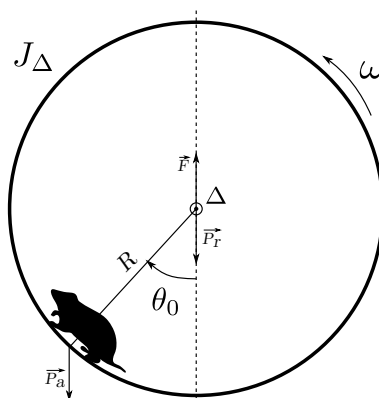


## DS8 : Mécanique et Induction

Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

### Problème 1 : UN HAMSTER DANS SA CAGE

1. Les forces qui s'exercent sur la roue sont le poids du hamster, le poids de la roue et la réaction de l'axe de rotation sur la roue. Comme la roue est globalement immobile, on en conclut que la somme des ces forces est nulle.



2. Le moment cinétique de la roue du hamster est  $L_\Delta = J_\Delta \omega$ .
3. D'après le théorème du moment cinétique :  $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_a) = mgR \sin \theta_0$ . La réaction de l'axe de rotation et le poids de la roue passant par l'axe, leur moment est nul. On a donc l'accélération angulaire :  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{mgR \sin \theta_0}{J_\Delta}$ .
4. On a montré à la question précédente que l'accélération angulaire de la roue est constante, donc  $\omega(t) = \frac{mRg \sin \theta_0}{J_\Delta} t$ .
5. L'énergie cinétique de la roue est  $E_c(t) = \frac{1}{2} J_\Delta \omega(t)^2$ . Donc  $E_c(t) = \frac{(mRg \sin \theta_0)^2}{2J_\Delta} t^2$ .
6. Le hamster court à une vitesse  $v$ , la vitesse angulaire correspondante est  $\omega = \frac{v}{R}$ . Le temps qu'il met pour atteindre cette vitesse est :  $t = \frac{J_\Delta \omega}{mRg \sin \theta_0} \simeq 0,3 \text{ s}$ .
7. L'énergie cinétique de la roue est alors  $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 = 70 \text{ mJ}$ .
8. Lorsque la vitesse de course du hamster est constante, l'accélération angulaire de la roue est nulle et donc le moment des forces appliquées sur la roue doit également être nul. C'est le cas uniquement pour  $\theta_0 = 0$ .
9. On procède de la même manière que dans la question 3 en ajoutant au moment du poids le couple résistant des frottements, il faut donc remplacer  $mRg \sin \theta_0$  par  $mRg \sin \theta_0 - \Gamma_\Delta$ .
10. Dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante l'accélération angulaire étant nulle, il faut que la somme des moments des forces appliquées à la roue soit nulle, et donc le moment du poids doit compenser exactement le couple résistant du aux frottements. On a alors  $mRg \sin \theta_0 - \Gamma_\Delta = 0$  et donc  $\theta_0 = \arcsin \frac{\Gamma_\Delta}{mRg}$ .
11. Lorsque le hamster court, la vitesse de rotation de la roue est  $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$ .
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, **son énergie cinétique est nulle** car sa vitesse est nulle dans le référentiel du laboratoire.  
Si on prend l'origine des abscisses au centre de la roue, son énergie potentielle de pesanteur est  $E_p = mgh = -mgR$ .  
L'énergie cinétique de rotation de la roue est  $E_{cR} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2$ .

L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies cinétiques et potentielles, soit  $E_m = -mgR + \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2$

13. Juste après que le hamster ne s'arrête de courir, les expressions de l'énergie cinétique de la roue et de l'énergie potentielle du hamster restent les mêmes en remplaçant  $\omega_0$  par  $\omega_1$ . Seulement maintenant l'énergie cinétique du hamster n'est plus nulle, il avance à la même vitesse que la roue donc son énergie cinétique est :  $E_{cH} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mR^2 \omega_1^2$ .  
L'égalité des énergies mécaniques avant et après l'arrêt du hamster donne :

$$\frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 - mgR = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_1^2 - mgR + \frac{1}{2} mR^2 \omega_1^2 \quad \text{soit} \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{J_\Delta}{J_\Delta + mR^2}}$$

