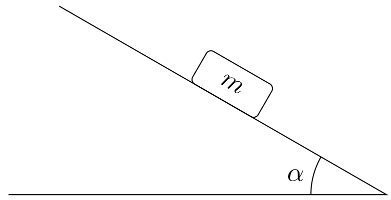
DS6 : Mécanique et cinétique chimique

Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : Glissement sur un plan incliné (TD12)

Un mobile de masse m assimilé à un point matériel glisse sans frottement le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



1. Faire un bilan des forces qui s'appliquent au mobile et les dessiner sur le schéma.
2. Déterminer l'équation du mouvement du mobile matériel lorsque sa vitesse initiale est nulle (dans le référentiel du plan incliné). On prendra soin de définir correctement le système de coordonnées utilisé.

On considère maintenant qu'il existe des frottements solides entre le mobile et le plan incliné caractérisés par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement dynamique μ_d

3. Déterminer l'angle α_m minimum pour que le mobile initialement immobile se mette spontanément en mouvement.
4. Pour un angle $\alpha > \alpha_m$ déterminer l'équation du mouvement du mobile.

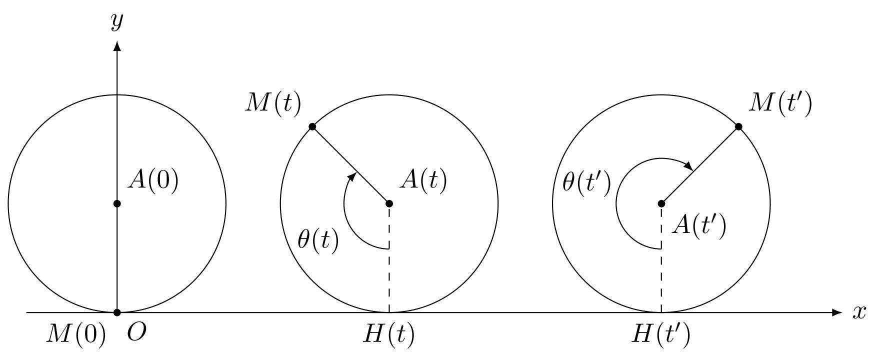
Exercice 2 : La cycloïde

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut expérimentalement observer cette courbe en observant la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

Cette courbe présente d'étonnantes propriétés que nous allons développer, et a notamment intéressé le physicien néerlandais Huygens.

I. **Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.**

On note M un point donné d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R roulant sans glissement sur une surface plane. A l'instant initial ($t = 0$ s) on suppose que le point M est confondu avec l'origine O d'un repère (Oxy). On note H(t) le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox) **qui dépend du temps car la roue avance**. La position de M à l'instant t est repérée par l'angle orienté $\theta(t) = (\vec{AH}, \vec{AM})$, le sens positif étant le sens horaire.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Démontrer que la distance OH est donnée par la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. Exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}(t)$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, dirigeant les axes Ox et Oy, en fonction de R et de $\theta(t)$.
3. En décomposant judicieusement le vecteur $\overrightarrow{OM}$, montrer que les équations horaires du mouvement s'écrivent sous la forme
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & R[\theta(t) - \sin\theta(t)] \\ y(t) & = & R[1 - \cos\theta(t)] \end{array} \right.$$

II. **Vecteur vitesse.**

Afin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle $\mathcal{C}$ a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0.

4. En utilisant la relation établie à la question I.1, montrer que la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Donner sa valeur en fonction de R et de v_0.

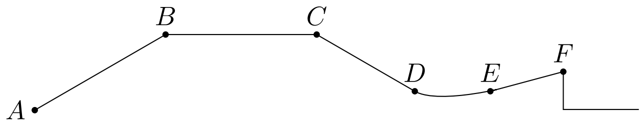
5. Montrer que le mouvement de M dans le référentiel (Axy), de centre A et d'axes Ax et Ay parallèles à Ox et Oy, est circulaire uniforme.
6. Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de R, θ et $\dot{\theta}$.
7. Représenter sur un même schéma la position du cercle $\mathcal{C}$ et la trajectoire de M au cours du temps (la fameuse cycloïde), en dessinant l'allure du vecteur vitesse $\vec{v}$ pour les valeurs suivantes du paramètre θ : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$, et $\theta_4 = 2\pi$
8. Déterminer la norme $v = |\vec{v}(M/\mathcal{R})|$ de la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0 et de θ.
9. Démontrer la relation trigonométrique $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$. Et l'utiliser pour simplifier l'expression précédente de v. Représenter graphiquement $v(t)$ en indiquant la valeur de v_0 sur le graphique.

III. **Vecteur accélération.**

10. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0, R et θ.
11. Sur le dessin de la question II..7, représenter l'allure du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour les valeurs θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4.
12. On dit que le point M est accéléré lorsque la norme de sa vitesse augmente. Dans quelles zones le point M est-il accéléré ou décéléré ?
13. En quoi les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour $\theta_4 = 2\pi$ présentent-ils un caractère surprenant ?
14. Montrer que la norme $a = |\vec{a}(M/\mathcal{R})|$ du vecteur accélération de M dans $\mathcal{R}$ est constante. Calculer sa valeur pour un pneu de voiture de rayon $R = 35\,\text{cm}$ et tel que $v_0 = 130\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.
15. Montrer que $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est toujours dirigé de M vers A.

