Homogénéité et optique géométrique

I. Homogénéité

I.1 On cherche tout d'abord à déterminer la dimension de G et celle de $\hbar$:

Comme $\overrightarrow{f} = -\,\mathrm{G}\,\dfrac{m_1 m}{r^2}\,\overrightarrow{u}_r$, on a : $[f] = \mathrm{M.L.T}^{-2} = \dfrac{[\mathrm{G}].\mathrm{M}^2}{\mathrm{L}^2}$. D'où $\boxed{[\mathrm{G}] = \mathrm{M}^{-1}.\mathrm{L}^3.\mathrm{T}^{-2}}$.

En ce qui concerne $\hbar$: $[\hbar] = \dfrac{[\mathrm{E}]}{[\omega]} = \dfrac{\mathrm{M.L}^2.\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{T}^{-1}}$. D'où $\boxed{[\hbar] = \mathrm{M.L}^2.\mathrm{T}^{-1}}$

I.2 Une fois ces dimensions trouvées, on peut déterminer :

I.2.a **la masse de Planck** m_P en notant $m_\mathrm{P} = \mathrm{G}^\delta.\hbar^\eta.c^\mu$.

En notant que chaque terme de l'égalité doit avoir même dimension, il vient :

$$\mathrm{M} = (\mathrm{M}^{-\delta}.\mathrm{L}^{3\delta}.\mathrm{T}^{-2\delta}).(\mathrm{M}^{\eta}.\mathrm{L}^{2\eta}.\mathrm{T}^{-\eta}).(\mathrm{L}^{\mu}.\mathrm{T}^{-\mu}) = \mathrm{M}^{(-\delta+\eta)}.\mathrm{L}^{(3\delta+2\eta+\mu)}.\mathrm{T}^{(-2\delta-\eta-\mu)}$$

On obtient le système
$$\begin{cases} -\delta + \eta = 1 \\ 3\delta + 2\eta + \mu = 0 \\ -2\delta - \eta - \mu = 0 \end{cases}$$

Soit finalement
$$\delta = -\frac{1}{2} \qquad \eta = \frac{1}{2} \qquad \mu = \frac{1}{2}$$

On peut donc écrire
$$\boxed{m_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{\mathrm{G}}}}$$

I.2.b **le temps de Planck** t_P en notant $t_\mathrm{P} = \mathrm{G}^\alpha.\hbar^\beta.c^\gamma$. On propose ici une autre méthode possible :

— En regardant les dimensions de G et $\hbar$, on voit que le produit $\mathrm{G}\hbar$ a la dimension $\mathrm{L}^5\mathrm{T}^{-3}$ (élimination de la dimension M).

— Pour n'avoir plus que la dimension T, on voit que l'on doit diviser $\mathrm{G}\hbar$ par c^5. Il reste alors T^2, soit en récapitulant : $\left[\dfrac{\mathrm{G}\hbar}{c^5}\right] = \mathrm{T}^2$.

— On en déduit que le temps de Planck t_P s'écrit :

$$\boxed{t_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\mathrm{G}\hbar}{c^5}}}$$

I.2.c **la longueur de Planck** ℓ_P peut aussi être déterminée en notant $\ell_\mathrm{P} = \mathrm{G}^\Delta.\hbar^\nu.c^\xi$. Ceci étant, on peut aussi écrire $\ell_\mathrm{P} = c\,t_\mathrm{P}$, soit

$$\boxed{\ell_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar\mathrm{G}}{c^3}}}$$

I.3 *Applications numériques* :

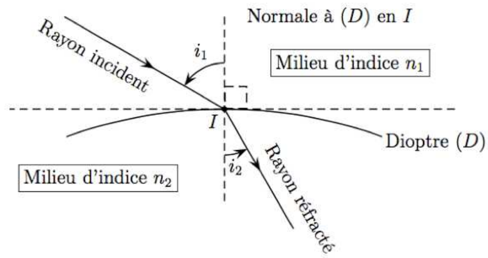
$$\boxed{m_\mathrm{P} = 2,18.10^{-8}\ \mathrm{kg} \qquad t_\mathrm{P} = 5,38.10^{-44}\ \mathrm{s} \qquad \ell_\mathrm{P} = 1,61.10^{-35}\ \mathrm{m}}$$

