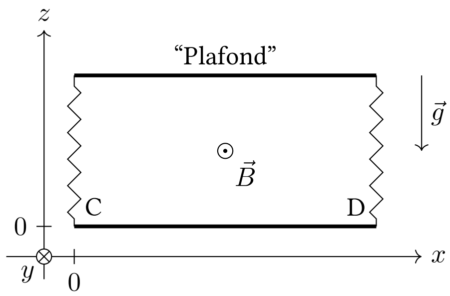
DS7 : Induction

*Durée 4h, **calculatrices interdites**. Le DS est probablement trop long pour que vous puissiez tout faire, c'est normal, faites-en le maximum. Pour les applications numériques, on donnera le résultat avec un chiffre significatif*

Exercice 1 : Oscillateur et induction

Une tige CD de cuivre de masse m et de longueur L est suspendue par ses deux extrémités à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le courant électrique peut circuler à travers les ressorts et le "plafond". On note R la résistance électrique de tout le circuit et on négligera le phénomène d'induction dans les ressorts et d'auto-induction dans le circuit. On appelle g l'accélération de la pesanteur.

Un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$ est appliqué orthogonalement au plan de la figure.



1. Le système étant au repos, indiquer quelle est la longueur des ressorts.

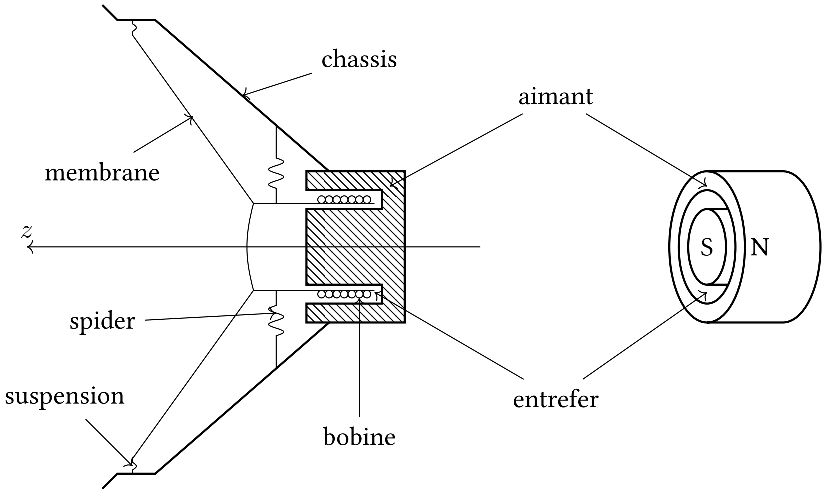
On placera l'origine de l'axe (Oz) au niveau de la barre lorsqu'elle est à l'équilibre

2. Exprimer le flux du champ $\vec{B}$ à travers le circuit en fonction de la longueur ℓ des ressorts, de L et de B. La tige est orientée de C vers D.
3. On note $z(t)$ l'altitude de la barre à l'instant t. Exprimer la force électromotrice induite e_{ind} dans la barre en fonction des données du problème et de $\dot{z}(t)$.
4. On note $i(t)$ l'intensité du courant électrique parcourant le circuit et orienté dans le sens de C vers D. Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur la tige en fonction de $i(t)$, B, L et du vecteur unitaire $\vec{e}_z$.
5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la barre et en posant $\dfrac{B^2L^2}{mR} = 2\alpha$ et $\dfrac{2k}{m} = \omega_0^2$. Monter que $z(t)$ vérifie l'équation différentielle :
$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$
6. Exprimer le facteur de qualité Q de l'oscillateur en fonction de ω_0 et α.
7. On supposera que $\omega_0^2 - \alpha^2 = \gamma^2 > 0$. Quel est le régime obtenu ?
8. Dans ces conditions, on a $z(t) = A\exp(-\alpha t)\sin(\omega_0 t + \varphi)$. On donne les conditions initiales : $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = V_0$. En déduire les expressions de A et φ. Tracer l'allure de $z(t)$.
9. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la barre entre l'instant initial et l'instant ($t \to \infty$) où la barre s'arrête pour déterminer le travail de la force de Laplace. Sous quelle forme retrouve-t-on ce travail lorsque la barre s'arrête ?

Exercice 2 : Le haut-parleur électrodynamique (Centrale TSI 2013)

La figure ci-dessous montre une vue en coupe du haut-parleur. L'ensemble possède la symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Il comprend :

- une partie fixe constituée de deux éléments, le châssis rigide et l'aimant ;
- une partie mobile constituée de la membrane et de la bobine.



