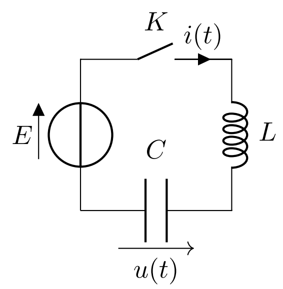
TD6 : Circuits linéaires du deuxième ordre, oscillateurs, filtrage

Exercice 1 : Circuit LC



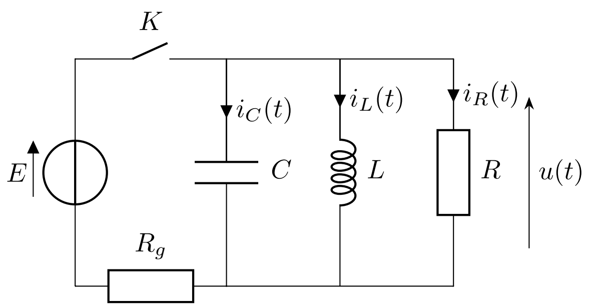
On considère le circuit ci-contre dans lequel l'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur C est déchargé. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur K.

1. Quelles sont les valeurs de $u(0^+)$ et de $i(0^+)$?
2. Établir l'équation différentielle de la tension aux bornes du condensateur. Exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction de L et C.
3. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir les expressions de $u(t)$ et $i(t)$
4. Représenter ces évolutions temporelles.
5. Donner les expressions $E_C(t)$ et $E_L(t)$ des énergies stockées dans le condensateur et dans la bobine. L'énergie totale du système se conserve-t-elle ? Commenter.
6. Décrire les transferts d'énergie qui ont lieu entre les différents dipôles.
7. Ce système peut-il représenter un système réel ? Pourquoi ?

Exercice 2 : Analogie entre oscillateur mécanique et oscillateur électrique

1. On considère une masse m accrochée à un ressort de raideur k et astreinte à se déplacer suivant un axe x horizontal. Déterminer l'équation différentielle de son mouvement.
2. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la charge q portée par le condensateur dans un circuit comportant un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L branchés en parallèle.
3. Expliciter l'analogie qui existe entre les oscillateurs mécanique et électrique.

Exercice 3 : Circuit RLC parallèle

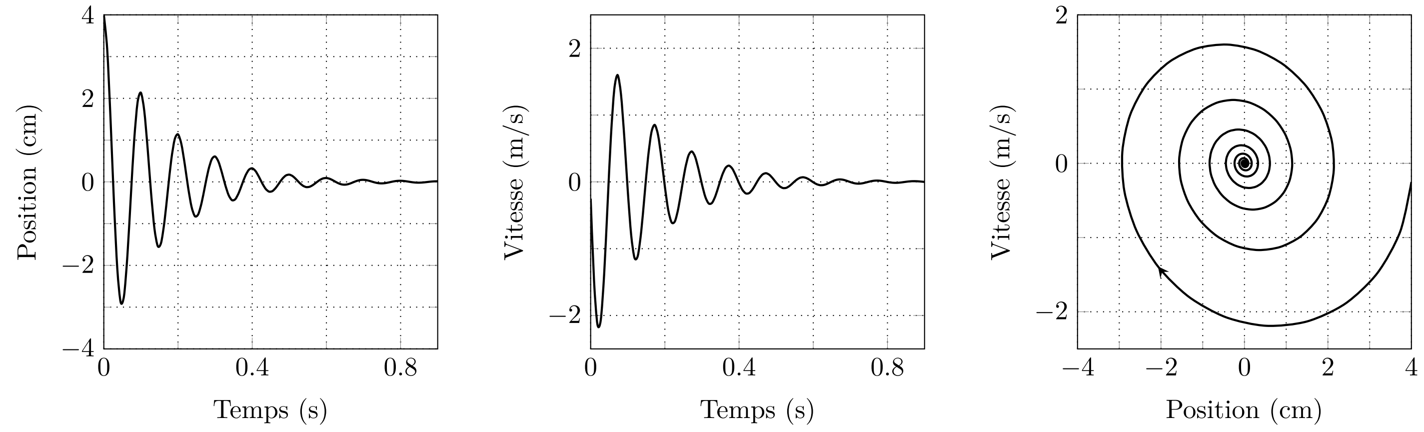


On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre. L'interrupteur K est initialement fermé pendant un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint. À $t = 0$ on ouvre l'interrupteur et on observe l'évolution de la tension $u(t)$.

