

# Chapitre 5

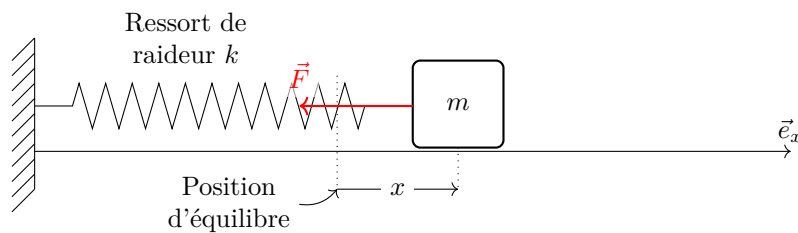
## Oscillateurs

### 1 L'oscillateur harmonique

#### 1.a Position du problème

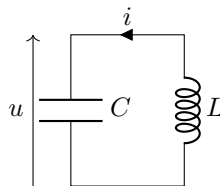
On retrouve l'oscillateur harmonique dans une grande diversité de domaines de la physique, nous allons en étudier deux exemples caractéristiques.

##### Oscillateur mécanique



On accroche une masse  $m$  à un ressort de raideur  $k$ . La masse se déplace sans frottement sur un plan horizontal. On note  $x$  l'allongement du ressort par rapport à la position d'équilibre. On cherche à déterminer le mouvement de la masse, donc l'expression de  $x(t)$ .

##### Oscillateur électrique



On place une bobine et un condensateur en parallèle, le condensateur étant initialement chargé. On cherche à déterminer l'équation différentielle de la tension aux bornes de  $C$ .

#### 1.b Équation différentielle

##### Oscillateur mécanique

La masse subit une force  $\vec{F} = -k \cdot x \vec{e}_x$ . Le principe fondamental de la dynamique appliqué dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen donne :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -kx\vec{e}_x = m\ddot{x}\vec{e}_x \quad (5.1)$$

en projetant sur l'axe  $\vec{e}_x$ , on obtient l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la *pulsation propre* du système, on obtient l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.2)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique lorsque  $x$  est le déplacement par rapport à la position d'équilibre. (sinon on peut avoir un second membre constant)

### Oscillateur électrique

On peut écrire les équations suivantes :

- Aux bornes de  $L$  :  $u = -L \frac{di}{dt}$
- aux bornes de  $C$  :  $i = C \frac{du}{dt}$

En combinant les deux équations, on obtient  $u = -LC \frac{d^2 u}{dt^2}$ , soit en notant  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad (5.3)$$

On remarque que l'on obtient exactement la même équation que dans le cas de l'oscillateur mécanique. C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

### 1.c Résolution

Nous allons résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique en nous référant à l'oscillateur électrique, mais il faut garder à l'esprit que la méthode est strictement identique en ce qui concerne l'oscillateur mécanique.

La solution de l'équation différentielle  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$  est de la forme :

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.4)$$

où l'amplitude  $A$  et la phase à l'origine  $\varphi$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales  $u(t=0)$  et  $\frac{du}{dt}(t=0)$ .

**Cas simple :** à  $t=0$  le condensateur est chargé sous une tension  $u(0) = u_0$  et l'intensité du courant qui circule dans le circuit est nulle  $i(0) = 0$ .

La solution de l'équation différentielle est  $u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$  et on a  $\frac{du}{dt}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . L'intensité nulle à l'origine impose

$$i(0) = C \frac{du}{dt}(0) = 0 \Leftrightarrow CA\omega_0 \cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 + n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.5)$$

donc  $u(t) = A \sin(\omega_0 t + \pi/2) = A \cos(\omega_0 t)$

La charge du condensateur à l'origine impose :

$$u(0) = u_0 = A \cos(0) = A \quad \text{donc} \quad A = u_0 \quad (5.6)$$

finalement

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \quad (5.7)$$

**Cas général :**  $u(0) = u_0$  et  $i(0) = i_0$  (un courant circule dans le circuit à l'instant initial).

Les conditions initiales deviennent :

$$u(0) = A \sin(\varphi) = u_0 \quad \text{et} \quad C \frac{du}{dt}(0) = AC\omega_0 \cos(\varphi) = i_0 \quad (5.8)$$

