DM4 : Cinétique chimique et cinématique

Exercice 1 : Boire ou conduire

I. **Passage de l'alcool à travers la paroi stomacale**

1 La vitesse de disparition de l'alcool dans l'estomac est $v_1 = -\frac{dC_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$

2 Si v_1 suit une loi cinétique d'ordre 1, on doit avoir $v_1 = k_1 C_1 = -\frac{dC_1}{dt}$ d'où $C_1(t) = C_0 \exp(-k_1 t)$. On doit donc avoir $\ln(C_1) = \ln(C_0) - k_1 t$. La courbe représentant $\ln(C_1)$ en fonction de t doit donc être une droite de pente $-k_1$. On vérifie graphiquement cette propriété avec les données de l'énnoncé et on trouve $k_1 = 2{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$.

3 à $t = 18$ min, il reste $0.2 \times 0.25 = 5 \times 10^{-2}$ mol d'éthanol dans l'estomac, ce qui signifie que $n_2 = 1 - 5 \times 10^{-2} = 0{,}95$ mol d'éthanol sont passées dans le sang. La concentration d'éthanol dans le sang est donc $C_2 = \frac{n_2}{V_2} = 2{,}38 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell$

4 La quantité d'alcool qui a disparu dans l'estomac est $n = C_0 V_1 - C_1 V_1 = V_1(C_0 - C_1) = V_1 x$, et est identique à la quantité apparue dans le sang. La concentration en alcool à un instant t dans le sang est $C_2 = \frac{n}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} x$. Donc la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $v = \dfrac{dC_2}{dt} = \dfrac{V_1}{V_2}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{V_1}{V_2} v_1$.

II. **Oxydation de l'alcool dans le sang**

5 La vitesse d'oxydation de l'alcool dans le sang est $v_2 = -\dfrac{dC_2}{dt}$.

6 Pour une loi cinétique d'ordre 0, l'évolution temporelle de la concentration est linéaire, on doit avoir $C_2(t) = C_2(0) - k_2 t$. On trace $C_2(t)$ en fonction de t et on trouve bien une doite de coefficient directeur $-k_2$, ce qui donne $k_2 = 1{,}18 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol}\ \ell^{-1}\mathrm{s}^{-1}$

III. **Boire ou conduire...**

7 Concentration maximale admise : $C_{max} = \frac{0.5}{46} = 1{,}09 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell$

8 La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $\dfrac{dC_2}{dt} = v - v_2 = \dfrac{V_1}{V_2} v_1 - k_2 = \dfrac{V_1}{V_2} k_1 C_1 - k_2$

9 Comme $C_1(t) = C_0 \exp(-k_1 t)$ on obtient $\frac{dC_2}{dt} = \frac{V_1}{V_2} k_1 C_0 \exp(-k_1 t) - k_2$.
Que l'on peut intégrer en $C_2(t) = K - \frac{V_1}{V_2} C_0 \exp(-k_1 t) - k_2 t$. La condition initiale $C_2(0) = 0$ permet de déterminer que $K = \frac{V_1}{V_2} C_0$ ce qui nous donne l'expression demandée :

$$C_2 = C_0 \frac{V_1}{V_2}\big(1 - \exp(-k_1 t)\big) - k_2 t$$

En buvant ses deux bières à 8%, le sujet absorbe 66 cℓ et 0.9 mole d'alcool.

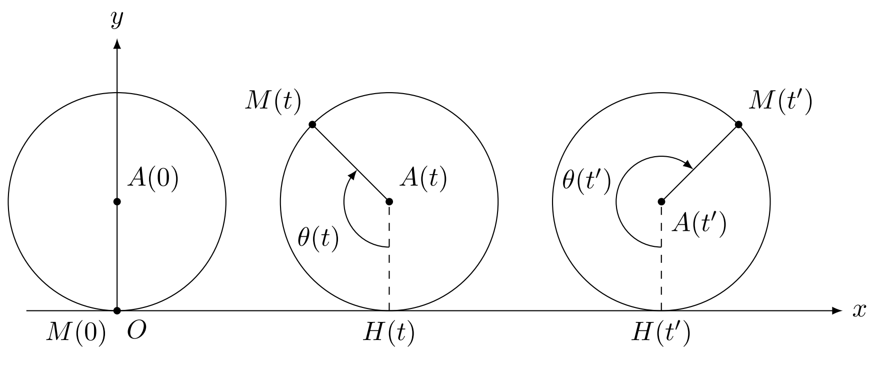
10 l'instant $t_{\max}$ où la concentration C_2 est maximale est défini par $\frac{dC_2}{dt}(t_{\max}) = 0$
ce qui donne $t_{\max} = -\frac{1}{k_1} \ln\left(\frac{1}{C_0}\frac{k_2}{k_1}\frac{V_2}{V_1}\right) \simeq 1421\,\mathrm{s} \Rightarrow t_{\max} \simeq 23{,}7\,\mathrm{min}$

11 On trouve $C_2(t_{\max}) \simeq 2{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell > C_{max}$. L'automobiliste ne peut donc pas conduire !

