

# Concours blanc – Système récupérateur d'énergie en discothèque – Corrigé

## 1 Modélisation de la conversion d'énergie

### 1.1 Mouvement de la dalle : mise en équation

1. La force de rappel exercée par le ressort est :  $\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$
2. La dalle étant au repos, la somme des forces appliquées est nulle, donc

$$\vec{P} + \vec{F}_r = 0 = -mg\vec{e}_x - k(x_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_x = 0 \quad \text{soit} \quad x_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

$\frac{mg}{k}$  est bien homogène à une distance, et on trouve logiquement que  $x_{\text{eq}} < \ell_0$  car le ressort se comprime sous le poids de la dalle.

3. Au bilan des forces de la question précédente, on ajoute le poids du danseur, on obtient  $x'_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{(m+M)g}{k}$ . L'affaissement de la dalle est  $\delta = \frac{Mg}{k}$ .
4. On choisit  $\delta = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$  et  $M = 80 \text{ kg}$ . On trouve  $k \approx 2,6 \times 10^5 \text{ N/m}$ .
5. On applique le PFD à la dalle en mouvement, on obtient en projetant sur l'axe  $\vec{e}_x$ .

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - \ell_0) + F - \alpha\dot{x} - D\dot{x}$$

En effectuant le changement de variables suggéré, on obtient :

$$m\ddot{X} = -kX + F - (D + \alpha)\dot{X} \quad \text{soit} \quad \ddot{X} + \left(\frac{D + \alpha}{m}\right)\dot{X} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{a_0} X = \underbrace{\frac{F}{m}}_{b_0}$$

### 1.2 Puissance électrique reçue par les LED

6.  $\underline{Z}_R = R$ ,  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ , et  $\underline{Z}_L = jL\omega$ .
7. La fréquence imposée par un danseur est de l'ordre de  $f \approx 1 \text{ Hz}$ , soit  $\omega = 2\pi f \approx 10 \text{ rad/s}$
8. Avec cette pulsation, le module de l'impédance associée à  $L$  est  $|\underline{Z}_L| = L\omega \approx 2 \times 10^{-2} \Omega \ll R$ . On négligera donc  $L$  devant  $R$ .
9. Lorsqu'on néglige  $L$ , on a un pont diviseur de tension, et  $v = \frac{R_L}{R + R_L}u$
10. La puissance instantanée reçue par le réseau de LED est  $P_L(t) = R_L i^2 = \frac{v^2}{R_L}$  soit :

$$P_L(t) = \underbrace{\frac{R_L}{(R + R_L)^2}}_A [K_t \gamma \dot{x}(t)]^2$$

11. La puissance instantanée fournie par la fem est :

$$P_u = ui = \frac{u^2}{R + R_L} = \frac{[K_t \gamma \dot{x}(t)]^2}{R + R_L} \quad \text{et} \quad P_p = \frac{P_u}{\eta} = \frac{[K_t \gamma \dot{x}(t)]^2}{\eta(R + R_L)}$$

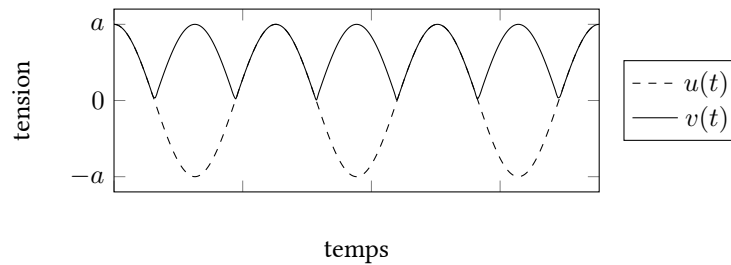
12. La puissance prélevée à la dalle peut aussi s'écrire  $P_p = -F_\alpha \dot{x}$  (puissance mécanique reçue par la force  $\vec{F}_\alpha$ ) ce qui donne :

$$F_\alpha = -\frac{(K_t \gamma)^2}{\eta(R + R_L)} \dot{x}(t)$$

13. Avec les valeurs données, on trouve  $\alpha \approx 3,0 \times 10^4 \text{ N s m}^{-1} \gg D$ . L'amortissement imposé par la génératrice est donc bien supérieur à l'amortissement mécanique. On peut donc négliger ce dernier.

