

## DS7 : Induction et thermodynamique

*Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.*

### Exercice 1 : COMPRESSION ISOTHERME D'UN GAZ PARFAIT (TD16)

On place dans un cylindre de section  $S$  un volume  $V_1$  d'un gaz parfait à la pression  $P_1$  et à la température  $T_1$ . Le cylindre est fermé par un piston mobile. On effectue une compression isotherme du gaz en appliquant une pression extérieure  $P_e$  sur le piston. On considère que la transformation est quasi-statique, c'est à dire qu'à chaque instant la pression  $P_e$  est égale à la pression  $P$  du gaz.

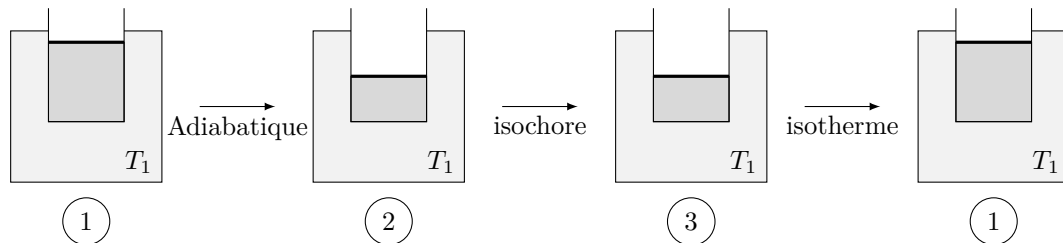
1. En pratique, comment doit-on faire pour que la compression du gaz soit réellement isotherme ?
2. On comprime le gaz jusqu'à un volume  $V_2$ , exprimer alors sa pression  $P_2$ .
3. Exprimer la pression du gaz en fonction de son volume, calculer le travail fourni au gaz par les forces de pression.
4. On admet que lors de la compression adiabatique d'un gaz parfait, la quantité  $PV^\gamma$  reste constante. Avec  $\gamma = \frac{7}{5}$  pour un gaz parfait diatomique (air). Déterminer le travail fourni par les forces de pression lorsque la compression est adiabatique.
5. En pratique, comment procède-t-on pour effectuer une compression adiabatique ?
6. Le travail fourni par les forces de pression sera-t-il plus important lors d'une compression adiabatique ou lors d'une compression isotherme ? Justifier.

### Exercice 2 : TRANSFORMATION CYCLIQUE D'UN GAZ PARFAIT

On considère  $n$  moles de gaz parfait monoatomique enfermé dans un cylindre fermé par un piston mobile. Initialement, le volume du cylindre est  $V_1$ , la pression du gaz est  $P_1$  et sa température  $T_1$ , c'est l'état 1. Le cylindre est en contact thermique avec un réservoir d'eau à la température  $T_1$ . Dans toute la première partie, le réservoir d'eau est considéré comme un thermostat.

Le gaz subit la série de transformations suivante :

- Compression adiabatique quasistatique jusqu'au volume  $V_2 < V_1$  : état 2 ;
- Refroidissement isochore pour revenir à la température  $T_1$  du thermostat : état 3 ;
- Détente isotherme quasistatique pour revenir à l'état 1.



Pour une transformation adiabatique quasistatique, la loi de Laplace indique qu'à chaque instant de la transformation on a  $PV^\gamma = \text{constante}$  avec  $\gamma = \frac{5}{3}$  pour un gaz parfait monoatomique.

