DS3 : Électricité – corrigé

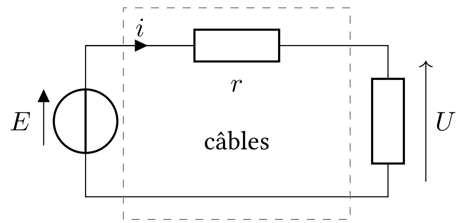
Durée : 2h. Les calculatrices sont interdites. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : Résistances équivalentes

1. **Circuit 1 :** $R_{eq} = \dfrac{5}{2}R$
2. **Circuit 2 :** $R_{eq} = \dfrac{2}{3}R$
3. **Circuit 3 :** $R_{eq} = \dfrac{8}{11}R$

Exercice 2 : Transport d'électricité (TD4)

1. Schéma :

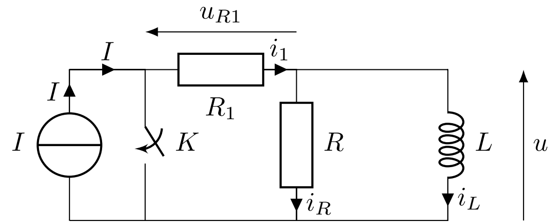


2. La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent $U = E - ri$ soit $E = U + ri$
3. La puissance électrique dissipée dans les câbles est $P_c = ri^2$ c'est l'effet Joule, l'énergie électrique est transformée en chaleur.
4. La puissance totale fournie par le générateur est $P_g = E \times i$
5. Le rendement du système est $\gamma = \dfrac{P}{P_g} = \dfrac{P}{Ei} = \dfrac{P}{(U+ri)i} = \dfrac{P}{P+ri^2}$. En utilisant $i = P/U$ on obtient finalement :

$$\gamma = \frac{P}{P + r(P/U)^2} = \frac{1}{1 + rP/U^2} \tag{1}$$

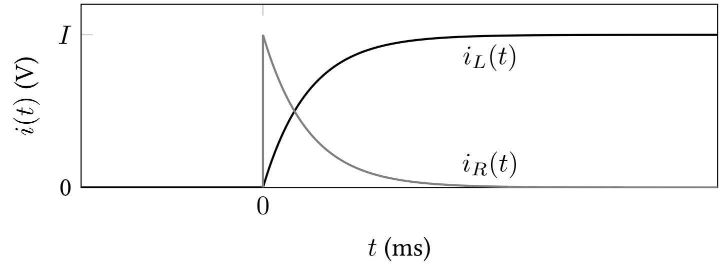
6. On utilise une haute tension pour transporter le courant électrique car le rendement augmente avec U. Cela permet de diminuer les pertes lors du transport.
7. On ne peut pas utiliser des tensions trop élevées car les plus hautes tensions nécessitent des infrastructures plus coûteuses (il faut plus espacer les cables, il faut qu'ils soient plus hauts). Le gain d'argent fait en utilisant une tension supérieure à 400 kV serait probablement inférieur au surcoût des infrastructures.

Exercice 3 : Circuit RL parallèle



1. — Pour $t < 0$, K est fermé donc $u + u_{R1} = 0$ or en régime permanent la bobine se comporte comme un fil donc $u = 0$. On en conclut que $u_{R1} = 0$, $i_1 = u_{R1}/R_1 = 0$ et $i_R = u/R = 0$. Enfin $i_L = i_1 - i_R = 0$.
   — À $t = 0^+$, l'interrupteur est ouvert, il y a continuité de l'intensité dans la bobine donc $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$. On a aussi $i_1 = I$ et donc $i_R = I - i_L = I$.
   — Pour $t \to \infty$, le circuit atteint le régime permanent, la bobine se comporte comme un fil donc $u = 0$, $i_R = u/R = 0$ et $i_L = I$.

   On obtient l'allure suivante :



2. Pour $t > 0$, la loi des nœuds donne : $I = i_R + i_L$ avec la loi d'Ohm pour la résistance R : $u_= Ri_R$, on a $I = u/R + i_L$. Enfin la loi de la bobine $u = L\dfrac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t}$ on obtient :

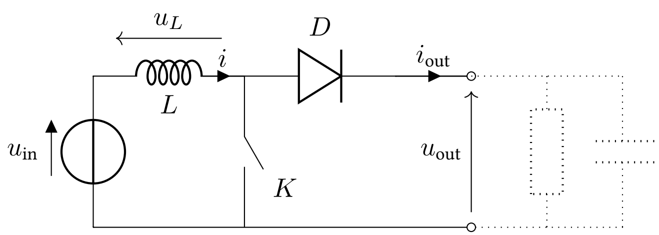
$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} + i_L = I \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} + \frac{R}{L}i_L = \frac{R}{L}I$$

   Qui est bien de la forme demandée avec $\tau = \frac{L}{R}$.
3. L'énergie stockée dans la bobine est $E_L = \frac{1}{2}Li_L^2$. Lorsque $t \to \infty$, $i_L = I$ et donc $E_L = \frac{1}{2}LI^2$.
4. En résolvant l'équation différentielle trouvée plus tôt, on trouve $i_L(t) = I(1 - e^{-t/\tau})$. La loi de la bobine donne directement $u = L\dfrac{\mathrm{d}\, i_L}{\mathrm{d}\, t} = RIe^{-t/\tau}$.
5. La puissance P_g fournie par le générateur est $P_g = (u + R_1 I)I = RI^2e^{-t/\tau} + R_1 I^2$.
6. L'énergie totale fournie par le générateur entre $t = 0$ et $t = \infty$ est :