14. L'énergie mécanique reste constante car on néglige les frottements entre la roue et son axe. Elle vaut

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2}_{E_{cR}} + \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\omega^2}_{E_{cH}} - \underbrace{mgR\cos\theta}_{E_p} = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta$$

15. En écrivant que l'énergie mécanique est constante on obtient

$$\frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega^2 - mgR\cos\theta = \frac{1}{2}(J_\Delta + mR^2)\omega_1^2 - mgR \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1^2 - \frac{2mgR(1 - \cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}}}$$

16. Lorsque le hamster est au sommet de la roue, il subit son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  dirigé verticalement vers le bas, et la réaction de la roue  $\vec{K}$  dirigée également vers le bas (car l'accélération tangentielle du hamster est nulle en ce point).  
 17. L'accélération normale s'écrit en coordonnées polaires (lorsque le rayon de la trajectoire est constant) comme  $\vec{a}_r = -R\omega^2\vec{e}_r$ . Ce qui en utilisant la question 15 donne l'expression demandée :

$$\vec{a} = -R\left(\omega_1^2 - \frac{2mgR(1 - \cos\theta)}{J_\Delta + mR^2}\right)\vec{e}_r$$

18. En appliquant le PFD au hamster lorsqu'il se trouve au sommet de la trajectoire ( $\theta = \pi$ ) et en le projetant sur  $\vec{e}_r$ , on obtient :

$$-mg - K = ma_r = -mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) \quad \text{soit} \quad K = mR\left(\omega_1^2 - \frac{4mgR}{J_\Delta + mR^2}\right) - mg$$

Avec les valeurs numériques données, on trouve  $K < 0$ , ce qui ne permet pas au hamster de faire un looping.

19. En y regardant en détails, on remarque que la vitesse de rotation initiale de la roue  $\omega_0$ , même si elle restait constante après l'arrêt du hamster serait trop faible pour permettre un looping. Il faut donc déjà augmenter  $\omega_0$  et donc réduire  $R$  (le hamster ne peut pas courir plus vite !). Ensuite il faut aussi augmenter  $J_\Delta$  en lui installant une roue plus lourde

## Problème 2 : MOTEUR ASYNCHRONE (CENTRALE 2016)

- On peut faire l'hypothèse de l'ARQS si la taille  $d$  du circuit est faible et la fréquence  $f$  pas trop élevée. Plus précisément il faut que  $d \ll \frac{c}{f}$
- Lorsque  $i_1 > 0$  et  $i_2 > 0$  le champ magnétique  $\vec{B}_1 // \vec{u}_x$  et  $\vec{B}_2 // -\vec{u}_y$ .
- Le flux propre de la bobine (1) est  $\phi_p = L_S i_1 = NB_1 S = nl\pi A^2 \mu_0 n i_1 = \underbrace{\mu_0 n^2 \pi A^2 l}_{L_S} i_1$ . Avec  $n = 4/(2a)$ , on trouve

$$L_S \simeq 31 \text{ mH}$$

- $\vec{B}(O, t) = \vec{B}_1(O, t) + \vec{B}_2(O, t) = \mu_0 n i_1(t) \vec{u}_x - \mu_0 n i_2(t) \vec{u}_y$ . En utilisant les expressions de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  on obtient :  
 $\vec{B}(O, t) = \mu_0 n I_M (\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x - \cos(\omega_0 t + \alpha) \vec{u}_y)$ .  
 - Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  :  $\vec{B}(O, t) = \mu_0 n I_M (\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x + \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y)$ .  
 - Pour  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  :  $\vec{B}(O, t) = \mu_0 n I_M (\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x - \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y)$ .
- On peut qualifier ce champ magnétique de champ magnétique tournant car la direction de  $\vec{B}$  tourne dans le plan  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  à la vitesse angulaire  $\omega_0$ .  
 Lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  le champ tourne dans le sens trigonométrique (de  $\vec{u}_x$  vers  $\vec{u}_y$ ).  
 Lorsque  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  le champ tourne dans le sens opposé (de  $\vec{u}_y$  vers  $\vec{u}_x$ ).
- Avec les valeurs numériques données, on trouve  $||\vec{B}|| \simeq 1,3 \times 10^{-3} \text{ T}$ .
- On a  $r = \frac{\rho l_c}{S}$ . Avec  $l_c = 2\pi A \times l \times \frac{4}{(2a)}$ , on trouve  $r \simeq 34 \Omega$ .
- En régime sinusoïdal forcé, dans le premier circuit, on a

