II) Mécanique Newtonienne (Isaac Newton 1643-1727)

1) Les forces

Une force est une action d'un objet sur un autre induisant une accélération de ce dernier. Une force est modélisée par un vecteur $\vec{F}$. L'intensité d'une force est en Newton (N).

a) Les interactions fondamentales

Toutes les forces observées dans l'univers résultent de 4 interactions fondamentales :

- L'interaction forte : - Est responsable de la cohésion des protons, neutrons... (composés de quarks) et de la cohésion des noyaux atomiques.
  * rayon d'action fini et faible $\sim 2,5.10^{-15}$ m

- L'interaction électromagnétique : responsable de la plupart des phénomènes courants : lumière, électricité, magnétisme, forces de "contact".
  * rayon d'action infini (intensité $\propto \frac{1}{r^2}$)
  * attractive ou répulsive.
  * 100 fois moins intense que l'interact° forte.

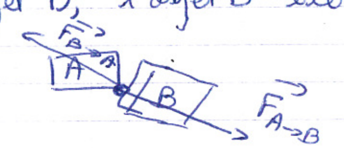
- L'interaction faible : responsable de la radioactivité β, fusion nucléaire
  * rayon d'action très faible $\sim 10^{-18}$ m
  * 10^{13} fois moins intense que l'interaction forte.

- La gravitation : • Force attractive entre tous les objets possédant une masse.
  • rayon d'action illimité (intensité $\propto 1/r^2$)
  • 10^{38} fois plus faible que l'interact° forte.

b) Loi des actions réciproques (3ème loi de Newton)

Lorsqu'un objet A exerce une force $\vec{F}_{A \to B}$ sur un objet B, l'objet B exerce une force opposée sur A :

$$\vec{F}_{B \to A} = - \vec{F}_{A \to B}$$

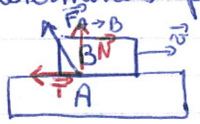


c) Quelques forces usuelles.

* Les forces de frottement fluide : Un objet qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide est soumis à une force de frottement opposée à $\vec{v}$. À faible vitesse, on a $\vec{F} = -k\vec{v}$; k dépend de la forme de l'objet et de la viscosité du fluide.

À haute vitesse, on a $\|\vec{F}\| \propto v^2$ (écoulement turbulent)

* Les forces de frottement solide : entre deux solides en contact. Elles sont déterminées par les lois de Coulomb :



On décompose $\vec{F}_{A \to B} = \vec{T} + \vec{N}$ ($\vec{T}$: composante tangentielle, $\vec{N}$: composante normale) // à la surface de contact.

- Si $\vec{v} = 0$ (Pas de glissement relatif des solides) alors

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

μ_s : coefficient de frottement statique

- Si $\vec{v} \neq 0$ (Glissement) alors

$$\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\|$$

μ_d : coef. de frottement dynamique.

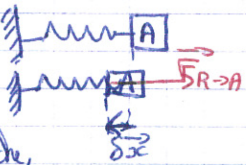
Avec $\mu_s \geq \mu_d$

* Le poids : force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre (ou une autre planète) sur un objet :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

avec $\|\vec{g}\| \simeq 9,8$ N.kg^{-1} et $\vec{g}$ dirigé verticalement vers le bas.

* **force de rappel d'un ressort** : Un ressort exerce sur un objet une force proportionnelle à son élongation δx :

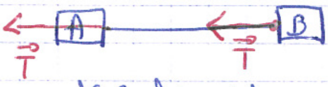


$\vec{F}_{R\to A} = -k\,\delta\vec{x}$

k : constante de raideur en $N.m^{-1}$

- Si δx est vers la gauche, le ressort est comprimé et exerce une force $\vec{F}_{R\to A}$ vers la droite (il pousse A)
- Si δx est vers la droite, le ressort est étiré et "tire" A vers la gauche.

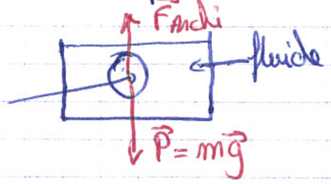
* **tension d'un fil** : Un fil peut transmettre une force d'un objet A à un objet B



La force exercée par A sur le fil est la tension du fil.

