DM8 : Mécanique – corrigé

Exercice 1 : Course poursuite

1. On ajoute le poids $\vec{P}$ de la voiture, les forces $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ exercées par la route sur chacune des roues et la force $-\vec{F}$ exercée sur la voiture par le filin. Schéma :

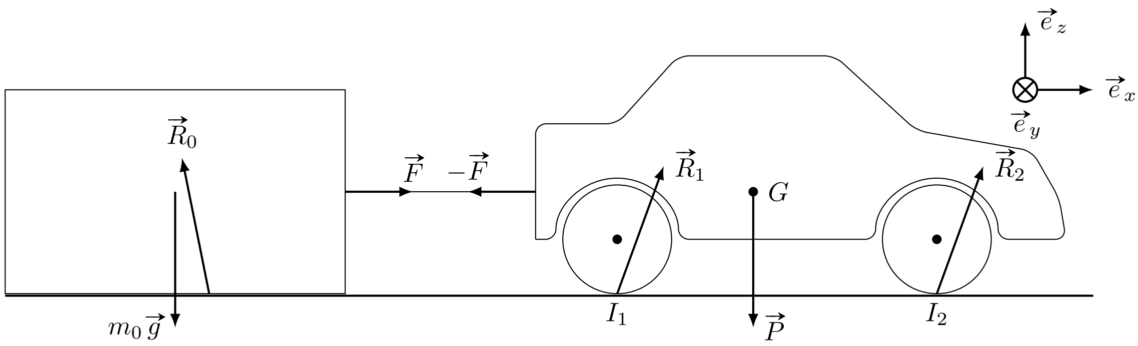

Figure 1 – Schéma de l'ensemble {Container, filin, voiture}

2. Le container avance à vitesse constante, donc son accélération est nulle et d'après le PFD, la somme des forces appliquées est nulle. On a donc
$$\vec{R}_0 + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \tag{1}$$
La projection sur les axes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ donne
$$\begin{cases} F = T_0 \\ m_0 g = N_0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad F = f_0 m_0 g \quad \text{et} \quad \vec{F} = f_0 m_0 g\,\vec{e}_x \tag{2}$$

3. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la voiture est
$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}(-\vec{F}) = \mathcal{P}_m - \mathcal{P}(\vec{F}) \tag{3}$$
Or, l'énergie cinétique de la voiture étant constante, on trouve
$$\boxed{\mathcal{P}_m = \mathcal{P}(F)} \tag{4}$$

4. On a d'après les deux questions précédentes $\mathcal{P}_m = f_0 m_0 g V$, ce qui donne
$$\boxed{\mathcal{P}_m = 450\,\mathrm{kW} = 611\,\mathrm{ch}} \tag{5}$$
Cela correspond à 306 ch par voiture. Ce sont des voitures bien puissantes, mais rien de bien étonnant pour Fast and Furious...

5. La loi du moment cinétique scalaire appliquée à un solide en rotation s'écrit :
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_\Delta(\vec{F}_i)} \tag{6}$$
L_Δ est le moment cinétique du solide par rapport à l'axe Δ et $M_\Delta(\vec{F}_i)$ est le moment par rapport à Δ de la force $\vec{F}_i$. Les forces $\vec{F}_i$ sont les forces extérieures appliquées au solide.

6. Sur la roue arrière, on a :
   — La force $\vec{R}_1$ exercée par la route sur la roue ;

— Le poids de la roue ;
— La réaction de l'axe sur la roue.
— Le moment de la force exercée par l'axe sur la roue (supposé nul dans la question suivante)

Sur la roue avant, on a :

— La force $\vec{R}_2$ exercée par la route sur la roue ;
— Le poids de la roue
— La réaction de l'axe sur la roue ;
— Le couple exercé par le moteur sur la roue $\vec{\Gamma}$.

7. On se place dans le référentiel lié à la voiture, qui est galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de la ville supposé galiléen. Comme la voiture avance à vitesse constante, la vitesse de rotation des roues est constante et leur moment cinétique est constant. La loi du moment cinétique nous permet d'en déduire que la somme des moments des forces appliquées à chaque roue est nulle.

