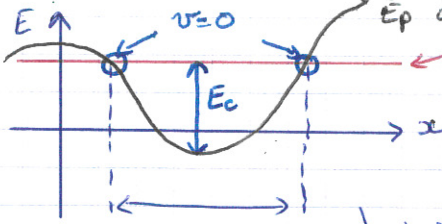
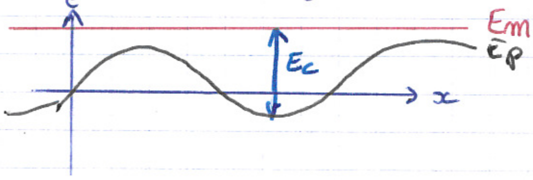
(27)




zone autorisée : $E_m > E_p$ car $E_m - E_p = E_c = \frac{1}{2} m v^2 > 0$

Dans ce cas la trajectoire est bornée (à la zone autorisée)




Tous les $x$ sont autorisés, la trajectoire n'est pas bornée.

## e) Équilibre et stabilité

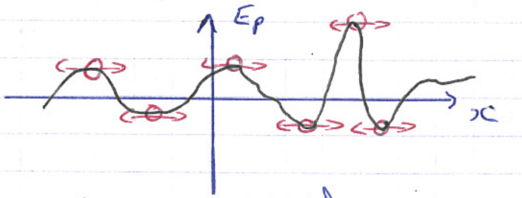
* Une position d'équilibre est une position pour laquelle $\vec{a} = 0$ donc $\sum \vec{F}_{appliquées} = 0$
Pour une force conservative on doit avoir

$\vec{F} = 0$ et donc $\forall\, d\vec{x}$ (petit) $\vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 = -E_p(x+dx) + E_p(x)$

d'où $\dfrac{-E_p(x+dx)+E_p(x)}{dx} = 0$

donc $\boxed{\dfrac{dE_p(x)}{dx} = 0}$ on remarque que $\boxed{F = -\dfrac{dE_p}{dx}}$ (10)

Les positions d'équilibre sont les points où la dérivée de l'énergie potentielle s'annule



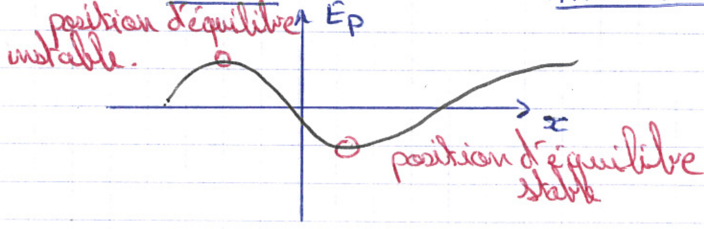

* On dit qu'une position d'équilibre est stable si la force subie autour de cette position d'équilibre tend à ramener le point matériel vers la position d'équilibre.

On doit avoir :

$\left.\begin{array}{l} F(x+dx) > 0 \text{ si } dx < 0 \\ F(x+dx) < 0 \text{ si } dx > 0 \end{array}\right\} \underbrace{\dfrac{F(x+dx) - \overset{=0}{\widehat{F(x)}}}{dx}}_{\dfrac{dF}{dx} < 0} < 0$

or $F = -\dfrac{dE_p}{dx}$ donc on a $\boxed{\dfrac{d^2E_p}{dx^2} > 0}$

Une position d'équilibre est stable ssi c'est un minimum d'énergie potentielle.
instable maximum




# III) Solide en rotation autour d'un axe fixe.

## 1) Moment cinétique.

### a) Définition.

Le moment cinétique $\vec{\sigma}$ d'un point matériel M de quantité de mouvement $\vec{p}$ par rapport à un point O est :

$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\underline{\vec{v}}$ vitesse de M.

### b) Pour un solide

$\|\vec{\sigma}\|$ en $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

Le moment cinétique d'un solide par rapport à un point O est la somme des moments cinétiques de ses points par rapport à O

$\vec{L}_O = \sum \vec{\sigma}_O = \iiint_{solide} \vec{OM} \wedge \vec{v}\, d\underset{dm}{\mathcal{Z}}$

c) Moment cinétique scalaire.

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta$, on définit le <u>moment cinétique scalaire</u> comme la projection du moment cinétique du solide par rapport à $O \in \Delta$ sur l'axe orienté $\Delta$ :

$$L_\Delta = \vec{L}_{O\in\Delta} \cdot \vec{e}_\Delta$$

Pour un solide en rotation à la vitesse angulaire $\Omega$ autour de $\Delta$, on a

$$L_\Delta = J_\Delta \, \Omega$$

démonstration :
$L_\Delta = \vec{L} \cdot \vec{e}_\Delta$
$\vec{L} = \sum \vec{OM_i} \wedge m \vec{v_i}$
$\vec{v_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM_i}$
$L_\Delta = \sum \vec{OM_i} \wedge m(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{e_\Delta}$
$= \sum (\vec{e_\Delta} \wedge \vec{OM}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$
$= \omega \times \sum m \|\vec{e_\Delta} \wedge \vec{OM}\|^2$
$= \omega \times \sum m H_i M_i^2$

