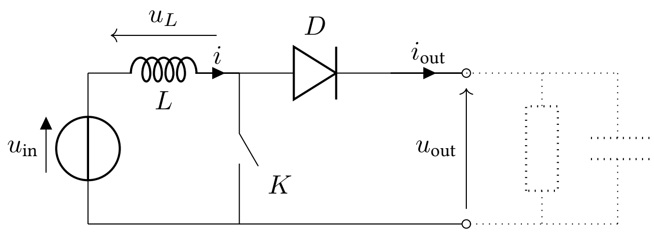
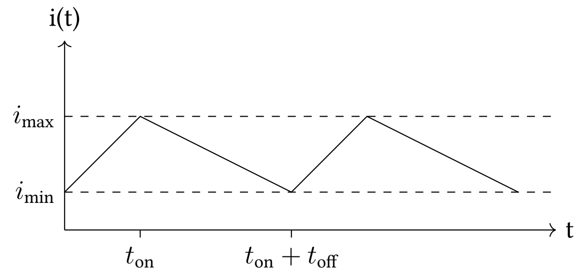
DS3 : Électricité – corrigé

Durée 2h, calculatrices interdites. Le DS est probablement trop long pour que vous puissiez tout faire, c'est normal, faites-en le maximum.

Exercice 1 : Convertisseur boost



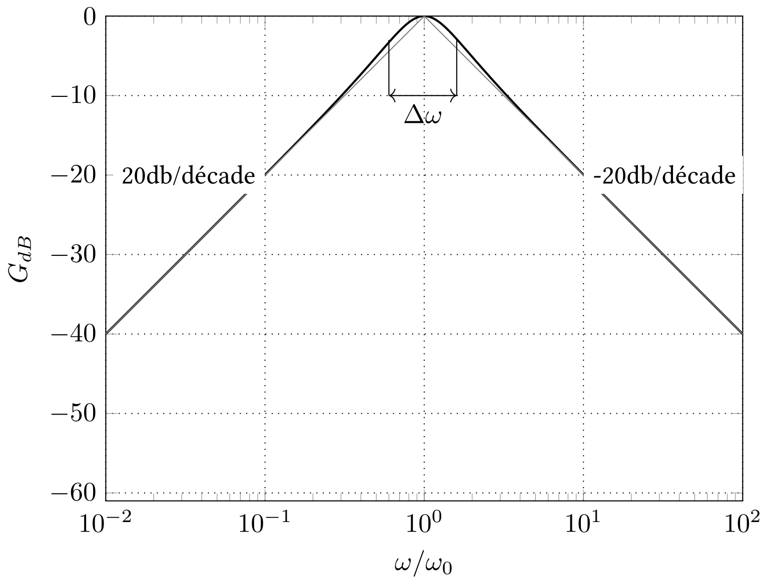
1. Lorsque K est fermé, on a $u_L = u_{\text{in}} = L\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{u_{\text{in}}}{L}$.
2. D'après la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$ est une constante, donc $i(t) = \dfrac{u_{\text{in}}}{L}t + A$ où A est une constante. La condition $i(0) = i_{\text{min}}$ donne $A = i_{\text{min}}$. Donc finalement $i(t) = i_{\text{min}} + \dfrac{u_{\text{in}}}{L}t$ Au moment où l'interrupteur se ferme, $t = t_{\text{on}}$ et donc :
$$i_{\text{max}} = i_{\text{min}} + \frac{u_{\text{in}}t_{\text{on}}}{L}$$
3. Lorsque l'interrupteur est ouvert, la diode se comporte comme un fil, la loi des mailles donne $u_L = u_{\text{in}} - u_{\text{out}} = L\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}$.
4. Comme dans la question 2, on intègre $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$ et on utilise $i(t_{\text{on}}) = i_{max}$ pour trouver :
$$i(t) = i_{\text{max}} + \frac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}(t - t_{\text{on}})$$
5. L'énoncé indique que l'intensité i évolue de façon périodique, donc $i(T = t_{\text{on}} + t_{\text{off}}) = i(0) = i_{\text{min}}$. On obtient l'évolution suivante :



6. La condition donnée à la question précédente implique que $u_{\text{out}} = u_{\text{in}}\dfrac{1}{1-r}$. Comme $0 < r < 1$, on a bien $u_{\text{out}} > u_{\text{in}}$.
7. D'après la question 2, on a $\Delta i = \frac{u_{\text{in}}t_{\text{on}}}{L}$, on en déduit la formule demandée pour $i(t)$:
$$i(t) = i_{\text{min}} + \frac{\Delta i}{t_{\text{on}}}t$$
En utilisant le résultat de la question 6, on peut montrer que $u_{\text{in}} - u_{\text{out}} = -\frac{r}{1-r}u_{\text{in}}$, en utilisant la même expression de Δi qu'à la question précédente, on finit par trouver la formule demandée. (il faut utiliser $t_{\text{on}} = rT$ et $t_{\text{off}} = (1-r)T$).
8. Pendant la phase où l'interrupteur est fermé, l'énergie fournie par le générateur est
$$E_{\text{on}} = \int_0^{t_{\text{on}}} u_{\text{in}}i(t)\mathrm{d}t = u_{\text{in}}i_{\text{min}}t_{\text{on}} + \frac{1}{2}u_{\text{in}}t_{\text{on}}\Delta i$$
Pendant la phase où l'interrupteur est ouvert, le générateur fournit l'énergie :
$$E_{\text{off}} = \int_{t_{\text{on}}}^{t_{\text{on}}+t_{\text{off}}} u_{\text{in}}i(t)\mathrm{d}t = u_{\text{in}}i_{\text{min}}t_{\text{off}} + \frac{1}{2}u_{\text{in}}t_{\text{off}}\Delta i$$
Sur un cycle complet, le générateur fournit l'énergie :
$$E_g = E_{\text{on}} + E_{\text{off}} = u_{\text{in}}i_{\text{min}}T + \frac{1}{2}u_{\text{in}}T\Delta i$$
9. On trouve que l'énergie consommée par le circuit pendant un cycle complet est égale à l'énergie consommée pendant la phase où l'interrupteur est ouvert, et vaut :
$$\begin{aligned} E_{\text{out}} = \int_{t_{\text{on}}}^{t_{\text{on}}+t_{\text{off}}} u_{\text{out}}i(t)\mathrm{d}t &= u_{\text{out}}i_{\text{min}}t_{\text{off}} + \frac{1}{2}u_{\text{out}}t_{\text{off}}\Delta i \\ &= u_{\text{in}}i_{\text{min}}T + \frac{1}{2}u_{\text{in}}T\Delta i = E_g \end{aligned}$$
en utilisant la relation de la question 6 entre u_{in} et u_{out}.
Le rendement du système est donc égal à 1, ce qui n'est pas étonnant car il n'y a aucune source de dissipation d'énergie dans le circuit étudié, c'est un cas idéal, dans la réalité le rendement sera strictement inférieur à 1, de l'ordre de 80% pour ce type de convertisseur.

