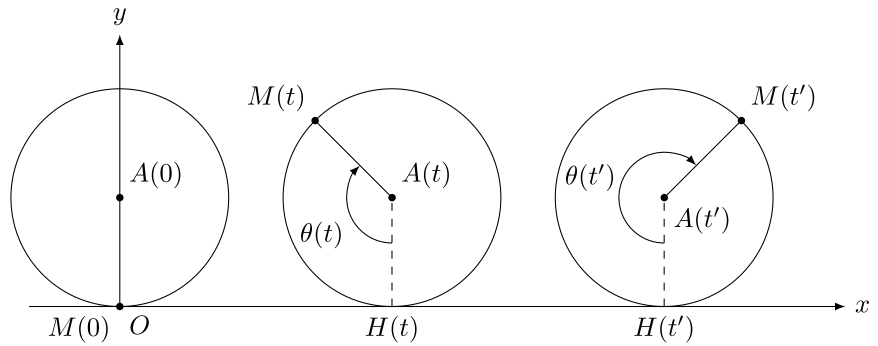
DS7 : Mécanique – corrigé

Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : Cycloïde

I. Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Comme la roue roule sans glisser sur le sol, la distance parcourue est égale à la longueur de l'arc de cercle compris entre $M(t)$ et $H(t)$, soit $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. En projetant le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur les axes Ox et Oy on obtient $\overrightarrow{AM} = -R\sin(\theta)\vec{u}_x - R\cos(\theta)\vec{u}_y$.
3. On décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$. Or on a déja vu que $\overrightarrow{OH} = R\theta(t)\vec{u}_x$, on voit clairement sur le schéma que $\overrightarrow{HA} = R\vec{u}_y$ et on a trouvé $\overrightarrow{AM}$ à la question précédente. En additionnant les trois on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = [R\theta(t) - R\sin(\theta)]\,\vec{u}_x + [R - R\cos(\theta)]\,\vec{u}_y$$

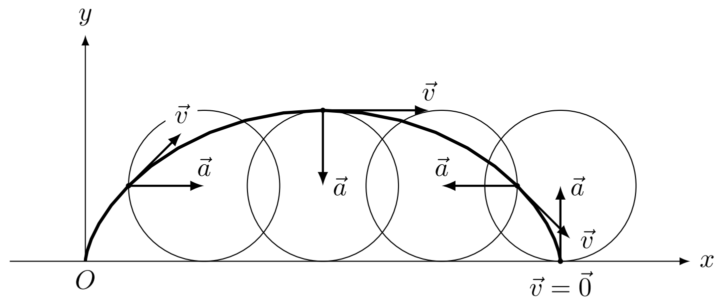
Ce qui correspond bien aux équations demandées.

II. Vecteur vitesse.

4. La vitesse du point A est la même que celle du point H et est constante. On a $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = v_0\vec{u}_x$. Or d'après la question I..1, $\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_x$. La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ est donc constante est vaut $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$.
5. Cette question est évidente, comme la distance AM est fixe égale à R, le mouvement est circulaire. En outre on vient de montrer que la vitesse de rotation est constante. Le mouvement est donc également uniforme.
6. Les composantes du vecteur vitesse s'obtiennent par dérivation de celles du vecteur position, on obtient :

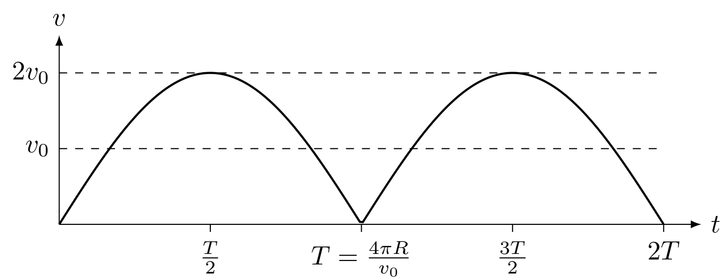
$$\begin{cases} v_x(t) = R\dot{\theta}(t)\,[1 - \cos\theta(t)] \\ v_y(t) = R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