### 1.3 Alimentation électrique des LED

14. Si la tension  $u$  est positive, les diodes  $D_1$  et  $D_3$  sont passantes, les diodes  $D_4$  et  $D_2$  sont bloquantes. Dans ce cas, on a  $u = v$ .  
Si  $u$  est négative, l'état des diodes est inversé et  $u = -v$ .
15. Les diodes servent à redresser la tension.



16.  $v(t)$  est un signal périodique de fréquence  $2f_0$ . Il contiendra donc la fréquence fondamentale  $2f_0$  ainsi que ses multiples (harmoniques) :  $4f_0, 6f_0, \dots, 2nf_0$ .
17. L'inconvénient de ce montage est que le courant qui circule dans les LED n'est pas constant, donc l'intensité des LED va varier dans le temps, elle vont clignoter.
18. Comme d'habitude,  $\tau = R_L C$ .
19. On doit avoir  $\tau \gg T = \frac{2\pi}{\omega}$  soit  $C \gg \frac{2\pi}{R_L \omega} \approx 4,2 \times 10^3 \mu\text{F}$ . C'est un peu plus gros que les condensateurs que l'on utilise d'habitude en TP (quelques  $\mu\text{F}$ ).

## 2 Simulations, optimisation des paramètres

### 2.1 Réponse indicielle

20.  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$
21.  $\omega_0$  est la pulsation propre du système, c'est sa pulsation naturelle d'oscillation (s'il n'y a pas de frottements).  $Q$  est le facteur de qualité de l'oscillateur, plus il est grand, plus l'oscillateur libre oscillera longtemps.
22. On cherche une solution particulière sous la forme du second membre qui est constant, on trouve  $X = \frac{F_0}{k}$ .
23. Un examen de la solution générale fournie montre qu'il n'y a pas d'oscillations (pas de cos ou de sin), et la présence de deux exponentielles décroissantes indique qu'il s'agit d'un régime apériodique.  
Avec la solution fournie, on a bien  $X(0) = 0$  et  $\dot{X}(0) = 0$ .

24.

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0 Q}{1 - Q^2} \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t / Q} \right)$$

25. On a montré à la question 10 que la puissance électrique instantanée reçue par les LED est proportionnelle à  $\dot{x}(t)^2$ . En utilisant l'expression ci-dessus de  $\dot{x}(t)$ , on obtient bien l'expression recherchée :

$$P_L(t) = K F_0^2 \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t / Q} \right)^2$$

26. On est en régime apériodique, donc  $Q < \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{Q} > Q$ . La seconde exponentielle tend donc vers 0 bien plus rapidement que la première. Donc aux temps longs, on peut négliger la seconde exponentielle et on a

$$P_L(t) \approx K F_0^2 e^{-2\omega_0 Q t} = K F_0^2 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{2Q\omega_0}$$

27. La courbe en trait plein représente  $F_0$  et la courbe en pointillés représente  $P_L$ . On applique

- une force de 1600 N entre 1,3 s et 1,6 s
- une force de 800 N entre 2,6 s et 3 s
- une force de 400 N entre 4,2 s et 4,8 s

28. Lorsque la dalle remonte, la puissance électrique vient des ressorts qui ont emmagasiné de l'énergie potentielle élastique. La puissance électrique tend vers zéro au bout d'un temps long car même en présence d'une force appliquée non nulle, la dalle se stabilise et arrête de se déplacer. Or l'énergie électrique est produite lorsque la dalle se déplace.
29. À la question, on a montré que la puissance électrique reçue par les LED est proportionnelle à  $F_0^2$ . C'est bien ce que l'on observe sur ce graphique, car lorsque la force  $F_0$  est divisée par 2, la puissance électrique  $P_L$  est divisée par 4.
30. Le temps typique de décroissance ne semble pas dépendre de  $F_0$ . D'après le graphique donné, on peut estimer qu'il est de l'ordre de  $\tau \approx 0,4$  s. L'expression de  $Q$  donnée à la question 26 avec les données du problème donne  $\tau \approx 0,1$  s. Ces deux valeurs sont du même ordre de grandeur.