1. Donner les valeurs des intensités i_C, i_R, et i_L et de la tension u dans le circuit à $t = 0^-$, $t = 0^+$, et $t \to \infty$.
2. Tracer qualitativement l'allure de $u(t)$ après l'ouverture de K.
3. Comment le facteur de qualité Q du circuit dépend-il de R ? Proposer une expression de Q basée sur une analyse dimensionnelle.
4. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ pour $t > 0$.
5. En déduire les expressions de la fréquence propre w_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C. Comparer l'expression de Q avec celle trouvée à la question précédente.
6. A.N. : On donne $R = 40\,\Omega$, $C = 200\,\mu\text{F}$ et $L = 10\,\text{m H}$. Calculer la pulsation propre du système et le facteur de qualité. Quelle est la durée du régime transitoire ?
7. Tracer l'allure du portrait de phase de la tension $u(t)$, c'est-à-dire le graphique représentant $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t}$ en fonction de u.

Exercice 4 : Oscillateur mécanique amorti

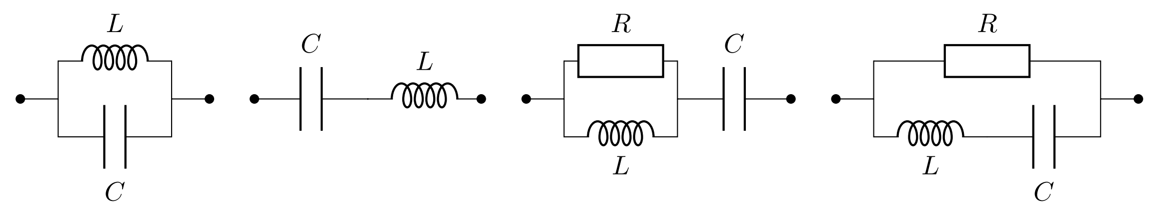
On étudie le mouvement d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k et soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$ (v est la vitesse de la masse). Le mouvement a lieu suivant l'axe x. On donne le portrait de phase du mouvement de la masse :



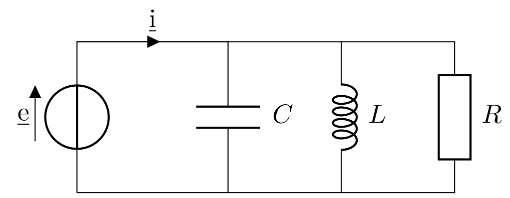
1. Faire un schéma du système décrit en représentant les différentes forces qui s'appliquent sur m.
2. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de l'oscillateur
3. L'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ de la masse est : $\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Exprimer le facteur de qualité et la fréquence propre de l'oscillateur en fonction de m, k et γ.
4. On donne $m = 1\,\text{g}$. Déterminer k et γ.

Exercice 5 : Associations d'impédances complexes

Calculer l'impédance complexe équivalente des dipôles suivants :



Exercice 6 : Circuit RLC parallèle en régime forcé

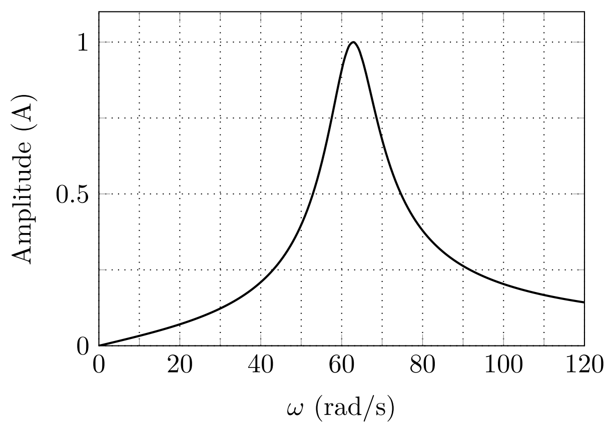


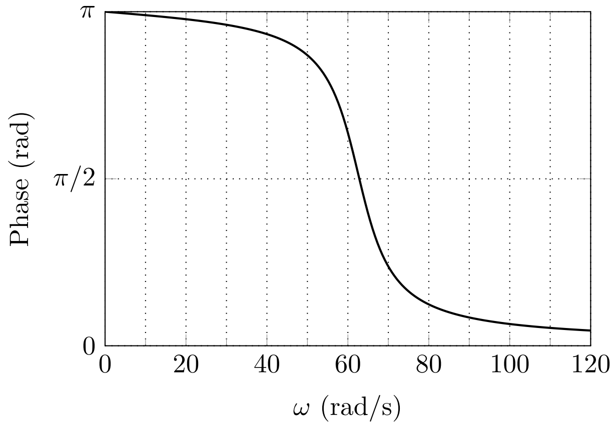
On étudie le circuit ci-contre où le générateur fournit une tension sinusoïdale de fréquence ω.

1. À l'aide de la méthode des complexes, déterminer l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de $\underline{e}$. Faire apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du circuit.
2. Que vaut l'amplitude de l'intensité ?
3. Que vaut le déphasage ϕ entre la tension $\underline{e}$ et l'intensité $\underline{i}$
4. La tension réelle est $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Écrire l'expression de l'intensité réelle.

