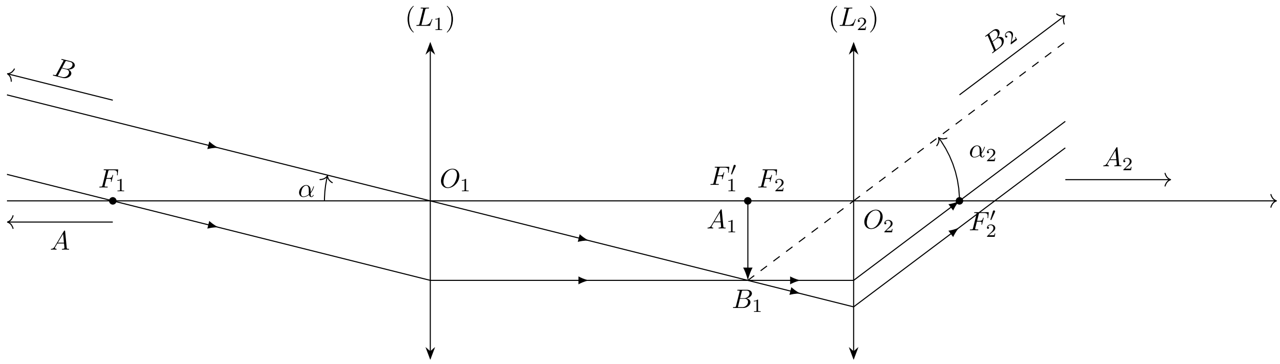
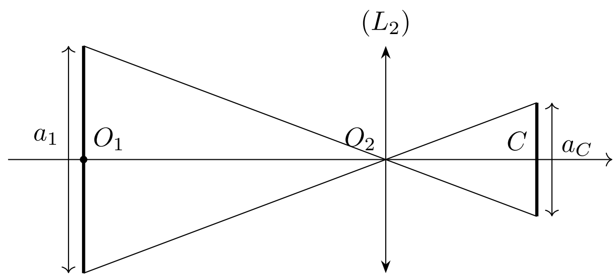
DS2 : Optique, électricité et chimie – corrigé

Exercice 1 : La lunette astronomique

1. Il est préférable que l'observation se fasse sans accomodation pour ne pas fatiguer l'œil. Pour un œil normal, il faut que l'image A_2B_2 soit renvoyée à l'infini. La lunette astronomique est un système afocal.
2. L'image A_1B_1 se situe dans le plan focal image de (L_1). Pour que A_2B_2 soit renvoyée à l'infini, il faut que A_1B_1 soit dans le plan focal objet de la lentille (L_2). On doit donc avoir :
$$\boxed{\Delta = f_1' + f_2'} \tag{1}$$
ce qui donne $\Delta_{10} = 710\,\text{mm}$ pour le premier occulaire et $\Delta_{25} = 725\,\text{mm}$ pour le second.
3. Schéma



4. Dans les triangles $O_1F_1'B_1$ et $O_2F_2'B_1$, on a les relations suivantes
$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_1'} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha_2) = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_2} \tag{2}$$
Dans les conditions de Gauss, on a $\tan(\alpha) \approx \alpha$ et $\tan(\alpha_2) \approx \alpha_2$. On a alors
$$\boxed{G = \frac{\alpha_2}{\alpha} = \frac{f_1'}{f_2}} \tag{3}$$
et les valeurs numériques $G_{10} = -70$ et $G_{25} = -28$.
5. Il peut être difficile de viser directement l'objet à observer avec la lunette car le grossissement étant élevé, le champ de vision dans la lunette est assez faible. De plus le grossissement est négatif, ce qui signifie que l'image observée est retournée, ce qui rend l'orientation de la lunette plus difficile. On ajoute un chercheur qui produit une image droite, avec un grossissement plus faible pour pouvoir aligner plus facilement la lunette avec l'objet à observer.
6. On applique la formule de conjugaison de Newton, pour trouver la position du point C, image de O_1 par (L_2). On a
$$\boxed{\overline{F_2'C}\,\overline{F_2O_1} = -{f_2'}^2 \Leftrightarrow \overline{F_2'C} = \frac{{f_2'}^2}{f_1'}} \tag{4}$$
7. On est dans la situation suivante



