DM5 : Filtrage – corrigé

Exercice 1 : Étude et utilisation d'un filtre

1 Étude du filtre

1. — Lorsque $\omega \to 0$: Le condensateur se comporte comme un interrupeur ouver et on a un pont diviseur de tension formé par R_1 et R_2. La tension de sortie est donnée par

$$\boxed{\underline{u}_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\underline{u}_e} \tag{1}$$

— Lorsque $\omega \to \infty$, le condensateur se comporte comme un fil et on a directement

$$\boxed{\underline{u}_s = \underline{u}_e} \tag{2}$$

2. On commence par déterminer l'impédance équivalente de R_1 et C associés en parallèle

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega} \tag{3}$$

Puis on écrit la relation entre $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$ avec la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{R_2}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_1} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1+jR_1C\omega}}\underline{u}_{\text{e}} \tag{4}$$

finalement, on trouve

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{1 + jR_1C\omega}{1 + j\frac{R_2R_1C}{R_1+R_2}\omega}} \tag{5}$$

On a bien la forme demandée, avec $\alpha = \frac{R_2}{R_2+R_2}$, $\omega_1 = \frac{1}{R_1C}$ et $\omega_2 = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}$.

3. Avec les expressions de ω_1 et ω_2 trouvées à la question précédente, on a directement $\omega_1 = \alpha\omega_2$.
4. Il est évident que $\alpha < 1$ et donc on a directement $\omega_1 < \omega_2$.
5. On commence par écrire l'expression du gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\alpha\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}\right) = 20\log(\alpha) + 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) - 10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) \tag{6}$$

— Lorsque $\omega \ll \omega_1$, on a aussi $\omega \ll \omega_2$ et

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) \tag{7}$$

Il y a une asymptote horizontale.

— Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, le gain devient

$$G_{\text{dB}} \approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \tag{8}$$

L'asymptote a une pente de 20 dB/décade.

— Lorsque $\omega \gg \omega_2$, on a aussi $\omega \gg \omega_1$ et le gain s'écrit

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{dB}} &\approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) && (9)\\ &\approx 20\log(\alpha) + 20\log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 20\log(\alpha) - 20\log(\alpha) = 0 && (10)\end{aligned}$$

Et on a une asymptote horizontale à nouveau.

6. Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, on peut écrire la fonction de transfert comme

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{\alpha}{\omega_1} j\omega \tag{11}$$

La multiplication par $j\omega$ montre le caractère dérivateur du filtre.

7. — Lorsque $\omega \to 0$, la fonction de transfert peut être approximée par

$$\underline{H}(\omega) \approx \alpha \in \mathbb{R} \tag{12}$$

On a donc $\varphi = 0$.

— Lorsque $\omega \to \infty$, la fonction de transfert devient

$$\underline{H}(\omega) \approx 1 \tag{13}$$

et on a à nouveau $\varphi = 0$

8. Le diagramme de Bode (et l'analyse qualitative) montre que le filtre laisse passer les signaux de haute fréquence et atténue (partiellement) les signaux de basse fréquence. C'est donc un filtre passe-haut.
9. On lit la fréquence de coupure graphiquement, on trouve $f_c = 800\,\mathrm{Hz}$ et $\omega_c = 5\cdot 10^3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
10. On calcule $G_{\mathrm{dB}}(\omega_2)$:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{dB}}(\omega_2) &= 20\log(\alpha) + 10\log\left(1+\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right) - 10\log\left(1+\left(\frac{\omega_2}{\omega_2}\right)^2\right) && (14)\\ &= 20\log(\alpha) + 10\log\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right) - 10\log(2) && (15)\end{aligned}$$

Comme on a supposé que $\omega_1 \ll \omega_2$, alors $\alpha \ll 1$ et $\frac{1}{\alpha^2} \gg 1$. Donc

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_2) \approx 20\log(\alpha) - 20\log(\alpha) - 10\log(2) \approx -3\,\mathrm{dB} \tag{16}$$

On montre donc que $\omega_c \approx \omega_2$

11. On trouve α en regardant le gain du filtre lorsque $\omega \to 0$ et on trouve $\alpha = 0{,}02$.
12. On a $\omega_1 = \alpha\omega_2 \approx 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$
13. On commence par calculer $\varphi(\omega_1)$ et $\varphi(\omega_2)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_1) &= \arg(\underline{H}(\omega_1)) = \arg\left(1+j\frac{\omega_1}{\omega_1}\right) - \arg\left(1+j\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) && (17)\\ &\approx \arctan(1) - \arctan(0) \approx \frac{\pi}{4} && (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_2) &= \arg(\underline{H}(\omega_2)) = \arg\left(1+j\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \arg\left(1+j\frac{\omega_2}{\omega_2}\right) && (19)\\ &\approx \frac{\pi}{2} - \arctan(1) \approx \frac{\pi}{4} && (20)\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\omega_2 \gg \omega_1$. On cherche alors les fréquences pour lesquelles $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et on retrouve $f_1 = 16\,\mathrm{Hz}$ et $f_2 = 800\,\mathrm{Hz}$, ce qui donne à nouveau $\alpha = 0{,}02$.

