DS4 : Électricité – corrigé

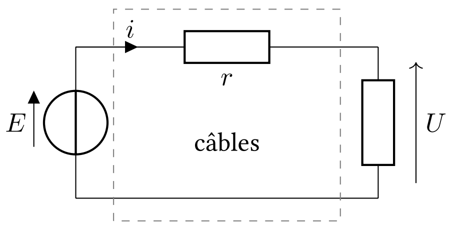
Durée : 2h. Les calculatrices sont interdites. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : Résistances équivalentes

1. **Circuit 1 :** $R_{eq} = \dfrac{5}{2}R$
2. **Circuit 2 :** $R_{eq} = \dfrac{2}{3}R$
3. **Circuit 3 :** $R_{eq} = \dfrac{8}{11}R$

Exercice 2 : Transport d'électricité (TD4)

1. Schéma :

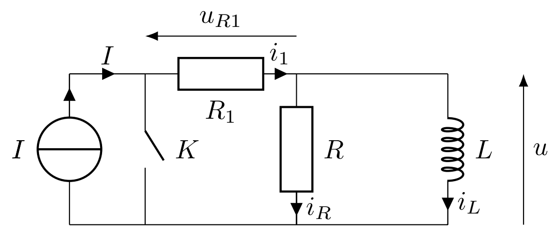


2. La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent $U = E - ri$ soit $E = U + ri$
3. La puissance électrique dissipée dans les câbles est $P_c = ri^2$ c'est l'effet Joule, l'énergie électrique est transformée en chaleur.
4. La puissance totale fournie par le générateur est $P_g = E \times i$
5. Le rendement du système est $\gamma = \dfrac{P}{P_g} = \dfrac{P}{Ei} = \dfrac{P}{(U+ri)i} = \dfrac{P}{P+ri^2}$. En utilisant $i = P/U$ on obtient finalement :

$$\gamma = \frac{P}{P + r(P/U)^2} = \frac{1}{1 + rP/U^2} \tag{1}$$

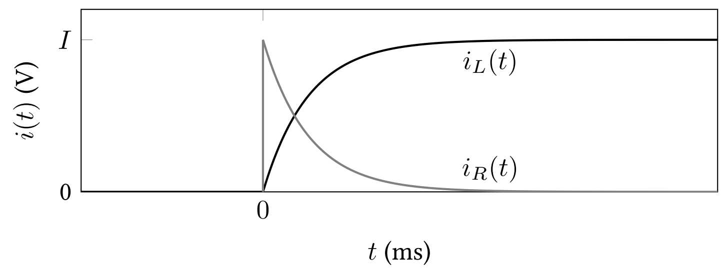
6. On utilise une haute tension pour transporter le courant électrique car le rendement augmente avec U. Cela permet de diminuer les pertes lors du transport.
7. On ne peut pas utiliser des tensions trop élevées car les plus hautes tensions nécessitent des infrastructures plus coûteuses (il faut plus espacer les cables, il faut qu'ils soient plus hauts). Le gain d'argent fait en utilisant une tension supérieure à 400 kV serait probablement inférieur au surcoût des infrastructures.

Exercice 3 : Circuit RL parallèle



1.
   - Pour $t < 0$, K est fermé donc $u + u_{R1} = 0$ or en régime permanent la bobine se comporte comme un fil donc $u = 0$. On en conclut que $u_{R1} = 0$, $i_1 = u_{R1}/R_1 = 0$ et $i_R = u/R = 0$. Enfin $i_L = i_1 - i_R = 0$.
   - À $t = 0^+$, l'interrupteur est ouvert, il y a continuité de l'intensité dans la bobine donc $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$. On a aussi $i_1 = I$ et donc $i_R = I - i_L = I$.
   - Pour $t \to \infty$, le circuit atteint le régime permanent, la bobine se comporte comme un fil donc $u = 0$, $i_R = u/R = 0$ et $i_L = I$.

