

DS N°8

JEUDI 12 MAI 2022 - DURÉE 4H

CONSIGNES POUR L'ENSEMBLE DU DEVOIR :

- ★ La calculatrice est autorisée.
- ★ Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.
- ★ Chaque réponse doit être justifiée.
- ★ Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale en fonction des données de l'énoncé.

I. Expérience de Cavendish

La faible intensité de la force de gravitation par rapport aux autres forces rend sa mesure difficile. En 1798, Cavendish réalise une expérience utilisant un pendule de torsion dont les résultats seront réinterprétés un siècle plus tard comme la première détermination de \mathcal{G} la constante de gravitation. La valeur actuellement recommandée avec son incertitude est $\mathcal{G} = (6,67408 \pm 0,00031) \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$.

La précision relative de la mesure de Cavendish est d'environ 1 %, ce qui est remarquable pour l'époque. Nous nous intéressons ici à l'étude de l'expérience originelle de Cavendish.

I.1 Question de cours

On considère un pendule de torsion constitué d'un solide \mathcal{S} de masse m et de moment d'inertie J_z par rapport à l'axe orienté (Oz) vertical ascendant et passant par le centre de masse O de \mathcal{S} (Figure 1 ci-dessous).

On note C la constante de torsion du fil de torsion auquel \mathcal{S} est suspendu.

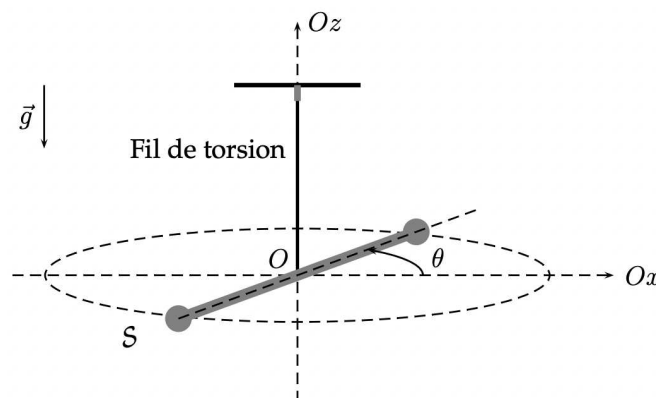


FIGURE 1 – Pendule de torsion.

Le solide \mathcal{S} reste horizontal mais peut pivoter autour de l'axe (Oz) formant ainsi l'angle orienté θ avec la direction (Ox) . À l'équilibre, $\theta = 0$. On néglige tout frottement. Le fil de torsion exerce un couple de rappel $\vec{\Gamma} = -C\theta \vec{e}_z$.

1. Établir, par la méthode de votre choix mais en détaillant soigneusement chaque étape, l'équation différentielle qui lie $\theta(t)$ et ses dérivées temporelles aux constantes de l'énoncé.
2. En déduire, en fonction des données C et J_z , l'expression de la période d'oscillation du système ainsi constitué.

I.2 Balance de Cavendish

I.2.1 Principe

Les figures 2 ci-dessous illustrent le principe de l'expérience menée par Cavendish. Celle de gauche est tracée dans le plan (Ox, Oz) vertical, celle de droite dans le plan (Ox, Oy) horizontal.

