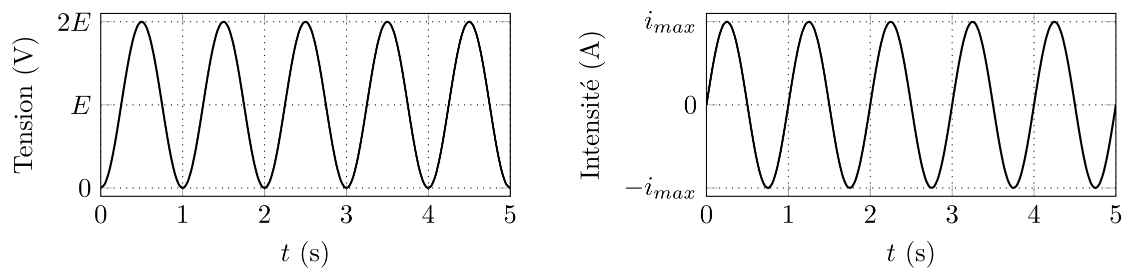
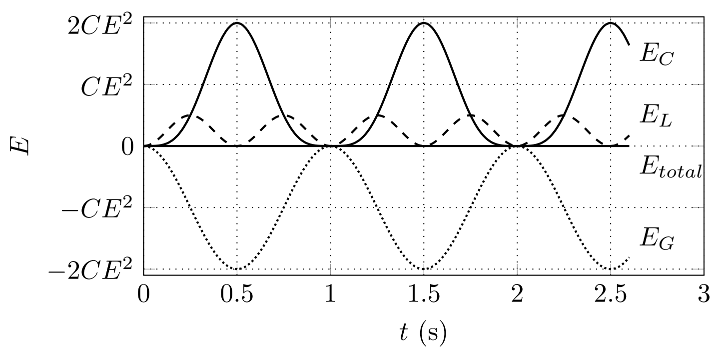
TD6 : Circuits linéaires du deuxième ordre, oscillateurs, filtrage – corrigé

Exercice 1 : Circuit LC

1. Le condensateur est initialement déchargé donc la tension à ses bornes est nulle. Comme la tension est continue aux bornes d'un condensateur, $u(0^+) = 0$ V. L'intensité du courant est continue dans une bobine, donc $i(0^+) = 0$ A
2. On a $i(t) = C\dfrac{du}{dt}$ et la loi des mailles donne $E = L\dfrac{di}{dt} + u(t)$ donc on obtient l'équation différentielle : $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u(t) = \dfrac{E}{LC}$. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$
3. La solution générale de l'équation différentielle est : $u(t) = E + A\cos(\omega_0 t + \phi)$. Les conditions initiales trouvées à la question 1 donnent $\phi = 0$ et $A = -E$. Donc finalement $u(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$, et $i(t) = C\dfrac{du}{dt} = \sqrt{\dfrac{C}{L}}E\sin(\omega_0 t)$
4. Évolutions temporelles :



5. L'énergie stockée dans le condensateur est $E_C = \dfrac{1}{2}Cu(t)^2 = \dfrac{1}{2}CE^2(1 - \cos(\omega_0 t))^2$. L'énergie stockée dans la bobine est $E_L = \dfrac{1}{2}Li(t)^2 = \dfrac{1}{2}CE^2\sin^2(\omega_0 t)$. La somme des deux donne : $E_C + E_L = CE^2(1 - \cos(\omega_0 t))$. Une partie de l'énergie est également échangée avec le générateur, il faut la prendre en compte pour montrer la conservation de l'énergie.
6. On peut résumer les échanges d'énergies sur le graphique suivant. L'énergie E_G est l'énergie reçue par le générateur.



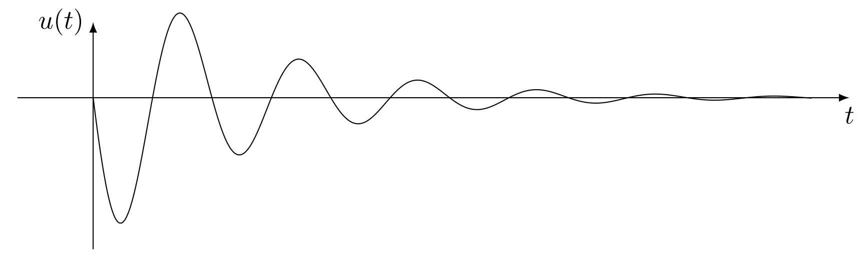
7. Ce système ne peut pas correspondre à un système réel car il oscille indéfiniment sans dissipation d'énergie ce qui est en pratique impossible (il y a toujours une résistance qui traîne quelque-part)

