TD2 : Circuits électriques dans l'ARQS – Corrigé

Exercice 1 : l'ARQS

1. On peut appliquer l'ARQS lorsque le temps de variation des signaux est très supérieur à leur temps de propagation dans le circuit : $d \ll c/f$ (d : Dimension du circuit, f : Fréquence du circuit)
2. Dans ce cas, on a $c/f \approx 10\,\mathrm{cm}$ qui est du même ordre de grandeur que la taille du circuit. On ne peut donc pas appliquer l'ARQS.
3. Le tracé apparemment étrange des pistes de la carte mère a pour objectif d'égaliser les temps de parcours des différents signaux afin qu'ils arrivent au même moment. Lorsqu'on ne peut pas appliquer l'ARQS il faut prendre en compte le temps de trajet des signaux.

Exercice 2 : Vitesse des électrons

L'intensité électrique est le débit d'électrons à travers la section S du fil : $i = Svnq$ donc $v = i/(Snq) \simeq 6\times10^{-5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Les électrons avancent en moyenne extrêmement lentement !

Exercice 3 : Loi des noeuds

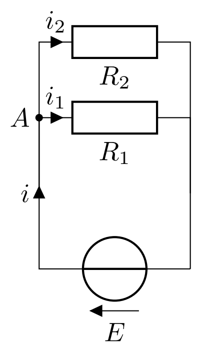
1. Au noeud A : $i_1 + i_4 - i_2 = 0 \Rightarrow i_4 = -1\,\mathrm{A}$.
2. Au noeud B : $i_1 - i_3 + i_4 - i_2 = 0 \Rightarrow i_4 = 4\,\mathrm{A}$.
3. Au noeud C : $i_4 - i_1 - i_2 - i_3 = 0 \Rightarrow i_4 = 0\,\mathrm{A}$.
4. Au noeud D : $i_1 + i_3 + i_4 + i_2 = 0 \Rightarrow i_4 = -4\,\mathrm{A}$.
5. Au noeud E : $i + i_1 + i_3 - i_2 = 0$ et en F : $i_4 + i_0 - i = 0$ donc $i_4 = -i_0 - i_1 - i_3 + i_2 = 3{,}5\,\mathrm{A}$.

Exercice 4 : Loi des mailles

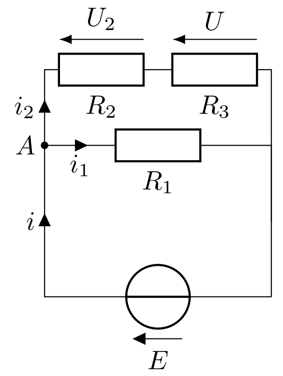
1. $U_4 + U_1 + U_2 = 0 \Rightarrow U_4 = -4\,\mathrm{V}$;
2. $U_4 - U_3 + U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow U_4 = 4\,\mathrm{V}$;
3. $U_4 + U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow U_4 = 2\,\mathrm{V}$, on peut vérifier que le résultat est cohérent avec la seconde maille : $U_4 + U_3 - U_5 = 0 \Rightarrow U_4 = 2\,\mathrm{V}$ c'est cohérent.

Exercice 5 : Étude de quelques circuits

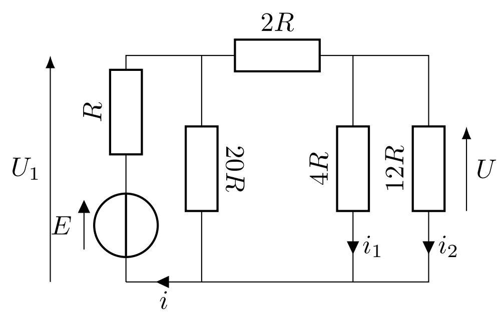
Circuit 1 :



Circuit 2 :



Circuit 3 :



1. Circuit 1 : On applique la loi des noeuds en A : $i = i_1 + i_2$. En utilisant deux fois la loi d'Ohm, on obtient alors $i = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$
2. Circuit 2 : On applique la loi des noeuds en A : $i = i_1 + i_2$.. Avec la loi d'Ohm, on obtient $i = \frac{E}{R_1} + i_2$. On trouve i_2 en remplaçant R_2 et R_3 par $R_{eq} = R_2 + R_3$, soit $i_2 = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R_2+R_3}$. Et finalement

$$\boxed{i = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2+R_3} = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}\right) \text{ et } U = R_3 i_2 = E\frac{R_3}{R_2+R_3}} \tag{1}$$

(En exercice : retrouver ces résultats en transformant les résistances en résistances équivalentes et en utilisant la formule d'un pont diviseur de tension)

