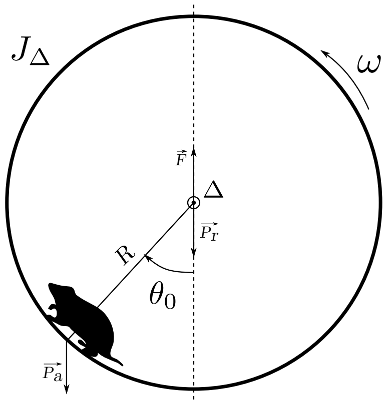
DS6 : Mécanique et Induction — Corrigé

Exercice 1 : Un hamster court dans sa cage

1. Les forces qui s'exercent sur la roue sont le *poids du hamster*, *le poids de la roue* et la *réaction de l'axe de rotation* sur la roue. Comme la roue est globalement immobile, on en conclut que la somme des ces forces est nulle.



2. Le moment cinétique de la roue du hamster est $L_\Delta = J_\Delta \omega$.
3. D'après le théorème du moment cinétique : $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_a) = mgR\sin\theta_0$. La réaction de l'axe de rotation et le poids de la roue passant par l'axe, leur moment est nul. On a donc l'accéleration angulaire : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{mgR\sin\theta_0}{J_\Delta}$.
4. On a montré à la question précédente que l'accélération angulaire de la roue est constante, donc $\omega(t) = \frac{mRg\sin\theta_0}{J_\Delta} t$.
5. L'énergie cinétique de la roue est $E_c(t) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega(t)^2$. Donc $E_C(t) = \frac{(mRg\sin\theta_0)^2}{2J_\Delta}t^2$
6. Le hamster court à une vitesse v, la vitesse angulaire correspondante est $\omega = \frac{v}{R}$. Le temps qu'il met pour atteindre cette vitesse est : $t = \frac{J_\Delta\omega}{mRg\sin\theta_0} \simeq 0{,}3\,\mathrm{s}$
7. L'énergie cinétique de la roue est alors $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = 70\,\mathrm{mJ}$.
8. Lorsque la vitesse de course du hamster est constante, l'accélération angulaire de la roue est nulle et donc le moment des forces appliquées sur la roue doit également être nul. C'est le cas uniquement pour $\theta_0 = 0$
9. On procède de la même manière que dans la question 3 en ajoutant au moment du poids le couple résistant des frottements, il faut donc remplacer $mRg\sin\theta_0$ par $mRg\sin\theta_0 - \Gamma_\Delta$.
10. Dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante l'accélération angulaire étant nulle, il faut que la somme des moments des forces appliquées à la roue soit nulle, et donc le moment du poids doit compenser exactement le couple résistant du aux frottements. On a alors $mRg\sin\theta_0 - \Gamma_\Delta = 0$ et donc $\theta_0 = \arcsin\frac{\Gamma_\Delta}{mRg}$
11. Lorsque le hamster court, la vitesse de rotation de la roue est $\omega_0 = \dfrac{v_0}{R}$
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, **son énergie cinétique est nulle** car sa il a une vitesse nulle dans le référentiel du laboratoire.
    Si on prend l'origine des abscisses au centre de la roue, son énergie potentielle de pesenteur est $E_p = mgh = -mgR$.
    L'énergie cinétique de rotation de la roue est $E_{cR} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2$.
    L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies cinétiques et potentielles, soit $\boxed{E_m = -mgR + \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2}$
13. Juste après que le hamster ne s'arrête de courir, les expressions de l'énergie cinétique de la roue et de l'énergie potentielle du hamster restent les mêmes en remplaçant ω_0 par ω_1. Seulement maintenant l'énergie cinétique du hamster n'est plus nulle, il avance à la même vitesse que la roue donc son énergie cinétique est : $E_{cH} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2$.
    L'égalité des énergies mécaniques avant et après l'arrêt du hamster donne :
    $$\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 - mgR = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_1^2 - mgR + \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{J_\Delta}{J_\Delta + mR^2}}}$$
14. L'énergie mécanique reste constante car on néglige les frottements entre la roue et son axe. Elle vaut
    $$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2}_{E_{cR}} + \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\omega^2}_{E_{cH}} - \underbrace{mgR\cos\theta}_{E_p} = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta$$

