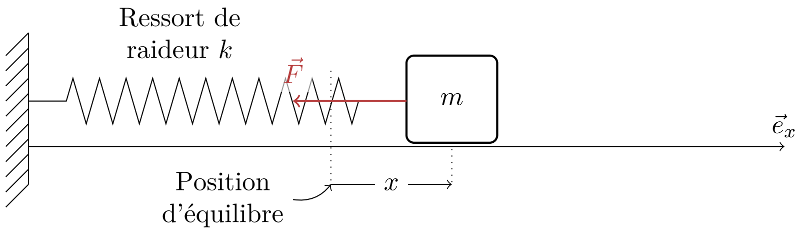
VI Oscillateurs

1 L'oscillateur harmonique

a Exemples

Masse accrochée à un ressort



On accroche une masse m à un ressort de raideur k. La masse se déplace sans frottement sur un plan horizontal. On note x l'allongement du ressort par rapport à la position d'équilibre.

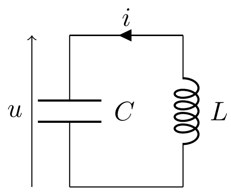
La masse subit une force $\vec{F} = -k \cdot x\vec{e}_x$, en appliquant le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe $\vec{e}_x$, on obtient l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ la pulsation propre du système, on obtient l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Circuit LC



- Aux bornes de L : $u = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
- aux bornes de C : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

En combinant les deux équations, on obtient $u = -LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$, soit en notant $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0}$$

L'évolution de ces deux systèmes très différents est gouvernée par la même équation différentielle, ce sont deux exemples d'oscillateurs harmoniques. L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique est :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique.

b Solution

La solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

où A (amplitude) et φ (phase à l'origine) sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Masse accrochée à un ressort : à $t = 0$ on lâche la masse avec une vitesse nulle et une élongation x_0.

La solution de l'équation différentielle est $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ et on a $\dot{x}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$. La vitesse nulle à l'origine impose

$$\dot{x}(0) = 0 \Leftrightarrow A\omega_0\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

donc $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \pi/2) = A\cos\omega_0 t$

L'élongation à l'origine impose :

$$x(0) = x_0 = A\cos(0) = A \quad \text{donc} \quad A = x_0$$

finalement

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

— x_0 : amplitude ;
— ω_0 : pulsation ;
— $\omega_0 t$: phase.

Circuit LC : à $t = 0$ C est chargé à U_0 et $i = 0$.

La solution de l'équation différentielle est $u(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et on a $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -AC\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$. L'intensité nulle à $t = 0$ impose :

$$i(0) = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

donc $u(t) = A\cos(\omega_0 t)$

La charge à $t = 0$ impose :

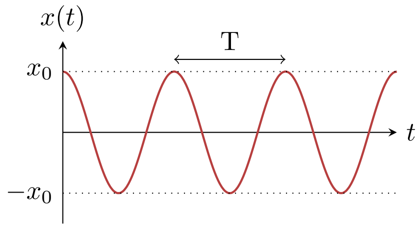
$$u(0) = U_0 = A\cos(0) = A \quad \text{donc} \quad A = U_0$$

finalement

$$\boxed{u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)}$$

c Description du mouvement

Masse accrochée à un ressort : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La masse oscille autour de sa position d'équilibre.



La période T des oscillations est $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\omega_0}{k}}$. L'énergie totale de la masse est :

$$E = E_c + E_{el} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{E_{el}}$$

avec $v = -\dot{x}(t) = x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ on obtient :

$$E = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega_0^2}_{k} x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_0^2 \underbrace{\left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right)}_{=1} = \frac{1}{2}kx_0^2$$

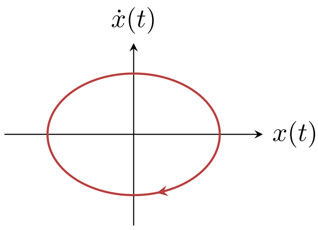
Donc finalement :

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}kx_0^2 = E(0)}$$

L'énergie du système reste constante au cours du temps.

Le **portrait de phase** du système correspond au graphique représentant l'ensemble des points $(x(t), \dot{x}(t))$ parcourus par le système au cours de son évolution.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, le portrait de phase est une ellipse :



Circuit LC : $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$, $i(t) = -U_0 C\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

L'énergie totale contenue dans le circuit à l'instant t est :

$$E = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\underbrace{LC^2\omega_0^2}_{C} U_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2}CU_0^2 \underbrace{\left(\cos(\omega_0 t)^2 + \sin(\omega_0 t)^2\right)}_{=1}$$