   On obtient l'allure suivante :



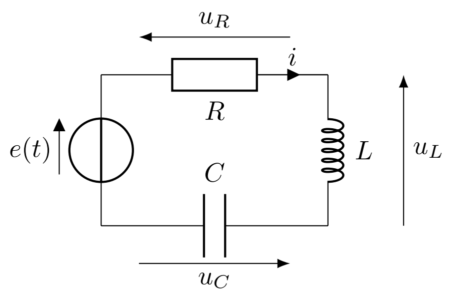
2. Pour $t > 0$, la loi des nœuds donne : $I = i_R + i_L$ avec la loi d'Ohm pour la résistance R : $u_= Ri_R$, on a $I = u/R + i_L$. Enfin la loi de la bobine $u = L\dfrac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t}$ on obtient :

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} + i_L = I \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} + \frac{R}{L}i_L = \frac{R}{L}I$$

   Qui est bien de la forme demandée avec $\tau = \frac{L}{R}$.
3. L'énergie stockée dans la bobine est $E_L = \frac{1}{2}Li_L^2$. Lorsque $t \to \infty$, $i_L = I$ et donc $E_L = \frac{1}{2}LI^2$.

4. En résolvant l'équation différentielle trouvée plus tôt, on trouve $i_L(t) = I(1-e^{-t/\tau})$. La loi de la bobine donne directement $u = L\frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} = RIe^{-t/\tau}$.
5. La puissance P_g fournie par le générateur est $P_g = (u+R_1 I)I = RI^2e^{-t/\tau}+R_1I^2$.
6. L'énergie totale fournie par le générateur entre $t=0$ et $t=\infty$ est :
$$E_g = \int_0^\infty P_g(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty RI^2e^{-t/\tau} = LI^2$$
7. L'énergie dissipée par effet Joule dans R est :
$$E_J = \int_0^\infty P_J\mathrm{d}t = \int_0^\infty Ri_R(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^\infty RI^2e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}LI^2.$$
On vérifie bien la conservation de l'énergie : $E_g = E_L + E_J$.

Exercice 4 : Circuit RLC série



I - Réponse à un échelon de tension

1. Pour $t<0$ on est en régime permanent, la bobine se comporte comme un fil donc $u_L(0^-) = 0$ et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i(0^-)=0$. On en déduit que $u_R(0^-) = Ri(0^-) = 0$ et donc la loi des mailles donne $u_C(0^-) = 0$.
2. La continuité de l'intensité qui traverse la bobine impose $i(0^+) = i(0^-) = 0$ donc $u_R(0^+) = 0$ et la continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$. La loi des mailles donne enfin $u_L(0^+) = E$.
3. On applique la loi des mailles : $E = u_R + u_C + u_L$, la loi d'Ohm : $u_R = Ri$, du condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}\, u_C}{\mathrm{d}\, t}$ et de la bobine $u_L = L\frac{\mathrm{d}\, i}{\mathrm{d}\, t}$. En combinant les trois (en partant de la loi de la bobine) on obtient l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}^2\, u_L}{\mathrm{d}\, t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}\, u_L}{\mathrm{d}\, t} + \frac{1}{LC}u_L = 0$$
4. La pulsation propre du circuit est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité est $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
5. D'après le graphique on trouve $E \simeq 4\,\mathrm{V}$, $\omega_0 = 2\pi f \simeq 20\pi\times10^3\,\mathrm{rad/s}$ et $Q\simeq 10$. On donne ci-dessous l'évolution de la tension $u_L(t)$ pour $t>0$. Déterminer à partir de ce graphique une estimation des valeurs numériques de E, ω_0 et Q.
6. On a $\omega_0^2 \simeq 4\times10^9\,\mathrm{s}^{-2} = \frac{1}{LC}$. On peut donc par exemple prendre $L = 0{,}25\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Dans ces conditions on a $R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0.25}{1\times10^{-3}}} = 1{,}6\,\Omega$.

II - Régime sinusoïdal forcé

7. $\underline{e}(t) = Ee^{j(\omega t+\varphi)}$.
8. On a un pont diviseur de tension formé par l'impédance Z_L en série avec Z_C et Z_R. On a donc
$$\underline{u}_L = \underline{e}\frac{Z_L}{Z_L+Z_R+Z_C} = \underline{e}\frac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}+R}$$
Avec les expressions de ω_0 et Q données on trouve bien :
$$\underline{u}_L = \underline{\mathrm{e}}\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
9. On a :
$$U(\omega) = |\underline{u}_L| = E\frac{Q\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$
On a $U(\omega_0) = QE$
10. Lorsque le facteur de qualité est grand, on a $U(\omega_0) > E$ il se produit un phénomène de résonance
11. Le déphasage est $\varphi = \arg(\underline{u}_L) - \arg(\underline{e})$ soit :
$$\varphi = \arg\left(\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$
Lorsque $\omega=\omega_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.