

DS8 : Mécanique du point et chimie

- Durée : 4h.
- La calculatrice est autorisée.
- Chaque réponse doit être justifiée.
- Même lorsque ça n'est pas précisé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

Exercice 1 : MOXIE (D'APRÈS CCINP TSI 2023)

Mars Oxygen ISRU Experiment, littéralement “expérience d'utilisation *in situ* des ressources en oxygène de Mars”, ou MOXIE, est un instrument du rover Perseverance. Il est destiné à démontrer la faisabilité de la production de dioxygène sur Mars par électrolyse à oxyde solide, appelée SOEC en anglais, du dioxyde de carbone qui constitue 95 % de l'atmosphère martienne. Le 20 avril 2021, MOXIE a produit un total de 5,4 g de dioxygène en une heure, ce qui peut permettre à un astronaute de respirer normalement pendant une dizaine de minutes. MOXIE aspire, compresse et chauffe les gaz atmosphériques martiens au travers d'un filtre, d'un compresseur à spirale et d'éléments chauffants isolés thermiquement, puis scinde le dioxyde de carbone CO_2 en dioxygène O_2 et monoxyde de carbone CO par électrolyse à oxyde solide.

Une SOEC présente le fonctionnement inverse d'une pile à combustible à oxyde solide, appelée SOFC. Nous commencerons par l'étude d'une pile électrochimique classique pour comprendre le principe de fonctionnement de la pile à combustible, puis du module d'électrolyse MOXIE.

La pile classique considérée est constituée de demi-piles séparées par un pont salin : une électrode de zinc solide plongeant dans une solution ionique contenant les ions $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ et une électrode de cuivre solide plongeant dans une solution ionique contenant les ions $\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$.

Données :

Potentiel standards	$E^\circ(\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}(\text{s})) = 0,34 \text{ V}$	$E^\circ(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}(\text{s})) = -0,76 \text{ V}$
	$E^\circ(\text{O}_2(\text{g}) / \text{H}_2\text{O}(\ell)) = 1,23 \text{ V}$	
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C mol}^{-1}$	
Masses molaires	$M(\text{C}) = 12 \text{ g mol}^{-1}$, $M(\text{O}) = 16 \text{ g mol}^{-1}$, $M(\text{H}) = 1,0 \text{ g mol}^{-1}$	

1. Réaliser un schéma de la pile électrochimique précédente.
2. Écrire les demi-équations se produisant à l'anode et à la cathode en précisant à chaque fois s'il s'agit d'une oxydation ou d'une réduction.
3. Indiquer le sens de circulation et la nature des porteurs de charge dans les fils électriques.
4. Quelle est la nature des porteurs de charge dans le pont salin, préciser le rôle de ce pont.

La pile à combustible considérée est alimentée en dihydrogène gazeux $\text{H}_2(\text{g})$ et dioxygène gazeux $\text{O}_2(\text{g})$. Les couples oxydo-réducteurs sont : $\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})$ et $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)$. Le cœur de la pile est composé de deux électrodes, l'anode et la cathode, séparées par un électrolyte.

5. Le réactif oxydé est appelé combustible de la pile. Parmi les espèces chimiques présentes dans les couples, laquelle constitue le combustible ?
6. Écrire les demi-équations d'oxydoréduction.
7. Écrire les formules de Nernst associées à ces deux couples (on considérera le fonctionnement à température ambiante de 298 K).
8. Déterminer l'expression de la force électromotrice de cette pile.

Une variante de la pile à combustible étudiée ci-dessus est une pile à oxydes solides (SOFC en anglais), dans laquelle les ions oxyde O^{2-} migrent de la cathode alimentée en air vers l'anode alimentée en dihydrogène et où l'eau est produite. Une telle pile à combustible de type SOFC utilise comme oxyde solide la zircone stabilisée à l'yttrium (YSZ en anglais) correspondant à une substitution partielle d'ion zirconium par des ions yttrium dans l'oxyde ZrO_2 .

