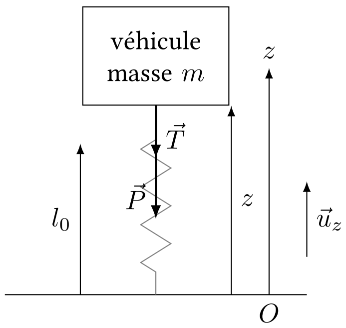
Concours blanc 2017 – physique-chimie – corrigé

Partie I. Modélisation d'une suspension de véhicule

I.1 Suspension sans amortissement

FIGURE 1 – Suspension sans amortissement

Q1 – Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les forces qui s'exercent sur le véhicule sont :
- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- La tension du ressort $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - l_0)\vec{u}_z$. Dans le cas du schéma on a choisi $z > l_0$ pour le sens de $\vec{T}$.



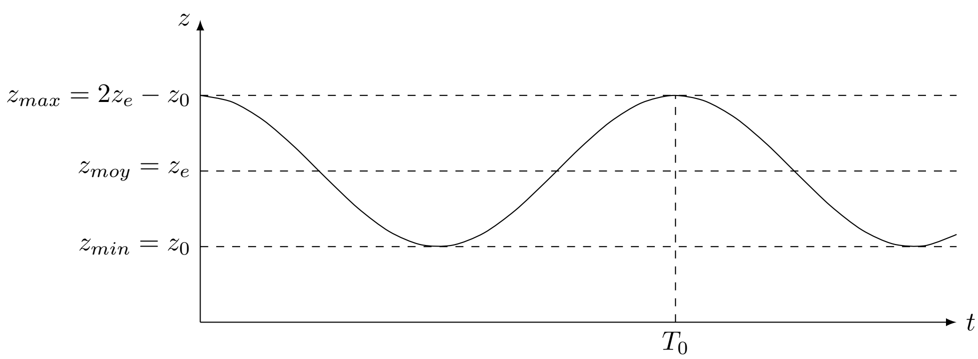
Q2 – À l'équilibre, on a $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$. On en déduit
$$z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$$

Q3 – Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m :
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$
Toutes les forces étant portées par $\vec{u}_z$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u}_z$. D'où :
$$m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0) \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

Q4 – On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique pur avec un second membre constant. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. ω_0 est la pulsation propre. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est la période propre des oscillations.
La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution homogène et de la solution particulière : $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_e$ où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.
A.N. : $\omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}$ et $T_0 = 0{,}628\,\mathrm{s}$

Q5 – Avec les conditions initiales données, on a $z(0) = z_0$ donc $A + z_e = z_0$ donc $A = z_0 - z_e$ et $\dot{z}(0) = 0 = \omega_0 B$ donc $B = 0$. Finalement on obtient :
$$z(t) = (z_0 - z_e)\cos(\omega_0 t) + z_e$$

Q6 – On obtient le graphique suivant :



I.2 Suspension avec amortissement

Q7 – On a $[h] = [F]/[v] = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}/m\,s^{-1}} = \mathrm{kg\,s^{-1}}$

Q8 – Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, les forces s'exerçant sur le véhicule sont le poids du véhicule $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$, la tension du ressort $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - l_0)\vec{u}_z$ et la force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$. Lorsque le véhicule est à l'équilibre, la vitesse vaut 0, donc $\vec{F} = \vec{0}$ et la position d'équilibre reste la même que dans la partie précédente : $z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$

Q9 – En appliquant le PFD à la voiture de masse m on obtient après projection sur l'axe $\vec{u}_z$:

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0) - h\dot{z} \quad \text{donc} \quad \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e$$

Q10 – On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti de facteur de qualité Q tel que $\omega_0/Q = h/m$ donc $Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$.