Pour trouver  $A$ , on multiplie la première équation par  $C\omega_0$  et on utilise la relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  pour trouver

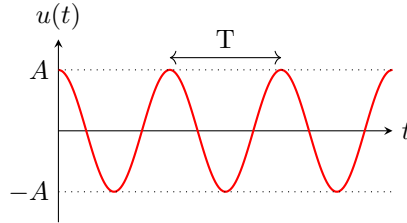
$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{i_0}{C\omega_0}\right)^2} \quad (5.9)$$

En divisant la première équation par la seconde, on obtient :

$$\tan(\varphi) = \frac{u_0 C \omega_0}{i_0} \quad \text{donc} \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_0 C \omega_0}{i_0}\right) & \text{si } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \pi + \arctan\left(\frac{u_0 C \omega_0}{i_0}\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{donc si } i_0 > 0 \quad (5.10)$$

### 1.d Évolution du système

La tension aux bornes du condensateur est donnée par :  $u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . La tension oscille autour de sa valeur d'équilibre (nulle) à la *pulsation*  $\omega_0$ .



La *période*  $T$  des oscillations est  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{k}}$ . La *fréquence* est  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .  $\varphi$  est la *phase* à l'origine des oscillations.

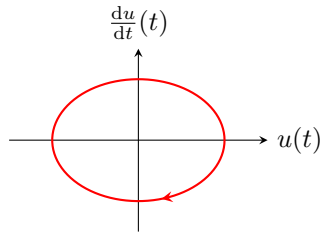
Le **portrait de phase** du système correspond au graphique représentant l'ensemble des points  $(u(t), \frac{du}{dt}(t))$  parcourus par le système au cours de son évolution.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a :

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.11)$$

$$\frac{du}{dt}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.12)$$

le portrait de phase est une ellipse :



L'énergie totale stockée dans le circuit :

$$E = E_C + E_L = \underbrace{\frac{1}{2}Cu^2}_{E_C} + \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{E_L}$$

avec  $i = C \frac{du}{dt} = AC\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  on obtient :

$$E = \frac{1}{2}L\omega_0^2 C^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}CA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}CA^2 \underbrace{(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi))}_{=1} = \frac{1}{2}CA^2$$

En reprenant l'expression de  $A$  obtenue en (5.9), on montre facilement que

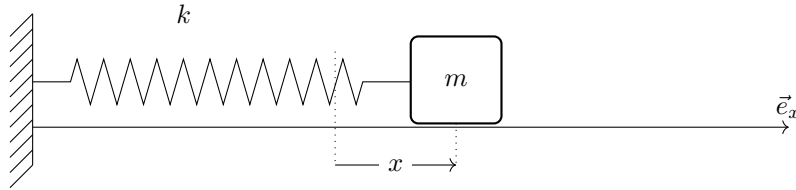
$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}Cu_0^2 + \frac{1}{2}Li_0^2 = E(0) = \text{constante.} \quad (5.13)$$

Comme on pouvait s'y attendre, l'énergie du système reste constante au cours du temps.

## 2 Oscillateur harmonique amorti

### 2.a Exemples

Masse + ressort + frottement visqueux :



On ajoute une force de frottement visqueux :  $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$ .

Le PFD  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  donne lorsqu'on le projette sur l'axe  $\vec{e}_x$  :

$$-kx - \gamma\dot{x} = m\ddot{x} \quad (5.14)$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle :

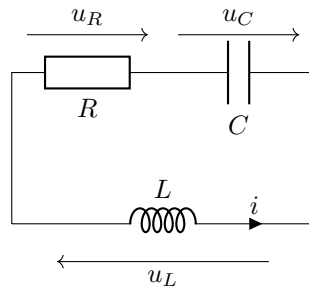
$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{\omega_0/Q} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = 0 \quad (5.15)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.16)$$

où  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}$  est appelé **facteur de qualité** de l'oscillateur.

