DM10 : Thermodynamique, Forces centrales

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous rendrez une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : Planètes extrasolaires

1. La force d'interaction entre une planète P et son étoile E est

$$\vec{F}_{E\to P} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r \tag{1}$$

De plus, on a $\vec{F}_{E\to P} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ donc

$$E_p(r) = -\frac{GmM}{r} \tag{2}$$

2. Le moment cinétique de la planète par rapport à l'étoile est $\vec{L}_E(P) = m\vec{v} \wedge r\vec{e}_r$. Comme la force est centrale, le théorème du moment cinétique permet de montrer que le moment cinétique est un vecteur constant. Comme le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{L}_E(P)$, le planète ne peut pas sortir du plan perpendiculaire au moment cinétique.
3. Pour un mouvement circulaire, on peut déterminer l'expression de la vitesse de la planète en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique que l'on projette sur $\vec{e}_r$:

$$-G\frac{mM}{a^2} = -m\frac{v^2}{a} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{a} \tag{3}$$

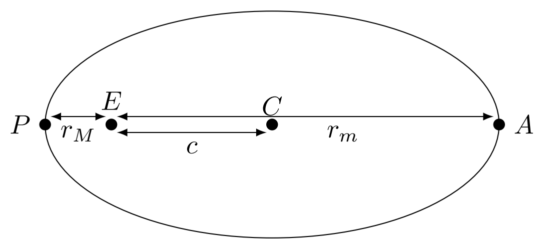
de plus, on peut exprimer la vitesse v en fonction du rayon a et de la période T de l'orbite comme $v = \frac{2\pi a}{T}$. On obtient alors

$$\frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \frac{GM}{a} \Leftrightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{4}$$

C'est la troisième loi de Kepler, le rapport ne dépend pas des caractéristiques de l'astre qui orbite autour de l'étoile.
4. Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on trouve $a \approx 7{,}39 \times 10^9$ m
5. La vitesse minimale est atteinte à l'aphélie de la trajectoire, c'est le point où l'énergie potentielle de la planète est la plus élevée, donc son énergie cinétique (et donc sa vitesse) est la plus faible. Le même raisonnement montre que la vitesse maximale est atteinte au périhélie.
6. La conservation du moment cinétique donne

$$mr_m v_m = mr_M v_M \Leftrightarrow r_m v_m = r_M v_M \tag{5}$$

Pour déterminer le rapport $\frac{v_m}{v_M}$ en fonction de e, on commence par faire un schéma.



Sur ce schéma, on voit que $2a = r_m + r_M$, donc $a = \frac{r_m + r_M}{2}$. Et $c = a - r_M = \frac{r_m - r_M}{2}$. On en déduit que

$$\frac{v_m}{v_M} = \frac{r_M}{r_m} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{1-e}{1+e} \tag{6}$$

7. La conservation de l'énergie mécanique entre les points P et A implique

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - G\frac{mM}{r_M} = \frac{1}{2}mv_m^2 - G\frac{mM}{r_m} \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_M^2 - G\frac{M}{a(1-e)} = \frac{1}{2}v_m^2 - G\frac{M}{a(1+e)} \tag{7}$$

En utilisant la relation entre v_m et v_M obtenue à la question précédente, on a

$$\frac{1}{2}v_M^2 - \frac{GM}{a(1-e)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 v_M^2 - \frac{GM}{a(1+e)} \tag{8}$$

Et on trouve finalement

$$v_M = \sqrt{\frac{GM}{a} \times \frac{1+e}{1-e}} \tag{9}$$

8. On sait que $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ et on obtient directement

$$\frac{v_M}{v_0} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{10}$$

9. Le barycentre O du système étoile-planète est défini par

$$m\overrightarrow{OP} + M\overrightarrow{OE} = \vec{0} \tag{11}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient directement

$$m\vec{v} + M\vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow m\vec{v} = -M\vec{V} \tag{12}$$

En prenant la norme des deux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$mv = MV \tag{13}$$

10. Pour une orbite circulaire, on a $v = \frac{2\pi a}{T}$ et donc

$$V = \frac{m}{M}v = \frac{m}{M}\frac{2\pi a}{T} \tag{14}$$

D'après la troisième loi de Kepler, on a $a = \sqrt[3]{T^2\frac{GM}{4\pi^2}}$ et on obtient finalement

$$V = \frac{m}{M}\frac{2\pi}{T}\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \frac{m}{M}\sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}} \tag{15}$$

11. D'après la question précédente, on a

$$m = MV\sqrt[3]{\frac{T}{2\pi GM}} = V\sqrt[3]{\frac{TM^2}{2\pi G}} \approx 8{,}93 \times 10^{26}\,\mathrm{kg} \tag{16}$$

C'est une planète plus de 100 fois plus massive que la Terre, et 2 fois moins que Jupiter, c'est donc très probablement une planète géante.

12. D'après ce qui précède, on a $V_M = \frac{m}{M}v_M$. La question 8 nous permet d'écrire

$$V_M = \frac{m}{M}v_0\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{m}{M}\frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{m}{M}\sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{17}$$

Donc

$$m = V_M\sqrt[3]{\frac{TM^2}{2\pi G}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \approx 6{,}62 \times 10^{25}\,\mathrm{kg} \tag{18}$$

Exercice 2 : Transformation thermodynamique

1. Le piston est mobile et glisse sans frottement, de plus sa masse étant nulle, la somme des forces appliquées est nulle et la pression du gaz est à tout moment égale à la pression extérieure $P = P_0$.
2. La capacité thermique à volume constant C_V est définie comme $U = C_V T$ (uniquement pour un gaz parfait ou une phase condensée incompressible). Pour un gaz parfait diatomique $C_V = \frac{5}{2}nR$.
3. La capacité thermique du morceau de cuivre est $C_c = m \cdot c = 100\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.
4. À l'instant initial, la pression du gaz est P_0, la température initiale est $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ et la quantité de matière est $n = 1\,\mathrm{mol}$. L'équation d'état des gaz parfaits donne $V_0 = \frac{nRT_0}{P_0} = 25\,\ell$.

5. Le volume subit une diminution relative de 5 %, donc $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = 0.05$ donc $V_1 = V_0 \cdot (1 - 0.05) = 23{,}75\,\ell$. Et $\Delta V = -1{,}25\,\ell$.
6. Comme n et P sont constants lorsque l'on change la température du système, le rapport $\frac{V}{T}$ est constant, donc $T_1 = T_0 \frac{V_1}{V_0} = T_0 \cdot (1 - 0.05) = 285\,\mathrm{K} = 12\,°\mathrm{C}$
7. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit : $\boxed{\Delta U = W + Q}$.
8. L'énergie interne du système est la somme de l'énergie interne du gaz et de celle du cuivre. Donc $U = C_v T + C_c T = (C_V + C_c)\Delta T$. Donc la variation d'énergie interne est $\boxed{\Delta U = (C_V + C_c)\Delta T = -1{,}811\,\mathrm{kJ}}$
9. La transformation étant monobare, on a $W = -P_0 \Delta V = 125\,\mathrm{J}$.
10. On en déduit que $\boxed{Q = \Delta U - W = -1{,}94\,\mathrm{kJ}}$. On a $Q < 0$ car l'énergie thermique est fournie par le système au milieu extérieur, en effet la température du système diminue au cours de la transformation.
11. S'il n'y a pas de cuivre dans le cylindre l'énergie thermique fourni par le système au milieu extérieur est beaucoup plus faible pour la même différence de température car sa capacité thermique est réduite.