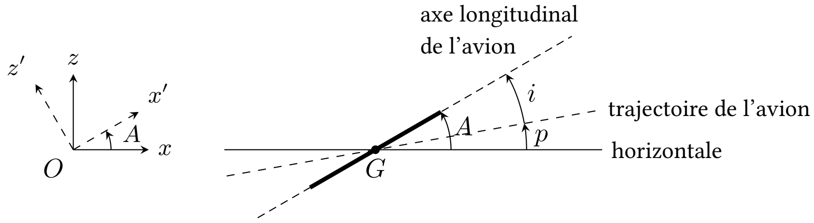
DS6 : Mécanique

Durée 4h, ***calculatrices autorisées****. Le DS est probablement trop long pour que vous puissiez tout faire, c'est normal, faites-en le maximum.*

Exercice 1 : Mécanique du vol d'un avion (Centrale TSI 2015)

On étudie différentes phases du vol d'un avion, en l'absence de vent, dans le référentiel terrestre $(\mathcal{R})$ supposé galiléen auquel on associe un système d'axes cartésien dont (Oz) constitue la verticale ascendante.



La trajectoire et la configuration de vol de l'avion dans l'espace sont définis à l'aide de trois angles orientés représentés dans la figure ci-dessus :

- la pente p, angle de l'horizontale vers la trajectoire de l'avion ;
- l'assiette A, angle de l'horizontale vers l'axe longitudinal de l'avion ;
- l'incidence i, angle de la trajectoire de l'avion vers son axe longitudinal.

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre d'inertie G de l'avion, de masse $m = 2{,}3 \cdot 10^3$ kg, soumis aux forces suivantes :

- son poids $\vec{P}$;
- la force de traction $\vec{F}_m$ de l'hélice, entraînée par le moteur, dont la direction est celle de l'axe longitudinal de l'avion ;
- la résultante des forces aérodynamiques, contenue dans le plan de symétrie de l'avion, décomposée en portance $\vec{F}_p$ et trainée $\vec{F}_t$:
  - la portance, perpendiculaire à la trajectoire de l'avion, de norme $F_p = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p$;
  - la traînée, de même direction que la trajectoire mais s'opposant au mouvement de l'avion, de norme $F_t = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_t$;

  où $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ est la masse volumique de l'air supposée constante et égale à celle mesurée au niveau de la mer, $S = 220\,\mathrm{m^2}$ est l'aire de la surface des ailes de l'avion projetée sur le plan horizontal et v est la vitesse de l'avion par rapport à l'air.

L'intensité du champ de pesanteur supposé uniforme est $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Les coefficients sans dimension C_p et C_t ne dépendent que de l'incidence i. Pour une incidence nulle $(i = 0°)$, ces coefficients vérifient :

$$C_p = 0{,}24 \qquad \text{et} \quad C_t = 0{,}008$$

Lors de l'étude du mouvement de l'avion dans différentes configurations, on évalue les efforts mécaniques subis par la structure en déterminant le facteur de charge η défini comme le rapport de la norme de la portance sur la norme du poids.

Compte tenu de la résistance des matériaux, la conception mécanique de la structure impose une borne supérieure $\eta_{\max}$ au facteur de charge de l'ordre de 2.

I – Vol en montée

Après avoir quitté le sol, l'avion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme en montée avec une pente p à incidence nulle $i = 0$. Le pilote impose au moteur de l'avion une puissance constante $\mathcal{P}_m$.

