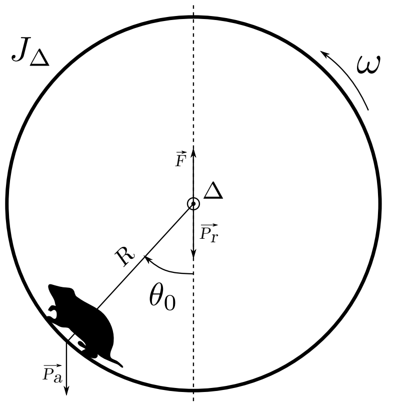
DM4 : Solides en rotation – corrigé

Exercice 1 : Le hamster

1. Les forces qui s'exercent sur la roue sont le *poids du hamster*, *le poids de la roue* et la *réaction de l'axe de rotation* sur la roue. Comme la roue est globalement immobile, on en conclut que la somme des ces forces est nulle.



2. Le moment cinétique de la roue du hamster est $L_\Delta = J_\Delta \omega$.
3. D'après le théorème du moment cinétique : $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P_a}) = mgR\sin\theta_0$. La réaction de l'axe de rotation et le poids de la roue passant par l'axe, leur moment est nul. On a donc l'accéleration angulaire : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{mgR\sin\theta_0}{J_\Delta}$.
4. On a montré à la question précédente que l'accélération angulaire de la roue est constante, donc $\omega(t) = \frac{mRg\sin\theta_0}{J_\Delta}t$.
5. L'énergie cinétique de la roue est $E_c(t) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega(t)^2$. Donc $E_C(t) = \frac{(mRg\sin\theta_0)^2}{2J_\Delta}t^2$
6. Le hamster court à une vitesse v, la vitesse angulaire correspondante est $\omega = \frac{v}{R}$. Le temps qu'il met pour atteindre cette vitesse est : $t = \frac{J_\Delta\omega}{mRg\sin\theta_0} \simeq 0{,}3\,\mathrm{s}$
7. L'énergie cinétique de la roue est alors $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = 70\,\mathrm{mJ}$.
8. Lorsque la vitesse de course du hamster est constante, l'accélération angulaire de la roue est nulle et donc le moment des forces appliquées sur la roue doit également être nul. C'est le cas uniquement pour $\theta_0 = 0$
9. On procède de la même manière que dans la question 3 en ajoutant au moment du poids le couple résistant des frottements, il faut donc remplacer $mRg\sin\theta_0$ par $mRg\sin\theta_0 - \Gamma_\Delta$.
10. Dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante l'accélération angulaire étant nulle, il faut que la somme des moments des forces appliquées à la roue soit nulle, et donc le moment du poids doit compenser exactement le couple résistant du aux frottements. On a alors $mRg\sin\theta_0 - \Gamma_\Delta = 0$ et donc $\theta_0 = \arcsin\frac{\Gamma_\Delta}{mRg}$
11. Lorsque le hamster court, la vitesse de rotation de la roue est $\omega_0 = \dfrac{v_0}{R}$
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, **son énergie cinétique est nulle** car sa il a une vitesse nulle dans le référentiel du laboratoire.
    Si on prend l'origine des abscisses au centre de la roue, son énergie potentielle de pesenteur est $E_p = mgh = -mgR$.
    L'énergie cinétique de rotation de la roue est $E_{cR} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2$.
    L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies cinétiques et potentielles, soit $\boxed{E_m = -mgR + \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2}$
13. Juste après que le hamster ne s'arrête de courir, les expressions de l'énergie cinétique de la roue et de l'énergie potentielle du hamster restent les mêmes en remplaçant ω_0 par ω_1. Seulement maintenant l'énergie cinétique du hamster n'est plus nulle, il avance à la même vitesse que la roue donc son énergie cinétique est : $E_{cH} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2$.
    L'égalité des énergies mécaniques avant et après l'arrêt du hamster donne :
$$\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 - mgR = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_1^2 - mgR + \frac{1}{2}mR^2\omega_1^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{J_\Delta}{J_\Delta + mR^2}}}$$
14. L'énergie mécanique reste constante car on néglige les frottements entre la roue et son axe. Elle vaut
$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2}_{E_{cR}} + \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\omega^2}_{E_{cH}} - \underbrace{mgR\cos\theta}_{E_p} = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta$$

15. En écrivant que l'énergie mécanique est constante on obtient

$$\frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega_1^2 - mgR \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}}}$$

16. Lorsque le hamster est au sommet de la roue, il subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dirigé verticalement vers le bas, et la réaction de la roue $\vec{K}$ dirigée également vers le bas (car l'accélération tangentielle du hamster est nulle en ce point).
17. L'accélération normale s'écrit en coordonnées polaires (lorsque le rayon de la trajectoire est constant) comme $\vec{a}_r = -R\omega^2\vec{e}_r$. Ce qui en utilisant la question 15 donne l'expression demandée :

$$\vec{a} = -R\left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}\right)\vec{e}_r$$

18. En appliquant le PFD au hamster lorsqu'il se trouve au sommet de la trajectoire ($\theta = \pi$) et en le projetant sur $\vec{e}_r$, on obtient :

$$-mg - K = ma_r = -mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) \quad \text{soit} \quad K = mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) - mg$$

Avec les valeurs numériques données, on trouve $K < 0$, ce qui ne permet pas au hamster de faire un looping.
19. En y regardant en détails, on remarque que la vitesse de rotation initiale de la roue ω_0, même si elle restait constante après l'arrêt du hamster serait trop faible pour permettre un looping. Il faut donc déjà augmenter ω_0 et donc réduire R (le hamster ne peut pas courir plus vite !). Ensuite il faut aussi augmenter J_Δ en lui installant une roue plus lourde