L'aimant est formé d'un cylindre central (pôle sud) et d'une couche cylindrique extérieure (pôle nord) séparés par un entrefer d'épaisseur très faible (de l'ordre du millimètre), rempli d'air, dans lequel règne un champ magnétique radial statique $\vec{B} = -B\vec{u}_r$ avec $B > 0$ et où $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est la base associée au trièdre des coordonnées cylindriques. La bobine est un solénoïde d'axe Oz situé dans l'entrefer et donc plongé entièrement dans le champ $\vec{B}$ précédent. La longueur totale du fil constituant la bobine est ℓ. L'ensemble bobine+membrane est un solide de masse m, mobile en translation selon Oz, appelé dans la suite *équipage mobile*. Sa position est repérée par la coordonnée $z(t)$. Le spider et la suspension (voir schéma) exercent sur l'équipage mobile une force de rappel élastique $-kz\vec{u}_z$ vers la position d'équilibre $z = 0$.

Les mouvements de l'équipage mobile sont amortis par une force de type frottement fluide proportionnelle à la vitesse, de la forme

$$\vec{F}_f = -h\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z \tag{1}$$

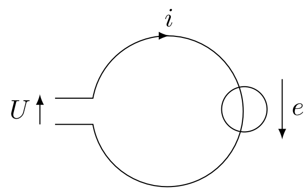
On étudie le mouvement du haut-parleur lorsque l'on fait passer un courant électrique i dans le solénoïde.

I – Équation mécanique

1. Représenter sur un schéma en perspective une spire de la bobine et la force de Laplace $\mathrm{d}\vec{F}_L$ s'exerçant sur un élément $\mathrm{d}\vec{\ell}$ de la spire. Le courant sera orienté dans un sens tel qu'une intensité positive engendre une force de Laplace dirigée vers les z positifs.
2. Montrer que la force de Laplace totale résultante sur la bobine s'exprime comme
$$\vec{F}_L = i\ell B\vec{u}_z. \tag{2}$$
3. On suppose que l'on peut négliger le poids de l'équipage mobile, et que les seules forces qu'il subit sont la force de Laplace, la force de rappel élastique du spider et la force de frottement fluide. En appliquant le PFD à l'équipage mobile, déterminer l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéït $z(t)$.

II – Équation électrique

4. Le déplacement de la bobine dans l'entrefer entraîne l'apparition d'une fem d'induction $e(t)$ représentée sur le schéma ci-dessous. La tension U est la tension appliquée au solénoïde. Quelle relation lie la puissance mécanique P_L des forces de Laplace à la puissance électrique P_e reçue par la fem d'induction ?



5. En déduire l'expression :
$$e(t) = -B\ell\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$
6. La bobine est équivalente à un dipôle associant en série la résistance R, l'inductance L et la fem d'induction e. Représenter le schéma électrique équivalent de la bobine.
7. La différence de potentiel aux bornes de la bobine est notée $u(t)$, montrer qu'on obtient l'équation différentielle électrique reliant $u(t)$, $i(t)$ et $z(t)$ suivante :
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + B\ell\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

III – Impédance du haut-parleur

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω. Les grandeurs $u(t)$, $i(t)$, $z(t)$ sont représentées par leur équivalents complexes $\underline{u}$, $\underline{i}$ et $\underline{z}$.

8. Montrer que les équations mécanique et électrique deviennent :

$$-\omega^2 \underline{z} = \frac{B\ell}{m}\underline{i} - \frac{k}{m}\underline{z} - j\omega\frac{h}{m}\underline{z} \quad \text{et} \quad \underline{u} = jL\omega\underline{i} + R\underline{i} + jB\ell\omega\underline{z} \tag{5}$$

9. En déduire l'impédance complexe $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i}$ du haut-parleur.
10. Montrer que $\underline{Z}$ se met sous la forme de la somme d'un terme électrique $R+jL\omega$ et d'une impédance $\underline{Z}_m$ appelée *impédance motionnelle*, faisant intervenir les caractéristiques mécaniques du système, qu'on écrira sous la forme :

$$\underline{Z}_m = \frac{R_0}{1 + jQ_e(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \tag{6}$$

Donner les expressions de R_0, Q_e et ω_0 en fonction de m, h, k, B et ℓ.

11. En étudiant les comportements asymptotiques de $\underline{Z}_m$ ($\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$), donner l'allure de $|\underline{Z}_m|$ en fonction de ω. Pour quelle pulsation $|\underline{Z}_m|$ est-il maximum ? Quelle est l'expression de $\underline{Z}_m$ à cette pulsation ?

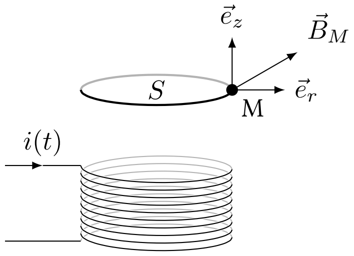
Exercice 3 : Lévitation par induction

On considère le système schématisé ci-dessous constitué d'une bobine dans laquelle circule un courant $i(t) = I\cos(\omega t)$ et qui produit un champ magnétique $\vec{B}(r)$. Au dessus de cette bobine on place un anneau conducteur de surface S.

