DS7 : Mécanique

Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

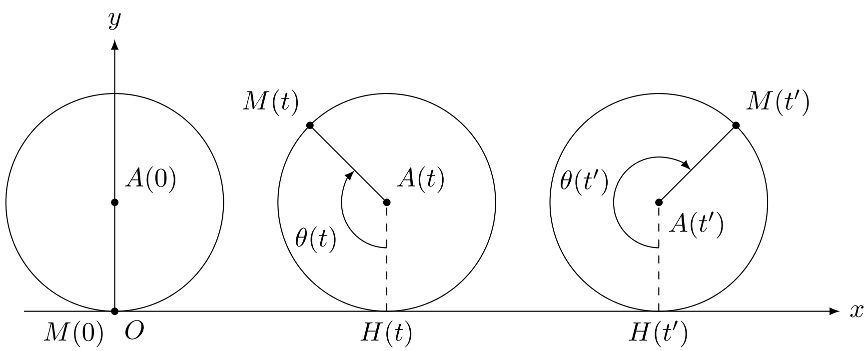
Exercice 1 : Cycloïde

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut expérimentalement observer cette courbe en observant la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

Cette courbe présente d'étonnantes propriétés que nous allons développer, et a notamment intéressé le physicien néerlandais Huygens.

I. Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.

On note M un point donné d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R roulant sans glissement sur une surface plane. A l'instant initial ($t = 0$ s) on suppose que le point M est confondu avec l'origine O d'un repère (Oxy). On note H(t) le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox) **qui dépend du temps car la roue avance**. La position de M à l'instant t est repérée par l'angle orienté $\theta(t) = (\vec{AH}, \vec{AM})$, le sens positif étant le sens horaire.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Démontrer que la distance OH est donnée par la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. Exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}(t)$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, dirigeant les axes Ox et Oy, en fonction de R et de $\theta(t)$.
3. En décomposant judicieusement le vecteur $\overrightarrow{OM}$, montrer que les équations horaires du mouvement s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} x(t) &= R[\theta(t) - \sin\theta(t)] \\ y(t) &= R[1 - \cos\theta(t)] \end{cases}$$

II. Vecteur vitesse.

Afin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle $\mathcal{C}$ a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0.

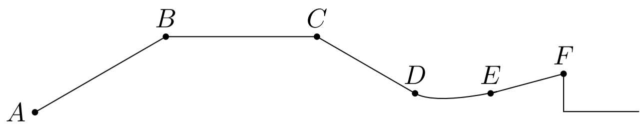
4. En utilisant la relation établie à la question I.1, montrer que la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Donner sa valeur en fonction de R et de v_0.
5. Montrer que le mouvement de M dans le référentiel (Axy), de centre A et d'axes Ax et Ay parallèles à Ox et Oy, est circulaire uniforme.
6. Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de R, θ et $\dot{\theta}$.
7. Représenter sur un même schéma la position du cercle $\mathcal{C}$ et la trajectoire de M au cours du temps (la fameuse cycloïde), en dessinant l'allure du vecteur vitesse $\vec{v}$ pour les valeurs suivantes du paramètre θ : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$, et $\theta_4 = 2\pi$
8. Déterminer la norme $v = |\vec{v}(M/\mathcal{R})|$ de la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0 et de θ.
9. Démontrer la relation trigonométrique $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$. Et l'utiliser pour simplifier l'expression précédente de v. Représenter graphiquement $v(t)$ en indiquant la valeur de v_0 sur le graphique.

III. Vecteur accélération.

10. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0, R et θ.
11. Sur le dessin de la question II..7, représenter l'allure du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour les valeurs θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4.
12. On dit que le point M est accéléré lorsque la norme de sa vitesse augmente. Dans quelles zones le point M est-il accéléré ou décéléré ?
13. En quoi les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour $\theta_4 = 2\pi$ présentent-ils un caractère surprenant ?
14. Montrer que la norme $a = |\vec{a}(M/\mathcal{R})|$ du vecteur accélération de M dans $\mathcal{R}$ est constante. Calculer sa valeur pour un pneu de voiture de rayon $R = 35$ cm et tel que $v_0 = 130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.
15. Montrer que $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est toujours dirigé de M vers A.

Exercice 2 : Saut à ski

On s'intéresse à la dynamique des différentes étapes d'un saut à ski. Le saut est décomposé en 4 étapes : Le remonte-pente (AB), une partie plate (BC), la descente (CD) et le tremplin (EF). Le skieur est assimilé à un point matériel.



