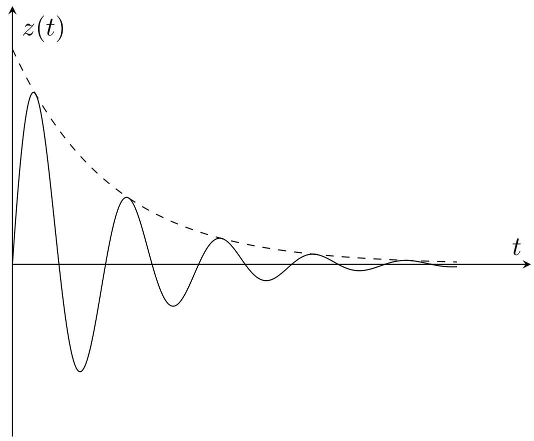
DS7 : Induction – Corrigé

Exercice 1 : Oscillateur et induction

1. Le système étant au repos, le PFD appliqué à la barre donne $\sum \vec{F} = \vec{0}$ donc $\vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2} + \vec{P} = \vec{0}$ où $\vec{F}_{r1}$ et $\vec{F}_{r2}$ sont les forces exercées par chacun des ressorts.
   La projection sur l'axe (Oz) donne : $-mg + 2k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ donc la longueur ℓ_{eq} des ressorts est $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}$.
2. Le flux du champ magnétique à travers le circuit est $\phi = \ell LB$.
3. On applique la loi de Faraday $e_{ind} = -\dfrac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,t}$ avec $\phi = \ell LB$ et $\ell = \ell_{eq} - z(t)$. Donc finalement $e_{ind} = L\dot{z}(t)B$
4. La force de Laplace qui s'exerce sur le circuit est $\vec{F}_l = i\vec{L} \wedge \vec{B}$ donc $\vec{F}_l = -iLB\vec{e}_z$
5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la barre : $m\vec{a} = \vec{F}_l + \vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2} + \vec{P}$. Avec $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$, $\vec{F}_{r1} = \vec{F}_{r2} = k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -kz(t)\vec{e}_z + \frac{mg}{2}\vec{e}_z$ et $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.
   On obtient : $m\ddot{z} + iLB + 2kz = 0$; soit avec $i = \frac{e_{ind}}{R} = \frac{LB\dot{z}}{R}$, on obtient
   $$\ddot{z} + \frac{L^2B^2}{mR}\dot{z} + \frac{2k}{m}z = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$
6. D'après l'équation précédente on trouve $\frac{\omega}{Q} = 2\alpha$ donc $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$
7. Si $\omega_0^2 - \alpha^2 > 0$ alors $\omega_0 > \alpha$ donc $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} > \frac{1}{2}$. L'oscillateur se trouve donc en régime pseudo-périodique.
8. En utilisant les conditions initiales données, on trouve $A = \frac{V_0}{\omega_0}$ et $\varphi = 0$. On représente l'allure de $z(t)$ ci-dessous :

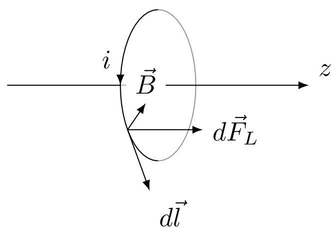


9. Le travail de la force de Laplace est égal à la variation d'énergie cinétique de la barre. $\Delta E_c = -\frac{1}{2}mV_0^2 = W_l$. Ce travail est converti en chaleur par effet Joule dans la barre.

Exercice 2 : Le haut-parleur électrodynamique (Centrale TSI 2013)

I – Équation mécanique

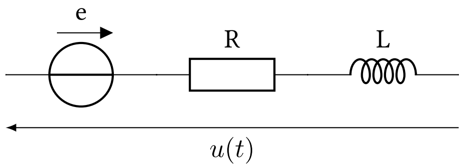
1. Schéma



2. La force de Laplace qui s'exerce sur un élément $\mathrm{d}\ell$ de la bobine est $\mathrm{d}\vec{F}_L = i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\mathrm{d}\ell\vec{u}_\theta \wedge (-B\vec{u}_r) = i\mathrm{d}\ell B\vec{u}_z$. Pour trouver la force de Laplace totale, on intègre $\mathrm{d}\vec{F}_L$ entre 0 et ℓ et on obtient $\vec{F}_L = i\ell B\vec{u}_z$.
3. Le PFD projeté sur l'axe z donne directement $m\ddot{z} = i\ell B - kz - h\dot{z}$