15. En écrivant que l'énergie mécanique est constante on obtient

$$\frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega_1^2 - mgR \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}}}$$

16. Lorsque le hamster est au sommet de la roue, il subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dirigé verticalement vers le bas, et la réaction de la roue $\vec{K}$ dirigée également vers le bas (car l'accélération tangentielle du hamster est nulle en ce point).
17. L'accélération normale s'écrit en coordonnées polaires (lorsque le rayon de la trajectoire est constant) comme $\vec{a}_r = -R\omega^2\vec{e}_r$. Ce qui en utilisant la question 15 donne l'expression demandée :

$$\vec{a} = -R\left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}\right)\vec{e}_r$$

18. En appliquant le PFD au hamster lorsqu'il se trouve au sommet de la trajectoire ($\theta = \pi$) et en le projetant sur $\vec{e}_r$, on obtient :

$$-mg - K = ma_r = -mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) \quad \text{soit} \quad K = mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) - mg$$

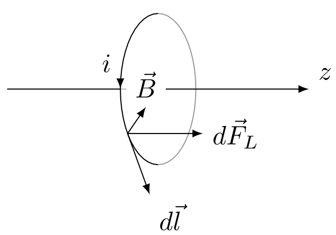
Avec les valeurs numériques données, on trouve $K < 0$, ce qui ne permet pas au hamster de faire un looping.

19. En y regardant en détails, on remarque que la vitesse de rotation initiale de la roue ω_0, même si elle restait constante après l'arrêt du hamster serait trop faible pour permettre un looping. Il faut donc déjà augmenter ω_0 et donc réduire R (le hamster ne peut pas courir plus vite !). Ensuite il faut aussi augmenter J_Δ en lui installant une roue plus lourde

Exercice 2 : Le haut-parleur électrodynamique (Centrale TSI 2013)

I – Équation mécanique

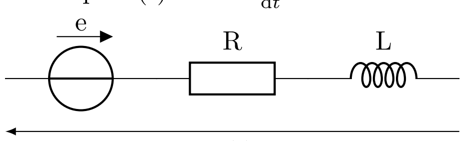
1. Schéma



2. La force de Laplace qui s'exerce sur un élément dℓ de la bobine est $\mathrm{d}\vec{F}_L = i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\mathrm{d}\ell\vec{u}_\theta \wedge (-B\vec{u}_r) = i\mathrm{d}\ell B\vec{u}_z$. Pour trouver la force de Laplace totale, on intègre $\mathrm{d}\vec{F}_L$ entre 0 et ℓ et on obtient $\vec{F}_L = i\ell B\vec{u}_z$.
3. Le PFD projeté sur l'axe z donne directement $m\ddot{z} = i\ell B - kz - h\dot{z}$

II – Équation électrique

4. La puissance mécanique fournie par les forces de Laplace à l'équipage mobile est identique à la puissance électrique fournie au circuit. On a donc $P_e = P_L$.
5. On a $P_e = Ui$, et $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = i\ell B\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$. Or, la loi des mailles indique que $e = -U$ et donc $P_e = -ei$. Avec la question précédente on en conclut bien que $e(t) = -B\ell\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
6. Schéma équivalent de la bobine :



7. On a $u(t) = -e + U_R + U_L = -e + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ soit $u(t) = B\ell\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

III – Impédance du haut-parleur

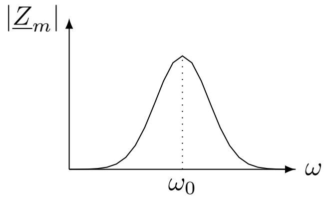
8. Lorsqu'on passe en notation complexe, la dérivation se transforme en une multiplication par $j\omega$. L'équation mécanique devient $-\omega^2 m\underline{z} = i\ell B - k\underline{z} - j\omega h\underline{z}$ ce qui est équivalent à l'équation demandée : $-\omega^2\underline{z} = \frac{B\ell}{m}\underline{i} - \frac{k}{m}\underline{z} - j\omega\frac{h}{m}\underline{z}$
On procède de la même manière avec l'équation électrique et on trouve $\underline{u} = j\omega B\ell\underline{z} + R\underline{i} + jL\omega\underline{i}$
9. L'impédance complexe du haut-parleur est $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i} = jL\omega + R + jB\ell\omega\underline{z}/\underline{i}$.
L'équation mécanique donne $\underline{z}\left(\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega\frac{h}{m}\right) = \frac{B\ell}{m}\underline{i}$.

