

DS7 : Induction et thermodynamique – corrigé

Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : COMPRESSION ISOTHERME D'UN GAZ PARFAIT (TD16)

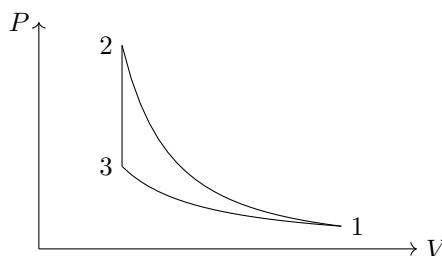
1. Pour que la compression soit vraiment isotherme il faut que les parois du cylindre conduisent la chaleur, qu'elles soient en contact avec un thermostat à la température T_1 et que la compression soit fait suffisamment lentement.
2. La pression est donnée par l'équation d'état des gaz parfaits : $P_2 V_2 = nRT_1$, or on a initialement $P_1 V_1 = nRT_1$, donc $P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2}$.
3. La pression du gaz est $P = \frac{nRT_1}{V} = P_1 \frac{V_1}{V}$. Le travail fourni par les forces de pression lors d'une petite variation de volume est $\delta W = -P_e dV = -P dV$. Donc le travail fourni pendant la compression par les forces de pression est $W = \int_{V_1}^{V_2} \delta W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -P_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$
4. Lorsque la compression est adiabatique, on a $P_1 V_1^\gamma = P V^\gamma$ donc $P = P_1 V_1^\gamma / V^\gamma$. On trouve le travail des forces de pression de la même manière qu'à la question précédente : $W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = -P_1 V_1^\gamma \frac{1}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$
5. En pratique pour effectuer une compression adiabatique, il faudrait que le cylindre soit isolé thermiquement, et il faut que la compression soit rapide.
6. Le travail fourni par les forces de pression lors d'une compression adiabatique est plus important que celui fourni lors d'une compression isotherme car le gaz s'échauffe et la pression augmente. l'énergie supplémentaire fournie sert à chauffer le gaz.

Exercice 2 : TRANSFORMATION CYCLIQUE D'UN GAZ PARFAIT

1. Pour un système au repos, la variation d'énergie interne ΔU d'un système thermodynamique entre deux états d'équilibre est donnée par $\Delta U = W + Q$, où W est le travail reçu par le système et Q la chaleur reçue par le système au cours de la transformation.
2. Au cours d'une transformation adiabatique, il n'y a pas d'échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur. Les transformations adiabatiques sont des transformations rapides.
3. Au cours d'une transformation isotherme, la température du système reste constante. Les transformations isothermes sont des transformations lentes pour que les échanges de chaleur aient le temps de se faire.
4. La transformation $1 \rightarrow 2$ est adiabatique, on a donc $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ et donc $P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$
5. Dans l'état 2 on peut écrire l'équation d'état des gaz parfait : $P_2 V_2 = nRT_2$ avec $P_1 V_1 = nRT_1$ on a

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} T_1 = \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1} T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \frac{V_2}{V_1} T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1$$

6. Diagramme (P, V) :



7. On choisit d'utiliser le premier principe entre 1 et 2. On a $\Delta U = W_{12} = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1)$. Soit

$$W_{12} = \frac{3}{2} nRT_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1 \right) = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1 \right)$$

8. La transformation $2 \rightarrow 3$ est isochore donc $W_{23} = 0$. Dans ces conditions, on a $\Delta U_{23} = Q_{23} = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2)$. Soit

$$Q_{23} = -W_{12} = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \right)$$

9. Au cours de la transformation $3 \rightarrow 1$, la température reste constante donc $\Delta U_{31} = 0$ et $W_{31} = -Q_{31}$. On a aussi :

$$W_{31} = - \int_{V_2}^{V_1} P dV = -nRT_1 \int_{V_2}^{V_1} \frac{1}{V} dV = -P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \quad \text{et} \quad Q_{31} = P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

10. Au cours d'un cycle $\Delta U = 0$ donc $W = -Q$. Et

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = P_1 V_1 \left[\frac{3}{2} \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) - \ln \frac{V_1}{V_2} \right]$$

11. On remarque sur le graphique de la question 6 que le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc le travail reçu par le système au cours d'un cycle est positif. Q est donc négatif. Le système reçoit du travail et fournit de la chaleur au milieu extérieur.
12. À chaque cycle l'eau du réservoir reçoit un peu de chaleur de la part du gaz, elle va donc s'échauffer. On ne pourra plus considérer le réservoir comme un thermostat.

