

DS8 : Induction et thermodynamique

Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : LE TRANSFORMATEUR TORIQUE (CCP 2018)

On étudie un modèle simplifié du transformateur schématisé sur la figure 1 ci-dessous. Il est constitué d'un matériau magnétique torique d'axe (Oz) à section carrée de côté a et de rayon intérieur R . L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ représentée pour un point M quelconque sur le schéma.

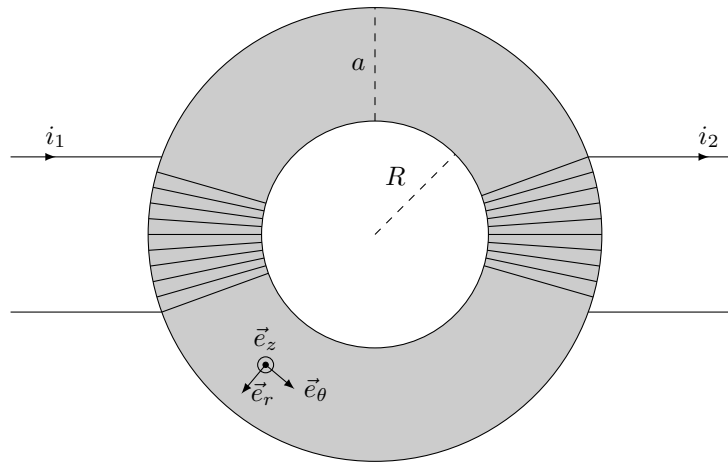


Figure 1 – Vue de dessus du transformateur

Le bobinage « primaire », noté C_1 , est un enroulement de N_1 spires autour de ce tore, il est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Le bobinage « secondaire », noté C_2 , est un enroulement de N_2 spires autour de ce tore, il est parcouru par un courant d'intensité i_2 .

on admet que dans le tore, le champ magnétique est dirigé dans la direction de \vec{e}_θ .

1. Si les courants i_1 et i_2 sont positifs, le champ magnétique est-il suivant \vec{e}_θ ou $-\vec{e}_\theta$?

On peut montrer (TSI2) que le champ créé par le circuit C_1 en tout point à l'intérieur du tore est :

$$\vec{B}_1 = \pm \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Le signe $+$ ou $-$ est à choisir en fonction de la réponse à la question précédente. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI est la perméabilité magnétique du vide.

2. Donner l'unité de μ_0 .
3. Donner l'expression du flux magnétique φ du champ magnétique \vec{B}_1 à travers une spire du circuit C_1 sous forme d'une intégrale de surface. On montrera que l'intégrale porte sur les coordonnées r et z et dans ces conditions $dS = dr dz$.
4. Calculer l'intégrale précédente et donner l'expression de φ .
5. En déduire le flux total ϕ de \vec{B}_1 à travers les N_1 spires du circuit C_1 .
6. Rappeler la définition de l'inductance propre L (ou coefficient d'auto-inductance).
7. En déduire que l'inductance propre L_1 du circuit C_1 est donnée par :

$$L_1 = N_1^2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)$$

8. Quelle est alors l'expression de l'inductance propre L_2 du circuit C_2 ?
9. Rappeler la définition du coefficient d'inductance mutuelle M .
10. Montrer que ce coefficient M est donné par :

$$M = N_1 N_2 \frac{a\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)$$

11. La résistance des bobinages étant négligée, exprimer la tension u_1 aux bornes du primaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_1 et M .
12. Faire de même pour la tension u_2 aux bornes du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_2 et M .

13. En déduire que l'on a la relation suivante :

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{d i_2}{d t}.$$

14. Prouver que cette relation se simplifie pour faire apparaître ce que l'on appelle le rapport de transformation défini comme le rapport des tensions du secondaire et du primaire :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

15. Expliquer alors comment les transformateurs constituent des éléments centraux de la chaîne de transport de l'électricité.
 16. Que peut-on dire du rendement en puissance entre primaire et secondaire ?
 17. Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifiez votre réponse.
 18. Techniquement les matériaux magnétiques utilisés dans les transformateurs sont réalisés en accolant des feuillets en acier. Quels types de pertes cherche-t-on ainsi à éviter ?

Exercice 2 : LE MOTEUR ASYNCHRONE (CENTRALE 2016)

Le compresseur d'une pompe à chaleur fonctionne grâce à un moteur asynchrone que nous allons à présent étudier. Le moteur asynchrone est constitué de deux bobinages fixes (modélisés par des solénoïdes infinis) et d'une bobine plate carrée en rotation autour d'un axe fixe. Il est alimenté par le secteur via une prise de courant classique.

