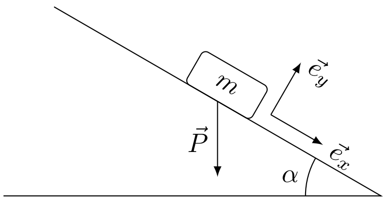
DS6 : Mécanique et cinétique chimique — corrigé

Exercice 1 : Glissement sur un plan incliné (TD12)

1. Lorsqu'on néglige les frottements, la seule force qui s'applique au mobile est son poids $\vec{P}$
2. On considère un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ avec l'origine O au point de départ du mobile, l'axe x dirigé suivant la pente et l'axe y perpendiculaire à la pente. En projetant le PFD sur l'axe x on obtient :

$$ma_x = m\ddot{x} = P\sin\alpha \Leftrightarrow \ddot{x} = g\sin(\alpha)$$

En intégrant l'équation deux fois et en prenant en compte les conditions initiales on trouve $x(t) = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2$

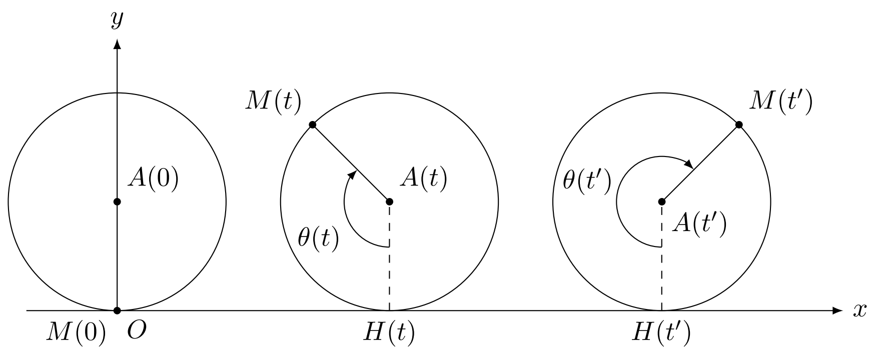


On considère maintenant qu'il existe des frottements solides entre le mobile et le plan incliné caractérisés par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement dynamique μ_d

3. Pour que le mobile initialement immobile se mette en mouvement, il faut que $T > \mu_s N \Leftrightarrow \frac{T}{N} > \mu_s$. Comme le mobile est immobile (!) la somme des forces appliquées est nulle ce qui donne $T = mg\sin\alpha$ et $N = mg\cos\alpha$. Donc le mobile se met à glisser lorsque l'angle α est tel que $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha > \mu_s$ soit $\alpha_m = \arctan\mu_s$
4. Pour un angle $\alpha > \alpha_m$, on détermine l'équation du mouvement comme à la question 2), en prenant en compte la force $T = -\mu_d N = -\mu_d mg\cos\alpha$ suivant l'axe x. On trouve alors $x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)t^2$.

Exercice 2 : La cycloïde

I. **Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.**



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Comme la roue roule sans glisser sur le sol, la distance parcourue est égale à la longueur de l'arc de cercle compris entre $M(t)$ et $H(t)$, soit $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. En projetant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur les axes Ox et Oy on obtient $\overrightarrow{AM} = -R\sin(\theta)\vec{u}_x - R\cos(\theta)\vec{u}_y$.
3. On décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$. Or on a déja vu que $\overrightarrow{OH} = R\theta(t)\vec{u}_x$, on voit clairement sur le schéma que $\overrightarrow{HA} = R\vec{u}_y$ et on a trouvé $\overrightarrow{AM}$ à la question précédente. En additionnant les trois on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = [R\theta(t) - R\sin(\theta)]\,\vec{u}_x + [R - R\cos(\theta)]\,\vec{u}_y$$

Ce qui correspond bien aux équations demandées.

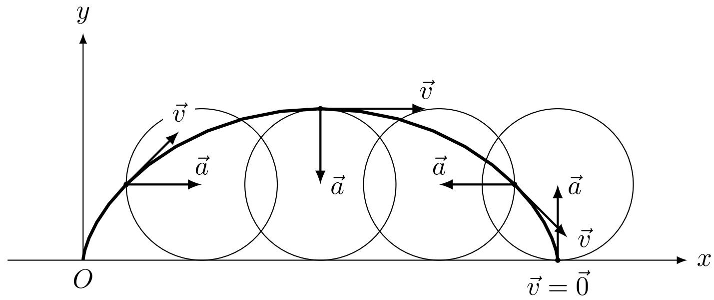
II. **Vecteur vitesse.**

4. La vitesse du point A est la même que celle du point H et est constante. On a $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = v_0\vec{u}_x$. Or d'après la question I..1, $\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_x$. La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ est donc constante est vaut $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$.
5. Cette question est évidente, comme la distance AM est fixe égale à R, le mouvement est circulaire. En outre on vient de montrer que la vitesse de rotation est constante. Le mouvement est donc également uniforme.