1. Rappeler le premier principe de la thermodynamique pour un système au repos.
2. Qu'est-ce qu'une transformation adiabatique, en pratique quelles sont les transformations que l'on pourra considérer comme adiabatiques ?
3. Qu'est-ce qu'une transformation isotherme, en pratique quelles sont les transformations que l'on pourra considérer comme isothermes ?
4. Exprimer la pression  $P_2$  atteinte par le gaz dans l'état 2 en fonction de  $P_1$ ,  $V_1$  et  $V_2$ .
5. En déduire l'expression de la température  $T_2$  atteinte par le gaz dans l'état 2 en fonction de  $T_1$ ,  $V_1$  et  $V_2$ .
6. Représenter les transformations subies par le gaz dans un diagramme  $(P, V)$ .
7. Montrer que le travail des forces de pression reçu par le gaz lors de la transformation 1→2 vaut :

$$W_{12} = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left( \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right)$$

On pourra au choix calculer l'intégrale donnant le travail  $W_{12}$  ou utiliser le premier principe entre les états 1 et 2.

8. Que vaut le travail  $W_{23}$  reçu par le système lors de la transformation 2 → 3 ? Exprimer la chaleur  $Q_{23}$  reçue par le système au cours de cette transformation en fonction de  $T_1$  et  $T_2$ . On pourra judicieusement appliquer le premier principe.
9. Exprimer le travail  $W_{31}$  et la chaleur  $Q_{31}$  reçus par le système au cours de la transformation 3 → 1 en fonction de  $V_2$  et  $V_1$ .

10. Montrer qu'au cours d'un cycle, le travail et la chaleur reçus par le système sont :

$$W = P_1 V_1 \left[ \frac{3}{2} \left( \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) - \ln \frac{V_1}{V_2} \right] \quad \text{et} \quad Q = -W$$

11. Quel est le signe de  $W$  ? Quel est le signe de  $Q$  ? On pourra donner un argument physique, ou étudier mathématiquement le signe de  $W$  et  $Q$ .
12. Expliquer qualitativement ce qu'il va se passer avec l'eau du réservoir lorsqu'on effectue un grand nombre de cycles identiques. Pourra-t-on toujours le considérer comme un thermostat ?

### Exercice 3 : SÉQUESTRATION DU CO<sub>2</sub>

Les activités humaines ont accru sensiblement le taux de la concentration de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère : autour de 280 ppm il y a 250 ans, il est actuellement de 387 ppm (soit une augmentation de 38 %). Afin de ne pas dépasser la limite de 450 ppm au-delà de laquelle les conséquences les plus dramatiques du réchauffement climatique seront inévitables de nombreuses options sont envisagées afin de limiter les rejets de CO<sub>2</sub> dans l'atmosphère.

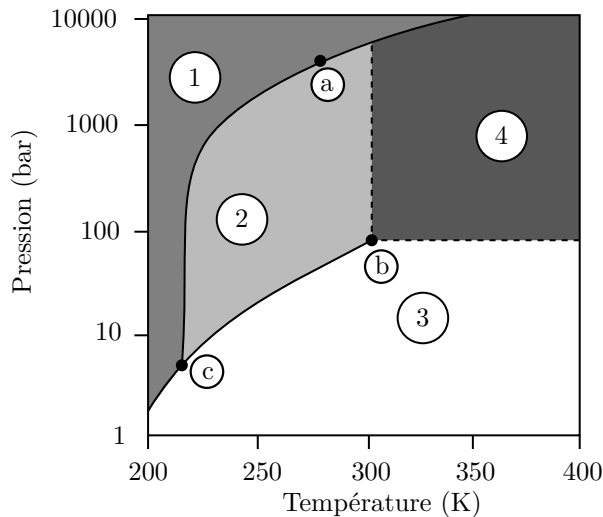
Masse volumique de l'océan	$\rho_0 = 1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Température de l'océan	$T_0 = 280 \text{ K}$
Pression à la surface de l'océan	$P_0 = 1 \text{ bar}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire du CO <sub>2</sub>	$M_{\text{CO}_2} = 44,0 \text{ g mol}^{-1}$

TABLE 1 – Données thermodynamiques relatives au problème

Une première proposition un peu simple consiste à former des blocs de CO<sub>2</sub> solide à l'aide d'installations frigorifiques puis de les laisser tomber dans des fosses marines. On effectue les approximations suivantes :

- L'océan est un fluide homogène au repos, de température constante, incompressible et indilatable.
- Les blocs de CO<sub>2</sub> sont incompressibles et indilatables. Ils ont de plus une masse constante tout au long de la descente dans la fosse (approximation forte).