Dans toute cette partie, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

En faisant abstraction des spires manquant dans la partie centrale, on considère deux solénoïdes (1) et (2) identiques, de rayon A , de grande dimension selon leur axe, disposés de sorte que leurs axes respectifs $(x'x)$ et $(y'y)$ soient perpendiculaires et concourant au point O (figure 1). Ils comportent n spires par mètre et sont parcourus par les courants respectifs $i_1(t) = I_M \cos(\omega_0 t)$ et $i_2(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \alpha)$ où ω_0 est une pulsation constante. Le sens de parcours des courants est indiqué sur la figure 1.

On rappelle : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

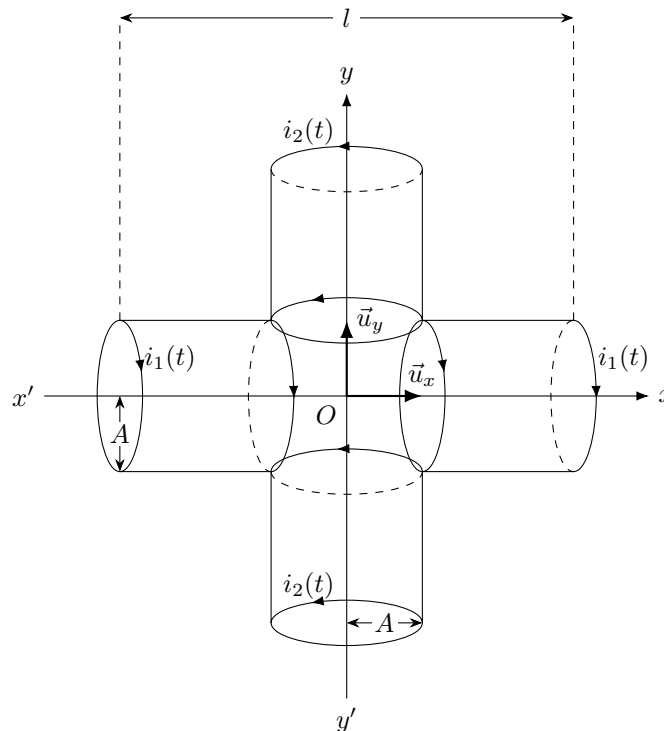


FIGURE 1 – Moteur asynchrone

- À quelle condition peut-on faire l'hypothèse de l'approximation des régimes quasi-stationnaires ?
- L'intensité du champ magnétique créé par un solénoïde infini comportant n spires par mètre, parcouru par un courant i est $B = \mu_0 n i$. Donner la direction et le sens des champs magnétiques créés par les solénoïdes (1) et (2) lorsque $i_1 > 0$ et $i_2 > 0$.
- Montrer que l'inductance propre L_S d'un solénoïde est donnée par : $L_S = \mu_0 n^2 \pi A^2 l$. Calculer la valeur numérique de L_S sachant que chaque solénoïde est constitué d'un enroulement de 4 rangées de spires jointives. On donne $a = 0,2 \text{ mm}$ le rayon du fil de cuivre utilisé, $A = 2 \text{ cm}$ et $l = 20 \text{ cm}$.

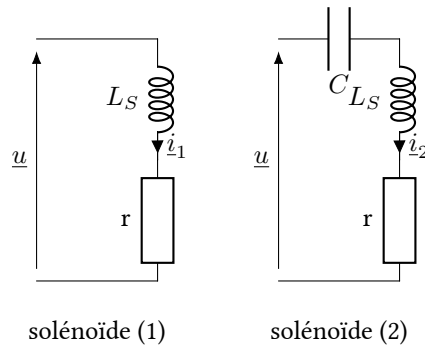


FIGURE 2 – Circuit électrique des solénoïdes du moteur

4. On considère maintenant l'association des deux solénoïdes (1) et (2) décrite ci-dessus. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé en O dans les cas où $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = -\pi/2$.
5. Pourquoi peut-on qualifier ce champ magnétique de *champ tournant*? Dans quel sens tourne le champ lorsque $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = -\pi/2$?
Dans la suite du problème, on se placera dans le premier cas $\alpha = \pi/2$.
6. On donne $I_M = 0,1$ A. Calculer la norme du champ magnétique créé en O . Commenter.