- Si $Q > \frac{1}{2}$: Le régime est apériodique
- Si $Q = \frac{1}{2}$: Le régime est critique
- Si $Q < \frac{1}{2}$: le régime est apériodique

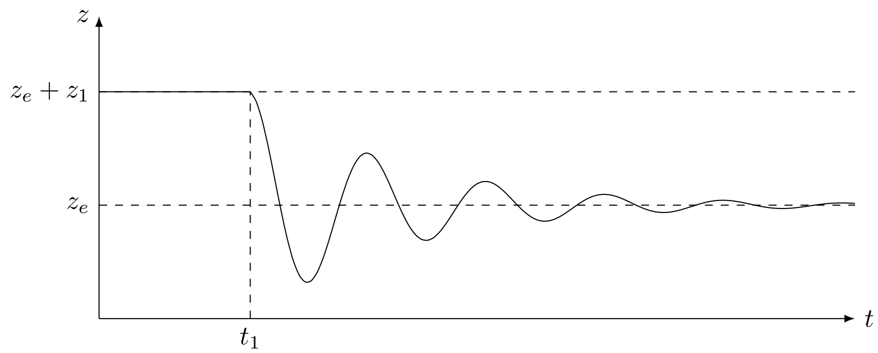
Q11 – Véhicule en charge et vieillissement de la suspension.

(a) Soit m_0 la masse du véhicule à vide et M la masse de la charge. Si la suspension est en régime critique lorsque le véhicule est vide, alors $h = 2\sqrt{km_0}$. En charge, $m = m_0 + M > m_0$, par conséquent $h < 2\sqrt{km}$ et le régime devient pseudopériodique.

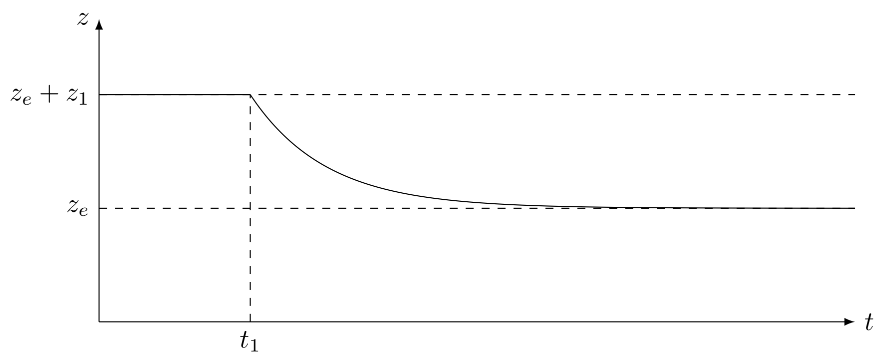
(b) Pour éviter que la suspension soit en régime pseudopériodique même en charge il faut choisir $h \geq 2\sqrt{k(m_0 + M)}$.

Q12 – Il s'agit dans cette question d'étudier la réponse à un échelon de hauteur z_1.

(a) $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t \gg t_1) = z_e$ On obtient l'évolution suivante :



(b) $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t \gg t_1) = z_e$ On obtient l'évolution suivante :



I.3 Régime forcé

Q13 – L'expression de la force de rappel du ressort est toujours la même : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$. Ici $l = z - z_s$, d'où $\vec{T} = -k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z$

Q14 – On applique le PFD à la voiture :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}$$

Toutes les forces étant portées par $\vec{u}_z$, on en déduit que l'accélération est portée par $\vec{u}_z$ d'où :

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - z_s - l_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_s) \quad \text{donc} \quad m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = h\dot{z}_s + kz_e + kz_s$$

Q15 – On pose $z' = z - z_e$. On a $\dot{z}' = \dot{z}$ et $\ddot{z}' = \ddot{z}$ car z_e est une constante, donc :

$$m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = h\dot{z}_s + kz_s \tag{1}$$

Soit $m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = Y(t)$ avec $Y(t) = h\dot{z}_s + kz_s$.

