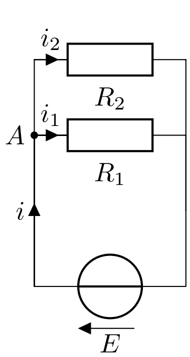
DS3 : Électricité – corrigé

Exercice 1 : Résistances équivalentes

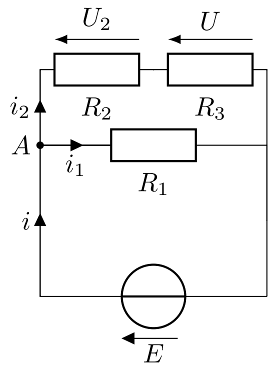
1. $R_{eq} = \frac{21}{8}R$
2. $R_{eq} = \frac{26}{11}R$
3. $R_{eq} = \frac{5}{7}R$

Exercice 2 : Quelques circuits (TD4)

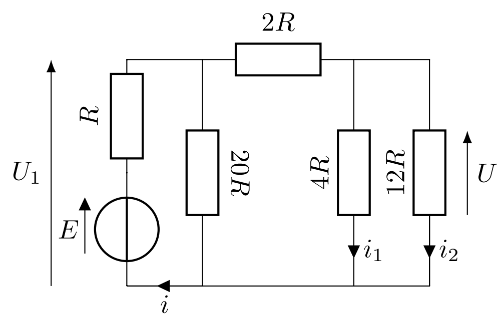
Circuit 1 :



Circuit 2 :



Circuit 3 :

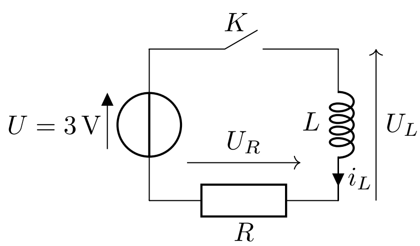


1. Circuit 1 : Loi des noeuds en A : $i = i_1 + i_2 = E/R_1 + E/R_2 = E(1/R_1 + 1/R_2)$
2. Circuit 2 : Loi des noeuds en A : $i = i_1 + i_2 = E/R_1 + i_2$. On trouve i_2 en remplaçant R_2 et R_3 par $R_{eq} = R_2 + R_3$: $i_2 = E/R_{eq} = E/(R_2 + R_3)$. Et finalement $i = E/R_1 + E/(R_2 + R_3) = E(1/R_1 + 1/(R_2 + R_3))$ et $U = R_3 i_2 = ER_3/(R_2 + R_3)$ (En exercice : retrouver ces résultats en transformant les résistances en résistances équivalentes et en utilisant la formule d'un pont diviseur de tension)
3. On remplace successivement les associations de résistances par des résistances équivalentes : 4R et 12R en parallèle ⇒ 3R ; 3R et 2R en parallèle ⇒ 5R ; 5R et 20R en parallèle ⇒ 4R ; 4R et R en série ⇒ 5R. Donc $i = E/(5R)$.

   U est donnée par le diviseur de tension formé par $2R$ et $R_{eq} = 3R$ appliqué à $U_1 = E - Ri = 4E/5$ donc $U = 4E/5 \times 3R/5R = 12E/25$.

   $i_2 = U/(12R) = E/(25R)$ et $i_1 = U/(4R) = 3E/(25R)$.

Exercice 3 : Surtension aux bornes d'une bobine (TD5)



1. Au moment où l'on ferme l'interrupteur, l'intensité du courant qui circule dans la bobine est nulle. Comme l'intensité du courant qui circule dans la bobine est constante, on sait qu'à $t = 0^+$ elle sera encore nulle.

   Si on attend suffisamment longtemps on arrive en régime permanent et la bobine se comporte comme un fil. Dans ces conditions, l'intensité du courant dans le circuit est $i = U/R$.

   On en conclut que l'intensité dans la bobine va augmenter progressivement jusqu'à atteindre la valeur limite de $i = U/R$.
2. La tension aux bornes de la bobine est $U_L = L\dfrac{di_L}{dt}$. L'application de la loi des mailles donne : $U = U_R + U_L = Ri_L + L\dfrac{di_L}{dt}$. On obtient donc l'équation différentielle :

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{U}{L}$$

3. La résolution (habituelle) de l'équation différentielle donne

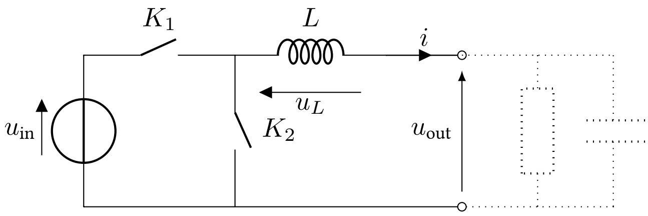
$$i_L(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