* **poussée d'Archimède.**

Un objet A de volume V plongé dans un fluide de masse volumique ρ subit une force opposée à son poids d'intensité $\|\vec{F}_{Archi}\| = \rho V$



→ permet aux bateaux de flotter !

2) Les lois du mouvement.

a) Quantité de mouvement.

On définit la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel M de masse m ayant une vitesse $\vec{v}$ comme $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ en $kg.m.s^{-1}$

La quantité de mouvement dépend de la vitesse $\vec{v}$ et donc du référentiel choisi.

b) Référentiel gallilien, 1ère loi de Newton.

Parmi tous les référentiels possibles, il existe une famille de référentiels par rapport auxquels un point matériel isolé (soumis à aucune force) est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Ce sont les référentiel galliliens

Conséquence : Tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel gallilien sont aussi galliliens.

c) Principe fondamental de la dynamique (PFD). 2ème loi de Newton.

Dans un référentiel gallilien, la variation de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur lui :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

Généralement, la masse est une constante et on peut écrire :

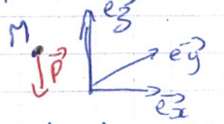
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i}$$

$\vec{a}$: accélération du point M.

3) Applications.

a) Mouvement dans le champ de pesanteur Terrestre.

On considère un point matériel M de masse m soumis uniquement à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.



Le PFD donne $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \iff \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e_z}$

Le point M subit donc un mouvement à vecteur accélération constant. (cf I) 2) b))

Notons (x, y, z) les coordonnées de M, on a $m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_{0x}\\ v_{0y}\\ -gt+v_{0z}\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_{0x}t + x_0\\ v_{0y}t + y_0\\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0\end{pmatrix}$

Donc dans le plan $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$, le mouvement est rectiligne uniforme de vitesse $\begin{pmatrix}v_{0x}\\ v_{0y}\end{pmatrix}$ et suivant $\vec{e_z}$ il est uniformément accéléré.

b) Influence des frottements fluides.

Comparons la chute d'un objet ponctuel avec ou sans les frottements de l'air :

chute libre

$\sum\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \iff \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e_z}$

donc $\vec{v}(t) = -gt\,\vec{e_z}$

et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$

chute avec frottements :

$\sum\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$ $\quad \vec{P} = m\vec{g}$ $\quad \|\vec{R}\| = kv^2$ opposée à $\vec{v}$

donc $m\vec{a} = m\vec{g} + kv^2\vec{e_z}$

$\vec{a} = \vec{g} + \frac{k}{m}v^2\vec{e_z} = \left(-g + \frac{k}{m}v^2\right)\vec{e_z}$

Suivant $\vec{e_z} \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{k}{m}v_z^2 \Rightarrow$ eq diff non linéaire.

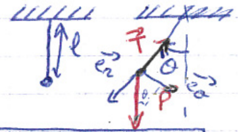
v_z augmente jusqu'à ce que $\frac{dv_z}{dt} = 0 \iff \frac{k}{m}v_z^2 = g$ ou $\boxed{v_{z\,lim} = \sqrt{\frac{gm}{k}}}$

Pour une sphère de rayon = 1 m qui tombe dans l'air, $k \approx 1\,\mathrm{N\,s^2\,m^{-2}}$ $\Rightarrow$ Si $m = 1000$ kg $\quad v_{lim} \simeq 100$ m/s $\simeq 360$ km/h

→ montrer la résolution numérique.

c) Le pendule simple.

Un pendule simple est constitué d'une masse accrochée à un fil de long. l.