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}}{jL_S\omega_0 + r} \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 = \frac{\underline{u}}{j\left(L_S\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) + r}$$

Le déphasage  $\alpha$  est alors

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg(\underline{i}_2) - \arg(\underline{i}_1) = \arg(\underline{u}) - \arctan\left(\frac{L_S\omega_0 - 1/C\omega_0}{r}\right) - \arg(\underline{u}) + \arctan\left(\frac{L_S\omega_0}{r}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{L_S\omega_0}{r}\right) - \arctan\left(\frac{L_S\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{r}\right) \end{aligned}$$

9. Pour obtenir un déphasage de  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  on doit avoir :

$$\arctan\left(\frac{L_S\omega_0}{r}\right) - \arctan\left(\frac{L_S\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{r}\right) = \frac{\pi}{2}$$

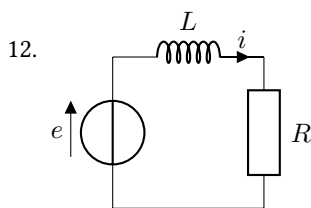
En utilisant  $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(x)}$  on obtient :

$$\frac{L_S\omega_0 - 1/C\omega_0}{r} = -\frac{r}{L_S\omega_0}$$

soit en isolant  $C$  on obtient :

$$C = \frac{L_S}{r^2 + L_S^2\omega_0^2} \simeq 100 \mu\text{F}$$

10. l'angle entre la normale à la bobine et le champ magnétique varie donc le flux de  $\vec{B}$  à travers la bobine varie. Il y a donc une fem induite dans la bobine qui provoque la circulation d'un courant.
11. La bobine (S) étant parcourue par un courant électrique elle possède un moment magnétique  $\vec{M}$  qui subit un couple de forces  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  qui va la mettre en rotation.



13. On a  $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dNB_0S\cos(\Omega t)}{dt} = NB_0S\Omega \sin(\Omega t) = \Omega\phi_0 \sin(\Omega t)$

En appliquant la loi des mailles dans le circuit ci-dessus on obtient l'équation :  $e = L\frac{di}{dt} + Ri = \Omega\phi_0 \sin(\Omega t)$

14. On est en régime sinusoïdal forcé, on peut donc utiliser la notation complexe. On a alors  $i(t) = i_m \sin(\Omega t - \psi) = i_m \cos(\Omega t - \psi - \pi/2)$ . Donc l'intensité complexe associée est  $\underline{i}(t) = i_m e^{j(\Omega t - \psi - \pi/2)}$ .

On a également  $e = \Omega\phi_0 \sin(\Omega t) = \Omega\phi_0 \cos(\Omega t - \pi/2)$  et donc  $\underline{e} = \Omega\phi_0 e^{j(\Omega t - \pi/2)}$ .

L'équation électrique ci-dessus devient :  $\underline{e} = \Omega\phi_0 e^{j(\Omega t - \pi/2)} = jL\Omega \underline{i} + R\underline{i}$

On en déduit que  $\underline{i} = \frac{\Omega\phi_0 e^{j(\Omega t - \pi/2)}}{R + jL\Omega} = i_m e^{j(\Omega t - \psi - \pi/2)}$

L'égalité des arguments donne

$$\Omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{L\Omega}{R} = \omega t - \psi - \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \psi = \arctan \frac{L\Omega}{R}$$

Et l'égalité des modules donne

$$i_m = |\underline{i}| = \frac{\Omega\phi_0}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$$