On donne ci-dessous le diagramme de phases de CO<sub>2</sub>.



#### Caractéristiques des points a, b, c :

Point a,  $T_a = 280 \text{ K}$ ,  $P_a = 4 \times 10^3 \text{ bar}$  ;

Point b,  $T_b = 304 \text{ K}$ ,  $P_b = 70,4 \text{ bar}$  ;

Point c,  $T_c = 216 \text{ K}$ ,  $P_c = 5,11 \text{ bar}$ .

FIGURE 1 – Diagramme du phases du CO<sub>2</sub>.

- Donner le nom de l'état physique dans chacune des quatre zones 1, 2, 3 et 4.
- Donner les noms des points c et b et préciser leur particularité.
- Un morceau de dioxyde de carbone solide est laissé sur une table dans un laboratoire. Ce solide est-il stable ou au contraire observe-t-on un changement d'état (préciser alors son nom) ?
- Quelle doit être la pression minimale de l'eau pour que le CO<sub>2</sub> reste solide dans son emplacement de stockage ?
- On note  $z$  la profondeur du point considéré avec  $z = 0$  correspondant à la surface de l'océan. Sachant que dans le cas d'un fluide au repos, la pression à une profondeur  $z$  est  $P(z) = P(0) + \rho g z$ . Quelle devrait être la profondeur minimale de la fosse marine pour que le bloc de CO<sub>2</sub> reste solide ? Commenter le résultat.

La méthode précédente de séquestration présente de nombreux inconvénients : perte partielle du CO<sub>2</sub> lors de la chute du bloc, dissolution du CO<sub>2</sub> dans l'eau de mer (et donc modification de son pH) et risque de libération brutale du CO<sub>2</sub> piégé. Une solution plus raisonnable est de réinjecter le CO<sub>2</sub> dans le sous-sol et de le piéger dans un aquifère salin (réserve souterraine d'eau salée).

Le CO<sub>2</sub> gazeux est capté, il subit des compressions successives jusqu'à obtention d'un fluide. Ce dernier est ensuite injecté dans un aquifère salin dont la profondeur est nécessairement supérieure à 800 m. Dans de telles conditions de

température et de pression le  $\text{CO}_2$  est supercritique. Moins dense que l'eau de l'aquifère, il monte puis s'accumule sous un piège structural (une roche composée par exemple d'argile).

On considère une quantité  $n_0$  de  $\text{CO}_2$  occupant un volume  $V_0 = 10 \text{ m}^3$  à une température  $T_0 = 298 \text{ K}$  et une pression  $p_0 = 1 \text{ bar}$ .