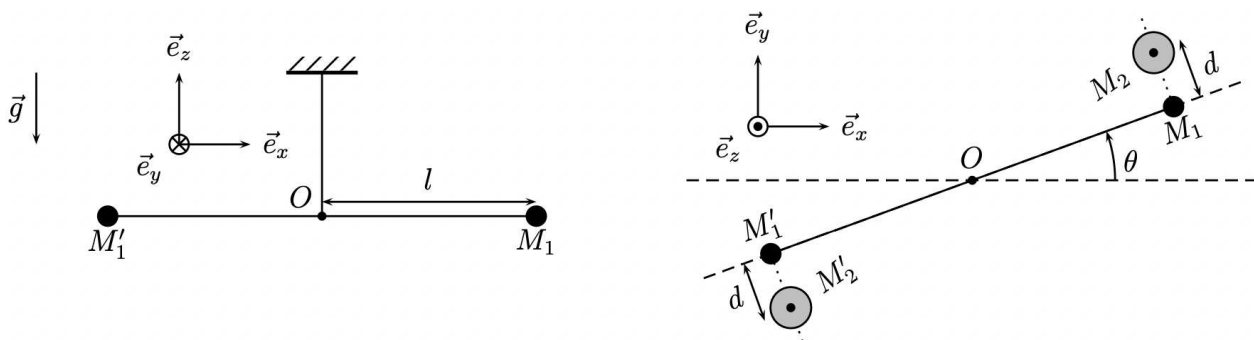


FIGURE 2 – Balance de Cavendish

Deux particules M_1 et M'_1 identiques de masse m sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur $2l$ et de masse négligeable.

Un fil de torsion relie le centre de la tige à un point fixe du laboratoire, réalisant ainsi un pendule de torsion.

En approchant deux sphères identiques de centre M_2 et M'_2 et de masse M à une distance d de chacune des particules M_1 et M'_1 du pendule de torsion ($d = M_1M_2 = M'_1M'_2$), on observe une déviation angulaire dont la mesure permet de déterminer \mathcal{G} .

Dans la suite, on note θ la déviation angulaire du pendule par rapport à sa position $\theta = 0$.

On note C la raideur angulaire du fil de torsion : le moment du couple de rappel est $\vec{\Gamma}_r = -C\theta \vec{e}_z$.

Les sphères de masse M et les particules de masse m sont ramenées aux points matériels M_2, M'_2, M_1 et M'_1 .

I.2.2 Forces de gravitation et couple

- Reproduire le schéma de la figure 2 ci-dessus à droite (dans le plan horizontal) et ajoutez-y la force de gravitation $\vec{F}_{2/1}$ qu'exerce M_2 de masse M sur M_1 de masse m .
- Quelle est, en fonction de \mathcal{G} , M et m et d l'expression de la force $\vec{F}_{2/1}$ précédente ? On introduira un vecteur unitaire \vec{e}_θ .
- M'_2 exerce également une force de gravitation $\vec{F}'_{2/1}$ sur M'_1 . Représenter cette force sur la figure précédemment tracée.
- Montrer qu'on peut considérer que l'action de ces forces est équivalente à un couple noté $\vec{\Gamma}_g$ que l'on déterminera en fonction de l , \mathcal{G} , M , m , d et \vec{e}_z .

I.2.3 Expression et mesure pratique de la position d'équilibre

- Par application du théorème du moment cinétique sur la balance de Cavendish à l'équilibre, déterminer l'expression de la déviation angulaire $\theta = \theta_{eq}$ en fonction de l , C , m , M , d et \mathcal{G} .
- Pour réaliser son expérience, Cavendish a utilisé les paramètres suivants : $m = 0,800$ kg, $M = 158$ kg, $l = 1,00$ m, $d = 20,0$ cm et $C = 3,72 \cdot 10^{-4}$ kg.m².s⁻².
Il mesure $\theta_{eq} = 1,13 \cdot 10^{-3}$ rad. Calculez la valeur numérique de \mathcal{G} ainsi mesurée. Commentez.

9. Pour mesurer un tel angle, Cavendish fixa en O un petit miroir plan solidaire de la tige et utilisa un faisceau lumineux très fin dont il mesura la déviation sur un écran situé à D. Il s'agit de la méthode de Pogendorff dont le principe est schématisé ci-dessous.