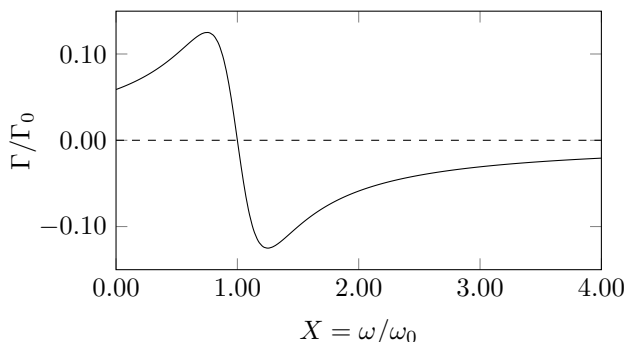
15. Le moment magnétique associé à la bobine plate est  $\vec{M} = Ni\vec{S}$
16. La bobine subit un couple de forces  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = Ni\vec{S} \wedge \vec{B}$ .
17.  $\Gamma(t) = NSi_m \sin(\Omega t - \psi) \times B_0 \times \sin(\Omega t)$
18. D'après la question précédente, on a  $\Gamma(t) = SB_0Ni_m (\sin^2(\Omega t) \cos \psi - \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \sin \psi)$
- Or  $\langle \sin^2(\Omega t) \rangle = \frac{1}{2}$  et  $\langle \cos \Omega t \sin \Omega t \rangle = 0$ . Donc on obtient :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{SB_0Ni_m \cos \psi}{2} = \frac{NSB_0}{2} \frac{\Omega\phi_0}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \cos\left(\arctan \frac{L\Omega}{R}\right)$$

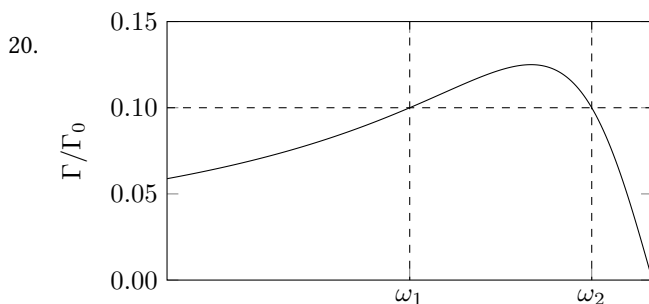
En utilisant  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  et en introduisant  $1 - X = \frac{\Omega}{\omega_0}$ , on obtient l'expression demandée avec

$$\Gamma_0 = \frac{\phi_0^2\omega_0}{2R} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{L^2\omega_0^2}{R^2}$$

- 19.



On remarque que pour  $X = 1$ , c'est à dire pour  $\omega = \omega_0$  le couple est nul (on s'y attendait). Le couple du moteur passe par une valeur maxiale autour de  $X = 0.7$ . Lorsque  $X > 1$  le couple subit par la bobine est un couple résistant, le moteur se comporte comme un générateur.



Lorsque la partie utilisatrice impose un couple moyen  $\langle \Gamma \rangle$  on a deux valeurs possibles de  $\omega$ . Imaginons que le moteur soit initialement à la vitesse de rotation  $\omega_2$ . Si une fluctuation fait très légèrement augmenter  $\omega$  alors le couple fourni par le moteur devient inférieur au couple utilisateur et le moteur va ralentir. Inversement si une fluctuation fait diminuer la vitesse de rotation, le couple fourni par le moteur augmente et devient plus important que le couple utilisateur, le moteur accélère. La position  $\omega_2$  est donc stable.

Le même raisonnement montre que la position  $\omega_1$  est instable.

21. La puissance mécanique moyenne fournie par le moteur est  $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \Gamma \rangle \omega$ . Avec  $\omega = X\omega_0$  on trouve :

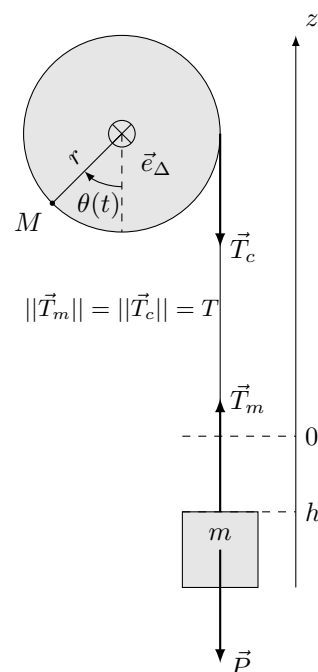
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\omega_0 \Gamma_0 X (1 - X)}{1 + \lambda^2 (1 - X)^2}$$