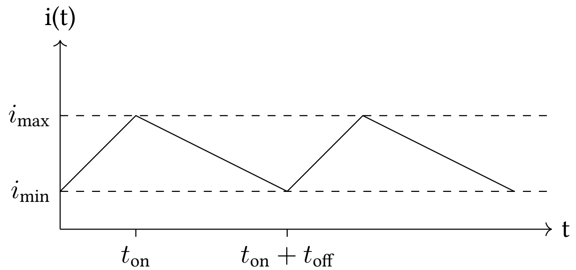
$$E_g = \int_0^\infty P_g(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty RI^2e^{-t/\tau} = LI^2$$

7. L'énergie dissipée par effet Joule dans R est :
$$E_J = \int_0^\infty P_J \mathrm{d}t = \int_0^\infty R i_R(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^\infty R I^2 e^{-2t/\tau} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} L I^2.$$
On vérifie bien la conservation de l'énergie : $E_g = E_L + E_J$.

Exercice 4 : Convertisseur boost



1. Lorsque K est fermé, on a $u_L = u_{\text{in}} = L\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{u_{\text{in}}}{L}$.
2. D'après la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$ est une constante, donc $i(t) = \dfrac{u_{\text{in}}}{L}t + A$ où A est une constante. La condition $i(0) = i_{\text{min}}$ donne $A = i_{\text{min}}$. Donc finalement $i(t) = i_{\text{min}} + \dfrac{u_{\text{in}}}{L}t$ Au moment où l'interrupteur se ferme, $t = t_{\text{on}}$ et donc :
$$i_{\text{max}} = i_{\text{min}} + \frac{u_{\text{in}} t_{\text{on}}}{L}$$
3. Lorsque l'interrupteur est ouvert, la diode se comporte comme un fil, la loi des mailles donne $u_L = u_{\text{in}} - u_{\text{out}} = L\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}$.
4. Comme dans la question 2, on intègre $\dfrac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$ et on utilise $i(t_{\text{on}}) = i_{max}$ pour trouver :
$$i(t) = i_{\text{max}} + \frac{u_{\text{in}} - u_{\text{out}}}{L}(t - t_{\text{on}})$$
5. L'énoncé indique que l'intensité i évolue de façon périodique, donc $i(T = t_{\text{on}} + t_{\text{off}}) = i(0) = i_{\text{min}}$. On obtient l'évolution suivante :



6. La condition donnée à la question précédente implique que $u_{\text{out}} = u_{\text{in}}\dfrac{1}{1-r}$. Comme $0 < r < 1$, on a bien $u_{\text{out}} > u_{\text{in}}$.
7. D'après la question 2, on a $\Delta i = \frac{u_{\text{in}} t_{\text{on}}}{L}$, on en déduit la formule demandée pour $i(t)$:
$$i(t) = i_{\text{min}} + \frac{\Delta i}{t_{\text{on}}} t$$
En utilisant le résultat de la question 6, on peut montrer que $u_{\text{in}} - u_{\text{out}} = -\frac{r}{1-r}u_{\text{in}}$, en utilisant la même expression de Δi qu'à la question précédente, on finit par trouver la formule demandée. (il faut utiliser $t_{\text{on}} = rT$ et $t_{\text{off}} = (1-r)T$).
8. Pendant la phase où l'interrupteur est fermé, l'énergie fournie par le générateur est
$$E_{\text{on}} = \int_0^{t_{\text{on}}} u_{\text{in}} i(t) \mathrm{d}t = u_{\text{in}} i_{\text{min}} t_{\text{on}} + \frac{1}{2} u_{\text{in}} t_{\text{on}} \Delta i$$
Pendant la phase où l'interrupteur est ouvert, le générateur fournit l'énergie :
$$E_{\text{off}} = \int_{t_{\text{on}}}^{t_{\text{on}}+t_{\text{off}}} u_{\text{in}} i(t) \mathrm{d}t = u_{\text{in}} i_{\text{min}} t_{\text{off}} + \frac{1}{2} u_{\text{in}} t_{\text{off}} \Delta i$$
Sur un cycle complet, le générateur fournit l'énergie :
$$E_g = E_{\text{on}} + E_{\text{off}} = u_{\text{in}} i_{\text{min}} T + \frac{1}{2} u_{\text{in}} T \Delta i$$
9. On trouve que l'énergie consommée par le circuit pendant un cycle complet est égale à l'énergie consommée pendant la phase où l'interrupteur est ouvert, et vaut :
$$\begin{aligned} E_{\text{out}} &= \int_{t_{\text{on}}}^{t_{\text{on}}+t_{\text{off}}} u_{\text{out}} i(t) \mathrm{d}t = u_{\text{out}} i_{\text{min}} t_{\text{off}} + \frac{1}{2} u_{\text{out}} t_{\text{off}} \Delta i \\ &= u_{\text{in}} i_{\text{min}} T + \frac{1}{2} u_{\text{in}} T \Delta i = E_g \end{aligned}$$
en utilisant la relation de la question 6 entre u_{in} et u_{out}.
Le rendement du système est donc égal à 1, ce qui n'est pas étonnant car il n'y a aucune source de dissipation d'énergie dans le circuit étudié, c'est un cas idéal, dans la réalité le rendement sera strictement inférieur à 1, de l'ordre de 80% pour ce type de convertisseur.