10. $\underline{Z}$ se met donc bien sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$ avec $\underline{Z}_m = jB\ell\omega\underline{z}/\underline{i} = jB\ell\omega\frac{B\ell}{k-m\omega^2+jh\omega}$. Soit

$$\underline{Z}_m = \frac{B^2\ell^2/h}{1+j\left(\frac{m\omega}{h}-\frac{k}{h\omega}\right)} = \frac{B^2\ell^2/h}{1+j\frac{\sqrt{km}}{h}\left(\omega/\sqrt{\frac{k}{m}}-\sqrt{\frac{k}{m}}/\omega\right)}$$

Par identification avec la formule donnée dans l'énoncé, on trouve $R_0 = \frac{B^2\ell^2}{h}$, $Q_e = \frac{\sqrt{km}}{h}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

11. lorsque $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$, $|\underline{Z}_m| \to 0$. $|\underline{Z}_m|$ présente donc un maximum :



$|\underline{Z}_m|$ est maximum lorsque $\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = 0$ donc lorsque $\omega = \omega_0$ et $\underline{Z}_m(\omega_0) = R_0$.

Exercice 3 : Une spire dans un champ magnétique (CCP TSI 2006)

1. Lorsque la spire pénètre dans la zone où règne le champ magnétique, le flux du champ magnétique à travers elle augmente, il y aura alors un courant induit dans la spire et elle va subir une force de freinage.
2. On choisit d'orienter le contour de la spire de N vers P, la normale à la spire est alors orientée dans la direction $\vec{e}_z$. Dans ces conditions, le flux du champ magnétique à travers la spire est :
   - pour $x < 0$, $\Phi = 0$
   - pour $0 \leq x \leq b$, $\Phi = Bax$
   - pour $x > b$, $\Phi = Bab$
3. La force électromotrice induite dans la spire est alors :

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,t}$$

Elle est non nulle que lorsque $0 \leq x \leq b$ et vaut

$$e(t) = -Bav$$

et l'intensité qui circule dans la spire dans ce cas est

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{Bav}{R}$$

On a choisi e et i allant de N vers P.

4. La force de Laplace est non nulle uniquement lorsque $0 \leq x \leq b$ et vaut

$$\vec{F}_L = iaB\vec{e}_x = -\frac{B^2a^2v}{R}\vec{e}_x$$

5. Le PFD donne

$$m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \vec{F}_L = -\frac{B^2a^2}{R}\vec{v}$$

En écrivant $\vec{v} = v\vec{e}_x$ On obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} + \frac{B^2a^2}{mR}v = 0$$

6. En utilisant la relation fournie, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v + \frac{B^2a^2}{mR}v = 0$$

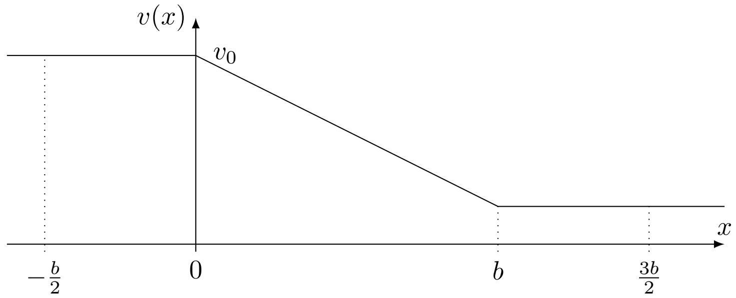
Soit en divisant par v :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{B^2a^2}{mR} = 0$$