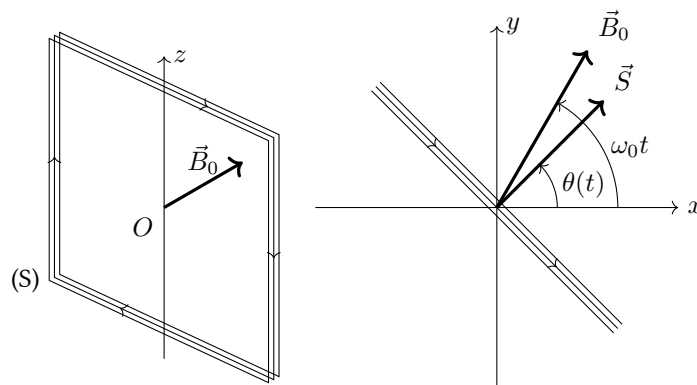
En pratique, on réalise un déphasage de $\pi/2$ entre les deux courants en mettant un condensateur C en série avec le solénoïde (2). Les circuits électriques pour les solénoïdes (1) et (2) sont représentés sur la figure 2.

7. La résistance r correspond à la résistance du fil de cuivre utilisé dans la bobine. La résistance d'un conducteur cylindrique de longueur l_c , de surface S et de résistivité ρ est $r = \frac{\rho l_c}{S}$.
Calculer la valeur de r pour les solénoïdes sachant. La résistivité du cuivre $\rho = 17 \times 10^{-9}$ m.
8. Montrer que le déphasage α entre les intensités qui circulent dans les bobines est :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{L_S \omega_0}{r}\right) - \arctan\left(\frac{L_S \omega_0 - \frac{1}{C \omega_0}}{r}\right)$$

9. En déduire l'expression de la capacité C du condensateur à utiliser pour obtenir un déphasage de $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Calculer la valeur numérique de C .

On place en O une bobine plate carrée (S) de surface $S = b^2$ comportant N spires orientées. Le vecteur surface $\vec{S} = b^2 \vec{n}$ reste dans le plan xOy où il est repéré à la date t par l'angle $\theta(t) = \omega_0 t$ par rapport à Ox .



Cette bobine (S) possède une résistance R et une inductance propre L .

Le côté b de la bobine plate (S) est supposé très petit devant le rayon A des deux solénoïdes. Ainsi, le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé par les deux solénoïdes peut être supposé uniforme sur toute la surface S de la bobine (S), on le notera \vec{B}_0 . Dans le plan xOy , il est repéré à la date t par l'angle $\omega_0 t$.

En fonctionnement, cette bobine (S) entraîne le reste du dispositif en exerçant sur lui un couple $+\Gamma \vec{u}_z$. On considère que la liaison entre la bobine et son support est parfaite.

10. Justifier sans calcul l'existence d'un courant induit $i(t)$ dans la bobine (S).
11. Justifier sans calcul l'origine du mouvement de la bobine (S).
12. Faire un schéma électrique équivalent de la bobine (S) en faisant apparaître l'inductance L , la résistance R et la fem induite e dans la bobine. On fera apparaître l'intensité i du courant qui circule dans la bobine.
13. Écrire l'équation différentielle (E) vérifiée par l'intensité du courant $i(t)$ circulant dans (S). Pour alléger les notations, on pourra poser : $\Omega = \omega_0 - \omega$ et $\Phi_0 = N S B_0$.

Dans la suite du problème, on suppose le régime forcé établi : $\Omega = \text{constante}$.

On note : $i(t) = i_m \sin(\Omega t - \psi)$ la solution de l'équation (E) en régime établi.

14. Exprimer i_m et ψ en fonction de Ω et des données du problème.
15. Définir le moment magnétique \vec{M} associé à la bobine plate (S).
16. Expliciter l'action mécanique de Laplace s'exerçant sur la bobine (S).
17. Exprimer le couple $\Gamma(t)$ en fonction de Ω et des données du problème.
18. Dans un fonctionnement usuel, c'est la valeur moyenne temporelle $\langle \Gamma \rangle$ du couple qui intervient.

Montrer que : $\langle \Gamma \rangle = \frac{\Gamma_0(1-X)}{1+\lambda^2(1-X)^2}$ avec $X = \omega/\omega_0$.

On exprimera λ et Γ_0 en fonction des données du problème.