PFD : $\sum\vec{F} = m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} = mr\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ (car r = cste = l)
$= ml\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

projection sur $\vec{e_\theta}$: $-P\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = ml\ddot{\theta} = -P\sin\theta = -mg\sin\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

équation différentielle très difficile à résoudre $\Rightarrow$ On fait l'approximation $\theta \ll 1$

Donc $\sin\theta \simeq \theta$

l'équa diff devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$

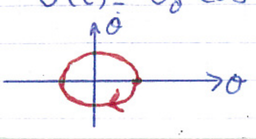
oscillateur harmonique !

solution : $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$ $\qquad \dot{\theta}(0) = 0 = -A\omega_0\sin\varphi \iff \varphi = 0$ $\qquad \theta(0) = \theta_0 = A$

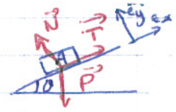
$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$ $\qquad \dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t)$

Portrait de phase :



26

d) Frottement solide.



On considère un solide sur un plan incliné d'angle θ avec l'horizontale : le coefficient de frottement statique vaut μ_s, masse du solide m.

<u>Pb:</u> trouver l'angle θ_{max} au delà duquel le solide commence à glisser :

<u>Solide immobile</u> : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{N}=0$ Sur $\vec{e_x}$: $P\sin\theta = T$

Sur $\vec{e_y}$: $P\cos\theta = N$ donc $\frac{T}{N}=\tan\theta$

Pas de glissement tant que $T\leq \mu_s N \Leftrightarrow \frac{T}{N}\leq \mu_s \Leftrightarrow \tan\theta \leq \mu_s$

Donc l'angle limite est $\theta_{lim}=\arctan(\mu_s)$ (indep. de P)

4) Approche énergétique.

a) Puissance et travail d'une force.

Le travail d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M correspond à l'énergie fournie à M par la force $\vec{F}$ lors de son déplacement. Le travail s'exprime en Joules.

Pour un déplacement rectiligne $d\vec{u}$ de M, le travail fourni par $\vec{F}$ est :

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{u}$$

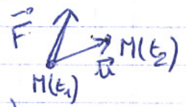
<u>demo</u> $v(x)$ $v(x+dx)$; x dt $x+dx$; $v(x+dx)=v(x)+a\,dt$ $=v(x)+\frac{a}{v}\,dx$

$E_c(x+dx)=E_c(x)+\underbrace{ma}_{F}\,dx$ $\boxed{F.dl}$

Si le point M se déplace sur une trajectoire $\mathcal{C}$, le travail fourni par F est $W=\int_{\mathcal{C}}\vec{F}.d\vec{u}$

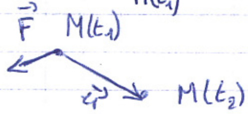
Pour une trajectoire rectiligne $\vec{u}$, $\underline{W=\vec{F}.\vec{u}}$

* Si $\vec{F}.\vec{u}>0$ <u>ex</u>



Le travail fourni par $\vec{F}$ est >0, c'est un travail <u>moteur</u>

* Si $\vec{F}.\vec{u}<0$ <u>ex</u>



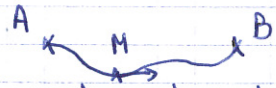
Le travail fourni par $\vec{F}$ est <0, c'est un travail <u>résistant</u>.

- La puissance fournie par une force $\vec{F}$ est $P=\frac{dW}{dt}=\vec{F}.\frac{d\vec{u}}{dt} \Leftrightarrow \boxed{P=\vec{F}.\vec{v}}$

b) théorème de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m ayant une vitesse v est $\boxed{E_c=\frac{1}{2}mv^2}$

<u>Théorème de l'énergie cinétique</u> : ~~Dans~~ un référentiel gallilien, un point M de masse m se déplace entre les points A et B



Alors la variation d'énergie cinétique du pt M entre A et B est la somme de travaux des forces appliquées à M entre A et B :

$$\Delta E_c = E_c(B)-E_c(A)=\sum W_{A\to B}$$

ou : $\frac{dE_c}{dt}=\sum_i P_i$ P_i : puissance de la force i appliquée à M.