## 2.2 Forçage sinusoïdal

31. On trouve graphiquement :  $F_0 \approx 1000 \text{ N}$ ,  $F_1 \approx 800 \text{ N}$  et  $\omega = 2\pi/T \approx 20 \text{ rad/s}$ .

32. L'équation devient :

$$-\omega^2 \underline{X} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F_1}{m} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

33. On obtient alors :

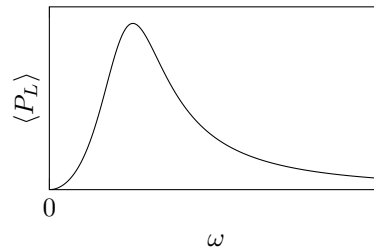
$$\underline{X} = \frac{F_1 e^{j(\omega t + \varphi)}}{m \left( j \frac{\omega \omega_0}{Q} - (\omega^2 - \omega_0^2) \right)} \quad \text{soit} \quad X_0 = |\underline{X}| = \frac{F_1}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left( \frac{\omega \omega_0}{Q} \right)^2}}$$

34. On a  $\dot{\underline{X}} = j\omega \underline{X}$  et donc  $V_0 = \omega X_0$

35. On a  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle P_L \rangle = 0$  et  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \langle P_L \rangle = 0$ .

$\langle P_L \rangle$  est maximum lorsque le dénominateur de son expression est minimum, donc lorsque  $\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = 0$ , donc lorsque  $\omega = \omega_0 \approx 65,5 \text{ rad/s}$ . Dans ces conditions, la puissance moyenne maximale récupérée est

$$\langle P_L \rangle_{\max} = \frac{(\eta F_1)^2 R_L}{2K_t^2 \gamma^2}$$

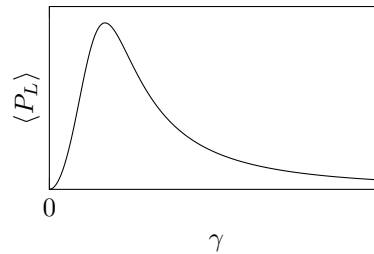


36. Le système récupère la puissance maximale lorsque  $\omega = \omega_0 \approx 65 \text{ rad/s}$ . Soit une fréquence de  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 10 \text{ Hz}$ , ou encore un tempo d'environ 625 battements/min. L'équipe qui va remporter le duel est celle dont le tempo est le plus proche de ce résultat donc c'est l'équipe 2 qui doit gagner.

37. Si les paramètres  $\omega$  et  $R_L$  sont fixés, l'expression de  $\langle P_L \rangle$  devient :

$$\langle P_L \rangle = \frac{A\gamma^2}{B\gamma^4 + C}$$

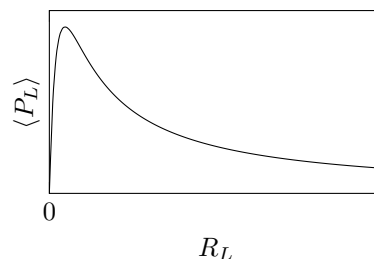
Dans ce cas, on a  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \langle P_L \rangle = 0$  et  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle P_L \rangle = 0$ . En faisant une analyse rapide de cette fonction, on trouve que sa dérivée ne s'annule que pour une valeur de  $\gamma > 0$ . On a donc l'allure suivante :



