DS7 : Mécanique, chimie, particules chargées – corrigé

Exercice 1 : Toboggan aquatique

1 Étude d'un toboggan rectiligne

1. On étudie le système {passager} dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis aux forces suivantes :
   — Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, force conservative d'énergie potentielle associée $E_{pp} = mgz' + \text{cste}$;
   — La réaction du toboggan $\vec{R} = R\vec{e}_z$, normale au toboggan car on néglige tous les frottements. (force non conservative)

   Comme la force $\vec{R}$ est toujours perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille pas et l'application du théorème de l'énergie mécanique permet de montrer que l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement.
   On peut donc écrire
   $$\boxed{E_m(A) = E_m(B) \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \tag{1}$$
2. L'expression trouvée à la question précédente ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, donc la vitesse en B ne dépend pas de la forme du toboggan si h est constant.
3. On peut appliquer le PFD au passager (référentiel galiléen), on obtient $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$. On commence par exprimer le poids dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$: $\vec{P} = -mg\cos(\alpha)\vec{e}_z + mg\sin(\alpha)\vec{e}_x$. Le mouvement du passager se faisant uniquement sur l'axe x, son accélération s'écrit $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$. On a alors la relation
   $$m\ddot{x}\vec{e}_x = -mg\cos(\alpha)\vec{e}_z + mg\sin(\alpha)\vec{e}_x + N\vec{e}_z - T\vec{e}_x \tag{2}$$
   La projection de cette équation sur $\vec{e}_z$ donne $N = mg\cos(\alpha)$
4. Comme $\vec{R}$ est une force constante, le travail entre A et B de $\vec{R}$ est :
   $$W_{AB}(\vec{R}) = \int_A^B \vec{R}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \vec{R}\cdot\int_A^B \mathrm{d}\vec{l} = \vec{R}\cdot\overrightarrow{AB} = -T\times AB \tag{3}$$
   Comme $AB = \frac{h}{\sin(\alpha)}$ et $T = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$, on obtient finalement $W_{AB}(\vec{R}) = -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)}$
5. On applique à nouveau le théorème de l'énergie mécanique, en ajoutant le travail des forces de frottements, on a alors
   $$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{R}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -\frac{\mu mgh}{\tan(\alpha)} \Leftrightarrow v_B = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan(\alpha)}\right)}} \tag{4}$$
6. D'après la question précédente, on trouve directement que
   $$\boxed{\mu = \tan(\alpha)\left(1 - \frac{v_B^2}{2gh}\right) \approx 0{,}24} \tag{5}$$
   Cette valeur est parfaitement compatible avec ce qu'on peut lire sur la figure 2.
7. On considère que le coefficient de frottement est le même avec la piste qu'avec le toboggan, mais cette fois, comme le mouvement se fait à l'horizontale, on a $N = mg$. Si le passager a besoin d'une distance L pour s'arrêter, le travail de la force de frottement est $W_f = -T\times L = -\mu NL = -\mu mgL$. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique au passager, on trouve que $\frac{1}{2}mv_B^2 = \mu mgL$, soit $d = \frac{v_B^2}{2\mu g} \approx 107\,\mathrm{m}$
   C'est la longueur minimale de la piste pour que le passager s'arrête avant la fin. En pratique il faudra probablement construire une piste un peu plus longue pour avoir une marge de sécurité.

2 Étude d'un virage

2.1 Préliminaire : Étude des oscillations dans une cuvette

8. L'énergie potentielle de pesanteur de la masse est $\boxed{E_{pp} = -mga\cos(\theta)}$.

9. La masse a une trajectoire circulaire, donc sa vitesse est $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Son énergie cinétique est $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2}$.

10. On néglige tous les frottements, donc la réaction du support est uniquement normale et son travail est toujours nul. On en conclut que l'énergie mécanique de la masse est constante. On a donc

$$E_m = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 - mga\cos(\theta) = \text{constante} \xrightarrow{\text{dérivation}} ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\sin(\theta)\dot{\theta} = 0 \tag{6}$$