Et on a donc

$$\frac{a_C}{a_1} = \frac{O_2C}{O_2O_1} = \frac{f_2' + F_2'C}{f_1' + f_2'} \tag{5}$$

En utilisant l'équation 4, on trouve finalement

$$\boxed{a_C = a_1 \frac{f_2'}{f_1'} = -\frac{a_1}{G}} \tag{6}$$

8. On obtient les diamètres suivants : $a_{C,10} = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ et $a_{C,25} = 2{,}5\,\mathrm{mm}$. Comme $a_{C,10}$ et $a_{C,25}$ sont compris dans l'intervalle $[a_{\min}; a_{\max}]$, on en conclut que la lunette est correctement conçue dans les deux cas.

Exercice 2 : Modélisation d'une locomotive électrique

1. Avec la formule donnée dans l'énoncé, la résistance par unité de longeur de la caténaire et du rail sont :

$$\boxed{r = \frac{1}{\sigma_C s_C} \approx 1{,}17 \times 10^{-4}\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1} \quad \text{et} \quad r_R = \frac{1}{\sigma_R s_R} \approx 1{,}50 \times 10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{m}^{-1}} \tag{1}$$

2. On remarque que $r_R/r \approx 0{,}13$. La résistance des rails est bien plus faible que celle de la caténaire, ce qui justifie qu'on la néglige en première approximation.
3. On a

$$\boxed{R_{AC} = rx \quad \text{et} \quad R_{CB} = r(L-x)} \tag{2}$$

4. La loi des mailles appliquée aux mailles $ACMF$ et $CBGM$ permet de montrer que tension aux bornes de R_{AC} et de R_{CB} sont

$$U_{AC} = E - U(x) \quad \text{et} \quad U_{BC} = E - U(x) \tag{3}$$

Avec la loi d'Ohm, on obtient alors

$$\boxed{I_{AC} = \frac{E - U(x)}{rx} \quad \text{et} \quad I_{BC} = \frac{E - U(x)}{r(L-x)}} \tag{4}$$

5. La loi des nœuds permet d'écrire que $I_{AC} + I_{BC} = I$. Donc $\frac{E-U(x)}{rx} + \frac{E-U(x)}{r(L-x)} = I$ Soit

$$\boxed{U(x) = E - I\frac{rx(L-x)}{L}} \tag{5}$$

6. La chute de tension s'exprime comme

$$\Delta U(x) = I\frac{rx(L-x)}{L} \tag{6}$$

On remarque que c'est l'équation d'une parabole inversée (le coefficient de x^2 est négatif) symétrique par rapport à $x = L/2$ (car $U(L/2 + x) = U(L/2 - x)$). Le maximum se trouve donc en $x = L/2$. On pourrait aussi dériver la fonction $U(x)$ par rapport à x et montrer que la dérivée s'annule en $x = L/2$.

La chute de tension maximale est alors

$$\boxed{\Delta U_{\max} = \Delta U(L/2) = \frac{IrL}{4} \approx 292\,\mathrm{V}} \tag{7}$$