6. Les composantes du vecteur vitesse s'obtiennent par dérivation de celles du vecteur position, on obtient :

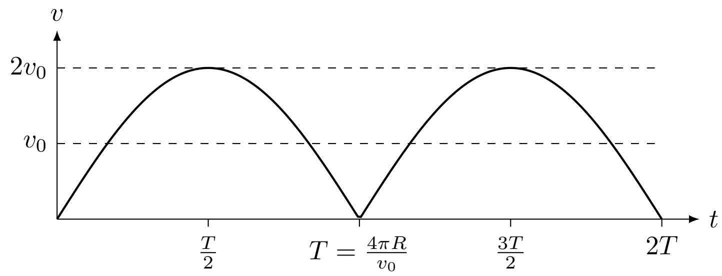
$$\begin{cases} v_x(t) = R\dot{\theta}(t)\,[1-\cos\theta(t)] \\ v_y(t) = R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

7. Schéma :



8. La norme v de $\vec{v}$ est : $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = R\dot{\theta}\sqrt{\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2}$ soit $v = v_0\sqrt{2-2\cos\theta}$

9. On a $1-\cos\theta = 1-\cos 2\frac{\theta}{2} = 1-(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}) = 1-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$
L'expression précédente se simplifie alors en $v = 2v_0\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$



III. **Vecteur accélération.**

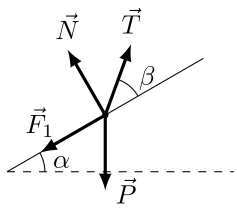
10. On obtient les composantes du vecteur accélération en dérivant celles du vecteur vitesse, on obtient :

$$\begin{cases} a_x = R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ a_y = R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

11. Voir schéma précédent.
12. La norme de v augmente pour $\theta \in [0,\pi]$ et elle diminue pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$
13. Le point correspondant à $\theta_4 = 2\pi$ est un *point de rebroussement*, la vitesse de M est nulle alors que l'accélération ne l'est pas.
14. La norme a du vecteur accélération vaut $a = R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R}$ et est donc constante. Pour le pneu en question elle vaut : $a \simeq 3700\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
15. On peut exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme $\vec{a} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{AM} = \dot{\theta}^2\overrightarrow{MA}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc effectivement toujours dirigé de M vers A.

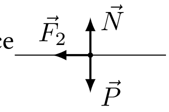
Exercice 3 : Saut à ski

1. Schéma : (il ne faut pas oublier la composante $\vec{N}$ normale de la réaction du sol)

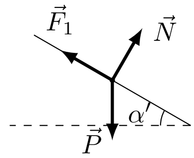


2. L'énoncé indique que le skieur remonte la piste *à vitesse constante*. Celà indique que son accélération est nulle, et d'après le PFD que la somme des forces appliquées est également nulle.
3. En projetant l'ensemble des forces sur l'axe $\vec{e}_x$ parallèle à la piste, orienté vers la droite, on a $-F_1 + T\cos\beta - P\sin\alpha = 0$.
D'où $T = \frac{F_1 + P\sin\alpha}{\cos\beta}$. L'application numérique donne $T = 486\,\mathrm{N}$

4. Les forces appliquées au skieur sont : son poids $\vec{P}$, la réaction normale $\vec{N}$ de la piste et la force de frottement $\vec{F_2}$



5. Le PFD appliqué au skieur et projeté sur l'axe Ox horizontal orienté vers la droite donne : $m\ddot{x} = -F_2$. C'est l'équation différentielle demandée.
6. Une première intégration de l'équation différentielle donne $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) - \frac{F_2}{m}t$. On l'intègre une seconde fois pour obtenir $x(t) = \dot{x}(0)t - \frac{F_2}{2m}t^2 + x(0)$. Le skieur s'arrête lorsque sa vitesse est nulle, c'est à dire au temps $t_f = \frac{m\dot{x}(0)}{F_2}$ et il parcours la distance $d = x(t_f) - x(0) = \frac{m\dot{x}^2(0)}{2F_2}$. A.N. : $d \simeq 9{,}8\,\mathrm{m}$
7. Au début de la descente, la vitesse du skieur est faible donc la force de frottement également, la résultante des forces appliquées au skieur est non nulle et il accélère. Mais plus il accélère, plus la force de frottement est importante et limite son accélération. Il existe donc une vitesse limite pour laquelle la force de frottement devient si intense qu'elle compense les autres forces (le poids), à cette vitesse le skieur n'accélère plus, sa vitesse reste constante.
8. Si le mouvement du skieur est rectiligne homogène, la résultante des forces appliquées est nulle. En projetant les forces sur l'axe de la piste orienté vers la droite on obtient : $-F_3 + mg\sin\alpha' = 0$ donc $F_3 = mg\sin\alpha' = kv_l^2$. Donc la vitesse limite est $v_l = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha'}{k}} \simeq 28{,}3\,\mathrm{m/s}$