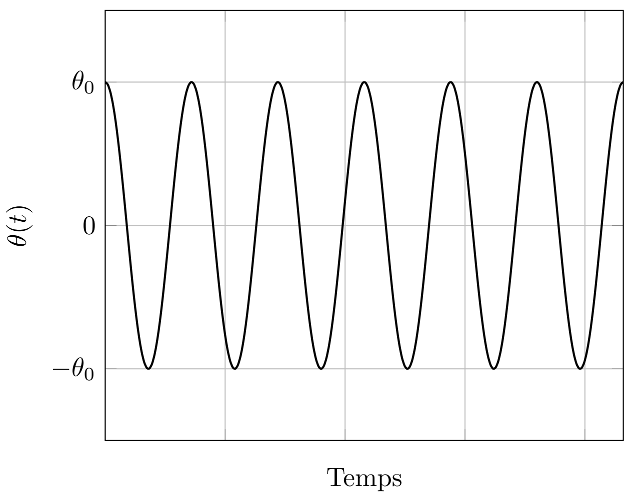
En divisant par $ma^2\dot{\theta}$ on obtient l'équation $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin(\theta) = 0}$.

11. On peut supposer que $\theta \ll 1$ et faire l'approximation $\sin(\theta) \approx \theta$ pour obtenir l'équation $\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution générale est

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{7}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. En utilisant les conditions initiales, on trouve $A = \theta_0$ et $\varphi = 0$. Soit finalement $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$

12. On obtient l'allure suivante :



13. Dans ces conditions, la période des oscillations est $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}}$

2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

14. La somme des forces qui s'exercent sur le passager est :

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = mg\vec{e}_x + \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y + \vec{N} = m\underbrace{\left(g\vec{e}_x + \frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_y\right)}_{\vec{g}_{\text{eff}}} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}} \tag{8}$$

On a $\boxed{\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = \sqrt{g^2 + \frac{v_0^4}{R_0^2}}}$.

15. On a $\tan(\alpha) = \frac{v_0^2}{R_0 g}$ et donc $\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{v_0^2}{R_0 g}\right) \approx 51°}$ et $\boxed{\|\vec{g}_{\text{eff}}\| \approx 16\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$.

16. On se retrouve dans la même situation que celle de la partie 2.1. Il faut juste remplacer $\vec{g}$ par $\vec{g}_{\text{eff}}$. Le passager aura un mouvement d'oscillation autour de $\vec{g}_{\text{eff}}$. Comme l'angle initial vaut $\alpha = 51°$, le passager oscillera entre des angles de 0° et 102°. Il faudra donc concevoir la gouttière de telle sorte qu'elle "monte" au dessus d'un angle de 102°.

Exercice 2 : Tube cathodique

1 Canon à électrons

1. L'intensité du champ électrique qui règne entre la cathode et l'anode est $E = \frac{V_0}{D}$, où D est la longueur du canon à électrons. On estime que D est de l'ordre de $10\,\mathrm{cm}$ (la longueur est sûrement plus petite que ça, mais ça nous donnera une limite inférieure pour la force de Lorentz).
La norme de la force de Lorentz est donc de l'ordre de $F_L = eE = \frac{eV_0}{D} \approx 3 \times 10^{-15}\,\mathrm{N}$.
La norme du poids est de l'ordre de $P = mg \approx 9 \times 10^{-30}\,\mathrm{N}$.
On a donc $\boxed{\frac{P}{F_L} \approx 3 \times 10^{-15} \ll 1}$ et on en conclut que le poids est négligeable devant la force de Lorentz.
2. On applique le théorème de l'énergie mécanique aux électrons dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen. On note C le point de départ sur la cathode et A le point d'arrivée sur l'anode.
Comme on néglige tous les frottements, le mouvement de électrons est conservatif et leur énergie mécanique est constante. Le poids des électrons étant négligeable devant la force de Lorentz, leur énergie potentielle est $E_p = -eV$, où V est le potentiel élecrostatique. On a donc
$$\boxed{E_m(C) = E_m(A) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - eV_0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}} \tag{1}$$
3. Numériquement, on trouve $\boxed{v_0 = 2{,}7 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$