II. Du dioptre à la lentille

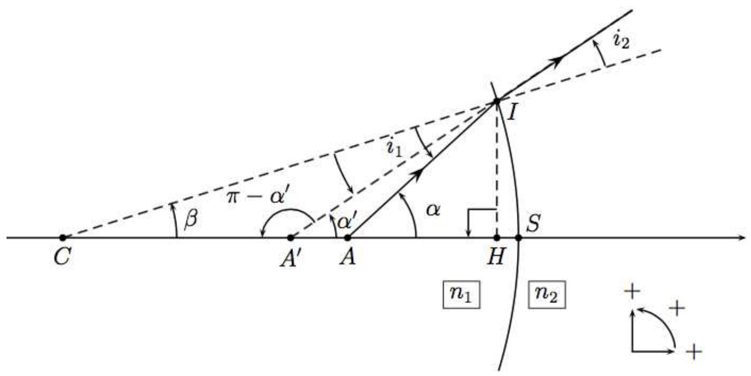
II.1 Relation de conjugaison pour un dioptre sphérique

II.1 Lois de Snell–Descartes relatives à la réfraction pour un dioptre qui sépare deux milieux d'indices n_1 et n_2 :

- S'il existe, le rayon réfracté **appartient au plan d'incidence**, plan qui contient la normale au dioptre au point d'incidence I et le rayon incident.
- S'il y a réfraction, l'angle de réfraction (angle orienté i_2 de la normale au rayon réfracté) est lié à l'angle d'incidence (angle orienté i_1 de la normale au rayon incident) par la relation : $\boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2).}$



II.2 On raisonnera sur le schéma annoté ci-après :



II.2.a Un milieu est homogène s'il présente les mêmes propriétés physiques en tout point.

II.2.b Sur le dessin, le rayon réfracté se rapproche de la normale ($i_2 < i_1$), la lumière passe donc d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent : $\boxed{n_2 > n_1}$.

II.2.c Dans le triangle AIC : $\beta + (\pi - \alpha) + i_1 = \pi \iff \boxed{i_1 = \alpha - \beta}$ (1)

Dans le triangle A′IC : $\beta + (\pi - \alpha') + i_2 = \pi \iff \boxed{i_2 = \alpha' - \beta}$ (2)

II.3 On se place dans les conditions de Gauss.

II.3.a On est dans les conditions de Gauss si les rayons incidents sont peu inclinés par rapport à l'axe optique (droite (CS) ici) et proches de cet axe : $\boxed{\text{rayons paraxiaux}}$.

Si $i_1 \to 0$, alors le point H se rapproche de S et $\boxed{\overline{\mathrm{SH}} \to 0}$.

II.3.b Comme i_1 et i_2 sont faibles : $\sin(i_1) \underset{0}{\sim} i_1$ et $\sin(i_2) \underset{0}{\sim} i_2$

Or, d'après les lois de la réfraction $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$

d'où $\boxed{n_1\, i_1 = n_2\, i_2}$ (3) : relation linéaire

II.4 Relation de conjugaison du dioptre sphérique.

II.4.a En remplaçant (1) et (2) dans (3), on obtient :

$$n_1(\alpha - \beta) = n_2(\alpha' - \beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n_1\alpha - n_2\alpha' = (n_1 - n_2)\beta \tag{4}$$

avec
$$\alpha \underset{0}{\sim} \tan(\alpha) = \frac{\overline{\mathrm{HI}}}{\overline{\mathrm{AH}}} \simeq \frac{\overline{\mathrm{SI}}}{\overline{\mathrm{AS}}}$$

et de même
$$\alpha' \underset{0}{\sim} \tan(\alpha') = \frac{\overline{\mathrm{SI}}}{\overline{\mathrm{A'S}}} \qquad \text{et} \qquad \beta \underset{0}{\sim} \tan(\beta) = \frac{\overline{\mathrm{SI}}}{\overline{\mathrm{CS}}}$$