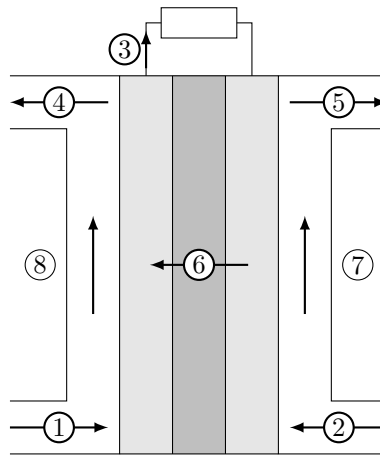


FIGURE 1 – Schéma de la pile à combustible SOFC.

9. Établir la correspondance entre les huit numéros du schéma de la figure 1 et la liste suivante : $\text{H}_2(\text{g})$, air (dont $\text{O}_2(\text{g})$), O^{2-} , électrons, anode, cathode, $\text{H}_2\text{O}(\ell) + \text{H}_2(\text{g})$, air appauvri.

Il est à noter qu'aucune connaissance sur l'électrolyse n'est nécessaire pour répondre aux questions suivantes.

On considère maintenant l'électrolyse de l'eau $\text{H}_2\text{O}(\ell)$ qui correspond à la réaction inverse, c'est-à-dire à la formation par voie électrochimique d' $\text{H}_2(\text{g})$, ainsi que d' $\text{O}_2(\text{g})$, par l'application d'un courant.

10. Donner l'équation d'électrolyse de l'eau.
 11. À partir de la figure 2, écrire l'équation bilan de la réaction de l'électrolyseur, utilisant le CO_2 de l'atmosphère martienne.

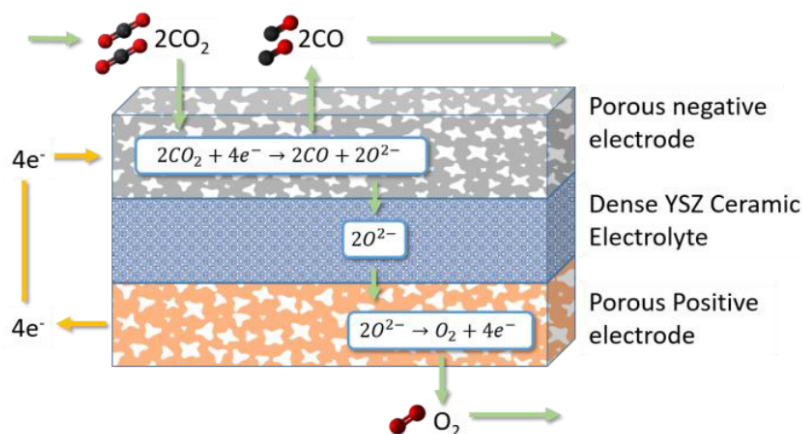


FIGURE 2 – Schéma de fonctionnement de l'électrolyseur MOXIE. YSZ désigne l'oxyde de zirconne stabilisé à l'yttrium.

12. Déterminer la masse de CO_2 consommée par ce système pour produire 1,0 g de O_2 .
 13. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer l'intensité du courant qui a circulé dans l'électrolyseur MOXIE le 20 avril 2021.

Exercice 2 : LE SYSTÈME GPS (D'APRÈS E3A PC 2020)

Le principe du positionnement par GPS (Global Positioning System ou Géopositionnement Par Satellite) repose sur la mesure de la durée de transit d'un signal transmis par une onde électromagnétique (OEM) entre des satellites dont la position est exactement connue à tout instant, dénommés NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging) et un récepteur. Cette durée est ensuite simplement convertie en distance puisqu'on connaît très précisément la célérité d'une OEM. Pour une précision optimale, un récepteur sur Terre doit « voir » au minimum quatre satellites simultanément.

Le système comprend vingt-quatre satellites placés sur des orbites pratiquement circulaires d'altitudes voisines de $2,00 \times 10^4$ km. Les satellites sont placés sur six orbites dont le plan est incliné de 55° par rapport au plan de l'équateur. Ces orbites sont décalées en longitude de 60° . Sur chaque orbite, il y a quatre satellites. On notera pour information que les satellites ne sont pas régulièrement espacés sur leur orbite. Leur répartition a été choisie pour

optimiser le nombre de satellites visibles en chaque point de la Terre à un instant « t ». Les zones les plus défavorisées sont voisines des pôles.

