TD13 : Solide en rotation autour d'un axe fixe – corrigé

Exercice 1 : Moments d'inertie

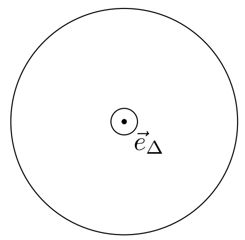
Les solides qui ont leur masse le plus loin de l'axe ont un moment d'inertie supérieur. Donc J_2 et J_4 sont supérieurs à J_1 et J_3.

Entre 2 et 4 on remarque que les masses du carré (4) sont en moyenne plus éloignées que celles du cercle et donc $J_4 > J_2$. Il en est de même pour les solides pleins, on a finalement :

$$\boxed{J_4 > J_2 > J_3 > J_1}$$

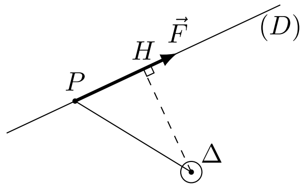
Remarque : On n'a pas strictement démontré que $J_2 > J_3$ mais on *sent bien* que ça doit être le cas. Exercice hors-programme : calculer les moments d'inertie des 4 solides.

Exercice 2 : Calcul de moment d'inertie



1. Schéma ci-contre.
2. $L_\Delta = J_\Delta \Omega$
3. Un point M de masse dm du solide possède un moment cinétique par rapport à Δ : $d\sigma_\Delta = dmr^2\Omega$ car la vitesse du point M est orthogonale à l'axe Δ et vaut $v = r\Omega$. Ce résultat est identique pour tous les points du solide.
4. Le moment cinétique total du solide est la somme des moments cinétiques des points qui le composent :
$$L_\Delta = \sum_{solide} d\sigma_\Delta = \sum_{solide} dmr^2\Omega = r^2\Omega \sum_{solide} dm = mr^2\Omega = J_\Delta\Omega$$
On en déduit que $J_\Delta = mr^2$

Exercice 3 : Constance du moment



Si on appelle H le projeté orthogonal du point O appartenant à Δ sur la droite (D), le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à Δ s'écrit

$$\Gamma_\Delta = ||\vec{OP} \wedge \vec{F}|| = ||(\vec{OH} + \vec{HP}) \wedge \vec{F}|| = ||\vec{OH} \wedge \vec{F}||$$

car $\vec{HP} \wedge \vec{F} = 0$. Ce résultat ne dépend pas du point P d'application de la force sur la droite (D), le moment de la force est donc constant.

Exercice 4 : Moments de forces

1. $\Gamma = -rF\sin(\pi/4) = -\frac{rF}{\sqrt{2}}$
2. $\Gamma = 0$
3. $\Gamma = Fr$
4. $\Gamma = -Fr$ (*cf* exercice précédent)

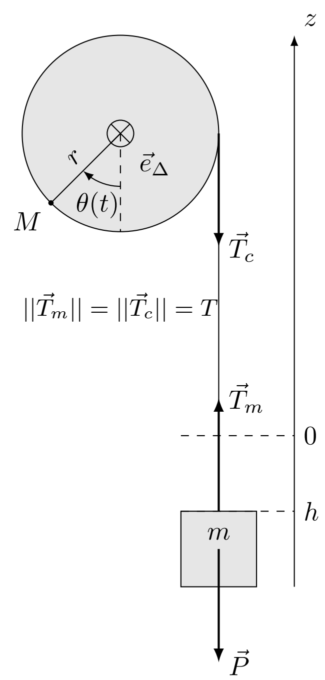
Exercice 5 : Tourne-vis

1. Les lois de Coulomb du frottement solide indiquent que la vis restera immobile tant que la composante tangentielle F_T reste inférieure à $\mu_s N$. La valeur limite de la composante tangentielle est donc $F_l = \mu_s N$.
2. Celà correspond à un moment limite $\mathcal{M}_l = r_v F_{l1}$
3. La résultante des forces de frottement sur la vis est nulle car dans le cas contraire la vis serait mise en mouvement. Il s'agit donc bien d'un couple de forces.
4. Pour faire tourner la vis, il faut appliquer un moment de force supérieur au moment limite $\mathcal{M}_l$. On a donc $r_t F_{l2} = \mathcal{M}_l = r_v F_{l1}$ donc $F_{l2} = \frac{r_v}{r_t} F_{l1}$.
5. Lorsque $r_t > r_v$, la force à appliquer sur le tourne-vis est plus faible que celle à appliquer directement sur la vis, une grosse poignée limite l'effort à fournir pour serrer ou de-serrer une vis.
6. Dans cet exercice on considère que le tourne-vis est solidaire de la vis. Ce qui n'est pas le cas dans la pratique où l'on doit exercer une pression sur le tourne-vis pour qu'il reste dans la vis. Si la vis est très serrée, il faut exercée une pression très importante sur le tournevis et la dimension de la poignée n'y change rien.

