Régimes transitoires et oscillateurs

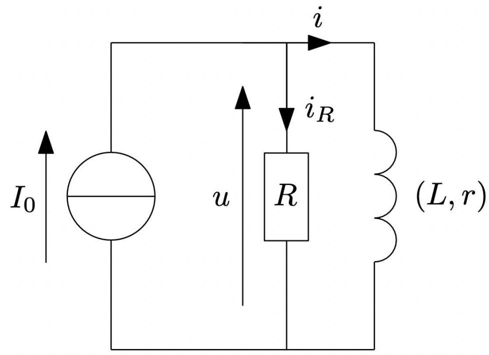
Jeudi 17 novembre 2022 - Durée 3h

- ⋆ **Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans le désordre.**
- ⋆ **La calculatrice est autorisée.**
- ⋆ **Il sera tenu le plus grand compte du soin, de la présentation, et de la rédaction.**
- ⋆ **Chaque réponse doit être justifiée. Par ailleurs, même lorsque ce n'est pas explicitement demandé, toute application numérique doit être précédée d'une expression littérale.**

I. Bobine réelle et source de courant

Attention ! Aucun transformation Thévenin/Norton ou Norton/Thévenin n'est admise ici.

Une bobine réelle d'inductance propre $\mathrm{L} = 500$ mH et de résistance interne $r = 2,0\ \Omega$ est placée en parallèle d'un résistor de résistance $\mathrm{R} = 47\ \Omega$. L'ensemble est alimenté par un générateur idéal de courant délivrant $\mathrm{I}_0 = 8,0$ A.



À la date $t = 0$, on allume le générateur qui était éteint depuis longtemps. Ce générateur se comporte comme un interrupteur ouvert lorsqu'il est éteint.

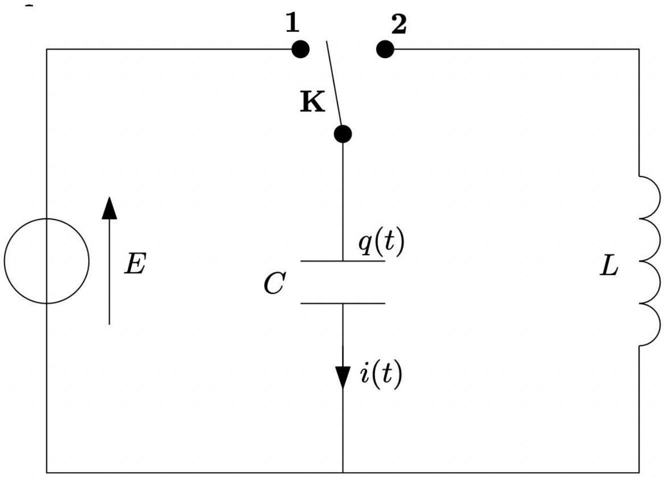
1. Déterminer $i(0^+)$, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$ et $i(\infty)$.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par i pour $t > 0$ et la mettre sous forme canonique. On fera apparaître un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression et la valeur.
3. À quoi correspond en réalité $t = \infty$ évoqué dans la première question ?
4. Déterminer $i(t)$ pour $t > 0$ et en faire la représentation graphique.
5. Déterminer également $i_\mathrm{R}(t)$ pour t > 0, et ajouter sa représentation graphique au graphe précédent.
6. Déterminer, en fonction de L, R, r et I_0, l'énergie $\Delta\mathrm{E_L}$ emmagasinée par la partie inductive de la bobine entre l'allumage du générateur et le régime permanent. Faire l'application numérique.
7. Déterminer, en fonction de R, r et I_0, puis numériquement, la puissance dissipée en régime permanent :
   a) par la partie résistive de la bobine (notée $\mathscr{P}_\mathrm{r}$)
   b) par le résistor de résistance R (notée $\mathscr{P}_\mathrm{R}$)

Après un temps de fonctionnement très grand devant τ, on éteint le générateur de courant (qui est alors équivalent à un interrupteur ouvert). On décale l'origine des temps de sorte que cette extinction intervient en $t' = 0$. En réutilisant au maximum les calculs menés dans les questions précédentes :

8. Déterminer $i(t' = 0^+)$ et $i(t' = \infty)$.
9. Établir l'équation différentielle vérifiée par i pour $t' > 0$ et la mettre sous forme canonique.
10. Déterminer $i(t')$ pour $t' > 0$.
11. Déterminer également $i_\mathrm{R}(t')$ pour $t' > 0$.
12. Déterminer l'énergie $\Delta\mathrm{E'_R}$ dissipée par le résistor de résistance R entre $t' = 0$ et $t' = \infty$, et la comparer à $\Delta\mathrm{E_L}$. Conclure.