Données :

Constante de gravitation universelle	$G = 6,674 \times 10^{-11}$ SI
Masse de la Terre	$M_T = 5,972 \times 10^{24}$ kg
Rayon terrestre	$R_T = 6,371 \times 10^3$ km
Durée du jour sidéral	$T_0 = 23\text{ h}56\text{ min}4\text{ s}$

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation \vec{F} exercée par la Terre sur un satellite NAVSTAR. Le centre de la Terre est situé en O . On notera r la distance OM du satellite (masse ponctuelle m) placé au point M , $r > R_T$ où R_T est le rayon terrestre. On exprimera \vec{F} en fonction de la constante de gravitation universelle G , des autres données et on utilisera le vecteur unitaire noté habituellement \vec{u}_r en coordonnées sphériques.
2. En ne prenant en compte que cette unique force d'attraction qui s'exerce sur le satellite, montrer que la trajectoire est plane et que l'énergie mécanique du satellite est conservée.
3. Montrer que l'énergie mécanique du satellite peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad (1)$$

avec A et B deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de m , M_T , G et de la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$. L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini.

4. Soit la fonction $E_{p,\text{eff}}(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$. Tracer son allure puis prouver qu'elle passe par un minimum en $r = r_0$. Exprimer r_0 en fonction de A et B puis donner sa signification physique ainsi que sa valeur numérique pour un satellite NAVSTAR placé sur son orbite de travail. Comment est habituellement dénommée cette fonction $E_{p,\text{eff}}(r)$?
 5. Quelle est la période de révolution du satellite ? Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.
- Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases :
- **Phase 1** : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon $R_1 = R_T + h_1$, où $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km.
 - **Phase 2** : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse V_1 après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.
 - **Phase 3** : une seconde impulsion permet d'atteindre l'orbite finale supposée circulaire de rayon R_2 où la vitesse du satellite est V_2 .

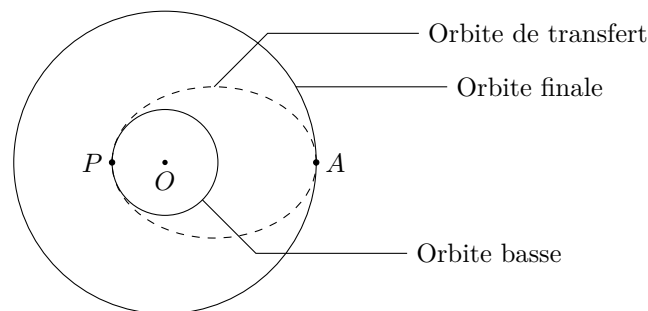


FIGURE 1 – Orbites circulaires et orbite de transfert.

6. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,1}$ d'un satellite NAVSTAR de masse $m = 800$ kg sur son orbite basse à l'altitude $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Faire l'application numérique.
7. Comparer $E_{m,1}$ à $E_{m,0} = \alpha \cos^2(\lambda) - \beta$, énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage de la base de lancement située à une latitude λ . Les valeurs de α et β sont $\alpha = 8,60 \times 10^7$ J et $\beta = 5,01 \times 10^{10}$ joule. Quelle est la valeur optimale de λ ? Faire l'application numérique pour cette valeur optimale. Conclure.
8. À partir de l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire de rayon r , on peut montrer qu'il suffit de substituer au rayon r , la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse pour généraliser cette expression à une trajectoire elliptique. En déduire la valeur numérique de l'énergie mécanique $E_{m,12}$ sur l'orbite de transfert.

On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.