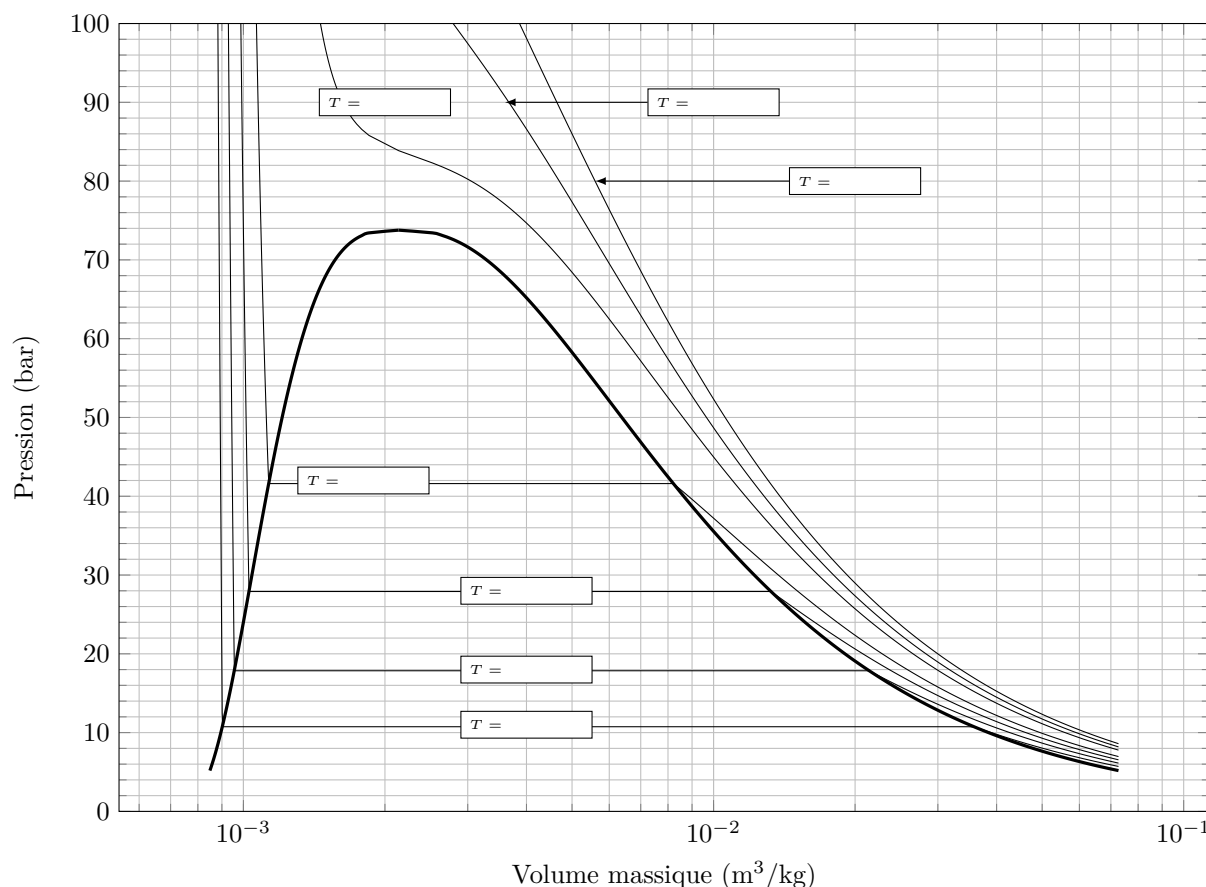
On désire vérifier la validité du modèle du gaz parfait appliqué au  $\text{CO}_2$  gazeux. Pour un kilogramme de  $\text{CO}_2$  gazeux à une température de  $280 \text{ K}$ , on obtient les résultats suivants :

$P$ (bar)	0,804	0,868	0,968	1,060	1,130	1,179
$V$ ( $\text{m}^3$ )	0,658	0,610	0,547	0,499	0,468	0,449

6. Rappeler les hypothèses du modèle du gaz parfait. Quelle relation lie  $P$ ,  $V$ ,  $n$  et  $T$  dans ce modèle.

7. Ce modèle est-il compatible avec les résultats expérimentaux ?

On donne ci-dessous le diagramme de Clapeyron et des données thermodynamiques relatives à  $\text{CO}_2$ .



$T(\text{K})$	235	250	265	280	295
$P_{\text{sat}}$ (pression de vapeur saturante en bar)	10,7	18,0	28,1	41,9	59,5
$v_l$ (volume massique du liquide à l'ébullition en $\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$ )	$9,0 \times 10^{-4}$	$9,6 \times 10^{-4}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-3}$
$v_v$ (volume massique de la vapeur saturante en $\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$ )	$3,6 \times 10^{-2}$	$2,1 \times 10^{-2}$	$1,3 \times 10^{-2}$	$8,1 \times 10^{-3}$	$4,7 \times 10^{-3}$

TABLE 2 – Données thermodynamiques relatives au dioxyde de carbone. La vapeur saturante correspond à la vapeur en équilibre avec du liquide.

