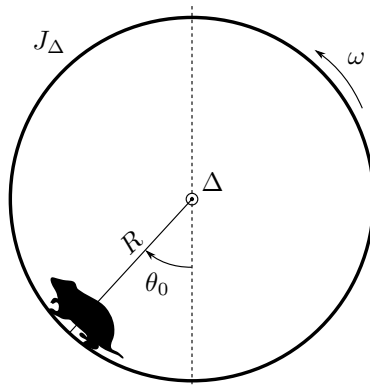


DM8 : Rotation solide et chimie

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

Exercice 1 : LE HAMSTER

Pour permettre à un hamster domestique de faire de l'exercice, on place dans sa cage une roue que le hamster peut faire tourner en courant. La roue a un rayon R et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J_{\Delta} = MR^2$ où M est la masse de la roue. La masse du hamster est notée m .



On commence par négliger tous les frottements. On considère également que lors de sa course, le hamster se trouve à une position constante repérée par un angle θ_0 par rapport à la verticale.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la roue. Faire un schéma.
2. Quel est le moment cinétique L_{Δ} de la roue du hamster en fonction de ω ?
3. À $t = 0$ le hamster commence à courir. Donner l'expression de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de R , θ_0 , m et J_{Δ} .
4. Donner l'évolution temporelle $\omega(t)$ de la vitesse angulaire de rotation de la roue.
5. Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ de la roue en fonction du temps.
6. Un hamster court en moyenne à environ $v_0 = 3 \text{ km/h}$. Calculer le temps qu'il mettra avant d'atteindre sa vitesse de croisière. On donne $R = 10 \text{ cm}$, $m = 100 \text{ g}$, $\theta_0 = 30^\circ$ et $M = 200 \text{ g}$.
7. Calculer l'énergie cinétique de la roue lorsque le hamster a atteint cette vitesse.
8. Expliquer pourquoi lorsque la vitesse de course du hamster est constante on a nécessairement $\theta_0 = 0$.

On prend maintenant en compte les frottements entre la roue et son axe de rotation, ceux-ci produisent un couple résistant dont le moment par rapport à l'axe Δ est Γ_{Δ} .

9. Montrer que la nouvelle accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mRg \sin \theta_0 - \Gamma_{\Delta}}{J_{\Delta}}$$

10. Montrer que dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante, l'angle θ_0 n'est plus nul, donner son expression.

On se pose le problème suivant : **Comment faire subir un looping au Hamster ?** On part d'une situation où le Hamster court dans la roue à sa vitesse de croisière de v_0 , avec un angle $\theta_0 = 0$. Subitement il décide de s'arrêter de courir, on considère qu'il ne glisse alors pas par rapport à la roue qui l'entraîne vers la droite (et le haut). L'étude qui suit est faite dans le référentiel du laboratoire, on néglige à nouveau les frottements entre la roue et son axe de rotation.

11. Exprimer la vitesse de rotation ω_0 de la roue lorsque le hamster court.
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, quelle est son énergie cinétique ? potentielle ? Quelle est l'énergie cinétique de rotation de la roue ? En déduire l'énergie mécanique totale du système {roue+hamster}. On donnera les expressions littérales sans utiliser les valeurs numériques fournies.

13. On considère que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste la même lorsque le hamster arrête de courir. Montrer que la vitesse de rotation ω_1 de la roue juste après que le hamster ait arrêté de courir s'exprime comme :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{J_\Delta}{J_\Delta + mR^2}}$$

14. Justifier pourquoi on peut considérer que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste constante au cours du temps. Exprimer cette énergie mécanique en fonction de la vitesse de rotation ω et de l'angle θ dont la roue a tourné.
15. En déduire l'expression de la vitesse de rotation ω de la roue en fonction de l'angle θ dont elle a tourné.
16. Lorsque la roue a tourné de π , le hamster se trouve au point le plus haut. Faire le bilan des forces subies par le hamster à cet instant.
17. Montrer que l'accélération normale subie par le hamster à cet instant peut s'écrire :

$$\vec{a} = -R \left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1 - \cos \theta)}{J_\Delta + mR^2} \right) \vec{e}_r$$

18. Le hamster reste "collé" à la roue et peut faire un looping si la composante normale de la réaction de la roue sur le hamster ne s'annule pas. Avec les valeurs numériques données précédemment, le hamster va-t-il faire un looping ?
19. Comment faudrait-il modifier sa roue pour que le hamster fasse un looping lorsqu'il s'arrête de courir ?

