DS4 : Électricité

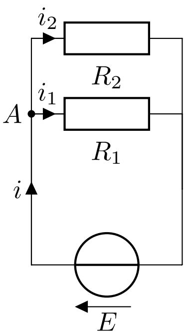
Durée 2h, calculatrices autorisées. Le DS est probablement trop long pour que vous puissiez tout faire, c'est normal, faites-en le maximum.

Exercice 1 : Résistances équivalentes

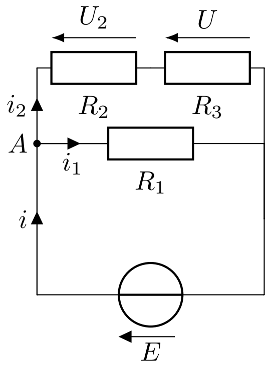
1. $R_{eq} = \frac{21}{8}R$
2. $R_{eq} = \frac{26}{11}R$
3. $R_{eq} = \frac{5}{7}R$

Exercice 2 : Quelques circuits (TD4)

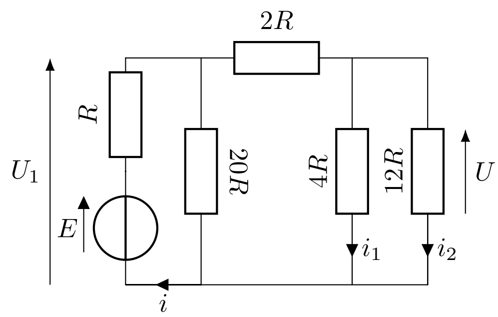
Circuit 1 :



Circuit 2 :



Circuit 3 :

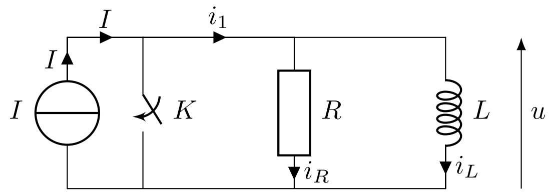


1. Circuit 1 : Loi des noeuds en A : $i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$
2. Circuit 2 : Loi des noeuds en A : $i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R_1} + i_2$. On trouve i_2 en remplaçant R_2 et R_3 par $R_{eq} = R_2 + R_3$, soit $i_2 = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R_2+R_3}$. Et finalement
$$i = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2 + R_3} = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right) \text{ et } U = R_3 i_2 = E\frac{R_3}{R_2 + R_3}$$
(En exercice : retrouver ces résultats en transformant les résistances en résistances équivalentes et en utilisant la formule d'un pont diviseur de tension)
3. On remplace successivement les associations de résistances par des résistances équivalentes : 4R et 12R en parallèle ⇒ 3R ; 3R et 2R en série ⇒ 5R ; 5R et 20R en parallèle ⇒ 4R ; 4R et R en série ⇒ 5R. Donc
$$i = \frac{E}{5R}$$
.
U est donnée par le diviseur de tension formé par $2R$ et $R_{eq} = 3R$ appliqué à $U_1 = E - Ri = \frac{4}{5}E$ donc
$$U = \frac{4}{5}E \times \frac{3R}{5R} = \frac{12}{25}E$$
.
$i_2 = \frac{U}{12R} = \frac{E}{25R}$ et $i_1 = \frac{U}{4R} = \frac{3E}{25R}$.

Exercice 3 : Adaptation d'impédance

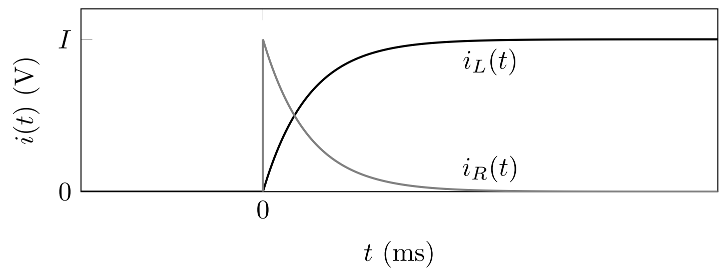
1. Pont diviseur de tension : $u = e\frac{r}{r+R}$
2. $P(r) = ri^2 = \frac{u^2}{r} = e\frac{r}{(r+R)^2}$.
3. $P(0) = 0$ et $\lim_{r\to\infty} P(r) = 0$.
4. $P(r)$ est une fonction strictement positive et comme $P(0) = 0$ et $\lim_{r\to\infty} P(r) = 0$, $P(r)$ doit passer par (au moins) un maximum. Pour le trouver on cherche la valeur de r telle que $\frac{P}{} = 0$. On trouve une seule solution pour $r = R$.