Donc, en remplaçant dans (4) et après simplification par $\overline{\mathrm{SI}} \neq 0$:

$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{\mathrm{SA'}}} - \frac{n_1}{\overline{\mathrm{SA}}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{\mathrm{SC}}}} \tag{E$_1$}$$

II.4.b Dans le cas du dioptre plan, H = S et le rayon de courbure du dioptre $\overline{\mathrm{SC}}$ tend vers l'infini. On retrouve ainsi la formule donnée en page 1 de l'énoncé du devoir :

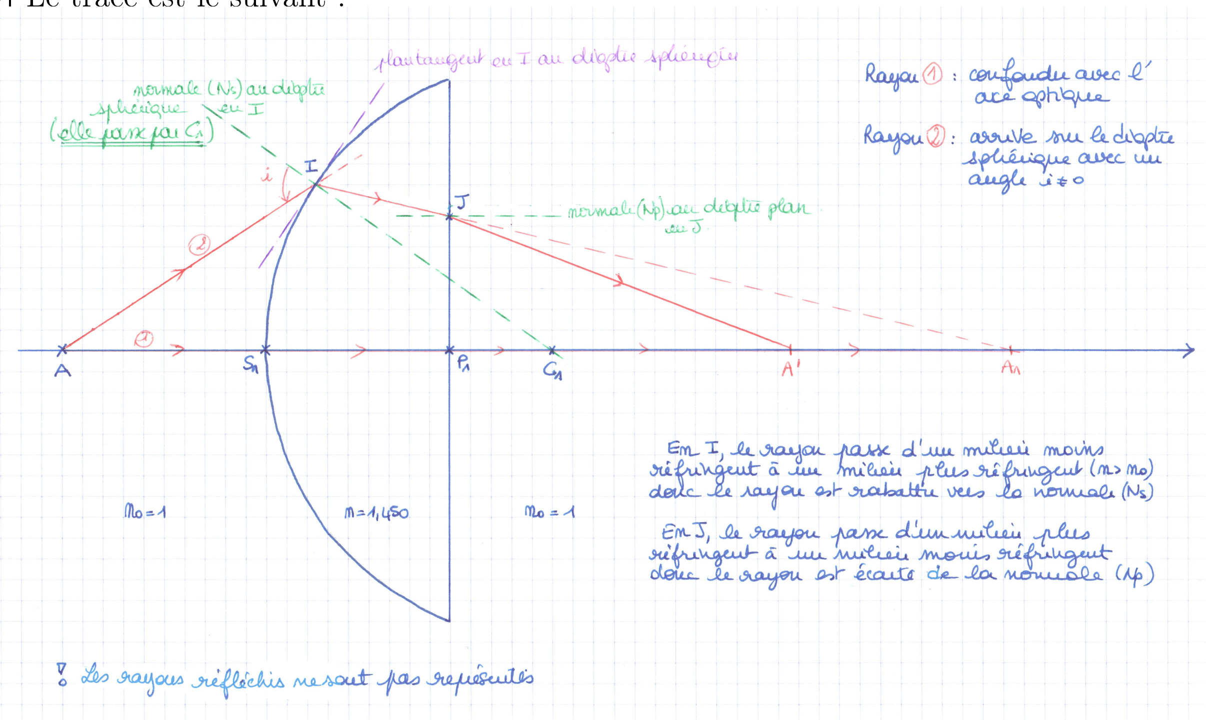
$$\frac{n_1}{\overline{\mathrm{HA'}}} - \frac{n_2}{\overline{\mathrm{HA}}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{\overline{\mathrm{HA'}}}{\overline{\mathrm{HA}}} = \frac{n_2}{n_1}} \tag{E$_2$}$$

II.2 Passage à la lentille mince

II.5 Méthode pas à pas :

II.5.a Pour le dioptre sphérique, $\boxed{\mathrm{A} \xrightarrow{\text{Dioptre sphérique}} \mathrm{A_1}}$ Pour le dioptre plan, $\boxed{\mathrm{A_1} \xrightarrow{\text{Dioptre plan}} \mathrm{A'}}$.