7. On intègre l'équation précédente, avec la condition initiale $v(0) = v_0$ on obtient :

$$v(x) = v_0 - \frac{B^2a^2}{mR}x$$

Cette équation est valable pour $0 \leq x \leq b$. On obtient l'allure suivante pour $v(x)$:



8. La spire conductrice pourra entrer totalement dans la zone de champ magnétique à condition que $v(b) \geq 0$, c'est à dire que
$$v_0 > \frac{B^2a^2b}{mR}$$
9. La condition précédente étant vérifiée, la variation d'énergie cinétique de la spire est
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}\left(v_0 - \frac{B^2a^2b}{mR}\right)^2 = \frac{B^2a^2b}{mR}\left(v_0 - \frac{B^2a^2b}{2mR}\right)$$
L'énergie cinétique perdue par la spire a été convertie en chaleur par effet Joule dans la résistance de la spire.

Exercice 4 : Spire en rotation dans un champ magnétique (CCP TSI 2009)

1. Lorsque la spire tourne, le flux du champ magnétique qui la traverse varie, ce qui provoque une fem induite dans la spire et donc un courant induit qui va circuler dans le dipôle X.
2. Le flux du champ magnétique à travers la spire est $\Phi = SB\cos(\theta)$.
3. La force électromotrice induite dans la spire est $e = -\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t} = SB\omega\sin(\omega t)$
4. L'intensité i qui traverse la résistance est $i = e/R$ donc
$$i(t) = \frac{SB\omega\sin(\omega t)}{R}$$
5. La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est
$$P_J = Ri^2(t) = \frac{(SB\omega\sin(\omega t))^2}{R} \quad \text{de valeur moyenne} \quad \langle P_J\rangle = \frac{(SB\omega)^2}{2R}$$
6. Si la vitesse de la spire est constante, la somme des moments des forces qu'elle subit est nulle, donc $\Gamma_L + \Gamma_m = 0$ avec Γ_L le couple des forces de Laplace et Γ_m le couple exercé par le moteur projetés sur l'axe $\vec{e}_z$.
Or, on a $\Gamma_L = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = (i\vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = -iBS\sin(\theta)$ donc le couple exercé par le moteur est
$$\Gamma_m = iBS\sin(\omega t) = \frac{(SB)^2\omega\sin^2(\omega t)}{R} \geq 0$$
Le couple exercé par le moteur est toujours positif, donc c'est toujours un couple moteur.
La puissance du couple moteur est $P_m = \Gamma_m\omega$ et donc la puissance moyenne est :
$$\langle P_m\rangle = \frac{(SB\omega)^2}{2R}$$
7. On trouve comme on pouvait s'y attendre que la puissance moyenne fournie par le moteur est identique à la puissance moyenne dissipée par effet Joule. Comme la vitesse de rotation est constante, la totalité de la puissance fournie par le moteur est dissipée par effet Joule.
8. Si le dipôle X est un condensateur, on a $i(t) = C\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ et donc
$$i(t) = SBC\omega^2\cos(\omega t)$$
9. Dans ces conditions, le couple des forces de Laplace qui s'exercent sur la spire est $\Gamma_L = iBS\sin(\omega t) = (SB)^2C\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ dont la valeur moyenne est nulle. Il ne faudra donc pas exercer de couple mécanique sur la spire pour garder sa vitesse de rotation moyenne constante.
10. La puissance électrique instantanée reçue par le condensateur est
$$P_c(t) = e(t)i(t) = (SB)^2\omega^3C\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}(SB)^2\omega^3C\sin(2\omega t)$$
La valeur moyenne de cette puissance est évidemment nulle. $\langle\sin(2\omega t)\rangle = 0$
11. Au cours d'un tour de la spire, le condensateur est :
    — Récepteur lorsque $\sin(2\omega t) > 0$ donc pour $0 \leq t \leq T/4$ et $T/2 \leq t \leq 3T/4$. L'énergie reçue provient du moteur qui fait tourner la spire à vitesse constante.
    — Générateur lorsque $\sin(2\omega t) < 0$ donc pour $T/4 \leq t \leq T/2$ et $3T/4 \leq t \leq T$. L'énergie libérée est reçue par le moteur qui fait tourner la spire à vitesse constante.