Q16 – On pose $\underline{Z}' = \underline{Z}'_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z}'_m = Z'_m e^{j\varphi}$ et $\underline{Z}_s = Z_{sm} e^{j\omega t}$

L'équation différentielle devient alors :

$$-m\omega_2 \underline{Z}' + j\omega\underline{Z}' + k\underline{Z}' = j\omega h\underline{Z}_s + k\underline{Z}_s \tag{2}$$

$$\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s} = \frac{k + j\omega h}{k - m\omega^2 + j\omega h} \tag{3}$$

En posant $\lambda = h/2m$ et $\omega_0^2 = k/m$ on obtient :

$$\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s} = \frac{\omega_0^2 + 2j\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda}$$

En prenant le module de l'expression précédente on obtient bien :

$$\left|\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\omega^2\lambda^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

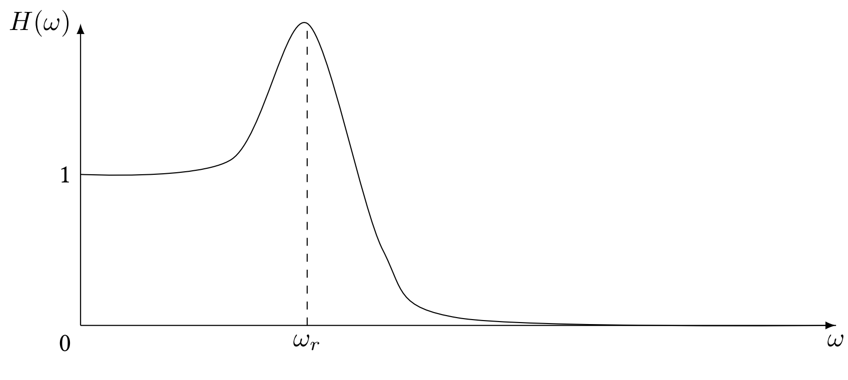
Q17 – Etude de la réponse complexe.

(a) Pour $\omega \to 0$ on a $H \to 1$.
La masse suit directement le relief du sol, $\forall t \quad z = z_e + z_s$ donc le ressort a constamment sa longueur d'équilibre.

(b) Pour $\omega \to \infty$ on a $H \to \sqrt{\frac{4\lambda^2\omega^2}{\omega^4}} \to 0$.
La masse m ne bouge pas verticalement, $\forall t \quad z = z_e$

(c) ω_r est la pulsation pour laquelle le dénominateur est minimal.
On pose $g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2$.
$g'(\omega) = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\lambda^2\omega$
$g'(\omega_r) = 0 \Leftrightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$
L'énoncé précise qu'on est dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$, donc $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$.

Q18 – On trace l'allure de $H(\omega)$ en tenant compte des limites calculées :

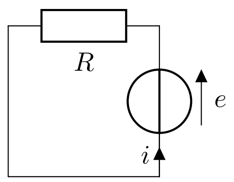


I.4 Amortissement électromagnétique

Q19 –
(a) Par définition $\phi = \iint \vec{B}.d\vec{S} = B \times S_{cadre\ z>0} = Bza$ car $\vec{B}$ est constant pour $z > 0$ et nul sinon.

(b) La force électromagnétique induite est $e = \frac{d\phi}{dt} = -Ba\dot{z}$

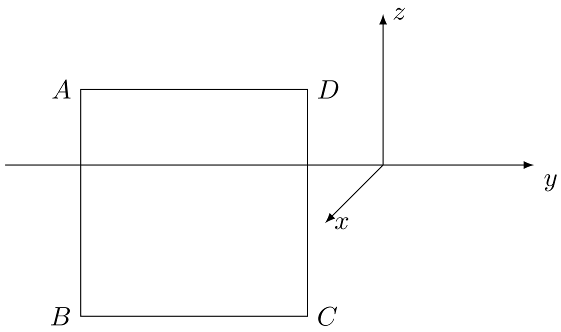
(c) L'orientation arbitraire du cadre étant imposée, on choisit de dessiner le circuit équivalent suivant :



On a donc en appliquant la loi des mailles :

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{BA\dot{z}}{R}$$

Q20 – La résultante de la force de Laplace qui s'applique sur le cadre est $\vec{F} = \int_{\text{cadre}} id\vec{l} \wedge \vec{B}$.



