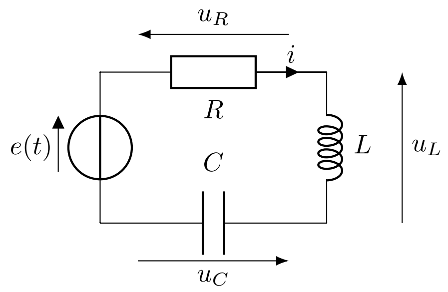
DS5 : Électricité – corrigé

Exercice 1 : Circuit RLC série



I - Réponse à un échelon de tension

1. Pour $t < 0$ on est en régime permanent, la bobine se comporte comme un fil donc $u_L(0^-) = 0$ et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i(0^-) = 0$. On en déduit que $u_R(0^-) = Ri(0^-) = 0$ et donc la loi des mailles donne $u_C(0^-) = 0$.
2. La continuité de l'intensité qui traverse la bobine impose $i(0^+) = i(0^-) = 0$ donc $u_R(0^+) = 0$ et la continuité de la tension aux bornes du condensateur impose $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$. La loi des mailles donne enfin $u_L(0^+) = E$.
3. On applique la loi des mailles : $E = u_R + u_C + u_L$, la loi d'Ohm : $u_R = Ri$, du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}\,u_C}{\mathrm{d}\,t}$ et de la bobine $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$. En combinant les trois (en partant de la loi de la bobine) on obtient l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}^2\,u_L}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}\,u_L}{\mathrm{d}\,t} + \frac{1}{LC}u_L = 0$$
4. La pulsation propre du circuit est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité est $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
5. D'après le graphique on trouve $E \simeq 4\,\mathrm{V}$, $\omega_0 = 2\pi f \simeq 10^5\,\mathrm{rad/s}$ et $Q \simeq 10$.
6. On a $\omega_0^2 \simeq 10^{10}\,\mathrm{s}^{-2} = \frac{1}{LC}$. On peut donc par exemple prendre $L = 0{,}1\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Dans ces conditions on a $R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{0.1}{1\times10^{-3}}} = 1\,\Omega$.

II - Régime sinusoïdal forcé

7. $\underline{e}(t) = Ee^{j(\omega t+\varphi)}$.
8. On a un pont diviseur de tension formé par l'impédance Z_L en série avec Z_C et Z_R. On a donc
$$\underline{u}_L = \underline{e}\frac{Z_L}{Z_L + Z_R + Z_C} = \underline{e}\frac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R}$$
Avec les expressions de ω_0 et Q données on trouve bien :
$$\underline{u}_L = \underline{\mathrm{e}}\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
9. On a :
$$U(\omega) = |\underline{u}_L| = E\frac{Q\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$
On a $U(\omega_0) = QE$
10. Lorsque le facteur de qualité est grand, on a $U(\omega_0) > E$ il se produit un phénomène de résonance
11. Le déphasage est $\varphi = \arg(\underline{u}_L) - \arg(\underline{e})$ soit :
$$\varphi = \arg\left(\frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$
Lorsque $\omega = \omega_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : Dipôle inconnu

1. On trouve graphiquement $U_m = 5\,\mathrm{V}$ et $V_m = 3{,}5\,\mathrm{V}$.
2. La période du signal est $T = 6{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$ et donc la pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\,\mathrm{rad/s}$.
3. La tension v augmente avant la tension u donc elle est en avance et φ est positif.
4. Graphiquement on trouve $\Delta t = 0{,}8 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$ et le déphasage est $\varphi = 2\pi\frac{0.8}{6.3} \simeq 0{,}8\,\mathrm{rad}$.
5. La loi d'Ohm donne directement $\underline{u} = R\underline{i}$.
6. Aux bornes du dipôle D on a $\underline{v} = \underline{Z}\underline{i}$. En utilisant l'expression de $\underline{i}$ de la question précédente, on obtient : $\underline{Z} = R\frac{\underline{v}}{\underline{u}}$.
7. La question précédente donne directement $|\underline{Z}| = R\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|} = R\frac{V_m}{U_m} = 70\,\Omega$. Et $\arg(\underline{Z}) = \arg(R) + \arg(\underline{v}) - arg(\underline{u}) = \arg(\underline{v}) - arg(\underline{u}) = \varphi$.
8. On a $X = Z\cos\varphi = 48{,}8\,\Omega$ et $Y = Z\sin\varphi = 50{,}2\,\Omega$. Pour fabriquer ce dipôle on peut utiliser une résistance de $48{,}8\,\Omega$ en série avec une bobine d'inductance L telle que $L\omega = 50{,}2\,\Omega$ soit $L \simeq 0{,}5\,\mathrm{H}$ (C'est une grosse bobine !).

Exercice 3 : Atténuateur

1. Si le condensateur C_2 est absent et Z_1 est une résistance R_1, on a un pont diviseur de tension et $v_s = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}v_e$.
   Donc $k = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ et on trouve finalement $R_1 = \dfrac{1-k}{k}R_2$
2. Si on garde $Z_1 = R_1$. L'impédance Z_2 équivalente au dipôle formé par R_2 et C_2 en parallèle est $Z_2 = \dfrac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$.
   On a toujours un pont diviseur de tension formé par Z_1 et Z_2 et $v_s = \dfrac{Z_2}{R_1 + Z_2}v_e = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2 + jR_1R_2C_2\omega}v_e$.
   L'atténuation de la tension d'entrée dépend donc de la pulsation ω (quelle que soit la valeur de R_1).
3. Lorsque $\omega \to 0$ on retrouve le résultat de la première question : $v_s = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}v_e$ (On s'y attend, car à basse fréquence le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, tout se passe comme s'il était absent).
   Lorsque $\omega \to \infty$, $v_s \to 0$. On a donc un filtre passe-bas.
4. L'impédance du dipôle Z_1 est $Z_1 = \dfrac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$.
   Pont diviseur de tension : $v_s = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}v_e = kv_e$ donc $k = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$.
   De manière similaire à la question 1 on trouve $Z_1 = \dfrac{1-k}{k}Z_2$, ou $\dfrac{1}{Z_1} = \dfrac{k}{1-k}\dfrac{1}{Z_2}$ soit $\dfrac{1}{R_1} + jC_1\omega = \dfrac{k}{1-k}\left(\dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega\right)$
   En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve le résultat demandé soit : $R_1 = \dfrac{1-k}{k}R_2$ et $C_1 = \dfrac{k}{1-k}C_2$.