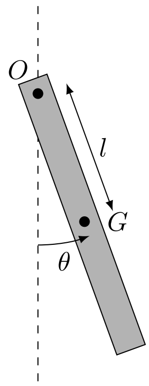
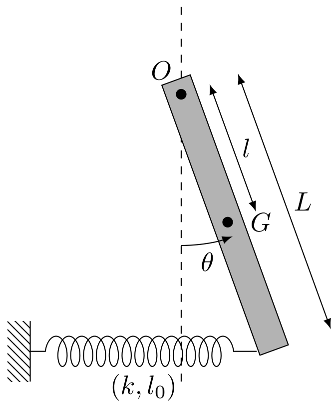
DM4 : Pendule pesant

On considère un pendule pesant constitué d'un solide S de masse m fixé en un point O par une liaison pivot. On note J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à un axe Δ passant pas O. On considère que les forces de pesenteur appliquées au solide sont équivalentes à une force unique $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée au centre de gravité G du solide. On note également $l = OG$.



1. Faire le bilan des forces appliquées au solide.
2. En appliquant le TMC au solide, déterminer une équation différentielle du second ordre satisfaite par $\theta(t)$.
3. Que devient cette équation lorsque $\theta \ll 1$? Résoudre alors l'équation différentielle et déterminer l'expression de $\theta(t)$. On supposera qu'à $t = 0$ le solide est immobile et forme un angle θ_0 avec la verticale.

On accroche l'extrémité du pendule précédent à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. Lorsque $\theta = 0$ la longueur du ressort est l_0.



4. Faire le bilan des forces appliquées au pendule.
5. Appliquer le TMC au solide pour déterminer la nouvelle équation différentielle satisfaite par $\theta(t)$.
6. Résoudre l'équation différentielle pour des petits angles ($\theta \ll 1$). Comment est modifiée la fréquence des oscillations
7. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique du ressort en fonction de k, l et θ.
8. Montrer que l'énergie mécanique totale du pendule s'écrit :

$$E_m(\theta) = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kL^2\sin^2(\theta)$$

9. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique est conservée lors du mouvement du pendule et utiliser cette propriété pour retrouver l'équation différentielle satisfaite par $\theta(t)$.