8. Compléter le diagramme de Clapeyron (températures) et tracer l'isotherme à  $295 \text{ K}$ .

9. Identifier sur le diagramme les courbes de rosée et d'ébullition.

10. À une température de  $295 \text{ K}$  et à la pression de  $59 \text{ bar}$ , le gaz peut-il être considéré comme parfait ?

La quantité  $n_0$  de  $\text{CO}_2$  est à présent soumise à diverses transformations la faisant passer par les états  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  caractérisés par leur température et leur volume :

Point	$A$	$B$	$C$	$D$
Température (K)	280	280	295	310
Volume ( $\ell$ )	120	53	53	53

11. Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sur le diagramme de Clapeyron et préciser l'état physique du  $\text{CO}_2$  pour chacun de ces états.
12. Préciser la pression pour chacun des états  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
13. Dans le cas de systèmes biphasiques, préciser la composition massique du mélange.
14. Déterminer le travail fourni par le compresseur pour effectuer la transformation  $A \rightarrow B$

#### Exercice 4 : MOTEUR ASYNCHRONE (CCP 2012)

Aucune connaissance préalable du principe de fonctionnement de la machine asynchrone n'est nécessaire pour traiter ce problème. Cette machine se compose principalement de deux parties :

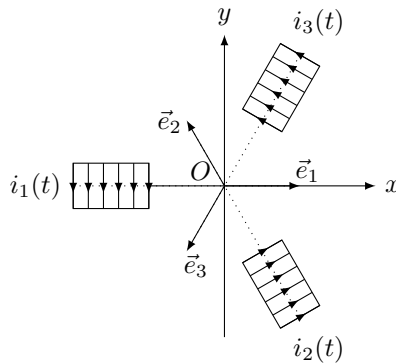
- le stator réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant  $\vec{B}(t)$ ,
- le rotor modélisé ici par un cadre conducteur rectangulaire de surface  $S$  mobile autour d'un axe.

##### I – Étude du stator

Le stator est constitué d'un ensemble de 3 bobines dont les axes sont perpendiculaires à  $Oz$  et régulièrement décalés de  $\frac{2\pi}{3}$ . Ces bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation  $\omega_s$  dont les intensités sont les suivantes :

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega_s t), \quad i_2(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \text{et} \quad i_3(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

La fréquence d'alimentation de ces bobines est égale à  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 50$  Hz. Chaque bobine crée en  $O$  un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme :  $\vec{B}_k = K i_k(t) \vec{e}_k$  ( $K$  est une constante qui s'exprime en  $\text{Hm}^{-2}$  et  $\vec{e}_k$  est le vecteur unitaire de l'axe de la  $k^{\text{ème}}$  bobine).



1. Justifier l'unité de  $K$ .
2. On donne le théorème de Ferraris :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\omega_s t - \frac{2k\pi}{p}\right) \vec{e}_{k+1} = \frac{p}{2} (\cos(\omega_s t) \vec{e}_x + \sin(\omega_s t) \vec{e}_y) \quad (1)$$

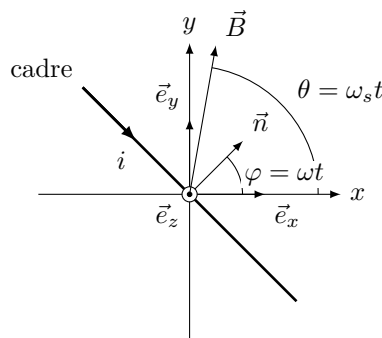
En déduire que la somme des champs magnétiques créés par les 3 bobines au point  $O$  est un champ tournant  $\vec{B}$  dont on donnera l'expression dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . Donner la norme du champ magnétique  $B_0 = \|\vec{B}\|$  en fonction de  $K$  et  $I_0$ .