9. Lors du saut, la seule force appliquée au skieur est son poids $\vec{P}$.
10. Le PFD projeté sur les axes x et y donne directement $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = -g$
11. En intégrant deux fois ces équations différentielles, et en tenant compte des conditions initiales, on trouve $x(t) = v_{0x}t$ et $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, avec $v_{0x} = v_0\cos\gamma$ et $v_{0y} = v_0\sin\gamma$.
12. S'il retombe sur une surface plane située à 5 m en dessous du point F, on a $y(t_f) = -5\,\mathrm{m} = v_{0y}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2$ dont la solution donne $t_f \simeq 1{,}87$ s. La distance parcourue est $D = x(t_f) = v_{0x}t_f \simeq 45$ m.

Exercice 4 : Boire ou conduire...Extrait de concours sup

I. Passage de l'alcool à travers la paroi stomacale

1 La vitesse de disparition de l'alcool dans l'estomac est $v_1 = -\frac{dC_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$

2 Si v_1 suit une loi cinétique d'ordre 1, on doit avoir $v_1 = k_1C_1 = -\frac{dC_1}{dt}$ d'où $C_1(t) = C_0\exp(-k_1t)$. On doit donc avoir $\ln(C_1) = \ln(C_0) - k_1t$. La courbe représentant $\ln(C_1)$ en fonction de t doit donc être une droite de pente $-k_1$. On vérifie graphiquement cette propriété avec les données de l'énnoncé et on trouve $k_1 = 2{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}$.

3 à $t = 18$ min, il reste $0.2 \times 0.25 = 5 \times 10^{-2}$ mol d'éthanol dans l'estomac, ce qui signifie que $n_2 = 1 - 5 \times 10^{-2} = 0{,}95$ mol d'éthanol sont passées dans le sang. La concentration d'éthanol dans le sang est donc $C_2 = \frac{n_2}{V_2} = 2{,}38 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol/L}$

4 La quantité d'alcool qui a disparu dans l'estomac est $n = C_0V_1 - C_1V_1 = V_1(C_0 - C_1) = V_1x$, et est identique à la quantité apparue dans le sang. La concentration en alcool à un instant t dans le sang est $C_2 = \frac{n}{V_2} = \frac{V_1}{V_2}x$. Donc la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $v = \dfrac{dC_2}{dt} = \dfrac{V_1}{V_2}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{V_1}{V_2}v_1$.

II. Oxydation de l'alcool dans le sang

5 La vitesse d'oxydation de l'alcool dans le sang est $v_2 = -\dfrac{dC_2}{dt}$.

6 Pour une loi cinétique d'ordre 0, l'évolution temporelle de la concentration est linéaire, on doit avoir $C_2(t) = C_2(0) - k_2t$. On trace $C_2(t)$ en fonction de t et on trouve bien une doite de coefficient directeur $-k_2$, ce qui donne $k_2 = 1{,}18 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol\,L^{-1}s^{-1}}$

III. Boire ou conduire...

7 Concentration maximale admise : $C_{max} = \frac{0.5}{46} = 1{,}09 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol/L}$

8 La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est $\dfrac{dC_2}{dt} = v - v_2 = \dfrac{V_1}{V_2}v_1 - k_2 = \dfrac{V_1}{V_2}k_1C_1 - k_2$

9 Comme $C_1(t) = C_0\exp(-k_1t)$ on obtient $\frac{dC_2}{dt} = \frac{V_1}{V_2}k_1C_0\exp(-k_1t) - k_2$.
Que l'on peut intégrer en $C_2(t) = K - \frac{V_1}{V_2}C_0\exp(-k_1t) - k_2t$. La condition initiale $C_2(0) = 0$ permet de déterminer que $K = \frac{V_1}{V_2}C_0$ ce qui nous donne l'expression demandée :

