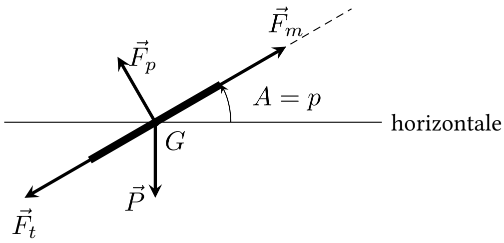
DS6 : Mécanique – corrigé

Exercice 1 : Mécanique du vol d'un avion (Centrale TSI 2015)

1 Vol en montée

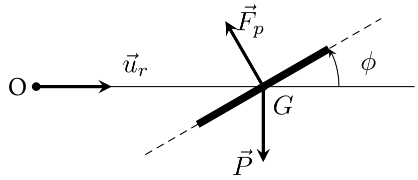
1. Schéma :



2. L'avion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen donc la somme des forces appliquées est nulle :
$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = \vec{0} \tag{1}$$
3. La projection de la relation (1) sur les axes (Ox') et (Oz') donne :
$$\begin{aligned}(Ox'):&\quad F_t + mg\sin A = F_m\\ (Oz'):&\quad mg\cos A = F_p\end{aligned}$$
4. On substitue $F_p = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p$ dans la relation précédente et on isole v, on obtient l'équation demandée :
$$v = \sqrt{\frac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}$$
5. La puissance fournie par une force $\vec{F}$ dont le point d'application est animé d'une vitesse $\vec{v}$ est $P = \vec{F}.\vec{v}$. Donc ici on a $\mathcal{P}_m = \|\vec{F}_m\| v$.
6. On fait l'analyse suivante :
$$\begin{aligned}[\mathcal{P}_{m0}] &= \left[mg\frac{C_t}{C_p}\sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}\right] = \mathrm{N}\times\emptyset\times\sqrt{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg\,m^{-3}m^2}}} = \mathrm{N}\sqrt{\mathrm{N\,kg^{-1}\,m}} \quad \text{or} \quad \mathrm{N\,kg^{-1}} = \mathrm{m\,s^{-2}}\\ \text{donc}\quad [\mathcal{P}_{m0}] &= \mathrm{N}\sqrt{\mathrm{m^2\,s^{-2}}} = \mathrm{N\,m\,s^{-1}} = \mathrm{W}\end{aligned}$$
Numériquement, on trouve $f_0 = 30$ et $\mathcal{P}_{m0} = 20\,\mathrm{kW}$.
7. En utilisant les approximations données, on trouve :
$$\mathcal{P}_m \simeq \mathcal{P}_{m0}(1 + f_0 A)$$
Ce qui donne $A = \frac{1}{f_0}\left(\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{P}_{m0}} - 1\right) \simeq 5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad} \simeq 2{,}9°$
8. On a $v_z = v\sin A = \sqrt{\frac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}\sin A$. Avec la valeur de A trouvée ci-dessus, on trouve $v_z = 1{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
9. D'après 3 on a $\eta = \frac{F_p}{mg} = \cos(A)$. On a forcément $\eta < 1$ ce qui est compatible avec le facteur de charge maximum admissible de 2.

2 Vol en virage

10. Schéma :



11. En coordonnées polaires, pour une trajectoire circulaire uniforme, on a $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$
12. L'application du principe fondamental de la dynamique donne directement :

$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = -m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r \tag{2}$$

13. La projection de la relation précédente sur les axes $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ donne :

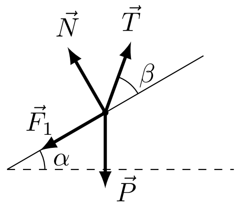
$$\begin{aligned} (\vec{u}_r) &\quad -F_p \sin\phi = -m\frac{v^2}{R} \\ (\vec{u}_z) &\quad F_p \cos\phi = mg \end{aligned}$$

On trouve donc finalement $R = \dfrac{v^2}{g\tan\phi}$

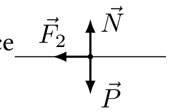
14. Le facteur de charge est $\eta = \frac{F_p}{mg} = \frac{1}{\cos\phi}$
15. On doit avoir $\eta < 2$ donc $\cos\phi > \frac{1}{2}$ et donc $\phi < 60°$. Dans ces conditions $\tan\phi < \sqrt{3}$ et donc $R > \dfrac{v^2}{g\sqrt{3}}$.