### Exercice 1 : TREUIL (TD13)

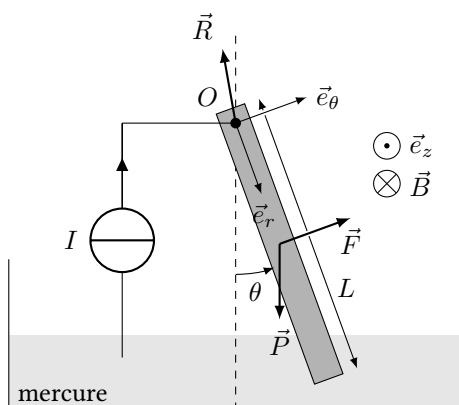
1. Lorsque le cylindre est bloqué, la masse  $m$  est immobile. Les forces qu'elle subit sont : son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et la tension  $\vec{T}$  du fil. Leur résultante étant nulle, on obtient  $\vec{T} = -m\vec{g}$ .
2. La hauteur de la masse est reliée à l'angle dont le cylindre a tourné par :  $h(t) = -r\theta(t)$
3. L'application du PFD à la masse  $m$  dont la hauteur est notée  $h(t)$ , en le projetant sur l'axe  $Oz$  vertical dirigé vers le haut donne  $m\ddot{h}(t) = T - mg$ .
4. Le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre est :

$$J_{\Delta} \dot{\omega} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = rT. \quad (1)$$

5. La questions 3 et 2 permettent d'obtenir  $T = m(g - r\ddot{\theta})$ . En substituant cette expression dans l'équation 1 on obtient :  $J_{\Delta} \dot{\omega} = mr(g - r\dot{\omega})$ , soit en isolant  $\dot{\omega}$  :  $\alpha = \dot{\omega} = \frac{mr g}{J_{\Delta} + mr^2}$
6.  $a = -r\alpha = -\frac{mr^2 g}{J_{\Delta} + mr^2}$  soit  $|a| = g \frac{1}{1 + J_{\Delta}/mr^2} < g$ . L'accélération est inférieure à l'accélération lors d'une chute libre qui vaut  $g$ .
7.  $a \simeq 3,27 \text{ ms}^{-2}$  et  $\alpha \simeq 32,7 \text{ rad s}^{-1}$
8. On peut facilement trouver l'énergie cinétique de l'ensemble car en l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservée et l'énergie cinétique gagnée par l'ensemble est égale à l'énergie potentielle perdue par la masse  $m$ . On a donc  $E_c = -mgh$ .



### Exercice 2 : ÉQUILIBRE D'UNE BARRE (TD14)



1. Le système de coordonnées le mieux adapté pour traiter ce problème est le **système de coordonnées cylindriques** dont les vecteurs de base sont  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .
2. Dans ce repère, la force  $\vec{F}$  de Laplace subie par la barre est  $\vec{F} = IL\vec{e}_r \wedge (-B\vec{e}_z)$  soit  $\vec{F} = ILB\vec{e}_\theta$
3. Voir schéma.
4. La barre est soumise à son poids qui s'exprime comme  $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ . La barre est à l'équilibre lorsque la somme des moments des forces appliquées est nulle, c'est à dire lorsque  $mg \sin\theta = IBL$  soit  $\theta = \arcsin\left(\frac{IBL}{mg}\right)$
5. Lorsque le bas de la barre sort du bain de mercure le contact électrique est rompu et la force de Laplace s'annule. La barre retombe alors dans le bain de mercure et la force de Laplace réapparaît. La barre va probablement osciller pendant un moment jusqu'à se stabiliser à la limite du bain de mercure (il restera probablement de petites oscillations car le contact avec le mercure doit exister mais ne peut pas être permanent).