II – Équation électrique

4. La puissance mécanique fournie par les forces de Laplace à l'équipage mobile est identique à la puissance électrique fournie au circuit. On a donc $P_e = P_L$.
5. On a $P_e = Ui$, et $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = i\ell B \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$. Or, la loi des mailles indique que $e = -U$ et donc $P_e = -ei$. Avec la question précédente on en conclut bien que $e(t) = -B\ell\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
6. Schéma équivalent de la bobine :



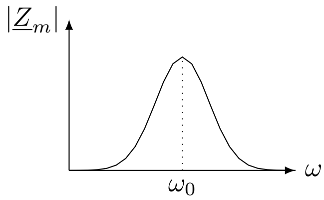
7. On a $u(t) = -e + U_R + U_L = -e + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ soit $u(t) = B\ell\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

III – Impédance du haut-parleur

8. Lorsqu'on passe en notation complexe, la dérivation se transforme en une multiplication par $j\omega$. L'équation mécanique devient $-\omega^2 m\underline{z} = i\ell B - k\underline{z} - j\omega h\underline{z}$ ce qui est équivalent à l'équation demandée : $-\omega^2\underline{z} = \frac{B\ell}{m}\underline{i} - \frac{k}{m}\underline{z} - j\omega\frac{h}{m}\underline{z}$
On procède de la même manière avec l'équation électrique et on trouve $\underline{u} = j\omega B\ell\underline{z} + R\underline{i} + jL\omega\underline{i}$
9. L'impédance complexe du haut-parleur est $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i} = jL\omega + R + jB\ell\omega\underline{z}/\underline{i}$.
L'équation mécanique donne $\underline{z}\left(\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega\frac{h}{m}\right) = \frac{B\ell}{m}\underline{i}$.
10. $\underline{Z}$ se met donc bien sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$ avec $\underline{Z}_m = jB\ell\omega\underline{z}/\underline{i} = jB\ell\omega\frac{B\ell}{k - m\omega^2 + jh\omega}$. Soit

$$\underline{Z}_m = \frac{B^2\ell^2/h}{1 + j\left(\frac{m\omega}{h} - \frac{k}{h\omega}\right)} = \frac{B^2\ell^2/h}{1 + j\frac{\sqrt{km}}{h}\left(\omega/\sqrt{\frac{k}{m}} - \sqrt{\frac{k}{m}}/\omega\right)}$$

Par identification avec la formule donnée dans l'énoncé, on trouve $R_0 = \frac{B^2\ell^2}{h}$, $Q_e = \frac{\sqrt{km}}{h}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
11. lorsque $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$, $|\underline{Z}_m| \to 0$. $|\underline{Z}_m|$ présente donc un maximum :



$|\underline{Z}_m|$ est maximum lorsque $\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = 0$ donc lorsque $\omega = \omega_0$ et $\underline{Z}_m(\omega_0) = R_0$.

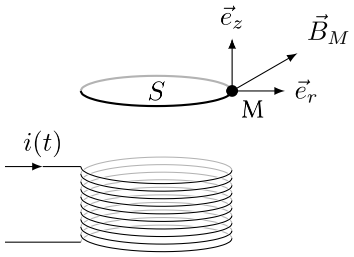
Exercice 3 : Lévitation par induction

On considère le système schématisé ci-dessous constitué d'une bobine dans laquelle circule un courant $i(t) = I\cos(\omega t)$ et qui produit un champ magnétique $\vec{B}(r)$. Au dessus de cette bobine on place un anneau conducteur de surface S.

On considère qu'au niveau de l'anneau le champ magnétique créé par la bobine est :

$$\vec{B}_M = B_z\vec{e}_z + B_r\vec{e}_r = i(t)\left(K_z\vec{e}_z + K_r\vec{e}_r\right)$$

On considère également que la composante verticale (suivant $\vec{e}_z$) du champ magnétique est constante sur la surface de l'anneau.