Exercice 2 : Saut à ski

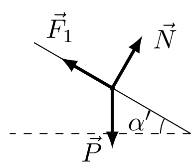
1. Schéma : (il ne faut pas oublier la composante $\vec{N}$ normale de la réaction du sol)



2. L'énoncé indique que le skieur remonte la piste *à vitesse constante*. Celà indique que son accélération est nulle, et d'après le PFD que la somme des forces appliquées est également nulle.
3. En projetant l'ensemble des forces sur l'axe $\vec{e}_x$ parallèle à la piste, orienté vers la droite, on a $-F_1 + T\cos\beta - P\sin\alpha = 0$. D'où $T = \frac{F_1 + P\sin\alpha}{\cos\beta}$. L'application numérique donne $T = 486\,\mathrm{N}$
4. Les forces appliquées au skieur sont : son poids $\vec{P}$, la réaction normale $\vec{N}$ de la piste et la force de frottement $\vec{F}_2$



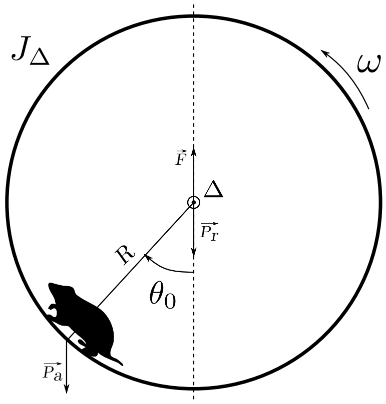
5. Le PFD appliqué au skieur et projeté sur l'axe Ox horizontal orienté vers la droite donne : $m\ddot{x} = -F_2$. C'est l'équation différentielle demandée.
6. Une première intégration de l'équation différentielle donne $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) - \frac{F_2}{m}t$. On l'intègre une seconde fois pour obtenir $x(t) = \dot{x}(0)t - \frac{F_2}{2m}t^2 + x(0)$. Le skieur s'arrête lorsque sa vitesse est nulle, c'est à dire au temps $t_f = \frac{m\dot{x}(0)}{F_2}$ et il parcours la distance $d = x(t_f) - x(0) = \frac{m\dot{x}^2(0)}{2F_2}$. A.N. : $d \simeq 9{,}8\,\mathrm{m}$
7. Au début de la descente, la vitesse du skieur est faible donc la force de frottement également, la résultante des forces appliquées au skieur est non nulle et il accélère. Mais plus il accélère, plus la force de frottement est importante et limite son accélération. Il existe donc une vitesse limite pour laquelle la force de frottement devient si intense qu'elle compense les autres forces (le poids), à cette vitesse le skieur n'accélère plus, sa vitesse reste constante.
8. Si le mouvement du skieur est rectiligne homogène, la résultante des forces appliquées est nulle. En projetant les forces sur l'axe de la piste orienté vers la droite on obtient : $-F_3 + mg\sin\alpha' = 0$ donc $F_3 = mg\sin\alpha' = kv_l^2$. Donc la vitesse limite est $v_l = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha'}{k}} \simeq 28{,}3\,\mathrm{m/s}$



9. Lors du saut, la seule force appliquée au skieur est son poids $\vec{P}$.
10. Le PFD projeté sur les axes x et y donne directement $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = -g$
11. En intégrant deux fois ces équations différentielles, et en tenant compte des conditions initiales, on trouve $x(t) = v_{0x}t$ et $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, avec $v_{0x} = v_0 \cos\gamma$ et $v_{0y} = v_0 \sin\gamma$.
12. S'il retombe sur une surface plane située à 5 m en dessous du point F, on a $y(t_f) = -5\,\text{m} = v_{0y}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2$ dont la solution donne $t_f \simeq 1{,}87$ s. La distance parcourue est $D = x(t_f) = v_{0x}t_f \simeq 45$ m.