$$C_2 = C_0\frac{V_1}{V_2}\big(1 - \exp(-k_1t)\big) - k_2t$$

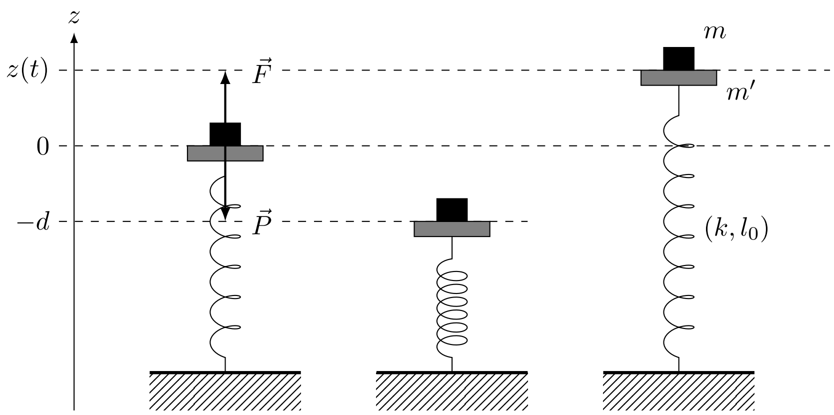
En buvant ses deux bières à 8%, le sujet absorbe 66 cL et 0.9 mole d'alcool.

10 l'instant $t_{\max}$ où la concentration C_2 est maximale est défini par $\frac{dC_2}{dt}(t_{\max}) = 0$
ce qui donne $t_{\max} = -\frac{1}{k_1} \ln\left(\frac{1}{C_0}\frac{k_2}{k_1}\frac{V_2}{V_1}\right) \simeq 1421\,\text{s} \Rightarrow t_{\max} \simeq 23{,}7\,\text{min}$

11 On trouve $C_2(t_{\max}) \simeq 2{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol/L} > C_{max}$. L'automobiliste ne peut donc pas conduire !

12 Au delà de $t_{\max}$ la courbe s'apparente à une droite de pente $-k_2$. On peut donc en déduire qu'il aura éliminé les $2{,}0 \times 10^{-2} - 1{,}09 \times 10^{-2} = 0{,}91 \times 10^{-2}\,\text{mol/L}$ en $t = \frac{0{,}91 \times 10^{-2}}{1{,}18 \times 10^{-6}} \simeq 7700\,\text{s}$ soit $t \simeq$3h08min.

Exercice 5 : Décollement d'une masse



1. Lorsque la masse est à l'équilibre, on a $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, en projetant cette équation sur l'axe (Oz) on obtient $-(m+m')g + k(l_0 - l_{eq}) = 0$ donc $l_{eq} = l_0 - \frac{(m+m')g}{k}$.
2. On applique le PFD à l'ensemble masse+plateau, en notant $M = m + m'$, on obtient : $\vec{F} + \vec{P} = M\vec{a}$ qui devient après projection sur l'axe z
$$-k(l - l_0) - Mg = M\ddot{z}$$
Or la longueur l du ressort est reliée à z par $l = l_{eq} + z$. On obtient donc l'équation
$$-k(l_{eq} + z - l_0) - Mg = M\ddot{z} \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{k}{M}z = \frac{k}{M}(l_0 - l_{eq}) - g$$
3. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution est $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$. On trouve A et φ avec les conditions initiales $z(0) = -d$ et $\dot{z}(0) = 0$, qui donnent $A = -d$ et $\varphi = 0$. Donc on a bien
$$z(t) = -d\cos(\omega_0 t) \tag{1}$$
4. Les forces appliquées à la masse m sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force $\vec{R}$ exercée par le plateau. Le PFD donne $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ soit en projection sur l'axe $(0z)$: $-mg + R = m\ddot{z} = md\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$. Donc
$$R = mg + md\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$$
5. La masse reste en contact avec le plateau tant que R>0, or R ne s'annulera jamais si $md\omega_0^2 < mg$ soit $d < \frac{g}{\omega_0^2}$
6. La masse décolle du plateau lorsque $R = 0$, soit lorsque $\cos(\omega_0 t) = -\frac{g}{d\omega_0^2}$. En utilisant l'expression précédente de $z(t)$ on obtient bien $z_d = \frac{g}{\omega_0^2}$
7. La vitesse de la masse suivant l'axe (Oz) est $\dot{z}(t) = d\omega_0\sin(\omega_0 t)$. Or comme $\sin(\omega_0 t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t)}$, on a
$$\dot{z}(t) = d\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2}$$
8. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, on a $E_m(1) = E_m(2)$ où (1) est le moment du décollage et (2) celui où la masse est au sommet de sa trajectoire. On obtient donc
$$E_c(1) + E_p(1) = E_p(2) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m\dot{z}(1)^2 + mgz(1) = mgz(2)$$
En utilisant les expressions trouvées jusqu'ici on a :
$$\frac{1}{2}md^2\omega_0^2\left(1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2\right) + mg\frac{g}{\omega_0^2} = mgz_{max}$$
On trouve finalement
$$z_{max} = \frac{g}{2\omega_0^2} + \frac{d^2\omega_0^2}{2g}$$