty et É. Kierlik, Éditions Belin, 2003.

"En choisissant leur profondeur de plongée, les baleines parviennent à se faire entendre à des milliers de kilomètres et les sous-mariniers à se dissimuler des sonars. Les cétacés, comme les sous-marins, exploitent pour cela l'équivalent acoustique des mirages lumineux. Pour expliquer comment, nous allons d'abord décrire la propagation du son, puis nous montrerons que les mirages acoustiques sont une des multiples manifestations d'un même phénomène : la déviation des ondes sonores vers les zones où leur vitesse de propagation est la plus faible."

Les parties 1 à 3 sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1 La propagation du son

"Lorsque nous parlons, nos cordes vocales mettent en mouvement l'air qui les entoure. L'air étant élastique, chaque couche d'air se comporte comme un ressort. La couche d'air comprimé se détend, et ce faisant comprime la couche qui la suit dans le sens de propagation du son, etc."

1. Définir une onde ; expliquer en quoi la propagation d'une onde est un phénomène à la fois spatial et temporel. Quelle(s) grandeur(s) physique(s) peut-on associer à une onde acoustique ?
2. Le son est une onde mécanique. Que peut-on alors dire de son milieu de propagation ? Donner deux autres exemples d'ondes mécaniques (mais non acoustiques).
3. À quel intervalle de fréquences correspond le domaine des ondes sonores audibles par l'homme ? Qu'appelle-t-on *ultrasons* ? Expliquer un des usages *autres que dans les sonars* que l'homme peut faire des ultrasons.
4. Pendant un orage, on peut grossièrement évaluer la distance à laquelle est tombée la foudre. Si on divise par trois la durée (en secondes) entre l'éclair et le tonnerre, on obtient la distance cherchée (en kilomètres).
   À partir de cette observation, estimer approximativement la valeur numérique de la vitesse c_{air} du son dans l'air, par temps orageux. La réponse sera justifiée.

2 Principe du sonar

Un sonar (*SOund NAvigation and Ranging*) est un dispositif de détection utilisant les ondes acoustiques comme signal détectant. Il permet aux marins de naviguer correctement (mesure de la profondeur) ou aux sous-mariniers de repérer les obstacles et les autres navires. Certains animaux (chauve-souris, dauphins...) utilisent des systèmes similaires au sonar pour repérer leurs proies ou des obstacles.

On suppose dans cette partie que la mer est un milieu homogène dans lequel le son se propage rectilignement. À 20 °C, la vitesse du son dans l'eau de mer est $c_{\text{mer}} = 1{,}50\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$.

L'avant d'un sous-marin est équipé d'un sonar lui permettant d'éviter d'entrer en collision avec un autre sous-marin. Le sonar est constitué d'un émetteur d'ondes sonores et d'un récepteur capable d'identifier l'écho de l'onde précédemment émise.

On note O l'avant du sous-marin équipé du sonar et (Ox) l'axe du sous-marin, correspondant à l'axe de propagation de l'onde sonore. Un second sous-marin est à la distance L du premier, dans la configuration représentée sur la figure 1.

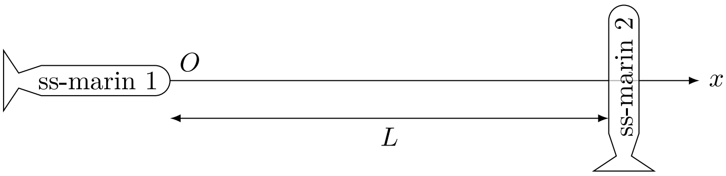

FIGURE 1 – Les sous-marins, vus de dessus

5. Expliquer le principe de fonctionnement d'un sonar.
6. L'émetteur produit une très brève impulsion sonore. Le récepteur en reçoit l'écho au bout d'une durée $\Delta t_e = 38{,}8\,\mathrm{ms}$. En déduire la distance L à laquelle se situe le second sous-marin ; faire l'application numérique.

