

Concours blanc 2020 – Épreuve de physique-chimie

Durée 4h. Calculatrices interdites. Lorsque des applications numériques sont demandées, les résultats seront donnés avec un chiffre significatif.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Partie I. Modélisation d'une suspension de véhicule

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat... Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre \vec{g} .

Données :

champ de pesanteur : $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Hypothèses :

tout au long du problème, on considèrera que :

- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

Notations :

dérivées temporelles :

pour une fonction $x(t)$ les dérivées temporelles seront notées :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ et } \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

fonctions complexes :

pour une fonction $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

On notera $\underline{x}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$,

où $x(t) = \text{Re}(\underline{x})$ et $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ (\underline{X}_m représente l'amplitude complexe de x).

On a donc $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$.

I.1 Suspension sans amortissement

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}$.

La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 1,0 \times 10^5 \text{ N m}^{-1}$ et de longueur au repos l_0 .

Dans cette première partie, on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule.

La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire \vec{u}_z (figure 1).

$z(t)$ représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort.

À l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_e .

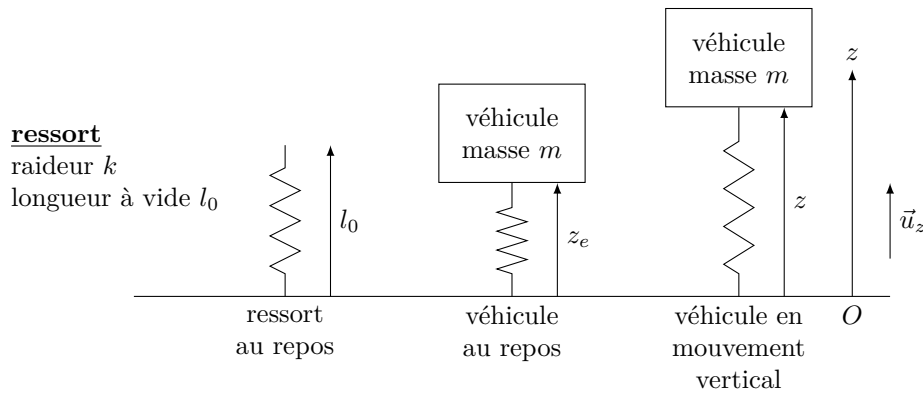


FIGURE 1 – Suspension sans amortissement

- Q1** – Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.
- Q2** – En appliquant le principe d'inertie (première loi de Newton), écrire la relation (équation (1)) entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre. En déduire l'expression de la cote z_e à l'équilibre en fonction de m , g , k et l_0 .
- Q3** – En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule lorsqu'il est hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle (équation (2)) vérifiée par $z(t)$. L'équation (2) reliera les différentes grandeurs z_e , k , m , $z(t)$ et ses dérivées temporelles.
- Q4** – Donner la solution générale de l'équation (2). Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de la suspension en fonction de k et m . Déterminer les valeurs numériques de ω_0 et T_0 .
- Q5** – On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 avec $z_0 < z_e$. À un instant $t = 0$, choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la solution $z(t)$ de l'équation (2) en prenant en compte les conditions initiales précédentes. Exprimer $z(t)$ en fonction de t , z_e , ω_0 et z_0 .
- Q6** – Tracer l'allure de $z(t)$ et faire apparaître sur le graphique les cotes minimales z_{min} , maximale z_{max} et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0 .
Donner les expressions des cotes minimale z_{min} , maximale z_{max} et moyenne z_{moy} en fonction de z_e et z_0 .

I.2 Suspension avec amortissement

On suppose dans cette partie que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce sur le véhicule de masse m , une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{F} = -h\vec{v}$ où \vec{v} représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide (figure 2).