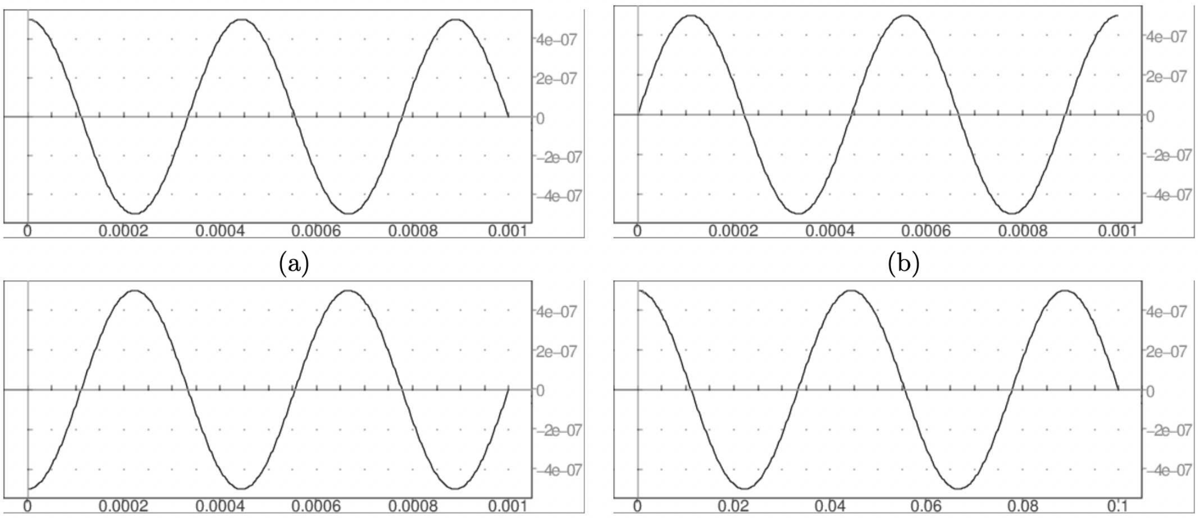
II. Mouvement perpétuel - Oscillateur électrique

On considère le circuit représenté ci-dessous. À la date $t = 0$, l'interrupteur K, qui était depuis longtemps dans la position 1, bascule dans la position 2.



Circuit électrique étudié. E = $5,0$ V ; L = 50 mH et C = 100 nF

1. Déterminer $q(0^-)$ et $i(0^-)$.
2. Déterminer $q(0^+)$ et $i(0^+)$.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ pour t $>$ 0.
4. Mettre cette dernière équation sous forme canonique. Quel système-modèle reconnaît-on ? On indiquera la ou les grandeur(s) permettant de le définir, et on effectuera la ou les application(s) numérique(s) correspondante(s).
5. Résoudre cette équation différentielle.
6. Choisir parmi les courbes présentées sur la figure ci-dessous celle qui correspond à la solution obtenue. On justifiera très brièvement pourquoi chacune des courbes non choisies ne convient pas.



Représentation de q (en C) en fonction de t (en s)

III. Circuit RLC

On considère le circuit RLC série représenté ci-dessous. On utilisera la forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=0$$

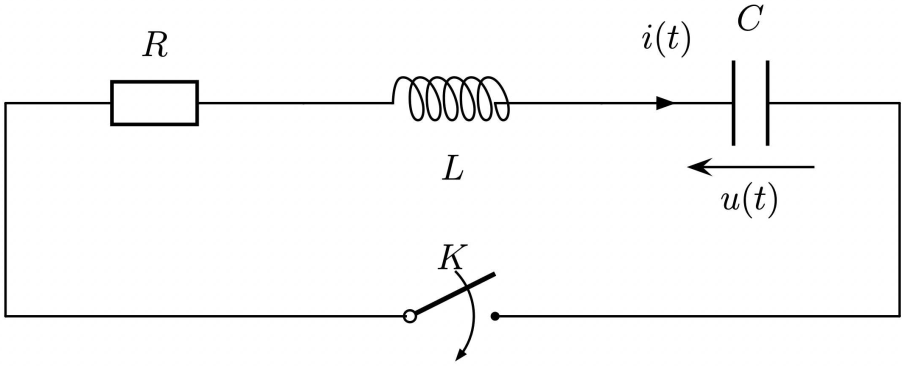


Schéma du circuit RLC

L'interrupteur K est fermé à un instant $t=0$ choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé $u(0^-)=u_0$.