38. Lorsque  $\omega$  et  $\gamma$  sont fixés, l'expression de  $\langle P_L \rangle$  est de la forme :

$$\langle P_L \rangle = \frac{AR_L}{B + C(D + R_L)^2}$$

On a à nouveau  $\lim_{R_L \rightarrow \infty} \langle P_L \rangle = 0$  et  $\lim_{R_L \rightarrow 0} \langle P_L \rangle = 0$ . En faisant une analyse rapide de cette fonction, on trouve que sa dérivée ne s'annule que pour une valeur de  $R_L > 0$ . On a donc l'allure suivante :



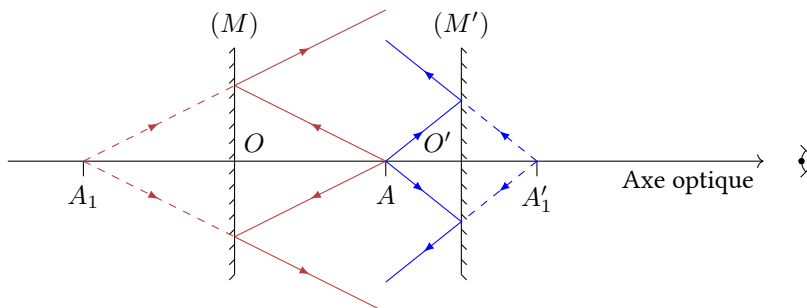
39. Les prédictions que nous avons faites sont compatibles avec le graphique de la figure 8. On observe un maximum de  $\langle P_L \rangle$  en fonction de  $R_L$  et de  $\gamma$ .
40. D'après ce graphique, pour que la puissance récupérée soit maximale, il faut choisir  $\gamma \approx 2 \text{ rad/m}$  et  $R_L \approx 300 \Omega$ .

### 3 Étude du « miroir infini »

#### 3.1 Éléments d'optique du dispositif

Les miroirs sont disposés parallèlement ; la distance  $L$  qui les sépare est de l'ordre de quelques centimètre. Une LED, assimilée à une source ponctuelle monochromatique, est disposée entre les deux miroirs, à une distance  $\overline{OA} = \ell$  du miroir  $(M)$ .

41. *Rigoureusement stigmatique* signifie que tous les rayons issus d'un point d'un objet passent par le même point de l'image après le système optique.
42. Schéma



43. On a  $\overline{OA_1} = -\ell$  et  $\overline{OA'_1} = L + L - \ell = 2L - \ell$ .
44. Pour que les images  $A_n$  sous la piste de danse apparaissent équidistantes, il faut que  $\overline{A_{n+1}A_n}$  soit constant et notamment, il faut que  $(\overline{A_{n+1}A_n})_{n \text{ pair}} = (\overline{A_{n+1}A_n})_{n \text{ impair}}$ . En utilisant la formule donnée, on trouve  $(\overline{A_{n+1}A_n})_{n \text{ pair}} = 2\ell$  et  $(\overline{A_{n+1}A_n})_{n \text{ impair}} = 2(L - \ell)$ . On doit donc avoir

$$2(L - \ell) = 2\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{L}{2}$$

Deux images successives sont alors distantes de  $L$ .

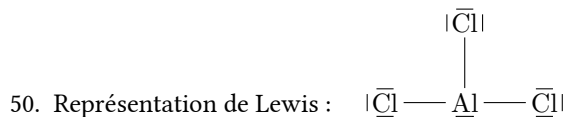
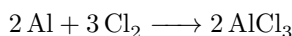
45. Les images n'apparaissent pas toutes aussi lumineuses car à chaque réflexion, un peu de lumière est transmise par le miroir sans tain. Plus  $n$  est élevé, plus la luminosité de l'image diminue.

#### 3.2 L'aluminium du miroir

Pour produire un miroir, on dépose une fine couche métallique sur une plaque de verre. Si cette couche est suffisamment fine, le miroir peut laisser passer une partie de la lumière incidente, c'est un miroir sans tain.

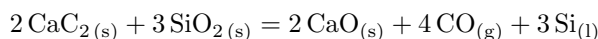
L'aluminium a pour numéro atomique  $Z = 13$ .

