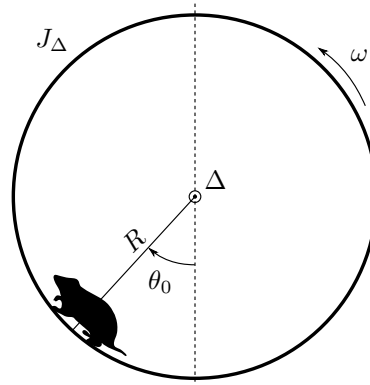


DM4 : Solides en rotation

Exercice 1 : LE HAMSTER

Pour permettre à un hamster domestique de faire de l'exercice, on place dans sa cage une roue que le hamster peut faire tourner en courant. La roue a un rayon R et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J_{\Delta} = MR^2$ où M est la masse de la roue. La masse du hamster est notée m .



On commence par négliger tous les frottements. On considère également que lors de sa course, le hamster se trouve à une position constante repérée par un angle θ_0 par rapport à la verticale.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la roue. Faire un schéma.
2. Quel est le moment cinétique L_{Δ} de la roue du hamster en fonction de ω
3. À $t = 0$ le hamster commence à courir. Donner l'expression de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de R , θ_0 , m et J_{Δ} .
4. Donner l'évolution temporelle $\omega(t)$ de la vitesse angulaire de rotation de la roue.
5. Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ de la roue en fonction du temps.
6. Un hamster court en moyenne à environ $v_0 = 3 \text{ km/h}$. Calculer le temps qu'il mettra avant d'atteindre sa vitesse de croisière. On donne $R = 10 \text{ cm}$, $m = 100 \text{ g}$, $\theta_0 = 30^\circ$ et $M = 200 \text{ g}$.
7. Calculer l'énergie cinétique de la roue lorsque le hamster a atteint cette vitesse.
8. Expliquer pourquoi lorsque la vitesse de course du hamster est constante on a nécessairement $\theta_0 = 0$.

On prend maintenant en compte les frottements entre la roue et son axe de rotation, ceux-ci produisent un couple résistant dont le moment par rapport à l'axe Δ est Γ_{Δ} .

9. Montrer que la nouvelle accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mRg \sin \theta_0 - \Gamma_{\Delta}}{J_{\Delta}}$$

10. Montrer que dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante, l'angle θ_0 n'est plus nul, donner son expression.

On se pose le problème suivant : **Comment faire subir un looping au Hamster ?** On part d'une situation où le Hamster court dans la roue à sa vitesse de croisière de v_0 , avec un angle $\theta_0 = 0$. Subitement il décide de s'arrêter de courir, on considère qu'il ne glisse alors pas par rapport à la roue qui l'entraîne vers la droite (et le haut). L'étude qui suit est faite dans le référentiel du laboratoire, on néglige à nouveau les frottements entre la roue et son axe de rotation.

11. Exprimer la vitesse de rotation ω_0 de la roue lorsque le hamster court.
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, quelle est son énergie cinétique ? potentielle ? Quelle est l'énergie cinétique de rotation de la roue ? En déduire l'énergie mécanique totale du système roue+hamster. On donnera les expressions littérales sans utiliser les valeurs numériques fournies.
13. On considère que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste la même lorsque le hamster arrête de courir. Montrer que la vitesse de rotation ω_1 de la roue juste après que le hamster ait arrêté de courir s'exprime comme :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{J_{\Delta} + mR^2}}$$

14. Justifier pourquoi on peut considérer que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste constante au cours du temps. Exprimer cette énergie mécanique en fonction de la vitesse de rotation ω et de l'angle θ dont la roue a tourné.
15. En déduire l'expression de la vitesse de rotation ω de la roue en fonction de l'angle θ dont elle a tourné.
16. Lorsque la roue a tourné de π , le hamster se trouve au point le plus haut. Faire le bilan des forces subies par le hamster à cet instant.

17. Montrer que l'accélération normale subie par le hamster à cet instant peut s'écrire :

$$\vec{a} = -R \left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1 - \cos \theta)}{J_\Delta + mR^2} \right) \vec{e}_r$$

18. Le hamster reste “collé” à la roue et peut faire un looping si la composante normale de la réaction de la roue sur le hamster ne s'annule pas. Avec les valeurs numériques données précédemment, le hamster va-t-il faire un looping ?
19. Comment faudrait-il modifier sa roue pour que le hamster fasse un looping lorsqu'il s'arrête de courir ?