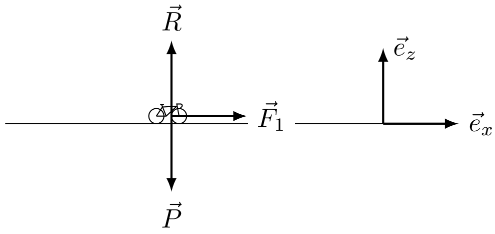
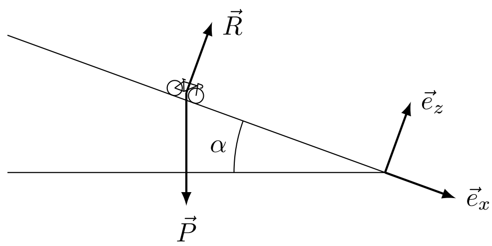
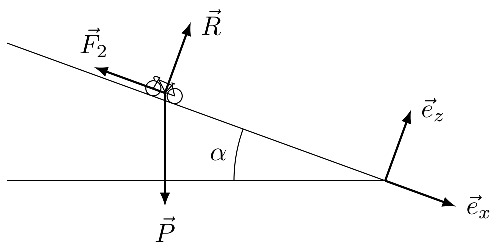
DS5 : Mécanique – Autour du vélo – corrigé

I – Sans les frottements de l'air

1. On ne peut pas négliger les frottements entre les roues du vélo et la route car s'il n'y avait pas de frottements le vélo ne pourrait pas avancer sur la route (il déraperait).
2. 

3. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un objet qui n'est soumis à aucune force est soit immobile, soit en translation rectiligne uniforme. Le référentiel terrestre a son origine au centre de la Terre et trois axes orientés vers des points fixes à la surface de la Terre.
4. Dans le repère $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, l'accélération du cycliste s'exprime comme $\vec{a} = m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z)$. Or, on sait que la route est horizontale et donc que $z(t) =$ constante donc $\ddot{z} = 0$. On a alors $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$. On applique le PFD au cycliste, et on obtient $m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1$. En projetant sur $\vec{e}_x$ on obtient $\ddot{x} = F_1/m$.
5. En intégrant l'équation précédente, on obtient $\dot{x}(t) = \frac{F_1}{m}t$ et $d(t) = \frac{F_1}{2m}t^2$.
6. On a $v(t) = at$. Le temps mis pour atteindre la vitesse V est $t = V/a$. On obtient $t = 12\,\mathrm{s}$. La distance parcourue pendant la phase d'accélération est $d = 78\,\mathrm{m}$
7. Comme le cycliste ne freine pas et ne pédale pas, la composante tangentielle de la force exercée par la route sur le cycliste est forcément nulle. (Il faut aussi négliger les frottements au niveau des axes des roues, et la résistance des roues au roulement)
8. 

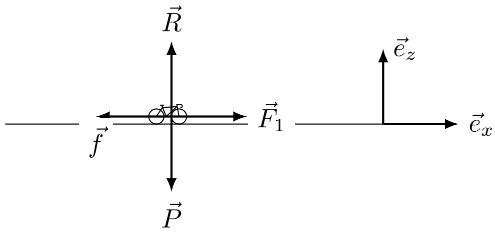
9. On projette $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$ et on applique le PFD pour obtenir finalement $\vec{a} = g\sin(\alpha)\vec{e}_x$.
10. On intègre à nouveau deux fois l'équation précédente et on obtient $v(t) = g\sin(\alpha)t$ et $d(t) = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2$.
11. Le temps mis par le cycliste pour parcourir une distance d est $t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin(\alpha)}}$. On fait l'application numérique avec les donnée du problème et on trouve $t \approx 108\,\mathrm{s}$. La vitesse atteinte en bas de la pente est : $v = g\sin(\alpha)t \approx 184\,\mathrm{m/s}$
12. On dit que le cycliste monte a vitesse constante, donc son accélération est nulle et d'après le PFD, la somme des forces appliquées est nulle.



13. La projection des forces précédentes sur l'axe $\vec{e}_x$ donne le résultat attendu.
14. La puissance p fournie par la force $\vec{F}_2$ est $p = \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_0 = F_2 v_0 = mg\sin(\alpha)v_0$. Avec les données numériques fournies, on trouve une puissance $p \approx 380\,\mathrm{W}$ ce qui correspond à la valeur donnée par l'énoncé.