Exercice 2 : Analogie entre oscillateur mécanique et oscillateur électrique

1. L'équation fondamentale de la dynamique donne presque directement $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$
2. Dans ce circuit on a $i = C\dfrac{du}{dt}$, $u = -L\dfrac{di}{dt}$ et $q = \dfrac{di}{dt}$, donc on obtient l'équation différentielle : $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q = 0$
3. On peut donc faire l'analogie entre les deux situations : la charge correspond à la position $q \leftrightarrow x$ la bobine correspond à l'inertie de l'intensité donc à la masse $L \leftrightarrow m$ et l'inverse de la capacité est la raideur du ressort $\dfrac{1}{C} \leftrightarrow k$ dans ces conditions $u = \dfrac{q}{C} \leftrightarrow k \times x = |F_r|$, la tension correspond à la force exercée par le ressort.

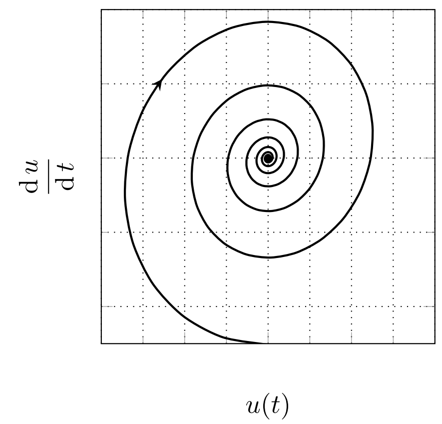
Exercice 3 : Circuit RLC parallèle

1. En régime permanent, condensateur=circuit ouvert et bobine=fil.
   - à $t = 0^-$ on a $u = 0$ $i_C = 0$, $i_L = \dfrac{E}{R_g}$ et $i_R = 0$;
   - à $t = 0^+$ L'intensité dans la bobine est continue donc $i_L = \dfrac{E}{R_g}$ la tension aux bornes de C est continue donc $u = 0$ donc $i_R = 0$ et la loi des nœuds donne $i_C = -i_L$;
   - lorsque $t \to \infty$ L'énergie est dissipée par la résistance et $i_C = i_R = i_L = 0$ et $u = 0$.
2. La tension $u(t)$ va commencer par être négative ($i_C(0^-) < 0$) puis va osciller avant de se stabiliser à 0. On obtient l'évolution ci-dessous :

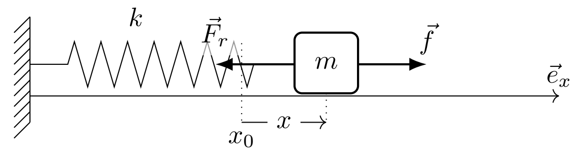


3. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur le courant dans L va progressivement diminuer en partie pour charger C et en partie en passant dans R. Lorsque le courant dans L s'annule, le condensateur se décharge et le courant devient négatif. L'intensité oscillera jusqu'à ce que toute l'énergie ait été dissipée par la résistance.

   Si R est très élevée, Q est aussi élevé donc on peut supposer que $Q \propto R$. L'analyse dimensionnelle donne $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ (Q doit être sans dimension)
4. $u = L\dfrac{di_L}{dt}$, $i_L = -i_C - i_R$, $i_C = C\dfrac{du}{dt}$ et $i_R = \dfrac{u}{R}$ donc $\dfrac{u}{L} = -C\dfrac{d^2u}{dt^2} - \dfrac{1}{R}\dfrac{du}{dt}$. Ce qui nous donne l'équation différentielle :
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \tag{1}$$
5. On déduit de l'équation précédente (par identification à celle d'un oscillateur harmonique amorti) :
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$
   On retrouve la même expression que dans la question précédente.
6. Avec les données fournies, on trouve $\omega_0 \approx 707$ rad/s et $Q \approx 6$
7. Portrait de phase :



Exercice 4 : Oscillateur mécanique amorti

1.


