

## Les incertitudes dans les mesures physiques

### 1 La métrologie

#### 1.1 Qu’est ce que la métrologie ?

Lorsque l’on effectue une mesure, celle-ci est inévitablement soumise à des imperfections. Pour rendre compte de ces problèmes de mesure, on doit associer chaque résultats à une incertitude.

La métrologie est la science des mesures et de ses applications. Elle s’intéresse notamment les méthodes de détermination d’erreurs et d’incertitudes lors d’un mesurage. Il existe des normes qui fixent les règles de calcul d’incertitudes ainsi que le vocabulaire à employer.

#### 1.2 Mesurage et mesurande

**Mesurage** : Processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l’on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

En pratique on utilise généralement le mot *mesure* à la place de mesurage.

**Mesurande** : Propriété d’un phénomène, d’un corps ou d’une substance que l’on peut exprimer quantitativement sous forme d’un nombre et d’une référence.

Il s’agit tout simplement de la grandeur physique à mesurer (ex : température, pression, longueur etc...)

**Grandeur d’influence** : Grandeur qui, lors d’un mesurage direct, n’a pas d’effet sur la grandeur effectivement mesurée, mais a un effet sur la relation entre l’indication et le résultat de mesure.

L’exemple le plus courant est la température qui a souvent une influence sur les appareils de mesure et qui constitue donc une grandeur d’influence car elle n’a pas nécessairement un effet sur la grandeur effectivement mesurée.

#### 1.3 Valeur vraie et erreur

**Valeur vraie** : Valeur que l’on devrait obtenir si toutes les conditions de mesure sont parfaites.

Il est, en pratique, impossible de remplir ces conditions, c’est la raison pour laquelle nous attribuons une incertitude de mesure à chaque valeur mesurée.

**Erreur** : L’erreur correspond à la différence entre le résultat de la mesure et la valeur vraie.

Il existe deux catégories d’erreur.

#### 1.4 Erreur aléatoire et erreur systématique

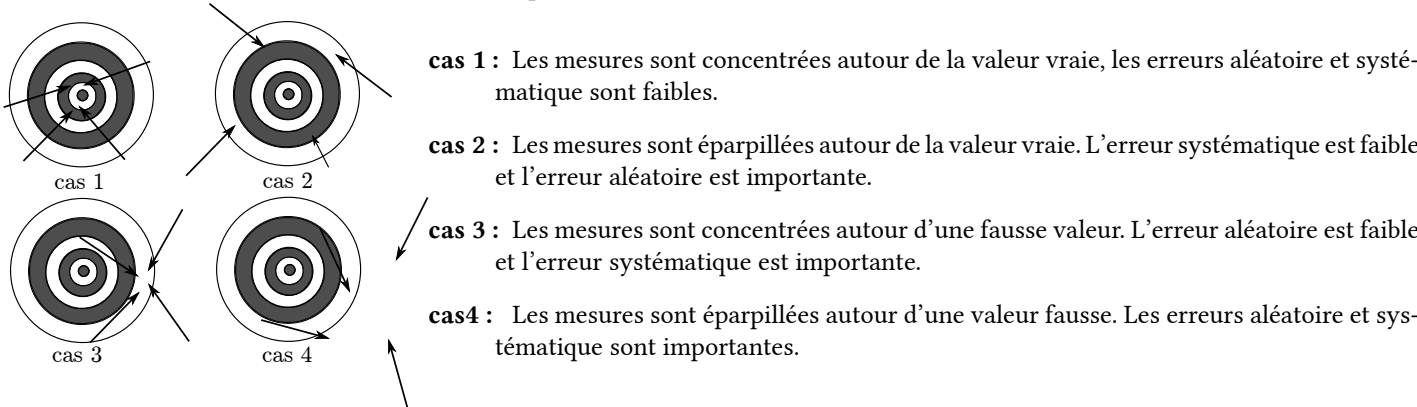
**Erreur aléatoire** : Composante de l’erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, varie de façon imprévisible.

Si nous mesurons par exemple un temps à l’aide d’un chronomètre, le temps de réaction sera différent à chaque fois et le déclenchement différera pour chaque mesure : c’est une erreur aléatoire. Elle peut être déterminée par une étude statistique que nous détaillerons plus tard.

**Erreur systématique** : Composante de l’erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible.

Il s’agit souvent d’erreurs dues à l’imprécision des appareils qui reste constante quelque soit la mesure ou bien d’erreur de méthode telle qu’une erreur de procédure, de calcul, de zéro mal défini... Ce type d’erreur décalera *systématiquement* la résultat de la mesure de la valeur vraie d’une certaine constante ce qui rend impossible sa détermination par des méthodes statistiques.