Exercice 3 : Un hamster court dans sa cage

1. Les forces qui s'exercent sur la roue sont le *poids du hamster*, *le poids de la roue* et la *réaction de l'axe de rotation* sur la roue. Comme la roue est globalement immobile, on en conclut que la somme des ces forces est nulle.



2. Le moment cinétique de la roue du hamster est $L_\Delta = J_\Delta\omega$.
3. D'après le théorème du moment cinétique : $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_a) = mgR\sin\theta_0$. La réaction de l'axe de rotation et le poids de la roue passant par l'axe, leur moment est nul. On a donc l'accéleration angulaire : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{mgR\sin\theta_0}{J_\Delta}$.
4. On a montré à la question précédente que l'accélération angulaire de la roue est constante, donc $\omega(t) = \frac{mRg\sin\theta_0}{J_\Delta}t$.
5. L'énergie cinétique de la roue est $E_c(t) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega(t)^2$. Donc $E_C(t) = \frac{(mRg\sin\theta_0)^2}{2J_\Delta}t^2$
6. Le hamster court à une vitesse v, la vitesse angulaire correspondante est $\omega = \frac{v}{R}$. Le temps qu'il met pour atteindre cette vitesse est : $t = \frac{J_\Delta\omega}{mRg\sin\theta_0} \simeq 0{,}3$ s
7. L'énergie cinétique de la roue est alors $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = 70$ mJ.
8. Lorsque la vitesse de course du hamster est constante, l'accélération angulaire de la roue est nulle et donc le moment des forces appliquées sur la roue doit également être nul. C'est le cas uniquement pour $\theta_0 = 0$
9. On procède de la même manière que dans la question 3 en ajoutant au moment du poids le couple résistant des frottements, il faut donc remplacer $mRg\sin\theta_0$ par $mRg\sin\theta_0 - \Gamma_\Delta$.
10. Dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante l'accélération angulaire étant nulle, il faut que la somme des moments des forces appliquées à la roue soit nulle, et donc le moment du poids doit compenser exactement le couple résistant du aux frottements. On a alors $mRg\sin\theta_0 - \Gamma_\Delta = 0$ et donc $\theta_0 = \arcsin\frac{\Gamma_\Delta}{mRg}$
11. Lorsque le hamster court, la vitesse de rotation de la roue est $\omega_0 = \dfrac{v_0}{R}$
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, **son énergie cinétique est nulle** car sa il a une vitesse nulle dans le référentiel du laboratoire.
    Si on prend l'origine des abscisses au centre de la roue, son énergie potentielle de pesenteur est $E_p = mgh = -mgR$.
    L'énergie cinétique de rotation de la roue est $E_{cR} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2$.
    L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies cinétiques et potentielles, soit $\boxed{E_m = -mgR + \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2}$
13. Juste après que le hamster ne s'arrête de courir, les expressions de l'énergie cinétique de la roue et de l'énergie potentielle du hamster restent les mêmes en remplaçant ω_0 par ω_1. Seulement maintenant l'énergie cinétique du hamster n'est plus nulle, il avance à la même vitesse que la roue donc son énergie cinétique est : $E_{cH} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2$.
    L'égalité des énergies mécaniques avant et après l'arrêt du hamster donne :

$$\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 - mgR = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_1^2 - mgR + \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{J_\Delta}{J_\Delta + mR^2}}}$$

14. L'énergie mécanique reste constante car on néglige les frottements entre la roue et son axe. Elle vaut

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2}_{E_{cR}} + \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\omega^2}_{E_{cH}} - \underbrace{mgR\cos\theta}_{E_p} = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta$$