1. Faire un schéma de la configuration de vol en y représentant toutes les forces appliquées à l'avion ($\vec{P}$, $\vec{F}_m$, $\vec{F}_p$ et $\vec{F}_t$).
2. Justifier pourquoi on peut écrire la relation :

$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = \vec{0} \qquad (1)$$

3. Projeter la relation (1) sur l'axe longitudinal de l'avion et sur l'axe qui lui est perpendiculaire (les axes Ox' et Oz') pour obtenir deux relations scalaires.
4. En déduire que la relation liant la vitesse v de l'avion à l'assiette A s'écrit :

$$v = \sqrt{\frac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}$$

5. Exprimer la puissance du moteur (puissance fournie par la force $\vec{F}_m$ à l'avion) en fonction de $\|\vec{F}_m\|$ et v.
6. On admet que la relation entre l'assiette A et la puissance $\mathcal{P}_m$ du moteur s'écrit :

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}(\cos A + f_0 \sin A)\sqrt{\cos A} \qquad \text{avec} \quad f_0 = \frac{C_p}{C_t} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{m0} = mg\frac{C_t}{C_p}\sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}$$

Vérifier par analyse dimensionnelle la cohérence de l'expression de $\mathcal{P}_{m0}$ puis calculer numériquement f_0 et $\mathcal{P}_{m0}$.

7. Le pilote impose une puissance du moteur égale à sa valeur maximale $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{\text{max}} = 50\,\text{kW}$. Déterminer une expression approchée de $\mathcal{P}_m$, sachant que l'assiette ne dépasse généralement pas 10°. En déduire la valeur numérique de l'assiette A. (On rappelle que pour $x \ll 1$ on a $\sin x \approx x$ et $\cos x \approx 1$)
8. Déterminer la relation liant la vitesse ascensionnelle v_z de l'avion à l'assiette A. Calculer sa valeur numérique.
9. Déterminer l'expression du facteur de charge η en montée en fonction de l'assiette A. Commenter le résultat.

II – Vol en virage

L'avion effectue maintenant un virage circulaire de rayon R en palier ($p = 0°$), avec une incidence nulle ($i = 0°$) et à vitesse v constante. Pour réaliser ce virage, le pilote incline l'avion d'un angle ϕ (le plan moyen des ailes est incliné de ϕ par rapport au plan horizontal).

10. L'avion étant incliné pour effectuer le virage, faire le schéma de la configuration de vol en vue arrière en y représentant les forces et l'angle Φ.
11. Exprimer dans le système de coordonnées polaires, dont l'origine est au centre de la trajectoire de l'avion, l'accélération de l'avion.
12. En déduire que les forces s'exerçant sur l'avion sont reliées par la relation :

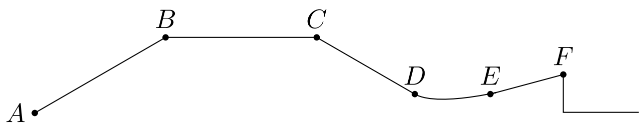
$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = -m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r \tag{2}$$

où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire dirigé du centre de la trajectoire vers l'avion.

13. Projeter la relation précédente sur les axe $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$. En déduire une expression du rayon R du virage en fonction de la vitesse v de l'avion, de l'angle d'inclinaison ϕ et de g.
14. Déterminer l'expression du facteur de charge η en fonction de ϕ.
15. Sachant que la conception structurale de l'avion impose une borne supérieure au facteur de charge η_{max}, déterminer l'expression du rayon minimal du virage que le pilote peut faire prendre à l'avion en toute sécurité.

Exercice 2 : Saut à ski

On s'intéresse à la dynamique des différentes étapes d'un saut à ski. Le saut est décomposé en 4 étapes : Le remonte-pente (AB), une partie plate (BC), la descente (CD) et le tremplin (EF). Le skieur est assimilé à un point matériel.



Le skieur remonte la pente (AB) inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale à vitesse constante. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant la même direction que la perche qui forme un angle $\beta = 20°$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et par l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\vec{F}_1$ de valeur 65N, opposée au mouvement.

1. Faire un schéma représentant la pente, la perche les angles α et β. Représenter toutes les forces subies par le skieur.
2. Justifier pourquoi on peut affirmer que la somme des forces appliquées au skieur est nulle.
3. Déterminer la valeur de la force exercée par la perche sur le skieur.

Arrivé au sommet B, le skieur lâche la perche avec une vitesse horizontale de $3{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. L'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur $F_2 = 42\,\text{N}$.