Exercice 4 : Circuit RL parallèle



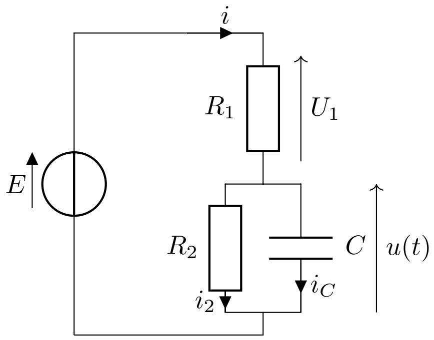
1. — Pour $t < 0$, K est fermé donc $u = 0$. Comme l'interrupteur court-circuite le générateur, on peut supposer que $i_1 = i_R = i_L = 0$. Il faut noter cependant que l'on ne peut pas démontrer ce résultat dans le cas idéal car la bobine se comportant comme un fil, elle court-circuite aussi le générateur et pourrait être parcourue par un courant. On ne peut pas vraiment répondre de manière satisfaisante à cette question.
   — À $t = 0^+$, l'interrupteur est ouvert, il y a continuité de l'intensité dans la bobine donc $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$. On a aussi $i_1 = I$ et donc $i_R = I - i_L = I$.
   — Pour $t \to \infty$, le circuit atteint le régime permanent, la bobine se comporte comme un fil donc $u = 0$, $i_R = u/R = 0$ et $i_L = I$.

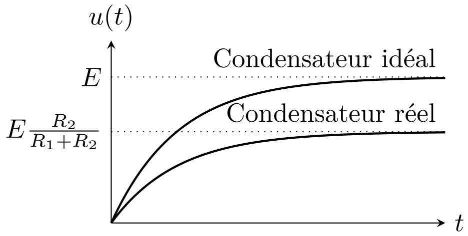
   On obtient l'allure suivante :



2. Pour $t > 0$, la loi des nœuds donne : $I = i_R + i_L$ avec la loi d'Ohm pour la résistance R : $u_= Ri_R$, on a $I = u/R + i_L$. Enfin la loi de la bobine $u = L\dfrac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t}$ on obtient :
$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} + i_L = I \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} + \frac{R}{L} i_L = \frac{R}{L} I$$
   Qui est bien de la forme demandée avec $\tau = \frac{L}{R}$.
3. L'énergie stockée dans la bobine est $E_L = \frac{1}{2} L i_L^2$. Lorsque $t \to \infty$, $i_L = I$ et donc $E_L = \frac{1}{2} L I^2$.
4. En résolvant l'équation différentielle trouvée plus tôt, on trouve $i_L(t) = I(1 - e^{-t/\tau})$. La loi de la bobine donne directement $u = L\dfrac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} = RIe^{-t/\tau}$.
5. La puissance P_g fournie par le générateur est $P_g = uI = RI^2 e^{-t/\tau}$.
6. L'énergie totale fournie par le générateur entre $t = 0$ et $t = \infty$ est :
$$E_g = \int_0^\infty P_g(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty RI^2 e^{-t/\tau} = LI^2$$
7. L'énergie dissipée par effet Joule dans R est :
$$E_J = \int_0^\infty P_J \mathrm{d}t = \int_0^\infty R i_R(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^\infty RI^2 e^{-2t/\tau} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} LI^2.$$
   On vérifie bien la conservation de l'énergie : $E_g = E_L + E_J$.

Exercice 5 : Résistance de fuite d'un condensateur (TD5)





1. À $t = 0^-$ le condensateur est déchargé et la tension à ses bornes vaut 0 V. Comme la tension aux bornes du condensateur est continue, à $t = 0^+$ elle vaut toujours 0 V.

   Lorsque $t \to \infty$ on atteint le régime permanent et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. La tension à ses bornes vaut alors $u(\infty) = E\frac{R_2}{R_1+R_2}$. La tension augmente continûment de 0 à $u(\infty)$.
2. Pour un condensateur idéal $R_2 = \infty$ et la tension à ses bornes en régime permanent vaut $u(\infty) = E$.
3. La loi des mailles donne : $E = u + U_1 = u + R_1 i$. La loi des nœuds donne $i = i_2 + i_C = \dfrac{u}{R_2} + C\dfrac{du}{dt}$. Donc finalement l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ est :
$$\frac{du}{dt} + u\left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right) = \frac{E}{R_1C}$$
4. On note $\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right)$, la résolution de l'équation différentielle donne : $u(t) = u(\infty)\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)$
5. Lorsque l'alimentation est coupée, la tension aux bornes de C est : $u(t) = u(0)\exp(-t/\tau)$ avec $\tau = R_2C$. La tension est divisée par 100 lorsque $\exp(-t/\tau) = 1/100$ soit $-t/\tau = \ln(1/100) = -\ln(100)$ donc pour $t = \tau\ln(100)$. Avec $\ln(100) \simeq 5$ on trouve $t \simeq 5 \times 10^4$ s