4. Suffisamment longtemps signifie que le régime permanent est atteint donc que l'intensité est proche de sa valeur finale U/R. Il faut que $t \gg \tau$.
5. L'énergie emmagasinée par la bobine est $W_L = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{U}{R}\right)^2$
6. L'intensité du courant qui traverse la bobine est continue, donc lorsqu'on ouvre l'interrupteur elle ne peut pas passer instantanément à 0. L'interrupteur ne peut pas être considéré comme idéal.
7. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, l'intensité diminue extrêmement rapidement dans le circuit. Comme la tension aux bornes de L est proportionnelle à la dérivée de l'intensité, elle augmente énormément.

   Cela crée un arc électrique qui peut user les contacts de l'interrupteur avec le temps.

   La surtension aux bornes d'une bobine peut être utilisée pour convertir une tension faible vers une tension plus élevée.

Exercice 4 : Convertisseur buck



1. Lors de cette phase, on a $u_L = u_{\text{in}} - u_{\text{out}} = L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$. On en déduit que $\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}$.
2. Comme u_{in} et u_{out} sont des constantes, on en déduit que $\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = K$ (constante) et donc $i(t) = Kt + B$. On note $i(0) = i_{\text{min}} = B$ d'où finalement :

   $$i(t) = i_{\text{min}} + \frac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}t$$

   Au moment où K_1 s'ouvre, $t = t_{\text{on}}$ et on obtient l'expression demandée :

   $$i_{\text{max}} = i_{\text{min}} + \frac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}t_{\text{on}}$$

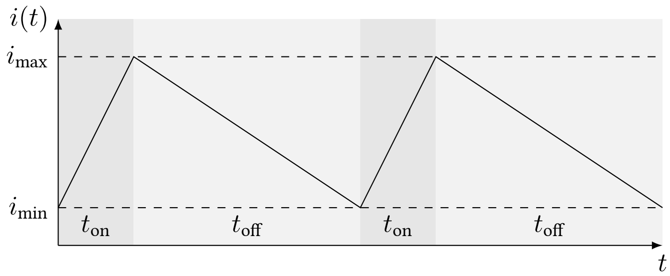
3. Lors de la phase où K_1 est ouvert, on a $u_L = -u_{\text{out}}$ et de la même manière que précédemment, on obtient

   $$\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{-u_{\text{out}}}{L}.$$

4. On en déduit que pour cette phase, $i(t) = A - \frac{u_{\text{out}}}{L}t$. Avec $i(t_{\text{on}}) = i_{\text{max}}$, on obtient :

   $$i(t) = i_{\text{max}} - \frac{u_{\text{out}}}{L}(t - t_{\text{on}})$$

5. On a $i(t_{\text{on}} + t_{\text{off}}) = i(T) = i(0)$ car l'intensité $i(t)$ est périodique. On donne l'évolution de $i(t)$ sur le graphique ci-dessous.



   En déduire l'expression de u_{out} en fonction de u_{in} et r. On vérifiera que l'on a bien $u_{\text{out}} < u_{\text{in}}$

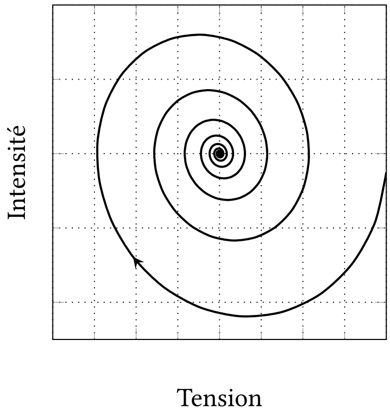
6. On déduit de la question précédente que $i(t_{\text{on}} + t_{\text{off}}) = i(0) = i_{\text{min}} = i_{\text{max}} - \frac{u_{\text{out}}}{L}t_{\text{off}} = i_{\text{min}} + \frac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}t_{\text{on}} - \frac{u_{\text{out}}}{L}t_{\text{off}}$. D'où finalement

   $$u_{\text{out}} = ru_{\text{in}} \leq u_{\text{in}}$$

Exercice 5 : Circuit RLC parallèle (TD6)