2 Dispositif de déviation du faisceau

4. L'ordre de grandeur de la force de Lorentz est $F_L = eBv_0 \approx 8 \times 10^{-15}\,\mathrm{N}$. On a déjà déterminé l'ordre de grandeur du poids à la question 1 $P \approx 9 \times 10^{-30}\,\mathrm{N}$. On a alors $\boxed{\frac{P}{F_L} \approx 10^{-15} \ll 1}$. Et le poids est bien négligeable.
5. On applique le PFD à l'électron dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. D'après la question précédente, il n'y a que la force de Lorentz (composante magnétique) à prendre en compte, et on obtient :
$$m\vec{a} = \vec{F}_L = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{2}$$
On se place dans un système de coordonnées cartésiennes, et on a alors $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$ et $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$. On peut alors exprimer le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ Comme
$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_y\dot{z} \\ B_x\dot{z} \\ B_y\dot{x} - B_x\dot{y} \end{pmatrix} \tag{3}$$
On obtient donc les équations du mouvement
$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = \frac{eB_y}{m}\dot{z} \\ \ddot{y} = \frac{-eB_x}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{e}{m}\left(B_x\dot{y} - B_y\dot{x}\right) \end{cases}} \tag{4}$$
6. La force de Lorentz étant toujours perpendiculaire à $\vec{v}$, elle ne travaille pas et sa puissance est nulle. Comme il n'y a pas d'autre force appliquée au point M, le théorème de l'énergie cinétique donne $\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = P(\vec{F}_L) = 0}$, donc l'énergie cinétique est constante et la vitesse de l'électron est aussi constante.
7. Si les composantes v_x et v_y sont très faibles devant v_z, alors la norme de la vitesse de l'électron est $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \approx v_z$. Comme on a montré que la norme de $\vec{v}$ est constante, elle vaut v_0 et on trouve $\boxed{v_z = v_0}$.
8. Avec cette approximation, les équations du mouvement deviennent
$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = \frac{eB_y}{m}v_0 \\ \ddot{y} = \frac{-eB_x}{m}v_0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}} \tag{5}$$

9. On intègre les équations du mouvement une première fois pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{eB_y}{m} v_0 t + K_1 \\ \dot{y} = \frac{-eB_x}{m} v_0 t + K_2 \\ \dot{z} = K_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{eB_y}{m} v_0 t \\ \dot{y} = \frac{-eB_x}{m} v_0 t \\ \dot{z} = v_0 \end{cases} \tag{6}$$

On a utilisé les conditions initiales : $\dot{x}(0) = K_1 = 0$, $\dot{y}(0) = K_2 = 0$ et $\dot{z}(0) = K_3 = v_0$.
On les intègre une seconde fois pour obtenir

$$\begin{cases} x(t) = \frac{eB_y}{2m} v_0 t^2 + K_1' \\ y(t) = \frac{-eB_x}{2m} v_0 t^2 + K_2' \\ z(t) = v_0 t + K_3' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{eB_y}{2m} v_0 t^2 \\ y(t) = \frac{-eB_x}{2m} v_0 t^2 \\ z(t) = v_0 t \end{cases} \tag{7}$$

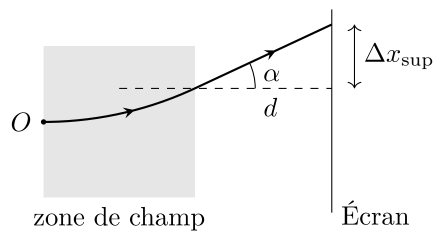
où on a utilisé les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.
On détermine le temps t_f auquel l'électron sort de la zone de déviation avec $z(t_f) = \ell \Leftrightarrow t_f = \ell/v_0$. Et on injecte cette valeur dans les expressions des composantes de la vitesse. On obtient :

$$\boxed{v_{xf} = \frac{eB_y \ell}{m} \quad \text{et} \quad v_{yf} = \frac{-eB_x \ell}{m}} \tag{8}$$

On trouve les déviations transversales de la même manière en prenant $t = t_f$ dans les équations horaires du mouvement, on trouve :

$$\boxed{\Delta x_{\text{mag}} = \frac{eB_y \ell^2}{2mv_0} \quad \text{et} \quad \Delta y_{\text{mag}} = \frac{-eB_x \ell^2}{2mv_0}} \tag{9}$$

10. Pour déterminer la déviation maximale totale suivant, par exemple, l'axe x, il faut déterminer la distance supplémentaire Δx_{sup} parcourue (en ligne droite) dans la zone où le champ magnétique est nul. On commence par faire un schéma !