7. Schéma :



8. La norme v de $\vec{v}$ est : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\dot{\theta}\sqrt{\sin^2\theta + (1 - \cos\theta)^2}$ soit $v = v_0\sqrt{2 - 2\cos\theta}$
9. On a $1 - \cos\theta = 1 - \cos 2\frac{\theta}{2} = 1 - (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

   L'expression précédente se simplifie alors en $v = 2v_0\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$



III. Vecteur accélération.

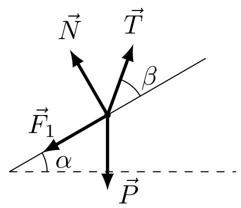
10. On obtient les composantes du vecteur accélération en dérivant celles du vecteur vitesse, on obtient :

$$\begin{cases} a_x = R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ a_y = R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

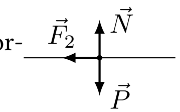
11. Voir schéma précédent.
12. La norme de v augmente pour $\theta \in [0, \pi]$ et elle diminue pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$
13. Le point correspondant à $\theta_4 = 2\pi$ est un *point de rebroussement*, la vitesse de M est nulle alors que l'accélération ne l'est pas.
14. La norme a du vecteur accélération vaut $a = R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R}$ et est donc constante. Pour le pneu en question elle vaut : $a \simeq 3700\,\mathrm{ms^{-2}}$
15. On peut exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme $\vec{a} = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{AM} = \dot{\theta}^2\overrightarrow{MA}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc effectivement toujours dirigé de M vers A.

Exercice 2 : Saut à ski

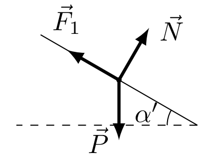
1. Schéma : (il ne faut pas oublier la composante $\vec{N}$ normale de la réaction du sol)



2. L'énoncé indique que le skieur remonte la piste *à vitesse constante*. Celà indique que son accélération est nulle, et d'après le PFD que la somme des forces appliquées est également nulle.
3. En projetant l'ensemble des forces sur l'axe $\vec{e}_x$ parallèle à la piste, orienté vers la droite, on a $-F_1 + T\cos\beta - P\sin\alpha = 0$. D'où $T = \frac{F_1 + P\sin\alpha}{\cos\beta}$. L'application numérique donne $T = 486\,\mathrm{N}$
4. Les forces appliquées au skieur sont : son poids $\vec{P}$, la réaction normale $\vec{N}$ de la piste et la force de frottement $\vec{F_2}$



5. Le PFD appliqué au skieur et projeté sur l'axe Ox horizontal orienté vers la droite donne : $m\ddot{x} = -F_2$. C'est l'équation différentielle demandée.
6. Une première intégration de l'équation différentielle donne $\dot{x}(t) = \dot{x}(0) - \frac{F_2}{m}t$. On l'intègre une seconde fois pour obtenir $x(t) = \dot{x}(0)t - \frac{F_2}{2m}t^2 + x(0)$. Le skieur s'arrête lorsque sa vitesse est nulle, c'est à dire au temps $t_f = \frac{m\dot{x}(0)}{F_2}$ et il parcours la distance $d = x(t_f) - x(0) = \frac{m\dot{x}^2(0)}{2F_2}$. A.N. : $d \simeq 9{,}8\,\mathrm{m}$
7. Au début de la descente, la vitesse du skieur est faible donc la force de frottement également, la résultante des forces appliquées au skieur est non nulle et il accélère. Mais plus il accélère, plus la force de frottement est importante et limite son accélération. Il existe donc une vitesse limite pour laquelle la force de frottement devient si intense qu'elle compense les autres forces (le poids), à cette vitesse le skieur n'accélère plus, sa vitesse reste constante.
8. Si le mouvement du skieur est rectiligne homogène, la résultante des forces appliquées est nulle. En projetant les forces sur l'axe de la piste orienté vers la droite on obtient : $-F_3 + mg\sin\alpha' = 0$ donc $F_3 = mg\sin\alpha' = kv_l^2$. Donc la vitesse limite est $v_l = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha'}{k}} \simeq 28{,}3\,\mathrm{m/s}$