4. Faire un bilan des forces appliquées au skieur
5. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ du skieur en fonction du temps.
6. Intégrer l'équation précédente pour trouver $v(t)$ et $x(t)$. Quelle distance le skieur va-t-il parcourir avant de s'arrêter ?

Le skieur aborde la pente (CD) inclinée d'un angle $\alpha' = 35°$ avec l'horizontale. Il subit maintenant une force de frottement F_3 proportionnelle au carré de sa vitesse $F_3 = kv^2$ avec $k = 0{,}56\,\text{Ns}^2\text{m}^{-2}$

7. Justifier pourquoi la vitesse du skieur augmentera jusqu'à une vitesse limite v_l.

8. Lorsqu'il atteint la vitesse v_l le mouvement du skieur est rectiligne homogène, déterminer la valeur de v_l

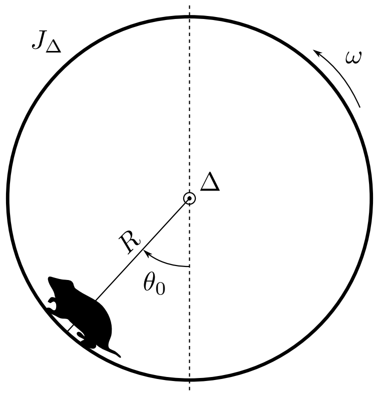
Il aborde le tremplin (EF) incliné d'un angle $\gamma = 15°$ avec l'horizontale, on ne prend pas en compte les forces exercées par l'air. On considère également que sa vitesse en F vaut $25\,\mathrm{ms^{-1}}$.

9. Quelles sont les forces exercées sur le skieur lors du saut ?
10. Déterminer les équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du skieur.
11. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. On pourra prendre le point F comme origine du repère.
12. Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5 m au dessous du point F.

Données :
Taille du skieur : $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$, masse du skieur : $m = 80\,\mathrm{kg}$, $AB = 150\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$

Exercice 3 : Un hamster court dans sa cage

Pour permettre à un hamster domestique de faire de l'exercice, on place dans sa cage une roue que le hamster peut faire tourner en courant. La roue a un rayon R et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J_\Delta = MR^2$ où M est la masse de la roue. La masse du hamster est notée m.



On commence par négliger tous les frottements. On considère également que lors de sa course, le hamster se trouve à une position constante repérée par un angle θ_0 par rapport à la verticale.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la roue. Faire un schéma.
2. Quel est le moment cinétique L_Δ de la roue du hamster en fonction de ω
3. À $t = 0$ le hamster commence à courir. Donner l'expression de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de R, θ_0, m et J_Δ.
4. Donner l'évolution temporelle $\omega(t)$ de la vitesse angulaire de rotation de la roue.
5. Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ de la roue en fonction du temps.
6. Un hamster court en moyenne à environ $v_0 = 3\,\mathrm{km/h}$. Calculer le temps qu'il mettra avant d'atteindre sa vitesse de croisière. On donne $R = 10\,\mathrm{cm}$, $m = 100\,\mathrm{g}$, $\theta_0 = 30°$ et $M = 200\,\mathrm{g}$.
7. Calculer l'énergie cinétique de la roue lorsque le hamster a atteint cette vitesse.
8. Expliquer pourquoi lorsque la vitesse de course du hamster est constante on a nécessairement $\theta_0 = 0$.

On prend maintenant en compte les frottements entre la roue et son axe de rotation, ceux-ci produisent un couple résistant dont le moment par rapport à l'axe Δ est Γ_Δ.

9. Montrer que la nouvelle accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mRg\sin\theta_0 - \Gamma_\Delta}{J_\Delta}$$

10. Montrer que dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante, l'angle θ_0 n'est plus nul, donner son expression.