Circuit RLC série :



- Loi des mailles :  $u_R + u_C + u_L = 0$  donc  $\frac{du_R}{dt} + \frac{du_C}{dt} + \frac{du_L}{dt} = 0$  ;
- Loi d'Ohm :  $u_R = Ri$  donc  $\frac{du_R}{dt} = R \frac{di}{dt}$  ;
- Bobine :  $u_L = L \frac{di}{dt}$  donc  $\frac{du_L}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2}$  ;
- Condensateur :  $\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$ .

On obtient alors l'équation :  $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$  soit :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\omega_0/Q} \frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i = 0 \quad (5.17)$$

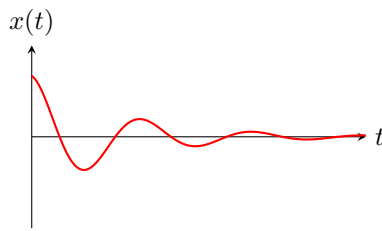
soit

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (5.18)$$

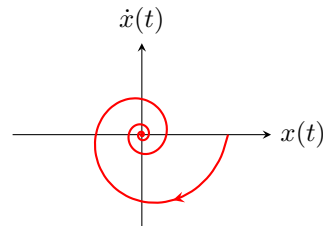
où  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  est le facteur de qualité de l'oscillateur.

## 2.b Analyse qualitative

L'amortissement correspond à une dissipation d'énergie. L'énergie du système diminue donc au cours du temps, il tend à retourner vers sa position d'équilibre stable.



Évolution temporelle



Portrait de phase

## 2.c Solution exacte

L'équation de l'oscillateur harmonique amorti est :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

L'équation caractéristique associée

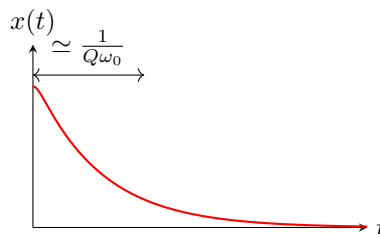
$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant est  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ . On distingue trois cas, selon la valeur de  $\Delta$  :

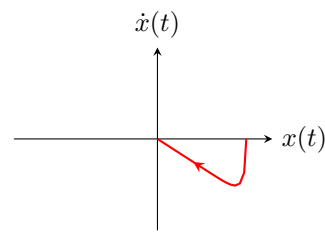
— Si  $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$ , l'équation caractéristique a 2 solutions réelles  $r_1$  et  $r_2$  :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

et on a  $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ . C'est le **régime apériodique**, il n'y a pas d'oscillations.



Évolution temporelle



Portrait de phase

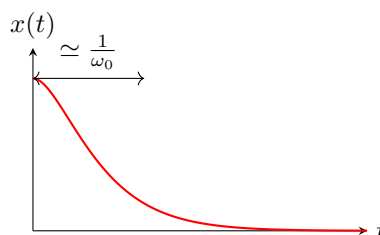
Lorsque  $Q \ll \frac{1}{2}$ , on a  $x(t) \simeq A \exp(-t/\tau)$ . Le temps de retour à l'équilibre est de l'ordre de :

$$\tau = \frac{1}{Q\omega_0} \quad (5.19)$$

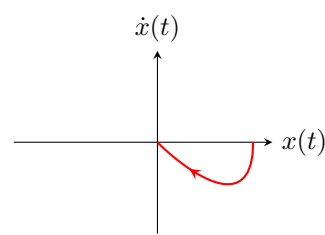
— Si  $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$ , l'équation caractéristique a une racine double :

$$r = -\omega_0 \quad (5.20)$$

et on a  $x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$ . C'est le **régime critique**. Il n'y a pas d'oscillations.