À partir de l'instant $t = 0$, le sonar émet l'impulsion sonore sinusoïdale de la figure 2, pendant une durée $\Delta t_i = 800\,\mu\mathrm{s}$.

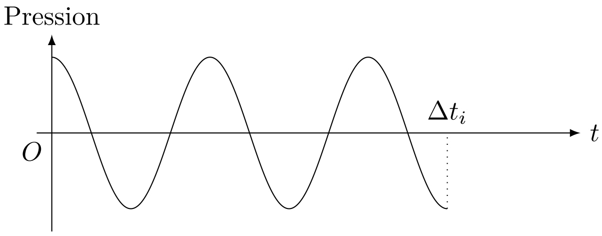

FIGURE 2 – Impulsion sinusoïdale correspondant au signal envoyé par le sonar

7. Déterminer, en justifiant, la valeur numérique de la fréquence f de l'onde émise par le sonar

   On s'intéresse à la propagation spatiale de l'impulsion sonore : on la représente alors dans le système d'axes de la figure 3.

FIGURE 3 – Propagation spatiale

8. Exprimer et calculer numériquement la longueur spatiale Δx de l'impulsion.
9. Reproduire sur la copie le système d'axes de la figure 3 et y représenter l'impulsion sonore à l'instant $t = 12{,}0\,\mathrm{ms}$; calculer numériquement, en justifiant précisément, les positions du début (ou front) de l'impulsion et de sa fin.

   Un détecteur d'ondes sonores est placé sur le second sous-marin, sur l'axe (Ox).
10. Représenter sur la copie l'évolution de l'amplitude enregistrée par ce détecteur au cours du temps. Calculer numériquement, en justifiant précisément, les instants auxquels le détecteur reçoit le début et la fin de l'impulsion et on repérera ces instants sur l'axe horizontal qu'on graduera.

3 Son et température

Dans le cas où on assimile l'air à un gaz parfait, la vitesse du son dans l'air est donnée par la formule :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \tag{1}$$

où $\gamma = 1.41$, $R = 8{,}31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, T est la température en kelvin et $M = 29{,}0\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ la masse molaire de l'air (qu'il faut mettre en $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$ dans la formule).

"Le son est dévié dans un milieu où sa vitesse de propagation n'est pas uniforme : les trajectoires des ondes sonores s'incurvent vers les zones où la vitesse de propagation est la plus faible. (...) La vitesse du son croît d'environ 0,6 mètre par seconde et par degré Celsius : elle dépend de l'altitude puisque la température change avec cette dernière."

11. Calculer numériquement la vitesse c_0 du son à la température $T_0 = 298\,\mathrm{K}$.

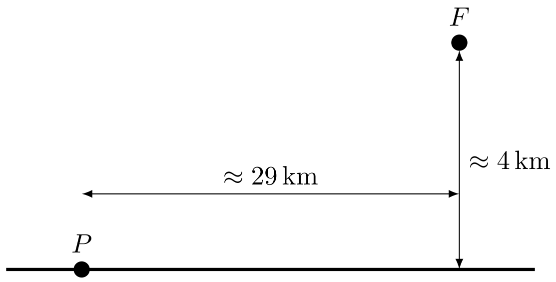

FIGURE 4 – Un orage silencieux. On représente la position d'une personne P et de la foudre F.

12. Calculer la variation Δc de la vitesse du son lorsque la température varie de $\Delta T = 1\,\mathrm{K}$.

    La déviation des ondes sonores dans l'air dépend du gradient de température. *"Cet effet est amplifié en cas d'orage où l'air au voisinage du sol est très chaud, la température diminuant fortement avec l'altitude."* La déviation *"est alors si importante que l'on n'entend pas le tonnerre d'orages qui éclatent à seulement quelques kilomètres de distance : tout se passe comme si l'on se trouvait dans une zone d'«ombre sonore»."* Ainsi, il se peut qu'on aperçoive un éclair, produit à environ 4 km d'altitude, sans entendre le tonnerre si on est au-delà d'environ 29 km de distance.