1. On oriente la surface de l'anneau suivant $\vec{e}_z$. Le flux du champ magnétique à travers l'anneau est donc :

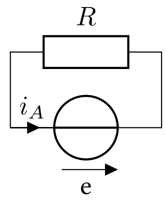
$$\phi = B_zS$$

2. La force électromotrice induite dans l'anneau est $e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$. Avec les notations de l'énoncé, on trouve :

$$e = IK_zS\omega\sin(\omega t) = E\sin(\omega t) \text{ avec } E = IK_zS\omega$$

Anneau résistif

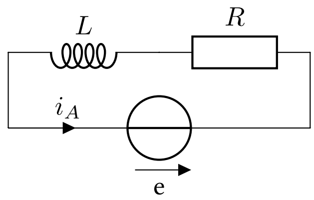
3. Schéma équivalent :



4. $i_A(t) = \frac{e}{R} = \frac{E}{R}\sin(\omega t)$
5. La puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau est $P_J(t) = Ri^2(t) = \frac{E^2}{R}\sin^2(\omega t)$. La valeur moyenne de la puissance est
$$P_J = \frac{E^2}{2R} \tag{1}$$
6. La force de Laplace qui s'exerce sur le petit élément $d\vec{l}$ de l'anneau est :
$$d\vec{F}_L = i_A d\vec{l} \wedge \vec{B} = i_A dl\vec{e}_\theta \wedge i(K_z\vec{e}_z + K_r\vec{e}_r) = i_A\, i\, dl\,(K_z\vec{e}_r - K_r\vec{e}_z)$$
7. Lorsqu'on fait la somme sur tous les éléments de longueur de l'anneau, les composantes suivant $\vec{e}_r$ s'annulent et il ne reste plus que la somme des composantes suivant $\vec{e}_z$. La composante suivant $\vec{e}_z$ de la force de Laplace est :
$$d\vec{F}_{Lz} = -i_A\, i\, dl\, K_r\, \vec{e}_z$$
Or, $\vec{e}_z$ ne dépend pas du point de l'anneau donc $d\vec{F}_{Lz}$ est identique pour chaque point de l'anneau.
8. La force de Laplace totale qui n'exerce sur l'anneau est la somme des forces de Laplace qui s'exercent sur chaque portion soit :
$$\vec{F}_L = \int_{\text{anneau}} d\vec{F}_{Lz} = -i\, i_A\, K_r\, \vec{e}_z \underbrace{\int_{\text{anneau}} dl}_{L}$$
En remplaçant i et i_A par leurs expressions respectives, on obtient :
$$\vec{F}_L = -\frac{SK_zK_r\omega I^2 L}{R}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\vec{e}_z$$
On a $\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t)$ dont la moyenne temporelle est nulle. Donc $< \vec{F}_L >= \vec{0}$ et l'anneau ne pourra pas léviter.

Anneau inductif et résistif

9. Schéma électrique



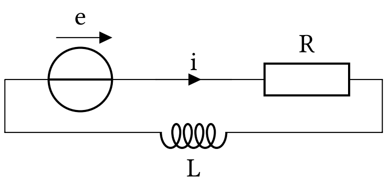
10. En notation complexe $\sin(\omega t)$ devient $-je^{j\omega t}$. On obtient donc bien $\underline{e}(t) = -jEe^{j\omega t}$
11. La loi d'Ohm généralisée aux bornes du dipôle équivalent formé par L et R et $\underline{e} = (R + jL\omega)\underline{i}_A$. Ce qui donne directement le résultat recherché.
12. On a $I_A = |\underline{i}_A(t)| = \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$ et $\arg(\underline{i}_A) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) + \omega t = \omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}$. Donc on obtient $\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$
13. Par rapport à la partie précédente, on a changé $\sin(\omega t)$ en $\sin(\omega t + \varphi)$. On doit donc calculer la moyenne temporelle de $\cos(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)$.
On a $\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi)$ et donc
$$< \cos(\omega t)\sin(\omega t + \varphi) >= \underbrace{< \cos(\omega t)\sin(\omega t)\cos(\varphi) >}_{=0} + < \cos^2(\omega t)\sin(\varphi) >= \frac{\sin(\varphi)}{2}$$
On obtient cette fois une valeur moyenne non nulle, donc il existe une force suivant $\vec{e}_z$ et la lévitation de l'anneau est possible.

