DS1 : Optique géométrique

Exercice 1 : Analyse dimensionnelle

1. Le principe fondamental de la dynamique nous permet de trouver la dimension de la tension de la corde : $[F] = [ma] = MLT^{-2}$. On a alors l'équation aux dimensions : $LT^{-1} = (ML^{-1})^{\alpha} L^{\beta} (MLT^{-2})^{\gamma}$. Ce qui mêne au système :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -2\gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = 0 \end{cases} \tag{1}$$

et finalement la célérité de l'onde s'exprime comme

$$\boxed{c = k\sqrt{\frac{F}{\mu}}} \tag{2}$$

2. On remarque que la célérité ne dépend pas de λ. La propagation n'est donc pas dispersive.
3. On a cette fois l'équation aux dimensions $LT^{-1} = (ML^{-3})^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta}L^{\gamma}$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3}$$

et finalement la célérité de l'onde s'exprime comme

$$\boxed{c = k\sqrt{g\lambda}} \tag{4}$$

4. Cette fois, la célérité dépend de la longueur d'onde λ de l'onde, la propagation des vagues est dispersive.

Exercice 2 : Autour du prisme

1 Double prisme

1. — **réflexion :** Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence et $i = r$ (angle d'incidence=angle réflechi)
   — **réfraction :** Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ (faire un petit schéma pour indiquer ce que sont i_1, i_2, n_1 et n_2)
2. L'angle d'incidence limite i_{lim} au delà duquel il y a réflexion totale est celui qui correspond à $i_2 = \pi/2$, soit dans le cas limite $n_{\text{verre}} \sin(i_{\text{lim}}) = n_{\text{air}}$ d'où

$$\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right) \approx 42°} \tag{1}$$

3. Dans le cas des rayons réfléchis la déviation totale est $(\pi - 2r) + (\pi - 2r') = 2\pi - 2(r + r')$ et pour revenir pile en arrière, elle doit valoir exactement π

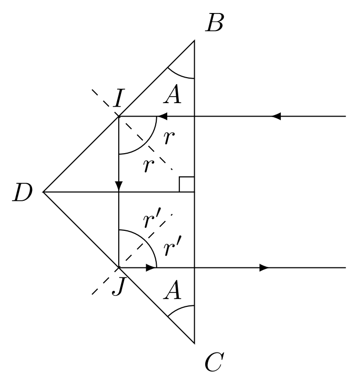

FIGURE 1 – Deux prismes identiques accolés.

d'où $2(r+r') = \pi$. Dans IDJ, $\frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - r' + \pi - 2A = \pi \Rightarrow r + r' = \pi - 2A$. D'où en substituant dans la première équation $2\pi - 4A = \pi$. Donc finalement

$$\boxed{A = \frac{\pi}{4} = r = r'.} \tag{2}$$

De plus, on a bien $r > i_{\text{lim}} = 42°$ et on a donc effectivement des réflexions totales.

4. On calcule le nouvel angle limite de réflexion totale. Pour $n_{\text{eau}} = 1{,}33$, on obtient $i_{\text{lim}} = 62°$. Il y a donc réfraction du faisceau et plus de réflexion totale. (La réflexion partielle existe, mais seule une petite partie de l'énergie sera récupérée)

2 Prisme présent dans un vidéoprojecteur

5. L'angle de réflexion sur le miroir est α, donc l'angle d'incidence sur le miroir est aussi α et donc θ_i vaut 2α (angles alternes-internes). D'après les lois de Snell-Descartes, $n\sin(\theta_a) = \sin(\theta_i)$ d'où

$$\boxed{\theta_a = \arcsin\left(\frac{\sin(2\alpha)}{n}\right) = 0{,}23\,\text{rad} = 13°.} \tag{3}$$

6. Dans le triangle BIJ, la somme des angles donne $\theta_a + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2} - i = \pi$. Donc

$$\boxed{\theta_a = i - \beta.} \tag{4}$$

7. Pour qu'il y ait réflexion, il faut que $i > i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $\theta_a + \beta > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ et enfin

$$\boxed{\beta > \beta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - \theta_a = 29°} \tag{5}$$

8. Pour que le faisceau réfléchi traverse l'interface BC, il ne faut pas avoir réflexion totale, il faut donc que l'angle d'incidence (qui est β) au niveau de cette face soit inférieur à

$$\boxed{\beta_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 42°} \tag{6}$$

9. Dans le triangle IHC $\pi/2 - i + \delta = \pi/2$ donc

$$\boxed{\delta = i = 45° \quad \text{et} \quad \beta = i - \theta_a = 32°} \tag{7}$$