9. En déduire la variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à l'orbite de transfert. Effectuer l'application numérique.
 10. Quelle est la durée du transfert ?
 11. Déterminer la variation de vitesse ΔV_2 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite de transfert à son orbite finale. Dans quelle direction cette vitesse supplémentaire doit-elle être appliquée ?
- Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.
12. Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire.
 13. Donner les caractéristiques de l'orbite d'un satellite géostationnaire. Un satellite géostationnaire peut-il se trouver à la verticale d'une ville Française métropolitaine ?
 14. Déterminer l'altitude (par rapport à la surface de la Terre) d'un satellite géostationnaire.
 15. Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 : PHYSIQUE DANS LA SALLE DE BAIN (D'APRÈS CENTRALE PSI 2019)

1 Arrivée d'eau

Dans une salle de bain, l'eau est délivrée par deux types de robinets : le mitigeur mécanique pour les lavabos et le mitigeur thermostatique pour la douche ou la baignoire (figure 1).



FIGURE 1 – Exemples de mitigeurs.

Dans le mitigeur mécanique, l'eau froide et l'eau chaude sont mélangées dans des proportions réglables par une position angulaire de la poignée et le débit réglable indépendamment par l'inclinaison de la poignée. L'écoulement est étudié en régime stationnaire et on note D_C et D_F les débits massiques respectifs de l'eau chaude (température T_C) et de l'eau froide (température T_F) à l'entrée dans le mélangeur et D_s le débit massique de l'eau en sortie (température T_s).

On suppose que la capacité thermique massique c_e de l'eau est indépendante de sa température, et que l'écoulement dans le mitigeur se fait à pression constante.

1. Parmi les quatre valeurs proposées ci-dessous, quel débit D_s en sortie du mitigeur correspond à un fonctionnement normal ? Argumenter.

(a) $2,0 \text{ g s}^{-1}$

(c) $2,0 \times 10^2 \text{ g s}^{-1}$

(b) $2,0 \times 10^1 \text{ g s}^{-1}$

(d) $2,0 \times 10^3 \text{ g s}^{-1}$

2. Relier D_s à D_F et D_C .
3. Pourquoi peut-on faire l'hypothèse que l'eau dans le corps du mélangeur ne reçoit aucun transfert thermique de la part de l'air environnant ?
4. Détailler le raisonnement qui aboutit à $D_s h_s = D_C h_C + D_F h_F$ où h_s , h_C et h_F sont les enthalpies massiques respectives de l'eau en sortie, chaude et froide.
5. En déduire l'expression de T_s en fonction des deux températures d'entrée et des débits massiques.

La légionellose est une maladie infectieuse due à une bactérie qui se développe dans les réseaux d'eau douce dont la température est comprise entre 25 et 45 °C. À 50 °C, sa croissance est stoppée, mais la bactérie survit ; à 55 °C, le temps de destruction est de plusieurs heures, à 60 °C il est de 32 minutes, à 70 celsius de une minute (source : DRASS/DASS). Dans les logements où la production d'eau chaude est individuelle, il est donc recommandé de maintenir l'eau du ballon de stockage à une température de plus de 55 °C et une fois par semaine de produire une eau à 70 °C. La température d'eau chaude à l'arrivée au robinet doit être au moins de 50 °C.

La gravité d'une brûlure est fonction de la température de l'eau et du temps de contact avec la peau. Une brûlure au troisième degré survient lors d'une exposition de la peau d'une seconde à 70°C , 7 secondes à 60°C pour l'adulte et 3 secondes pour l'enfant, 8 minutes à 50°C , pour l'adulte, 60 secondes pour l'enfant.

Un mitigeur mécanique est réglé pour que la température de sortie soit de 42°C lorsque $T_C = 50^\circ\text{C}$ et $T_F = 18^\circ\text{C}$. La manette est alors abaissée en position robinet fermé. Durant la nuit, l'eau chaude sanitaire est produite à une température de 70°C .

6. Y a-t-il un risque de brûlure à l'ouverture du mitigeur le matin si on lève simplement la manette sans la tourner ni à gauche ni à droite ?

Un mitigeur thermostatique contient un élément dilatable, par exemple une cartouche de cire. Si la température de l'eau chaude augmente brusquement, la régulation de température de l'eau de sortie est alors effectuée sans agir sur le réglage de la manette.