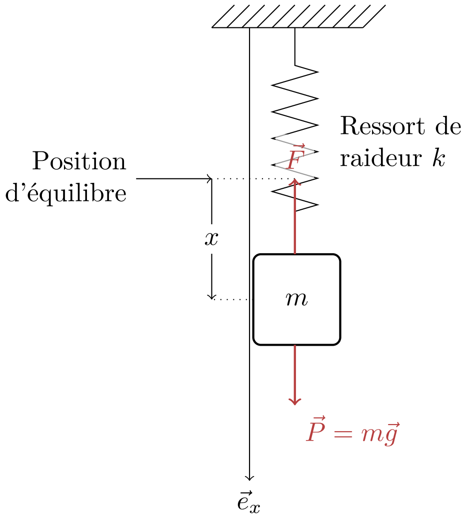
Soit finalement :

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}CU_0^2 = E(0)}$$

Il y a conservation de l'énergie contenue dans le circuit au cours du temps.

d Autre exemple, généralisation

On considère une masse suspendue à un ressort :



La position d'équilibre est $x_e = \frac{mg}{k}$.

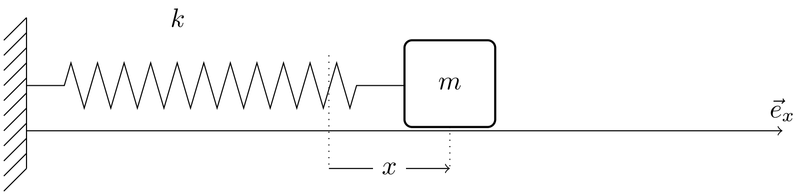
Autour de la position d'équilibre, la masse oscille à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. C'est également un oscillateur harmonique.

On retrouve un oscillateur harmonique dans toutes les situations où l'on étudie le mouvement autour d'une position d'équilibre stable.**C'est un comportement universel**.

2 Oscillateur harmonique amorti

a Exemples

Masse + ressort + frottement visqueux :



On ajoute une force de frottement visqueux : $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$.

Le PFD $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ donne lorsqu'on le projette sur l'axe $\vec{e}_x$:

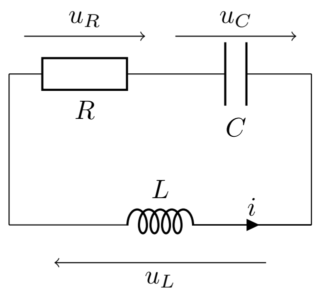
$$-kx - \gamma\dot{x} = m\ddot{x}$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{\omega_0/Q}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

où $Q = \frac{\sqrt{km}}{\gamma}$ est appelé **facteur de qualité** de l'oscillateur.

Circuit RLC série :



— Loi des mailles : $u_R + u_C + u_L = 0$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\,u_R}{\mathrm{d}\,t} + \dfrac{\mathrm{d}\,u_C}{\mathrm{d}\,t} + \dfrac{\mathrm{d}\,u_L}{\mathrm{d}\,t} = 0$;

— Loi d'Ohm : $u_R = Ri$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\,u_R}{\mathrm{d}\,t} = R\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$;

— Bobine : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\,u_L}{\mathrm{d}\,t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2\,i}{\mathrm{d}\,t^2}$;

— Condensateur : $\dfrac{\mathrm{d}\,u_C}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{i}{C}$.

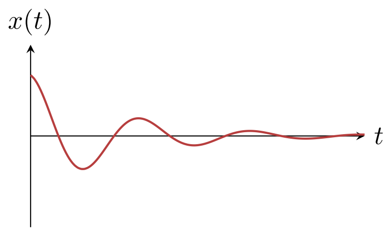
On obtient alors l'équation : $L\dfrac{\mathrm{d}^2\,i}{\mathrm{d}\,t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + \dfrac{i}{C} = 0$ soit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\,i}{\mathrm{d}\,t^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\omega_0/Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\,i}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} + \omega_0^2 i = 0}$$

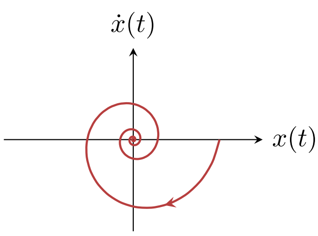
où $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ est le facteur de qualité de l'oscillateur.

b Analyse qualitative

L'amortissement correspond à une dissipation d'énergie. L'énergie du système diminue donc au cours du temps, il tend à retourner vers sa position d'équilibre stable.