Pour comprendre les effets des erreurs aléatoires et systématiques, nous pouvons utiliser l’analogie de la cible. Les flèches représentent les mesures et le centre de la cible correspond à la valeur vraie :



#### 1.5 Présentation d’un résultat

Soit  $x$  un mesurande et  $X$  la valeur vraie associée. On notera  $\delta x$  l’incertitude qui est une estimation chiffrée de l’erreur aléatoire. L’incertitude relative est alors définie par  $\frac{\delta x}{|\bar{x}|}$  en % avec  $\bar{x}$  la meilleur estimation de la valeur vraie. On présentera la mesurande de la façon suivante :

$$x = (\bar{x} \pm \delta x) \text{ unité} \quad \text{ou} \quad x = \bar{x} \text{ unité} \pm \frac{\delta x}{|\bar{x}|} \%$$

Si l’erreur systématique est faible, alors la valeur vraie  $X$  se trouve très probablement dans l’intervalle compris entre  $\bar{x} - \delta x$  et  $\bar{x} + \delta x$ . L’incertitude étant le résultat d’une estimation, on l’écrira avec **au maximum deux chiffres significatifs**.

### 2 Évaluation des incertitudes aléatoires

#### 2.1 Incertitude de type A : incertitude de répétabilité

##### 2.1.1 Définition

Lorsqu’on peut faire un grand nombre  $n$  de mesurages pour un même mesurande, on détermine l’incertitude de type A à partir des  $n$  valeurs  $x_1, x_2, \dots$  et  $x_n$  obtenues (la valeur vraie est notée  $X$ ).

##### 2.1.2 Valeur moyenne : meilleure estimation de la valeur vraie

La valeur moyenne  $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$  de toutes les mesures correspond à la meilleure estimation de la valeur vraie.

##### 2.1.3 Écart-type

L’écart-type  $\sigma$  correspond à la dispersion des mesures autour de la valeur moyenne. On évalue une incertitude de type A à partir de l’écart-type que l’on évalue à partir de la formule :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

##### 2.1.4 Incertitude sur la valeur moyenne

On calcule l’incertitude  $\delta x$  sur la valeur moyenne  $\bar{x}$  (qui correspond à la meilleure estimation de  $X$ ) à l’aide de la formule :  $\delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ce résultat montre que plus le nombre  $n$  de mesures est important, plus l’erreur sur la moyenne sera faible. Il existe des logiciels qui permettent de réaliser les calculs d’écart-type. La plupart des calculatrices en sont également capables.

Lorsqu’on effectue  $n$  mesures, le résultat final s’écrit :  $x = \left( \bar{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \right) \text{ unité}$

##### 2.1.5 Remarques

Il y a environ 30 % de chances pour que la valeur vraie ne soit pas comprise dans l’intervalle  $\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}$  et  $\bar{x} + \sigma_{\bar{x}}$ . Par contre il y a 95 % de chances pour qu’elle soit dans l’intervalle  $\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}}$  et 99 % de chances pour qu’elle soit dans l’intervalle  $\bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}}$ . On parle d’intervalle de confiance à 95 % ou 99 %

#### 2.2 Incertitude de type B

L’incertitude de type B s’applique lorsqu’on effectue un mesurage unique. Il est alors nécessaire d’estimer l’erreur :

- s’il s’agit d’une erreur intrinsèque à l’appareil de mesure, l’incertitude de mesure est généralement fournie dans la notice de l’appareil.
- s’il s’agit d’une erreur due à l’expérimentateur (déclenchement de chronomètre, mesure de distance, etc...), il faut en faire une estimation. Dans le cas de la lecture d’un appareil gradué, l’incertitude de mesure est généralement d’une demi-graduation.

### 3 Propagation des incertitudes

#### 3.1 Définition

Il arrive très souvent que le résultat de plusieurs mesurages  $x_1, \dots, x_n$  soient utilisés pour calculer une autre grandeur  $q$ . L’incertitude sur  $q$  dépend alors de l’incertitude sur les  $n$  autres grandeurs  $x_i$  : on dit qu’il y a propagation des incertitudes.

3.2 Cas général  $q = f(x_1, x_2 \dots)$

Si les erreurs sur les  $x_i$  mesures sont indépendants, on a :  $\delta q = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \delta x_i^2}$

3.3 Somme ou d’une différence

Si  $q$  est la somme de deux autres grandeurs  $q = x_1 + x_2$ , alors  $\delta q = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$ .  
Ce résultat reste le même dans le cas d’une différence.

3.4 Multiplication

Si  $q$  est le produit de deux autres grandeurs  $q = Cx_1x_2$  alors

$$\delta q = C\sqrt{(x_2\delta x_1)^2 + (x_1\delta x_2)^2}$$

ou

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{x_2}\right)^2}$$

3.5 Cas d’une division

Si  $q$  est le quotient de deux autres grandeurs  $q = C\frac{x_1}{x_2}$  alors :

$$\delta q = C\sqrt{\left(\frac{1}{x_2}\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2^2}\delta x_2\right)^2}$$

ou

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{x_2}\right)^2}$$

On retrouve la même relation pour  $\frac{\delta q}{q}$  que dans le cas d’une multiplication.