$J_\Delta$ : moment d'inertie du solide par rapport à $\Delta$. (en $kg.m^2$)

si $\vec{e_\Delta} = \vec{e_z}$ $\quad J_\Delta = \underset{solide}{\iiint} \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{masse volumique}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{= d^2 : \text{distance à l'axe}} \underbrace{d\tau}_{\text{volume élémentaire}}$

* $J_\Delta$ est d'autant plus grand que $\rho$ est grand
* la masse est loin de l'axe.

$$J_\Delta = \sum_i m_i \|\vec{H_iM_i}\|^2 = \sum_i m_i r_i^2$$

2) Moment d'une force

a) Définition.

- Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O est $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OP} \wedge \vec{F}$
P : point d'application de la force.
- Le moment d'une force par rapport à un axe orienté $\Delta$ passant par O est la projection de $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sur $\Delta$ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = (\vec{OP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e_\Delta}$$

* Le moment d'une force par rapport à un axe $\Delta$ est une grandeur traduisant l'aptitude de la force à faire tourner le système autour de $\Delta$.

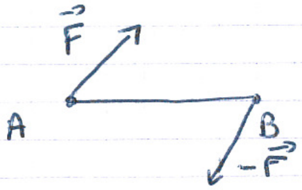
b) Couple de forces.

Un couple est un ensemble de forces appliquées à un solide dont la résultante (somme) est nulle mais dont la somme des moments n'est pas nulle..

par exemple deux forces opposées $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ appliquées en deux points A et B constituent un couple. Le moment résultant est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_O(-\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F} - \vec{OB} \wedge \vec{F} = (\vec{OA} - \vec{OB}) \wedge \vec{F} = \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{BA} \wedge \vec{F} \quad \Rightarrow \text{ne dépend pas de O !!}$$




* remarque : somme des moments $\neq$ moment de la somme !

c) Liaison pivot.

Une liaison pivot autorise uniquement la rotation autour d'un axe. Pour une liaison pivot idéale la rotation se fait sans frottements. Donc le moment des forces suivant l'axe de rotation est nul

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0}$$

torseur d'actions de la liaison pivot : $\begin{Bmatrix} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{M\in\Delta}$

résultante ↗ ↖ Moment.

## 3) Théorème du moment cinétique. (TMC)

### a) Théorème du moment cinétique.

Dans un référentiel galilien, la variation du moment cinétique d'un solide est reliée au moment des forces appliquées par la relation :

$$\frac{d\vec{L}_M}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_M(\vec{F})$$

demo : $\vec{L}_O = \sum \vec{OM}\wedge\vec{p}$ $\quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{OM}}{dt}\wedge\vec{p} + \vec{OM}\wedge\frac{d\vec{p}}{dt}$ $\quad \vec{v}\wedge m\vec{v} + \mathcal{M}_O(\vec{F})$

Pour un solide en rotation autour d'un axe $\Delta$, on peut projeter cette relation sur l'axe $\Delta$ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

### b) Application au pendule pesant.

Soit un solide S pouvant tourner librement (liaison pivot) autour d'un axe $\Delta$ horizontal et soumis uniquement à son poids :


On admet que la résultante des forces de pesanteur peut être modélisé par une force unique $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée au centre de gravité G du solide.

L'orientation de S est repérée par l'angle $\theta$

On note $J_\Delta$ le moment d'inertie de S par rapport à $\Delta$. On note $l$ la distance entre G et $\Delta$.

Application du TMC : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = (\vec{OG}\wedge\vec{P})\cdot\vec{e}_\Delta = -mgl\sin\theta$

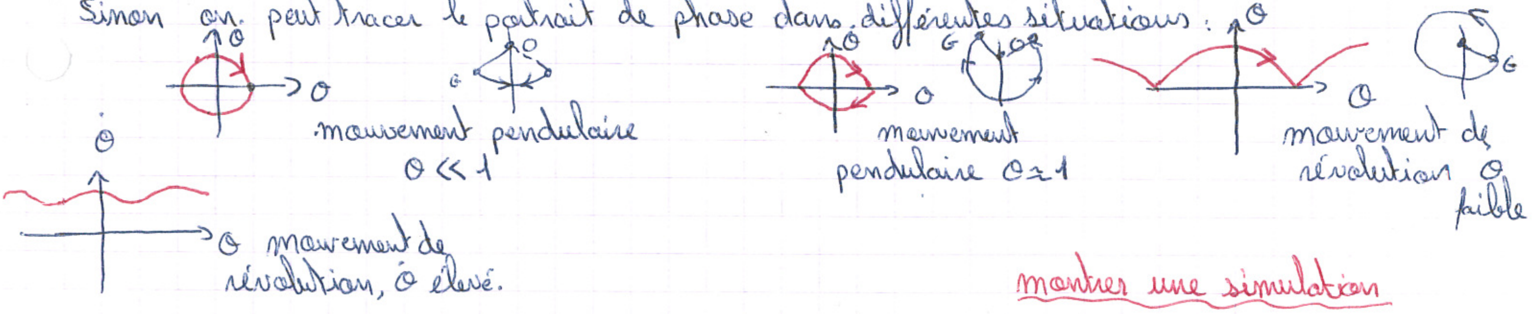
$$= J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = J_\Delta\frac{d^2\theta}{dt^2} = J_\Delta\ddot{\theta}$$