Exercice 4 : Le moteur asynchrone (CCP TSI 2012)

I – Étude du stator

1. Pour trouver l'unité de K on peut se rappeler que le flux propre est $\Phi = Li$ donc l'unité du flux est le HA et d'autre part $\Phi = BS$ donc c'est également des Tm^{-2}. K est en TA^{-1} et donc en Hm^2.
2. La somme des trois champs magnétiques au point O est $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$. En utilisant le théorème de Ferraris, on trouve $\vec{B} = \frac{3}{2}KI_0(\cos(\omega_s t)\vec{e}_x + sin(\omega_s t)\vec{e}_y)$, ce qui correspond bien à un champ tournant. La norme du champ magnétique est $B_0 = \frac{3}{2}KI_0$
3. La vitesse de rotation du champ magnétique est $\omega_s = 2\pi f_s$, soit 3000 tr/min.

II – Entraînement du rotor

4. Le flux du champ magnétique à travers le cadre est $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = B_0 S \cos(\alpha)$ où α est l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$. On voit sur le schéma que $\alpha = \omega_s t - \omega t$. Donc $\Phi = B_0 S \cos((\omega_s - \omega)t)$.
5. La fem induite dans le cadre est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Avec $\Phi = \Phi_0 \cos(\Omega t)$, donc $e = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$.
6. 

7. On applique la loi des mailles dans le circuit précédent, on obtient : $e - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, mise sous une forme plus conventionnelle : $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e(t)$
8. On transforme l'équation différentielle précédente en notation complexe, on obtient : $jL\Omega\underline{i} + R\underline{i} = \underline{e}$. Avec $\underline{e} = \Phi_0 \Omega e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$, on obtient bien $\underline{i}(t) = \frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$
9. I_m est l'amplitude de $i(t)$ est vaut $|\underline{i}(t)|$ soit $I_m = \frac{\Phi_0 \Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$. $\Omega t - \pi/2 - \Psi = \arg(\underline{i})$ donc $\Psi = -\arg(\frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega}) = \arg(R + jL\Omega)$. Donc $\cos(\Psi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$ et $\sin(\Psi) = \frac{L\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} > 0$
10. La valeur efficace de $i(t)$ est $I_m/\sqrt{2}$ et pour $R \ll L\Omega$, $I_m \simeq \frac{\Phi_0}{L}$ donc $I_m \simeq 7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} = 7\ \mathrm{mA}$
11. En pratique, on mesure une intensité efficace avec un ampèremètre en mode AC.
12. Le couple des forces de Laplace qui s'exerce sur un moment magnétique $\vec{M}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$. Donc $\Gamma = I_m \sin(\Omega t - \Psi) S B_0 \sin(\Omega t) \vec{e}_z$. Et $\Gamma = I_m S B_0 \sin(\Omega t - \Psi)\sin(\Omega t)$
13. Avec la relation donnée, on trouve que $\Gamma = \frac{1}{2} I_m S B_0 \left(\cos(\Psi) - \cos(2\Omega t - \Psi)\right)$. La valeur moyenne du second cosinus est nulle, et donc la valeur moyenne de Γ est

$$\Gamma_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0 \Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \underbrace{SB_0}_{\Phi_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} = \left(\frac{\Phi_0^2}{2L}\right) \frac{RL\Omega}{R^2 + (L\Omega)^2} \tag{2}$$

14. La limite non nulle de Γ_m lorsque $\omega \to 0$ indique que le couple du moteur au démarrage n'est pas nul, contrairement au moteur synchrone qui possède un couple nul au démarrage. Le couple est moteur (positif) lorsque $\omega < \omega_s$ et résistant lorsque $\omega > \omega_s$.