

DM8 : Mécanique – corrigé

Exercice 1 : CHARGE ÉLECTRIQUE SUR UN ANNEAU

- Les forces exercées sur le point M sont :
 - Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
 - La force électrostatique $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^3}$;
 - La réaction de l'anneau, suivant \vec{e}_r , car il n'y a pas de frottements $\vec{R} = R\vec{e}_r$.
- L'énergie potentielle de pesanteur est $E_{pp} = mgz$, où z est l'altitude du point M par rapport à O . Avec les données du problème, on trouve $E_{pp} = mga(1 - \cos(\theta))$.
- La distance AM est la base du triangle isocèle ACM et vaut $AM = 2a \cos(\theta/2)$. On en déduit que l'énergie potentielle électrostatique du point M est $E_{pe} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a \cos(\theta/2)}$.
- Avec les deux questions précédente, on trouve directement :

$$u = \frac{E_{pp} + E_{pe}}{mga} = 1 - \cos(\theta) - \frac{-qQ}{8\pi\epsilon_0 mga^2} \frac{1}{\cos(\theta/2)} = -\frac{4\lambda^3}{\cos(\theta/2)} + 1 - \cos(\theta) \quad (1)$$

avec $\lambda^3 = -\frac{qQ}{32\pi\epsilon_0 mga^2}$

- Pour déterminer les positions d'équilibre, on cherche les angles θ tels que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, soit $\frac{du}{d\theta} = 0$. On a

$$\frac{du}{d\theta} = 2 \sin(\theta/2) \left(\cos(\theta/2) - \frac{\lambda^3}{\cos^2(\theta/2)} \right) \quad (2)$$

La position $\theta = 0$ sera donc toujours une position d'équilibre. On pourra également avoir une autre position d'équilibre pour $\cos(\theta/2) - \frac{\lambda^3}{\cos^2(\theta/2)} = 0$, soit $\cos^3(\theta/2) = \lambda^3$, ou $\cos(\theta/2) = \lambda$.

- Si $\lambda < 0$, on aura $\cos(\theta/2) < 0$ soit $\theta/2 > \pi/2$ ou encore $\theta > \pi$. Or, nous avons restreint l'étude à $\theta \in [0, \pi]$ donc il n'y a pas de valeurs de θ qui convienne dans cet intervalle.
 - Si $0 < \lambda < 1$, La position $\theta = \arccos(\lambda)$ sera également une position d'équilibre.
 - Si $\lambda > 1$, l'équation $\cos(\theta) = \lambda$ n'a pas de solution et il n'y a pas d'autre position d'équilibre.
- Dans le cas 2, on a $\lim_{\theta \rightarrow \pi} u = \infty$, donc il correspond à $\lambda < 0$. La position d'équilibre en $\theta = 0$ est stable.
 - Le cas 1 présente 3 positions d'équilibre, ce qui correspond au cas $0 < \lambda < 1$. La position d'équilibre en $\theta = 0$ est stable et les deux autres sont instables.
 - Le cas 3 correspond à $\lambda > 1$, la position d'équilibre en $\theta = 0$ est instable.
 - Pour déterminer l'approximation parabolique de l'énergie potentielle, on calcule $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta = 0)$. On commence par montrer que $\frac{d^2 u}{d\theta^2}(0) = 1 - \lambda^3$ et donc $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(0) = mga(1 - \lambda^3)$. Et finalement, on a

$$E_p(\theta) \approx \frac{1}{2} mga(1 - \lambda^3)\theta^2 + E_p(0) \quad (3)$$

- L'énergie mécanique est

$$E_m = \frac{1}{2} mv^2 + E_p = \frac{1}{2} m(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} mga(1 - \lambda^3)\theta^2 \quad (4)$$

L'énergie mécanique est constante car le poids et la force \vec{F} sont conservatives et la force \vec{R} ne travaille pas car elle est en permanence perpendiculaire au mouvement.

9. Comme $E_m = \text{constante}$, on a $\frac{dE_m}{dt} = 0$. En utilisant l'expression de E_m trouvée à la question précédente, on trouve l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{a}(1-\lambda^3)}_{\omega^2} \theta = 0 \quad (5)$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation ω et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g(1-\lambda^3)}}$

10. La période propre d'un pendule simple de longueur a est $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ et donc on a directement $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\lambda^3}}$.