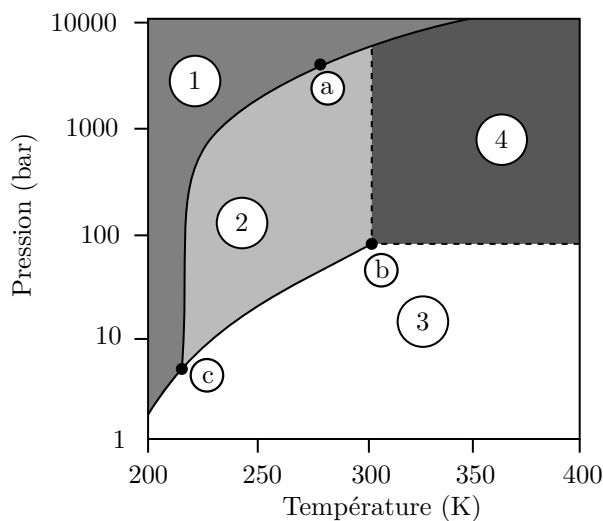
Exercice 3 : SÉQUESTRATION DU CO₂

Les activités humaines ont accru sensiblement le taux de la concentration de CO₂ dans l'atmosphère : autour de 280 ppm il y a 250 ans, il est actuellement de 387 ppm (soit une augmentation de 38 %). Afin de ne pas dépasser la limite de 450 ppm au-delà de laquelle les conséquences les plus dramatiques du réchauffement climatique seront inévitables de nombreuses options sont envisagées afin de limiter les rejets de CO₂ dans l'atmosphère.

Une première proposition un peu simple consiste à former des blocs de CO₂ solide à l'aide d'installations frigorifiques puis de les laisser tomber dans des fosses marines. On effectue les approximations suivantes :

- L'océan est un fluide homogène au repos, de température constante, incompressible et indilatable.
- Les blocs de CO₂ sont incompressibles et indilatables. Ils ont de plus une masse constante tout au long de la descente dans la fosse (approximation forte).

On donne ci-dessous le diagramme de phases de CO₂.



Caractéristiques des points a, b, c :

Point a, $T_a = 280 \text{ K}$, $P_a = 4 \times 10^3 \text{ bar}$;

Point b, $T_b = 304 \text{ K}$, $P_b = 70,4 \text{ bar}$;

Point c, $T_c = 216 \text{ K}$, $P_c = 5,11 \text{ bar}$.

FIGURE 1 – Diagramme du phases du CO₂.

- 1: solide ; 2: liquide ; 3: gaz ; 4: supercritique.
- Le point c est le point triple, les trois états solide, liquide et gaz coexistent. Le point b est le point critique, au-delà de ce point il n'y a plus de différence entre liquide et gaz.
- À pression (1 bar) et température (300 K) ambiantes, le CO₂ se trouve dans la zone 3 il est donc gazeux. Il va donc se sublimer.
- Pour que le CO₂ reste solide au fond d'une fosse océanique, la température étant de l'ordre de 280 K il faut que la pression soit d'au moins $P_{\min} = 4 \times 10^3 \text{ bar}$.
- La profondeur minimale pour que le CO₂ reste solide est donnée par $h_s = \frac{P_{\min} - P(0)}{\rho g} \approx 41 \text{ km}$. C'est bien plus profond que la fosse la plus profonde sur Terre (environ 13 km). Le CO₂ ne pourra donc pas rester solide, au mieux il sera liquide.
- Dans le modèle du gaz parfait, on considère que les particules du gaz sont ponctuelles et n'ont pas d'interactions à distance. Dans ces conditions on a $PV = nRT$.
- On calcule le produit PV pour les différentes valeurs données, on obtient :

$P \text{ (bar)}$	0,804	0,868	0,968	1,060	1,130	1,179
$V \text{ (m}^3\text{)}$	0,658	0,610	0,547	0,499	0,468	0,449
$PV \text{ (kJ)}$	52,9	52,9	52,9	52,9	52,9	52,9

On observe que le produit PV ne dépend pas de la pression P , ces données sont compatibles avec le modèle du gaz parfait.

On donne ci-dessous le diagramme de Clapeyron et des données thermodynamiques relatives à CO_2 .

