DS8 : Induction et thermodynamique – corrigé

Exercice 1 : Le transformateur torique (CCP 2018)

1. Si les courants i_1 et i_2 sont positifs, la règle de la main droite indique que le champ magnétique créé sera dirigé suivant $+\vec{e}_\theta$.
2. D'après l'expression de $\vec{B}_1$ on peut dire que l'unité de μ_0 est $\mathrm{T\,m\,A^{-1}}$
3. Le flux du champ magnétique à travers une spire est :
$$\varphi = \iint \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r}\vec{e}_\theta \cdot \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\theta = \int_{r=R}^{R+a}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$$
4. L'intégrale précédente donne :
$$\varphi = \frac{\mu_0 N_1 i_1 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$
5. Le flux total à travers les N_1 spires du circuit C_1 est
$$\Phi = \frac{\mu_0 N_1^2 i_1 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$
6. Le flux propre d'un circuit parcouru par un intensité i est $\Phi_p = Li$ où L est l'inductance propre du circuit
7. On en déduit directement l'inductance propre $L_1 = \Phi/i_1$ soit
$$L_1 = N_1^2\frac{a\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$
8. Le calcul de L_2 est exactement le même que celui de L_1 il faut juste remplacer N_1 par N_2 et on obtient :
$$L_2 = N_2^2\frac{a\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$
9. Le flux du champ magnétique créé par un circuit 1 parcouru par un courant i_1 à travers le circuit 2 est $\Phi_{12} = Mi_1$.
10. Dans le cas présent, on a $\Phi_{12} = N_2\varphi$ soit :
$$M = N_1 N_2\frac{a\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$
11. La tension u_1 au primaire est donnée par :
$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}\,i_1}{\mathrm{d}\,t} + M\frac{\mathrm{d}\,i_2}{\mathrm{d}\,t}$$
12. La tension u_2 au secondaire est donnée par :
$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}\,i_2}{\mathrm{d}\,t} + M\frac{\mathrm{d}\,i_1}{\mathrm{d}\,t}$$
13. On utilise le résultat de la question 12 pour écrire
$$\frac{\mathrm{d}\,i_1}{\mathrm{d}\,t} = \frac{u_2}{M} - \frac{L_2}{M}\frac{\mathrm{d}\,i_2}{\mathrm{d}\,t}$$
que l'on injecte dans le résultat de la question 11 pour obtenir :
$$u_1 = \frac{L_1}{M}u_2 + \frac{M^2 - L_1L_2}{M}\frac{\mathrm{d}\,i_2}{\mathrm{d}\,t}$$
14. Avec les expressions de L_1, L_2 et M, on remarque que $M^2 - L_1L_2 = 0$ et $\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$. On en déduit
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$$
15. Les transformateurs permettent d'élever ou d'abaisser les tensions du réseau électrique.
16. Dans la modélisation que l'on a faite, il n'y a pas de pertes d'énergie et le rendement entre primaire et secondaire est égal à 1.
17. Pour des signaux continus, il n'y a pas de variation de champ magnétique dans le matériau magnétique donc pas de variation de flux, et donc pas de fem induite dans le secondaire. Un transformateur ne peut pas fonctionner avec des signaux continus.
18. On cherche à éviter la présence de courants de Foucault induits dans le matériau magnétique, en effet ils chauffent le matériau et induisent des pertes de puissance entre le primaire et le secondaire.

Exercice 2 : Le moteur asynchrone (Centrale 2016)