13. Reproduire sur la copie la figure 4 et y représenter l'allure de la trajectoire du son du tonnerre, dans le cas où il est à la limite d'être perçu par l'homme. Par analogie avec un mirage optique, justifier le nom de «mirage acoustique» donné au phénomène décrit. Sur la figure 4 reproduite, repérer la zone d'«ombre sonore», correspondant aux lieux où le tonnerre n'est pas perceptible.

Exercice 2 : ONDE SUR UNE CORDE

On tend une corde entre deux points A et B situés sur l'axe x et dont les coordonnées sont $x_A = 0$ et $x_B = 10\,\mathrm{m}$. L'extrémité A de la corde peut bouger suivant l'axe y (coordonnée y_A) et l'extrémité B de la corde est fixe ($y_B = 0\,\mathrm{m}$).

On impose à l'extrémité A le mouvement suivant :

- pour $t < 0$: $y_A = 0$;
- pour $0 < t < 0{,}1\,\mathrm{s}$: y_A augmente à vitesse constante jusqu'à $y_A = 20\,\mathrm{cm}$;
- pour $0{,}1\,\mathrm{s} < t < 0{,}2\,\mathrm{s}$: $y_A = 20\,\mathrm{cm}$;
- pour $0{,}2\,\mathrm{s} < t < 0{,}4\,\mathrm{s}$: y_A diminue à vitesse constante jusqu'à $y_A = 0$;
- pour $t > 0{,}4\,\mathrm{s}$ $y_A = 0$;

1. Représenter graphiquement l'évolution de $y_A(t)$ pour t compris entre 0 et 1 s.
2. Quelle est la vitesse du point A à $t = 0{,}12\,\mathrm{s}$, $t = 0{,}3\,\mathrm{s}$ et $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$?

On suppose que la perturbation de la hauteur de la corde introduite par le mouvement du point A se propage suivant l'axe x avec la célérité $c = 10\,\mathrm{m/s}$.

3. Représenter la forme de la corde à $t_1 = 0{,}3\,\mathrm{s}$, $t_2 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ et $t_3 = 1\,\mathrm{s}$.
4. Représenter l'évolution temporelle de l'onde aux points C d'abscisse $x_c = 5\,\mathrm{m}$ et D d'abscisse $x_D = 7\,\mathrm{m}$.

On suppose que l'impulsion créée en A qui se propage suivant l'axe x est réfléchie au point B (elle retourne vers A). On suppose également qu'au moment où l'impulsion revient en A, une nouvelle impulsion est émise vers B, et le cycle se poursuit ainsi.

5. À quelle fréquence les impulsions sont-elles émises par le point A.
6. Comment est modifiée cette fréquence lorsqu'on modifie la longueur de la corde ? Lorsque la célérité c est modifiée ?
7. Indiquer quels sont les paramètres physiques qui peuvent influencer la célérité d'une onde qui se propage le long d'une corde.

Exercice 3 : Filtre passe-bas du deuxième ordre

On souhaite réaliser un filtre passe-bas du second-ordre à partir d'un circuit RLC série. La tension d'entrée du filtre étant prise aux bornes du dipôle constitué par R, L et C en série.