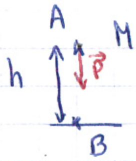
<u>démonstration</u> : Dans $\mathcal{R}$ gallilien, on a le PFD: $m\vec{a}=\sum_i\vec{F_i}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$

donc $m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}=\sum_i\underbrace{\vec{F_i}.\vec{v}}_{P_i}$

$$m\times\frac{1}{2}\frac{d(\overbrace{\vec{v}.\vec{v}}^{v^2})}{dt}=\sum_i P_i \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_c}\Big)=\sum_i P_i$$

$$\frac{dE_c}{dt}=\sum_i P_i$$

<u>Application</u> : Un objet de masse m tombe d'une hauteur h sans vitesse initiale, calculer sa vitesse au moment de l'impact. (on néglige les frottements de l'air)



$$\underbrace{Ec_M(B)}_{\frac{1}{2}mv_B^2} - \underbrace{E_{cM}(A)}_{\frac{1}{2}mv_A^2=0} = \sum W_i = W_P = \vec{P}.\vec{AB} = m\vec{g}.\vec{AB} = mgh.$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Leftrightarrow v_B^2 = 2gh$$

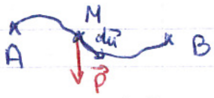
$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

AN: $g \simeq 10\,m/s^2$ pour $h = 20m$, $v_B \simeq 20 m.s^{-1} \simeq 72\,km/h$

et si $v_A \neq 0$? => ~~compl~~ plus

c) Energie potentielle, Énergie mécanique.

Considérons un point matériel M soumis uniquement à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ se déplaçant entre A et B

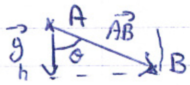


Le travail de $\vec{P}$ entre A et B est :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{P}.d\vec{u} = \int_A^B m\vec{g}.d\vec{u} = m\vec{g}.\int_A^B d\vec{u} = m\vec{g}.\vec{AB}$$

Donc W_{AB} est indépendant du chemin suivi entre A et B ! On dit que le poids est une force conservative !

De plus $W_{AB} = m\vec{g}.\vec{AB} =$



$\vec{g}.\vec{AB} = g \times AB\cos\theta = g[h(A) - h(B)]$

altitude de A — altitude de B

$$W_{AB} = mg(h(A) - h(B)) = mgh(A) - mgh(B)$$

mgh est appelée Énergie potentielle de pesanteur. Le travail du poids entre A et B est la différence d'énergie potentielle de M entre ces deux points.

Résumé : Le travail d'une force conservative entre deux points ne dépend pas du chemin suivi et est égal à la différence d'énergie potentielle entre ces deux points.

E_p(pesanteur) = mgh

E_p(ressort) = $\frac{1}{2}kx^2$

$$W_{AB} = E_p(A) - E_p(B).$$ Pour une force conservative !

L'énergie mécanique est définie comme la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

$$E_m = E_c + E_p$$

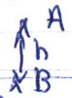
Pour un point matériel soumis uniquement à forces conservative $\vec{F}$ associée à une énergie potentielle E_p, la variation d'énergie mécanique entre A et B est :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = E_c(B) + E_p(B) - E_c(A) - E_p(A)$$
$$= \underbrace{E_c(B) - E_c(A)}_{W_{A\to B}(\vec{F})} + \underbrace{E_p(B) - E_p(A)}_{= -(E_p(A) - E_p(B)) = -W_{A\to B}(\vec{F})} = 0$$

$$\boxed{\Delta E_m = 0}$$ L'énergie mécanique est conservée !

=> Les forces conservatives conservent l'énergie mécanique.

Application : Un objet de masse m tombe d'une hauteur h sans vitesse initiale, Calculer sa vitesse au moment de l'impact. (pas de frottements)



$$\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_m(B) = E_m(A) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\times 0 = \frac{1}{2}m\times 0^2 + mgh$$

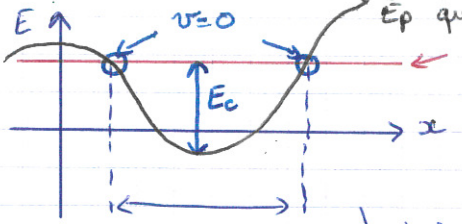
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 = \cancel{m}gh \qquad \boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Si $v_A \neq 0$ $\quad \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh \Leftrightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2gh \quad \boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}}$

⚠ Les frottements ~~de l'air~~ sont des forces non-conservatives.