3. On remplace successivement les associations de résistances par des résistances équivalentes : 4R et 12R en parallèle $\Rightarrow$ 3R ; 3R et 2R en série $\Rightarrow$ 5R ; 5R et 20R en parallèle $\Rightarrow$ 4R ; 4R et R en série $\Rightarrow$ 5R. Donc

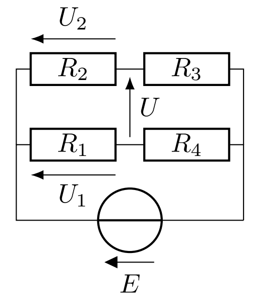
$$\boxed{i = \frac{E}{5R}} \tag{2}$$

.
U est donnée par le diviseur de tension formé par $2R$ et $R_{eq} = 3R$ appliqué à $U_1 = E - Ri = \frac{4}{5}E$ donc

$$\boxed{U = \frac{4}{5}E \times \frac{3R}{5R} = \frac{12}{25}E} \tag{3}$$

.
$i_2 = \frac{U}{12R} = \frac{E}{25R}$ et $i_1 = \frac{U}{4R} = \frac{3E}{25R}$.

Exercice 6 : Pont de Wheatstone



Le pont de Wheatstone correspond à deux diviseurs de tension, on peut obtenir les expressions de U_1 et U_2 :

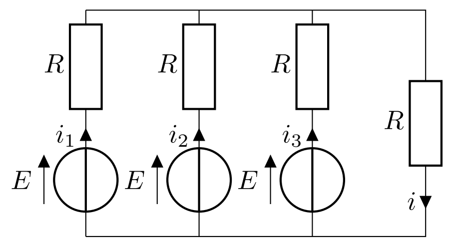
$$U_1 = E \times R_1/(R_1 + R_4) \quad \text{et} \quad U_2 = E \times R_2/(R_2 + R_3) \tag{1}$$

En appliquant la loi des mailles on obtient : $U_2 - U_1 + U = 0$ donc

$$\boxed{U = U_1 - U_2 = E \times \left(\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3}\right)} \tag{2}$$

Le pont est équilibré lorsque $U = 0$ soit $R_1R_3 - R_2R_4 = 0$.

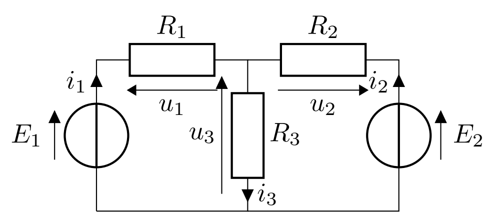
Exercice 7 : Détermination d'une intensité



On peut justifier, par une raison de symétrie, que $i_1 = i_2 = i_3$. Ou en notant U la tension aux bornes de la résistance de droite, on a $i_1 = \frac{U-E}{R} = i_2 = i_3$.
La loi des nœuds donne $i = 3i_1$. En appliquant la loi des mailles (maille de droite), on obtient

$$\boxed{E - Ri_1 = Ri \Leftrightarrow i = \frac{3E}{4R}} \tag{1}$$

Exercice 8 : Lois de Kirchhoff



1. Voir schéma
2. On obtient les relations suivantes

$$i_1 + i_2 = i_3, \quad E_1 = U_1 + U_3, \quad E_2 = U_2 + U_3, \quad U_k = R_k i_k, \tag{1}$$

d'où

$$\boxed{i_3 = \frac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}} \tag{2}$$

3. $U_3 = R_3 i_3$.

Exercice 9 : Résistances équivalentes

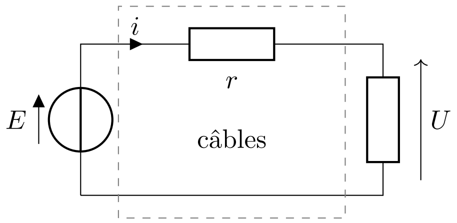
1. Les trois résistances sont en parallèle, on applique directement la formule : $\boxed{\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}$
2. R_3 et R_4 sont en série pour former R_{eq1} qui se retrouve en parallèle avec R_5 pour former R_{eq2}. Enfin, R_{eq2}, R_1 et R_2 sont en série. On obtient finalement : $\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \dfrac{R_5(R_3+R_4)}{R_5+R_3+R_4}}$
3. R_4 et R_3 sont en parallèle. R_1 et R_2 sont en série. Les deux résistances équivalentes obtenues sont en parallèle. On obtient finalement $\boxed{R_{eq} = \dfrac{R_4R_3(R_1+R_2)}{R_3R_4 + (R_3+R_4)(R_1+R_2)}}$