1. Aux bornes de quel composant (R, L ou C) doit-on prendre la tension de sortie pour avoir un filtre passe-bas ? Justifier précisément la réponse.
2. Établir alors l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ de ce filtre en fonction de ω, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
3. Exprimer le gain $G(\omega)$ et le gain en décibels $G_{\mathrm{dB}}(\omega)$ du filtre en fonction de ω, ω_0 et Q.
4. Exprimer la phase $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert du filtre en fonction de ω, ω_0 et Q.
5. Déterminer les équations des asymptotes de $G_{\mathrm{dB}}(\omega)$ pour les hautes et basses fréquences. Ainsi que l'expression de $G_{\mathrm{dB}}(\omega_0)$ en fonction de Q.
6. Tracer sur un même graphique, l'allure du diagramme de Bode pour $Q = 0{,}1$ et $Q = 10$ en faisant apparaitre les asymptotes.
7. Montrer que la pulsation de coupure à $-3\,\mathrm{dB}$ ω_c est telle que
$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q^2} - 1\right)^2} + 1 - \frac{1}{2Q^2} \tag{1}$$
8. Montrer que
   — Lorsque $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_c = \omega_0$;
   — lorsque $Q \gg 1$, $\omega_c \approx \sqrt{\sqrt{2} + 1}\omega_0$;
   — lorsque $Q \ll 1$, $\omega_c \approx Q\omega_0$. (On pourra utiliser $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$ lorsque $\alpha \ll 1$)
9. Tracer l'allure de l'évolution de ω_c/ω_0 en fonction de Q.
10. Ce filtre peut-il être utilisé en dérivateur ? intégrateur ? moyenneur ?
11. Quel avantage présente un filtre passe-bas du deuxième ordre par rapport à un filtre passe-bas du premier ordre ?

Exercice 4 : Filtre de Colpitts

On considère le filtre suivant, appelé *filtre de Colpitts*.On l'étudie en régime sinusoïdal forcé et en sortie ouverte.

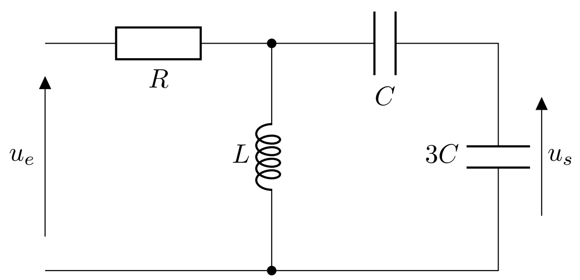

Figure 1 – Schéma du filtre de Colpitts étudié

1. Étudier qualitativement le comportement de ce filtre à haute et basse fréquence et en déduire le type de filtre dont il s'agit.
2. Montrer que l'association de deux condensateurs C_1 et C_2 en série forme un dipôle équivalent à un condensateur de capacité
$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{1}$$
3. La pulsation propre ω_0 du circuit est la pulsation pour laquelle l'impédance du dipôle formé par L en parallèle avec l'association de C et $3C$ devient infinie. Montrer que la pulsation propre du circuit s'écrit
$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}} \tag{2}$$
4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme
$$\underline{H}(\omega) = \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{3}$$
On donnera les expressions de A et Q en fonction de R, L, et C.

5. Montrer que cette fonction de transfert est compatible avec la réponse donnée à la question 1.

On donne ci-dessous le diagramme de bode en amplitude et en phase du filtre pour $Q = 10$.

