DM8 : Mécanique

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Course poursuite

Dans *Fast and furious 5*, on voit les héros du film voler un coffre-fort container (contenant le butin d'un trafiquant de drogue) en l'accrochant par des filins à deux voitures de course

Figure 1 – Course poursuite dans les rues de Rio.

Le container métallique a une masse m_0. On suppose que la course-poursuite s'effectue à la vitesse V constante dans le référentiel de la ville supposé galiléen. On néglige les frottements de l'air.

Les voitures sont des tractions-avant avec des roues munies de pneus en caoutchouc. On note m_1 la masse d'une voiture, d le diamètre de ses roues et J leur moment d'inertie (par rapport à leurs axes de symétrie respectifs).

On note f_0 le coefficient de frottement solide au contact métal/bitume et f celui au contact caoutchouc/bitume.

L'étude est ramenée à une seule voiture de masse $m = 2m_1$ tirant le container en ligne droite, sur route horizontale (axe Ox). On entend par voiture l'ensemble {carrosserie, roues, moteur, conducteur}.

Le plan (Oxz), vertical contenant le filin, est plan de symétrie de l'ensemble {voiture, filin, container}. On suppose ainsi que toutes les actions mécaniques sont décrites par des forces coplanaires ramenées dans ce plan. Ainsi, la paire de roues arrière est remplacée par une seule roue au contact avec le bitume en I_1. Il en est de même pour la paire de roues avant en I_2 et on note $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma_m \overrightarrow{e}_y$ le couple appliqué par le moteur sur celle-ci ($\Gamma_m > 0$).

L'axe Oz du repère est choisi ascendant ; on note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e}_z$ l'accélération de la pesanteur. Les réactions exercées par la chaussée sur le container et sur les roues sont décrites :

— Pour le container par : $\overrightarrow{R_0} = -T_0\overrightarrow{e}_x + N_0\overrightarrow{e}_z$, ;

— pour les roues par : $\overrightarrow{R_1} = T_1\overrightarrow{e}_x + N_1\overrightarrow{e}_z$ et $\overrightarrow{R_2} = T_2\overrightarrow{e}_x + N_2\overrightarrow{e}_z$.

Le filin, accroché horizontalement à une hauteur h au-dessus de la chaussée, exerce une force de traction $\overrightarrow{F}$ sur le container. Le centre de masse G de la voiture se trouve à la même hauteur h par rapport au sol, sur la médiatrice du segment $[I_1, I_2]$. On donne la valeur de l'empattement $I_1I_2 = 2b$.

Le schéma de l'ensemble {container, filin, voiture} est donné en figure 2. Les actions mécaniques subies par le container y sont représentées.

Toutes les valeurs numériques utiles sont regroupées à la fin de l'énoncé.

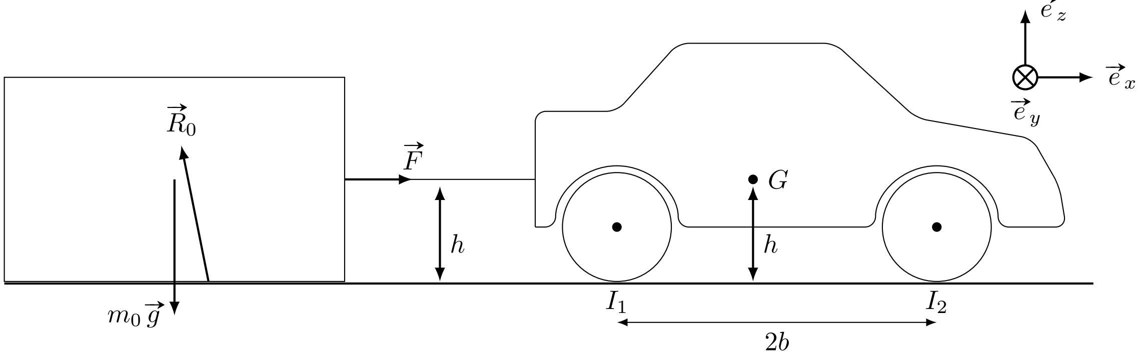

Figure 2 – Schéma de l'ensemble {Container, filin, voiture}

1. Reproduire la figure 2 et la compléter en indiquant toutes les actions mécaniques extérieures subies par la voiture.

Lorsque la caisse glisse sur le sol, les composantes T_0 et N_0 de $\vec{R}_0$ sont reliées par