1. On peut faire l'hypothèse de l'ARQS si la taille d du circuit est faible et la fréquence f pas trop élevée. Plus précisément il faut que $d \ll \frac{c}{f}$
2. Lorsque $i_1 > 0$ et $i_2 > 0$ le champ magnétique $\vec{B}_1 // \vec{u}_x$ et $\vec{B}_2 // -\vec{u}_y$.
3. Le flux propre de la bobine (1) est $\phi_p = L_S i_1 = NB_1 S = nl\pi A^2 \mu_0 n i_1 = \underbrace{\mu_0 n^2 \pi A^2 l}_{L_S} i_1$. Avec $n = 4/(2a)$, on trouve $L_S \simeq 31\,\mathrm{mH}$
4. $\vec{B}(O,t) = \vec{B}_1(O,t) + \vec{B}_2(O,t) = \mu_0 n i_1(t)\vec{u}_x - \mu_0 n i_2(t)\vec{u}_y$. En utilisant les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ on obtient : $\vec{B}(O,t) = \mu_0 n I_M(\cos(\omega_0 t)\vec{u}_x - \cos(\omega_0 t + \alpha)\vec{u}_y)$.
   - Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $\vec{B}(O,t) = \mu_0 n I_M(\cos(\omega_0 t)\vec{u}_x + \sin(\omega_0 t)\vec{u}_y)$.
   - Pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$: $\vec{B}(O,t) = \mu_0 n I_M(\cos(\omega_0 t)\vec{u}_x - \sin(\omega_0 t)\vec{u}_y)$.
5. On peut qualifier ce champ magnétique de champ magnétique tournant car la direction de $\vec{B}$ tourne dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ à la vitesse angulaire ω_0.
   Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$ le champ tourne dans le sens trigonométrique (de $\vec{u}_x$ vers $\vec{u}_y$).
   Lorsque $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ le champ tourne dans le sens opposé (de $\vec{u}_y$ vers $\vec{u}_x$).
6. Avec les valeurs numériques données, on trouve $||\vec{B}|| \simeq 1{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$.
7. On a $r = \frac{\rho l_c}{S}$. Avec $l_c = 2\pi A \times l \times \frac{4}{(2a)}$, on trouve $r \simeq 34$.
8. En régime sinusoïdal forcé, dans le premier circuit, on a

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}}{jL_S\omega_0 + r} \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 = \frac{\underline{u}}{j\left(L_S\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) + r}$$

   Le déphasage α est alors

$$\begin{aligned}\alpha = \arg(\underline{i}_2) - \arg(\underline{i}_1) &= \arg(\underline{u}) - \arctan\left(\frac{L_S\omega_0 - 1/C\omega_0}{r}\right) - \arg(\underline{u}) + \arctan\left(\frac{L_S\omega_0}{r}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{L_S\omega_0}{r}\right) - \arctan\left(\frac{L_S\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{r}\right)\end{aligned}$$

9. Pour obtenir un déphasage de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on doit avoir :

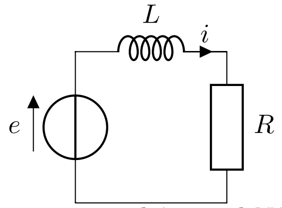
$$\arctan\left(\frac{L_S\omega_0}{r}\right) - \arctan\left(\frac{L_S\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{r}\right) = \frac{\pi}{2}$$

   En utilisant $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$ on obtient :

$$\frac{L_S\omega_0 - 1/C\omega_0}{r} = -\frac{r}{L_S\omega_0}$$

   soit en isolant C on obtient :

$$C = \frac{L_S}{r^2 + L_S^2\omega_0^2} \simeq 100\,\mathrm{F}$$

10. l'angle entre la normale à la bobine et le champ magnétique varie donc le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine varie. Il y a donc une fem induite dans la bobine qui provoque la circulation d'un courant.
11. La bobine (S) étant parcourue par un courant électrique elle possède un moment magnétque $\vec{M}$ qui subit un couple de forces $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ qui va la mettre en rotation.
12. 

13. On a $e = -\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{\mathrm{d}\,NB_0 S\cos(\Omega t)}{\mathrm{d}\,t} = NB_0 S\Omega\sin(\Omega t) = \Omega\phi_0\sin(\Omega t)$
    En appliquant la loi des mailles dans le circuit ci-dessus on obtient l'équation : $e = L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + Ri = \Omega\phi_0\sin(\Omega t)$
14. On est en régime sinusoïdal forcé, on peut donc utiliser la notation complexe. On a alors $i(t) = i_m\sin(\Omega t - \psi) = i_m\cos(\Omega t - \psi - \pi/2)$. Donc l'intensité complexe associée est $\underline{i}(t) = i_m e^{j(\Omega t - \psi - \pi/2)}$.
    On a également $e = \Omega\phi_0\sin(\Omega t) = \Omega\phi_0\cos(\Omega t - \pi/2)$ et donc $\underline{e} = \Omega\phi_0 e^{j(\Omega t - \pi/2)}$.
    L'équation électrique ci-dessus devient : $\underline{e} = \Omega\phi_0 e^{j(\Omega t - \pi/2)} = jL\Omega\underline{i} + R\underline{i}$

