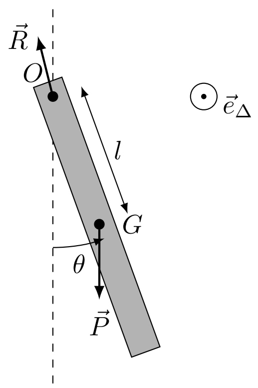
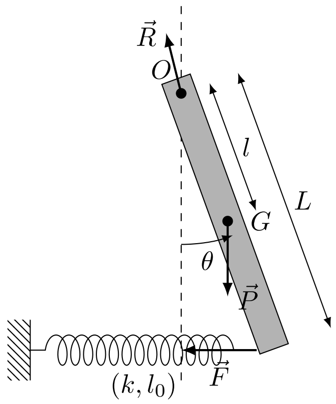
# DM4 : Pendule pesant – corrigé




1. Les forces appliquées au solide sont : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué au centre de gravité et la réaction de l'axe $\vec{R}$.
2. On oriente l'axe $\Delta$ selon $\vec{e}_\Delta$. Le TMC projeté sur l'axe $\Delta$ donne :
$$\frac{\mathrm{d}\,L_\Delta}{\mathrm{d}\,t} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = -mgl\sin\theta + 0$$
Avec $L_\Delta = J_\Delta\dot{\theta}$ on obtient finalement $J_\Delta\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$
3. Lorsque $\theta \ll 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation précédente devient
$$J_\Delta\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$
La solution générale de cette équation différentielle est $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Les conditions initiales donnent $A = \theta_0$ et $\varphi = 0$. Donc finalement $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J_\Delta}$.




4. Voir schéma ci-dessus, on ajoute la force $\vec{F}$ de rappel du ressort.
5. On applique le TMC projeté sur l'axe $\Delta$, il faut ajouter le moment par rapport à $\Delta$ de la force $\vec{F}$, on obtient :
$$J_\Delta\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - FL\cos(\theta) = -mgl\sin\theta - kL^2\sin\theta\cos\theta.$$
6. Pour des angles $\theta \ll 1$, on a $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$. L'équation différentielle ci-dessus devient :
$$J_\Delta\ddot{\theta} + (mgl + kL^2)\theta = 0.$$
La pulsation des oscillations devient $\omega_0^2 = \frac{mgl+kL^2}{J_\Delta}$, elle est donc supérieure à la pulsation obtenue dans la partie précédente (comme on devait s'y attendre).
7. L'énergie potentielle élastique du ressort est $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$. Donc $E_p = \frac{1}{2}kL^2\sin^2\theta$.
8. L'énergie mécanique totale du pendule est égale la somme de son énergie cinétique ($Ec$) et des énergies potentielles élastiques ($Epe$) et de pesenteur ($Epp$) :
$$E_m(\theta) = \underbrace{\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}_{Ec}\underbrace{-\,mgl\cos\theta}_{Epp} + \underbrace{\frac{1}{2}kL^2\sin^2(\theta)}_{Epe}$$
9. Il n'y a pas de frottements donc l'énergie mécanique est conservée lors du mouvement. On en déduit que $\frac{\mathrm{d}\,E_m}{\mathrm{d}\,t} = 0$ et donc :
$$J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta + kL^2\cos\theta\dot{\theta} = 0.$$
En simplifiant par $\dot{\theta}$ on retrouve bien l'équation différentielle trouvée plus tôt.