   Pour les deux roues, le moment du poids et de la réaction de l'axe de la roue sont nuls car ces forces passent par l'axe.

   On a alors pour la roue arrière
$$M_\Delta(\vec{R}_1) = 0 = -T_1\frac{d}{2} \Leftrightarrow T_1 = 0 \tag{7}$$
   Et pour la roue avant
$$M_\Delta(\vec{R}_2) + \Gamma_m = 0 \Leftrightarrow \Gamma_m = T_2\frac{d}{2} \tag{8}$$

8. La voiture avance à vitesse constante dans un référentiel galiléen, donc la somme des forces appliquées est nulle (PFD). La projection des forces sur l'axe $\vec{e}_x$ permet d'obtenir
$$-F + T_2 = 0 \quad \text{donc} \quad F = T_2\vec{e}_x \tag{9}$$
   On en déduit que
$$\boxed{\Gamma_m = F\frac{d}{2} = \frac{f_0 m_0 g d}{2} = 4500\,\mathrm{N\,m}} \tag{10}$$

9. On applique le théorème du moment cinétique à la voiture par rapport à l'axe $(G, \vec{e}_y)$. Le moment cinétique de la voiture par rapport à cet axe étant nul (donc constant), la somme des moments des forces appliquées est également nulle. On a alors
$$\underbrace{M_\Delta(\vec{N}_1)}_{=bN_1} + \underbrace{M_\Delta(\vec{N}_2)}_{=-bN_2} + \underbrace{M_\Delta(-\vec{F})}_{=0} + \underbrace{M_\Delta(\vec{P})}_{=0} + \underbrace{M_\Delta(\vec{T}_2)}_{=-hT_2} = 0 \tag{11}$$
   et on obtient finalement
$$\boxed{T_2 h = (N_1 - N_2)b} \tag{12}$$

10. En appliquant le PFD à la voiture, et en projetant sur l'axe $\vec{e}_z$, on obtient $mg = N_1 + N_2$. Avec l'équation 12, on obtient
$$N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{T_2 h}{2b} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{T_2 h}{2b} \tag{13}$$
    Donc finalement
$$\boxed{N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b}} \tag{14}$$

11. Comme $T_1 = 0$ seules les roues avant risquent de glisser.
12. Pour que les roues avant ne glissent pas, il faut que $T_2 < fN_2$, soit
$$f_0 m_0 g < f\left(\frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 h}{2b}\right) \Leftrightarrow m_0\left(f_0 g + \frac{f f_0 h g}{2b}\right) < \frac{fmg}{2} \tag{15}$$
    Soit
$$\boxed{m_0 < m\frac{f}{2f_0\left(1 + f\frac{h}{2b}\right)} = m_{0,\max}} \tag{16}$$

13. Numériquement, on trouve $m_{0,\max} = 3164\,\mathrm{kg}$. Il ne sera donc pas possible de tracter le container dont la masse est de $4500\,\mathrm{kg}$.
14. Si on utilise des voitures à propulsion arrière, les expressions de T_1 et T_2 sont échangées et on a $T_1 = F = f_0 m_0 g$ et $T_2 = 0$
15. Comme $T_2 = 0$ les seules roues qui risquent de glisser sont les roues arrière.
16. De la même manière que précédemment, on écrit que l'on doit avoir $T_1 < f N_1$, et avec l'expression de N_1 trouvée à la question 10, on trouve

$$\boxed{m_0 < m\frac{f}{2f_0\left(1 - f\frac{h}{2b}\right)} = m'_{0,\max}} \tag{17}$$

17. On trouve numériquement $m'_{0,\max} = 4602\,\mathrm{kg}$, ce qui rend l'opération de tractage possible (mais la masse du container n'est vraiment pas loin de la masse limite, la différence relative est de l'ordre de $2\,\%$, l'opération reste très risquée et a toutes les chances d'échouer.).