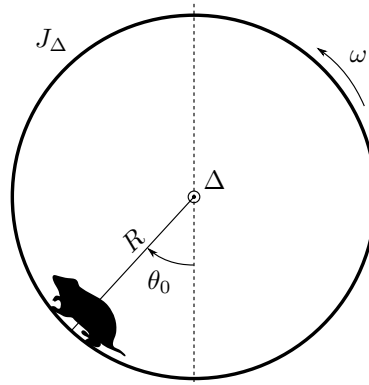


DS7 : Mécanique et Induction – Corrigé

Durée : 4h. Les calculatrices sont interdites. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : UN HAMSTER COURT DANS SA CAGE

Pour permettre à un hamster domestique de faire de l'exercice, on place dans sa cage une roue que le hamster peut faire tourner en courant. La roue a un rayon R et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J_{\Delta} = MR^2$ où M est la masse de la roue. La masse du hamster est notée m .



On commence par négliger tous les frottements. On considère également que lors de sa course, le hamster se trouve à une position constante repérée par un angle θ_0 par rapport à la verticale.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la roue. Faire un schéma.
2. Quel est le moment cinétique L_{Δ} de la roue du hamster en fonction de ω ?
3. À $t = 0$ le hamster commence à courir. Donner l'expression de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de R , θ_0 , m et J_{Δ} .
4. Donner l'évolution temporelle $\omega(t)$ de la vitesse angulaire de rotation de la roue.
5. Donner l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ de la roue en fonction du temps.
6. Un hamster court en moyenne à environ $v_0 = 3 \text{ km/h}$. Calculer le temps qu'il mettra avant d'atteindre sa vitesse de croisière. On donne $R = 10 \text{ cm}$, $m = 100 \text{ g}$, $\theta_0 = 30^\circ$ et $M = 200 \text{ g}$.
7. Calculer l'énergie cinétique de la roue lorsque le hamster a atteint cette vitesse.
8. Expliquer pourquoi lorsque la vitesse de course du hamster est constante on a nécessairement $\theta_0 = 0$.

On prend maintenant en compte les frottements entre la roue et son axe de rotation, ceux-ci produisent un couple résistant dont le moment par rapport à l'axe Δ est Γ_{Δ} .

9. Montrer que la nouvelle accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mRg \sin \theta_0 - \Gamma_{\Delta}}{J_{\Delta}}$$

10. Montrer que dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante, l'angle θ_0 n'est plus nul, donner son expression.

On se pose le problème suivant : **Comment faire subir un looping au Hamster ?** On part d'une situation où le Hamster court dans la roue à sa vitesse de croisière de v_0 , avec un angle $\theta_0 = 0$. Subitement il décide de s'arrêter de courir, on considère qu'il ne glisse alors pas par rapport à la roue qui l'entraîne vers la droite (et le haut). L'étude qui suit est faite dans le référentiel du laboratoire, on néglige à nouveau les frottements entre la roue et son axe de rotation.

11. Exprimer la vitesse de rotation ω_0 de la roue lorsque le hamster court.
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, quelle est son énergie cinétique ? potentielle ? Quelle est l'énergie cinétique de rotation de la roue ? En déduire l'énergie mécanique totale du système roue+hamster. On donnera les expressions littérales sans utiliser les valeurs numériques fournies.
13. On considère que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste la même lorsque le hamster arrête de courir. Montrer que la vitesse de rotation ω_1 de la roue juste après que le hamster ait arrêté de courir s'exprime comme :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{J_{\Delta} + mR^2}}$$

14. Justifier pourquoi on peut considérer que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste constante au cours du temps. Exprimer cette énergie mécanique en fonction de la vitesse de rotation ω et de l'angle θ dont la roue a tourné.

15. En déduire l'expression de la vitesse de rotation ω de la roue en fonction de l'angle θ dont elle a tourné.
16. Lorsque la roue a tourné de π , le hamster se trouve au point le plus haut. Faire le bilan des forces subies par le hamster à cet instant.
17. Montrer que l'accélération normale subie par le hamster à cet instant peut s'écrire :

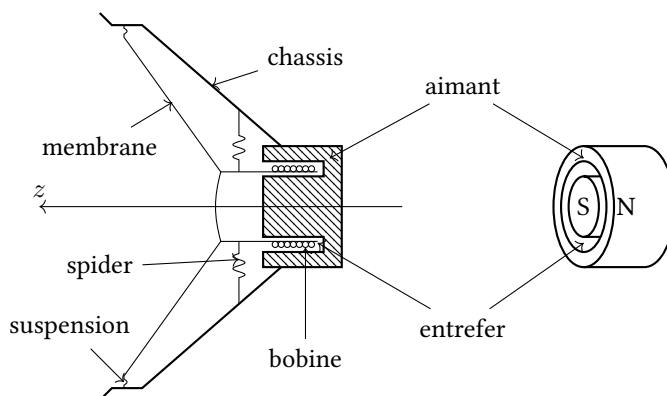
$$\vec{a} = -R \left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1 - \cos \theta)}{J_\Delta + mR^2} \right) \vec{e}_r$$