$$\vec{F} = \int_A^B id\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_B^C id\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_C^D id\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_D^A id\vec{l} \wedge \vec{B}$$
$$\vec{F} = -izB\vec{u}_y + \vec{0} + izB\vec{u}_y + iaB\vec{u}_z = -\frac{B^2a^2\dot{z}}{R}\vec{u}_z$$

Q21 – On remarque que la force est toujours opposée au sens de déplacement du cadre, c'est donc une force de freinage qui peut servir d'amortissement. Par rapport à un système de freinage classique, il n'y a pas d'usure des freins par frottement. L'énergie est dissipée par effet Joule dans la résistance du cadre.

Q22 – On souhaite que ce cadre puisse servir d'amortisseur de coefficient de frottement h. En identifiant les deux expressions de la force $\vec{F} = -\frac{B^2a^2\dot{z}}{R}\vec{u}_z = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$

Donc $B = \sqrt{\frac{Rh}{a^2}}$

Q23 – Application numérique : $B = 10\,\text{T}$

Il faut donc un champ magnétique très intense ! Avec un aimant permanent, $B \simeq 1\,\text{T}$, avec un électroaimant on peut aller jusqu'à $B \simeq 10\,\text{T}$. On peut donc utiliser un électroaimant pour créer le champ magnétique nécessaire au système d'amortissement.

Partie II. Réfractomètres

II.1 Questions préliminaires

Q24 –
- **homogène :** Milieu identique en tout point.
- **isotrope :** Toutes les directions sont équivalentes.
- **indice :** Dans un milieu d'indice n, la célérité de la lumière est $v = \dfrac{c}{n}$

Q25 –
- **réflexion :** Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence et $i = r$ (angle d'incidence=angle réflechi)
- **réfraction :** Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ (faire un petit schéma pour indiquer ce que sont i_1, i_2, n_1 et n_2)

II.2 Le réfractomètre de Pulfrich

Q26 – $n \sin(\pi/2) = N \sin(r)$ donc $r = \arcsin\left(\dfrac{n}{N}\right)$

Q27 – $r' + r = \pi/2$

Q28 – La seconde loi de Snell-Descartes donne $\sin(\theta) = N \sin(r') = N \sin(\pi/2 - r) = N \cos(r)$. En utilisant $\cos(r) = \sqrt{1 - \sin^2(r)}$, on obtient $\sin(\theta) = N\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{N^2}}$. Et finalement $\sin(\theta) = \sqrt{N^2 - n^2}$

Q29 – Les valeurs extrêmes de l'indice sont celles pour lesquelles $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$. Pour $\theta = 0$ On a $n_{\text{max}} = N$ et pour $\theta = \pi/2$ on a $n_{\text{min}} = \sqrt{N^2 - 1} = 1.25$

II.3 Le réfractomètre d'Abbe

Q30 – La somme des angles du triangle de sommet A vaut π. Donc $\pi/2 - r_0 + \pi/2 - r'_0 + \theta = \pi$ d'où $r_0 + r'_0 = \theta$

Q31 – La seconde loi de Descartes donne : $n \sin(\pi/2) = N \sin(r_0)$ donc $\sin(r_0) = \dfrac{n}{N}$.

Q32 – $\sin(i'_0) = N \sin(r'_0)$ donc $r'_0 = \arcsin(\sin(i'_0)/N)$. Or

$$n = N \sin(r_0) = N \sin(\theta - r'_0) = N \sin\Big(\theta - \arcsin\big(\sin(i'_0)/N\big)\Big)$$

Partie III. Le silicium

Q33 – Lorsque la température augmente, la constante d'équilibre augmente et donc l'équilibre est déplacé vers la droite, c'est à dire dans le sens de production du Silicium. L'industriel a donc intérêt à travailler à haute température.