Évolution temporelle



Portrait de phase

c Solution exacte

L'équation de l'oscillateur harmonique amorti est :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

L'équation caractéristique associée

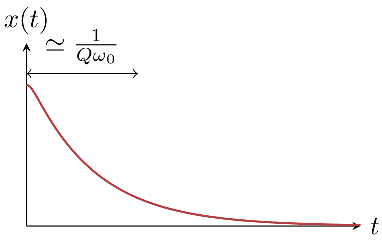
$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$. On distingue trois cas, selon la valeur de Δ :

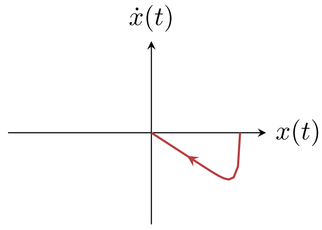
— Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$, l'équation caractéristique a 2 solutions réelles r_1 et r_2 :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right)$$

et on a $x(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$. C'est le **régime apériodique**, il n'y a pas d'oscillations.



Évolution temporelle



Portrait de phase

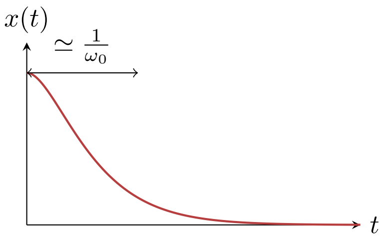
Lorsque $Q \ll \frac{1}{2}$, on a $x(t) \simeq A\exp(-t/\tau)$. Le temps de retour à l'équilibre est de l'ordre de :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{Q\omega_0}}$$

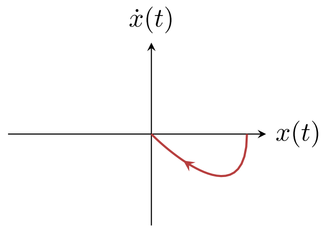
— Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique a une racine double :

$$r = -\omega_0$$

et on a $x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$. C'est le **régime critique**. Il n'y a pas d'oscillations.



Évolution temporelle



Portrait de phase

Le temps de retour à l'équilibre est de l'ordre de :

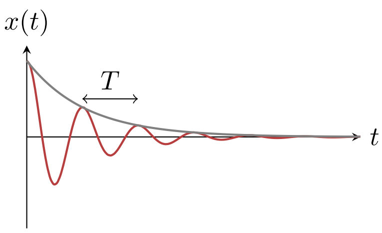
$$\boxed{\tau \simeq \frac{1}{\omega_0}}$$

C'est le régime pour lequel le retour à l'équilibre se fait le plus rapidement.

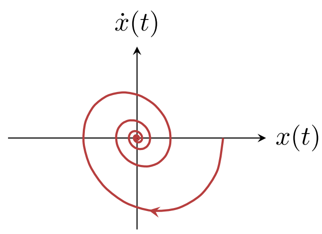
— Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique a deux solutions complexes :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta}\right) = -\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{\frac{1}{\tau}} \pm i\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\omega}$$

on a alors $x(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$. C'est le régime **pseudo-périodique**.



Évolution temporelle



Portrait de phase

La pseudo-période T du signal est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0}}_{T_0}\frac{1}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} \tag{1}$$

T_0 est la période propre de l'oscillateur (la période d'oscillation en l'absence d'amortissement). Avec amortissement, on a $T > T_0$. Le temps de retour à l'équilibre est de l'ordre de :

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

En régime pseudo-périodique, on peut déterminer graphiquement la valeur de Q en comptant le nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne passe sous une valeur limite que nous allons déterminer.

L'amplitude des oscillations est $A(t) = A\exp(-\omega_0 t/2Q) = A\exp(-\pi/Q * t/T_0)$ après n oscillations, on a $t = nT_0$ et $A(t) = \exp(-n\pi/Q)$. Si $n = Q$ l'amplitude est $A(t) = A\exp(-\pi) \simeq A/20$. Donc après Q oscillations, l'amplitude des oscillations est divisée par 20.

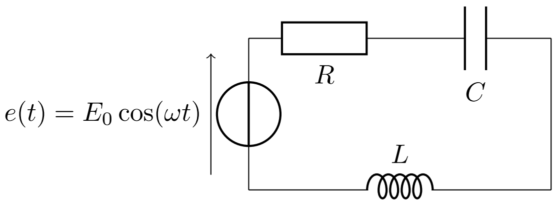
On obtient la règle suivante : Q =nombre d'oscillations avant que l'amplitude ne soit divisée par 20.

3 Régime sinusoïdal forcé

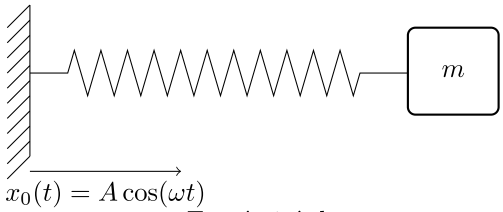
a Position du problème

Un système dynamique (électrique, mecanique, ...) est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω.

exemples :



Circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale



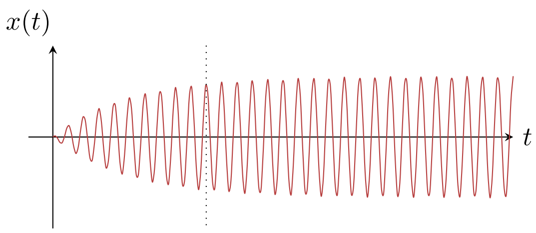
Extrémité du ressort qui oscille

b Régime transitoire et régime permanent

Lorsqu'un système linéaire est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω on distingue deux régimes :

— Le régime transitoire au cours duquel l'amplitude des oscillations varie

— Le régime permanent au cours duquel toutes les grandeurs oscillent à la pulsation ω avec une amplitude constante.