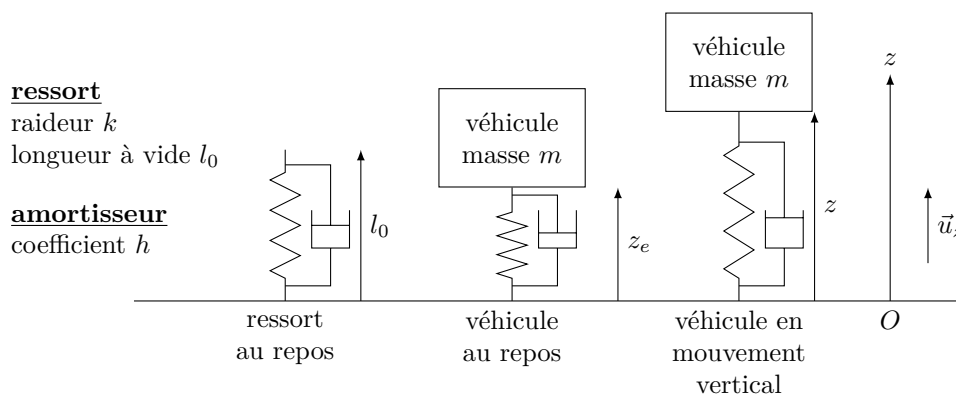


FIGURE 2 – Suspension avec amortissement

- Q7** – Quelle est l'unité de h dans le système international ?
- Q8** – Faire le bilan des forces appliquées sur le véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre.
- Q9** – En appliquant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) au véhicule hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ au cours du temps. L'équation reliera les différentes grandeurs z_e , k , h , m , $z(t)$ et ses dérivées temporelles.

Q10 – Écrire les conditions portant sur les paramètres m , k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudopériodique, critique et apériodique.

Q11 – Véhicule en charge et vieillissement de la suspension.

- Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.
- Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudopériodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

Le véhicule se déplace maintenant sur un sol non plat. La position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 3). Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

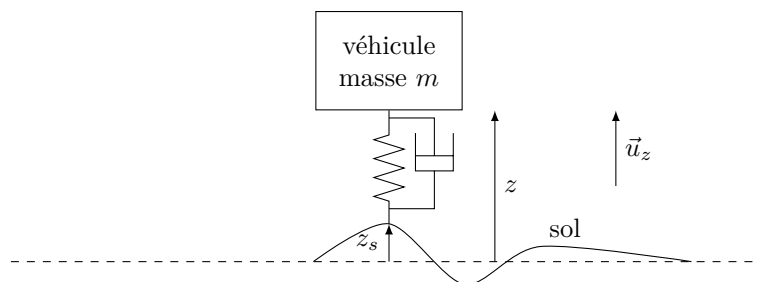


FIGURE 3 – Véhicule sur un sol non plat de profile quelconque

Q12 – Nous nous placerons pour cette question dans le cas particulier où le véhicule se déplace sur une route telle que :

- pour $t < t_1$; $z_s(t) = z_1$ où z_1 est une constante positive et $t_1 > 0$;
- pour $t > t_1$; $z_s(t) = 0$.

Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant t_1 le véhicule descend d'un trottoir de hauteur z_1 et rejoint une route plane et horizontale de cote nulle.

On considère que, pour $t < t_1$, la cote $z(t)$ du véhicule est constante, c'est-à-dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

- Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime pseudopériodique.
- Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime apériodique. On précisera clairement sur chaque graphique la valeur de z pour $0 < t < t_1$ et la valeur de z pour t tendant vers l'infini.

I.3 Régime forcé

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1 .

Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

Ici encore la position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 4).

Dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal. On a donc $z_s(t) = z_{s0} \cos(\omega t)$.

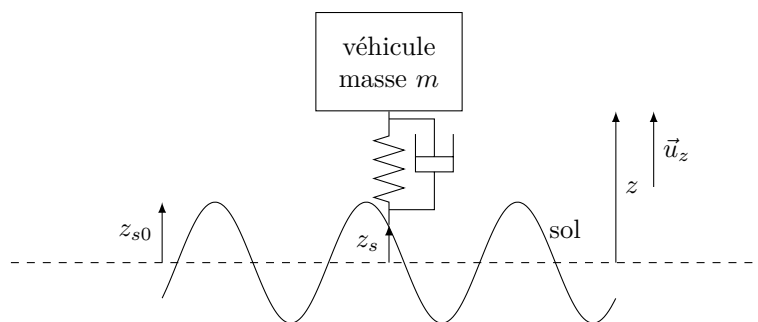


FIGURE 4 – régime forcé

La suspension comporte un dispositif d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où \vec{v} représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide. On a donc $\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

Q13 – Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse m en fonction de k , z , z_s et du vecteur unitaire \vec{u}_z .

