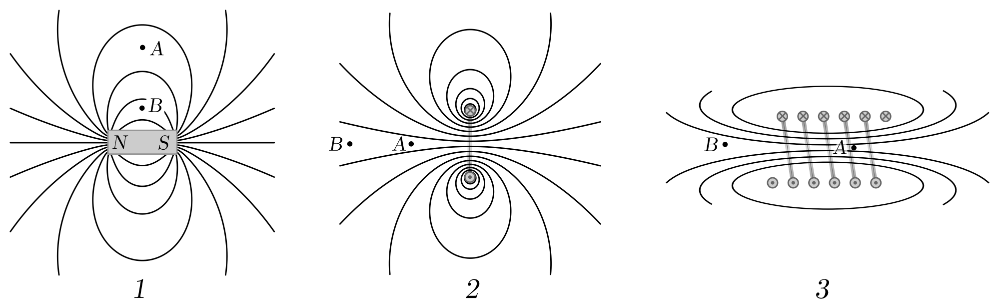
TD14 : Champ magnétique et force de Laplace – corrigé

Exercice 1 : Cartes de champ magnétique

- Le premier champ est créé par un aimant droit, le champ au point B est plus intense qu'au point A
- Le second est créé par une bobine plate dans un plan perpendiculaire au plan du schéma. $B(A) > B(B)$
- Le dernier est créé par un solénoïde, et $B(A) > B(B)$

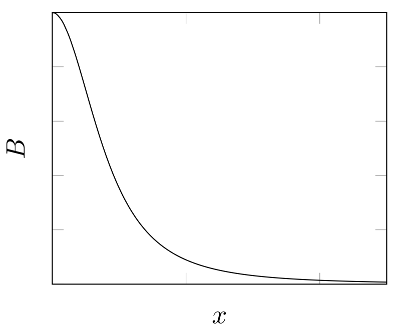


Exercice 2 : Champ magnétique dans un solénoïde

1. La réponse à cette question est dans l'énoncé $B = \mu_0 n I$ que l'on peut ré-écrire : $n = B/\mu_0 I$.
2. Comme d est la largeur du fil, en supposant que les spires sont jointives, le nombre de spires par mètre est $n = \frac{1}{d}$. En remplaçant n par le résultat de la question précédente, on obtient $d = \dfrac{\mu_0 I}{B}$.
3. La bobine de longueur L contient nL spires dont chacune nécessite une longueur $l_s = 2\pi r$ de fil. Au total il faut donc une longueur $l = nLl_s = 2n\pi r L$ de fil. Que l'on peut exprimer en fonction de d par $l = \dfrac{2\pi r L}{d}$.
4. La section du fil est $S = \pi d^2/4$. Sa résistance totale est donc : $R = \dfrac{8\rho r L}{d^3}$.
5. La puissance électrique dissipée dans la bobine est $P = RI^2$ donc en utilisant les expressions obtenues aux questions précédentes, on obtient : $P = \dfrac{8B^2\rho r L}{\mu_0^2 d}$
6. A.N. : On trouve $P = 4{,}3 \times 10^8$ W = 430 MW (Un réacteur de centrale nucléaire fournit entre 990 et 1450 MW)
7. C'est une puissance énorme et en pratique ce solénoïde chaufferait énormément. Les supraconducteurs ont une résistivité nulle, et permettent de faire circuler des courants importants sans consommer d'énergie. L'inconvénient des supraconducteurs est qu'ils ne fonctionnent qu'à très basse température et nécessite d'être constamment plongés dans l'hélium liquide (et liquéfier l'hélium consomme aussi de l'énergie).

Exercice 3 : Bobine plate

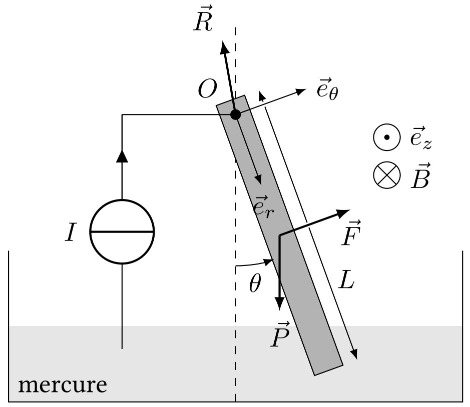
1. L'intensité au centre de la bobine est $B(0) = \dfrac{\mu_0 N I}{2R}$
2. $B(x)$ ci-contre.
3. Pour que $B(x)$ ne soit plus que 10% de sa valeur au centre il faut que $\frac{B(x)}{B(0)} = 0\,.1$ soit :
$\frac{R^3}{\sqrt{(R^2+x^2)^3}} = 0\,.1 \Leftrightarrow \left(\frac{R^2}{R^2+x^2}\right)^{3/2} = 0\,.1 \Leftrightarrow \frac{R^2}{R^2+x^2} = 0\,.1^{2/3} \Leftrightarrow x = R\sqrt{10^{2/3}-1}$
Soit $x \simeq 1\,.9R$
4. Lorsque $x \gg R$, $R^2 + x^2 \simeq x^2$ et $B(x) \simeq \dfrac{\mu_0 N I R^2}{2x^3}$
5. Un aimant de moment magnétique M est équivalent à une bobine avec $M = NI\pi R^2$.
En exprimant I en fonction de M dans l'équation précédente, on obtient $B(x) = \dfrac{\mu_0 M}{2\pi x^3}$