On a alors $\Delta x_{\text{sup}} = d\tan(\alpha)$, et $\tan(\alpha) = \frac{v_{xf}}{v_z} = \frac{v_{xf}}{v_0}$. On a donc finalement
$\Delta x_{\text{tot}} = \Delta x_{\text{mag}} + \Delta x_{\text{sup}} = \frac{eB_y \ell^2}{2mv_0} + \frac{eB_y \ell d}{v_0 m} = \frac{eB_y \ell}{v_0 m}\left(\frac{\ell}{2} + d\right)$. Comme on veut déterminer B_y, on a :

$$\boxed{B_y = \frac{v_0 m \Delta x}{e\ell\left(\frac{\ell}{2} + d\right)} \approx 6{,}0 \times 10^{-3}\,\text{T}} \tag{10}$$

11. On a vu en cours que la trajectoire dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à la vitesse initiale est circulaire.
12. Selon l'axe x, on a l'équation différentielle suivante : $\dot{v}_x = \frac{eB_y}{m}\dot{z}$. On peut intégrer cette équation entre 0 et t_f et on obtient

$$\boxed{\int_0^{t_f} \dot{v}_x \mathrm{d}t = \frac{eB_y}{m}\int_0^{t_f} \dot{z}\mathrm{d}t \Leftrightarrow v_{xf} = \frac{eB_y}{m} z(t_f) = \frac{eB_y \ell}{m}} \tag{11}$$

De la même manière, on montre que

$$\boxed{v_{yf} = -\frac{eB_x \ell}{m}} \tag{12}$$

13. En intégrant les deux équations sur x et y, on trouve

$$\dot{x}(t) = \frac{eB_y}{m} z \quad \text{et} \quad \dot{y} = -\frac{eB_x}{m} z \tag{13}$$

On remplace $\dot{x}$ et $\dot{y}$ par ces expressions dans l'équation sur z et on obtient :

$$\boxed{\ddot{z} = \frac{e}{m}\left(-\frac{eB_x^2}{m}z - \frac{eB_y^2}{m}z\right) = -\frac{e^2}{m^2}\left(B_x^2 + B_y^2\right) z \Leftrightarrow \ddot{z} + \omega_c^2 z = 0} \tag{14}$$

14. L'équation précédente est celle d'un oscillateur harmonique dont la solution est $z(t) = A\sin(\omega_c t + \varphi)$. On trouve A et φ en utilisant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$. On a alors $\varphi = 0$ et $A = v_0/\omega_c$ et $\boxed{z(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)}$.

Le temps de vol Δt dans la zone de champ magnétique non nul est donc solution de $z(\Delta t) = \ell$ soit

$$\boxed{\frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c \Delta t) = \ell \Leftrightarrow \sin(\omega_c \Delta t) = \frac{\ell\omega_c}{v_0}} \tag{15}$$

15. Pour déterminer v_{zf} on peut, par exemple, utiliser les expressions de v_{xf} et v_{yf} déterminées à la question 12 avec le fait que la norme de la vitesse est constante lors de la déviation. On a donc

$$v_0^2 = v_{xf}^2 + v_{yf}^2 + v_{zf}^2 = \frac{e^2\ell^2}{m^2}\left(B_x^2 + B_y^2\right) + v_{zf}^2 = \ell^2\omega_c^2 + v_{zf}^2 \tag{16}$$

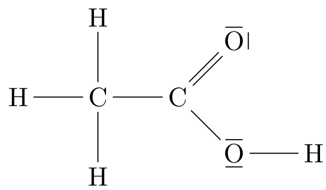
soit

$$\boxed{v_{zf} = \sqrt{v_0^2 - \ell^2\omega_c^2} \approx 2{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \tag{17}$$

On a $v_{zf}/v_0 \approx 0{,}96$ donc l'approximation faite amène une erreur de l'ordre de 4 %.

Exercice 3 : Dosage d'un mélange d'acides

1. On a les configurations électroniques suivantes :
   - $[_1\mathrm{H}] = \underbrace{1s^2}_{\text{valence}}$
   - $[_6\mathrm{C}] = 1s^2\,\underbrace{2s^2 2p^2}_{\text{valence}}$
   - $[_8\mathrm{O}] = 1s^2\,\underbrace{2s^2 2p^4}_{\text{valence}}$
2. La molécule d'acide éthanoïque (CH_2COOH) possède $2\times4+2\times6+4 = 24$ électrons de valence, donc 12 doublets. On peut proposer la représentation de Lewis suivante :



3. Partie (AB)
   (a) Dans cette partie, on dose les ions H_3O^+ par les ions HO^-. La réaction de dosage est

$$\boxed{\mathrm{H_3O^+\,(aq) + HO^-\,(aq) \rightleftharpoons 2\,H_2O\,(\ell)} \qquad K = \frac{1}{K_e} = 10^{14}} \tag{1}$$

(b) Au point A Les ions majoritaires sont $\boxed{H_3O^+ \text{ et } Cl^-}$ (Acide chlorhydrique). De A à B, les ions H_3O^+ disparaissent, et des ions Na^+ apparaissent en solution. Comme la condictivité ionique molaire des H_3O^+ qui disparaissent est supérieure à la conductivité ionique molaire des Na^+ qui apparaissent, la conductivité totale de la solution diminue.