On considère qu'au niveau de l'anneau le champ magnétique créé par la bobine est :

$$\vec{B}_M = B_z\vec{e}_z + B_r\vec{e}_r = i(t)\left(K_z\vec{e}_z + K_r\vec{e}_r\right)$$

On considère également que la composante verticale (suivant $\vec{e}_z$) du champ magnétique est constante sur la surface de l'anneau.



1. Exprimer le flux ϕ du champ magnétique créé par la bobine à travers l'anneau. On indiquera sur un schéma l'orientation choisie pour calculer le flux.
2. Montrer que la force électromotrice induite dans l'anneau est $e(t) = E\sin(\omega t)$. On donnera l'expression de E en fonction de S, K_z, ω et I.

Anneau résistif

Dans cette partie on modélise l'anneau conducteur par une résistance R. On néglige donc son inductance propre.

3. Faire un schéma électrique équivalent de l'anneau en faisant apparaître la fem induite e, la résistance R et le courant i_A qui y circule.
4. Donner l'expression de $i_A(t)$.
5. En déduire l'expression de la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans l'anneau.
6. On considère un petit élément $d\vec{l} = dl\vec{e}_\theta$ de l'anneau. Donner l'expression de la force de Laplace $d\vec{F}_L$ qui s'exerce dessus.
7. Justifier pourquoi on ne doit considérer que la composante suivant $\vec{e}_z$ de $d\vec{F}_L$ lorsqu'on calcule la force de Laplace totale qui s'exerce sur l'anneau. Montrer que la composante suivant $\vec{e}_z$ de la force de Laplace est indépendante du point M de l'anneau considéré.
8. En déduire que la force de Laplace totale qui s'exerce sur l'anneau est

$$\vec{F}_L = -\frac{SK_zK_r\omega I^2 L}{R}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\vec{e}_z$$

Où L est le périmètre de l'anneau conducteur. Que vaut la moyenne temporelle de cette force ? L'anneau peut-il léviter ?

Anneau inductif et résistif

On prend en compte maintenant l'inductance propre de l'anneau. On le modélise donc par une résistance R et série avec une inductance L.

9. Faire un schéma électrique faisant apparaître e, L, R et i_A.
10. On a toujours $e(t) = E\sin(\omega t)$. On est donc en régime sinusoïdal forcé et si on s'intéresse au régime permanent, on peut utiliser la méthode des complexes.

Montrer que la tension complexe $\underline{e}(t)$ associée à la tension e et $\underline{e}(t) = -jEe^{j\omega t}$

11. Montrer que l'intensité complexe $\underline{i}_A(t)$ qui circule dans l'anneau est donnée par :

$$\underline{i}_A(t) = -\frac{jE}{R + jL\omega} e^{j\omega t}$$

12. L'intensité réelle circulant dans l'anneau s'écrit $i_A(t) = I_A \sin(\omega t + \varphi)$. Donner les expressions de I_A et φ.
13. En vous appuyant sur les questions 7 et 8. Déterminer la moyenne temporelle de la force de Laplace qui s'exerce sur l'anneau, et conclure sur la possibilité de le faire léviter.

Exercice 4 : Le moteur asynchrone (CCP TSI 2012)

Aucune connaissance préalable du principe de fonctionnement de la machine asynchrone n'est nécessaire pour traiter ce problème. Cette machine se compose principalement de deux parties :

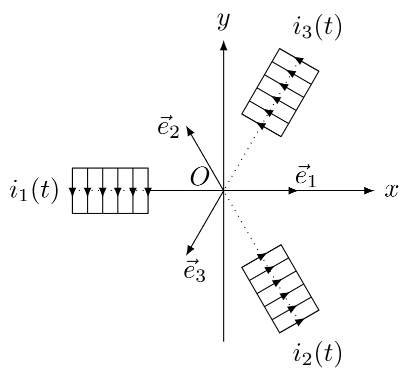
— le stator réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant $\vec{B}(t)$,
— le rotor modélisé ici par un cadre conducteur rectangulaire de surface S mobile autour d'un axe.

I – Étude du stator

Le stator est constitué d'un ensemble de 3 bobines dont les axes sont perpendiculaires à Oz et régulièrement décalés de $\frac{2\pi}{3}$. Ces bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation ω_s dont les intensités sont les suivantes :

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega_s t), \quad i_2(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \text{et} \quad i_3(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

La fréquence d'alimentation de ces bobines est égale à $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 50\,\text{Hz}$. Chaque bobine crée en O un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme : $\vec{B}_k = K i_k(t) \vec{e}_k$ (K est une constante qui s'exprime en Hm^{-2} et $\vec{e}_k$ est le vecteur unitaire de l'axe de la k^{ime} bobine.



