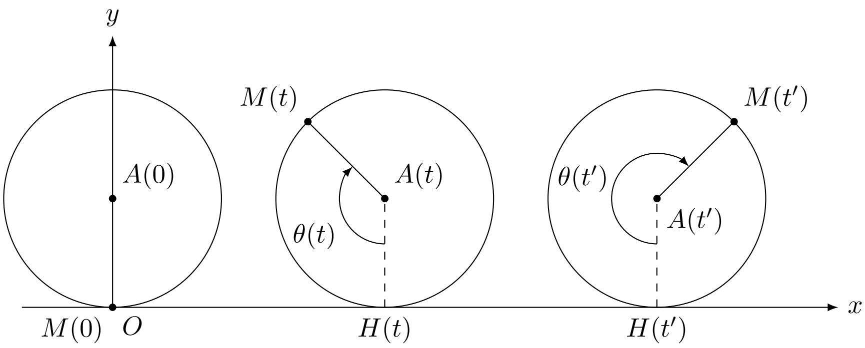
DM5 : Mécanique — corrigé

Exercice 1 : La cycloïde

I. Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Comme la roue roule sans glisser sur le sol, la distance parcourue est égale à la longueur de l'arc de cercle compris entre $M(t)$ et $H(t)$, soit $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. En projetant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur les axes Ox et Oy on obtient $\overrightarrow{AM} = -R\sin(\theta)\vec{u}_x - R\cos(\theta)\vec{u}_y$.
3. On décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$. Or on a déja vu que $\overrightarrow{OH} = R\theta(t)\vec{u}_x$, on voit clairement sur le schéma que $\overrightarrow{HA} = R\vec{u}_y$ et on a trouvé $\overrightarrow{AM}$ à la question précédente. En additionnant les trois on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = [R\theta(t) - R\sin(\theta)]\,\vec{u}_x + [R - R\cos(\theta)]\,\vec{u}_y$$

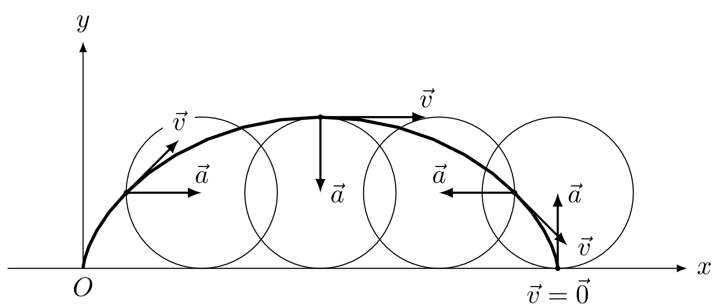
Ce qui correspond bien aux équations demandées.

II. Vecteur vitesse.

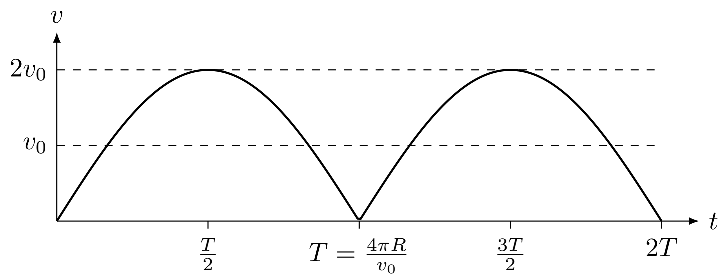
4. La vitesse du point A est la même que celle du point H et est constante. On a $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = v_0\vec{u}_x$. Or d'après la question I..1, $\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_x$. La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ est donc constante est vaut $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$.
5. Cette question est évidente, comme la distance AM est fixe égale à R, le mouvement est circulaire. En outre on vient de montrer que la vitesse de rotation est constante. Le mouvement est donc également uniforme.
6. Les composantes du vecteur vitesse s'obtiennent par dérivation de celles du vecteur position, on obtient :

$$\begin{cases} v_x(t) = R\dot{\theta}(t)\,[1 - \cos\theta(t)] \\ v_y(t) = R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

7. Schéma :



8. La norme v de $\vec{v}$ est : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\dot{\theta}\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}$ soit $v = v_0\sqrt{2 - 2\cos\theta}$
9. On a $1 - \cos\theta = 1 - \cos 2\frac{\theta}{2} = 1 - (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$
L'expression précédente se simplifie alors en $v = 2v_0\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$