Exercice 6 : Manège

1. Le moment cinétique d'une nacelle par rapport à l'axe Δ est $\sigma_\Delta = mr^2\omega$. Le moment cinétique de l'ensemble du manège est donc $L_\Delta = 8mr^2\omega$.
2. On en déduit que le moment d'inertie du manège par rapport à l'axe Δ est $J_\Delta = 8mr^2$.
3. L'accélération angulaire est $\dot{\omega} = \frac{\omega_f}{T}$. Le théorème du moment cinétique donne $J_\Delta\dot{\omega} = \Gamma$, on en déduit que $\Gamma = J_\Delta\frac{\omega_f}{T}$.
4. L'énergie cinétique du manège est donnée par $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$. Or $\omega(t) = \omega_f\frac{t}{T}$, donc entre 0 et T l'énergie cinétique est donnée par $E_c = \dfrac{J_\Delta\omega_f^2}{2T^2}t^2$.
5. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au solide en rotation donne $\frac{dE_c}{dt} = P$ ou P est la puissance des forces appliquées au manège et donc la puissance fournie par le moteur. Donc $P(t) = \dfrac{J_\Delta\omega_f^2 t}{T^2}$, elle augmente linéairement et atteint sa valeur maximale à $t = T$. Le moteur utilisé doit donc être capable de fournir au moins cette valeur max qui vaut : $P = \dfrac{J_\Delta\omega_f^2}{T}$
6. Chaque nacelle peut accueillir 8 personnes, on peut donc estimer que $m \simeq 1000\,\mathrm{kg}$ (masse des personnes + nacelle). L'accélération subie par les passagers est une accélération centripète due à la trajectoire circulaire, la valeur de cette accélération est $4g = r\omega_f^2$ donc $\omega_f = \sqrt{\frac{4g}{r}}$ et $T = 60\,\mathrm{s}$. On en déduit que $P = \dfrac{J_\Delta\omega_f^2}{T} = \dfrac{8mr\times 4g}{T}$ soit $P \simeq 52\,\mathrm{kW}$

Exercice 7 : Treuil



1. Lorsque le cylindre est bloqué, la masse m est immobile. Les forces qu'elle subit sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil. Leur résultante étant nulle, on obtient $\vec{T} = -m\vec{g}$.
2. La hauteur de la masse est reliée à l'angle dont le cylindre a tourné par : $h(t) = -r\theta(t)$
3. L'application du PFD à la masse m dont la hauteur est notée $h(t)$, en le projetant sur l'axe Oz vertical dirigé vers le haut donne $m\ddot{h}(t) = T - mg$.
4. Le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre est :
$$J_\Delta\dot{\omega} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = rT. \qquad (1)$$
5. La questions 3 et 2 permettent d'obtenir $T = m(g - r\ddot{\theta})$. En substituant cette expression dans l'équation 1 on obtient : $J_\Delta\dot{\omega} = mr(g - r\dot{\omega})$, soit en isolant $\dot{\omega}$: $\alpha = \dot{\omega} = \dfrac{mrg}{J_\Delta + mr^2}$
6. $a = -r\alpha = -\dfrac{mr^2 g}{J_\Delta + mr^2}$ soit $|a| = g\dfrac{1}{1 + J_\Delta/mr^2} < g$. L'accélération est inférieure à l'accélération lors d'une chute libre qui vaut g.
7. $a \simeq 3{,}27\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $\alpha \simeq 32{,}7\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$
8. On peut facilement trouver l'énergie cinétique de l'ensemble car en l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservée et l'énergie cinétique gagné par l'ensemble est égale à l'énergie potentielle perdue par la masse m. On a donc $E_c = -mgh$.

Exercice 8 : Pendule de torsion

On étudie un pendule de torsion constitué d'un solide S relié à un axe Δ par une liaison pivot. Le moment d'inertie de S par rapport à Δ est J_Δ. Le solide S est accroché à un ressort à spirale qui exerce un couple de rappel Γ proportionnel à son angle θ de rotation : $\Gamma = -C\theta$.

À $t = 0$ le solide est lâché sans vitesse angulaire initiale à un angle de rotation θ_0.

1. Le théorème du moment cinétique appliqué au solide S donne directement $J_\Delta\ddot{\theta} = \Gamma = -C\theta$. On a donc l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \dfrac{C}{J_\Delta}\theta = 0$,
C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti.
2. La résolution de cette équation différentielle donne $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$, les conditions initiales donnent $\varphi = 0$ et $A = \theta_0$. On a donc $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$.
3. Dans la résolution du pendule de torsion, on n'a pas eu besoin de faire l'approximation des petits angles, les oscillations auront la même période quelle que soit leur amplitude. Ce type de pendule est utilisé dans les montres et horloges mécaniques.