On en déduit que $\underline{i} = \dfrac{\Omega\phi_0 e^{j(\Omega t-\pi/2)}}{R+jL\Omega} = i_m e^{j(\Omega t-\psi-\pi/2)}$
L'égalité des arguments donne

$$\Omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L\Omega}{R} = \omega t - \psi - \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \psi = \arctan\frac{L\Omega}{R}$$

Et l'égalité des modules donne

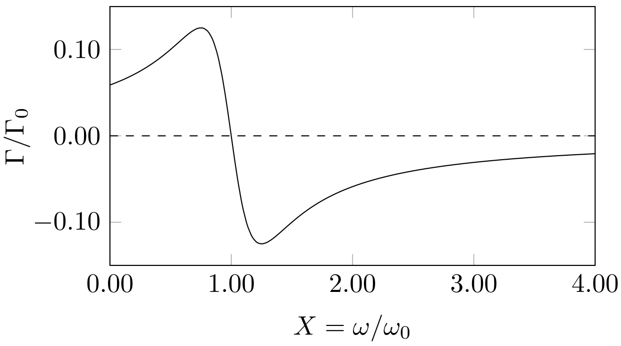
$$i_m = |\underline{i}| = \frac{\Omega\phi_0}{\sqrt{R^2+L^2\Omega^2}}$$

15. Le moment magnétique associé à la bobine plate est $\vec{M} = Ni\vec{S}$
16. La bobine subit un couple de forces $\vec{\Gamma} = \vec{M}\wedge\vec{B} = Ni\vec{S}\wedge\vec{B}$.
17. $\Gamma(t) = NSi_m\sin(\Omega t-\psi)\times B_0\times\sin(\Omega t)$
18. D'après la question précédente, on a $\Gamma(t) = SB_0Ni_m\big(\sin^2(\Omega t)\cos\psi - \cos(\Omega t)\sin(\Omega t)\sin\psi\big)$
Or $\langle\sin^2(\Omega t)\rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle\cos\Omega t\sin\Omega t\rangle = 0$. Donc on obtient :

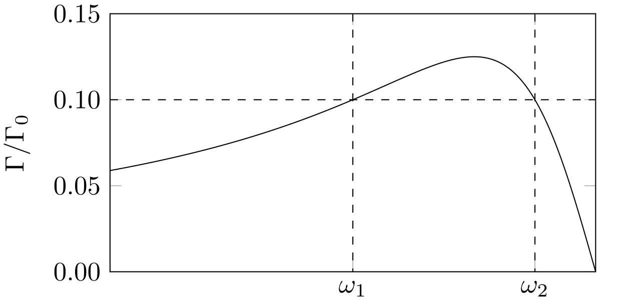
$$\langle\Gamma\rangle = \frac{SB_0Ni_m\cos\psi}{2} = \frac{NSB_0}{2}\frac{\Omega\phi_0}{\sqrt{R^2+L^2\Omega^2}}\cos\left(\arctan\frac{L\Omega}{R}\right)$$

En utilisant $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et en introduisant $1-X = \frac{\Omega}{\omega_0}$, on obtient l'expression demandée avec

$$\Gamma_0 = \frac{\phi_0^2\omega_0}{2R} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{L^2\omega_0^2}{R^2}$$

19. 

On remarque que pour $X = 1$, c'est à dire pour $\omega = \omega_0$ le couple est nul (on s'y attendait). Le couple du moteur passe par une valeur maxiale autour de $X = 0.7$. Lorsque $X > 1$ le couple subit par la bobine est un couple résistant, le moteur se comporte comme un générateur.