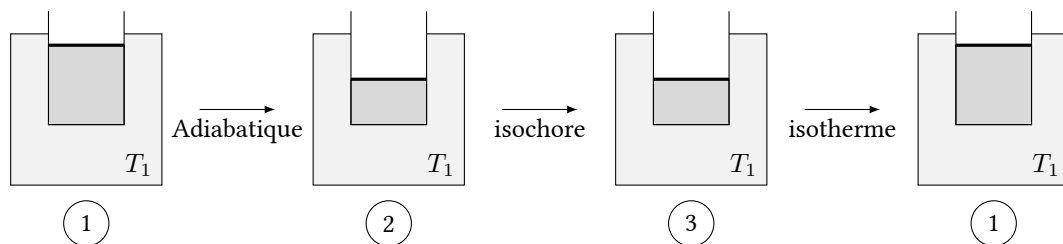
19. Tracer l'allure de $\langle \Gamma \rangle / \Gamma_0$ en fonction de X en prenant $\lambda = 4$. Commenter l'allure de la courbe obtenue, notamment sous l'angle du moteur asynchrone.
Dans la suite du problème, on considère la plage de vitesse : $0 < \omega < \omega_0$.
20. On s'intéresse à la stabilité du moteur en cours de fonctionnement. La partie utilisatrice impose une valeur de $\langle \Gamma \rangle$, on trouve alors en général deux valeurs possibles de ω : ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$. Montrer qualitativement que la valeur de ω_2 correspond à un régime stable.
21. Exprimer la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ de la puissance mécanique fournie par le moteur. Commenter l'expression obtenue.

Exercice 3 : TRANSFORMATION CYCLIQUE D'UN GAZ PARFAIT

On considère n moles de gaz parfait monoatomique enfermé dans un cylindre fermé par un piston mobile. Initialement, le volume du cylindre est V_1 , la pression du gaz est P_1 et sa température T_1 , c'est l'état 1. Le cylindre est en contact thermique avec un réservoir d'eau à la température T_1 . Dans toute la première partie, le réservoir d'eau est considéré comme un thermostat.

Le gaz subit la série de transformations suivante :

- Compression adiabatique quasistatique jusqu'au volume $V_2 < V_1$: état 2 ;
- Refroidissement isochore pour revenir à la température T_1 du thermostat : état 3 ;
- Détente isotherme quasistatique pour revenir à l'état 1.



Pour une transformation adiabatique quasistatique, la loi de Laplace indique qu'à chaque instant de la transformation on a $PV^\gamma = \text{constante}$ avec $\gamma = \frac{5}{3}$ pour un gaz parfait monoatomique.

1. Rappeler le premier principe de la thermodynamique pour un système au repos.
2. Qu'est-ce qu'une transformation adiabatique, en pratique quelles sont les transformations que l'on pourra considérer comme adiabatiques ?
3. Qu'est-ce qu'une transformation isotherme, en pratique quelles sont les transformations que l'on pourra considérer comme isothermes ?
4. Exprimer la pression P_2 atteinte par le gaz dans l'état 2 en fonction de P_1 , V_1 et V_2 .
5. En déduire l'expression de la température T_2 atteinte par le gaz dans l'état 2 en fonction de T_1 , V_1 et V_2 .
6. Représenter les transformations subies par le gaz dans un diagramme (P, V) .
7. Montrer que le travail des forces de pression reçu par le gaz lors de la transformation $1 \rightarrow 2$ vaut :

$$W_{12} = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right)$$

On pourra au choix calculer l'intégrale donnant le travail W_{12} ou utiliser le premier principe entre les états 1 et 2.

8. Que vaut le travail W_{23} reçu par le système lors de la transformation $2 \rightarrow 3$? Exprimer la chaleur Q_{23} reçue par le système au cours de cette transformation en fonction de T_1 et T_2 . On pourra judicieusement appliquer le premier principe.
9. Exprimer le travail W_{31} et la chaleur Q_{31} reçus par le système au cours de la transformation $3 \rightarrow 1$ en fonction de V_2 et V_1 .
10. Montrer qu'au cours d'un cycle, le travail et la chaleur reçus par le système sont :

$$W = P_1 V_1 \left[\frac{3}{2} \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) - \ln \frac{V_1}{V_2} \right] \quad \text{et} \quad Q = -W$$

11. Quel est le signe de W ? Quel est le signe de Q ? On pourra donner un argument physique, ou étudier mathématiquement le signe de W et Q .
12. Expliquer qualitativement ce qu'il va se passer avec l'eau du réservoir lorsqu'on effectue un grand nombre de cycles identiques. Pourra-t-on toujours le considérer comme un thermostat ?