Exercice 7 : Déterminer les paramètres d'un oscillateur

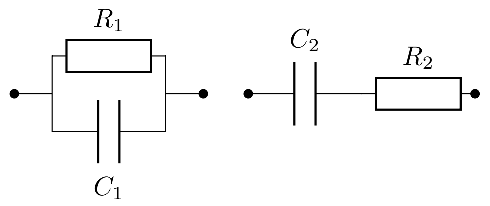
Les graphiques ci-dessous montrent l'amplitude et la phase d'un oscillateur en fonction de la pulsation de l'excitation.





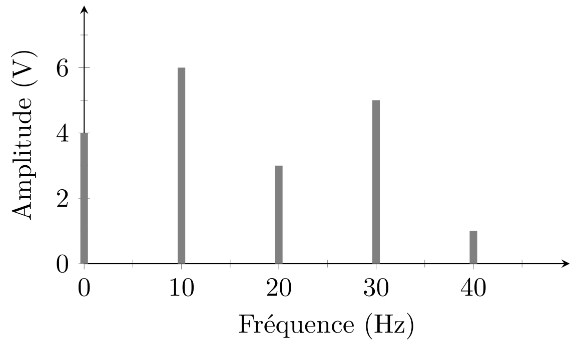
1. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de cet oscillateur.
2. Quelles sont les valeurs des composants que l'on doit choisir pour fabriquer cet oscillateur avec un circuit RLC série ($\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$)
3. Quel constante de raideur de ressort doit-on choisir pour faire osciller une masse $m = 1\,\mathrm{g}$ à la fréquence ω_0 ? On pourra retrouver la pulsation propre d'un système {masse + ressort} par analyse dimensionnelle.

Exercice 8 : Équivalence de composants



Les deux dipôles suivants sont utilisés dans un circuit en régime sinusoïdal à la fréquence ω. Exprimer R_2 et C_2 en fonction de R_1, C_1 et ω pour que les deux dipôles soient équivalents.

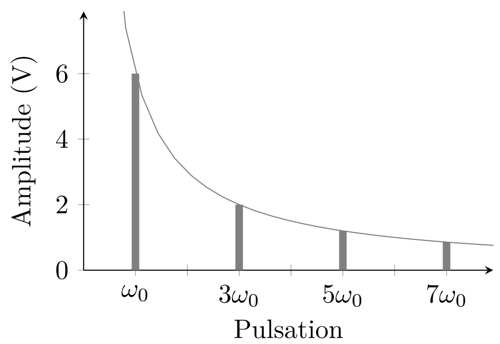
Exercice 9 : Spectre d'un signal périodique

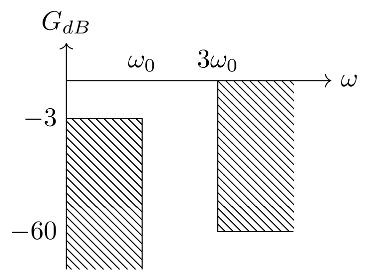


On représente ci-contre le spectre d'un signal périodique.

1. Combient vaut la valeur moyenne de ce signal ?
2. Quelle est la fréquence fondamentale du signal ?
3. Donner l'amplitude et la fréquence de chacune des harmoniques.
4. Utiliser la calculatrice pour tracer l'allure de ce signal (en supposant que toutes les harmoniques sont en phase)

Exercice 10 : Filtrage d'un signal





La figure ci-dessus représente l'allure du spectre d'un signal carré ainsi que le gabarit du filtre dans lequel on fait passer ce signal.

1. Quelle est la fréquence fondamentale du signal carré ?
2. Donner la pulsation et l'amplitude des 3 premières harmoniques.
3. Quel est le type du filtre à travers lequel on fait passer le signal ?
4. Comment peut-on fabriquer simplement un filtre de ce type avec une résistance et un condensateur ? Est-ce que le filtre décrit par ce gabarit vous semble réalisable de cette manière ?
5. Tracer l'allure du spectre du signal carré à la sortie du filtre.
6. Tracer l'allure du signal à l'entrée et à la sortie du filtre.

Exercice 11 : Diagramme de Bode

On souhaite étudier un filtre dont la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

1. De quel type de filtre s'agit-il ?
2. Donner l'expression du gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ de ce filtre.
3. Donner une approximation de $G_{dB}(\omega)$ lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.
4. Tracer le diagramme de Bode de ce filtre en faisant apparaître les droites asymptotiques en $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$ pour $Q = 1$.
5. Faire apparaître sur le graphique la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$, notée $\Delta\omega$.
6. On rappelle que lorsque $G_{dB} = -3\,\mathrm{dB}$, $G = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer que $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.