12 Au delà de $t_{\max}$ la courbe s'apparente à une droite de pente $-k_2$. On peut donc en déduire qu'il aura éliminé les $2{,}0 \times 10^{-2} - 1{,}09 \times 10^{-2} = 0{,}91 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}/\ell$ en $t = \frac{0{,}91 \times 10^{-2}}{1{,}18 \times 10^{-6}} \simeq 7700\,\mathrm{s}$ soit $t \simeq$3h08min.

Exercice 2 : Cycloïde

I. **Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.**



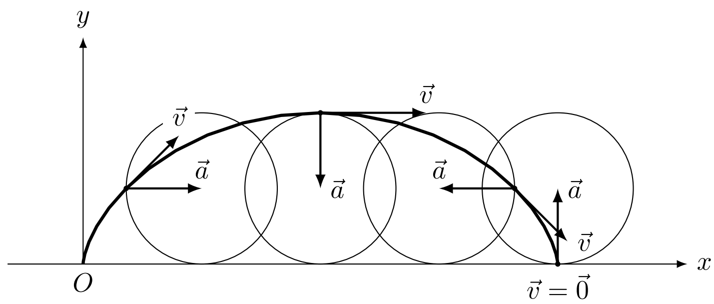
On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Comme la roue roule sans glisser sur le sol, la distance parcourue est égale à la longueur de l'arc de cercle compris entre $M(t)$ et $H(t)$, soit $\overline{OH} = R\theta(t)$.

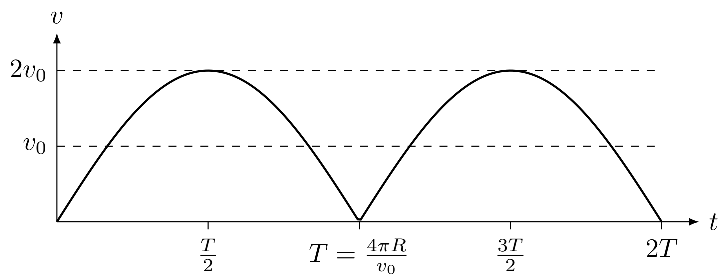
2. En projetant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur les axes Ox et Oy on obtient $\overrightarrow{AM} = -R\sin(\theta)\vec{u}_x - R\cos(\theta)\vec{u}_y$.
3. On décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$. Or on a déja vu que $\overrightarrow{OH} = R\theta(t)\vec{u}_x$, on voit clairement sur le schéma que $\overrightarrow{HA} = R\vec{u}_y$ et on a trouvé $\overrightarrow{AM}$ à la question précédente. En additionnant les trois on obtient :
$$\overrightarrow{OM}(t) = [R\theta(t) - R\sin(\theta)]\,\vec{u}_x + [R - R\cos(\theta)]\,\vec{u}_y$$
Ce qui correspond bien aux équations demandées.

II. **Vecteur vitesse.**

4. La vitesse du point A est la même que celle du point H et est constante. On a $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = v_0\vec{u}_x$. Or d'après la question I..1, $\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_x$. La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ est donc constante est vaut $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$.
5. Cette question est évidente, comme la distance AM est fixe égale à R, le mouvement est circulaire. En outre on vient de montrer que la vitesse de rotation est constante. Le mouvement est donc également uniforme.
6. Les composantes du vecteur vitesse s'obtiennent par dérivation de celles du vecteur position, on obtient :
$$\begin{cases} v_x(t) = R\dot{\theta}(t)\,[1-\cos\theta(t)] \\ v_y(t) = R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$
7. Schéma :



8. La norme v de $\vec{v}$ est : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\dot{\theta}\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}$ soit $v = v_0\sqrt{2-2\cos\theta}$
9. On a $1-\cos\theta = 1 - \cos 2\frac{\theta}{2} = 1 - (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$
L'expression précédente se simplifie alors en $v = 2v_0\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$



III. **Vecteur accélération.**

10. On obtient les composantes du vecteur accélération en dérivant celles du vecteur vitesse, on obtient :
$$\begin{cases} a_x = R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ a_y = R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$
11. Voir schéma précédent.
12. La norme de v augmente pour $\theta \in [0,\pi]$ et elle diminue pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$
13. Le point correspondant à $\theta_4 = 2\pi$ est un *point de rebroussement*, la vitesse de M est nulle alors que l'accélération ne l'est pas.
14. La norme a du vecteur accélération vaut $a = R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R}$ et est donc constante. Pour le pneu en question elle vaut : $a \simeq 3700\,\mathrm{ms^{-2}}$
15. On peut exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme $\vec{a} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{AM} = \dot{\theta}^2\overrightarrow{MA}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc effectivement toujours dirigé de M vers A.