1. En régime permanent, condensateur=circuit ouvert et bobine=fil. Donc à $t = 0^-$ on a $u = 0$ $i_C = 0$, $i_L = \dfrac{E}{R_g}$ et $i_R = 0$. À $t = 0^+$ L'intensité dans la bobine est constante donc $i_L = \dfrac{E}{R_g}$ la tension aux bornes de C est constante donc $u = 0$ donc $i_R = 0$ et la loi des nœuds donne $i_C = -i_L$. Lorsque $t \to \infty$ L'énergie est dissipée par la résistance et $i_C = i_R = i_L = 0$ et $u = 0$.
2. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur le courant dans L va progressivement diminuer en partie pour charger C et en partie en passant dans R. Lorsque le courant dans L s'annule, le condensateur se décharge et le courant devient négatif. L'intensité oscillera jusqu'à ce que toute l'énergie ait été dissipée par la résistance.

   Si R est très élevée, Q est aussi élevé donc on peut supposer que $Q \propto R$. L'analyse dimensionnelle donne $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ (Q doit être sans dimension)

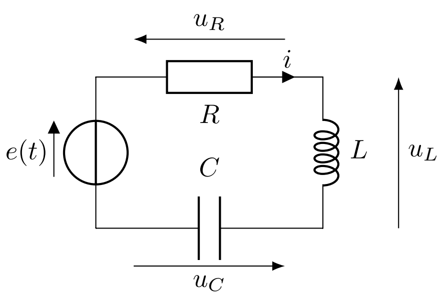


3. $u = L\dfrac{di_L}{dt}$, $i_L = -i_C - i_R$, $i_C = C\dfrac{du}{dt}$ et $i_R = \dfrac{u}{R}$ donc $\dfrac{u}{L} = -C\dfrac{d^2u}{dt^2} - \dfrac{1}{R}\dfrac{du}{dt}$.
   Ce qui nous donne l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \qquad (1)$$

   Ce qui donne $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. On retrouve la même expression que dans la question précédente. Portrait de phase (approximatif) ci-contre.

Exercice 6 : Circuit RLC série



I - Réponse à un échelon de tension

1. Pour $t < 0$ on est en régime permanent, la bobine se comporte comme un fil donc $u_L(0^-) = 0$ et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i(0^-) = 0$. On en déduit que $u_R(0^-) = Ri(0^-) = 0$ et donc la loi des mailles donne $u_C(0^-) = 0$.
2. La continuité de l'intensité qui traverse la bobine impose $i(0^+) = i(0^-) = 0$ donc $u_R(0^+) = 0$ et la continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$. La loi des mailles donne enfin $u_L(0^+) = E$.
3. On applique la loi des mailles : $E = u_R + u_C + u_L$, la loi d'Ohm : $u_R = Ri$, du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}\,u_C}{\mathrm{d}\,t}$ et de la bobine $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$. En combinant les trois (en partant de la loi de la bobine) on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\,u_L}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}\,u_L}{\mathrm{d}\,t} + \frac{1}{LC}u_L = 0$$

4. La pulsation propre du circuit est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité est $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
5. D'après le graphique on trouve $E \simeq 4\,\mathrm{V}$, $\omega_0 = 2\pi f \simeq 10^5\,\mathrm{rad/s}$ et $Q \simeq 10$.
   On donne ci-dessous l'évolution de la tension $u_L(t)$ pour $t > 0$. Déterminer à partir de ce graphique une estimation des valeurs numériques de E, ω_0 et Q.
6. On a $\omega_0^2 \simeq 10^{10}\,\mathrm{s}^{-2} = \frac{1}{LC}$. On peut donc par exemple prendre $L = 0{,}1\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Dans ces conditions on a $R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0.1}{1\times 10^{-3}}} = 1\,.$

II - Régime sinusoïdal forcé

7. $\underline{e}(t) = Ee^{j(\omega t+\varphi)}$.
8. On a un pont diviseur de tension formé par l'impédance Z_L en série avec Z_C et Z_R. On a donc

$$\underline{u}_L = \underline{e}\frac{Z_L}{Z_L + Z_R + Z_C} = \underline{e}\frac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R}$$

Avec les expressions de ω_0 et Q données on trouve bien :

$$\underline{u}_L = \underline{\mathrm{e}}\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

9. On a :

$$U(\omega) = |\underline{u}_L| = E\frac{Q\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

On a $U(\omega_0) = QE$

10. Lorsque le facteur de qualité est grand, on a $U(\omega_0) > E$ il se produit un phénomène de résonance
11. Le déphasage est $\varphi = \arg(\underline{u}_L) - \arg(\underline{e})$ soit :

$$\varphi = \arg\left(\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

Lorsque $\omega = \omega_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.