DM5 : Mécanique

Le travail en groupe est fortement encouragé, vous pouvez rendre une copie par groupe de 2 ou 3. Attention, tous les membres du groupe doivent avoir fait tout le DM ! Il ne s'agit pas de partager le travail.

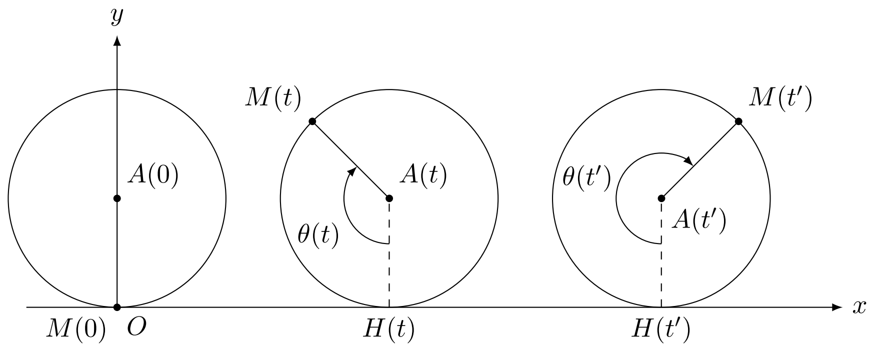
Exercice 1 : La cycloïde

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut expérimentalement observer cette courbe en observant la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

Cette courbe présente d'étonnantes propriétés que nous allons développer, et a notamment intéressé le physicien néerlandais Huygens.

I. Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.

On note M un point donné d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R roulant sans glissement sur une surface plane. A l'instant initial ($t = 0$ s) on suppose que le point M est confondu avec l'origine O d'un repère (Oxy). On note H(t) le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox) qui dépend du temps car la roue avance. La position de M à l'instant t est repérée par l'angle orienté $\theta(t) = (\vec{AH}, \vec{AM})$, le sens positif étant le sens horaire.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Démontrer que la distance OH est donnée par la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. Exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}(t)$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, dirigeant les axes Ox et Oy, en fonction de R et de $\theta(t)$.
3. En décomposant judicieusement le vecteur $\overrightarrow{OM}$, montrer que les équations horaires du mouvement s'écrivent sous la forme
$$\begin{cases} x(t) &=& R[\theta(t) - \sin\theta(t)] \\ y(t) &=& R[1 - \cos\theta(t)] \end{cases}$$

II. Vecteur vitesse.

Afin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle $\mathcal{C}$ a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0.

4. En utilisant la relation établie à la question I.1, montrer que la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Donner sa valeur en fonction de R et de v_0.
5. Montrer que le mouvement de M dans le référentiel (Axy), de centre A et d'axes Ax et Ay parallèles à Ox et Oy, est circulaire uniforme.
6. Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de R, θ et $\dot{\theta}$.
7. Représenter sur un même schéma la position du cercle $\mathcal{C}$ et la trajectoire de M au cours du temps (la fameuse cycloïde), en dessinant l'allure du vecteur vitesse $\vec{v}$ pour les valeurs suivantes du paramètre θ : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$, et $\theta_4 = 2\pi$
8. Déterminer la norme $v = |\vec{v}(M/\mathcal{R})|$ de la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0 et de θ.
9. Démontrer la relation trigonométrique $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$. Et l'utiliser pour simplifier l'expression précédente de v. Représenter graphiquement $v(t)$ en indiquant la valeur de v_0 sur le graphique.

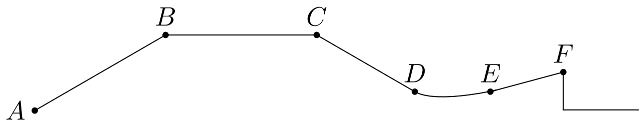
III. Vecteur accélération.

10. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0, R et θ.
11. Sur le dessin de la question II..7, représenter l'allure du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour les valeurs θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4.

12. On dit que le point M est accéléré lorsque la norme de sa vitesse augmente. Dans quelles zones le point M est-il accéléré ou décéléré ?
13. En quoi les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour $\theta_4 = 2\pi$ présentent-ils un caractère surprenant ?
14. Montrer que la norme $a = |\vec{a}(M/\mathcal{R})|$ du vecteur accélération de M dans $\mathcal{R}$ est constante. Calculer sa valeur pour un pneu de voiture de rayon $R = 35\,\text{cm}$ et tel que $v_0 = 130\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.
15. Montrer que $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est toujours dirigé de M vers A.

Exercice 2 : Saut à ski

On s'intéresse à la dynamique des différentes étapes d'un saut à ski. Le saut est décomposé en 4 étapes : Le remonte-pente (AB), une partie plate (BC), la descente (CD) et le tremplin (EF). Le skieur est assimilé à un point matériel.



Le skieur remonte la pente (AB) inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale à vitesse constante. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant la même direction que la perche qui forme un angle $\beta = 20°$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et par l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\vec{F_1}$ de valeur 65N, opposée au mouvement.

1. Faire un schéma représentant la pente, la perche les angles α et β. Représenter toutes les forces subies par le skieur.
2. Justifier pourquoi on peut affirmer que la somme des forces appliquées au skieur est nulle.
3. Déterminer la valeur de la force exercée par la perche sur le skieur.

Arrivé au sommet B, le skieur lâche la perche avec une vitesse horizontale de $3{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. L'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur $F_2 = 42\,\text{N}$.

4. Faire un bilan des forces appliquées au skieur
5. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ du skieur en fonction du temps.
6. Intégrer l'équation précédente pour trouver $v(t)$ et $x(t)$. Quelle distance le skieur va-t-il parcourir avant de s'arrêter ?

Le skieur aborde la pente (CD) inclinée d'un angle $\alpha' = 35°$ avec l'horizontale. Il subit maintenant une force de frottement F_3 proportionnelle au carré de sa vitesse $F_3 = kv^2$ avec $k = 0{,}56\,\text{Ns}^2\text{m}^{-2}$

7. Justifier pourquoi la vitesse du skieur augmentera jusqu'à une vitesse limite v_l.
8. Lorsqu'il atteint la vitesse v_l le mouvement du skieur est rectiligne homogène, déterminer la valeur de v_l

Il aborde le tremplin (EF) incliné d'un angle $\gamma = 15°$ avec l'horizontale, on ne prend pas en compte les forces exercées par l'air. On considère également que sa vitesse en F vaut $25\,\text{ms}^{-1}$.

9. Quelles sont les forces exercées sur le skieur lors du saut ?
10. Déterminer les équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du skieur.
11. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. On pourra prendre le point F comme origine du repère.
12. Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5 m au dessous du point F.

Données :
Taille du skieur : $h = 1{,}8\,\text{m}$, masse du skieur : $m = 80\,\text{kg}$, $AB = 150\,\text{m}$, $g = 9{,}8\,\text{ms}^{-2}$