9. Lors du saut, la seule force appliquée au skieur est son poids $\vec{P}$.
10. Le PFD projeté sur les axes x et y donne directement $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = -g$
11. En intégrant deux fois ces équations différentielles, et en tenant compte des conditions initiales, on trouve $x(t) = v_{0x}t$ et $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, avec $v_{0x} = v_0\cos\gamma$ et $v_{0y} = v_0\sin\gamma$.
12. S'il retombe sur une surface plane située à 5 m en dessous du point F, on a $y(t_f) = -5\,\mathrm{m} = v_{0y}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2$ dont la solution donne $t_f \simeq 1{,}87\,\mathrm{s}$. La distance parcourue est $D = x(t_f) = v_{0x}t_f \simeq 45\,\mathrm{m}$.

Exercice 3 : Distance de sécurité

1. La voiture 1 a une décélération a, donc $\ddot{x}_1 = -a$, que l'on intègre en $v_1(t) = \dot{x}_1 = v_0 - at$ puis en $x_1(t) = v_0t - \frac{1}{2}at^2$ car $x_1(0) = 0$.
2. Le temps t_1 auquel la voiture s'arrête est défini par $v_1(t_1) = 0$, on trouve $t_1 = \frac{v_0}{a}$. La distance parcourue par la voiture avant de s'arrêter est $d = x(t_1) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$.
3. La voiture 2 commence à freiner à $t = t_r$, pendant ce temps elle a parcouru la distance $d_r = v_0t_r$, elle se trouve donc à $x_{2i} = -d + v_0t_r$.
4. Pour $t > t_r$, la voiture 2 subit une décélération b. Donc $\ddot{x}_2(t) = -b$. En intégrant, on trouve $\dot{x}_2(t) = v_0 - b(t - t_r)$ et $x_2(t) = x_{2i} + v_0(t - t_r) - \frac{1}{2}b(t - t_r)^2$. En remplaçant x_{2i} par l'expression trouvée à la question précédente, on trouve bien $x_2(t) = -d + v_0t - \frac{1}{2}b(t - t_r)^2$ (Lors des résolutions d'équations différentielles, attention aux conditions initiales)
5. La voiture 2 s'arrête lorsque $v_2(t_{2f}) = 0$, soit $t_{2f} = t_r + \frac{v_0}{b}$. On trouve finalement $x_{2f} = -d + v_0t_r + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{b}$
6. Pour que la seconde voiture s'arrête derrière la première, il faut que $x_{2f} < x_{1f}$, ce qui impose la condition : $d > v_0t_r + \frac{1}{2}v_0^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$
7. Avec ces données on trouve $d > 3\,\mathrm{m}$.
8. Cette distance parait évidemment trop faible, on *sent bien* qu'une distance de sécurité plus grande est nécessaire. La condition de la question 6 n'est clairement pas suffisante pour éviter un accident, ça n'est pas parce que la voiture 2 termine

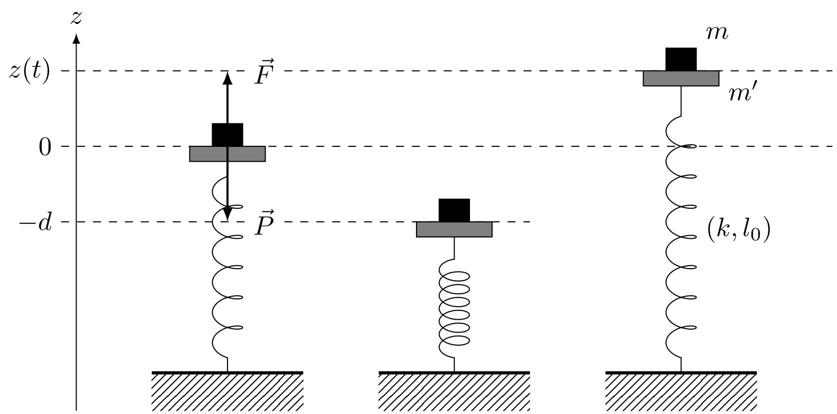
derrière la voiture 1 qu'elle ne l'aura pas dépassée au cours du ralentissement (penser au cas extrême ou la voiture 2 s'arrête instantanément). Pour trouver la bonne distance de sécurité il faut utiliser la condition $\forall t > 0 \quad x_2(t) < x_1(t)$.