Le skieur remonte la pente (AB) inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale à vitesse constante. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant la même direction que la perche qui forme un angle $\beta = 20°$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et par l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\vec{F_1}$ de valeur 65N, opposée au mouvement.

1. Faire un schéma représentant la pente, la perche les angles α et β. Représenter toutes les forces subies par le skieur.
2. Justifier pourquoi on peut affirmer que la somme des forces appliquées au skieur est nulle.
3. Déterminer la valeur de la force exercée par la perche sur le skieur.

Arrivé au sommet B, le skieur lâche la perche avec une vitesse horizontale de 3,2 m s^{-1}. L'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur $F_2 = 42$ N.

4. Faire un bilan des forces appliquées au skieur
5. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ du skieur en fonction du temps.
6. Intégrer l'équation précédente pour trouver $v(t)$ et $x(t)$. Quelle distance le skieur va-t-il parcourir avant de s'arrêter ?

Le skieur aborde la pente (CD) inclinée d'un angle $\alpha' = 35°$ avec l'horizontale. Il subit maintenant une force de frottement F_3 proportionnelle au carré de sa vitesse $F_3 = kv^2$ avec $k = 0{,}56\,\mathrm{Ns^2m^{-2}}$

7. Justifier pourquoi la vitesse du skieur augmentera jusqu'à une vitesse limite v_l.
8. Lorsqu'il atteint la vitesse v_l le mouvement du skieur est rectiligne homogène, déterminer la valeur de v_l

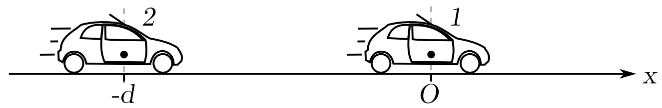
Il aborde le tremplin (EF) incliné d'un angle $\gamma = 15°$ avec l'horizontale, on ne prend pas en compte les forces exercées par l'air. On considère également que sa vitesse en F vaut 25 ms^{-1}.

9. Quelles sont les forces exercées sur le skieur lors du saut ?
10. Déterminer les équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du skieur.
11. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. On pourra prendre le point F comme origine du repère.
12. Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5 m au dessous du point F.

Données :
Taille du skieur : $h = 1{,}8$ m , masse du skieur : $m = 80$ kg, $AB = 150$ m, $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$

Exercice 3 : Distance de sécurité

On étudie le mouvement de deux voitures, considérées comme ponctuelles, sur un axe (Ox), qui se suivent à une distance d, les deux roulent à la vitesse constante v_0. A $t = 0$, la première voiture se trouve en O et freine avec une décélération a au même instant la seconde se trouve en $x = -d$ ne commence à freiner qu'au bout d'un temps $t_r = 0{,}6$ s avec une décélération b.

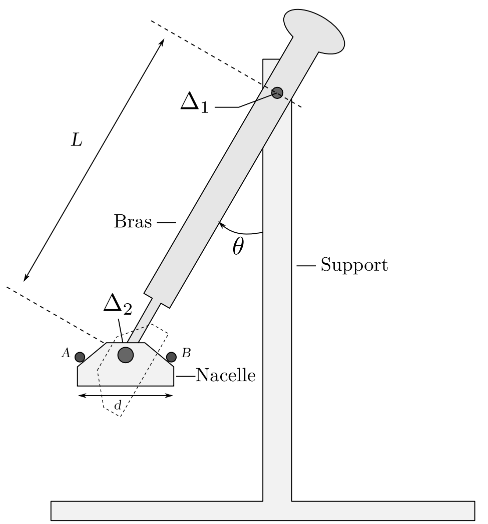


1. Déterminer la vitesse $v_1(t)$ et la position $x_1(t)$ de la première voiture en fonction du temps.
2. Déterminer la position x_{1f} de la voiture 1 au moment où elle s'arrête.
3. Déterminer la position x_{2i} de la voiture 2 au moment où elle commence à freiner.
4. Montrer que pour $t > t_r$ la vitesse $v_2(t)$ et la position $x_2(t)$ de la voiture 2 sont données par
$$x_2(t) = -d + v_0 t - \frac{1}{2} b(t - t_r)^2 \quad \text{et} \quad v_2(t) = v_0 - b(t - t_r)$$
5. Déterminer la position x_{2f} de la voiture 2 au moment où elle s'arrête.
6. Déterminer une condition sur la distance d pour que la seconde voiture s'arrête derrière la première.
7. A.N. avec $v_0 = 108$ km/h, $a = 6\,\mathrm{ms^{-2}}$ et $b = 7{,}5\,\mathrm{ms^{-2}}$
8. Commenter le résultat ! La condition exprimée à la question 6 est-elle suffisante pour s'assurer d'éviter un accident ? Expliquer brièvement comment procéder pour trouver une condition adéquate.