On se pose le problème suivant : **Comment faire subir un looping au Hamster ?** On part d'une situation où le Hamster court dans la roue à sa vitesse de croisière de v_0, avec un angle $\theta_0 = 0$. Subitement il décide de s'arrêter de courir, on considère qu'il ne glisse alors pas par rapport à la roue qui l'entraîne vers la droite (et le haut). L'étude qui suit est faite dans le référentiel du laboratoire, on néglige à nouveau les frottements entre la roue et son axe de rotation.

11. Exprimer la vitesse de rotation ω_0 de la roue lorsque le hamster court.
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, quelle est son énergie cinétique ? potentielle ? Quelle est l'énergie cinétique de rotation de la roue ? En déduire l'énergie mécanique totale du système roue+hamster. On donnera les expression littérales sans utiliser les valeurs numériques fournies.

13. On considère que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste la même lorsque le hamster arrête de courir. Montrer que la vitesse de rotation ω_1 de la roue juste après que le hamster ait arrêté de courir s'exprime comme :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{J_\Delta}{J_\Delta + mR^2}}$$

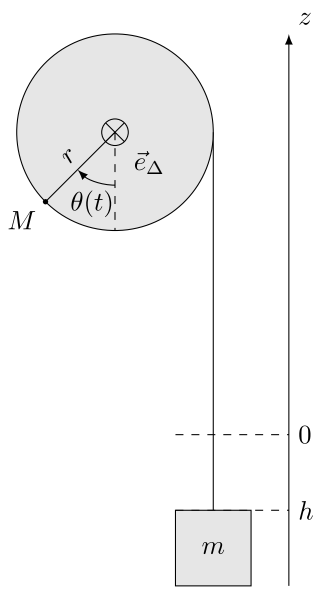
14. Justifier pourquoi on peut considérer que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste constante au cours du temps. Exprimer cette énergie mécanique en fonction de la vitesse de rotation ω et de l'angle θ dont la roue a tourné.
15. En déduire l'expression de la vitesse de rotation ω de la roue en fonction de l'angle θ dont elle a tourné.
16. Lorsque la roue a tourné de π, le hamster se trouve au point le plus haut. Faire le bilan des forces subies par le hamster à cet instant.
17. Montrer que l'accélération normale subie par le hamster à cet instant peut s'écrire :

$$\vec{a} = -R\left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}\right)\vec{e}_r$$

18. Le hamster reste "collé" à la roue et peut faire un looping si la composante normale de la réaction de la roue sur le hamster ne s'annule pas. Avec les valeurs numériques données précédemment, le hamster va-t-il faire un looping ?
19. Comment faudrait-il modifier sa roue pour que le hamster fasse un looping lorsqu'il s'arrête de courir ?

Exercice 4 : Treuil (TD13)

Un treuil est composé d'un cylindre de moment d'inertie J_Δ par rapport à son axe de rotation et de rayon r. Une corde enroulée sur le treuil soutient un solide S de masse m. La masse de la corde ainsi que tous les frottements sont négligés.



1. Le cylindre du treuil est initialement bloqué, exprimer la tension de la corde.

À $t = 0$ on relâche le cylindre qui tourne sans frottement autour de son axe. On repère la position de la masse par son altitude $h(t)$ et la position du cylindre par l'angle $\theta(t)$ dont il a tourné.

2. Donner la relation entre $h(t)$ et $\theta(t)$.
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, exprimer $\ddot{h}(t)$ en fonction de la norme T de la tension de la corde.
4. En appliquant le théorème du moment cinétique au cylindre, exprimer $\ddot{\theta}(t)$ en fonction de T.
5. À partir des deux équations précédentes, déterminer l'accélération angulaire $\alpha = \ddot{\theta}(t)$ du cylindre.
6. Exprimer l'accélération linéaire $a = \ddot{h}(t)$ du solide S. La comparer à celle qu'il aurait lors d'une chute libre.
7. A.N. : $J_\Delta = 0{,}2\,\mathrm{kgm^2}$, $r = 10\,\mathrm{cm}$ et $m = 10\,\mathrm{kg}$. Calculer α et a.
8. Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble (cylindre + masse) en fonction de h.