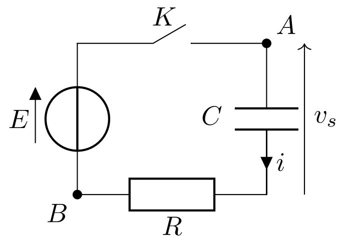
DM2 : Circuits électriques en régime transitoire – corrigé

Problème : Charge d'un condensateur à travers une résistance (CCP 2005)

Première partie : Étude de la charge du condensateur



1. Au bout d'un temps très long après avoir fermé l'interrupteur, on atteint le régime permanent et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. L'intensité qui circule dans le circuit est nulle : $i = 0$ et la tension v_s est donnée par la loi des mailles (+ loi d'Ohm) : $v_s = E - Ri = E$.
2. τ est en secondes. On peut le montrer de la manière suivante :

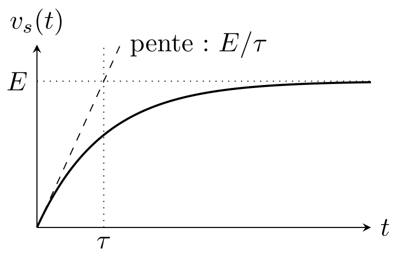
   On utilise la formule qui relie la tension aux bornes d'un condensateur à l'intensité qui le traverse : $i = C\dfrac{du}{dt}$, ce qui nous indique que C est en A.s.V^{-1}. Donc RC est en Ω.A.s.V^{-1}, or d'après la loi d'Ohm, $R = \dfrac{U}{i}$, Ω=V.A^{-1}. Donc finalement RC est en secondes.
3. 3.1. — La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent $v_s = E - Ri$

   — Dans le condensateur, on a $i = C\dfrac{dv_s}{dt}$

   En combinant les deux, on obtient :
$$\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\tau}v_s = \frac{E}{\tau}.$$

   3.2. On résout (comme d'habitude) l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales et on trouve finalement :
$$v_s(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$
   Lorsque $t \to \infty$, $\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) \to 0$ et $v_s(t)$ tend vers E. Cette valeur est la même que celle trouvée dans la question 1.

   3.3. Graphique :



   À $t = 0$ la pente de la courbe est $\dfrac{v_s(t)}{dt}(t = 0) = \dfrac{E}{\tau}$

   La tangente d'équation $v = \dfrac{E}{\tau}t$ intersecte l'asymptote d'équation $v = E$ en $t = \tau$.

   3.4. On cherche t_1 tel que $v_s(t_1) = 0.99 \times E$. En utilisant l'expression de $v_s(t)$ on obtient $\exp(-t_1/\tau) = 0.01$ d'où on tire $t_1 = -\tau \ln(0.01)$, soit $t_1 \simeq 4.6\tau$
4. L'intensité est donnée par $i = C\dfrac{dv_s}{dt} = \dfrac{E}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Deuxième partie : Étude énergétique de la charge du condensateur

5. 5.1. Lorsque la charge est terminée, l'énergie E_c emmagasinée dans le condensateur est : $E_c = \dfrac{1}{2}CE^2$

5.2. L'énergie totale fournie par le générateur est obtenue en intégrant la puissance instantanée fournie $P(t) = E \times i(t) = \dfrac{E^2}{R}\exp(-t/\tau)$ entre 0 et ∞

$$E_g = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R}\exp(-t/\tau)dt = \frac{E^2}{R}\Big[-\tau\exp(-t/\tau)\Big]_0^{\infty} = \tau\frac{E^2}{R} = CE^2$$

On peut également déterminer l'énergie E_r dissipée par la résistance au cours de la charge :

$$E_r = \int_0^{\infty} Ri(t)^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R}\exp(-2t/\tau)dt = \frac{E^2}{R}\Big[-2\tau\exp(-2t/\tau)\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{2}CE^2$$

On vérifie bien la conservation de l'énergie car $E_g = E_c + E_r$.

5.3. Le rendement de la charge du condensateur est $\rho = \dfrac{E_c}{E_g} = \dfrac{1}{2}$

6. 6.1. La première phase de charge est identique à celle étudiée dans la partie précédente en remplaçant E par $E/2$. Donc $E_{g1} = \dfrac{1}{4}CE^2$ et $E_{c1} = \dfrac{1}{8}CE^2$

6.2. Au cours de la seconde phase de charge l'équation différentielle vérifiée par $v_s(t)$ est identique à celle trouvée dans la partie précédente, soit :

$$\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\tau}v_s = E.$$

En tenant compte des conditions initiales, on trouve l'expression de $v_s(t)$ suivante :

$$v_s(t) = \frac{E}{2}\left(2 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

6.3. L'intensité $i(t)$ qui traverse le circuit pendant la deuxième phase de charge est $i(t) = C\dfrac{dv_s}{dt} = \dfrac{E}{2R}\left(\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$

6.4. En utilisant les expressions de v_s et de i en fonction du temps, déterminer :

- L'énergie fournie par le générateur au cours de la seconde phase de charge est :

$$E_{g2} = \int_0^{\infty} E \times i(t)dt = \frac{E^2}{2R}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)dt = \frac{E^2}{2R}\Big[-\tau\exp(-t/\tau)\Big]_0^{\infty} = \frac{CE^2}{2}$$

- L'énergie emmagasinée par le condensateur au cours de la seconde phase de charge est :

$$E_{c2} = E_c(\text{finale}) - E_c(\text{initiale}) = \frac{1}{2}CE^2 - \frac{1}{8}CE^2 = \frac{3}{8}CE^2$$

6.5. Le rendement final de la charge du condensateur est $\rho' = \dfrac{E_c}{E_g} = \dfrac{E_c}{E_{g1} + E_{g2}} = \dfrac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{3}{4}CE^2} = \dfrac{2}{3}$

7. Pour faire tendre le rendement de la charge du condensateur vers 1, il faudrait augmenter le nombre de paliers de tension de manière à ne jamais charger le condensateur sous une tension trop élevée. Idéalement, il faudrait faire varier continûment la tension aux bornes de C.