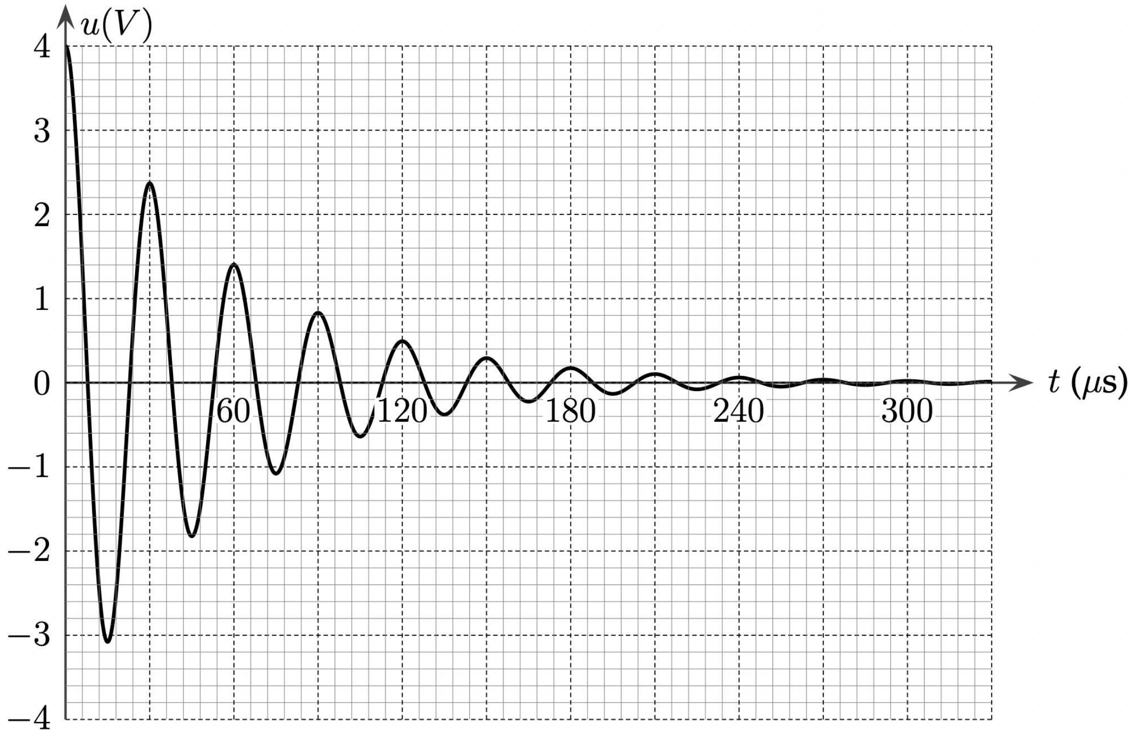
1. a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t\geqslant 0$. On explicitera ω_0 et Q en fonction de R, L et C.
   b) Préciser les différents régimes d'évolution possibles selon les valeurs de Q.
   On suppose par la suite que l'on observe des oscillations amorties.
2. a) Déterminer la pseudo-pulsation Ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q. Expliciter également le temps caractéristique d'amortissement τ des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q.
   b) Déterminer les conditions initiales $u(t=0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0^+)$.
   c) Établir l'expression de $u(t)$ pour $t\geqslant 0$ compte tenu des conditions initiales.
3. On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $\mathrm{R}_0=1,0\ \mathrm{M}\Omega$ et d'une capacité $\mathrm{C}_0=11$ pF.
   a) Redessiner la figure 1 en ajoutant la voie CH1 et la masse de l'oscilloscope de façon à pouvoir mesurer la tension $u(t)$.
   b) Redessiner la figure 1 en tenant compte de la modélisation proposée pour l'oscilloscope.
   c) Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :
   $$\mathrm{L}(\mathrm{C}+\mathrm{C}_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\alpha_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\alpha_0\,u=0$$
   α_1 et α_0 seront déterminées en fonction de L, R, R_0, C et C_0.
   d) Quelles relations qualitatives doivent vérifier R, L, C, R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R, L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

Dans la suite, on considère que l'oscilloscope n'a pas d'influence sur le circuit.

4. On définit le décrément logarithmique comme étant la quantité $\delta=\dfrac{1}{m}\ln\left(\dfrac{u(t)}{u(t+m\mathrm{T})}\right)$ où $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\Omega}$ et m est un entier strictement positif.
   Déterminer δ en fonction de Q.

5. On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur basses fréquences ou GBF. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ?

La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté ci-après.



Enregistrement de la tension en fonction du temps

6. Estimer rapidement la valeur du facteur de qualité puis la déterminer plus précisément à l'aide du décrément logarithmique.
7. On suppose $Q \gg 1$: la dissipation d'énergie par effet Joule est traitée comme une perturbation par rapport au cas du circuit non dissipatif ($R = 0$).

   a) Dans le cas où $R = 0$, établir l'expression de la valeur de l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}(t)$ stockée dans le circuit (somme de l'énergie stockée dans le condensateur et de celle emmagasinée dans la bobine).

   b) Dans le cas où $R \neq 0$, donner la nouvelle expression de $\mathcal{E}(t)$ et montrer qu'au premier ordre en $1/Q$ (on suppose toujours que $Q \gg 1$), l'énergie E_J dissipée par effet Joule dans le circuit RLC, pendant une période (entre t et $t + T$), vérifie la relation :

$$E_J = \frac{2\pi}{Q}\mathcal{E}$$

   On donne $\exp(x) \simeq 1 + x$ pour $x \ll 1$.

♫