Régime transitoire — Régime permanent

La durée du régime transitoire est identique à celle du régime transitoire de l'oscillateur libre (elle dépend de Q et de ω_0).

c Étude du régime permanent

En régime permanent, toutes les grandeurs oscillent à la pulsation ω. On peut les représenter par une amplitude et une phase, c'est à dire un nombre complexe.

$$\underline{x}(t) = X\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} \quad \text{avec} \quad j^2 = -1 \tag{2}$$

La grandeur réelle (celle qui a une signification physique) est la partie réelle de la grandeur complexe : $x(t) = \mathrm{Re}(\underline{x}) = X\cos(\omega t + \varphi)$.

La dérivation devient une opération très simple :

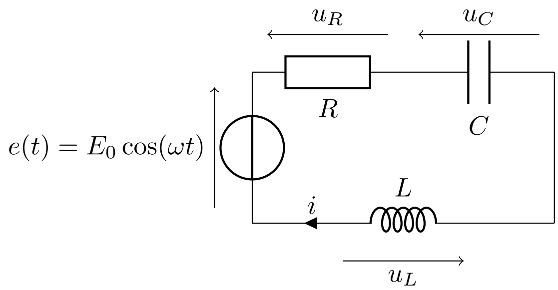
$$\frac{\mathrm{d}\,\underline{x}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(X\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)}) = Xj\omega\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{x}(t)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\underline{x}(t)}{\mathrm{d}\,t} = j\omega\underline{x}(t)}$$

Cela permet de transformer toutes les équations différentielles en équations algébriques.

Application au circuit RLC en régime forcé : On cherche à déterminer la tension $u_L(t)$ en régime permanent dans le circuit suivant :



On remplace les valeurs réelles par leur représentation complexe : $\underline{i}(t)$, $\underline{e}(t)$, $\underline{u}_R(t)$, $\underline{u}_C(t)$ et $\underline{u}_L(t)$.

Les différentes lois du circuit s'écrivent :

— Mailles : $\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C$

— Ohm : $\underline{u}_R = R\underline{i}$

— Condensateur : $\underline{i} = C\dfrac{\mathrm{d}\,\underline{u}_C}{\mathrm{d}\,t} = j\omega\underline{u}_C$

— Bobine : $\underline{u}_L = L\dfrac{\mathrm{d}\,\underline{i}}{\mathrm{d}\,t} = jL\omega\underline{i}$

On obtient finalement

$$\underline{u}_L = \frac{jL\omega}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}\underline{e}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

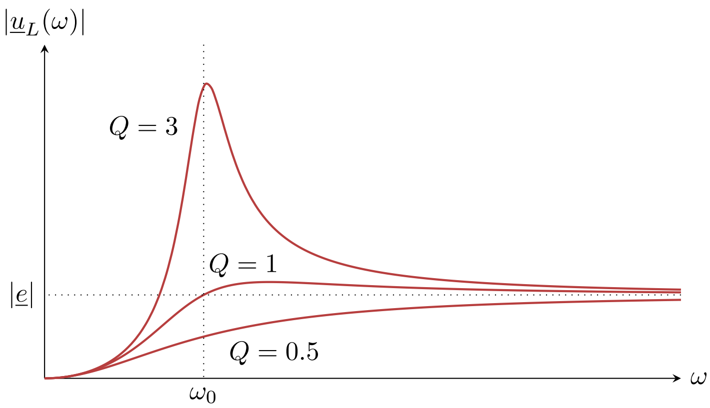
$$\underline{u}_L = \frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{e}$$

en faisant intervenir la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ de l'oscillateur.

L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine est donnée par le module de $\underline{u}_L$:

$$|\underline{u}_L| = \frac{Q\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}|\underline{e}| \tag{3}$$

On représente sur le graphique ci-dessous l'amplitude de la tension aux bornes de la bobine en fonction de la pulsation ω pour plusieurs valeurs du facteur de qualité Q :



On remarque que lorsque le facteur de qualité est grand (>1), la tension aux bornes de la bobine peut être supérieurs à la tension d'alimentation du circuit. On dit qu'il y a **résonance**.