2. Sur les graphiques, on trouve que la période d'une pseudo-oscillation est environ $T_0 \simeq 0{,}1\,\mathrm{s}$ donc $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} \simeq 63\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
   On trouve le facteur de qualité en comptant le nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne soit divisée par 20, on trouve $Q \simeq 5$.
3. On met l'équation différentielle sous la forme canonique : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on trouve $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{\gamma}{\sqrt{km}}$
4. Avec $m = 1\,\mathrm{g}$ et la valeur de ω_0 trouvée ci-dessus, on trouve $k = m\omega_0^2 \simeq 3{,}9\,\mathrm{N/m}$ et $\gamma = \frac{\sqrt{km}}{Q} \simeq 0{,}012\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

Exercice 5 : Associations d'impédances complexes

Dipôle 1 : $Z_{\text{eq}} = \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$; Dipôle 2 : $Z_{\text{eq}} = j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$;

Dipôle 3 : $Z_{\text{eq}} = \dfrac{jLR\omega}{R + jL\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}$; Dipôle 4 : $Z_{\text{eq}} = \dfrac{jR(LC\omega^2 - 1)}{RC\omega + j(LC\omega^2 - 1)}$

Exercice 6 : Circuit RLC parallèle en régime forcé

1. L'impédance complexe équivalente à RLC en parallèle est : $Z_{\text{eq}} = \dfrac{R}{1 + jR(C\omega - 1/(L\omega))}$, on peut faire apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ on obtient : $Z_{\text{eq}} = \dfrac{R}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$.
   On trouve alors $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{Z_{\text{eq}}} = \dfrac{\underline{e}}{R}\left(1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$
2. L'amplitude de l'intensité vaut $|\underline{i}| = \dfrac{|\underline{e}|}{R} \times \sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$
3. Le déphasage ϕ entre la tension $\underline{e}$ et l'intensité $\underline{i}$ vaut $\phi = \arg(\underline{i}) - \arg(\underline{e}) = \arctan\left(Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$
4. On a $i(t) = \dfrac{E_0}{R} \times \sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\cos(\omega_0 t + \phi)$

Exercice 7 : Déterminer les paramètres d'un oscillateur

1. Sur le graphique de la phase, on trouve que la pulsation propre est d'environ $\omega_0 \simeq 63\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et sur le graph de l'amplitude on trouve $\Delta\omega \simeq 6$ ce qui nous donne $Q = \omega/\Delta\omega \simeq 10$
2. On peut prendre par exemple $L = 1\,\mathrm{mH}$, $C = 250\,\mu\mathrm{F}$ et $R = 5\,\Omega$
3. C'est la même question que dans l'exercice 4, avec les même valeurs numériques. La constante de raideur du ressort doit être $k \simeq 4\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$

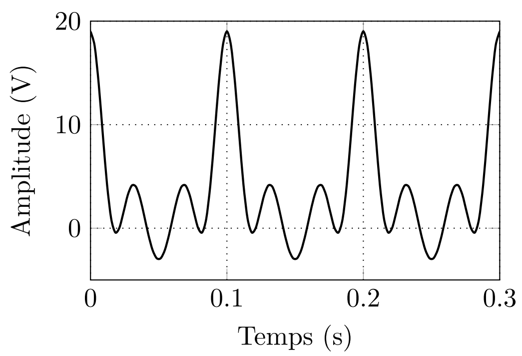
Exercice 8 : Équivalence de composants

L'impédance équivalente au premier dipôle est $Z_1 = \dfrac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$, l'impédance équivalente au second dipôle est $Z_2 = R_2 + \dfrac{1}{jC_2\omega}$. En égalant les deux et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$R_2 = \frac{R_1}{1 + (R_1C_1\omega)^2} \quad \text{et} \quad C_2 = C_1\left(1 + \frac{1}{(R_1C_1\omega)^2}\right) \tag{2}$$

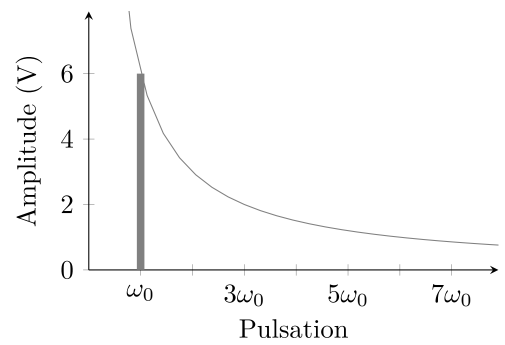
Exercice 9 : Spectre d'un signal périodique