20. 

Lorsque la partie utilisatrice impose un couple moyen $<\Gamma>$ on a deux valeurs possibles de ω. Imaginons que le moteur soit initialement à la vitesse de rotation ω_2. Si une fluctuation fait très légèrement augmenter ω alors le couple fourni par le moteur devient inférieur au couple utilisateur et le moteur va ralentir. Inversement si une fluctuation fait diminuer la vitesse de rotation, le couple fourni par le moteur augmente et devient plus important que le couple utilisateur, le moteur accélère. La position ω_2 est donc stable.
Le même raisonnement montre que la position ω_1 est instable.

21. La puissance mécanique moyenne fournie par le moteur est $\langle\mathcal{P}\rangle = \langle\Gamma\rangle\omega$. Avec $\omega = X\omega_0$ on trouve :

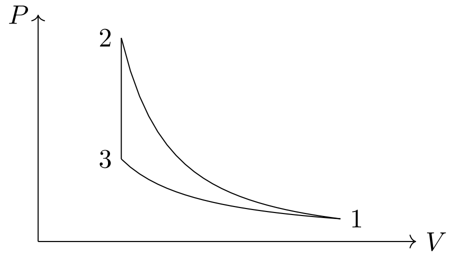
$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\omega_0\Gamma_0 X(1-X)}{1+\lambda^2(1-X)^2}$$

Exercice 3 : Transformation cyclique d'un gaz parfait

1. Pour un système au repos, la variation d'énergie interne ΔU d'un système thermodynamique entre deux états d'équilibre est donnée par $\Delta U = W + Q$, où W est le travail reçu par le système et Q la chaleur reçue par le système au cours de la transformation.
2. Au cours d'une transformation adiabatique, il n'y a pas d'échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur. Les transformations adiabatiques sont des transformations rapides.
3. Au cours d'une transformation isotherme, la température du système reste constante. Les transformations isothermes sont des transformations lentes pour que les échanges de chaleur aient le temps de se faire.
4. La transformation $1\to 2$ est adiabatique, on a donc $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$ et donc $P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$
5. Dans l'état 2 on peut écrire l'équation d'état des gaz parfait : $P_2V_2 = nRT_2$ avec $P_1V_1 = nRT_1$ on a

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{nR} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1}T_1 = \frac{P_2}{P_1}\frac{V_2}{V_1}T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma\frac{V_2}{V_1}T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}T_1$$

6. Diagramme (P, V) :



7. On choisit d'utiliser le premier principe entre 1 et 2 . On a $\Delta U = W_{12} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1)$. Soit

$$W_{12} = \frac{3}{2}nRT_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right) = \frac{3}{2}P_1V_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right)$$

8. La transformation $2 \to 3$ est isochore donc $W_{23} = 0$. Dans ces conditions, on a $\Delta U_{23} = Q_{23} = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_2)$. Soit

$$Q_{23} = -W_{12} = \frac{3}{2}P_1V_1\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$$

9. Au cours de la transformation $3 \to 1$, la température reste constante donc $\Delta U_{31} = 0$ et $W_{31} = -Q_{31}$. On a aussi :

$$W_{31} = -\int_{V_2}^{V_1} P\,\mathrm{d}V = -nRT_1\int_{V_2}^{V_1}\frac{1}{V}\,\mathrm{d}V = -P_1V_1\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \quad \text{et} \quad Q_{31} = P_1V_1\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

10. Au cours d'un cycle $\Delta U = 0$ donc $W = -Q$. Et

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = P_1V_1\left[\frac{3}{2}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right) - \ln\frac{V_1}{V_2}\right]$$

11. On remarque sur le graphique de la question 6 que le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc le travail reçu par le système au cours d'un cycle est positif. Q est donc négatif. Le système reçoit du travail et fournit de la chaleur au milieu extérieur.
12. À chaque cycle l'eau du réservoir reçoit un peu de chaleur de la part du gaz, elle va donc s'échauffer. On ne pourra plus considérer le réservoir comme un thermostat.