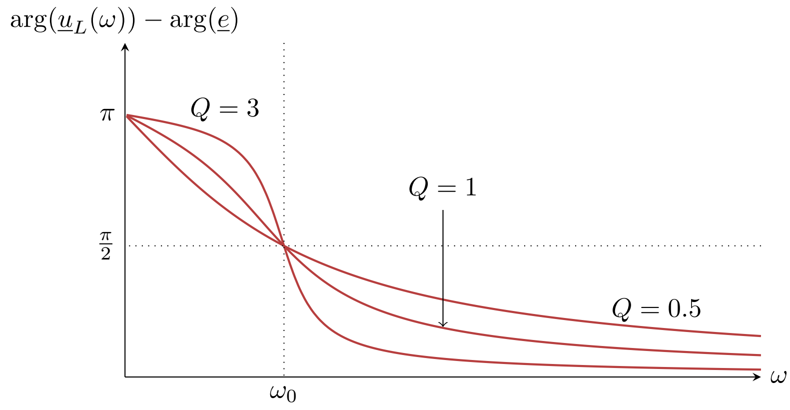
Plus le facteur de qualité est élevé, plus le pic de résonance est haut et étroit. Si $\Delta\omega$ est la largeur du pic de résonance, on peut montrer que l'on a

$$\boxed{\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \simeq Q}$$

On peut également s'intéresser au déphasage φ entre la tension d'alimentation et la tension aux bornes de la bobine. Pour cela on doit calculer l'argument de $\underline{u}_L$, on trouve :

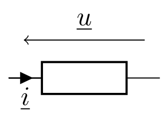
$$\arg(\underline{u}_L) = \arg(\underline{e}) + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

Le graphique ci-dessous représente $\arg(\underline{u}_L) - \arg(\underline{e})$ en fonction de ω, il s'agit donc du déphasage entre les deux grandeurs.



À la résonance, il y a un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre le signal et l'excitation.

d Impédances complexes



Dans un circuit électrique en régime sinusoïdal forcé, on peut définir **l'impédance complexe** $\underline{Z}$ d'un dipôle (équivalente à la résistance en régime continu) telle que

$$\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$$

Pour une résistance : $\underline{u} = R\underline{i}$ donc

$$\boxed{\underline{Z}_R = R}$$

L'impédance est réelle.

Pour une bobine : $u_L = L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$ donc $\underline{u} = jL\omega\underline{i}$ et :

$$\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$$

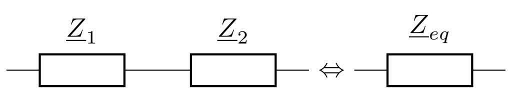
L'impédance est imaginaire pure et dépend de ω.
Lorsque $\omega = 0$, $|\underline{Z}_L| = 0$, à basses fréquences la bobine se comporte comme un fil.
Lorsque $\omega \to \infty$, $|\underline{Z}_L| \to \infty$, donc à hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

Pour un condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t}$ donc $\underline{i} = jC\omega\underline{u}$ et :

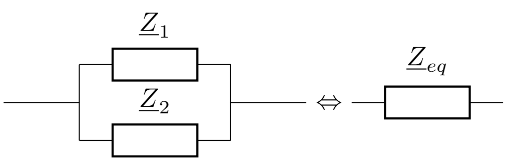
$$\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}}$$

L'impédance est imaginaire pure et dépend de ω.
Lorsque $\omega \to 0$, $|\underline{Z}_C| \to \infty$, à basses fréquences le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
Lorsque $\omega \to \infty$, $|\underline{Z}_C| \to 0$, donc à hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un fil.

Associations d'impédances : Les règles sont les mêmes que pour des associations de résistances

En série : 

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

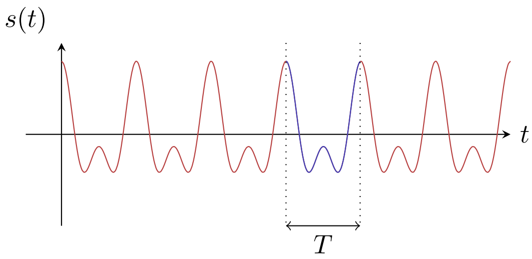
En parallèle : 

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

4 Filtrage linéaire

a Signaux périodiques

Un signal périodique $s(t)$ est composé d'un motif élémentaire de durée T qui se répète indéfiniment au cours du temps.



- T est la **période** du signal ;
- $f = \frac{1}{T}$ est sa fréquence.