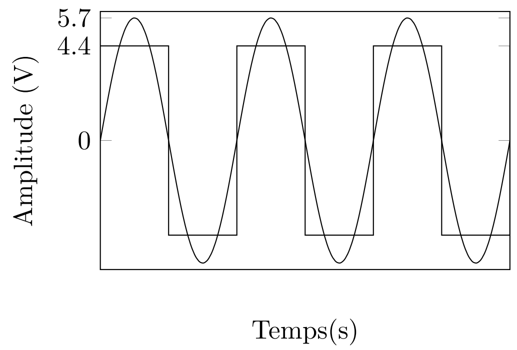
1. La valeur moyenne vaut 4 V
2. La fréquence fondamentale est 10 Hz
3.
   — Harmonique 1 (fondamentale) : f=10 Hz ; A=6 V
   — Harmonique 2 : f=20 Hz ; A=3 V
   — Harmonique 3 : f=30 Hz ; A=5 V
   — Harmonique 4 : f=40 Hz ; A=1 V
4. Allure du signal ci-contre.



Exercice 10 : Filtrage d'un signal

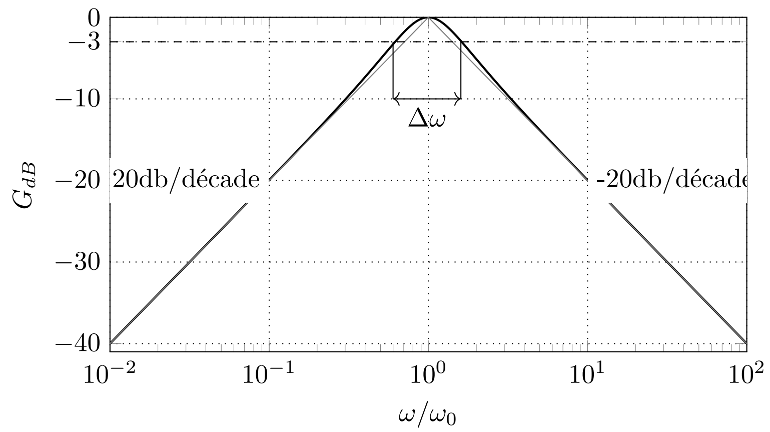
1. La fréquence fondamentale du signal carré est ω_0
2.
   — harmonique 1 (fondamentale) : $\omega = \omega_0$; $A \simeq 5{,}7\,\mathrm{V}$
   — harmonique 2 : $\omega = 2\omega_0$; $A = 0$ V
   — harmonique 3 : $\omega = 3\omega_0$; $A \simeq 2\,\mathrm{V}$
3. C'est un filtre passe-bas.
4. Il suffit de mettre la résistance et le condensateur en série et de récupérer la tension aux bornes du condensateur. Malheureusement on ne pourra pas réaliser le filtre correspondant au gabarit donné de cette manière car on ne pourra pas obtenir de coupure plus raide que -20dB/décade (le monter). Le gabarit donnée demande une pente beaucoup plus raide que ça (environ 400 dB/décade, c'est énorme !)
5. Avec le gabarit donné, toutes les pulsations supérieures à $3\omega_0$ sont totalement coupées (divisées au moins par 1000). Il ne reste plus que la pulsation fondamentale. (Voir ci-dessous)
6. Voir ci-dessous





Exercice 11 : Diagramme de Bode

1. Il s'agit d'un filtre passe-bande car $|\underline{H}(\omega \to 0)| = 0$ et $|\underline{H}(\omega \to \infty)| = 0$
2. On calcule $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log(|\underline{H}(\omega)|) = -10\log\left(1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$
3.
   — Lorsque $\omega \to 0$, $G_{\text{dB}}(\omega) \simeq -20\log(Q\omega_0) + 20\log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de 20dB/décade
   — Lorsque $\omega \to \infty$, $G_{\text{dB}}(\omega) \simeq -20\log(Q/\omega_0) - 20\log(\omega)$, ce qui correspond à une pente de -20dB/décade.
   — On a également $G_{\text{dB}}(\omega = \omega_0) = 0$
4.
5. Diagramme de Bode tracé avec $Q = 1$:



6. On cherche ω_1 et ω_2 telles que $G(\omega_1) = G(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve que $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (fait dans le cours)