1. Justifier l'unité de K.
2. On donne le théorème de Ferraris :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\omega_s t - \frac{2k\pi}{p}\right) \vec{e}_{k+1} = \frac{p}{2} \left(\cos(\omega_s t)\vec{e}_x + sin(\omega_s t)\vec{e}_y\right) \tag{7}$$

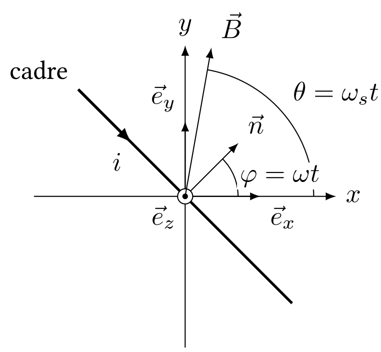
En déduire que la somme des champs magnétiques créés par les 3 bobines au point O est un champ tournant $\vec{B}$ dont on donnera l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Donner la norme du champ magnétique $B_0 = ||\vec{B}||$ en fonction de K et I_0.

3. Quelle est la vitesse de rotation du champ ? Calculer sa valeur numérique en tours par minute.

II – Entraînement du rotor

Le rotor est modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface S orientée selon la normale $\vec{n}$ qui tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire ω ($\omega \geq 0$).

4. Exprimer le flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ généré par le stator à travers le cadre en fonction de B_0, S, ω, ω_s et t.
5. En déduire la force électromotrice $e(t)$ induite dans le cadre en fonction du flux maximum $\Phi_0 = B_0 S$, de la vitesse angulaire de glissement $\Omega = \omega_s - \omega$ et de t.

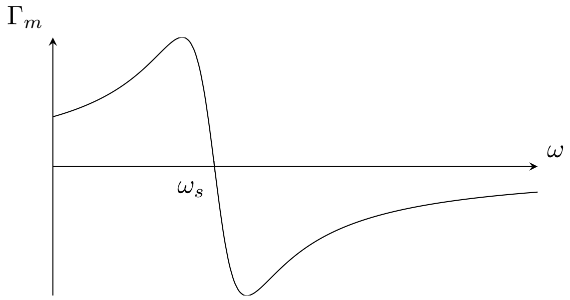


Le cadre est équivalent à un circuit constitué d'une inductance L en série avec une résistance R.

6. Dessiner un schéma équivalent du rotor en faisant apparaître la fem induite $e(t)$.
7. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ induit dans le cadre.
8. On se place en régime permanent sinusoïdal, l'intensité dans le cadre s'écrit alors sous la forme $i(t) = I_M \sin(\Omega t - \Psi)$. Ce qui donne l'intensité complexe : $\underline{i}(t) = I_M e^{j(\Omega t - \Psi - \frac{\pi}{2})}$ et la fem complexe : $\underline{e} = |\underline{e}| e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$. Montrer que l'intensité complexe dans le cadre s'écrit :
$$\underline{i}(t) = \frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})} \tag{8}$$
9. En déduire l'expression de I_M en fonction de Φ_0, Ω, R et L. Exprimer $\cos(\Psi)$ en fonction de Ω, R et L et préciser le signe de $\sin(\Psi)$.
10. On donne $\Phi_0 = 10^{-3}\,\mathrm{Tm^2}$ et $L = 100\,\mathrm{mH}$. Donner la valeur numérique de la valeur efficace de $i(t)$ dans le cas où $R \ll L\Omega$.
11. Comment mesure-t-on en pratique une intensité efficace ?

On rappelle l'expression du moment magnétique $\vec{M}$ du rotor : $\vec{M} = i(t) S \vec{n}$.

12. Exprimer le couple électromagnétique $\vec{\Gamma}$ des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre, puis sa projection $\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$ sur l'axe de rotation en fonction de S, B_0, I_M, Ψ, Ω et t.
13. On donne la relation $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$. Montrer que la valeur moyenne de Γ, notée Γ_m est donnée par :
$$\Gamma_m = \left(\frac{\Phi_0^2}{2L}\right) \frac{RL\Omega}{R^2 + (L\Omega)^2}. \tag{9}$$
14. On donne l'allure de $\Gamma_m(\omega)$:



À quoi correspond la limite de Γ_m quand ω tend vers 0 ? En quoi cela constitue-t-il un avantage par rapport à d'autres types de moteur (par exemple pour un moteur synchrone $\lim\limits_{\omega \to 0} \Gamma_m = 0$) ? Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou au contraire résistant ?