7. L'eau chaude arrive-t-elle sur l'entrée 1 ou l'entrée 2 du schéma de la figure 2 ? Justifier.

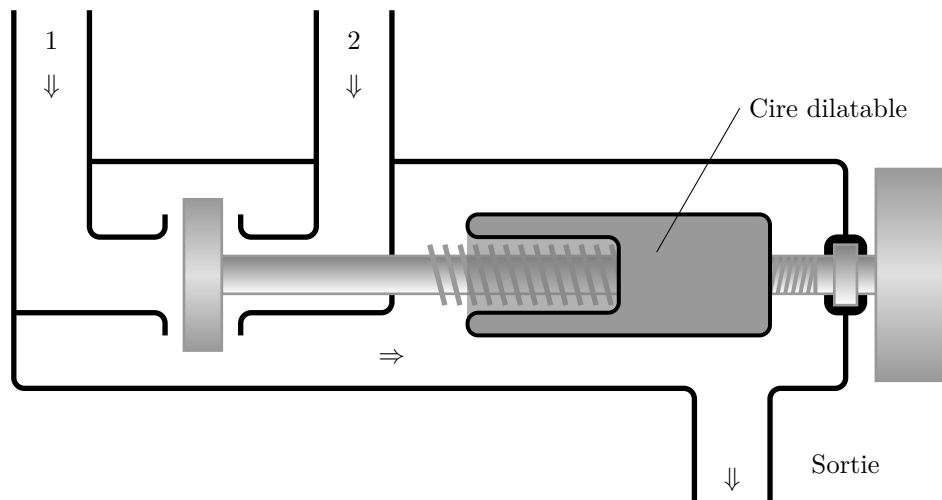


FIGURE 2 – Schéma d'un mitigeur thermostatique

2 L'air humide

2.1 Grandeurs caractérisant un air humide

L'air renferme toujours une proportion d'eau sous forme vapeur. On le qualifie d'air humide et on le caractérise par

- son *humidité absolue* $x = m_v/m_{as}$ où m_v et m_{as} sont respectivement les masses de vapeur d'eau et d'air sec dans un volume V quelconque d'air humide ;
- son *humidité relative* HR (ou *degré hygrométrique*) à la température T : $HR = \frac{p_v(T)}{p_{sat}(T)}$ où p_v est la pression partielle en vapeur d'eau et p_{sat} la pression de vapeur saturante dont la dépendance avec la température est donnée par la figure 3.

Dans la suite, l'air humide sera étudié comme un mélange de deux gaz parfaits : l'air sec (indice as) et la vapeur d'eau (indice v). La pression totale p de l'air humide sera considérée constante et égale à $p = 1,013$ bar. On note respectivement M_{as} et M_e les masses molaires de l'air sec et de l'eau.

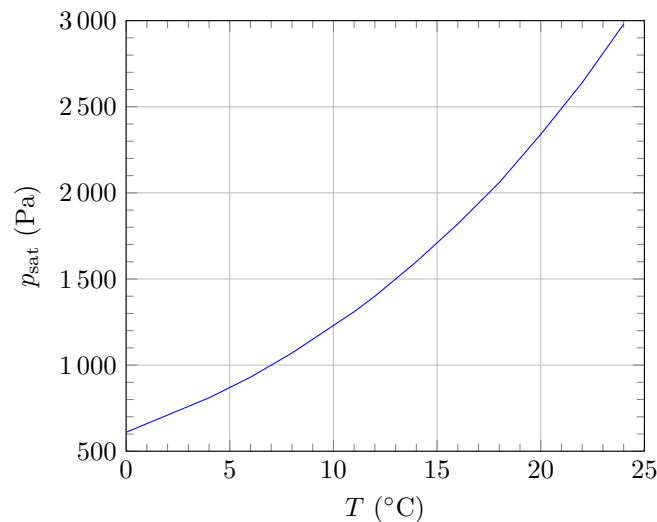


FIGURE 3 – Pression de vapeur saturante en fonction de la température

8. Montrer que $x = d \frac{p_v}{p - p_v}$ où $d = M_e / M_{as}$.

9. Calculer la valeur maximale de l'humidité absolue x_{sat} de l'air humide à la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

