

DM4 : Cinétique chimique et cinématique – corrigé

Exercice 1 : BOIRE OU CONDUIRE

Un homme boit 66 cℓ d'une bière forte. L'objet du problème sera de savoir combien de temps il devra attendre avant de reprendre sa voiture sachant qu'en France il n'est autorisé à conduire que si la teneur en alcool de son sang est inférieure à 0,5 g/ℓ.

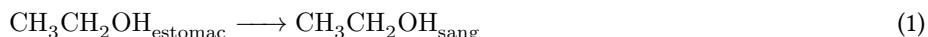
La cinétique de décomposition de l'alcool se fait en deux phases et peut être modélisée de la façon suivante :

- 1ère phase : passage de l'alcool à travers la paroi stomacale dans le sang.
- 2ème phase : oxydation de l'alcool dans le sang.

Nous allons étudier successivement ces deux phases avant d'en tirer les conclusions quant aux conseils à donner à cet automobiliste.

I – Passage de l'alcool à travers la paroi stomacale

La réaction peut se modéliser de la façon suivante :



On adopte les conventions suivantes :

- l'estomac est considéré comme un milieu réactionnel de volume constant V_1 égal pour chaque expérience au volume d'alcool absorbé ;
- on note $[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}_{\text{estomac}}] = C_1 = C_0 - x$; C_0 étant la concentration initiale, c'est à dire au moment de l'absorption.

On réalise l'expérience suivante : un homme boit 250 ml d'un apéritif contenant 1 mole d'éthanol. On mesure la concentration C_1 de l'éthanol dans l'estomac en fonction du temps. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous

t (min)	0	1.73	2.8	5.5	18	22
C_1 (mol.ℓ ⁻¹)	4.0	3.0	2.5	1.6	0.2	0.1

- 1 Définir la vitesse de disparition de l'alcool dans l'estomac. Cette vitesse sera notée v_1 .
- 2 Montrer que v_1 suit une loi cinétique d'ordre 1. Déterminer la valeur de la constante de vitesse k_1 (sans oublier son unité !)
- 3 Le sang et les autres liquides contenus dans le corps seront considérés comme un milieu réactionnel unique, dénommé "sang", de volume $V_2 = 40$ L constant pour toutes les expériences. Calculer la concentration C_2 de l'alcool dans le sang à $t = 18$ min dans le cas où on admet qu'aucune oxydation de l'alcool ne s'est produite.
- 4 Démontrer que la vitesse v_1 de disparition de l'alcool dans l'estomac et la vitesse d'apparition, notée v , de l'alcool dans le sang sont reliées par la formule :

$$v = \frac{V_1}{V_2} v_1 \quad (2)$$

II – Oxydation de l'alcool dans le sang

On injecte directement une certaine quantité d'alcool dans le sang et on détermine la concentration en fonction du temps. (on suppose que l'injection est instantanée et que la concentration de l'alcool dans le sang est uniforme)

t (min)	0	120	240	360	480	600	720
C_2 (10 ⁻² mol/ℓ)	5.00	4.13	3.26	2.39	1.52	0.65	0.00

- 5 Définir la vitesse d'oxydation de l'alcool dans le sang (vitesse de disparition). Cette vitesse sera notée v_2 .
- 6 Montrer que l'oxydation suit une loi cinétique d'ordre 0, c'est à dire que $v_2 = k_2$. Déterminer k_2 (avec son unité !)

III – Boire ou conduire...

Pour déterminer le temps que la personne devra attendre avant de conduire, on est amené à étudier le phénomène absorption-oxydation de l'alcool dans son ensemble. On fait alors l'hypothèse simplificatrice que les lois de vitesse démontrées séparément restent valables.

- 7 Calculer la concentration maximale, en mol/ℓ, tolérée en France de l'alcool dans le sang. (La masse molaire de l'éthanol vaut 46 g/mol, et le taux maximal d'alcoolémie est fixé à 0,5 g/ℓ).
- 8 Exprimer la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang, $\frac{dC_2}{dt}$, en fonction des vitesses v et v_2 puis en fonction de la concentration C_1 de l'alcool dans l'estomac au temps t , des constantes k_1 et k_2 , des volumes V_1 et V_2 .
- 9 En déduire que $C_2 = C_0 \frac{V_1}{V_2} (1 - \exp(-k_1 t)) - k_2 t$.

En buvant ses deux bières à 8%, le sujet absorbe 66 cℓ et 0.9 mole d'alcool.