(c) La conductivité de la solution est

$$\boxed{\sigma = \lambda_{H_3O^+}[H_3O^+] + \lambda_{Cl^-}[Cl^-] + \lambda_{Na^+}[Na^+]} \tag{2}$$

(d) La quantité de matière de Cl^- est constante au cours du dosage et égale à n_0, on a donc $[Cl^-] = \frac{n_0}{V_T}$. La quantité de matière de H_3O^+ est égale à la quantité de matière initiale (n_0) moins la quantité de matière qui a réagi (C_bV_b). La concentration de H_3O^+ est donc $\boxed{[H_3O^+] = \frac{n_0 - C_bV_b}{V_T}}$. Enfin, la quantité de Na^+ en solution est égale à la quantité de matière de soude versée, soit $\boxed{[Na^+] = \frac{C_bV_b}{V_T}}$

(e) On considère que V_T est une constante, on peut exprimer la conductivité en fonction du volume de base V_b versé

$$\sigma = \lambda_{H_3O^+}\frac{n_0 - C_bV_b}{V_T} + \lambda_{Cl^-}\frac{n_0}{V_T} + \lambda_{Na^+}\frac{C_bV_b}{V_T} \tag{3}$$

$$= \frac{n_0}{V_T}(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{Cl^-}) - (\lambda_{H_3O^+} - \lambda_{Na^+})\frac{C_b}{V_T}V_b \tag{4}$$

On retrouve bien l'équation d'une droite de pente négative $(-(\lambda_{H_3O^+} - \lambda_{Na^+})\frac{C_b}{V_T})$

4. Partie (BC)

(a) Dans cette partie, on dose l'acide éthanoïque. La réaction de dosage qui se produit est

$$\boxed{HO^- \text{ (aq)} + CH_3COOH \text{ (aq)} \rightleftharpoons CH_3COO^- \text{ (aq)} + H_2O(\ell)} \tag{5}$$

Sa constante d'équilibre est $\boxed{K = K_a/K_e = 10^{9,2}}$

(b) Au point B, les ions majoritaires sont les ions $\boxed{Cl^-}$. De B à C, $\boxed{\text{des ions } CH_3COO^- \text{ et } Na^+ \text{ apparaissent}}$, il n'y a pas d'ions qui disparaissent. La conductivité de la solution augmente car il y a de plus en plus d'ions en solution.

5. Le point C est le $\boxed{\text{point d'équivalence}}$ où tous les CH_3COOH ont été consommés. Après le point C, les HO^- introduits ne sont plus consommés, ils s'accumulent en solution et font augmenter la conductivité. La pente de CD est supérieure à celle de BC car la conductivité ionique molaire des ions HO^- est supérieure à celles des ions CH_3COO^-.

6. Le volume de solution titrante versée pour doser l'acide éthanoïque est le volume versé entre les points B et C. On a donc $V_{eq} = 10{,}8\,\mathrm{m}\ell$. À l'équivalence, on a alors $C_bV_{eq} = C_MV_0$. Et finalement, $\boxed{C_M = \frac{C_bV_{eq}}{V_0} = 5{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}}$

7. Pour former la solution M, on a prélevé un volume V_1 de vinaigre que l'on a dilué dans $V_2 = 1\,\ell$ de solution. On a donc $C_VV_1 = C_MV_2$, soit $\boxed{C_V = C_M\frac{V_2}{V_1} = 1{,}08\,\mathrm{mol}\,\ell^{-1}}$

8. Pour déterminer le pH d'un vinaigre, on commence par établir un tableau d'avancement volumique :

	CH_3COOH(aq)	+	$H_2O(\ell)$	$\rightleftharpoons$	CH_3COO^- (aq)	+	H_3O^+ (aq)
État initial	C_0		excès		0		0
État final	$C_0 - \xi_{vf}$		excès		ξ_{vf}		ξ_{vf}

Puis on écrit la constante d'équilibre comme $K_a = \frac{\xi_{vf}^2}{c^\circ(C_0 - \xi_{vf})}$. On résout cette équation pour déterminer ξ_{vf} et on trouve finalement $\boxed{\mathrm{pH} = -\log\left(\frac{\xi_{vf}}{c^\circ}\right) = 2{,}4}$