7. La puissance électrique totale fournie par les stations est

$$\boxed{P_F = P_1 + P_2 = EI_{AC} + EI_{BC} = EI} \tag{8}$$

La puissance électrique reçue par la motrice est

$$\boxed{P_m = U(x)I} \tag{9}$$

La puissance électrique dissipée par effet Joule dans la caténaire est

$$\boxed{P_J = U_{AC}I_{AC} + U_{BC}I_{BC} = (E - U(x))I} \tag{10}$$

8. On a bien la relation demandée entre les puissance qui traduit la conservation de l'énergie dans le système. La puissance fournie par les stations est consommée par la motrice ou dissipée dans la caténaire par effet Joule.
9. On a $x(t) = v_0t$ et il passera en B au temps $t_B = L/v_0$.
10. L'énergie fournie par les stations pour ammener le train de A à B est

$$\boxed{E_F = \int_0^{t_B} P_F(t)\mathrm{d}t = t_B P_F = \frac{EIL}{v_0}} \tag{11}$$

car la puissance fournie par les stations ne dépend pas du temps.
L'énergie reçue par la motrice entre A et B est

$$E_m = \int_0^{t_B} P_m(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_B} U(x(t))I\mathrm{d}t = \int_0^{t_B} EI - I^2\frac{rx(L-x)}{L}\mathrm{d}t = \frac{EIL}{v_0} - \frac{I^2r}{L}\int_0^{t_b} v_0t(L - v_0t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

Soit

$$E_m = \frac{EIL}{v_0} - \frac{I^2r}{L}\left(\left[\frac{v_0Lt^2}{2}\right]_0^{t_B} - \left[\frac{v_0^2t^3}{3}\right]_0^{t_B}\right) = EIL - \frac{I^2rL^2}{2v_0} + \frac{Ir^2L^2}{3v_0} = EIL - \frac{I^2rL^2}{6v_0} \tag{13}$$

D'où finalement

$$\boxed{E_m = \frac{IL}{v_0}\left(E - \frac{rIL}{6}\right)} \tag{14}$$

11. Le rendement de cette alimentation électrique est alors

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{rIL}{6E} \approx 0{,}87} \tag{15}$$

Exercice 3 : Oxydation de l'ammoniac

1. Si les réactifs sont apportés en proportions stœchiométriques, on a $5n_{\mathrm{NH_3}} = 4n_{\mathrm{O_2}}$. De plus, dans l'air, on a $n_{\mathrm{N_2}} = 4n_{\mathrm{O_2}}$. En notant $\alpha = n_{\mathrm{O_2}}$, la quantité de matière totale de gaz dans le mélange est :

$$n_{\text{tot}} = \alpha + 4\alpha + \frac{4}{5}\alpha = \frac{29}{5}\alpha \tag{1}$$

Et les fractions molaires de NH_3, O_2 et N_2 dans le mélange sont :

$$\boxed{x_{\mathrm{NH_3}} = \frac{n_{\mathrm{NH_3}}}{n_{\text{tot}}}\frac{4}{29} \approx 0{,}14 \quad x_{\mathrm{O_2}} = \frac{n_{\mathrm{O_2}}}{n_{\text{tot}}}\frac{5}{29} \approx 0{,}17 \quad x_{\mathrm{N_2}} = \frac{n_{\mathrm{N_2}}}{n_{\text{tot}}}\frac{20}{29} \approx 0{,}69} \tag{2}$$

2. Dans le mélange, il y a initialement $n_1 = x_1n_i = 10\,\mathrm{mol}$ de NH_3, il reste alors $n_{\text{air}} = n_i - n_1 = 90\,\mathrm{mol}$ d'air composé à 80 % de N_2 et 20 % de O_2. On a alors

$$\boxed{n_1 = 10\,\mathrm{mol} \quad n_2 = (n_i - n_1) \times 0{,}2 = 18\,\mathrm{mol} \quad \text{et} \quad n_3 = (n_i - n_1 - n_2) = 72\,\mathrm{mol}} \tag{3}$$

3. On a le tableau d'avancement suivant :

	$4\,NH_3$	+	$5\,O_2$	$\rightleftharpoons$	$4\,NO$	+	$6\,H_2O$	n_{gaz}
État initial	n_1		n_2		0		0	$n_1+n_2+n_3$
État final	$n_1-4\xi_{éq}$		$n_2-5\xi_{éq}$		$4\xi_{éq}$		$6\xi_{éq}$	$n_1+n_2+n_3+\xi_{éq}$