- Q14** – En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions $z(t)$ et $z_s(t)$ et leurs dérivées temporelles ainsi que les paramètres h , m , k et z_e (où z_e représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question **Q2**).

Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e , on posera $z' = z - z_e$.

- Q15** – Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme :

$$m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = Y(t)$$

Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s , \dot{z}_s , k et h .

Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes rappelées au début de l'énoncé.

- Q16** – Pour simplifier les notations, on posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } 2\lambda = \frac{h}{m}.$$

Déterminer l'expression de la réponse complexe $\frac{Z'_m}{Z'_s}$ de la suspension en fonction de ω , ω_0 et λ .

Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$H = \left| \frac{Z'_m}{Z'_s} \right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}.$$

Par la suite, les candidats pourront utiliser l'expression précédente du module de la réponse complexe, même s'ils ne sont pas parvenus à la démontrer.

- Q17** – Etude de la réponse complexe.

- Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
- Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
- On considère pour simplifier :
 - que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimal ;
 - que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.

Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ . À quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

- Q18** – Donner l'allure de la courbe représentant $H = \left| \frac{Z'_m}{Z'_s} \right|$ en fonction de ω . On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

I.4 Amortissement électromagnétique

Dans cette partie, on souhaite étudier le principe d'un amortissement électromagnétique pour la suspension.

Un cadre carré de côté a , de masse m , de résistance totale R et d'inductance négligeable est astreint à se déplacer dans une zone de l'espace telle que :

- dans la zone définie par $z > 0$ règne un champ magnétique uniforme et orthogonal au cadre $\vec{B} = B\vec{u}_x$;
- dans la zone définie par $z < 0$, il n'existe pas de champ magnétique.

La position du cadre est repérée par l'abscisse z du côté horizontal supérieur du cadre.

Un dispositif non représenté astreint le cadre à se déplacer uniquement verticalement.

Le déplacement du cadre au cours du temps est tel qu'à tout instant, le côté horizontal inférieur se trouve dans la zone où il n'existe pas de champ magnétique et le côté horizontal supérieur se trouve dans la zone où règne le champ magnétique \vec{B} .

L'orientation arbitraire du cadre est indiquée sur la figure 5.

Dans cette partie, on négligera tous les frottements mécaniques.

- Q19** – On souhaite déterminer l'intensité du courant induit qui va traverser le cadre.

- Déterminer le flux $\phi(t)$ du champ magnétique à travers le cadre lorsque il est repéré par une position $z(t)$.
- Déterminer l'expression de la force électromotrice induite $e(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction de a , \dot{z} et B .

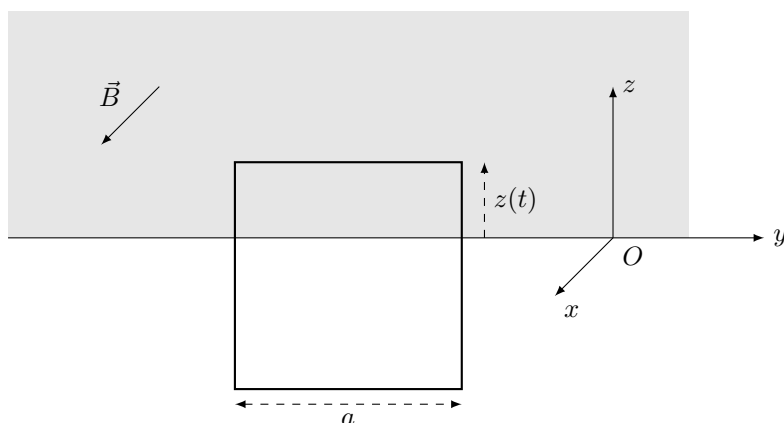


FIGURE 5 – spire dans le champ magnétique

(c) En déduire l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction de z , a , R et B .

Q20 – Déterminer l'expression de la résultante de la force de Laplace qui s'applique sur le cadre en fonction de z , a , R , B et d'un ou plusieurs vecteurs unitaires que l'on précisera.

Q21 – Justifier le fait que le cadre ainsi constitué pourrait servir de système d'amortissement pour une suspension de véhicule. Citer certains avantages que présenterait un tel système d'amortissement par rapport aux systèmes classiques.