On peut décomposer une fonction périodique en **série de Fourier** :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t.$$

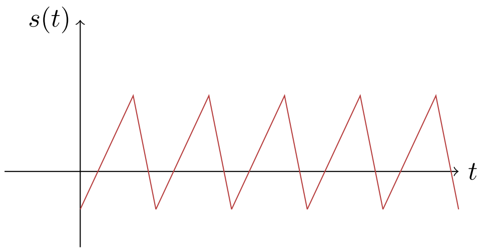
a_0 est la valeur moyenne de $s(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t$$

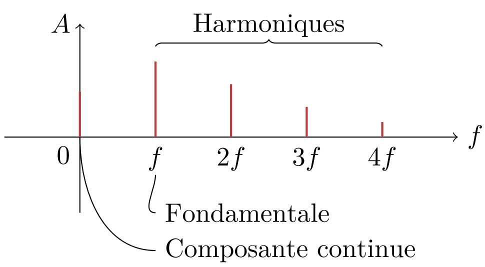
L'harmonique de rang n est :

$$H_n = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Un signal périodique se décompose en une somme d'une composante continue et d'harmoniques sinusoïdales de fréquences multiples de la fréquence du signal.



Représentation temporelle



Spectre

Le spectre du signal $s(t)$ est composé de l'ensemble des amplitudes des harmoniques (et de la composante continue).
La valeur moyenne d'un signal $s(t)$ de période T est :

$$< s(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t$$

La valeur efficace S d'un signal $s(t)$ de période T est :

$$S = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

par exemple pour un signal sinusoïdal $s(t) = A\sin(\omega t)$ on a :

$$< s(t) >= \frac{A}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{4}$$

et

$$S = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t} = \frac{A}{\sqrt{T}}\sqrt{\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t} = \frac{A}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

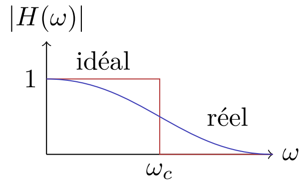
b Filtres

Un filtre est un système linéaire qui transmet certaines fréquences et en atténue d'autres.

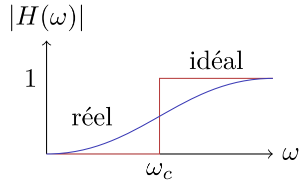
Un filtre est caractérisé par sa **fonction de transfert harmonique** $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}$ dont le module est le **gain** du filtre à la pulsation ω.

Filtres les plus courants :

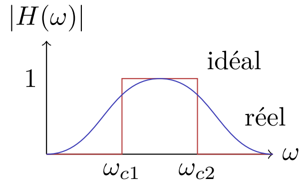
— Filtre passe-bas : laisse passer les basses fréquences ($\omega < \omega_c$) :



— Filtre passe-haut : laisse passer les hautes fréquences ($\omega > \omega_c$) :



— Filtre passe-bande : laisse passer les fréquences intermédiaires ($\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$) :



On définit le **gain** à la pulsation ω par $G(\omega) = |H(\omega)|$

On définit le **gain en décibel** à la pulsation ω par $G_{dB}(\omega) = 20\log(|H(\omega)|)$.

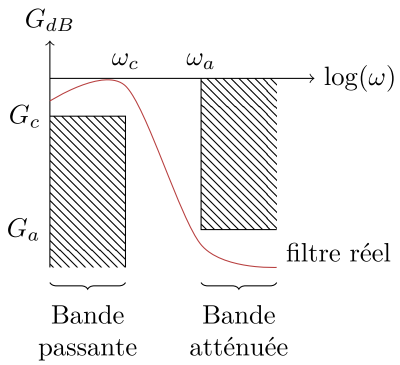
Lors de la conception d'un filtre, ses caractéristiques sont résumées par le **gabarit** du filtre.

Gabarits des filtres les plus courants :

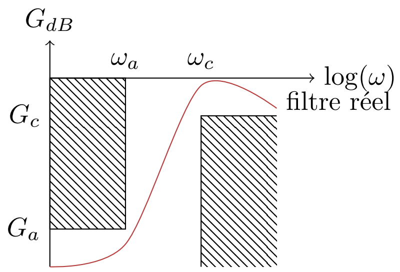
— Filtre passe-bas :

On souhaite que :

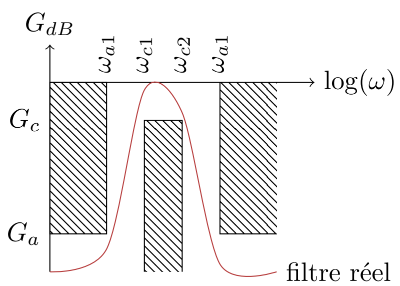
- — $G_{dB}(\omega < \omega_c) > G_c$;
- — $G_{dB}(\omega > \omega_a) < G_a$;
- — $G_{dB}(\omega_c < \omega < \omega_a)$ peut être quelconque.