* on obtient l'équation du mouvement : $J_\Delta\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$.

$J_\Delta\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$ ⇝ équation différentielle non linéaire.

* Si on se limite à $\theta \ll 1$ alors $\sin\theta \simeq \theta$ et on a $J_\Delta\ddot{\theta} + mgl\,\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ $\quad \omega_0^2 = \frac{mgl}{J_\Delta}$
Comportement d'oscillateur harmonique.

Sinon on peut tracer le portrait de phase dans différentes situations :




montrer une simulation

## 4) Aspect énergétique

### a) Energie cinétique d'un solide en rotation

L'énergie cinétique d'un solide en rotation est la somme des énergies cinétiques des points qui le composent

* Solide en rotation à la vitesse angulaire $\Omega$ autour de l'axe $\Delta = Oz$ :

$$E_c = \iiint_{solide} \frac{1}{2} v^2 \underbrace{dm}_{\text{masse de l'élément de volume } d\tau} = \iiint_{solide} \frac{1}{2}\rho (r\Omega)^2 d\tau = \frac{1}{2}\Omega^2 \iiint_{sol.} \rho\, r^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\Omega^2 \underbrace{\iiint_{sol.} \rho(x^2+y^2)\,d\tau}_{J_\Delta} \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\Omega^2} \text{ en Joules.}$$

## b) Loi de l'énergie cinétique.

On part du TMC : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \iff J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \iff J_\Delta \Omega \frac{d\Omega}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \times \Omega$

$\Omega \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \frac{d\Omega^2}{dt} = \Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\Omega \iff \boxed{\underbrace{\frac{dE_c}{dt}}_{\text{variation d'EC}} = \underbrace{\Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \times \Omega}_{\text{puissance des forces appliquées}}}$

$\Rightarrow$ La puissance (en Watts) fournie par une force de moment $\mathcal{M}_\Delta$ par rapport à $\Delta$ est $P = \mathcal{M}_\Delta \times \Omega$.

Application au pendule simple :


$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \qquad \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgl\sin\theta$

donc $\frac{1}{2} J_\Delta \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -mgl\sin\theta \times \dot{\theta}$

$\frac{1}{\cancel{2}} J_\Delta \times \cancel{2}\ddot{\theta}\cancel{\dot{\theta}} = -mgl\sin\theta \times \cancel{\dot{\theta}}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$

↳ on retrouve la même équation !

# Induction et conversion électromécanique.

## I] Le champ magnétique.

### 1) Définition.

Le champ magnétique est une grandeur vectorielle qui permet de caractériser les effets magnétiques (courants, aimants permanents). Le champ magnétique est généralement noté $\vec{B}$ et s'exprime en Tesla (T) (Nikola Tesla 1856-1943). Dans les unités SI :

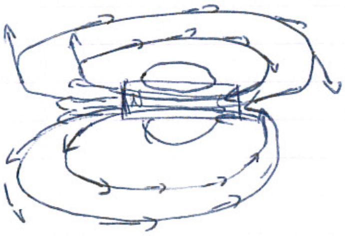
$1T = 1kg.A^{-1}.s^{-2} = 1V.s.m^{-2}$

Le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ est définit en tout point $\vec{r}$ de l'espace, c'est donc un champ vectoriel.

### 2) Représentation

On représente le champ magnétique dans l'espace par des lignes de champ qui sont en tout point tangentes au champ magnétique. vecteur

exemple :



* Le champ mag. est uniforme lorsque les lignes de champ sont parallèles

* Plus les lignes de champ sont serrées, plus le champ est élevé

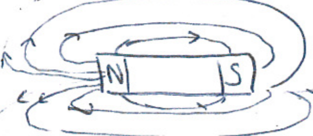
* Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées, elles ne se croisent jamais. Les boucles fermées par les lignes de champ entourent les sources.

### 3) Sources de champ magnétique.

#### a) Les aimants permanents.

Un aimant permanent est un matériau qui produit spontanément un champ magnétique. Il possède un pôle nord et un pôle sud, les lignes de champ vont du pôle nord vers le pôle sud (à l'extérieur)

aimant droit :




Le champ magnétique à proximité d'un aimant permanent peut aller jusqu'à environ 1T.