Évolution temporelle



Portrait de phase

Le temps de retour à l'équilibre est de l'ordre de :

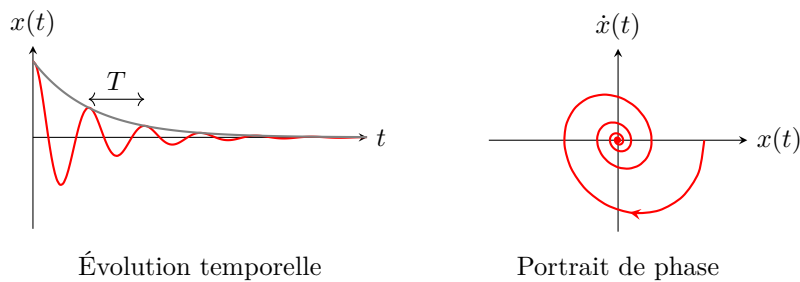
$$\tau \simeq \frac{1}{\omega_0} \quad (5.21)$$

C'est le régime pour lequel le retour à l'équilibre se fait le plus rapidement.

— Si  $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$ , l'équation caractéristique a deux solutions complexes :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta} \right) = -\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{\frac{1}{\tau}} \pm i\underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\omega} \quad (5.22)$$

on a alors  $x(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$ . C'est le régime **pseudo-périodique**.



La pseudo-période  $T$  du signal est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0}}_{T_0} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} \quad (5.23)$$

$T_0$  est la période propre de l'oscillateur (la période d'oscillation en l'absence d'amortissement). Avec amortissement, on a  $T > T_0$ . Le temps de retour à l'équilibre est de l'ordre de :

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad (5.24)$$

En régime pseudo-périodique, on peut déterminer graphiquement la valeur de  $Q$  en comptant le nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne passe sous une valeur limite que nous allons déterminer.

L'amplitude des oscillations est  $A(t) = A \exp(-\omega_0 t / 2Q) = A \exp(-\pi / Q * t / T_0)$  après  $n$  oscillations, on a  $t = nT_0$  et  $A(t) = \exp(-n\pi / Q)$ . Si  $n = Q$  l'amplitude est  $A(t) = A \exp(-\pi) \simeq A/20$ . Donc après  $Q$  oscillations, l'amplitude des oscillations est divisée par 20.

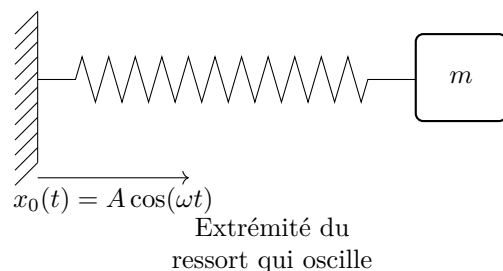
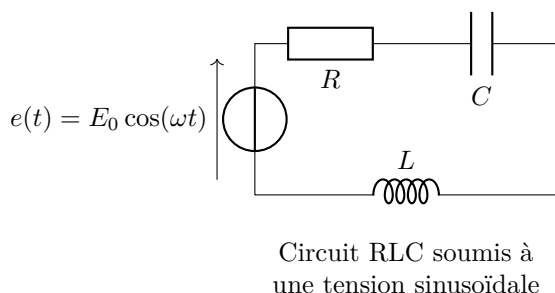
On obtient la règle suivante :  $Q$  = nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne soit divisée par 20.

### 3 Régime sinusoïdal forcé

#### 3.a Position du problème

Un système dynamique (électrique, mécanique, ...) est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .

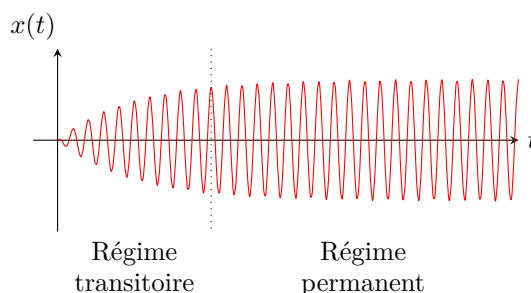
exemples :



### 3.b Régime transitoire et régime permanent

Lorsqu'un système linéaire est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega$  on distingue deux régimes :

- Le régime transitoire au cours duquel l'amplitude des oscillations varie
- Le régime permanent au cours duquel toutes les grandeurs oscillent à la pulsation  $\omega$  avec une amplitude constante.