Exercice 3 : Saut à ski

On s'intéresse à la dynamique des différentes étapes d'un saut à ski. Le saut est décomposé en 4 étapes : Le remonte-pente (AB), une partie plate (BC), la descente (CD) et le tremplin (EF). Le skieur est assimilé à un point matériel.



Le skieur remonte la pente (AB) inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale à vitesse constante. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant la même direction que la perche qui forme un angle $\beta = 20°$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et par l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\vec{F_1}$ de valeur 65N, opposée au mouvement.

1. Faire un schéma représentant la pente, la perche les angles α et β. Représenter toutes les forces subies par le skieur.
2. Justifier pourquoi on peut affirmer que la somme des forces appliquées au skieur est nulle.
3. Déterminer la valeur de la force exercée par la perche sur le skieur.

Arrivé au sommet B, le skieur lâche la perche avec une vitesse horizontale de $3{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. L'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur $F_2 = 42\,\text{N}$.

4. Faire un bilan des forces appliquées au skieur
5. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ du skieur en fonction du temps.
6. Intégrer l'équation précédente pour trouver $v(t)$ et $x(t)$. Quelle distance le skieur va-t-il parcourir avant de s'arrêter ?

Le skieur aborde la pente (CD) inclinée d'un angle $\alpha' = 35°$ avec l'horizontale. Il subit maintenant une force de frottement F_3 proportionnelle au carré de sa vitesse $F_3 = kv^2$ avec $k = 0{,}56\,\text{Ns}^2\text{m}^{-2}$

7. Justifier pourquoi la vitesse du skieur augmentera jusqu'à une vitesse limite v_l.
8. Lorsqu'il atteint la vitesse v_l le mouvement du skieur est rectiligne homogène, déterminer la valeur de v_l

Il aborde le tremplin (EF) incliné d'un angle $\gamma = 15°$ avec l'horizontale, on ne prend pas en compte les forces exercées par l'air. On considère également que sa vitesse en F vaut $25\,\text{ms}^{-1}$.

9. Quelles sont les forces exercées sur le skieur lors du saut ?
10. Déterminer les équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du skieur.
11. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. On pourra prendre le point F comme origine du repère.
12. Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5 m au dessous du point F.

Données :
Taille du skieur : $h = 1{,}8\,\text{m}$, masse du skieur : $m = 80\,\text{kg}$, $AB = 150\,\text{m}$, $g = 9{,}8\,\text{ms}^{-2}$

Exercice 4 : Boire ou conduire...Extrait de concours sup

Un homme boit 66 cℓ d'une bière forte. L'objet du problème sera de savoir combien de temps il devra attendre avant de reprendre sa voiture sachant qu'en France il n'est autorisé à conduire que si la teneur en alcool de son sang est inférieure à 0,5 g/ℓ.

La cinétique de décomposition de l'alcool se fait en deux phases et peut être modélisée de la façon suivante :

— 1ère phase : passage de l'alcool à travers la paroi stomacale dans le sang.

— 2ème phase : oxydation de l'alcool dans le sang.

Nous allons étudier successivement ces deux phases avant d'en tirer les conclusions quant aux conseils à donner à cet automobiliste.

I — Passage de l'alcool à travers la paroi stomacale

La réaction peut se modéliser de la façon suivante :

$$\mathrm{CH_3CH_2OH_{estomac}} \longrightarrow \mathrm{CH_3CH_2OH_{sang}} \tag{1}$$

On adopte les conventions suivantes :

— l'estomac est considéré comme un milieu réactionnel de volume constant V_1 égal pour chaque expérience au volume d'alcool absorbé ;

— on note $[\mathrm{CH_3CH_2OH_{estomac}}] = C_1 = C_0 - x$; C_0 étant la concentration initiale, c'est à dire au moment de l'absorption.

On réalise l'expérience suivante : un homme boit 250 mℓ d'un apéritif contenant 1 mole d'éthanol. On mesure la concentration C_1 de l'éthanol dans l'estomac en fonction du temps. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous

t (min)	0	1.73	2.8	5.5	18	22
C_1 (mol.ℓ^{-1})	4.0	3.0	2.5	1.6	0.2	0.1

1 Définir la vitesse de disparition de l'alcool dans l'estomac. Cette vitesse sera notée v_1.

2 Montrer que v_1 suit une loi cinétique d'ordre 1. Déterminer la valeur de la constante de vitesse k_1 (sans oublier son unité !)

3 Le sang et les autres liquides contenus dans le corps seront considérés comme un milieu réactionnel unique, dénommé “sang”, de volume V_2 = 40 L constant pour toutes les expériences. Calculer la concentration C_2 de l'alcool dans le sang à $t = 18$ min dans le cas où on admet qu'aucune oxydation de l'alcool ne s'est produite.