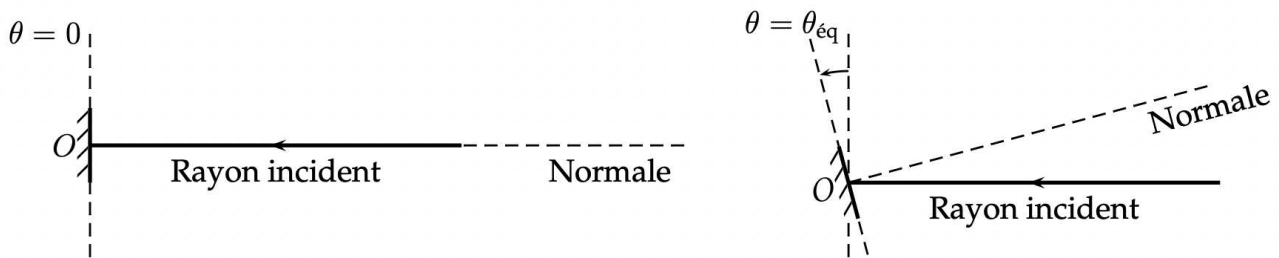


FIGURE 3 – Méthode de Pogendorff

- Reproduire les schémas de la figure 3 ci-dessus et tracer le rayon réfléchi dans chaque cas.
- En déduire l'angle β dont est dévié le rayon réfléchi lorsque le miroir passe de $\theta = 0$ à θ_{eq} .
- De quelle distance d' le point lumineux s'est-il alors déplacé sur un écran situé à la distance D du miroir ? On considère $\theta_{\text{eq}} \ll 1$ rad.
- En déduire une méthode pratique de mesure de θ_{eq} .

I.2.4 Méthode de mesure de la constante de torsion C

- On rappelle que la masse de la tige reliant les extrémités du pendule est négligeable. Calculer le moment d'inertie J_z du pendule de torsion par rapport à son axe de rotation (Oz).
- La constante C est difficile à mesurer directement. Cavendish retire alors les deux masses M et laisse osciller le pendule de torsion, de moment d'inertie J_z autour de la position $\theta = 0$.
En déduire l'équation différentielle à laquelle θ obéit lors de ces oscillations et en déduire C en fonction de T_0 la période des oscillations et J_z .
On pourra utiliser les résultats de la partie I.1, question 2.
- En déduire \mathcal{G} en fonction de M , l , d , θ_{eq} et T_0 .
- Calculez numériquement T_0 et commentez.

I.3 Cavendish pèse la Terre

Lorsqu'il a réalisé son expérience, Cavendish ne cherchait pas à mesurer \mathcal{G} mais à déterminer la masse M_T de la Terre.

Pour cela, il mesura également la période T'_0 du pendule simple réalisé en suspendant une des particules de masse m à un fil de longueur l .

On note R_T le rayon de la Terre.

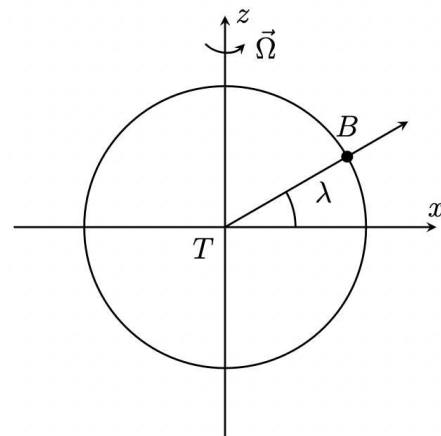
- Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation propre ω'_0 puis la période propre T'_0 de ce pendule simple, faire l'application numérique en prenant $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
- Quelle est la relation liant g à \mathcal{G} , R_T et M_T en assimilant le poids d'un corps à la force de gravitation au niveau du sol ?
- Montrer que l'on peut effectivement déduire la masse de la Terre M_T en fonction de R_T , M , d , T'_0 , θ_{eq} et T_0 .
- Calculez numériquement M_T en prenant $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et $R_T = 6370 \text{ km}$. Commentez.

II. De la Terre à la Lune...Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969.

II.1 De la Terre ...

La fusée, lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.



