

TD23 : Physique quantique – corrigé

Exercice 1 : L'ATOME D'HYDROGÈNE

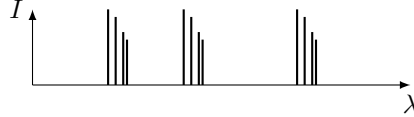
- Comme E_1 est négatif, l'énergie la plus basse est $-13,6\text{ eV}$ et il n'y a pas d'énergie la plus élevée, mais la borne supérieure de l'énergie est 0 eV .
- L'énergie est minimale lorsque le photon effectue la transition $E_2 \rightarrow E_1$. Dans ce cas, l'énergie du photon émis est $E = -13,6 \times (1/4 - 1) = 10,2\text{ eV}$. Cela correspond à une longueur d'onde dans le vide $\lambda = 122\text{ nm}$. (ultraviolet)
- Toutes les transitions vers E_1 auront une énergie plus élevée que celle que l'on vient de calculer et donc une longueur d'onde plus courte. Elles émettent donc toutes des photons ultraviolets.
- L'énergie d'un photon émis lors du passage d'un niveau n à un niveau n' ($n > n'$) est :

$$E = E_n - E_{n'} = E_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{-E_1}{hc} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{et} \quad R = \frac{-E_1}{hc} \simeq 1,1 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

- Les transitions vers le niveau E_2 ont une longueur d'onde comprise entre $\lambda_1 = \left(R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \right)^{-1} = 654\text{ nm}$ et $\lambda_2 = \left(R \left(\frac{1}{2^2} - 0 \right) \right)^{-1} = 364\text{ nm}$. Elles sont donc majoritairement dans le visible. La longueur d'onde minimale d'une transition vers E_3 est $\lambda_2 = \left(R \left(\frac{1}{3^2} - 0 \right) \right)^{-1} = 818\text{ nm}$, ce qui se trouve dans l'infrarouge. Toutes les transitions vers les niveaux supérieurs auront des énergies plus faibles et se trouveront donc également dans l'infrarouge.

Le spectre de l'atome d'hydrogène est un spectre de raies

- qui fait apparaître quelques groupes correspondant aux différentes *séries*.
- La longueur d'onde de 657 nm correspond à la transition du niveau 3 vers le niveau 2 (*cf* question 5), elle est donc compatible avec le spectre de l'atome d'hydrogène.
- Lorsque l'électron absorbe un photon d'énergie supérieure à E_1 , il a assez d'énergie pour échapper à l'attraction du noyau, l'atome d'hydrogène est ionisé.



Exercice 2 : FAISCEAU LASER

- L'énergie des photons est $E = \frac{hc}{\lambda} = 3,14 \times 10^{-19}\text{ J} = 1,96\text{ eV}$
- Si n est le nombre de photons émis à chaque seconde, la puissance P du faisceau est $P = nE$ dont $n = P/E = 5 \times 10^{-3} / 3,14 \times 10^{-19} = 1,59 \times 10^{16}\text{ s}^{-1}$
- Les $N = nt$ photons émis pendant un temps t se trouvent dans le faisceau sur une longueur de $l = ct$ qui a un volume $V = \pi r^2 l = \pi r^2 ct$ la densité de photons est alors $d = \frac{N}{V} = \frac{n}{\pi r^2 c} = 1,69 \times 10^{13}\text{ m}^{-3} = 1,69 \times 10^4\text{ mm}^{-3}$

Exercice 3 : FLUX DE PHOTONS ÉMIS PAR UNE ANTENNE RADIO

- L'énergie d'un photon est $E = hf$, le nombre de photons émis par seconde est $n = P/E = P/(hf) = 1,5 \times 10^{28}\text{ s}^{-1}$
- Le nombre de photons émis est tellement élevé qu'aucun appareil ne permettrait de détecter l'aspect *granulaire* due aux photons de l'onde émise. On peut tout-à-fait traiter l'antenne sans utiliser la mécanique quantique.

Exercice 4 : MICROSCOPE ÉLECTRONIQUE

- C'est la diffraction qui est responsable de la limite de résolution en microscopie.
- La plus petite longueur d'onde visible est de l'ordre de 400 nm , c'est donc aussi l'ordre de grandeur des plus petits détails observables en microscopie optique. En pratique on arrive très difficilement à observer des objets plus petits que $1\text{ }\mu\text{m}$.
- La longueur d'onde associée à un électron est donnée par $\lambda = h/p = h/(mv)$. Donc $v = h/(m\lambda)$. Avec $\lambda = 400\text{ nm}$ on trouve $v = 1,82 \times 10^3\text{ m s}^{-1}$. L'énergie correspondante est $E = 1/2mv^2 = 1,51 \times 10^{-24}\text{ J} = 9,42 \times 10^{-6}\text{ eV}$. C'est l'énergie d'un électron accéléré par une tension de $9,42\text{ }\mu\text{V}$
- De la même manière, on trouve $E = 7,17 \times 10^{-5}\text{ eV}$.
- Pour $E = 1\text{ keV}$ on trouve $\lambda = 3,88 \times 10^{-11}\text{ m}$. La résolution du microscope électronique est principalement limitée par les aberrations géométriques des systèmes de focalisation.