4 Démontrer que la vitesse v_1 de disparition de l'alcool dans l'estomac et la vitesse d'apparition, notée v, de l'alcool dans le sang sont reliées par la formule :

$$v = \frac{V_1}{V_2} v_1 \tag{2}$$

II — Oxydation de l'alcool dans le sang

On injecte directement une certaine quantité d'alcool dans le sang et on détermine la concentration en fonction du temps. (on suppose que l'injection est instantanée et que la concentration de l'alcool dans le sang est uniforme)

t (min)	0	120	240	360	480	600	720
C_2 (10^{-2}mol/ℓ)	5.00	4.13	3.26	2.39	1.52	0.65	0.00

5 Définir la vitesse d'oxydation de l'alcool dans le sang (vitesse de disparition). Cette vitesse sera notée v_2.

6 Montrer que l'oxydation suit une loi cinétique d'ordre 0, c'est à dire que $v_2 = k_2$. Déterminer k_2 (avec son unité !)

III — Boire ou conduire...

Pour déterminer le temps que la personne devra attendre avant de conduire, on est amené à étudier le phénomène absorption-oxydation de l'alcool dans son ensemble. On fait alors l'hypothèse simplificatrice que les lois de vitesse démontrées séparément restent valables.

7 Calculer la concentration maximale, en mol/ℓ, tolérée en France de l'alcool dans le sang. (La masse molaire de l'éthanol vaut 46 g/mol, et le taux maximal d'alcoolémie est fixé à 0,5 g/ℓ).

8 Exprimer la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang, $\frac{dC_2}{dt}$, en fonction des vitesses v et v_2 puis en fonction de la concentration C_1 de l'alcool dans l'estomac au temps t, des constantes k_1 et k_2 , des volumes V_1 et V_2 .

9 En déduire que $C_2 = C_0 \dfrac{V_1}{V_2}\big(1 - \exp(-k_1 t)\big) - k_2 t$.

En buvant ses deux bières à 8%, le sujet absorbe 66 cℓ et 0.9 mole d'alcool.

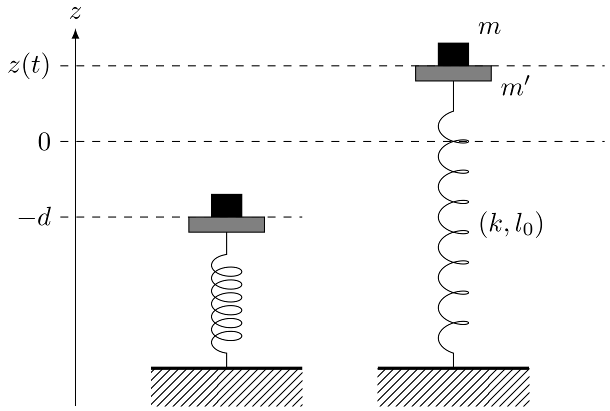
10 Déterminer l'instant t_{max} pour lequel la concentration en éthanol est maximale dans le sang.

11 Calculer cette concentration. Peut-il conduire ?

12 On remarque que au delà de t_{max} la courbe peut s'apparenter à une droite. Quelle est la pente de cette droite ? En déduire le temps au bout duquel l'automobiliste pourra reprendre sa voiture.

Exercice 5 : Décollement d'une masse

Un point matériel M de masse m est posé sur un plateau horizontal de masse m', lui-même attaché à un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k.
On suppose que l'ensemble est astreint à se déplacer uniquement suivant la verticale. À l'instant $t = 0$, l'ensemble étant à l'équilibre, on appuie sur le plateau qui se déplace vers le bas d'une distance d, et on le lâche sans vitesse initiale.
On repère la position de la masse et du plateau par la cote $z(t)$ mesurée sur un axe vertical ascendant (Oz) ayant pour origine la position à l'équilibre.



1. Montrer que la longueur du ressort l_{eq} lorsqu'il se trouve à l'équilibre est donnée par :

$$l_{eq} = l_0 - \frac{(m+m')g}{k}$$

2. On commence par supposer que le contact entre la masse et le plateau est maintenu. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.
3. Résoudre l'équation différentielle précédente pour montrer que l'altitude $z(t)$ du plateau est donnée par :

$$z(t) = -d\cos(\omega_0 t)$$

   On exprimera ω_0 en fonction de k, m et m'.
4. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, exprimer la réaction $\vec{R}$ exercée par le plateau sur la masse m.
5. La masse reste en contact avec le plateau tant que $\vec{R}.\vec{e}_z > 0$. Donner une condition sur d pour que la masse reste toujours en contact avec le plateau.
6. La condition précédente n'étant pas remplie, montrer que la masse décollera du plateau pour lorsqu'elle se trouvera à une altitude $z_d = \frac{g}{\omega_0^2}$.
7. Montrer alors que la vitesse de la masse suivant l'axe (Oz) est :

$$\dot{z}(t) = d\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2}$$

8. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que la hauteur maximale atteinte par la masse m est :

$$z_{max} = \frac{g}{2\omega_0^2} + \frac{d^2\omega_0^2}{2g}$$