II.1.1 Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6,38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Sud-Nord Tz , à la vitesse angulaire $\Omega = 7,29 \times 10^{-5}$ rad.s⁻¹.

Jusqu'à la question 13. comprise, \mathcal{R}_G le référentiel géocentrique sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.

- Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ .
En déduire l'expression du module v_B de sa vitesse.

Une fusée de masse m_F décolle du point B, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à \mathcal{R}_G .

- Déterminer la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B , v_0 et m_F .
- En déduire s'il est plus intéressant de choisir la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,16^\circ$) plutôt que celle de Cap Canaveral aux Etats-unis ($\lambda_1 = 28,5^\circ$).

II.1.2 Orbite circulaire

- Rappeler l'expression de la force gravitationnelle \vec{F}_G exercée par une masse ponctuelle m_1 située en O sur une masse ponctuelle m_2 située en M en fonction de m_1 , m_2 , $\vec{r} = \vec{OM}$, $r = ||\vec{r}||$ et la constante de gravitation \mathcal{G} .

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \rightarrow \infty$.

La trajectoire est maintenant considérée circulaire de rayon r .

- Déterminer la vitesse v_0 de la fusée et son énergie cinétique E_{c0} , en fonction de \mathcal{G} , m_F , m_T et r .
- Déterminer le rapport $\frac{T_0^2}{r^3}$, où T_0 est la période de révolution du satellite, en fonction de \mathcal{G} et m_T .
Quel est le nom de cette loi? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.
- Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$).
On donne $\mathcal{G} \times m_T = 3,99 \times 10^{14}$ m³.s⁻².

- Déterminer enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\frac{K}{2r}$, en précisant l'expression de K . Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.

II.2 ... à la Lune.

II.2.1 Objectif Lune

Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1 , de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune.



10. Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.
11. En déduire l'expression de la vitesse v_1 . Application numérique. On donne $d_{TL} = 3,84 \times 10^8$ m.
12. Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ? Faire un schéma.
13. Déterminer la durée t_1 du transfert Terre-Lune. Application numérique.

Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L , l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable.

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre (ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

14. Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.
15. Déterminer numériquement v_2 , vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4,90 \times 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et $R_L = 1,74 \times 10^3$ km.

II.2.2 Atmosphère lunaire

L'atmosphère lunaire est majoritairement composée d'atomes d'argon (masse molaire M), libérés lors des réactions nucléaires au sein des roches lunaires. Les molécules de ce gaz sont homocinétiques, c'est-à-dire de vecteur vitesse \vec{v} de norme v constante, mais d'orientation aléatoire.

16. Exprimer v en fonction de R , M et T . Calculer v pour $T = 300$ K.
On donne $M = 39,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $R \simeq 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
17. On note v_{lib} la vitesse de libération lunaire ; c'est la vitesse minimale d'un objet pouvant échapper à l'attraction gravitationnelle lunaire. Exprimer la vitesse de libération lunaire en fonction de \mathcal{G} , R_L et m_L . Calculer v_{lib} et comparer à v .

III. Stockage du diazote

DONNÉES :

- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$;
- Masse molaire du diazote : $M = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