On considère une chambre hermétiquement fermée de volume $V = 40\text{ m}^3$ occupée par une personne qui se couche à 22 h. La température de la pièce est de 18°C et l'humidité relative est de 50 %. La chambre n'est pas chauffée et la température au lever à 8 h le lendemain matin est de 16°C . On trouvera en fin d'énoncé quelques exemples de sources d'eau vapeur, ainsi que leur débit de production.

10. Au lever, l'occupant de la chambre constate-t-il une condensation de l'eau ? La réponse doit s'appuyer sur un raisonnement quantitatif. Dans ce contexte, « condensation » signifie qu'il y aura liquéfaction d'une partie de la vapeur d'eau contenue dans l'air, cela arrivera si $p_v > p_{sat}$ ou $HR > 1$.

Le problème de la condensation peut être résolu en aérant les pièces du logement suffisamment et régulièrement. Certaines personnes sont réticentes à aérer lors des journées humides où l'air extérieur est froid et saturé en vapeur d'eau.

Considérons une pièce initialement à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$ et saturée en vapeur d'eau. L'air extérieur est à la température $T_a = 10^\circ\text{C}$ et est aussi saturé en vapeur d'eau. On renouvelle entièrement l'air de la pièce avec courant d'air.

11. Calculer l'humidité relative de l'air de la pièce après aération une fois que l'air est revenu à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$ par contact avec les meubles, le plafond et les parois intérieures de la pièce. Conclure.

2.2 Étude d'un hygromètre : le psychromètre

Un psychromètre est un instrument comportant deux thermomètres qui permet d'accéder à l'humidité relative de l'air ambiant. Ce dernier circule autour des réservoirs des deux thermomètres par aspiration ou par mouvement des thermomètres pour un psychromètre à fronde (figure 4). Le thermomètre dit « sec » indique la température T_1 de l'air ambiant étudié. Le thermomètre dit « humide » a son réservoir recouvert d'un tissu mouillé et indique la « température humide » T_h .

L'humidité relative HR se déduit alors des mesures de T_1 et T_h .

La figure 5 schématise le transport de l'air humide sur le thermomètre à bulbe humide. À l'entrée, la température de l'air vaut T_1 et l'humidité absolue est x_1 . À la sortie, la température est T_h et l'humidité absolue est $x_2 = x_{sat}(T_h)$.

Le débit massique d'air sec dans l'écoulement est noté $D_{m,as}$. La pression est uniforme et constante et vaut $p = 1,013\text{ bar}$.