Q22 – Déterminer l'expression du champ B à appliquer pour que le cadre puisse servir d'amortisseur de coefficient de frottement h . On exprimera B en fonction de h , R et a .

Q23 – Pour un amortisseur de véhicule, le coefficient de frottement doit être de l'ordre de $h = 10^4$ SI.

On se place dans le cas d'un cadre de côté $a = 10$ cm et de résistance $R = 10^{-4} \Omega$.

Déterminer numériquement l'ordre de grandeur du champ B qu'il faudrait appliquer au cadre pour produire un tel coefficient de frottement.

Quel est l'ordre de grandeur de l'intensité du champ magnétique que peut créer un aimant permanent ?

Pourrait-on créer un champ magnétique d'une telle intensité avec un électroaimant ?

Partie II. Réfractomètres

Un réfractomètre est à appareil permettant de mesurer l'indice optique d'un liquide. Il est souvent utilisé en chimie pour déterminer la nature d'un produit obtenu après une réaction chimique. Les réfractomètres sont en général constitués d'une source lumineuse et d'un prisme, sur lequel on pose l'échantillon à analyser. Son principe de fonctionnement repose sur les lois de la réfraction.

Dans la suite on notera n l'indice du milieu à analyser.

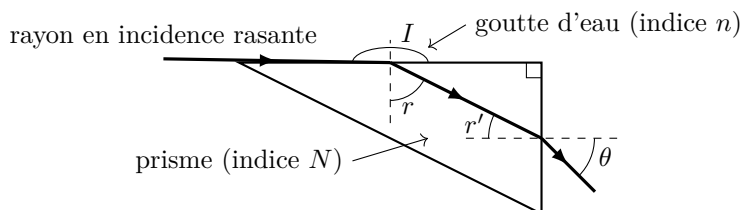
II.1 Questions préliminaires

Q24 – Définir ce qu'est un milieu homogène et isotrope et rappeler à quoi correspond l'indice optique d'un milieu.

Q25 – Rappeler les lois de Snell-Descartes de la réflexion et de la réfraction entre deux milieux transparents, homogènes et isotropes.

II.2 Le réfractomètre de Pulfrich

On cherche à mesurer l'indice de réfraction d'un liquide par le principe du réfractomètre de Pulfrich. On dépose le liquide sur la face supérieure d'un prisme d'angle au sommet 90° . On éclaire cette goutte en lumière monochromatique en prenant bien soin qu'elle soit éclairée en incidence rasante (incidence de 90°). À l'aide d'un oculaire, on observe derrière l'autre face du prisme. Se reporter à la figure ci-dessous. L'indice de réfraction du verre constituant le prisme est $N = 1,600$.



Q26 – Donner l'expression de r en fonction de n et N .

Q27 – Donner la relation liant r et r' .

Q28 – On mesure l'angle θ du rayon émergent correspondant au rayon d'incidence rasante. Montrer que :

$$\sin(\theta) = \sqrt{N^2 - n^2}$$

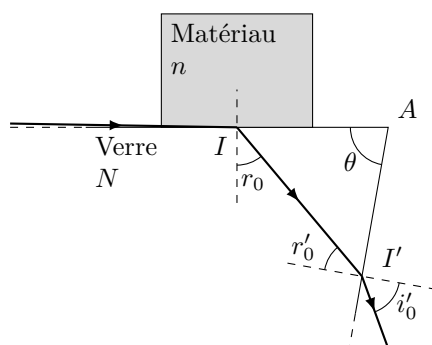
(On pourra utiliser judicieusement la relation $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$)

Q29 – Quelles sont les valeurs extrêmes de l'indice que l'on peut mesurer avec ce système ?

II.3 Le réfractomètre d'Abbe

Un rayon lumineux monochromatique provenant d'un milieu d'indice n inconnu tombe en I sur un prisme (d'indice N et d'angle au sommet θ connus) sous une incidence rasante (*cf* figure ci-dessous). Il émerge du prisme en faisant un angle i'_0 avec la normale à la face de sortie.

La mesure de l'angle i'_0 permet de remonter à la valeur de n .