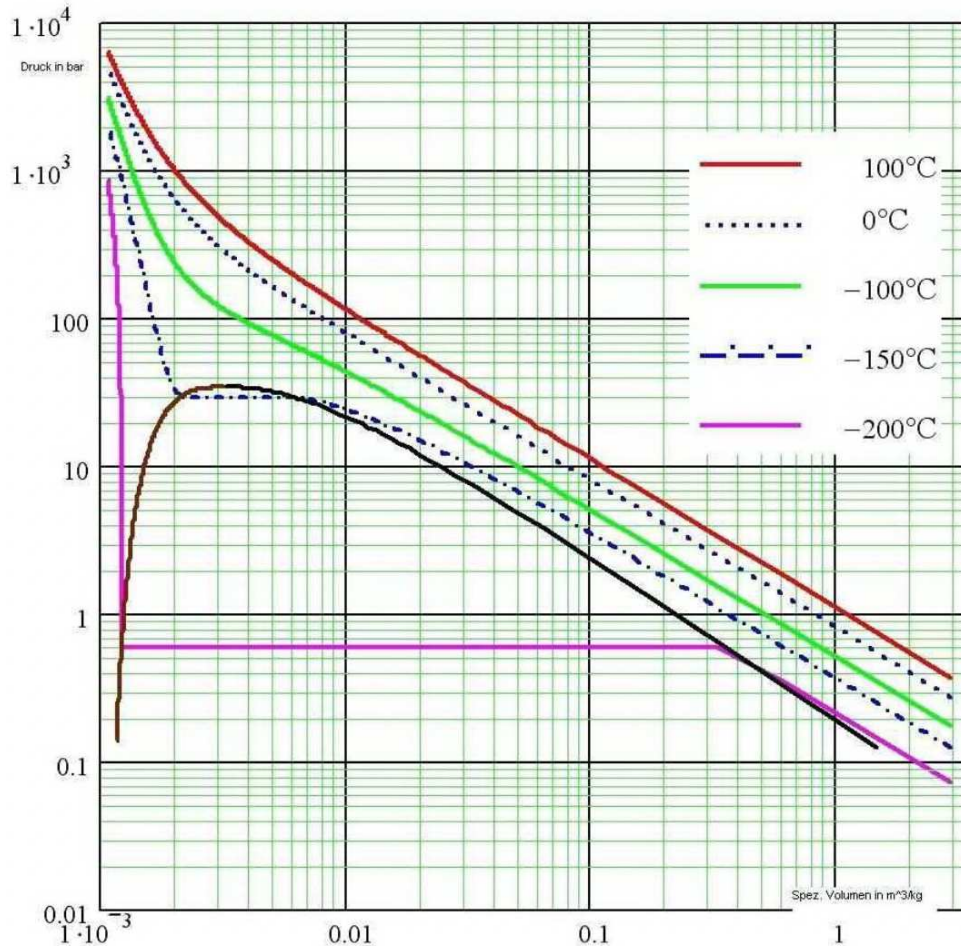


FIGURE 4 – Diagramme de Clapeyron du diazote (P en bar et v en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)

1. Déterminer l'expression du nombre N de molécules dans un $V = 1,0 \text{ L}$ de diazote gazeux à la pression atmosphérique P_{atm} et à température ambiante T_{amb} .
Application numérique (on précisera la température retenue).
2. La diazote peut être conservé à $T_{\text{cons}} = -200^\circ\text{C}$ dans un vase Dewar que l'on suppose parfaitement étanche et isolant. Il coexiste alors à l'équilibre du diazote liquide et du diazote gazeux.
Déterminer l'expression de la fraction massique w_g de diazote gazeux dans une masse $m = 5,0 \text{ kg}$ de diazote stockée un Dewar de $V_{\text{cons}} = 10 \text{ L}$. Application numérique.
3. On peut aussi conserver le diazote dans une bouteille à température ambiante sous pression élevée.
 - a) Quel est l'état physique du diazote dans la bouteille ?
 - b) Sous quelle pression faut-il le maintenir pour stocker une masse $m' = 10 \text{ kg}$ dans un volume $V' = 1,0 \text{ m}^3$?

IV. Détermination de l'épaisseur de zinc déposé sur une rondelle

On souhaite évaluer expérimentalement l'épaisseur d'une couche de zinc mise sur une rondelle en acier.

La surface métallique $S = 9,6 \text{ cm}^2$ de la rondelle en acier zingué est dans un premier temps oxydée par l'acide nitrique concentré pour dissoudre tout le zinc et une partie du fer constituant l'acier en ions solubles Zn^{2+} , Fe^{2+} et Fe^{3+} .