$$T_0 = f_0 N_0 \tag{1}$$

2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au container, obtenir l'expression de $\vec{F}$ en fonction de f_0, m_0, g et $\vec{e}_x$.

On suppose qu'aucune roue ne glisse sur la chaussée. On admet alors que les actions de contact chaussée/roues ne dissipent ni ne fournissent de puissance aux roues.

3. Par application d'un théorème énergétique à la voiture, établir la relation entre la puissance de la force $\vec{F}$ et la puissance $\mathcal{P}_m$ fournie par le moteur.
4. Calculer $\mathcal{P}_m$ en kilowatt et en cheval-vapeur. Le choix de deux voitures dans cette scène vous semble-t-il réaliste ?
5. Rappeler la loi du moment cinétique scalaire appliquée à un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. On précisera tous les termes et notations introduits.
6. Recenser toutes les actions mécaniques (résultants ou couples) s'exerçant sur la roue arrière, puis sur la roue avant.
7. On suppose les roues arrière sont en liaison pivot parfaite avec le reste de la voiture. En appliquant la loi du moment cinétique scalaire à chaque roue en rotation à vitesse angulaire constante dans un référentiel et par rapport à des axes à préciser, montrer que $T_1 = 0$ et que $\Gamma_m = T_2 \frac{d}{2}$.
8. Montrer que $\vec{F} = T_2 \vec{e}_x$. En déduire Γ_m et faire l'application numérique.
9. En utilisant le théorème du moment cinétique scalaire appliquée à la voiture par rapport à l'axe $(G, \vec{e}_y)$, montrer que $(N_1 - N_2)b = T_2 h$.
10. En déduire N_1 et N_2 en fonction de f_0, h, b, m, m_0 et g.

Les lois de Coulomb sur le frottement solide permettent d'assurer que les roues ne glissent pas sur la chaussée si $|T_k| < f N_k$ avec $k \in \{1, 2\}$.

11. Quelles roues risquent de glisser ?
12. Montrer qu'un tractage sans glissement des roues impose une masse maximale tractable

$$m_{0,\max} = m \frac{f}{2 f_0 \left(1 + f \frac{h}{2b}\right)} \tag{2}$$

13. Faire l'application numérique. Commenter le résultat trouvé.

Lors de la préparation de leur plan, un des protagonistes suggère d'utiliser des voitures à propulsion arrière.

14. Quelles sont alors des expressions de T_1 et T_2 ?
15. En admettant que N_1 et N_2 trouvés à la question 10 sont inchangés, dire quelles roues risquent de glisser dans ce cas.
16. En déduire l'expression de la masse maximale tractable $m'_{0,\max}$.
17. Faire l'application numérique et conclure si les héros peuvent ou non réussir cette opération de tractage.

Données numériques :

Accélération de la pesanteur :	$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Masse du container :	$m_0 = 4500\,\mathrm{kg}$
Masse totale des deux voitures :	$m = 3000\,\mathrm{kg}$
Diamètre des roues :	$d = 20$ pouces (1 pouce = 2,5 cm)
Empattement :	$2b = 2{,}7\,\mathrm{m}$
Hauteur du centre de masse et du filin :	$h = 0{,}5\,\mathrm{m}$
Coefficient de frottement métal/bitume :	$f_0 = 0{,}4$
Coefficient de frottement caoutchouc/bitume :	$f = 1{,}0$
Vitesse lors de cette course poursuite :	$V = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
1 cheval – vapeur (unité de puissance) :	$1\,\mathrm{ch} = 736\,\mathrm{W}$