10. Ces aberrations sont appelées *aberrations chromatiques* et sont dues au caractère dispersif du prisme.

Exercice 3 : MICROSCOPE OPTIQUE

1. La formule de conjugaison de Descartes est :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}} \tag{1}$$

2. On a $\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' + D_0 - f_2'$. Soit

$$\boxed{\Delta = D_0 - (f_1' + f_2') = 110\,\text{mm}} \tag{2}$$

3. Schéma :

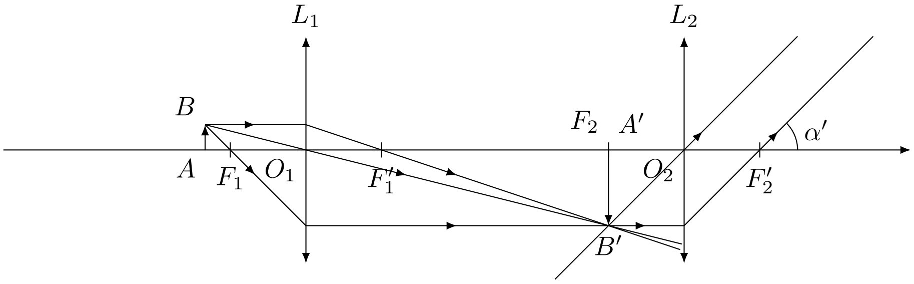

Figure 1 – Représentation d'un objet et de son image par le microscope, avec certains rayons lumineux.

On commence par placer l'image intermédiaire $A'B'$ dans le plan focal objet de L_2 puis on détermine la position de l'objet en traçant les rayons *à l'envers*. L'image par le microscope se trouve à l'infini.

4. On cherche la distance d (donc une grandeur positive). On sait que $\overline{O_1A} = -d$. Étant donné qu'on connait la position de l'image intermédiaire, les relations de conjugaison appliquées à la lentille L_1 vont nous permettre de calculer la position de l'objet :

$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} \quad \text{avec} \quad \overline{O_1A} = -d \quad \text{et} \quad \overline{O_1A'} = f_1' + \Delta \tag{3}$$

On obtient finalement

$$\boxed{d = \frac{f_1'(f_1' + \Delta)}{\Delta} \approx 5{,}2\,\text{mm}} \tag{4}$$

5. On a :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1' + \Delta}{-d} = -\frac{(f_1' + \Delta)\Delta}{f_1'(f_1' + \Delta)} \tag{5}$$

Soit finalement

$$\boxed{\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'} = -22} \tag{6}$$

Le résultat est cohérent avec le fait que l'image est renversée et agrandie.

6. L'image intermédiaire étant positionnée dans le plan focal objet de la lentille L_2, l'image finale sera renvoyée à l'infini, ce qui est idéal pour une observation à l'œil (normal) qui n'a alors pas besoin d'accommoder.
7. La distance la plus courte garantissant une vision nette pour un œil sain est $D_m = 25\,\text{cm}$. Le point correspondant s'appelle le *punctum proximum*.
8. Pour calculer α, on suppose que l'œil est positionné à 25 cm de l'objet, ce qui est la position la plus proche possible permettant de le voir net et donc la position garantissant de voir les graduations selon le plus grand angle possible.

On obtient ainsi $\tan(\alpha) = \dfrac{AB}{D_m} \approx \alpha$. On calcule maintenant α'. Sur la figure 1, on constate que le triangle $O_2A'B'$ est rectangle et donne :

$$\tan(\alpha') = \frac{A'B'}{f_2'} \simeq \alpha' \tag{7}$$

Dans les deux cas on a utilisé l'approximation des petits angles (conditions de Gauss).

On peut calculer G :

$$G = \left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right| = \left|\frac{A'B'D_m}{f_2'AB}\right| = \left|\frac{A'B'}{AB}\right|\frac{D_m}{f_2'} \tag{8}$$

Or, $\dfrac{A'B'}{AB} = \gamma_1 = -\dfrac{\Delta}{f_1'}$, d'où :

$$\boxed{G = \frac{D_m\Delta}{f_1'f_2'} = 1100} \tag{9}$$

9. Lors d'une observation à l'œil nu, on voit une graduation sous un angle $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ rad. Cet angle est plus petit que la limite de résolution de l'œil qui est d'environ 3×10^{-4} rad, on ne peut donc pas distinguer les graduations à l'œil nu.

Au microscope, l'angle sous lequel est vu les graduations est donné par $\alpha' = G\alpha \approx 2 \times 10^{-2}$ rad, bien plus grand que la limite de résolution de l'œil. On pourra donc distinguer ces graduations au microscope.