Ce traitement conduit à l'obtention d'une solution S_0 d'un volume total $V_0 = 100 \text{ mL}$ contenant tous les ions cités ci-avant.

Dissolution de la rondelle dans l'acide nitrique, obtention de la solution S_0

L'acide nitrique pur se présente sous forme d'un liquide moléculaire, très soluble dans l'eau.

1. Donner les configurations électroniques des atomes d'hydrogène, d'azote et d'oxygène dans leur état fondamental. Citer le nom des trois règles utilisées.
2. Rappeler la formule brute de la molécule d'acide nitrique et proposer le schéma de Lewis associé le plus probable (l'azote est central et l'hydrogène est relié à un oxygène).
3. Rappeler quels sont les ions contenus dans une solution aqueuse d'acide nitrique. Justifier la réponse en écrivant et justifiant la réaction qui s'est produite lorsqu'on a dissous de l'acide nitrique initialement pur dans de l'eau.
4. Écrire l'équation de la réaction qui se produit lorsque la surface en zinc de la rondelle est traitée par la solution aqueuse d'acide nitrique lors de la constitution de la solution S_0 .

Les couples oxydant/réducteur mis en jeu sont :

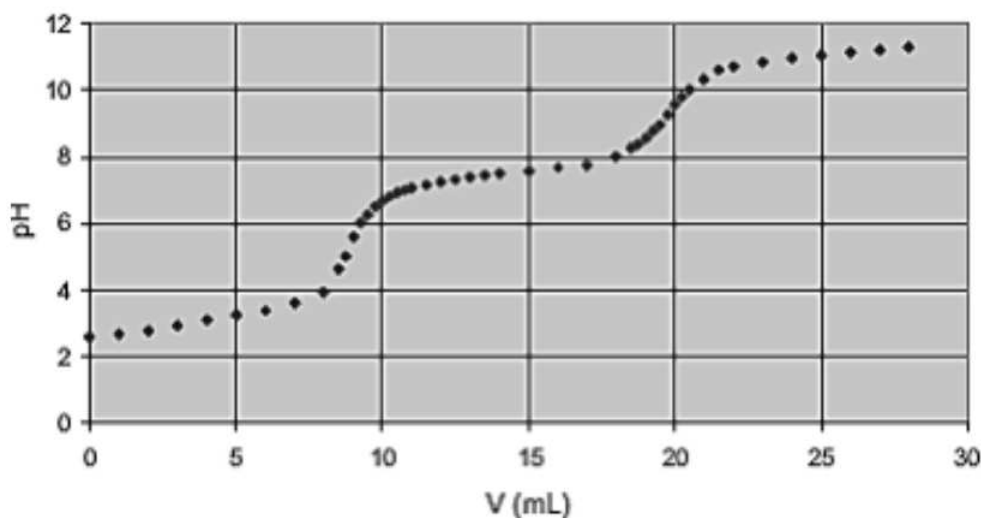


5. Établir puis calculer la constante d'équilibre K^0 de la réaction précédente à partir des potentiels standard des deux couples. Cette réaction permet-elle le passage de la totalité du zinc en solution ? À quelle condition ?

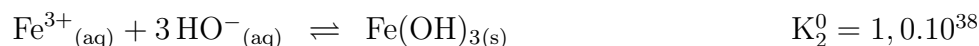
Titrages

Le titrage pH-métrique simultané des ions Zn^{2+} et Fe^{2+} , suivi du titrage redox des ions Fe^{2+} permet d'accéder à la quantité totale de zinc, puis à l'épaisseur de zinc déposé sur la surface de la rondelle.