Exercice 10 : Bilan de puissance

1. On peut former une réstance équivalente avec R et r de résistance $r+R$. En appliquand la loi d'Ohm à cette résistance équivalente, on obtient $\boxed{i = E/(R+r)}$
2. La puissance électrique reçue par le dipôle R est donnée directement par $\boxed{P_R = Ri^2 = RE^2/(R+r)^2}$
3. La puissance électrique fournie par le générateur est $\boxed{P_G = E \times i = E^2/(R+r)}$.
4. Le rendement est, par définition, $\boxed{\gamma = P_R/P_G = R/(R+r)}$
5. On applique la loi d'Ohm au dipôle R : $\boxed{U = R \times i = E \times R/(R+r)}$
6. Plus la résistance interne est faible, meilleur est le rendement et la tension appliquée au dipôle est indépendante de la valeur de sa résistance. Lorsque la résistance interne est nulle, on dit que le générateur est idéal.

Exercice 11 : Transport d'électricité

1. Schéma :

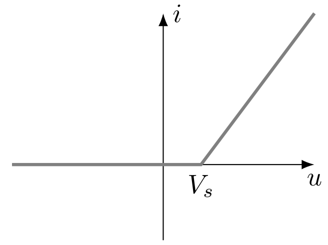


2. La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent $U = E - ri$ soit $\boxed{E = U + ri}$
3. La puissance électrique dissipée dans les câbles est $\boxed{P_c = ri^2}$ c'est l' $\boxed{\text{effet Joule}}$, l'énergie électrique est transformée en chaleur.
4. La puissance totale fournie par le générateur est $\boxed{P_g = E \times i}$
5. Le rendement du système est $\gamma = \dfrac{P}{P_g} = \dfrac{P}{Ei} = \dfrac{P}{(U+ri)i} = \dfrac{P}{P+ri^2}$. En utilisant $i = P/U$ on obtient finalement :

$$\boxed{\gamma = \frac{P}{P + r(P/U)^2} = \frac{1}{1 + rP/U^2}} \qquad (1)$$

6. On utilise une haute tension pour transporter le courant électrique car le rendement augmente avec U. Cela permet de $\boxed{\text{diminuer les pertes}}$ lors du transport.
7. On ne peut pas utiliser des tensions trop élevées car les plus hautes tensions nécessitent des infrastructures plus coûteuses (il faut plus espacer les cables, il faut qu'ils soient plus hauts). Le gain d'argent fait en utilisant une tension supérieure à 400 kV serait probablement inférieur au surcoût des infrastructures.

Exercice 12 : Caractéristiques d'une diode



1. Pour $U_D < V_{\text{seuil}}$ la diode se comporte comme un interrupteur ouvert ($i = 0$) et pour $U_D > V_{\text{seuil}}$ elle se comporte comme un générateur de tension de f.e.m $E = V_s$ et de résistance interne γ (en Ohm)
2. voir ci-contre.
3. On utilise le fait que lorsque la diode est passante elle est équivalente à un générateur idéal de tension V_s en série avec un résistor de résistance γ. En formant une résistance équivalente $R_{\text{eq}} = \gamma + r + R$, et en lui appliquant la loi des nœuds, on obtient l'expression de i :

$$\boxed{i = \frac{E - V_s}{R + r + \gamma}} \qquad (1)$$

On en déduit l'expression de U_D : $\boxed{U_D = V_s + \gamma i = V_s + \gamma\frac{E-V_s}{R+r+\gamma}}$ et celle de U_G : $\boxed{U_G = E - ri = E - r\frac{E-V_s}{R+r+\gamma}}$

4. La diode est bloquante lorsque $U_D \leq V_s$ donc $\boxed{E_{\text{min}} = V_s}$. Dans ce cas on a $\boxed{U_G = U_D = E}$

Exercice 13 : Convertisseur numérique-analogique

1. D'après l'énoncé, on a $\varepsilon = 0$, et comme $v_+ = 0\,\text{V}$ (potentiel de la borne + de l'amplificateur) on a $v_- = 0\,\text{V}$ et le potentiel du commutateur K_j sera nul quelque soit sa position. Dans ces conditions, les intensités qui circulent dans le réseau de résistances ne dépendent pas de la position des K_j.
2. En construisant des circuits équivalents successifs, on remarque que les résistances situées à droite et en dessous du nœud A_j sont équivalentes à une résistance R reliée à la masse. Donc toutes les résistances R et $2R$ sont équivalentes à une seule résistance $2R$ reliée à la masse. On a alors immédiatement