Exercice 5 : L'ATOME DE BOHR

- La longueur d'onde λ_e à une distance r du noyau est $\lambda_e = \frac{h}{mv} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 h^2 r}{mq^2}}$

- Le périmètre de l'orbite de l'électron est $L = 2\pi r_n = n\lambda_e = n\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 h^2 r_n}{mq^2}}$ En élevant l'ensemble au carré, on obtient :

$$4\pi^2 r_n^2 = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 h^2 r_n}{mq^2} \quad \text{donc} \quad r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m q^2} n^2$$

- $E_n = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{mq^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{E_1}{n^2}$ avec $E_1 = \frac{mq^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$

On retrouve le lien entre le confinement spatial de l'électron et la quantification de son énergie.

- Lors d'une transition entre deux niveaux E_n et $E_{n'}$, le photon émis a une énergie $E = E_n - E_{n'} = hc/\lambda$. On a donc $\frac{1}{\lambda} = \frac{E_n - E_{n'}}{hc} = \frac{E_1}{hc} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ avec $R = \frac{mq^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$
- A.N. : $R = 1,097 \times 10^7\text{ m}^{-1}$ et $E_1 = -13,6\text{ eV}$
- Il faut appliquer la relation fondamentale de la dynamique à l'électron qui suit une trajectoire circulaire autour du noyau soumis à la force d'attraction électrostatique $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$ en projetant la RFD sur la direction *noyau-électron* : $F_r = ma_r = mv^2/r$ On trouve la vitesse de l'électron à la distance r . Pour trouver l'énergie totale E de l'électron, on ajoute son énergie cinétique $E_c = 1/2mv^2$ et son énergie potentielle électrique $E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}$.

Exercice 6 : DIFFRACTION DE NEUTRONS

- Source ordinaire : $E_0 = 6,21 \times 10^{-21}\text{ J} = 3,9 \times 10^{-2}\text{ eV}$ $\lambda_0 = h/mv$ or $E = 1/2mv^2$ donc $v = \sqrt{2E/m}$ et $\lambda_0 = h/\sqrt{2mE} = 1,42 \times 10^{-10}\text{ m}$
 - Source chaude : $E_c = 4,14 \times 10^{-20}\text{ J} = 2,6 \times 10^{-1}\text{ eV}$ et $\lambda_c = 5,6 \times 10^{-11}\text{ m}$
 - Source froide : $E_f = 5,2 \times 10^{-22}\text{ J} = 3,2 \times 10^{-3}\text{ eV}$ et $\lambda_f = 5,0 \times 10^{-10}\text{ m}$
- Pour effectuer des expériences de diffraction sur des cristaux il faut utiliser une longueur d'onde proche de la distance inter-atomique. Dans le cas présent la source la plus adaptée est la source froide. Les longueurs d'onde des autres sources sont plus faibles, l'angle de diffraction sera donc aussi plus faible entraînant une résolution inférieure.

Exercice 7 : UN PETIT PROBLÈME

On considère que le pointeur laser de Jim a une puissance $P = 1\text{ W}$, une longueur d'onde $\lambda = 532\text{ nm}$ et son faisceau a un diamètre $d = 2\text{ mm}$. La Lune se trouve à une distance $D \approx 4 \times 10^8\text{ m}$. La pupille de Bob par laquelle entrent les photons a un rayon $r = 2\text{ mm}$.

Le nombre de photons émis par le laser est $n = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc}$. L'angle de diffraction du laser est $\theta = \frac{\lambda}{d}$ et donc le diamètre de la tache du laser au niveau de la Lune est $L = D\theta = \frac{D\lambda}{d}$.

Le nombre de photons par mètre carré et par seconde qui atteint la lune est $\Phi = \frac{n}{S}$ où $S = \frac{\pi L^2}{4}$ est la surface de la tache du laser au niveau de la Lune.

Le nombre de photons qui entrent dans l'œil de Bob par seconde est

$$N = \Phi \pi r^2 = \frac{n \pi r^2}{S} = \frac{P \lambda \pi r^2}{hc \pi L^2 / 4} = \frac{4 P r^2 d^2}{hc D^2 \lambda} \approx 4 \times 10^3 \text{ photons/s}$$

Ce résultat est au dessus de la limite de visibilité de l'œil humain, cependant il est fort probable que cette intensité soit bien plus faible que des lumières parasites environnantes (éclairage public, face ensoleillée de la Terre, diffusion par l'atmosphère) et donc que Bob ne puisse pas discerner le laser de Jim au milieu de cette pollution lumineuse.