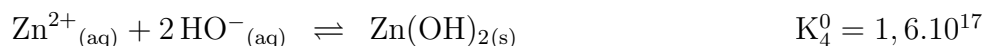
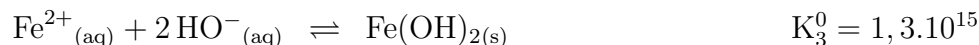
Dans un premier temps, on titre par pH-métrie un volume $V_1 = 50 \text{ mL}$ de la solution S_0 par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium à la concentration molaire $C = 0,050 \text{ mol.L}^{-1}$. La courbe pH-métrique obtenue montre deux sauts :



- ★ le premier saut pour un volume versé $V_{\text{éq1}} = 8,8 \text{ mL}$ correspond au titrage simultané des ions H^+ et Fe^{3+} selon les équations chimiques :



- ★ le second saut pour un volume versé $V_{\text{éq2}} = 19,8 \text{ mL}$ correspond au titrage simultané des ions Zn^{2+} et Fe^{2+} selon les équations chimiques :



6. Rappeler le nom et le rôle des électrodes nécessaires à un titrage pH-métrique.
7. En considérant une solution qui contiendrait des ions Zn^{2+} , Fe^{2+} et Fe^{3+} , chacun dans une concentration usuelle de $C_{\text{tra}} = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$, déterminer à partir de quelles valeurs, respectivement $[\text{HO}^-]_{\text{min1}}$, $[\text{HO}^-]_{\text{min2}}$ et $[\text{HO}^-]_{\text{min3}}$ de la concentration en ions HO^- les précipités $\text{Zn}(\text{OH})_2$, $\text{Fe}(\text{OH})_2$ et $\text{Fe}(\text{OH})_3$ commencent à se former.
8. En déduire les pH correspondants notés pH_{min1} , pH_{min2} et pH_{min3} .
9. Représenter sous forme de diagrammes d'abscisse pH les domaines de stabilité des couples de précipitation $\text{Zn}(\text{OH})_2/\text{Zn}^{2+}$, $\text{Fe}(\text{OH})_2/\text{Fe}^{2+}$ et $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{3+}$, en précisant si les domaines sont des domaines d'existence ou de prédominance.
10. En faisant le lien entre le diagramme précédent et la courbe pH-métrique du titrage, justifier que les ions H^+ et Fe^{3+} soient titrés simultanément, et avant les ions Zn^{2+} et Fe^{2+} , eux-mêmes titrés simultanément.
11. Déterminer la quantité de matière totale en ions Zn^{2+} et Fe^{2+} , notée n_{ZnFe0} , dans le volume V_0 de solution S_0 .
12. Une fois le titrage terminé, doit-on verser le contenu du bécher à l'évier, dans le bidon des déchets organiques ou dans le bidon portant l'indication « métaux » ?

Dans un second temps, on titre en présence d'un indicateur coloré rédox (ferroïne) un volume $V_2 = 10 \text{ mL}$ de la solution S_0 par une solution de sulfate cérique ($\text{Ce}^{4+} + \text{SO}_4^{2-}$) à la concentration $C' = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Seuls les ions Fe^{2+} réagissent selon l'équation $\text{Fe}^{2+}_{(\text{aq})} + \text{Ce}^{4+}_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{Fe}^{3+}_{(\text{aq})} + \text{Ce}^{3+}_{(\text{aq})}$. Le volume versé à l'équivalence vaut $V_{\text{éq3}} = 18,3 \text{ mL}$.

13. Déterminer la quantité de matière n_{Fe0} en ions Fe^{2+} dans le volume V_0 de solution S_0 .
14. En déduire la quantité de matière n_{Zn0} en ions Zn^{2+} dans le volume V_0 de solution S_0 .
15. En déduire, en μm , l'épaisseur e de zinc déposé sur la rondelle.

DONNÉES :

- ★ On se place à 25°C
- ★ $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,059 \text{ V}$ à 25°C
- ★ Masse molaire du zinc : $M_{\text{Zn}} = 65,41 \text{ g.mol}^{-1}$
- ★ Masse volumique du zinc : $\rho_{\text{Zn}} = 7,134 \text{ g.cm}^{-3}$
- ★ L'acide nitrique est un acide fort dans l'eau

