MÉCANIQUE

I) Cinématique.

1) Description du mouvement d'un point

a) Référentiel d'observation.

- Le mouvement d'un point matériel dépend de celui de l'observateur.

exemple : - Un observateur dans un train en marche voit son voisin immobile alors qu'un obs. à quai le voit avancer

→ Il faut définir un référentiel d'observation.

Définition : Un référentiel R est défini par un point O auquel on attache 3 axes non coplanaires fixes. Associé à une horloge qui permet de repérer les événements dans le temps.

remarques : - En mécanique classique l'espace possède 3 dimensions et est considéré comme Euclidien
- le temps est absolu et indépendant du référentiel (plus vrai en relat. restreinte

Dans un référentiel R, la position d'un point M est repérée par le vecteur $\vec{OM}$.
- La vitesse de M est définie comme $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$
- L'accélération de M ——— $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt}$

exemples de référentiels :
- Référentiel d'un laboratoire : O au coin de la pièce
  x, y, z suivant 3 arêtes
- Référentiel terrestre : O au centre de la Terre
  x, y, z fixes par rapport à la Terre 
- ——— géocentrique O au centre de la Terre
  x, y, z fixes par rapport aux étoiles
- ——— héliocentrique O au centre du Soleil
  x, y, z fixes par rapport aux étoiles.

b) Systèmes de coordonnées.

Pour décrire quantitativement le mouvement d'un point M dans ~~les~~ un référentiel il faut choisir une base de vecteurs dans laquelle on peut exprimer le vecteur $\vec{OM}$. C'est un système de coordonnées.

i) Système de coordonnées cartésiennes :

C'est une base orthonormée directe dont les vecteurs sont "accrochés" au référentiel.

Les vecteurs de base sont notés $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ ou $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ ou ...

- Le vecteur $\vec{OM}$ s'exprime comme $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

x, y et z sont les coordonnées de M

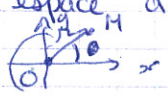
- Le vecteur vitesse $\vec{v} = \left.\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \dfrac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \cancel{x\dfrac{d\vec{i}}{dt}} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \cancel{y\dfrac{d\vec{j}}{dt}} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} + \cancel{z\dfrac{d\vec{k}}{dt}}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

- Le vecteur accélération $\vec{a} = \left.\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

ii) Système de coordonnées polaires (dans un plan)

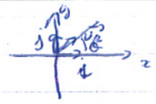
On se place dans un espace à 2 dimensions (plan). Le point M est repéré par 2 coordonnées r et θ.



les vecteurs de base sont $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$

et $\vec{OM} = r\,\vec{u_r}$

On peut exprimer $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$



$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

propriété : $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = -\dot\theta\sin\theta\,\vec{i} + \dot\theta\cos\theta\,\vec{j} = \dot\theta(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) = \dot\theta\,\vec{u}_\theta$

$\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot\theta\cos\theta\,\vec{i} - \dot\theta\sin\theta\,\vec{j} = -\dot\theta\,\vec{u}_r$

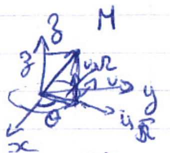
$\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot r\,\vec{u}_r + r\dot\theta\,\vec{u}_\theta$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot r\,\vec{u}_r + \dot r\dot\theta\,\vec{u}_\theta + \dot r\dot\theta\,\vec{u}_\theta + r\ddot\theta\,\vec{u}_\theta - r\dot\theta^2\,\vec{u}_r = (\ddot r - r\dot\theta^2)\vec{u}_r + (2\dot r\dot\theta + \ddot\theta r)\,\vec{u}_\theta$

iii) Système de coordonnées cylindriques : Extension des coordonnées polaires en 3D :

coordonnées (r, θ, h) $\quad \vec{OM} = r\,\vec{u}_r + h\,\vec{u}_z$



- $\vec{u}_r$ dépend du point M (comme en polaires)
- $\vec{u}_z$ est indépendant de M.

Pour résoudre un problème on cherchera le système de coordonnées le mieux adapté.

exemples : • mouvement circulaire → coordonnées polaires.

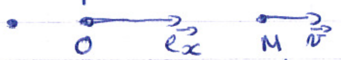
• mouvement rectiligne → coordonnées cartesiennes.

2) Exemples de mouvements ponctuels

a) Mouvement rectiligne à accélération constante

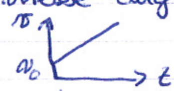
- Un point matériel subit une accélération constante suivant la direction $\vec{e_x}$: $\vec{a} = a\vec{e_x}$

Il ne se déplace que suivant $\vec{e_x}$: $\vec{v} = v\,\vec{e_x}$ et $\vec{OM} = x\,\vec{e_x}$



On a $\vec{a} = a\vec{e_x} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{e_x} \iff \dfrac{dv}{dt} = a \iff v(t) = at + v_0$ ← constante.