$$\boxed{I = \frac{E}{2R}} \qquad (1)$$

3. Toutes les résistances situées à droite du nœud A_{n-1} sont équivalentes à une résistance $2R$. L'intensité I se divise alors en deux intensité égales au niveau de A_{n-1} et on trouve que $I_{n-1} = \frac{I}{2}$. De manière analogue, on montre que $I_{n-2} = \frac{I_{n-1}}{2} = \frac{I}{2^2}$. Un raisonnement par récurrence montre que l'on a finalement

$$\boxed{I_j = \frac{I}{2^{n-j}} = \frac{E}{2R}\frac{1}{2^{n-j}} = \frac{E}{2^{n+1}R} \times 2^j} \qquad (2)$$

4. On note I_S l'intensité qui circule dans la résistance R'. On a

$$I_S = \sum_{j=0}^{n-1} b_j I_j = \frac{E}{2^{n+1}R}\sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j \qquad (3)$$

La loi des mailles appliquée autour de l'amplificateur opérationnel avec la loi des nœuds donne alors

$$\boxed{U_S = -R'I_S = -\frac{E}{2^{n+1}}\frac{R'}{R}\sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j} \qquad (4)$$

5. On change la tension de sortie d'un quantum lorsqu'on modifie la position de K_0, et donc lorsqu'on change la valeur du bit de poids faible b_0. On a donc

$$\boxed{\delta U_S = \frac{E}{2^{n+1}}\frac{R'}{R}} \qquad (5)$$

Avec les valeurs données, on trouve

$$\boxed{E = \frac{R}{R'}2^{n+1}\delta U_S = 12{,}8\,\text{V}} \qquad (6)$$

6. La tension de sortie est dans ce cas

$$\boxed{U_S = -\delta U_S\,(2+16+128) = 146\delta U_S = 1{,}46\,\mathrm{V}.} \tag{7}$$

Exercice 14 : Un petit problème

On peut modéliser une ampoule par une résistance R. La puissance P d'une ampoule de résistance R est $P = U \times i = \frac{U^2}{R}$. Donc la résistance est donnée par $R = \frac{U^2}{P}$. Ce qui nous donne les valeurs suivantes : $50\,\mathrm{W} \to 3\,\Omega$, $20\,\mathrm{W} \to 6\,\Omega$, $2\,\mathrm{W} \to 70\,\Omega$. Pour recharger sa batterie de téléphone, il peut la brancher à sa batterie de voiture par l'intermédiaire d'une résistance appropriée pour que l'intensité ne dépasse pas deux ampères. L'intensité qui circule dans le circuit sera $i = (V_{\text{bat}} - V_{\text{tel}})/R$. On doit donc avoir $R > (V_{\text{bat}} - V_{\text{tel}})/i \approx 4\,\Omega$. Il pourra donc utiliser une ampoule de 20 W en série avec la batterie de sa voiture pour recharger son téléphone.

Exercice 15 : Comparaison de résistances

La résistance des fils de cuivre et d'aluminium (de longueurs ℓ) sont :

$$R_{\text{Cu}} = \frac{\rho_{\text{Cu}}\ell}{S_{\text{Cu}}} \quad \text{et} \quad R_{\text{Al}} = \frac{\rho_{\text{Al}}\ell}{S_{\text{Al}}} = \frac{2\rho_{\text{Cu}}\ell}{S_{\text{Al}}} \tag{1}$$

ρ_{Cu} et ρ_{Al} sont les résistivités respectives du cuivre et de l'aluminium. S_{Al} et S_{Cu} sont les sections des fils d'aluminium et de cuivre.

L'énoncé indique que la densité de l'aluminium μ_{Al} est le tiers de celle du cuivre μ_{Cu}. Comme les masses linéïques des deux fils sont égales, on peut écrire

$$\lambda_{\text{Al}} = \frac{m_{\text{Al}}}{\ell} = \frac{\mu_{\text{Al}}S_{\text{Al}}\ell}{\ell} = \mu_{\text{Al}}S_{\text{Al}} = \frac{1}{3}\mu_{\text{Cu}}S_{\text{Al}} = \lambda_{\text{Cu}} = \mu_{\text{Cu}}S_{\text{Cu}} \quad \text{donc} \quad S_{\text{Al}} = 3S_{\text{Cu}} \tag{2}$$

Et on a finalement

$$\boxed{R_{\text{Al}} = \frac{2\rho_{\text{Cu}}\ell}{3S_{\text{Cu}}} = \frac{2}{3}R_{\text{Cu}}} \tag{3}$$