15. En écrivant que l'énergie mécanique est constante on obtient

$$\frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega_1^2 - mgR \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}}}$$

16. Lorsque le hamster est au sommet de la roue, il subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dirigé verticalement vers le bas, et la réaction de la roue $\vec{K}$ dirigée également vers le bas (car l'accélération tangentielle du hamster est nulle en ce point).
17. L'accélération normale s'écrit en coordonnées polaires (lorsque le rayon de la trajectoire est constant) comme $\vec{a}_r = -R\omega^2\vec{e}_r$. Ce qui en utilisant la question 15 donne l'expression demandée :

$$\vec{a} = -R\left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}\right)\vec{e}_r$$

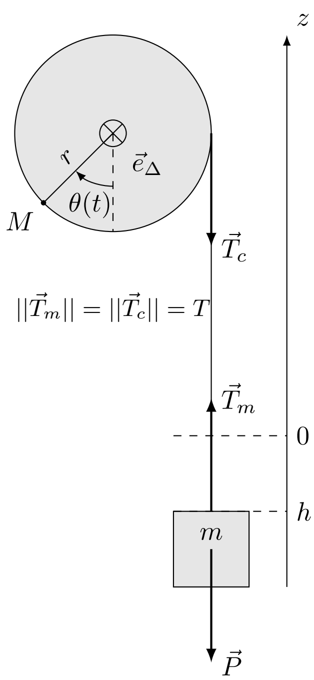
18. En appliquant le PFD au hamster lorsqu'il se trouve au sommet de la trajectoire ($\theta = \pi$) et en le projetant sur $\vec{e}_r$, on obtient :

$$-mg - K = ma_r = -mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) \quad \text{soit} \quad K = mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) - mg$$

Avec les valeurs numériques données, on trouve $K < 0$, ce qui ne permet pas au hamster de faire un looping.

19. En y regardant en détails, on remarque que la vitesse de rotation initiale de la roue ω_0, même si elle restait constante après l'arrêt du hamster serait trop faible pour permettre un looping. Il faut donc déjà augmenter ω_0 et donc réduire R (le hamster ne peut pas courir plus vite !). Ensuite il faut aussi augmenter J_Δ en lui installant une roue plus lourde

Exercice 4 : TREUIL (TD13)



1. Lorsque le cylindre est bloqué, la masse m est immobile. Les forces qu'elle subit sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil. Leur résultante étant nulle, on obtient $\vec{T} = -m\vec{g}$.
2. La hauteur de la masse est reliée à l'angle dont le cylindre a tourné par : $h(t) = -r\theta(t)$
3. L'application du PFD à la masse m dont la hauteur est notée $h(t)$, en le projetant sur l'axe Oz vertical dirigé vers le haut donne $m\ddot{h}(t) = T - mg$.
4. Le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre est :

$$J_\Delta\dot{\omega} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = rT. \tag{3}$$

5. La questions 3 et 2 permettent d'obtenir $T = m(g - r\ddot{\theta})$. En substituant cette expression dans l'équation 3 on obtient : $J_\Delta\dot{\omega} = mr(g - r\dot{\omega})$, soit en isolant $\dot{\omega}$: $\alpha = \dot{\omega} = \dfrac{mrg}{J_\Delta + mr^2}$
6. $a = -r\alpha = -\dfrac{mr^2g}{J_\Delta + mr^2}$ soit $|a| = g\dfrac{1}{1 + J_\Delta/mr^2} < g$. L'accélération est inférieure à l'accélération lors d'une chute libre qui vaut g.
7. $a \simeq 3{,}27\,\mathrm{ms^{-2}}$ et $\alpha \simeq 32{,}7\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$
8. On peut facilement trouver l'énergie cinétique de l'ensemble car en l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservée et l'énergie cinétique gagné par l'ensemble est égale à l'énergie potentielle perdue par la masse m. On a donc $E_c = -mgh$.