Q34 –

$$2\,\mathrm{CaC_{2\,(s)}} + 3\,\mathrm{SiO_{2\,(s)}} = 2\,\mathrm{CaO_{(s)}} + 4\,\mathrm{CO_{(g)}} + 3\,\mathrm{Si_{(l)}}$$

Q35 – À l'équilibre on a $K^0_{1'} = \frac{p(\mathrm{CO})^4}{p_0^4} = 3{,}68 \times 10^{24}$, donc $p(\mathrm{CO}) = 1{,}4 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa} = 14 \times 10^5\,\mathrm{bar}$. La quantité de matière de monoxyde de carbone formée est $n(\mathrm{CO}) = \frac{p(\mathrm{CO})V}{RT} \simeq 7{,}8 \times 10^4\,\mathrm{mol}$. La pression d'équilibre est extrêmement élevée ce qui nécessiterait un réacteur très solide. Le monoxyde de carbone étant toxique, il faut prendre les précautions nécessaires.

Q36 – La pression de la phase gazeuse est celle trouvée à la question précédente, soit $p = 1{,}4 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$. Pour trouver les quantités de matière des différentes espèces dans l'état final on établit le tableau d'avancement suivant :

	$2\,\mathrm{CaC_{2\,(s)}}$	+	$3\,\mathrm{SiO_{2\,(s)}}$	=	$2\,\mathrm{CaO_{(s)}}$	+	$4\,\mathrm{CO_{(g)}}$	+	$3\,\mathrm{Si_{(s)}}q$
E.I.	n_1		n_2		0		0		0
E.F.	$n_1 - 2\xi$		$n_2 - 3\xi$		2ξ		4ξ		3ξ

avec $n_1 = m(\mathrm{CaC_2})/M(\mathrm{CaC_2}) = 0{,}5\,\mathrm{mol}$ et $n_2 = m(\mathrm{SiO_2})/M(\mathrm{SiO_2}) = 0{,}3\,\mathrm{mol}$.

D'après la question précédente, on a $4\xi = 7{,}8 \times 10^4\,\mathrm{mol}$ donc $\xi \simeq 2 \times 10^4\,\mathrm{mol}$. On voit donc que l'équilibre ne pourra pas être atteint. $\mathrm{SiO_2}$ est le réactif limitant, il est totalement consommé. On en déduit que l'avancement final est $\xi_f = 0{,}1\,\mathrm{mol}$.

Les quantités de matière finales sont donc :

$n(\mathrm{CaC_2}) = 0{,}3\,\mathrm{mol}$, $n(\mathrm{SiO_2}) = 0\,\mathrm{mol}$, $n(\mathrm{CaO}) = 0{,}2\,\mathrm{mol}$, $n(\mathrm{CO}) = 0{,}4\,\mathrm{mol}$ et $n(\mathrm{Si}) = 0{,}3\,\mathrm{mol}$

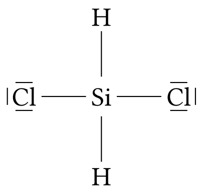
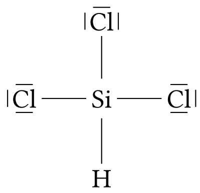
La pression de la phase gazeuse est $P = \frac{nRT}{V} \simeq 7{,}2\,\mathrm{bar}$.

La masse de silicium formée est $m = 8{,}4\,\mathrm{g}$

Q37 – L'équation (2) devient :

$$\mathrm{SiHCl_{3\,(g)}} + \mathrm{H_{2\,(g)}} = \mathrm{Si_{(s)}} + 3\mathrm{HCl_{(g)}}$$

Q38 – $[{}_{14}\mathrm{Si}] = \underbrace{1s^2 2s^2 2p^6}_{\text{cœur}}\ \underbrace{3s^2 3p^2}_{\text{valence}}$ $\qquad [{}_{17}\mathrm{Cl}] = \underbrace{1s^2 2s^2 2p^6}_{\text{cœur}}\ \underbrace{3s^2 3p^5}_{\text{valence}}$

Q39 – dichlorosilane :  trichlorosilane :  chlorure d'hydrogène :