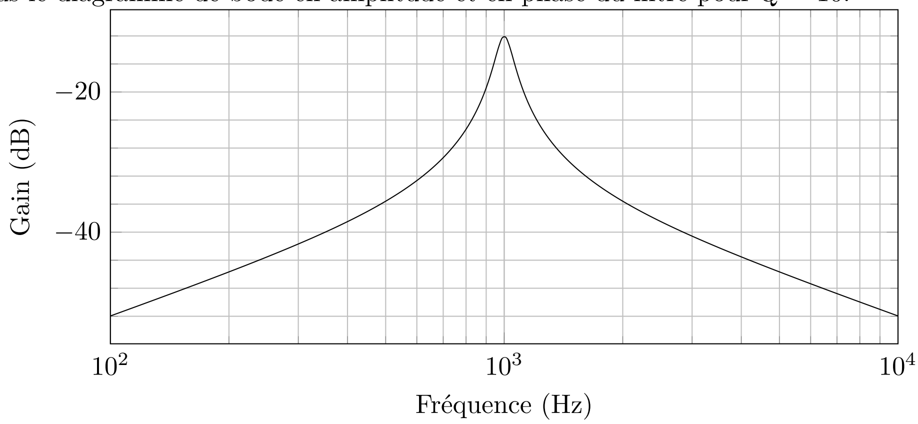

FIGURE 2 – Diagramme de Bode en amplitude du filtre de Colpitts pour $Q = 10$

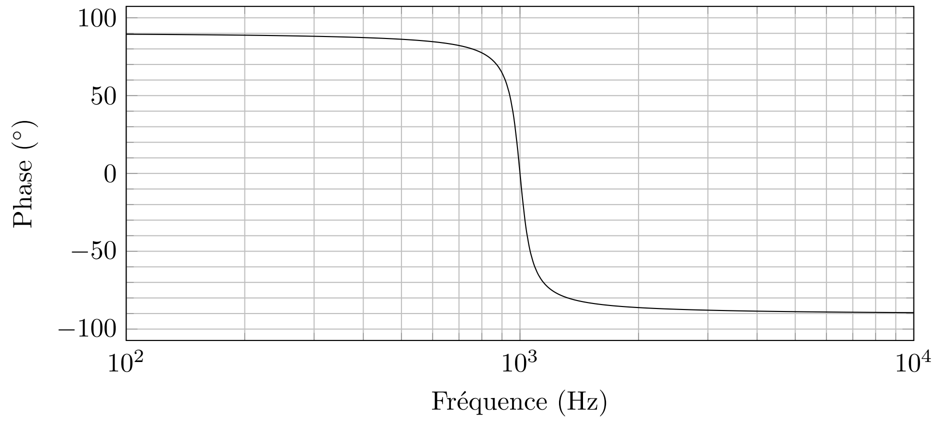

FIGURE 3 – Diagramme de Bode en phase du filtre de Colpitts pour $Q = 10$

6. Déterminer graphiquement la valeur de la fréquence centrale du filtre et retrouver graphiquement la valeur de A.
7. Le diagramme de Bode de la figure 2 a été tracé en plaçant en abscisse la fréquence avec une échelle logarithmique. Reproduire ce diagramme de Bode plaçant en abscisse $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ dans une échelle linéaire. Déterminer graphiquement les équations des asymptotes dans ce second diagramme.
8. Déterminer par le calcul les équations de ces asymptotes et vérifier ques les résultats sont compatibles.
9. Dans quel domaine de fréquences, la tension de sortie est-elle en avance de phase sur la tension d'entrée ?
10. Déterminer, à partir de la fonction de transfert, l'expression de la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$ du filtre, notée $\Delta\omega$, en fonction de ω_0 et Q.
11. Déterminer graphiquement la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$ du filtre et montrer que la valeur trouvée est compatible avec la valeur théorique.

On impose à l'entrée de ce filtre le signal suivant :

$$u_e(t) = 2 + \cos\left(6300t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos(63000t) \tag{4}$$

12. Déterminer la valeur moyenne, la valeur efficace et la fréquence fondamentale de ce signal.
13. Donner une expression approchée du signal de sortie.
14. Montrer que lorsque l'on place en entrée du filtre un signal périodique de pulsation fondamentale $\omega \gg \omega_0$, le filtre a un comportement intégrateur pour la partie alternative du signal d'entrée.
15. On alimente le filtre avec un sigal créneau évoluant entre $0\,\mathrm{V}$ et $6\,\mathrm{V}$ à une fréquence de $10\,\mathrm{kHz}$. Représenter l'allure du signal de sortie. Donner un ordre de grandeur de l'amplitude du signal observé à l'oscilloscope.
16. Montrer que lorsque l'on place en entrée du filtre un signal périodique de pulsation fondamentale $\omega \ll \omega_0$, le filtre a un comportement dérivateur.
17. On alimente le filtre avec un sigal triangulaire évoluant entre $0\,\mathrm{V}$ et $6\,\mathrm{V}$ à une fréquence de $10\,\mathrm{Hz}$. Représenter l'allure du signal de sortie lorsqu'on l'observe en mode DC à l'oscilloscope. Donner un ordre de grandeur de l'amplitude du signal obesrvé à l'oscilloscope.