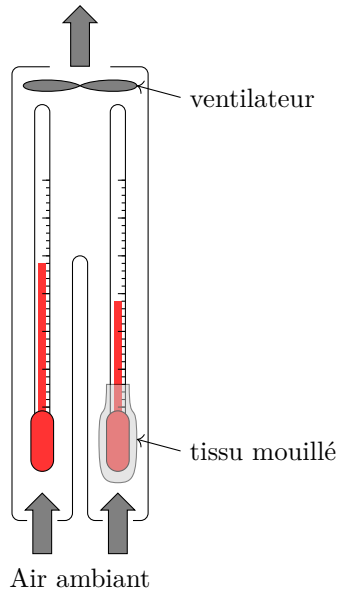


FIGURE 4 – Psychromètres

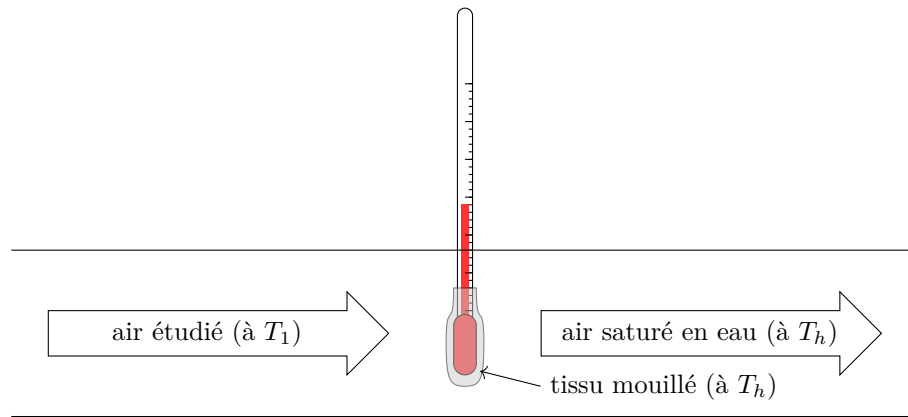


FIGURE 5 – Thermomètre à bulbe humide

12. On considère un système \mathcal{S} constitué d'une masse d'air sec m qui passe sur le tissu mouillé pendant le temps Δt . À $t = 0$ la masse d'air m a une humidité absolue x_1 et à $t = \Delta t$ son humidité absolue est $x_{\text{sat}}(T_h)$. Déterminer l'expression de la masse d'eau m_{ev} évaporée au passage de la masse d'air et montrer que la masse d'eau évaporée par unité de temps est $\dot{m}_{\text{ev}} = D_{m,\text{as}}(x_{\text{sat}}(T_h) - x_1)$.
13. On considère un système fermé (\mathcal{S}_f) constitué de \mathcal{S} et du tissu mouillé. On considérera que le système (\mathcal{S}_f) évolue de manière adiabatique. À l'aide d'un bilan d'enthalpie réalisé sur le système (\mathcal{S}_f) entre deux instants t (avant passage par le tissu mouillé) et $t + \Delta t$ (après passage par le tissu mouillé), montrer que

$$x_1 = \frac{x_{\text{sat}}(T_h)L_v(T_h) + c_{p,\text{as}}(T_h - T_1)}{L_v(T_h) + c_{p,v}(T_1 - T_h)} \quad (1)$$

où

- $c_{p,\text{as}} = 1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ est la capacité thermique à pression constante de l'air sec ;
 - $c_{p,v} = 2012 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ est la capacité thermique à pression constante de la vapeur d'eau ;
 - $L_v(T) = 3155 - 2,39T$ (en kJ kg^{-1} avec $273 \leq T \leq 323$ en K), est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à la température T .
14. Après comparaison des ordres de grandeur des termes de l'expression de x_1 , montrer que l'humidité absolue de l'air devient

$$x_1 \approx x_{\text{sat}}(T_h) - A(T_1 - T_h) \quad (2)$$

où on exprimera A en fonction des données.

On montre alors (ne pas le faire) que l’humidité relative de l’air étudié est

$$HR = \frac{p_{\text{sat}}(T_h)}{p_{\text{sat}}(T_1)} \left(1 - \frac{\gamma}{p_{\text{sat}}(T_h)} (T_1 - T_h) \right)$$

(3)

où $\gamma = \frac{c_{p,\text{as}}}{L_v(T_h)} \frac{M_{\text{as}}}{M_e} p$ est la *constante psychrométrique*.

15. *Application numérique* On mesure $T_1 = 20^\circ\text{C}$ et $T_h = 15^\circ\text{C}$. En déduire l’humidité relative HR de l’air étudié.
16. Le diagramme psychrométrique donné figure 6 confirme-t-il cette valeur ? Justifier en annotant cette figure à rendre avec la copie.