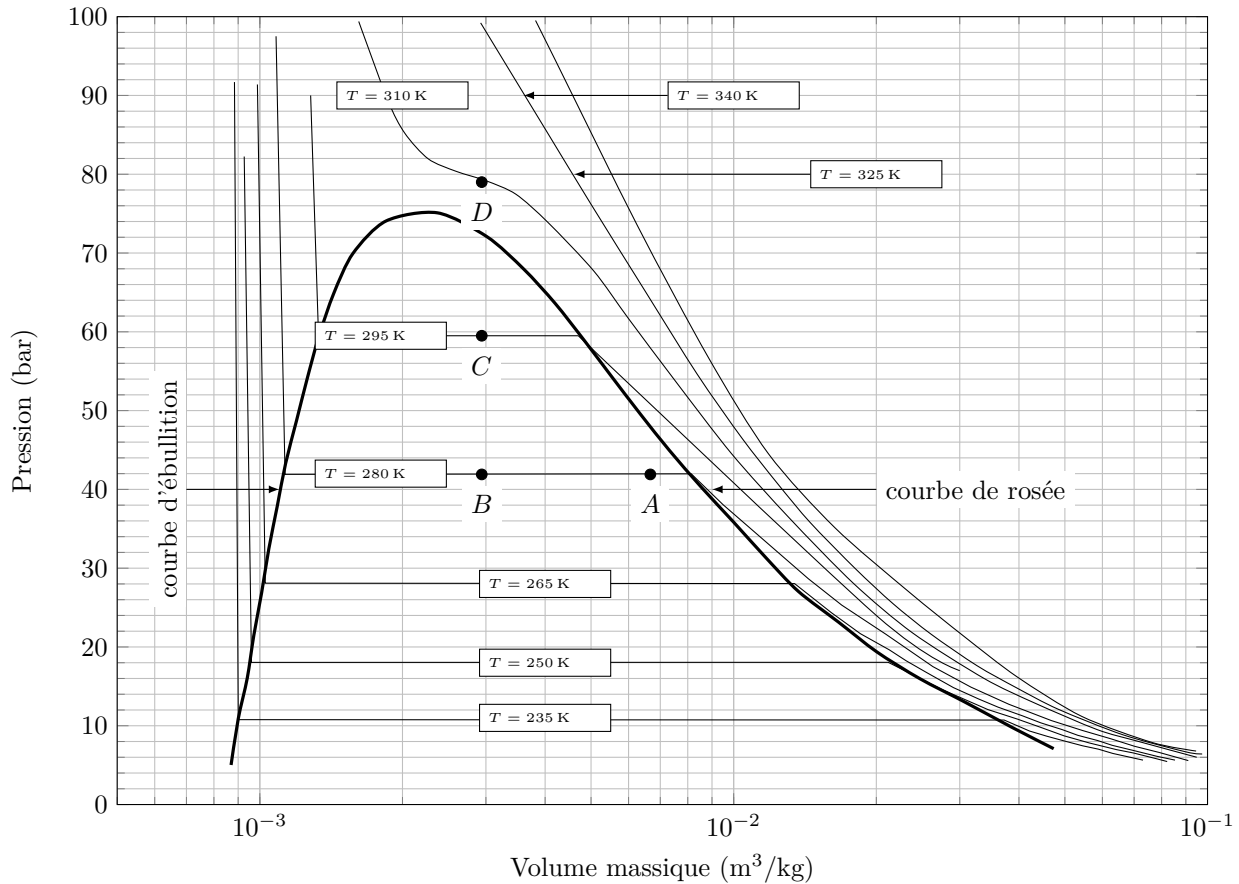


FIGURE 2 – Diagramme de Clapeyron du CO_2 . L'abscisse est logarithmique, sont représentées les isothermes pour les températures suivantes : 340 K, 325 K, 310 K, 280 K, 265 K, 250 K, 235 K

8. Voir diagramme.
9. Voir diagramme.
10. Sur les données thermodynamiques et sur le diagramme de Clapeyron, on observe qu'à 295 K et 59 bar, le volume massique du gaz n'est pas très différent de celui du liquide (il est moins de 4 fois plus grand). Il y a donc peu de chance pour que le gaz puisse être considéré comme parfait.
11. On peut calculer les coordonnées des points A, B, C et D sur le diagramme de Clapeyron. On a $n_0 = \frac{PV}{RT} \approx 404 \text{ mol}$, la masse correspondante est donc $m = M_{\text{CO}_2} n_0 \approx 18 \text{ kg}$.
12. Voir tableau ci-dessous.
13. La masse de vapeur est donnée par $m_v = m \frac{v - v_l}{v_g - v_l}$. Attention, l'échelle sur le graphique est logarithmique, on ne peut pas mesurer les distances graphiquement à la règle, il faut faire le calcul.
On obtient donc les données suivantes :

Point	A	B	C	D
Température (K)	280	280	295	310
Volume (ℓ)	120	53	53	53
Volume massique ($10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$)	6.67	2.94	2.94	2.94
État	L+V	L+V	L+V	Supercritique
Pression (bar)	41.9	41.9	59.5	79
Masse de vapeur (kg)	14.3	4.7	8.7	–