La durée du régime transitoire est identique à celle du régime transitoire de l'oscillateur libre (elle dépend de  $Q$  et de  $\omega_0$ ).

### 3.c Étude du régime permanent – méthode des complexes

En régime permanent, toutes les grandeurs oscillent à la pulsation  $\omega$ . On peut les représenter par une amplitude et une phase, c'est à dire un nombre complexe.

$$\underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{avec} \quad j^2 = -1 \quad (5.25)$$

La grandeur réelle (celle qui a une signification physique) est la partie réelle de la grandeur complexe :  $x(t) = \Re(\underline{x}) = X \cos(\omega t + \varphi)$ .

La dérivation devient une opération très simple :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(X e^{j(\omega t + \varphi)}) = X j \omega e^{j(\omega t + \varphi)} = j \omega \underline{x}(t) \quad (5.26)$$

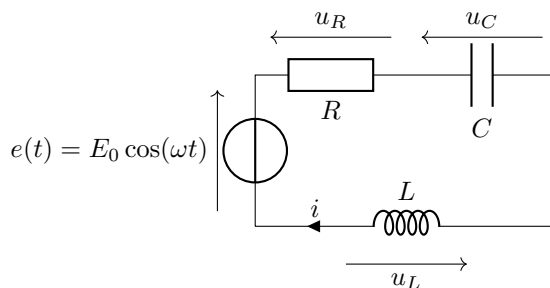
Donc :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j \omega \underline{x}(t)$$

(5.27)

Cela permet de transformer toutes les équations différentielles en équations algébriques.

**Application au circuit RLC en régime forcé** : On cherche à déterminer la tension  $u_L(t)$  en régime permanent dans le circuit suivant :



On remplace les valeurs réelles par leur représentation complexe :  $\underline{i}(t)$ ,  $\underline{e}(t)$ ,  $\underline{u}_R(t)$ ,  $\underline{u}_C(t)$  et  $\underline{u}_L(t)$ .

Les différentes lois du circuit s'écrivent :

- Mailles :  $\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C$
- Ohm :  $\underline{u}_R = R \underline{i}$
- Condensateur :  $\underline{i} = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = j \omega \underline{u}_C$
- Bobine :  $\underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt} = j L \omega \underline{i}$

On obtient finalement

$$\underline{u}_L = \frac{jL\omega}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \underline{e}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

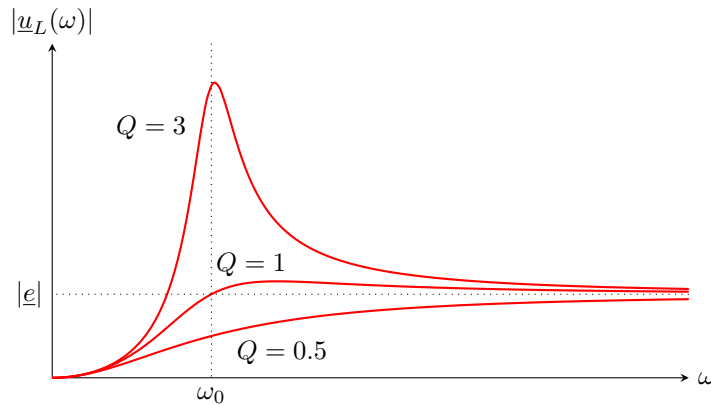
$$\underline{u}_L = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underline{e}$$

en faisant intervenir la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et le facteur de qualité  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  de l'oscillateur.

L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine est donnée par le module de  $\underline{u}_L$  :

$$|\underline{u}_L| = \frac{Q \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} |\underline{e}| \quad (5.28)$$

On représente sur le graphique ci-dessous l'amplitude de la tension aux bornes de la bobine en fonction de la pulsation  $\omega$  pour plusieurs valeurs du facteur de qualité  $Q$  :



On remarque que lorsque le facteur de qualité est grand ( $>1$ ), la tension aux bornes de la bobine peut être supérieure à la tension d'alimentation du circuit. On dit qu'il y a **résonance**.