Données :

Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Capacité thermique massique de l’eau liquide	$c_e = 4,2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Masse molaire de l’air sec	$M_{\text{as}} = 29,0 \text{ g mol}^{-1}$
Masse molaire de l’eau	$M_e = 18,0 \text{ g mol}^{-1}$

Sources de l’humidité de l’air dans une pièce habitée (débit massique d’eau vapeur en g h^{-1})	
Cuisson	400 à 800
Lave-vaisselle	200 à 400
Douche	1500 à 3000
Bain	600 à 1200
Plantes	7 à 200
Être humain (selon son activité)	30 à 200

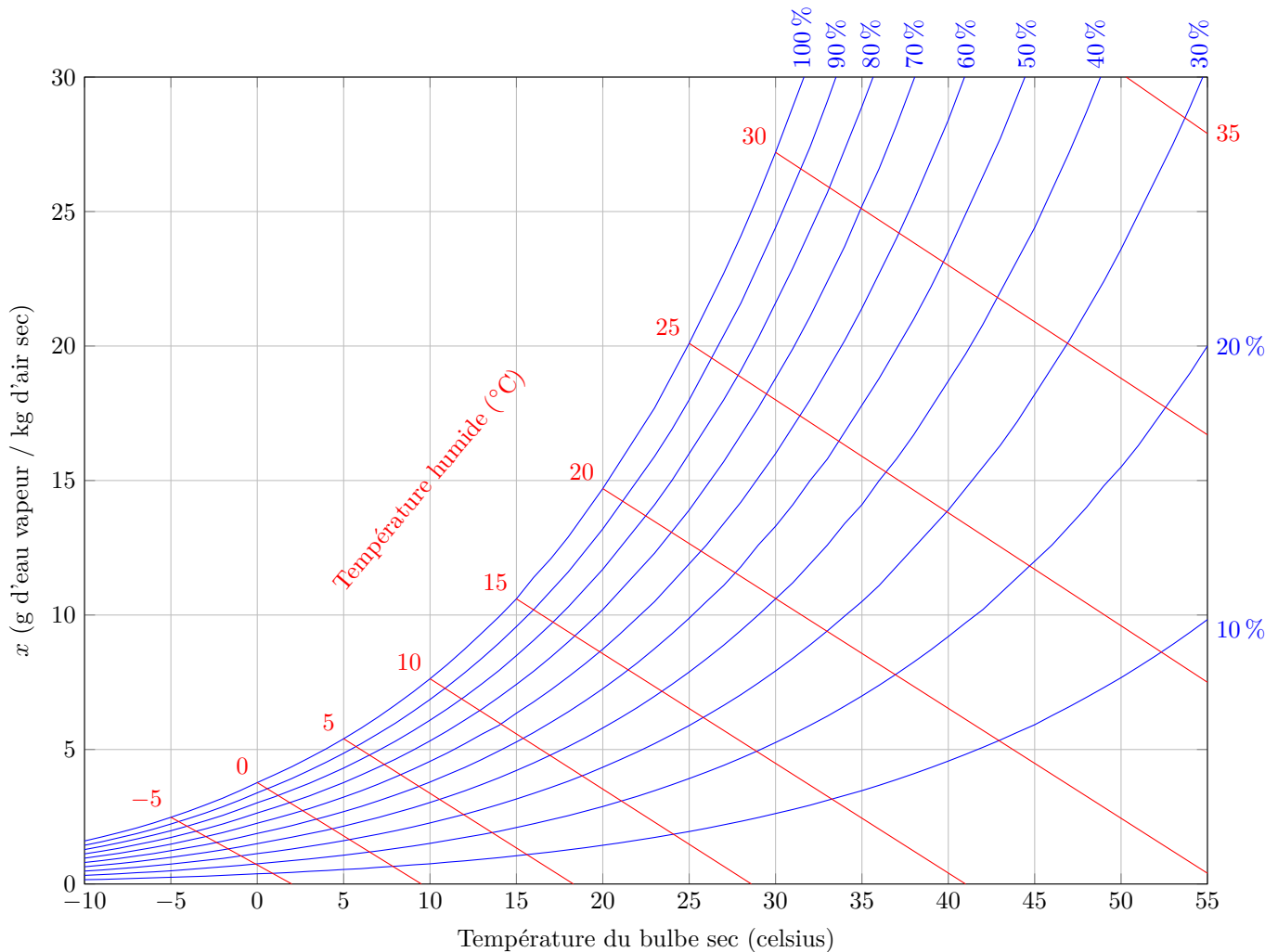


FIGURE 6 – Diagramme psychrométrique