III. Vecteur accélération.

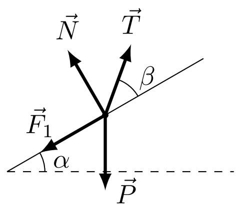
10. On obtient les composantes du vecteur accélération en dérivant celles du vecteur vitesse, on obtient :

$$\begin{cases} a_x = R\dot{\theta}^2 \sin\theta \\ a_y = R\dot{\theta}^2 \cos\theta \end{cases}$$

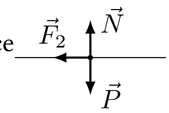
11. Voir schéma précédent.
12. La norme de v augmente pour $\theta \in [0, \pi]$ et elle diminue pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$
13. Le point correspondant à $\theta_4 = 2\pi$ est un point de rebroussement, la vitesse de M est nulle alors que l'accélération ne l'est pas.
14. La norme a du vecteur accélération vaut $a = R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R}$ et est donc constante. Pour le pneu en question elle vaut : $a \simeq 3700\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
15. On peut exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme $\vec{a} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{AM} = \dot{\theta}^2\overrightarrow{MA}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc effectivement toujours dirigé de M vers A.

Exercice 2 : Saut à ski

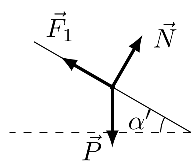
1. Schéma : (il ne faut pas oublier la composante $\vec{N}$ normale de la réaction du sol)



2. L'énoncé indique que le skieur remonte la piste à vitesse constante. Celà indique que son accélération est nulle, et d'après le PFD que la somme des forces appliquées est également nulle.
3. En projetant l'ensemble des forces sur l'axe $\vec{e}_x$ parallèle à la piste, orienté vers la droite, on a $-F_1 + T\cos\beta - P\sin\alpha = 0$. D'où $T = \frac{F_1 + P\sin\alpha}{\cos\beta}$. L'application numérique donne $T = 486\,\mathrm{N}$
4. Les forces appliquées au skieur sont : son poids $\vec{P}$, la réaction normale $\vec{N}$ de la piste et la force de frottement $\vec{F}_2$



5. Le PFD appliqué au skieur et projeté sur l'axe Ox horizontal orienté vers la droite donne : $m\ddot{x} = -F_2$. C'est l'équation différentielle demandée.
6. Une première intégration de l'équation différentielle donne $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) - \frac{F_2}{m}t$. On l'intègre une seconde fois pour obtenir $x(t) = \dot{x}(0)t - \frac{F_2}{2m}t^2 + x(0)$. Le skieur s'arrête lorsque sa vitesse est nulle, c'est à dire au temps $t_f = \frac{m\dot{x}(0)}{F_2}$ et il parcours la distance $d = x(t_f) - x(0) = \frac{m\dot{x}^2(0)}{2F_2}$. A.N. : $d \simeq 9{,}8\,\mathrm{m}$
7. Au début de la descente, la vitesse du skieur est faible donc la force de frottement également, la résultante des forces appliquées au skieur est non nulle et il accélère. Mais plus il accélère, plus la force de frottement est importante et limite son accélération. Il existe donc une vitesse limite pour laquelle la force de frottement devient si intense qu'elle compense les autres forces (le poids), à cette vitesse le skieur n'accélère plus, sa vitesse reste constante.
8. Si le mouvement du skieur est rectiligne homogène, la résultante des forces appliquées est nulle. En projetant les forces sur l'axe de la piste orienté vers la droite on obtient : $-F_3 + mg\sin\alpha' = 0$ donc $F_3 = mg\sin\alpha' = kv_l^2$. Donc la vitesse limite est $v_l = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha'}{k}} \simeq 28{,}3\,\mathrm{m/s}$



9. Lors du saut, la seule force appliquée au skieur est son poids $\vec{P}$.

10. Le PFD projeté sur les axes x et y donne directement $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = -g$
11. En intégrant deux fois ces équations différentielles, et en tenant compte des conditions initiales, on trouve $x(t) = v_{0x}t$ et $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, avec $v_{0x} = v_0 \cos\gamma$ et $v_{0y} = v_0 \sin\gamma$.
12. S'il retombe sur une surface plane située à 5 m en dessous du point F, on a $y(t_f) = -5\,\mathrm{m} = v_{0y}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2$ dont la solution donne $t_f \simeq 1{,}87$ s. La distance parcourue est $D = x(t_f) = v_{0x}t_f \simeq 45$ m.