DS5 : Mécanique – Autour du vélo

Durée 2h, calculatrices autorisées. Le DS est probablement trop long pour que vous puissiez tout faire, c'est normal, faites-en le maximum.

Dans ce problème, on se propose de modéliser quelques situations rencontrées lors de la pratique du vélo. On commencera par négliger l'influence des frottements de l'air puis on verra quelques situations où l'on peut les prendre en compte.

I – Sans les frottements de l'air

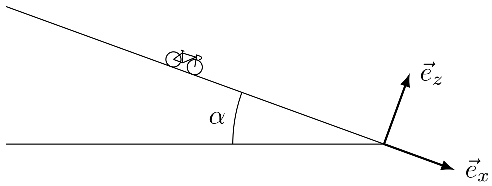
Dans cette partie, on néglige les frottements de l'air, par contre on *ne néglige pas* les frottements entre les roues du vélo et la route.

On commence par considérer la situation où le vélo roule sans glissement sur une route horizontale. L'effort de pédalage du cycliste est modélisé par une force unique $\vec{F}_1$ horizontale dirigée vers l'avant appliquée au vélo (elle correspond à la composante tangentielle de la force exercée par la route sur le vélo). La masse de l'ensemble cycliste+vélo est notée m.

On étudie le mouvement du cycliste dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_x$ horizontal vers la droite et $\vec{e}_z$ vertical vers le haut.

1. Expliquer brièvement pourquoi on ne peut pas raisonnablement négliger les frottements entre les roues du vélo et la route.
2. Faire un schéma (on pourra représenter le vélo par un point matériel) sur lequel on représentera les forces appliquées au cycliste.
3. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen et du référentiel terrestre.
4. Expliquer pourquoi on peut écrire que l'accélération du cycliste comme $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$ puis exprimer l'accélération $\ddot{x}$ du cycliste dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$.
5. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$ du cycliste et déterminer la distance $d(t)$ parcourue au cours du temps. On pourra prendre l'origine du repère au point de départ du cycliste et supposer qu'il démarre avec une vitesse nulle.
6. On estime que l'accélération $\vec{a}$ du cycliste a une norme $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Si la vitesse de croisière du cycliste est de $45\,\mathrm{km/h}$, estimer le temps qu'il va mettre à atteindre cette vitesse et la distance parcourue pendant la phase d'accélération.

Le cycliste se trouve maintenant dans une descente formant un angle α avec l'horizontale représentée ci-dessous. On suppose que le cycliste ne pédale pas dans la descente et qu'il ne freine pas non plus.



7. Expliquer pourquoi, dans ces conditions, la composante tangentielle de la force exercée par la route sur le cycliste est nulle.
8. Refaire le schéma de la figure précédente en faisant apparaître les différentes forces qui s'appliquent sur le cycliste. (Il n'est pas nécessaire de dessiner le vélo !)
9. Exprimer l'accélération du cycliste en fonction de α et g.
10. En déduire la vitesse du cycliste $v(t)$ en fonction du temps et la distance $d(t)$ parcourue. On pourra prendre l'origine du repère au point de départ du cycliste et supposer qu'il démarre avec une vitesse nulle
11. On considère une pente de $\alpha = 10°$ longue de $10\,\mathrm{km}$. Déterminer le temps mis par le cycliste pour la descendre et la vitesse atteinte en bas de la descente. Commenter le résultat obtenu.

Le cycliste se trouve maintenant dans une montée formant un angle α avec l'horizontale. Il monte à une vitesse constante v_0. On modélise l'effort de pédalage par une composante tangentielle $\vec{F}_2$ de la force exercée par la route sur le vélo.

12. Faire un schéma faisant apparaître les forces appliquées au cycliste et expliquer pourquoi la somme de ces forces est nulle.
13. En déduire que l'on doit avoir $F_2 = \left\|\vec{F}_2\right\| = mg\sin(\alpha)$.
14. Exprimer la puissance p fournie par le cycliste en fonction de F_2 et v_0 puis en fonction de m, g, α et v_0.

Pour un cycliste de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ qui monte à vitesse constante $v_0 = 10\,\mathrm{km/h}$ une pente avec $\alpha = 10°$, on trouve que la puissance fournie par le cycliste est de l'ordre de $p \approx 400\,\mathrm{W}$

II – Avec les frottements de l'air

On considère maintenant que les frottements de l'air ne sont plus négligeables, on les modélise par une force $\vec{f}$ opposée à la vitesse $\vec{v}$ et de norme $\|f\| = -k\|v\|^2$.

Le cycliste se trouve sur une route horizontale et roule à vitesse constante $\vec{v}_0$. La force de pédalage du cycliste est modélisée par une force $\vec{F}_1$ dirigée dans le sens de $\vec{v}_0$.

15. Donner l'unité de k.
16. Faire un schéma en représentant les forces appliquées au cycliste. Pourquoi peut-on dire que la somme des forces appliquées au cycliste est nulle ?
17. Exprimer la puissance p fournie par le cycliste en fonction de $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ et k. En déduire l'expression de k en fonction de p et v_0.

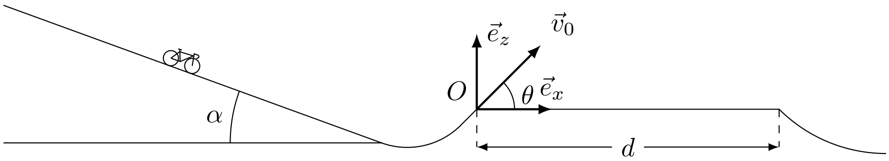
Pour le même cycliste que dans la partie précédente qui développait une puissance de $400\,\mathrm{W}$, pour une vitesse v_0 de l'ordre de $45\,\mathrm{km/h}$, on trouve $k \approx 0{,}2\,\mathrm{SI}$.

On place maintenant à nouveau le cycliste dans la descente de la question 7. Il ne pédale pas et se laisse descendre en roue libre.

18. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le cycliste.
19. Déterminer une équation différentielle satisfaite par la vitesse v du cycliste.
20. Expliquer en quelques mots pourquoi le cycliste va atteindre une vitesse limite v_{lim} et donner l'expression de v_{lim} en fonction de k, m, g et α.
21. Déterminer la valeur numérique de v_{lim} pour le même cycliste de $80\,\mathrm{kg}$ qui descend une pente de $\alpha = 10°$.
22. Estimer la vitesse que le cycliste peut espérer atteindre s'il pédale dans la descente.
23. À quelle situation physique correspond le cas $\alpha = 90°$? Déterminer la valeur numérique de v_{lim} dans cette situation.

III – Cyclisme acrobatique

Le cycliste est placé dans la situation (délicate) représentée ci-dessous. Il se trouve dans une descente où il a atteint sa vitesse limite v_0 et s'apprête à s'engager sur un tremplin formant un angle $\theta = 45°$ avec l'horizontale. On suppose que le cycliste quitte le tremplin au point O avec sa vitesse v_0. *On néglige les frottements de l'air* à partir du moment où le cycliste a quitté le tremplin.



24. Lorsque le cycliste quitte le tremplin, faire le bilan des forces auxquelles il est soumis.
25. Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ de la trajectoire du cycliste dans les airs.
26. Exprimer la distance d à laquelle on doit placer l'arrivée du tremplin pour que le cycliste atterrisse dans de bonnes conditions en fonction de v_0 et g.
27. Calculer la valeur numérique de d pour $v_0 = 100\,\mathrm{km/h}$.