DM3 : Électricité – corrigé

Exercice 1 : Circuit RL et RLC

1. Initialement l'interrupteur est en position 2 depuis très longtemps. On a donc un circuit à une maille RLC à considérer.

   Le condensateur est donc équivalent un interrupteur ouvert : le courant dans la maille de droite est nul. On en déduit que la tension aux bornes de R est nulle. En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil, donc la tension à ses bornes est nulle. D'après la loi des mailles, $u(t) = u_L + u_R = 0 + 0 = 0$ (tensions à définir sur un schéma pour avoir le sens).

   La tension aux bornes du condensateur est donc nulle et le condensateur est déchargé et donc $u(t = 0^-) = 0$.
2. $u(t = 0^-) = 0$ d'après la question précédente. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur

$$\boxed{u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = 0} \tag{1}$$

3. Loi des mailles avec i pris dans le sens horaire : $E = R_0 i + u$ avec $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

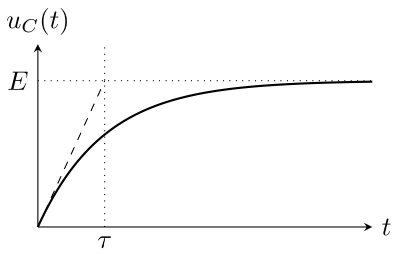
   On obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_0 C}u = \frac{E}{R_0 C}} \tag{2}$$

   On identifie un temps caractéristique $\tau = R_0 C$.
4. La solution est $u(t) = u_{SP} + u_{SH}(t)$ avec $u_{SP} = E$ et $u_{SH}(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Comme $u(0^+) = 0$, on en déduit $A = -E$. Et finalement

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)} \tag{3}$$

5. La courbe est la suivante :



6. A $t = 0^-$, le condensateur est chargé et $u(0^-) = E$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur

$$\boxed{u(0^-) = u(0^+) = E} \tag{4}$$

   Soit i le courant dans la maille RLC (que l'on prendra orienté dans le sens trigonométrique). $i(0^-) = 0$ car le circuit était ouvert. Par continuité du courant dans la bobine, $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Or on a aussi $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0} \tag{5}$$

7. On retrouve un circuit RLC en régime libre. En prenant i dans le sens trigonométrique et les tensions u_L et u_R en convention récepteur par rapport à ce courant : $u + u_L + u_R = 0$.
Avec $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_R = Ri$, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0} \tag{6}$$

Par identification avec la forme canonique, on a

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} \tag{7}$$

8. On suppose qu'on est en régime pseudo-périodique.
   (a) Condition d'établissement d'un régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$ ce qui donne $Q > \frac{1}{2}$.
   (b) Le discriminant de l'équation caractéristique associée à la forme canonique est
   $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$, que l'on peut écrire $\Delta = -4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$
   Les racines r_1 et r_2 de cette équation caractéristique sont ainsi

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{8}$$

   La solution générale de l'équation s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\Omega t + \varphi)} \tag{9}$$

   avec A et φ deux constantes d'intégration et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
   (c) La pseudo-période est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}} \tag{10}$$

   (d) Les constantes d'intégrations se trouvent à l'aide des conditions initiales. La fonction précédente permet de déterminer :

$$u(0^+) = A\sin(\varphi) = E \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = -A\frac{\omega_0}{2Q}\sin(\varphi) + A\Omega\cos(\varphi) = 0 \tag{11}$$

   On déduit de la seconde équation

$$\tan(\varphi) = \frac{2Q\Omega}{\omega_0} = \sqrt{4Q^2 - 1} \quad \text{soit} \quad \varphi = \arctan\left(\sqrt{4Q^2 - 1}\right) \tag{12}$$

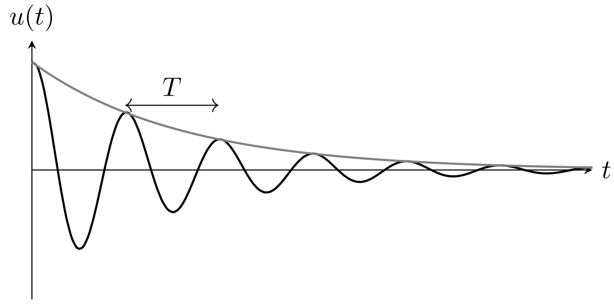
   et la première équation donne alors

$$A = \frac{E}{\sin(\varphi)} = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \tag{13}$$

   On a utilisé la relation $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. On en déduit l'expression de $u(t)$:

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin(\Omega t + \varphi)} \tag{14}$$

9. L'allure de u dans ce cas est la suivante :



10. Le condensateur est initialement chargé puis il se décharge complètement dans le circuit. D'où

$$\boxed{E_{C,i} = \frac{1}{2}CE^2 \quad \text{et} \quad E_{C,f} = 0} \tag{15}$$

11. Le courant est nul au début et à la fin, donc

$$\boxed{E_{L,i} = 0 \quad \text{et} \quad E_{L,f} = 0} \tag{16}$$

12. L'énergie E_R dissipée dans la résistance R est l'énergie que la résistance reçoit de la part du circuit entre $t = 0$ et $t \to \infty$. Elle correspond à la différence entre l'énergie stockée dans le circuit au début de l'évolution et celle stockée dans le circuit en fin d'évolution. Donc

$$\boxed{E_R = (E_{C,i} + E_{L,i}) - (E_{C,f} + E_{L,f}) = \frac{1}{2}CE^2} \tag{17}$$