18. Le hamster reste "collé" à la roue et peut faire un looping si la composante normale de la réaction de la roue sur le hamster ne s'annule pas. Avec les valeurs numériques données précédemment, le hamster va-t-il faire un looping ?
19. Comment faudrait-il modifier sa roue pour que le hamster fasse un looping lorsqu'il s'arrête de courir ?

Exercice 2 : LE HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE (CENTRALE TSI 2013)

La figure ci-dessous montre une vue en coupe du haut-parleur. L'ensemble possède la symétrie de révolution autour de l'axe Oz . Il comprend :

- une partie fixe constituée de deux éléments, le châssis rigide et l'aimant ;
- une partie mobile constituée de la membrane et de la bobine.



L'aimant est formé d'un cylindre central (pôle sud) et d'une couche cylindrique extérieure (pôle nord) séparés par un entrefer d'épaisseur très faible (de l'ordre du millimètre), rempli d'air, dans lequel règne un champ magnétique radial statique $\vec{B} = -B\vec{u}_r$ avec $B > 0$ et où $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est la base associée au trièdre des coordonnées cylindriques. La bobine est un solénoïde d'axe Oz situé dans l'entrefer et donc plongé entièrement dans le champ \vec{B} précédent. La longueur totale du fil constituant la bobine est ℓ . L'ensemble bobine+membrane est un solide de masse m , mobile en translation selon Oz , appelé dans la suite *équipage mobile*. Sa position est repérée par la coordonnée $z(t)$. Le spider et la suspension (voir schéma) exercent sur l'équipage mobile une force de rappel élastique $-kz\vec{u}_z$ vers la position d'équilibre $z = 0$.

Les mouvements de l'équipage mobile sont amortis par une force de type frottement fluide proportionnelle à la vitesse, de la forme

$$\vec{F}_f = -h \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad (1)$$

On étudie le mouvement du haut-parleur lorsque l'on fait passer un courant électrique i dans le solénoïde.

I – Équation mécanique

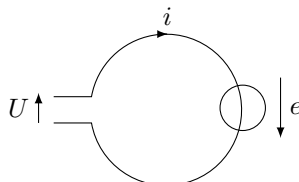
1. Représenter sur un schéma en perspective une spire de la bobine et la force de Laplace $d\vec{F}_L$ s'exerçant sur un élément $d\vec{\ell}$ de la spire. Le courant sera orienté dans un sens tel qu'une intensité positive engendre une force de Laplace dirigée vers les z positifs.
2. Montrer que la force de Laplace totale résultante sur la bobine s'exprime comme

$$\vec{F}_L = i\ell B\vec{u}_z. \quad (2)$$

3. On suppose que l'on peut négliger le poids de l'équipage mobile, et que les seules forces qu'il subit sont la force de Laplace, la force de rappel élastique du spider et la force de frottement fluide. En appliquant le PFD à l'équipage mobile, déterminer l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit $z(t)$.

II – Équation électrique

4. Le déplacement de la bobine dans l'entrefer entraîne l'apparition d'une fem d'induction $e(t)$ représentée sur le schéma ci-dessous. La tension U est la tension appliquée au solénoïde. Quelle relation lie la puissance mécanique P_L des forces de Laplace à la puissance électrique P_e reçue par la fem d'induction ?



5. En déduire l'expression :

$$e(t) = -B\ell \frac{dz}{dt} \quad (3)$$

6. La bobine est équivalente à un dipôle associant en série la résistance R , l'inductance L et la fem d'induction e . Représenter le schéma électrique équivalent de la bobine.
7. La différence de potentiel aux bornes de la bobine est notée $u(t)$, montrer qu'on obtient l'équation différentielle électrique reliant $u(t)$, $i(t)$ et $z(t)$ suivante :

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + B\ell \frac{dz}{dt} \quad (4)$$

III – Impédance du haut-parleur

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . Les grandeurs $u(t)$, $i(t)$, $z(t)$ sont représentées par leur équivalents complexes \underline{u} , \underline{i} et \underline{z} .