4. On écrit l'équation des gaz parfaits dans l'état initial, on a $PV_0 = n_iRT$. Donc

$$\boxed{V_0 = \frac{n_iRT}{P} = 8{,}9\,\mathrm{m}^3} \tag{4}$$

À l'équilibre, la quantité de matière totale de gaz dans le système est $n_{éq} = n_1+n_2+n_3+\xi_{éq} = n_i+\xi_{éq}$ (voir tableau d'avancement, ne pas oublier N_2). On aura donc d'après l'équation des gaz parfaits :

$$V_{éq} = \frac{n_{éq}RT}{P} = \frac{RT}{P}(n_i+\xi_{éq}) \tag{5}$$

Finalement, en utilisant l'équation 4, on obtient

$$\boxed{V_{éq} = V_0\left(1+\frac{\xi_{éq}}{n_i}\right)} \tag{6}$$

5. On écrit l'expression de la constante d'équilibre, on a

$$K^\circ = \frac{p(NO)^4p(H_2O)^6}{p^\circ p(NH_3)^4p(O_2)^5} = \frac{RT}{p^\circ V_{éq}}\frac{(4\xi_{éq})^4(6\xi_{éq})^6}{(n_1-4\xi_{éq})^4(n_2-5\xi_{éq})^5} \tag{7}$$

Et en utilisant l'équation 6, on obtient :

$$\boxed{K^\circ = \frac{P}{p^\circ}\frac{1}{n_1+n_2+n_3+\xi_{éq}}\frac{(4\xi_{éq})^4(6\xi_{éq})^6}{(n_1-4\xi_{éq})^4(n_2-5\xi_{éq})^5}} \tag{8}$$

Comme $K^\circ \gg 10^4$, on peut considérer que la réaction est totale. Dans ces conditions, il faut déterminer le réactif limitant. Comme $n_1/4 < n_2/5$, le réactif limitant est NH_3 et on a $\xi_{éq} = \frac{n_1}{4} = 2{,}5\,\mathrm{mol}$

6. Les pressions partielles des gaz à l'équilibre sont donc

$$p(NH_3) \approx 0\,\mathrm{bar} \tag{9}$$

$$p(O_2) = \frac{n_2-5\xi_{éq}}{n_i+\xi_{éq}}P \approx 5{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{bar} \tag{10}$$

$$p(N_2) = \frac{n_3}{n_i+\xi_{éq}}P \approx 7{,}0\times10^{-1}\,\mathrm{bar} \tag{11}$$

$$p(NO) = \frac{4\xi_{éq}}{n_i+\xi_{éq}}P \approx 9{,}8\times10^{-2}\,\mathrm{bar} \tag{12}$$

$$p(H_2O) = \frac{6\xi_{éq}}{n_i+\xi_{éq}}P \approx 1{,}5\times10^{-1}\,\mathrm{bar} \tag{13}$$

7. Pour déterminer l'ordre de grandeur de la pression de NH_3 à l'équilibre, on reprend l'équation 8 en remplaçant $\xi_{éq}$ par la valeur déterminée précédemment, sauf pour le terme $n_1-4\xi_{éq}$. On obtient alors

$$n_f(NH_3) = n_1-4\xi_{éq} = \left(\frac{P}{p^\circ}\frac{1}{n_i+\xi_{éq}}\frac{(4\xi_{éq})^4(6\xi_{éq})^6}{K^\circ(n_2-5\xi_{éq})^5}\right)^{1/4} \approx 9{,}6\times10^{-13}\,\mathrm{mol} \tag{14}$$

Ce qui correspond à une pression de l'ordre de

$$\boxed{p(NH_3) = \frac{n_f}{n_i+\xi_{éq}}p \approx 9\times10^{-15}\,\mathrm{bar}} \tag{15}$$

C'est vraiment très faible et complètement indétectable.