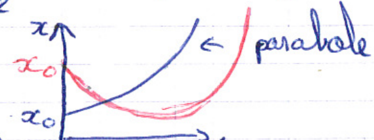
$v_0 = v(t=0)$: La vitesse augmente linéairement (ou diminue) avec le temps



Puis $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt}\cancel{\vec{e_x}} = v(t)\cancel{\vec{e_x}}$

$\dfrac{dx}{dt} = at + v_0 \iff x(t) = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$x_0 = x(t=0)$ Soit



exemple Un objet tombe sur Terre subit une accélération constante qui $\vec{a} = -g\,\vec{e_z}$ ($\vec{e_z}$ vers le haut, vertical)

Exprimer $\vec{v}(t)$ et $z(t)$ d'un objet lâché sans vitesse initial d'une hauteur h.

b) Mouvement courbe d'accélération constante.

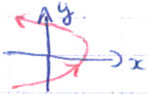
Un point matériel subit une accélération constante suivant $\vec{e_x}$ et peut se déplacer $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$

$\vec{a} = a_x\vec{e_x} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y}\right) = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{e_x} + \dfrac{dv_y}{dt}\vec{e_y}$

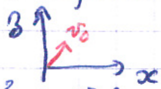
Donc $\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = a_x \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_x(t) = a_x t + v_{x0} \\ v_y(t) = v_{y0} \end{cases} \iff \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} a_x t + v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} \dot x = a_x t + v_{x0} \\ \dot y = v_{y0} \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}a_x t^2 + v_{x0}t + x_0 \\ y(t) = v_{y0}t + y_0 \end{cases}$ ⟹ résultat précédent (axe // $\vec{a}$) → mvt rectiligne uniforme (axe ⊥ $\vec{a}$)

Allure de la trajectoire : $t_{y=0} = \dfrac{y(t) - y_0}{v_{y0}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}a_x\dfrac{y^2}{v_{y0}^2} + \dfrac{v_{x0}}{v_{y0}}y + x_0 = Ay^2 + By + C$: parabole



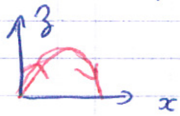
exemple : Sur Terre un objet subit une accélération constante $\vec{a} = -g\vec{e_z}$
On lance un objet avec une vitesse $\vec{v_0} = v_{0x}\vec{e_x} + v_{0z}\vec{e_z}$ depuis $O(0,0)$



on obtient $x(t) = v_{0x} t$

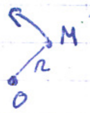
$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t$

Trajectoire : $z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$



parabole.

c) Mouvement circulaire.



: coordonnées polaires, $r = cste$ $\quad \vec{OM} = r\vec{u_r} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \cancel{\dot{r}\vec{u_r}} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

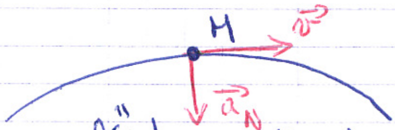
vitesse suivant $\vec{u_\theta}$ norme : $r\dot{\theta}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \cancel{\dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta}} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r} = \underbrace{r\ddot{\theta}\vec{u_\theta}}_{\text{accélération tangentielle}} - \underbrace{r\dot{\theta}^2\vec{u_r}}_{\text{accélération normale}}$$

* accélération tangentielle : $a_T = r\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$: variation de la norme de $\vec{v}$.
* accélération normale : $a_N = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{r}$: dirigée vers l'intérieur de la trajectoire.

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme : $\dot{\theta} = cste \Leftrightarrow \ddot{\theta} = 0$, $a_T = 0$, l'accélération est uniquement normale.

Généralisation : Trajectoire plane courbe :



M subit une accélération normale dirigée vers l'"intérieur" du virage. L'acc tangentielle dépend de la variation de $\|\vec{v}\|$.

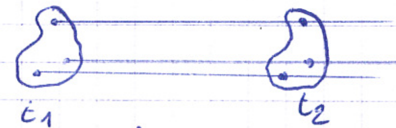
3) Mouvement d'un solide.

a) Définition

Un solide est un ensemble de points matériels. On dit que le solide est indéformable si les distances entre chacun des points qui le composent sont constantes. Dans la suite on se limitera à l'étude de solides indéformables.

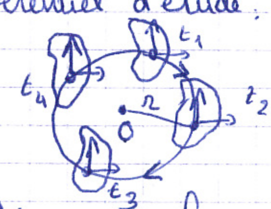
b) Mouvement de translation

* translation rectiligne : On dit qu'un solide est en translation rectiligne si chacun de ses points suit un mouvement de translation rectiligne.



Tous les points du solide ont la même vitesse $\vec{v}$

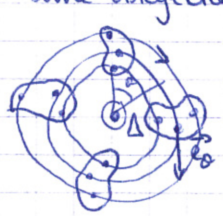
* translation circulaire : On dit qu'un solide subit un mouvement de translation circulaire lorsque l'un de ses point suit une trajectoire circulaire et le solide conserve une orientation fixe dans le référentiel d'étude.



À chaque instant, Tous les points du solide ont la même vitesse. $r\dot{\theta}$

c) Rotation autour d'un axe fixe

On dit qu'un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ lorsque tous les points du solide décrivent une trajectoire circulaire centrée sur l'axe Δ. (à la même vitesse $\dot{\theta}$)
angulaire



La vitesse d'un point M situé à une distance d de l'axe est $\vec{v} = d\dot{\theta}\vec{e_\theta}$