8. Montrer que les équations mécanique et électrique deviennent :

$$-\omega^2 \underline{z} = \frac{B\ell}{m} \underline{i} - \frac{k}{m} \underline{z} - j\omega \frac{h}{m} \underline{z} \quad \text{et} \quad \underline{u} = jL\omega \underline{i} + R\underline{i} + jB\ell\omega \underline{z} \quad (5)$$

9. En déduire l'impédance complexe $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i}$ du haut-parleur.
10. Montrer que \underline{Z} se met sous la forme de la somme d'un terme électrique $R + jL\omega$ et d'une impédance \underline{Z}_m appelée *impédance motionnelle*, faisant intervenir les caractéristiques mécaniques du système, qu'on écrira sous la forme :

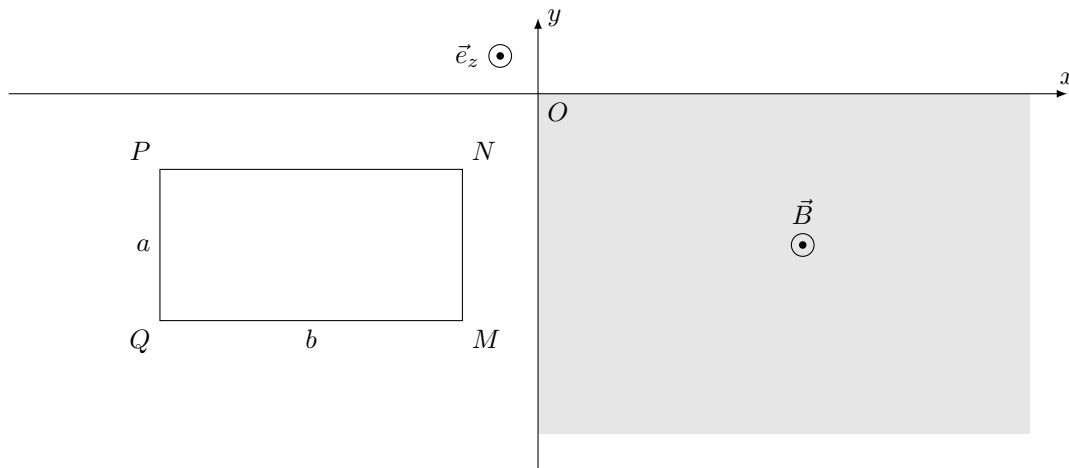
$$\underline{Z}_m = \frac{R_0}{1 + jQ_e(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \quad (6)$$

Donner les expressions de R_0 , Q_e et ω_0 en fonction de m , h , k , B et ℓ .

11. En étudiant les comportements asymptotiques de \underline{Z}_m ($\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$), donner l'allure de $|\underline{Z}_m|$ en fonction de ω . Pour quelle pulsation $|\underline{Z}_m|$ est-il maximum ? Quelle est l'expression de \underline{Z}_m à cette pulsation ?

Exercice 3 : UNE SPIRE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE (CCP TSI 2006)

Une spire conductrice rectangulaire $MNPQ$ mobile, de côtés de longueur a et b , de masse m , de résistance R et d'inductance négligeable, est en translation dans le plan (Oxy) parallèlement à l'axe (Ox) dans le sens des x croissants.



Dans la zone d'espace définie par $x > 0$ existe un champ magnétique uniforme et égal à $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (avec $B > 0$).

On admet que le champ magnétique est nul en dehors de cette zone, sans se préoccuper du problème lié à la discontinuité de \vec{B} .

On néglige toute force autre que magnétique

À un instant t on notera $x(t)$ l'abscisse du côté MN (de longueur a) de la spire et $v(t)$ sa vitesse.

À l'instant où le côté MN de la spire pénètre dans la zone où règne le champ magnétique la vitesse de la spire est non nulle et égale à v_0 .

- Décrire qualitativement le phénomène qui se produit lorsque la spire pénètre avec une vitesse non nulle dans la zone où règne le champ magnétique.
- Donner l'expression du flux du champ magnétique à travers la spire en fonction de x . On distinguera clairement trois cas selon les valeurs de x . On indiquera très clairement l'orientation choisie pour la spire.
- En déduire l'expression de la force électromotrice e et du courant i induits dans le cadre en fonction de $v(t)$. On indiquera sur un schéma le sens choisi pour i et e .
- Donner l'expression de la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre dans les trois cas précédents.
- Appliquer le PFD à la spire pour déterminer l'équation différentielle satisfaite par $v(t)$.

6. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $v(x)$, la vitesse de la spire en fonction de son abscisse x . On pourra utiliser le fait que :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

7. Déterminer la vitesse en fonction de x , tracer sur un graphique l'allure de la courbe représentant $v(x)$ pour $-\frac{b}{2} < x < \frac{3b}{2}$.
 8. À quelle condition la spire conductrice pourra-t-elle entrer totalement dans la zone où règne le champ magnétique ?
 9. On considère que la condition précédente est vérifiée, donner l'expression de la variation ΔE_c d'énergie cinétique de la spire lorsqu'elle entre dans la zone de champ magnétique. Qu'est devenue l'énergie cinétique perdue par la spire.

Exercice 4 : SPIRE EN ROTATION DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE (CCP TSI 2009)

Une spire conductrice circulaire (S), de résistance négligeable, de rayon a , de surface $S = \pi a^2$ et de centre O , tourne à vitesse angulaire ω supposée constante ($\omega > 0$) autour d'un de ses diamètres servant d'axe Oz au problème.

Les axes Ox , Oy et Oz sont munis de la base orthonormée $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La position de (S) est repérée par l'angle $\theta = \omega t$ entre le plan xOz des coordonnées cartésiennes et le plan de la spire. L'orientation du sens positif du courant dans la spire est imposé (voir figure 1).

Cette spire est placée dans un champ magnétique uniforme constant, parallèle à l'axe Oy et noté $\vec{B} = B\vec{j}$ (B est une constante positive). La spire forme un circuit électrique fermé avec un dipôle X (X sera suivant les questions une résistance ou un condensateur), la spire et X étant en série. Le coefficient d'auto-induction de la spire (S) sera négligé.

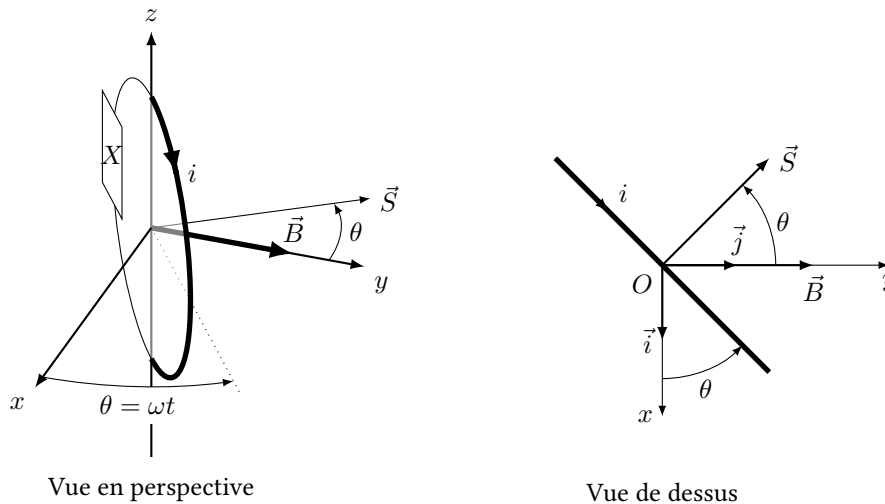


FIGURE 1 – Représentation de la spire

Les grandeurs moyennes demandées seront rapportées à un tour.

1. Expliquer par quel phénomène physique un courant électrique va circuler dans le circuit formé par la spire et le dipôle X ;
2. Exprimer le flux du champ magnétique \vec{B} à travers la spire en fonction de l'angle θ .
3. En déduire l'expression de la force électromotrice induite dans la spire en fonction du temps.

Le dipôle X est un conducteur ohmique de résistance R .

4. Déterminer le courant i qui va traverser R en fonction de B , ω , S , R et t .
5. Donner l'expression de la puissance P_J dissipée par effet Joule dans la résistance et donner sa valeur moyenne $\langle P_J \rangle$.
6. Montrer qu'un moteur extérieur devra exercer un couple moteur sur la spire pour maintenir la vitesse de rotation constante (on néglige tout frottement). Quelle sera la puissance moyenne $\langle P_m \rangle$ de ce couple moteur ?
7. Analyser les transferts d'énergie du dispositif.

Le dipôle X est maintenant un condensateur de capacité C , la résistance de la spire étant toujours négligée. On suppose qu'à $t = 0$, le condensateur est déchargé.

8. Déterminer le courant dans le circuit en fonction de B , ω , S , C et t .
9. Est-il nécessaire d'exercer un couple mécanique sur la spire pour maintenir sa vitesse de rotation *moyenne* constante ?
10. Déterminer la puissance électrique instantanée $P_c(t)$ reçue par le condensateur en fonction de B , ω , S , C et t . Calculer la valeur moyenne $\langle P_c(t) \rangle$ de cette puissance.
11. Déterminer les intervalles de temps sur lesquels le condensateur est :
 - Récepteur (préciser alors d'où provient l'énergie)
 - Générateur (préciser alors où va l'énergie libérée)