— Filtre passe-haut :

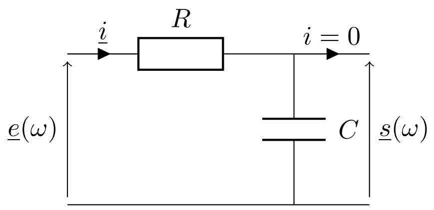


— Filtre passe-bande :



c Exemple d'un filtre passe-bas d'ordre 1

On étudie le filtre suivant :



Analyse qualitative :

- Lorsque $\omega \to \infty$ le condensateur se comporte comme un fil et $s(\omega) \to 0$.
- Lorsque $\omega \to 0$ le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et $s(\omega) \to e(\omega)$.

Ce filtre est donc un **filtre passe-bas**.

La tension de sortie est $\underline{s}(\omega) = \dfrac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega}\underline{e}(\omega)$ (pont diviseur de tension). Soit $\underline{s}(\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e}(\omega)$. Donc la fonction de transfert du filtre est :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

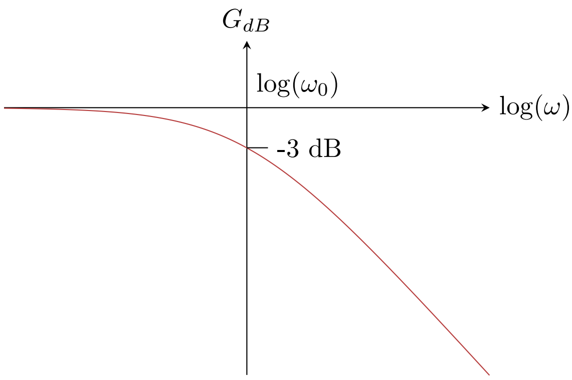
Le **gain** du filtre est :

$$G = |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

Le **gain en décibel** est :

$$G_{dB} = 20\log(G) = -20\log\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

On trace G_{dB} en fonction de $\log(\omega)$, c'est le **diagramme de Bode** du filtre.

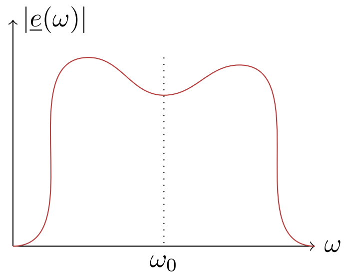


Cherchons les asymptotes en $\pm\infty$ (pour $\log(\omega)$) :

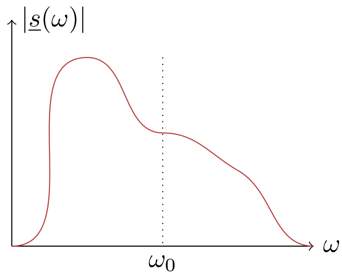
- $\omega \gg \omega_0$: $G_{dB} = -20\log\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} \simeq -20\log\frac{\omega}{\omega_0} = -20\underbrace{\log\omega}_{x} + \underbrace{20\log\omega_0}_{b} \Leftrightarrow y = ax + b$

  L'asymptote en $+\infty$ est donc une doite de pente -20dB/décade, c'est à dire que lorsque l'on multiplie ω par 10, G_{dB} diminue de 20 dB.
- $\omega \ll \omega_0$: $G_{dB} \to 0$ on a donc une asymptote horizontale lorsque $\omega \to 0$ (ou $\log\omega \to -\infty$).

On peut observer l'effet d'un tel filtre sur le spectre d'un signal :



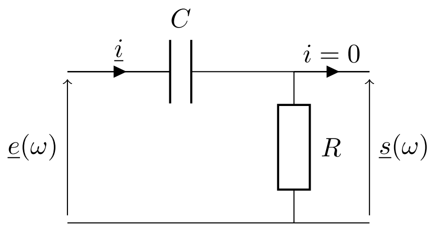
Spectre du signal d'entrée



Spectre du signal de sortie

d Autres filtres passifs

Filtre passe-haut d'ordre 1



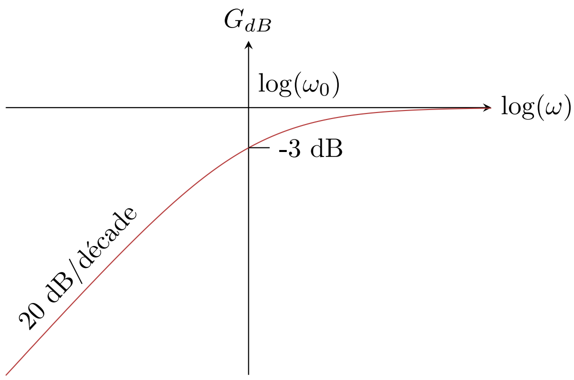
- Lorsque $\omega \to 0$ le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et $s(\omega) \to 0$
- Lorsque $\omega \to \infty$ le condensateur se comporte comme un fil et $s(\omega) \to e(\omega)$.

On construit donc bien un filtre passe-haut de cette manière.