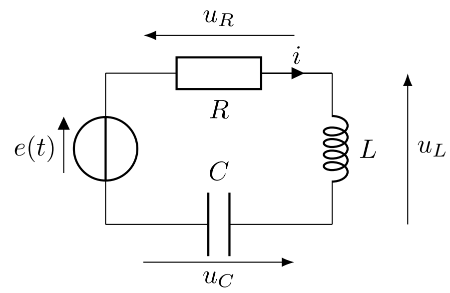
Exercice 2 : Diagramme de Bode

1. Il s'agit d'un filtre passe-bande car $|\underline{H}(\omega \to 0)| = 0$ et $|\underline{H}(\omega \to \infty)| = 0$
2. On calcule $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log(|\underline{H}(\omega)|) = -10\log\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$
3.
   - Lorsque $\omega \to 0$, $G_{\text{dB}}(\omega) \simeq -20\log(Q\omega_0) + 20\log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de 20dB/décade
   - Lorsque $\omega \to \infty$, $G_{\text{dB}}(\omega) \simeq -20\log(Q/\omega_0) - 20\log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de -20dB/décade.
   - On a également $G_{\text{dB}}(\omega = 0) = 0$
4.
5. Diagramme de Bode tracé avec $Q = 1$:



6. On cherche ω_1 et ω_2 telles que $G(\omega_1) = G(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve que $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (fait dans le cours)

Exercice 3 : Circuit RLC série



I - Réponse à un échelon de tension

1. Pour $t < 0$ on est en régime permanent, la bobine se comporte comme un fil donc $u_L(0^-) = 0$ et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i(0^-) = 0$. On en déduit que $u_R(0^-) = Ri(0^-) = 0$ et donc la loi des mailles donne $u_C(0^-) = 0$.
2. La continuité de l'intensité qui traverse la bobine impose $i(0^+) = i(0^-) = 0$ donc $u_R(0^+) = 0$ et la continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$. La loi des mailles donne enfin $u_L(0^+) = E$.
3. On applique la loi des mailles : $E = u_R + u_C + u_L$, la loi d'Ohm : $u_R = Ri$, du condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}\,u_C}{\mathrm{d}\,t}$ et de la bobine $u_L = L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$. En combinant les trois (en partant de la loi de la bobine) on obtient l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}^2\,u_L}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}\,u_L}{\mathrm{d}\,t} + \frac{1}{LC}u_L = 0$$
4. La pulsation propre du circuit est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité est $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
5. D'après le graphique on trouve $E \simeq 4\,\text{V}$, $\omega_0 = 2\pi f \simeq 10^5$ rad/s et $Q \simeq 10$.
On donne ci-dessous l'évolution de la tension $u_L(t)$ pour $t > 0$. Déterminer à partir de ce graphique une estimation des valeurs numériques de E, ω_0 et Q.
6. On a $\omega_0^2 \simeq 10^{10}\,\text{s}^{-2} = \frac{1}{LC}$. On peut donc par exemple prendre $L = 0{,}1\,\text{mH}$ et $C = 1\,\mu\text{F}$. Dans ces conditions on a $R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0.1}{1\cdot 10^{-3}}} = 1\,\Omega$.

II - Régime sinusoïdal forcé

7. $\underline{e}(t) = Ee^{j(\omega t + \varphi)}$.
8. On a un pont diviseur de tension formé par l'impédance Z_L en série avec Z_C et Z_R. On a donc
$$\underline{u}_L = \underline{e}\frac{Z_L}{Z_L + Z_R + Z_C} = \underline{e}\frac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R}$$

Avec les expressions de ω_0 et Q données on trouve bien :

$$\underline{u}_L = \underline{\mathrm{e}}\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

9. On a :

$$U(\omega) = |\underline{u}_L| = E\frac{Q\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

On a $U(\omega_0) = QE$

10. Lorsque le facteur de qualité est grand, on a $U(\omega_0) > E$ il se produit un phénomène de résonance

11. Le déphasage est $\varphi = \arg(\underline{u}_L) - \arg(\underline{e})$ soit :

$$\varphi = \arg\left(\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

Lorsque $\omega = \omega_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.