Exercice 4 : Manège "Booster"

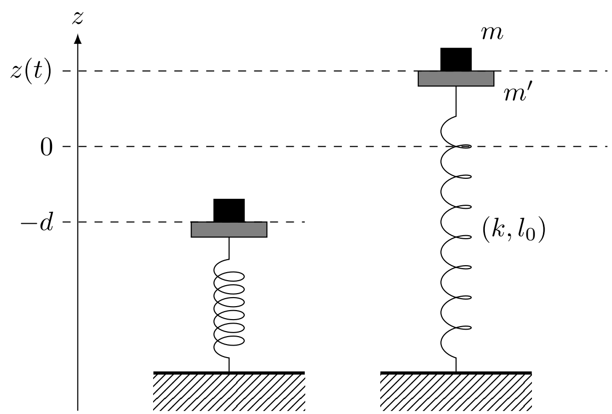
Le manège "Booster" de la foire de Troyes est constitué de trois parties : un support, un bras et une nacelle. Le bras est fixé au support par un axe motorisé Δ_1 et la nacelle est fixée au bras par l'axe Δ_2. La rotation de la nacelle autour de l'axe Δ_2 est soit libre, soit bloquée par un système de frein. Lorsque la rotation est libre, on considérera que le plancher de la nacelle reste toujours horizontal.
L'orientation du bras par rapport au support est repérée par l'angle θ.
On étudie le mouvement de la nacelle dans le référentiel du support.

1. Définir les caractéristiques de la trajectoire du solide constituant la nacelle lorsque sa rotation est libre.
2. Dans ces conditions, exprimer la vitesse des personnes A et B en fonction de L, d et $\omega = \dot{\theta}$.
3. Définir les caractéristiques de la trajectoire du solide constituant la nacelle lorsque sa rotation est bloquée par le frein.
4. On suppose que la nacelle est bloquée dans l'orientation représentée en pointillés sur la figure. Exprimer les vitesses des personnes A et B en fonction de L, d et $\omega = \dot{\theta}$.
5. Lorsque le manège tourne à vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante dans cette configuration exprimer l'accélération des personnes A et B. Utiliser le système de coordonnées le mieux adapté.
6. En observant le manège, on estime $\omega \simeq 1\,\mathrm{rad/s} \pm 20\%$, $L = 30\,\mathrm{m}$ et $d = 1\,\mathrm{m}$. Calculer l'accélération subie par A et celle subie par B. Le manège annonce que les passagers subissent une accélération de $4g$. Cela est-il compatible avec les observations ?



Exercice 5 : Décollement d'une masse

Un point matériel M de masse m est posé sur un plateau horizontal de masse m', lui-même attaché à un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. On suppose que l'ensemble est astreint à se déplacer uniquement suivant la verticale. À l'instant $t = 0$, l'ensemble étant à l'équilibre, on appuie sur le plateau qui se déplace vers le bas d'une distance d, et on le lâche sans vitesse initiale.
On repère la position de la masse et du plateau par la cote $z(t)$ mesurée sur un axe vertical ascendant (Oz) ayant pour origine la position à l'équilibre.



1. Montrer que la longueur du ressort l_{eq} lorsqu'il se trouve à l'équilibre est donnée par :
$$l_{eq} = l_0 - \frac{(m+m')g}{k}$$
2. On commence par supposer que le contact entre la masse et le plateau est maintenu. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.
3. Résoudre l'équation différentielle précédente pour montrer que l'altitude $z(t)$ du plateau est donnée par :
$$z(t) = -d\cos(\omega_0 t)$$
On exprimera ω_0 en fonction de k, m et m'.
4. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, exprimer la réaction $\vec{R}$ exercée par le plateau sur la masse m.
5. La masse reste en contact avec le plateau tant que $\vec{R}.\vec{e}_z > 0$. Donner une condition sur d pour que la masse reste toujours en contact avec le plateau.
6. La condition précédente n'étant pas remplie, montrer que la masse décollera du plateau pour lorsqu'elle se trouvera à une altitude $z_d = \frac{g}{\omega_0^2}$.
7. Montrer alors que la vitesse de la masse suivant l'axe (Oz) est :
$$\dot{z}(t) = d\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2}$$

8. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que la hauteur maximale atteinte par la masse m est :

$$z_{max} = \frac{g}{2\omega_0^2} + \frac{d^2\omega_0^2}{2g}$$