14. Entre A et B la pression est constante, le travail fourni pour comprimer le CO_2 est donc $W = -P(V_B - V_A)$. Avec $P = 41,9 \text{ bar}$, $V_A = mv_A \approx 120 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ et $V_B = mv_B \approx 53 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. On trouve $W \approx 281 \text{ kJ}$

Exercice 4 : MOTEUR ASYNCHRONE (CCP 2012)

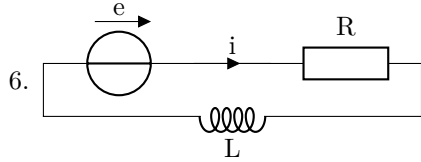
I – Étude du stator

1. Pour trouver l'unité de K on peut se rappeler que le flux propre est $\Phi = Li$ donc l'unité du flux est le HA et d'autre part $\Phi = BS$ donc c'est également des Tm^{-2} . K est en TA^{-1} et donc en Hm^{-2} .

2. La somme des trois champs magnétiques au point O est $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$. En utilisant le théorème de Ferraris, on trouve $\vec{B} = \frac{3}{2}KI_0(\cos(\omega_s t)\vec{e}_x + \sin(\omega_s t)\vec{e}_y)$, ce qui correspond bien à un champ tournant. La norme du champ magnétique est $B_0 = \frac{3}{2}KI_0$.
3. La vitesse de rotation du champ magnétique est $\omega_s = 2\pi f_s$, soit 3000 tr/min.

II – Entraînement du rotor

4. Le flux du champ magnétique à travers le cadre est $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n}S = B_0 S \cos(\alpha)$ où α est l'angle entre \vec{B} et \vec{n} . On voit sur le schéma que $\alpha = \omega_s t - \omega t$. Donc $\Phi = B_0 S \cos((\omega_s - \omega)t)$.
5. La fem induite dans le cadre est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$. Avec $\Phi = \Phi_0 \cos(\Omega t)$, donc $e = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$.



7. On applique la loi des mailles dans le circuit précédent, on obtient : $e - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$, mise sous une forme plus conventionnelle : $L\frac{di}{dt} + Ri = e(t)$
8. On transforme l'équation différentielle précédente en notation complexe, on obtient : $jL\Omega \underline{i} + R\underline{i} = \underline{e}$. Avec $\underline{e} = \Phi_0 \Omega e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$, on obtient bien $\underline{i}(t) = \frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$
9. I_M est l'amplitude de $i(t)$ est vaut $|\underline{i}(t)|$ soit $I_M = \frac{\Phi_0 \Omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}}$. $\Omega t - \pi/2 - \Psi = \arg(\underline{i})$ donc $\Psi = -\arg(\frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega}) = \arg(R + jL\Omega)$. Donc $\cos(\Psi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}}$ et $\sin(\Psi) = \frac{L\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} > 0$
10. La valeur efficace de $i(t)$ est $I_M/\sqrt{2}$ et pour $R \ll L\Omega$, $I_M \simeq \frac{\Phi_0}{L}$ donc $I_M \simeq 7 \times 10^{-3} \text{ A} = 7 \text{ mA}$
11. En pratique, on mesure une intensité efficace avec un ampèremètre en mode AC.
12. Le couple des forces de Laplace qui s'exerce sur un moment magnétique \vec{M} plongé dans un champ magnétique \vec{B} est $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$. Donc $\Gamma = I_M \sin(\Omega t - \Psi) S B_0 \sin(\Omega t) \vec{e}_z$. Et $\Gamma = I_M S B_0 \sin(\Omega t - \Psi) \sin(\Omega t)$
13. Avec la relation donnée, on trouve que $\Gamma = \frac{1}{2} I_M S B_0 (\cos(\Psi) - \cos(2\Omega t - \Psi))$. La valeur moyenne du second cosinus est nulle, et donc la valeur moyenne de Γ est

$$\Gamma_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0 \Omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \underbrace{S B_0}_{\Phi_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} = \left(\frac{\Phi_0^2}{2L} \right) \frac{R L \Omega}{R^2 + (L\Omega)^2} \quad (1)$$

14. La limite non nulle de Γ_m lorsque $\omega \rightarrow 0$ indique que le couple du moteur au démarrage n'est pas nul, contrairement au moteur synchrone qui possède un couple nul au démarrage. Le couple est moteur (positif) lorsque $\omega < \omega_s$ et résistant lorsque $\omega > \omega_s$.