14. Si on place en sortie du filtre une résistance du même ordre de grandeur que R_2, tout se passe comme si on changeait la résistance R_2 pour une résistance $R_2' < R_2$. Dans ce cas, ω_1 ne change pas, mais α devient plus petit et donc ω_2 augmente. On augmente donc la fréquence de coupure du filtre et on diminue donc sa bande passante.

2 Utilisation du filtre

15. On utilise les diagrammes de Bode pour déterminer le gain et le déphasage des deux composantes du signal d'entrée :
    — à 10 Hz, on a $G_{\text{dB}} = -32{,}5$ donc $G = 10^{-\frac{32.5}{20}} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 30° = 0{,}52\,\text{rad}$.
    — à 50 Hz, on a $G_{\text{dB}} = -24$ donc $G = 10^{-\frac{24}{20}} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-2}$ et le déphasage vaut $\varphi = 65° = 1{,}13\,\text{rad}$.

    Le signal d'entrée est $e(t) = A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$ et le signal de sortie sera

$$\boxed{s(t) = A(2{,}4 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_1 t + 0.52) + 6{,}3 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_2 t + 1.13))} \tag{21}$$

16. Le gain à 100 Hz vaut -18 dB, ce qui correspond à un gain $G = 0.13$. Le déphasage à cette fréquence est d'environ 70°. L'amplitude de la sinusoïde en sortie du filtre est

$$\boxed{A' = V_{\text{eff}}\sqrt{2}G \approx 1{,}4\,\text{V}} \tag{22}$$

17. L'offset se trouvant à fréquence nulle, il aura un gain de $\alpha = 0{,}02$, et on aura en sortie un offset de 0,1 V.
18. On utilise la définition de la valeur efficace :

$$E_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{23}$$

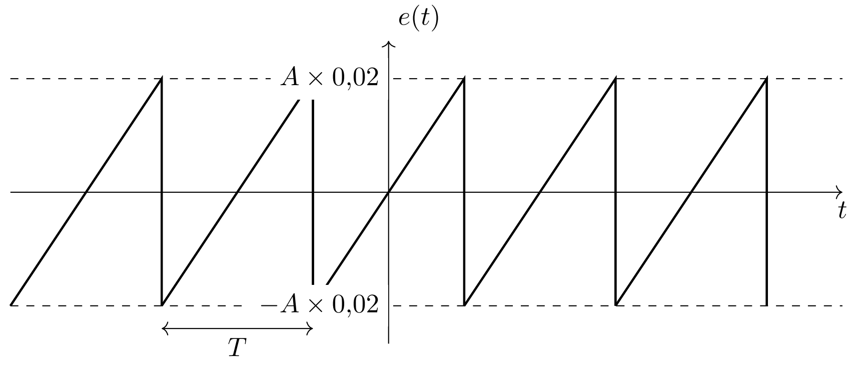
avec

$$e(t) = \frac{2A}{T}t \quad \text{sur} \quad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \tag{24}$$

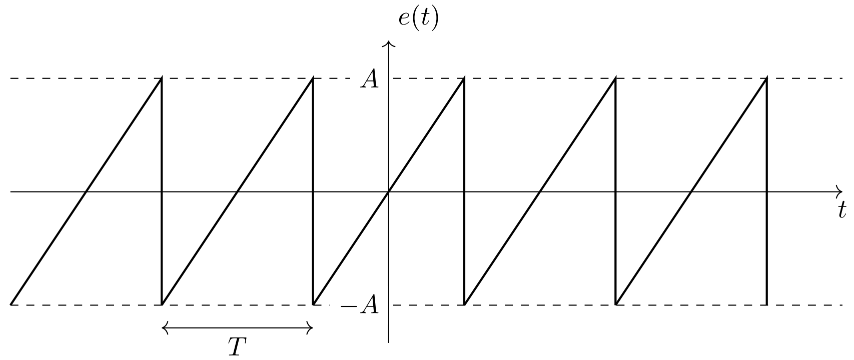
On a donc

$$\boxed{E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{4A^2}{T^2}t^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{4A^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}} = \sqrt{\frac{A^2}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}} \tag{25}$$

19. Pour $T = 1$ s, la période est très grande et $\omega \ll \omega_1$. Le gain sera donc de $\alpha = 0{,}02$, le signal de sortie sera atténué par rapport au signal d'entrée.



Pour $T = 10$ µs, la période est très faible et $\omega \gg \omega_2$. Le gain est donc de 1 et le signal est inchangé.



Pour $T = 10\,\text{ms}$, on a $f = 100\,\text{Hz}$ et on se trouve dans la zone où le filtre a un comportement dérivateur, la sortie sera donc proportionelle à la dérivée de l'entrée et on aura un signal de la forme :