

V Circuits linéaires du premier ordre

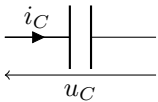
1 Définition

Un circuit linéaire du premier ordre est un circuit dans lequel les grandeurs électriques satisfont une équation différentielle linéaire du premier ordre. (Il ne contient généralement pas simultanément un condensateur et une bobine)

2 Modèles équivalents en régime permanent

En régime permanent, les grandeurs électriques du circuit sont **indépendantes du temps**. Leur dérivée temporelle est donc nulle : $\frac{du}{dt} = 0$ et $\frac{di}{dt} = 0$.

a Le condensateur

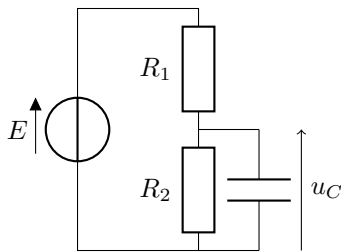


La relation entre la tension et l'intensité est : $i_C = C \frac{du_C}{dt}$. En régime permanent,

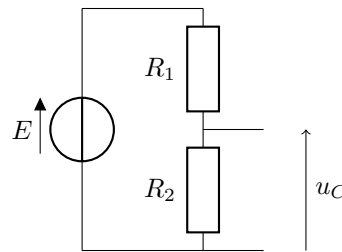
$\frac{du_C}{dt} = 0$ et donc $i_C(t) = 0$. Aucun courant ne traverse le condensateur, il se comporte comme un **interrupteur ouvert**.



Application : On cherche à calculer la tension u_C aux bornes du condensateur en régime permanent :

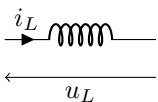


En régime permanent, ce circuit est équivalent à :



On trouve la tension u_C en repérant un pont diviseur de tension : $u_C = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

b La bobine

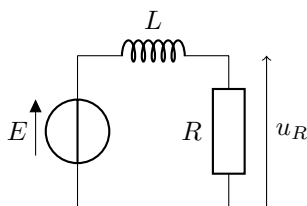


La relation entre la tension et l'intensité est : $u_L = L \frac{di_L}{dt}$. En régime permanent,

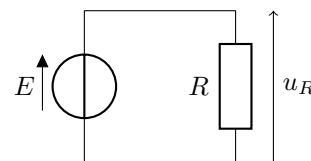
$\frac{di_L}{dt} = 0$ et donc $u_L(t) = 0$. La tension aux bornes de la bobine est nulle, elle se comporte comme un **interrupteur fermé** (ou comme un fil).



Application : On cherche à déterminer la tension u_R aux bornes de la résistance R dans le circuit suivant en régime permanent :



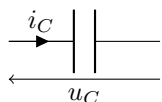
En régime permanent, ce circuit est équivalent à :



Et on trouve directement $u_R = E$.

3 Propriétés de continuité

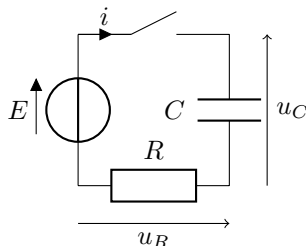
a Aux bornes d'un condensateur



$i_C = C \frac{du_C}{dt}$. Pour provoquer un saut de tension aux bornes d'un condensateur, il faudrait

que l'intensité $i_C(t)$ soit infinie. Donc **la tension aux bornes d'un condensateur est continue.**

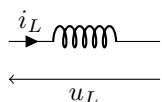
Application : Dans le circuit suivant, l'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur est déchargé ($u_C = 0$). On ferme l'interrupteur à $t = 0$, déterminer la tension $u_R(0^+)$ et l'intensité $i(0^+)$ juste après avoir fermé l'interrupteur.



La loi des mailles donne $E = u_C + u_R$, et la tension est continue aux bornes du condensateur, donc $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

On obtient $u_R(0^+) = E$. Et la loi d'Ohm donne $i(0^+) = u_R(0^+)/R = E/R$.