Exercice 4 : Rail de Laplace

1. La force $\vec{F}$ subie par la barre est $\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{F} = IBL\vec{e}_x$
2. Le théorème de l'énergie cinétique dit que le travail fourni par la force de Laplace entre 0 et x est la différence d'énergie cinétique de la barre entre ces deux points. Donc $E_c(x) - E_c(0) = \frac{1}{2}mv(x)^2 = Fx = IBLx$ soit $v(x) = \sqrt{\frac{2IBLx}{m}}$
3. L'énergie potentielle de la barre ne change pas avec le temps, donc comme son énergie cinétique augmente, cela signifie que son énergie mécanique augmente également. L'énergie supplémentaire est **apportée par le générateur**.
4. La puissance fournie par le générateur est $P = UI$ où U est la tension aux bornes de la barre. La puissance fournie par le générateur est la dérivée de l'énergie qu'il fournit par rapport au temps, donc la dérivée de l'énergie cinétique de la barre par rapport au temps :
$P(x) = \frac{dE_c}{dt} = IBL\frac{dx}{dt} = IBLv(x) = \sqrt{\frac{2(IBL)^3 x}{m}} = U(x)I$ donc $U(x) = \sqrt{\dfrac{2I(BL)^3 x}{m}}$

Exercice 5 : Equilibre d'une barre



1. Le système de coordonnées le mieux adapté pour traiter ce problème est le **système de coordonnées cylindriques** dont les vecteurs de base sont $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
2. Dans ce repère, la force $\vec{F}$ de Laplace subie par la barre est $\vec{F} = IL\vec{e}_r \wedge (-B\vec{e}_z)$ soit $\vec{F} = ILB\vec{e}_\theta$
3. Voir schéma.
4. La barre est soumise à son poids qui s'exprime comme $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$. La barre est à l'équilibre lorsque la somme des moments des forces appliquées est nulle, c'est à dire lorsque $mg\sin\theta = IBL$ soit $\theta = \arcsin\left(\frac{IBL}{mg}\right)$
5. Lorsque le bas de la barre sort du bain de mercure le contact électrique est rompu et la force de Laplace s'annule. La barre retombe alors dans le bain de mercure et la force de Laplace réapparaît. La barre va probablement osciller pendant un moment jusqu'à se stabiliser à la limite du bain de mercure (il restera probablement de petites oscillations car le contact avec le mercure doit exister mais ne peut pas être permanent.

Exercice 6 : Moteur à une spire

1. Le moment magnétique de la spire est $M = IS = IlL$
2. Le couple des forces de Laplace sur le rotor est $\Gamma = MB\sin\theta$ car l'angle entre $\vec{M}$ et $\vec{B}$ est l'angle θ.
3. Si on laisse le système évoluer librement dans cette situation, le moment magnétique de la spire va s'aligner avec le champ magnétique et le rotor se trouvera à l'équilibre pour $\theta = 0$.
4. La puissance fournie par les forces de Laplace est $P = \Gamma\omega$, soit $P = MB\omega|\sin\theta|$
5. La puissance fournie par les forces de Laplace au rotor est en réalité fournie par le générateur qui alimente le moteur et vaut $P = UI$. Donc la tension U aux bornes du générateur est $U(\theta) = \frac{MB\omega|\sin\theta|}{I}$. Soit $U = lLB\omega|\sin\theta|$ (Cela donne $U = -\frac{d\Phi}{dt}$ où Φ est le flux de $\vec{B}$ à travers la spire)
6. Ce moteur présente l'inconvénient de consommer une puissance variable en fonction de θ. Et surtout le couple qu'il exerce dépend fortement de θ il existe des positions pour lesquelles le couple exercé est nul, le moteur ne peut donc pas démarrer à partir de ces positions.
Pour résoudre ces problèmes, les moteurs réels ont un champ magnétique **radial** qui produit ainsi un couple constant.

Exercice 7 : Oscillations d'un aimant

1. L'aimant étant équivalent à un moment magnétique, la résultante des forces qu'il subit est nulle. Cependant il est soumis à un couple de forces Γ qui vaut $\Gamma = MB\sin\theta$.
2. Le théorème du moment cinétique appliqué à l'aimant donne directement : $-J_\Delta\ddot{\theta} = \Gamma = MB\sin\theta$ (L'axe Δ est orienté dans le mauvais sens lorsque θ est pris positif dans le sens trigo.). Donc l'angle θ satisfait l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{MB}{J_\Delta}\sin\theta = 0$
3. C'est la même équation différentielle que celle du pendule simple. Lorsque $\theta \ll 1$ on peut faire l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti, la solution est : $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{MB}{J_\Delta}}$
4. La réponse se trouve dans celle de la question précédente : $\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{\frac{MB}{J_\Delta}}$. Donc $f = \dfrac{\sqrt{B}}{2\pi}\sqrt{\dfrac{M}{J_\Delta}}$