3. Quelle est la vitesse de rotation du champ ? Calculer sa valeur numérique en tours par minute.

##### II – Entraînement du rotor

Le rotor est modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface  $S$  orientée selon la normale  $\vec{n}$  qui tourne autour de l'axe  $Oz$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  ( $\omega \geq 0$ ).

4. Exprimer le flux  $\Phi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  généré par le stator à travers le cadre en fonction de  $B_0$ ,  $S$ ,  $\omega$ ,  $\omega_s$  et  $t$ .
5. En déduire la force électromotrice  $e(t)$  induite dans le cadre en fonction du flux maximum  $\Phi_0 = B_0 S$ , de la vitesse angulaire de glissement  $\Omega = \omega_s - \omega$  et de  $t$ .



Le cadre est équivalent à un circuit constitué d'une inductance  $L$  en série avec une résistance  $R$ .

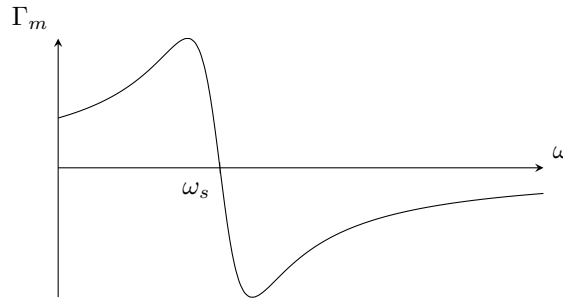
6. Dessiner un schéma équivalent du rotor en faisant apparaître la fem induite  $e(t)$ .
7. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i(t)$  induit dans le cadre.
8. On se place en régime permanent sinusoïdal, l'intensité dans le cadre s'écrit alors sous la forme  $i(t) = I_M \sin(\Omega t - \Psi)$ .  
Ce qui donne l'intensité complexe :  $\underline{i}(t) = I_M e^{j(\Omega t - \Psi - \frac{\pi}{2})}$  et la fem complexe :  $\underline{e} = |\underline{e}| e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$ . Montrer que l'intensité complexe dans le cadre s'écrit :

$$\underline{i}(t) = \frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (2)$$

9. En déduire l'expression de  $I_M$  en fonction de  $\Phi_0$ ,  $\Omega$ ,  $R$  et  $L$ . Exprimer  $\cos(\Psi)$  en fonction de  $\Omega$ ,  $R$  et  $L$  et préciser le signe de  $\sin(\Psi)$ .
10. On donne  $\Phi_0 = 10^{-3} \text{ Tm}^2$  et  $L = 100 \text{ mH}$ . Donner la valeur numérique de la valeur efficace de  $i(t)$  dans le cas où  $R \ll L\Omega$ .
11. Comment mesure-t-on en pratique une intensité efficace ?  
On rappelle l'expression du moment magnétique  $\vec{M}$  du rotor :  $\vec{M} = i(t) S \vec{n}$ .
12. Exprimer le couple électromagnétique  $\vec{\Gamma}$  des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre, puis sa projection  $\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$  sur l'axe de rotation en fonction de  $S$ ,  $B_0$ ,  $I_M$ ,  $\Psi$ ,  $\Omega$  et  $t$ .
13. On donne la relation  $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ . Montrer que la valeur moyenne de  $\Gamma$ , notée  $\Gamma_m$  est donnée par :

$$\Gamma_m = \left( \frac{\Phi_0^2}{2L} \right) \frac{RL\Omega}{R^2 + (L\Omega)^2}. \quad (3)$$

14. On donne l'allure de  $\Gamma_m(\omega)$  :



À quoi correspond la limite de  $\Gamma_m$  quand  $\omega$  tend vers 0 ? En quoi cela constitue-t-il un avantage par rapport à d'autres types de moteur (par exemple pour un moteur synchrone  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \Gamma_m = 0$ ) ? Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou au contraire résistant ?