II.5.b Le tracé est le suivant :



II.5.c $\mathrm{A_1}$ est l'image de A par le dioptre sphérique d'où, d'après ($\mathrm{E_1}$) :

$$\frac{n}{\overline{\mathrm{S_1A_1}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{S_1A}}} = \frac{n-1}{\overline{\mathrm{S_1C_1}}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\overline{\mathrm{S_1A_1}} = n\frac{\overline{\mathrm{S_1C_1}}.\overline{\mathrm{S_1A}}}{(n-1)\overline{\mathrm{S_1A}} + \overline{\mathrm{S_1C_1}}}}$$

Application numérique : $\boxed{\overline{\mathrm{S_1A_1}} = 51,00 \text{ mm}}$

II.5.d A' est l'image de A_1 par le dioptre plan d'où, d'après (E_2) :

$$\frac{\overline{P_1A'}}{\overline{P_1A_1}} = \frac{\overline{P_1S_1}+\overline{S_1A'}}{\overline{P_1S_1}+\overline{S_1A_1}} = \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\overline{S_1A'} = \frac{(1-n)\overline{P_1S_1}+\overline{S_1A_1}}{n}}$$

Application numérique : $\boxed{\overline{S_1A'} = 36,08 \text{ mm}}$

II.6 Caractérisation des lentilles par une seule relation de conjugaison.

II.6.a A_2 est l'image par le dioptre sphérique de A_∞ : $\overline{S_1A_\infty} \to -\infty$, que l'on remplace dans (E_1) :

$$\frac{n}{\overline{S_1A_2}} - 0 = \frac{n-1}{\overline{S_1C_1}}$$

F'_1 est l'image de A_2 par le dioptre plan, que l'on remplace dans (E_2) :

$$\frac{\overline{P_1F'_1}}{\overline{P_1A_2}} = \frac{\overline{P_1S_1}+\overline{S_1F'_1}}{\overline{P_1S_1}+\overline{S_1A_2}} = \frac{1}{n}$$

d'où $$\boxed{\overline{S_1F'_1} = \frac{n-1}{n}\overline{S_1P_1} + \frac{\overline{S_1C_1}}{n-1}}$$

Application numérique : $\boxed{\overline{S_1F'_1} = 35,90 \text{ mm}}$

II.6.b De même, A'_∞ placé à l'infini ($\overline{P_1A'} = \infty$) est l'image de A_3 par le dioptre plan (on utilise (E_2)) :

$$\frac{\overline{P_1A'_\infty}}{\overline{P_1A_3}} = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{P_1A_3} \to \infty$$

F_1 est l'objet dont l'image est A_3 par le dioptre sphérique. On a ainsi, en utilisant (E_1) :

$$0 - \frac{1}{\overline{S_1F_1}} = \frac{n-1}{\overline{S_1C_1}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{S_1F_1} = -\frac{1}{n-1}\overline{S_1C_1}}$$

Application numérique : $\boxed{\overline{S_1F_1} = -35,00 \text{ mm}}$

II.6.c On a ici $\boxed{f'_1 = \overline{OF'_1} \simeq \overline{S_1F'_1} = 35,90 \text{ mm}}$

$\boxed{f'_1 > 0 : \text{la lentille } L_1 \text{ est convergente.}}$

II.6.d Diagramme objet/image pour la lentille : $A \xrightarrow{(L_1,O,f'_1)} A'$.
Connaissant f'_1, on peut maintenant utiliser la relation de conjugaison de la lentille mince donnée dans l'énoncé (sachant que $O \simeq S_1$) :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\overline{OA'} = \frac{f'_1.\overline{OA}}{f'_1+\overline{OA}}}$$

Application numérique : $\boxed{\overline{OA'} = 36,08 \text{ mm}}$

On retrouve un résultat proche de celui calculé à la question 5 : écart relatif $\dfrac{|36,07-36,08|}{36,08} \simeq 0,03\ \%$.
On peut donc considérer cette lentille comme mince.

♫