Plus le facteur de qualité est élevé, plus le pic de résonance est haut et étroit. Si  $\Delta\omega$  est la largeur du pic de résonance, on peut montrer que l'on a

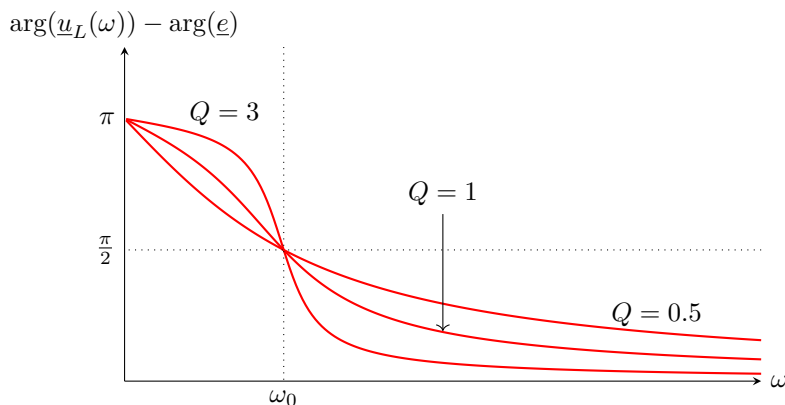
$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx Q \quad (5.29)$$

Dès que  $Q$  est suffisamment grand (le pic de résonance est assez étroit). La relation est exacte pour la résonance en intensité dans un circuit RLC série.

On peut également s'intéresser au déphasage  $\varphi$  entre la tension d'alimentation et la tension aux bornes de la bobine. Pour cela on doit calculer l'argument de  $\underline{u}_L$ , on trouve :

$$\arg(\underline{u}_L) = \arg(\underline{e}) + \frac{\pi}{2} - \arctan \left( Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

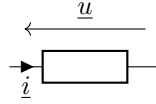
Le graphique ci-dessous représente  $\arg(\underline{u}_L) - \arg(\underline{e})$  en fonction de  $\omega$ , il s'agit donc du déphasage entre les deux grandeurs.



À la résonance, il y a un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  entre le signal et l'excitation.



### 3.d Impédances complexes



Dans un circuit électrique en régime sinusoïdal forcé, on peut définir **l'impédance complexe**  $\underline{Z}$  d'un dipôle (équivalente à la résistance en régime continu) telle que

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \quad (5.30)$$

**Pour une résistance :**  $\underline{u} = R \underline{i}$  donc

$$\underline{Z}_R = R \quad (5.31)$$

L'impédance est réelle.

**Pour une bobine :**  $u_L = L \frac{di}{dt}$  donc  $\underline{u} = jL\omega \underline{i}$  et :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \quad (5.32)$$

L'impédance est imaginaire pure et dépend de  $\omega$ .

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $|\underline{Z}_L| = 0$ , à basses fréquences la bobine se comporte comme un fil.

Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $|\underline{Z}_L| \rightarrow \infty$ , donc à hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

**Pour un condensateur :**  $i = C \frac{du}{dt}$  donc  $\underline{i} = jC\omega \underline{u}$  et :

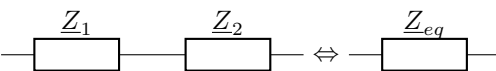
$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad (5.33)$$

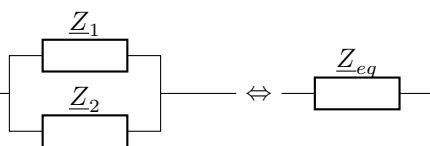
L'impédance est imaginaire pure et dépend de  $\omega$ .

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $|\underline{Z}_C| \rightarrow \infty$ , à basses fréquences le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $|\underline{Z}_C| \rightarrow 0$ , donc à hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un fil.

**Associations d'impédances :** Les règles sont les mêmes que pour des associations de résistances

En série :   $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

En parallèle :   $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$