II – Avec les frottements de l'air

15. k est en $\mathrm{N\,m^{-2}\,s^2}$
16. La somme des forces appliquées au cycliste est nulle car sa vitesse est constante.



17. La puissance p fournie par le cycliste est $p = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_0 = F_1 v_0$. Or comme la somme des forces appliquées au cycliste est nulle, on a $\|F_1\| = \|f\| = kv_0^2$. On a donc $p = kv_0^3$. En utilisant les données de l'énoncé, on trouve une valeur de k compatible avec ce qui est donnée.
18. On ajoute aux forces de la question 8 la force de frottement fluide $\vec{f}$ opposée à la vitesse.
19. On applique le PFD, que l'on projette sur l'axe $\vec{e}_x$ et on obtient l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = mg\sin(\alpha) - kv^2$$

20. Lorsque la vitesse du cycliste est nulle, la force de frottement est nulle et son accélération est positive. Lorsque sa vitesse augmente, la force de frottement augmente et l'accélération diminue (la vitesse augmente moins vite). Lorsque la force de frottement est suffisamment grande, l'accélération est nulle et la vitesse du cycliste est constante. Dans ces conditions on aura :

$$\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = 0 = mg\sin(\alpha) - kv_{\text{lim}}^2 \quad \text{soit} \quad v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg\sin(\alpha)}{k}}$$

21. Avec les valeurs numériques données dans l'énoncé, on trouve $v_{\text{lim}} \approx 26\,\mathrm{m/s}$ soit environ $94\,\mathrm{km/h}$
22. Si le cycliste pédale dans la descente il fournit produit une force $\vec{F}$ supplémentaire de puissance $p = Fv_{\text{lim}}$ avec $p \approx 400\,\mathrm{W}$. On trouve la vitesse limite atteinte en écrivant que la puissance totale des forces appliquées au cycliste est nulle, c'est à dire :

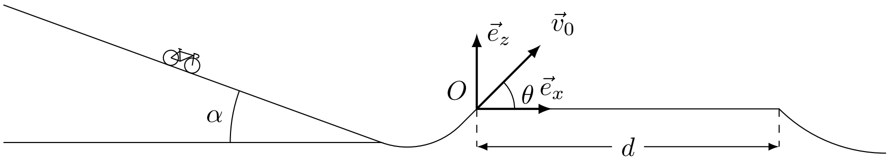
$$p + mg\sin(\alpha)v_{\text{lim}} - kv_{\text{lim}}^3 = 0$$

dont la résolution numérique donne $v_{\text{lim}} \approx 27{,}5\,\mathrm{m/s}$. Ce qui n'est pas franchement différent de la valeur atteinte sans pédaler.

23. Lorsque $\alpha = 90°$ le cycliste est en chute libre. Dans ces conditions, la vitesse limite vaut : $v_{\text{lim}} \approx 63\,\mathrm{m/s}$

III – Cyclisme acrobatique

Le cycliste est placé dans la situation (délicate) représentée ci-dessous. Il se trouve dans une descente où il a atteint sa vitesse limite v_0 et s'apprête à s'engager sur un tremplin formant un angle $\theta = 45°$ avec l'horizontale. On suppose que le cycliste quitte le tremplin au point O avec sa vitesse v_0. *On néglige les frottements de l'air* à partir du moment où le cycliste a quitté le tremplin.



24. Lorsque le cycliste a quitté le tremplin, la seule force qu'il subit est son poids $\vec{P}$.
25. On applique le PFD, on trouve alors que $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e}_z = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z$. En intégrant deux fois cette équation et en tenant compte de la vitesse initiale, on trouve :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\theta)t \\ z(t) = v_0\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

26. On cherche la position x à laquelle le cycliste touche à nouveau le sol. On commence par résoudre $z(t_f) = 0$ pour trouver le temps auquel il retombe, on trouve $t_f = \frac{2v_0\sin(\theta)}{g}$ que l'on injecte dans l'expression de $x(t)$ et on obtient finalement $d = x(t_f) = \frac{2v_0^2\sin(\theta)\cos(\theta))}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$.
27. Avec $v_0 = 100\,\mathrm{km/h} = 28\,\mathrm{m/s}$, on trouve $d = 79\,\mathrm{m}$.