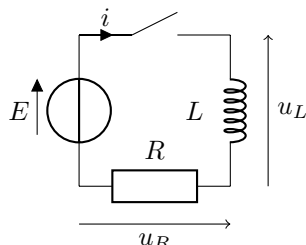
b Aux bornes d'une bobine



$u_L = L \frac{di_L}{dt}$. Pour provoquer une discontinuité de l'intensité du courant qui traverse la bobine,

il faudrait que la tension à ses bornes soit infini. Donc **l'intensité du courant qui traverse une bobine est continue.**

Application : Dans le circuit suivant, l'interrupteur est initialement ouvert. On le ferme à $t = 0$, déterminer la tension $u_R(0^+)$ et l'intensité $i(0^+)$ juste après avoir fermé l'interrupteur.



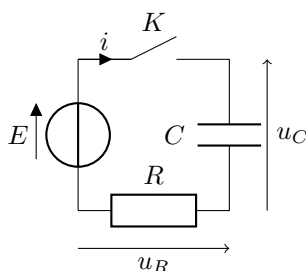
L'intensité du courant est continue dans la bobine, donc $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

Et la loi d'Ohm donne $u_R(0^+) = Ri(0^+) = 0$.

4 Étude du circuit RC

a Position du problème

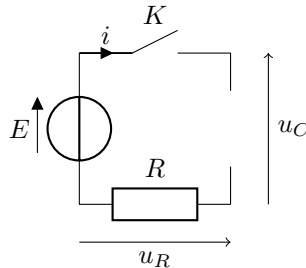
On considère le circuit suivant où l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et le condensateur est initialement déchargé ($u_C = 0$). À $t = 0$ on ferme l'interrupteur et on cherche à déterminer l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.



b Analyse qualitative

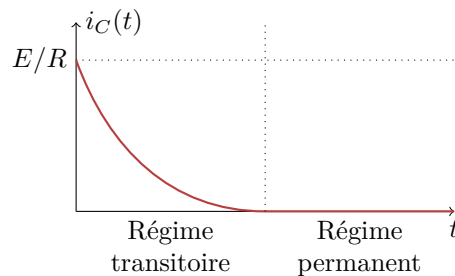
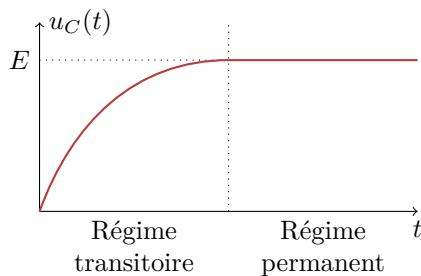
On commence par chercher comment évolue qualitativement la tension $u_C(t)$:

- pour $t < 0$ $u_C(t) = 0$ V. Comme $u_C(t)$ est continue, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ et $i(0^+) = E/R$ (loi des mailles et loi d'Ohm).
- En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, le circuit étudié devient équivalent à :



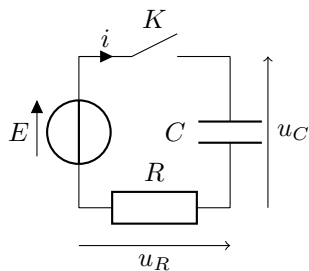
Donc $i(\infty) = 0$ et $u_C(\infty) = E$.

On peut tracer qualitativement l'évolution de $u_C(t)$ et $i(t)$:



On distingue le **régime transitoire** au cours duquel les grandeurs électriques varient et le **régime permanent** au cours duquel elles sont *relativement* constantes.

c Analyse quantitative



— Loi des mailles : $E = u_R + u_C$

— Loi d'Ohm : $u_R = Ri$

— Condensateur : $i = C \frac{du_C}{dt}$

En combinant ces trois équations, on obtient l'équation différentielle :

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

On cherche à déterminer $u_C(t)$.

On note $\tau = RC$ (τ a la dimension d'un temps), l'équation différentielle se met sous la forme : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}$

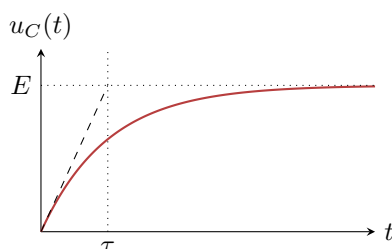
La solution de cette équation différentielle se met sous la forme :

$u_C(t) =$ Solution de l'équation homogène + solution particulière.

On trouve $u_C(t) = E + k \exp(-t/\tau)$, où k est une constante déterminée par la condition initiale $u_C(0^+) = 0$. On a donc $E + k = 0$ soit $k = -E$.