- 10 Déterminer l'instant t_{max} pour lequel la concentration en éthanol est maximale dans le sang.
- 11 Calculer cette concentration. Peut-il conduire ?
- 12 On remarque que au delà de t_{max} la courbe peut s'apparenter à une droite. Quelle est la pente de cette droite ? En déduire le temps au bout duquel l'automobiliste pourra reprendre sa voiture.

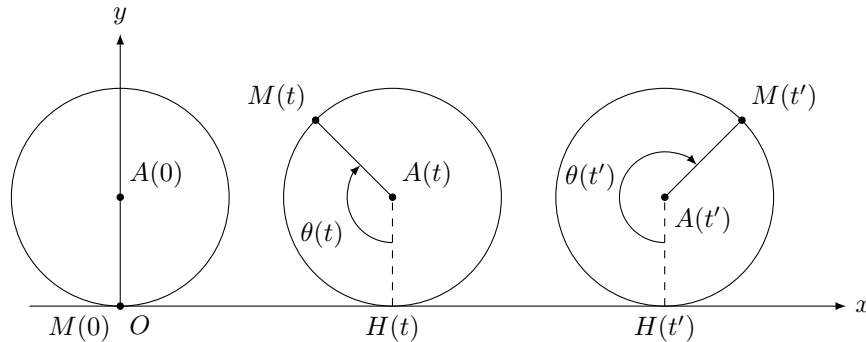
Exercice 2 : CYCLOÏDE

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut expérimentalement observer cette courbe en observant la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

Cette courbe présente d'étonnantes propriétés que nous allons développer, et a notamment intéressé le physicien néerlandais Huygens.

I. Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.

On note M un point donné d'un cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon R roulant sans glissement sur une surface plane. A l'instant initial ($t = 0$ s) on suppose que le point M est confondu avec l'origine O d'un repère (Oxy) . On note $H(t)$ le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox) **qui dépend du temps car la roue avance**. La position de M à l'instant t est repérée par l'angle orienté $\theta(t) = (\vec{AH}, \vec{AM})$, le sens positif étant le sens horaire.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ . Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel \mathcal{R} lié au repère (Oxy) .

- Démontrer que la distance OH est donnée par la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
- Exprimer les composantes du vecteur $\vec{AM}(t)$ dans la base cartésienne (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , dirigeant les axes Ox et Oy , en fonction de R et de $\theta(t)$.
- En décomposant judicieusement le vecteur \vec{OM} , montrer que les équations horaires du mouvement s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} x(t) &= R[\theta(t) - \sin \theta(t)] \\ y(t) &= R[1 - \cos \theta(t)] \end{cases}$$

II. Vecteur vitesse.

Afin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle \mathcal{C} a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0 .

- En utilisant la relation établie à la question I.1, montrer que la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Donner sa valeur en fonction de R et de v_0 .
- Montrer que le mouvement de M dans le référentiel (Axy) , de centre A et d'axes Ax et Ay parallèles à Ox et Oy , est circulaire uniforme.
- Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne (\vec{u}_x, \vec{u}_y) en fonction de R , θ et $\dot{\theta}$.
- Représenter sur un même schéma la position du cercle \mathcal{C} et la trajectoire de M au cours du temps (la fameuse cycloïde), en dessinant l'allure du vecteur vitesse \vec{v} pour les valeurs suivantes du paramètre θ : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$, et $\theta_4 = 2\pi$.
- Déterminer la norme $v = |\vec{v}(M/\mathcal{R})|$ de la vitesse de M dans \mathcal{R} en fonction de v_0 et de θ .
- Démontrer la relation trigonométrique $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$. Et l'utiliser pour simplifier l'expression précédente de v . Représenter graphiquement $v(t)$ en indiquant la valeur de v_0 sur le graphique.

III. Vecteur accélération.

- Exprimer dans la base cartésienne (\vec{u}_x, \vec{u}_y) les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ du point M dans \mathcal{R} en fonction de v_0 , R et θ .
- Sur le dessin de la question II.7, représenter l'allure du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour les valeurs θ_1 , θ_2 , θ_3 et θ_4 .
- On dit que le point M est accéléré lorsque la norme de sa vitesse augmente. Dans quelles zones le point M est-il accéléré ou décéléré ?
- En quoi les vecteurs \vec{v} et \vec{a} pour $\theta_4 = 2\pi$ présentent-ils un caractère surprenant ?
- Montrer que la norme $a = |\vec{a}(M/\mathcal{R})|$ du vecteur accélération de M dans \mathcal{R} est constante. Calculer sa valeur pour un pneu de voiture de rayon $R = 35$ cm et tel que $v_0 = 130$ km h⁻¹.
- Montrer que $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est toujours dirigé de M vers A .