46. Le nombre  $Z$  représente le nombre de protons du noyau et le nombre d'électrons de l'atome neutre. Dans son état fondamental, la configuration électronique de l'aluminium est  ${}_{13}\text{Al} = 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$ .
47. L'aluminium se trouve dans la 3ème ligne (3s), à la première colonne du groupe  $p$ , soit la 13ème colonne.
48. L'ion le plus probable est celui où l'aluminium perd ses 3 électrons de valence pour devenir  $\text{Al}^{3+}$ .
49. L'équation de réaction est :



### 4 L'électronique à base de silicium

51. Lorsque la température augmente, la constante d'équilibre augmente et donc l'équilibre est déplacé vers la droite, c'est à dire dans le sens de production du Silicium. L'industriel a donc intérêt à travailler à haute température.
- 52.



53. À l'équilibre on a  $K_1^0 = \frac{p(\text{CO})^4}{p_0^4} = 3,68 \times 10^{24}$ , donc  $p(\text{CO}) = 1,4 \times 10^{11} \text{ Pa} = 14 \times 10^5 \text{ bar}$ . La quantité de matière de monoxyde de carbone formée est  $n(\text{CO}) = \frac{p(\text{CO})V}{RT} \simeq 7,8 \times 10^4 \text{ mol}$ . La pression d'équilibre est extrêmement élevée ce qui nécessiterait un réacteur très solide. Le monoxyde de carbone étant toxique, il faut prendre les précautions nécessaires.
54. La pression de la phase gazeuse est celle trouvée à la question précédente, soit  $p = 1,4 \times 10^6 \text{ Pa}$ . Pour trouver les quantités de matière des différentes espèces dans l'état final on établit le tableau d'avancement suivant :

|      | $2 \text{ CaC}_2(\text{s})$ | + | $3 \text{ SiO}_2(\text{s})$ | = | $2 \text{ CaO}(\text{s})$ | + | $4 \text{ CO}(\text{g})$ | + | $3 \text{ Si}(\text{l})$ |
|------|-----------------------------|---|-----------------------------|---|---------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|
| E.I. | $n_1$                       |   | $n_2$                       |   | 0                         |   | 0                        |   | 0                        |
| E.F. | $n_1 - 2\xi$                |   | $n_2 - 3\xi$                |   | $2\xi$                    |   | $4\xi$                   |   | $3\xi$                   |

avec  $n_1 = m(\text{CaC}_2)/M(\text{CaC}_2) = 0,5 \text{ mol}$  et  $n_2 = m(\text{SiO}_2)/M(\text{SiO}_2) = 0,3 \text{ mol}$ .

D'après la question précédente, on a  $4\xi = 7,8 \times 10^4 \text{ mol}$  donc  $\xi \simeq 2 \times 10^4 \text{ mol}$ . On voit donc que l'équilibre ne pourra pas être atteint.  $\text{SiO}_2$  est le réactif limitant, il est totalement consommé. On en déduit que l'avancement final est  $\xi_f = 0,1 \text{ mol}$ .

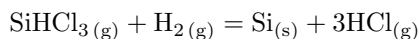
Les quantités de matière finales sont donc :

$n(\text{CaC}_2) = 0,3 \text{ mol}$ ,  $n(\text{SiO}_2) = 0 \text{ mol}$ ,  $n(\text{CaO}) = 0,2 \text{ mol}$ ,  $n(\text{CO}) = 0,4 \text{ mol}$  et  $n(\text{Si}) = 0,3 \text{ mol}$

La pression de la phase gazeuse est  $P = \frac{nRT}{V} \simeq 7,2 \text{ bar}$ .

La masse de silicium formée est  $m = 8,4 \text{ g}$

55. L'équation (2) devient :



56.  $[_{14}\text{Si}] = \underbrace{1s^2 2s^2 2p^6}_{\text{cœur}} \underbrace{3s^2 3p^2}_{\text{valence}}$        $[_{17}\text{Cl}] = \underbrace{1s^2 2s^2 2p^6}_{\text{cœur}} \underbrace{3s^2 3p^5}_{\text{valence}}$