Q30 – Donner la relation reliant r_0 et r'_0 (On pourra se rappeler que la somme des angles d'un triangle vaut π)

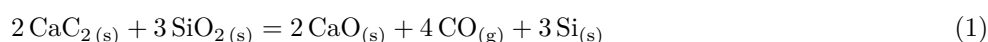
Q31 – Donner l'expression de $\sin(r_0)$ en fonction de n et de N

Q32 – En déduire la relation liant n à i'_0 et aux données du problème (θ et N)

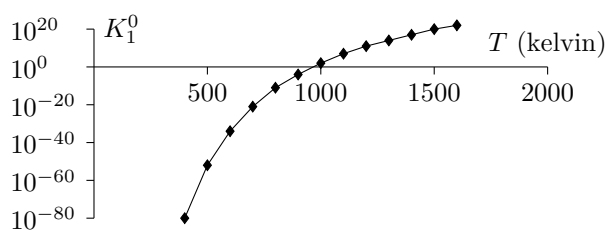
Partie III. Le silicium

Pour produire le silicium, on réduit le dioxyde de silicium SiO_2 par le carbure de calcium CaC_2 (s). Pour $T < 1683 \text{ K}$, aucun changement d'état n'intervient.

L'équation de la réaction est :



Sa constante d'équilibre est noté K_1^0 .



Courbe $K_1^0 = f(T)$

Q33 – Quelle est l'influence d'une augmentation de la température à pression et composition constante ? Justifier. En déduire si l'industriel a intérêt à travailler à basse ou haute température.

Dans un réacteur de volume constant 8 litres, préalablement vide, on introduit 18 g de SiO_2 solide et 32 g de CaC_2 solide. On opère à $T = 1730 \text{ K} > 1683 \text{ K}$. On suppose que la phase gazeuse est assimilable à un gaz parfait.

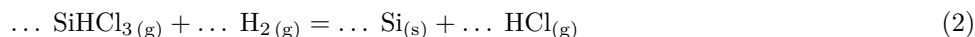
Q34 – Écrire l'équation (1') en précisant les états physiques des espèces chimiques.

Q35 – Sachant que la constante d'équilibre de la réaction (1') vaut : $K_1^0(1730 \text{ K}) = 3,68 \times 10^{24}$, calculer la pression du système si l'équilibre est atteint puis la quantité de matière de monoxyde de carbone formé. Conclure.

Q36 – En déduire les quantités de matière des différents espèces chimiques à l'état final, la pression de la phase gazeuse (supposée parfaite) et déterminer la masse de silicium formée.

Le silicium obtenu est mis en réaction avec du chlorure d'hydrogène gazeux (HCl) à 300 °C. On forme majoritairement le trichlorosilane (SiHCl₃) mais également le dichlorosilane SiH₂Cl₂. Après refroidissement à 15 °C, on obtient un mélange liquide de SiHCl₃ et de SiH₂Cl₂ de composition molaire 80% en SiHCl₃. Une distillation fractionnée permet alors de purifier le trichlorosilane SiHCl₃.

Le trichlorosilane ultra-pur est réduit par l'hydrogène vers 1000 °C, selon la réaction :



Le silicium ultra-pur, produit par cette réaction, est déposé sur un barreau de silicium. Le silicium obtenu est directement utilisable pour la fabrication des MEMS.

Q37 – Ajuster les nombres stœchiométriques de l'équation (2).

Q38 – Donner la configuration électronique dans son état fondamental de l'atome de silicium et de l'atome de chlore en indiquant les électrons de cœur et de valence.

Q39 – Donner la représentation de Lewis des molécules de dichlorosilane, trichlorosilane et du chlorure d'hydrogène.

Données

Données à 298 K

Constantes

Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
 Constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J K mol}^{-1}$

Extrait du tableau périodique des éléments

	H	C	N	O	Al	Si	Cl	Ca
Numéro atomique	1	6	7	8	13	14	17	20
Masse molaire (g mol ⁻¹)	1.01	12.0	14.0	16.0	27.0	28.1	35.5	40.1

Données thermodynamiques

	Si	SiO ₂	SiHCl ₃	H ₂	HCl	CaC ₂	CaO
Température de fusion (K)	1683	1883	139	14	159	2430	2886

Fin du sujet