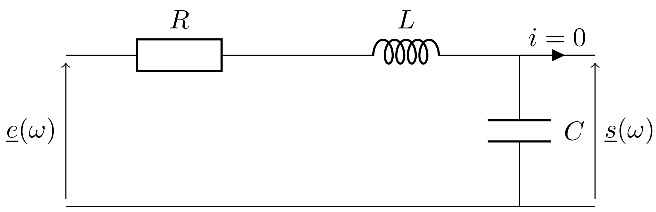
La fonction de transfert de ce filtre est (pont diviseur de tension) :

$$H(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)} = \frac{R}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + (jRC\omega)^{-1}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Le gain du filtre est $G = |H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ et $G_{dB} = -20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$



Filtre passe-bas d'ordre 2

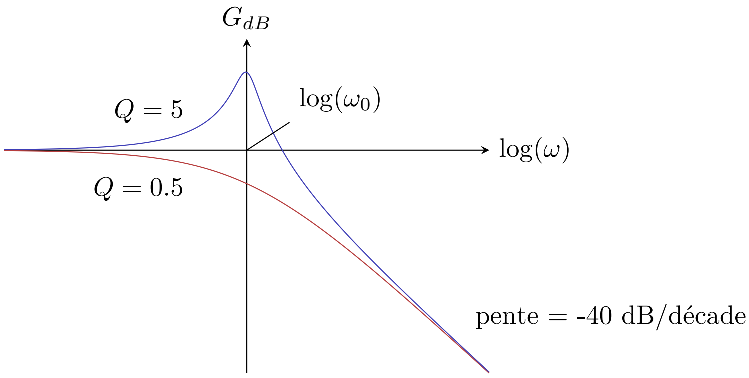


- Lorsque $\omega \to \infty$ la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. Donc $s(\omega) \to 0$;
- Lorsque $\omega \to 0$ la bobine se comporte comme un fil est le condensateur comme un interrupteur ouvert. Donc Donc $s(\omega) \to e(\omega)$.

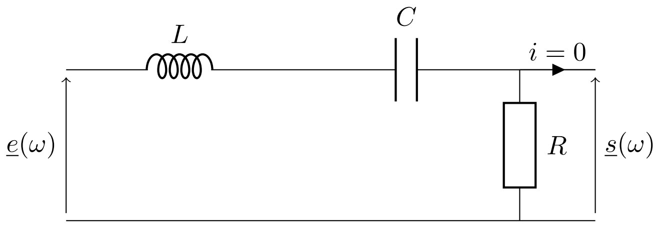
La fonction de transfert du filtre est (pont diviseur de tension) :

$$H(\omega) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} = \frac{1/jC\omega}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}.$$

Le gain du filtre est $G = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$. Et $G_{dB} = -10\log\left(\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right)$



Filtre passe-bande d'ordre 2



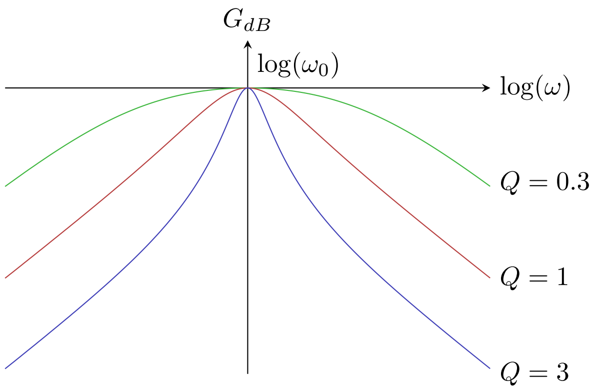
— Lorsque $\omega \to \infty$ la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil. Donc $s(\omega) \to 0$;

— Lorsque $\omega \to 0$ la bobine se comporte comme un fil est le condensateur comme un interrupteur ouvert. Donc Donc $s(\omega) \to 0$.

On construit donc ainsi un filtre passe-bande.

On trouve la fonction de transfert du filtre : $H(\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Le gain est $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$, et $G_{dB} = -10\log\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$



La courbe représentant $G_{dB}(\log(\omega))$ présente une asymptote en $-\infty$ de pente égale à 20 dB/décade et en $+\infty$ une asymptote de pente égale à 20 dB/décade.

On peut trouver la *bande passante à -3 dB* en trouvant les valeurs ω_{c1} et ω_{c2} de ω pour lesquelles $G_{dB}(\omega) = -3 \Leftrightarrow G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve finalement

$$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}$$

Mise en cascade de filtres Pour mettre en cascade des filtres, il faut que la sortie du premier filtre soit peu perturbée par l'entrée du second.

— L'impédance de sortie Z_{s1} du filtre 1 doit être faible ;

— L'impédance d'entrée Z_{e2} du filtre 2 doit être élevée.