Exercice 2 : CHAMBRE À BULLES

1. Les forces qui s'exercent sur le proton sont :

- La force de Lorentz : $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$;
- la force de frottement : $\vec{f} = -K\vec{v}$.

L'application du PFD au proton dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne l'équation

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -K\vec{v} + e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1)$$

2. Si la force de frottement est négligeable, l'énergie cinétique du proton est constante car la force de Lorentz magnétique ne travaille pas. Dans ce cas, la trajectoire du proton est circulaire. Pour déterminer le rayon de la trajectoire, on projette le PFD sur le vecteur polaire \vec{e}_r et on a (voir cours) :

$$m \frac{v_0^2}{R} = ev_0 B \quad \text{soit} \quad R = \frac{mv_0}{eB} \quad (2)$$

La force de frottement n'est pas conservative et aura tendance à faire diminuer l'énergie cinétique (donc la vitesse) du proton. La vitesse diminuant, le rayon de la trajectoire diminuera également et le proton aura une trajectoire en forme de spirale.

3. Si on note (v_x, v_y, v_z) les coordonnées du vecteur vitesse \vec{v} du proton, l'équation 1 projetée sur l'axe \vec{e}_z donne $m \frac{dv_z}{dt} = -Kv_z + 0$ (car \vec{B} est suivant \vec{e}_z). La solution de cette équation est $v_z(t) = Ae^{-K/mt}$. Or $v_z(0) = 0$ et donc $A = 0$ et finalement $v_z(t) = 0$. La vitesse suivant l'axe z étant toujours nulle, le mouvement ne se fait que dans le plan $(0xy)$.

La projection de l'équation 1 sur les axes \vec{e}_x et \vec{e}_y donne alors

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{K}{m}v_x + \frac{eB}{m}v_y = -\frac{1}{\tau}v_x + \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{K}{m}v_y - \frac{eB}{m}v_x = -\frac{1}{\tau}v_y - \omega v_x \end{cases} \quad (3)$$

On a donc $\overline{a} = \omega$ et $\overline{b} = \frac{1}{\tau}$

4. On a $\frac{dV}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + j\frac{dv_y}{dt}$. En utilisant l'équation 3, on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\tau}V - j\omega V = -\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)V \quad (4)$$

5. La solution de l'équation différentielle précédente est

$$\underline{V}(t) = \underline{K}e^{-(\frac{1}{\tau} + j\omega)t} = v_0 e^{-(\frac{1}{\tau} + j\omega)t} \quad (5)$$

Pour déterminer \underline{K} on a utilisé la condition initiale $\underline{V}(0) = v_0 = \underline{K}$.

6. On a $\overline{v_x(t) = \operatorname{Re}(\underline{V}(t)) = v_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t)}$ et $\overline{v_y(t) = \operatorname{Im}(\underline{V}(t)) = -v_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t)}$
7. On a $\underline{V}(t) = \frac{d\underline{X}}{dt}$. Donc $\underline{X}(t) = -\frac{v_0}{1/\tau + j\omega} e^{-(1/\tau + j\omega)t} + \underline{K}_2$. On utilise le fait que $\underline{X}(0) = 0$ pour trouver $\underline{K}_2 = \frac{v_0}{1/\tau + j\omega}$ et finalement

$$\underline{X}(t) = \frac{v_0}{1/\tau + j\omega} \left(1 - e^{-(1/\tau + j\omega)t} \right) \quad (6)$$

On a alors $\underline{X}_\infty = \frac{v_0}{1/\tau + j\omega} = \frac{v_0}{1/\tau^2 + \omega^2} (1/\tau - j\omega)$.

8. On a $\overline{x_\infty = \operatorname{Re}(\underline{X}_\infty) = \frac{v_0}{1/\tau + \tau\omega^2} = \frac{v_0\tau}{1 + (\omega\tau)^2}}$ et $\overline{y_\infty = \operatorname{Im}(\underline{X}_\infty) = -\frac{v_0\omega}{1/\tau^2 + \omega^2} = -\frac{v_0\omega\tau^2}{1 + (\omega\tau)^2}}$