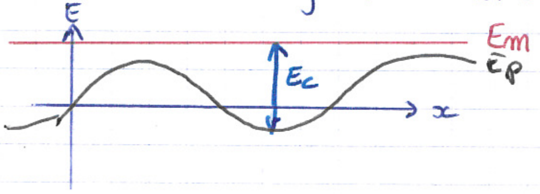
d) Interprétation graphique (dans le cas d'un mouvement à 1D)

On considère un mouvement conservatif à une dimension suivant x on peut tracer un graph énergétique :



zone autorisée : $E_m > E_p$ car $E_m - E_p = E_c = \frac{1}{2} m v^2 > 0$

Dans ce cas la trajectoire est bornée (à la zone autorisée)



Tous les x sont autorisés, la trajectoire n'est pas bornée.

e) Équilibre et stabilité

* Une position d'équilibre est une position pour laquelle $\vec{a} = 0$ donc $\sum \vec{F}_{appliquées} = 0$

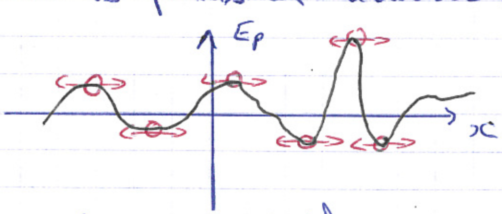
Pour une force conservative on doit avoir

$\vec{F} = 0$ et donc $\forall\, d\vec{x}$ (petit) $\vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 = -E_p(x+dx) + E_p(x)$

d'où $\dfrac{-E_p(x+dx) + E_p(x)}{dx} = 0$

donc $\boxed{\dfrac{dE_p(x)}{dx} = 0}$ on remarque que $\boxed{F = -\dfrac{dE_p}{dx}}$ (10)

Les positions d'équilibre sont les points où la dérivée de l'énergie potentielle s'annule



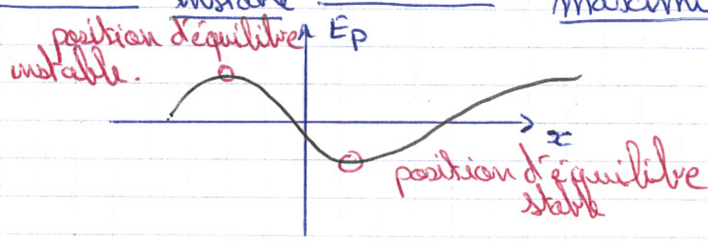
* On dit qu'une position d'équilibre est stable si la force subie autour de cette position d'équilibre tend à ramener le point matériel vers la position d'équilibre.

On doit avoir :

$\left.\begin{array}{ll} F(x+dx) > 0 & \text{si } dx < 0 \\ F(x+dx) < 0 & \text{si } dx > 0 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\dfrac{F(x+dx) - \overbrace{F(x)}^{=0}}{dx}}_{\frac{dF}{dx}} < 0$

or $F = -\dfrac{dE_p}{dx}$ donc on a $\boxed{\dfrac{d^2E_p}{dx^2} > 0}$ $\qquad \dfrac{dF}{dx} < 0$

Une position d'équilibre est stable ssi c'est un minimum d'énergie potentielle.
instable / maximum



III] Solide en rotation autour d'un axe fixe.

1) Moment cinétique.

a) Définition.

Le moment cinétique $\vec{\sigma}$ d'un point matériel M de quantité de mouvement $\vec{p}$ par rapport à un point O est :

$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\underset{\sim}{\vec{v}}$ vitesse de M.

b) Pour un solide

$\|\vec{\sigma}\|$ en $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

Le moment cinétique d'un solide par rapport à un point O est la somme des moments cinétiques de ses points par rapport à O

$\vec{L}_O = \sum \vec{\sigma}_O = \iiint_{solide} \vec{OM} \wedge \vec{v}\, \underset{dm}{\rho\, d\tau}$