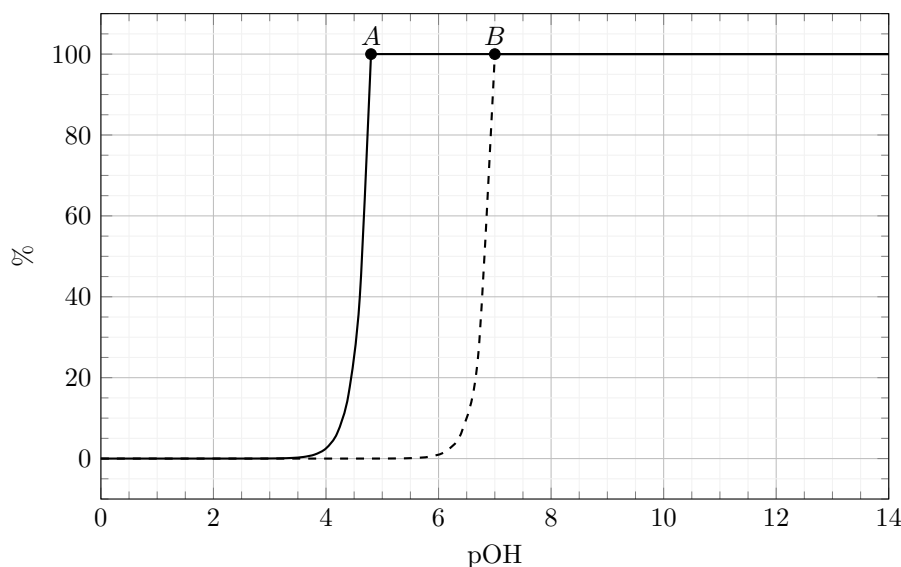
Exercice 2 : AUTOUR DU MAGNÉSIUM

- Donner la configuration électronique fondamentale de l'atome de magnésium ($_{12}\text{Mg}$) ainsi que de l'ion Mg^{2+} .
- À quelle colonne du tableau périodique, le magnésium appartient-il ? Justifier la réponse.

En présence d'ions hydroxydes, les ions magnésium Mg^{2+} donnent un précipité blanc ($\text{Mg}(\text{OH})_2(\text{s})$ de produit de solubilité $K_{s1} = 10^{-10,6}$) et les ions Fe^{2+} un précipité vert ($\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})$ produit de solubilité K_{s2}). Lorsqu'on ajoute goutte à goutte des ions Fe^{2+} dans un tube à essai contenant de l'hydroxyde de magnésium, le précipité prend une teinte verte dès les premières gouttes.

- Donner le bilan de la réaction (1) traduisant cette observation.
- Que peut-on en conclure quant au produit de solubilité K_{s2} de $\text{Fe}(\text{OH})_2$ par rapport à K_{s1} ?

On ajoute une solution d'ions hydroxydes à une solution équimolaire en ions Mg^{2+} et Fe^{2+} toutes deux à $0,1 \text{ mol } \ell^{-1}$. On représente ci-dessous les pourcentages des cations métalliques présents dans la solution en fonction de $\text{pOH} = -\log [\text{HO}^-]$.



- Identifier les 2 courbes tracées, que représentent les 2 points anguleux A et B ?
- Déduire du tracé les produits de solubilité de $\text{Mg}(\text{OH})_2$ (K_{s1}) et de $\text{Fe}(\text{OH})_2$ (K_{s2}).
- En déduire la constante K_1 de la réaction (1).

Les ions magnésium Mg^{2+} , forment un complexe soluble MgY^{2-} avec l'ion éthylènediamminetetraacétate (EDTA) noté Y^{4-} de constante de formation $\beta = 10^{8,8}$.

On introduit 10^{-2} mol d'hydroxyde de magnésium dans 100 ml d'eau. On ajoute ensuite progressivement une solution très concentrée de Na_4Y , sel entièrement dissocié en ions. On observe la disparition totale du précipité.

8. Donner l'équation bilan de la réaction de dissolution de ce précipité.
9. Calculer sa constante d'équilibre K_2 . Quelle quantité minimum d'ions EDTA a-t-on introduite pour observer cette disparition ?

Une teneur élevée en phosphore a des conséquences écologiques néfastes comme l'eutrophisation des cours d'eau ou des lacs. Pour éviter cet inconvénient, différents procédés sont mis en œuvre pour réduire la teneur en phosphore dans les eaux à la sortie des stations d'épuration. Un procédé envisageable consiste à précipiter le phosphore sous forme de struvite de formule $\text{MgPO}_4\text{NH}_4(\text{s})$. L'équation bilan de la réaction de précipitation est :



le produit de solubilité de $\text{MgPO}_4\text{NH}_4(\text{s})$ est $K_{s3} = 10^{-11}$.

10. Écrire l'expression du produit de solubilité de la struvite.
11. Présenter le domaine de prédominance des diverses formes du phosphore (H_3PO_4 , H_2PO_4^- , HPO_4^{2-} , PO_4^{3-}) en phase aqueuse en fonction du pH. On donne les constantes d'acidité successives de l'acide phosphorique : $K_{a1} = 10^{-2,1}$, $K_{a2} = 10^{-7,2}$, $K_{a3} = 10^{-12,4}$.
12. Présenter le domaine de prédominance des deux formes de l'azote (NH_3 , NH_4^+) en phase aqueuse en fonction du pH. La constante d'acidité du couple ($\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$) est $K_{a4} = 10^{-9,25}$.

Un effluent contient $c_P = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol } \ell^{-1}$ de phosphore (somme des concentrations des diverses formes du phosphore en solution aqueuse), et $c_N = 15 \cdot 10^{-3} \text{ mol } \ell^{-1}$ d'azote ammoniacal (somme des concentrations des deux formes de l'azote). Le pH de cet effluent est maintenu égal à 9,5.

13. Calculer sa concentration molaire en PO_4^{3-} .
14. Calculer sa concentration molaire en NH_4^+ .
15. Quelle masse minimale, exprimée en kg, de chlorure de magnésium (MgCl_2 , sel totalement soluble dans les conditions du traitement) doit-on introduire dans 5 m^3 d'effluent pour :
 - Faire apparaître le précipité de struvite ?
 - Avoir une concentration finale en phosphore de l'effluent égale à 10 % de sa concentration initiale ? Vérifier que dans ces conditions, l'hydroxyde de magnésium ($\text{Mg}(\text{OH})_2$) ne se forme pas.

On négligera la variation de volume liée à l'ajout de chlorure de magnésium. On donne la masse molaire de MgCl_2 : $M = 95,3 \text{ g mol}^{-1}$.