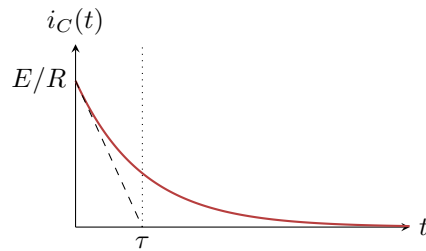
On obtient finalement :

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



Remarque : $\frac{du_C}{dt}(t = 0^+) = \frac{E}{\tau}$. On peut déterminer graphiquement τ en traçant le point d'intersection de la tangente à l'origine avec la droite d'équation $u = E$.

Évolution de l'intensité : $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{EC}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$.



d Bilan énergétique

Énergie fournie par le générateur : $E_g = \int_{t=0}^{\infty} P_g(t) dt = \int_0^{\infty} E \cdot i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau} dt$. Soit finalement :

$$E_g = CE^2$$

Énergie stockée dans le condensateur : La tension aux bornes du condensateur tend vers E lorsque t tends vers $+\infty$.

$$E_C = \frac{1}{2} CE^2$$

Énergie dissipée par effet Joule dans la résistance : La conservation de l'énergie lors de l'évolution du circuit impose à l'énergie dissipée dans la résistance de satisfaire

$$E_R = E_g - E_C = \frac{1}{2} CE^2$$

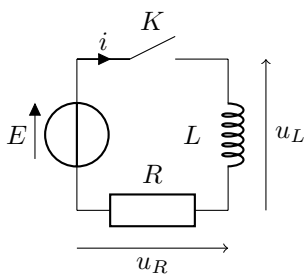
Vérifions cela par le calcul :

$$E_R = \int_{t=0}^{\infty} P_R(t) dt = \int_0^{\infty} R \cdot i^2(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} CE^2$$

On retrouve heureusement le même résultat que celui trouvé en utilisant la conservation de l'énergie.

Remarque : La moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur, l'autre moitié est dissipée par effet Joule. Le rendement de ce circuit de charge de condensateur est de 50 %.

5 Le circuit RL série

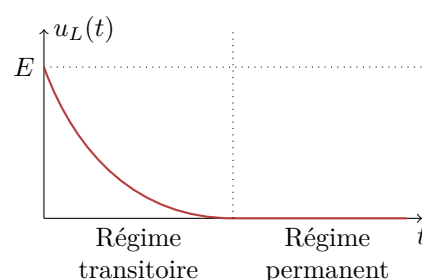
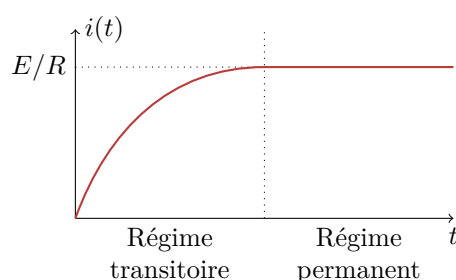


On ferme l'interrupteur K à $t = 0$, on cherche à déterminer l'évolution temporelle de $i(t)$ (et $u_L(t)$).

a Analyse qualitative

- L'intensité $i(t)$ est continue dans la bobine donc $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Et $u_L(0^+) = E$.
- En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil, donc $u_L(t \rightarrow \infty) = 0$ et $i(t \rightarrow \infty) = E/R$.

On obtient qualitativement les évolutions suivantes :



Il y a un retard à l'établissement du courant dans la bobine.

b Analyse quantitative

- Loi des mailles : $E = u_R + u_L$;
- loi d'Ohm : $u_R = R \cdot i$;
- bobine : $u_L = L \frac{di}{dt}$

On obtient l'équation différentielle $E = Ri + L \frac{di}{dt}$, soit $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$. On pose $\tau = \frac{L}{R}$ et on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{L}}$$

On trouve la solution de la même manière que dans le cas du circuit RC :

$$i(t) = \frac{E}{R} + ke^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad i(t=0) = 0 \quad \text{on trouve} \quad k = -\frac{E}{R} \quad \text{donc} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

La tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine est donnée par :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = E e^{-t/\tau}}$$

Ce qui donne les graphiques suivants :