Exercice 4 : Manège "Booster"

On étudie le mouvement de la nacelle dans le référentiel du support.

1. Lorsque la rotation de la nacelle est libre, le solide qui la constitue décrit un mouvement de translation circulaire.
2. Dans ces conditions, tous les points de la nacelle décrivent un cercle de rayon L à la vitesse angulaire ω. Les deux personnes A et B ont la même vitesse $v = L\omega$. (Leur vitesse ne dépend pas de d !)
3. Lorsque la rotation de la nacelle est bloquée par le frein, elle décrit un mouvement de rotation à la vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe Δ_1.
4. Dans cette configuration la personne A se trouve à une distance $l = L + \frac{d}{2}$ de l'axe de rotation, sa vitesse est donc $v_A = (L + \frac{d}{2})\omega$. La personne B se trouve à une distance $l = L - \frac{d}{2}$ de l'axe de rotation et sa vitesse est $v_B = (L - \frac{d}{2})\omega$
5. On utilise évidemment le système de coordonnées polaires pour étudier ce mouvement. La vitesse angulaire et le rayon étant constants, l'accélération de A est $\vec{a}_A = -(L + \frac{d}{2})\omega^2\vec{e}_r$ et $\vec{a}_B = -(L - \frac{d}{2})\omega^2\vec{e}_r$.
6. Les observations font apparaître une incertitude sur ω. L'accélération maximale possible de la nacelle est $a_{max} = 31 \times 1.2^2 \simeq 44{,}6\,\mathrm{m/s^2} \simeq 4.6g$. L'accélération minimale possible est $a_{min} = 29 \times 0.8^2 \simeq 18{,}6\,\mathrm{m/s^2} \simeq 1.9g$. Les observations sont donc **compatibles** avec les prétentions du manège (mais l'incertitude est assez élevée...)

Exercice 5 : Décollement d'une masse



1. Lorsque la masse est à l'équilibre, on a $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, en projetant cette équation sur l'axe (Oz) on obtient $-(m+m')g + k(l_0 - l_{eq}) = 0$ donc $l_{eq} = l_0 - \frac{(m+m')g}{k}$.
2. On applique le PFD à l'ensemble masse+plateau, en notant $M = m + m'$, on obtient : $\vec{F} + \vec{P} = M\vec{a}$ qui devient après projection sur l'axe z
$$-k(l - l_0) - Mg = M\ddot{z}$$
Or la longueur l du ressort est reliée à z par $l = l_{eq} + z$. On obtient donc l'équation
$$-k(l_{eq} + z - l_0) - Mg = M\ddot{z} \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{k}{M}z = \frac{k}{M}(l_0 - l_{eq}) - g = 0$$
3. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution est $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$. On trouve A et φ avec les conditions initiales $z(0) = -d$ et $\dot{z}(0) = 0$, qui donnent $A = -d$ et $\varphi = 0$. Donc on a bien
$$z(t) = -d\cos(\omega_0 t) \tag{1}$$
4. Les forces appliquées à la masse m sont : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force $\vec{R}$ exercée par le plateau. Le PFD donne $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ soit en projection sur l'axe $(0z)$: $-mg + R = m\ddot{z} = md\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$. Donc
$$R = mg + md\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$$
5. La masse reste en contact avec le plateau tant que R>0, or R ne s'annulera jamais si $md\omega_0^2 < mg$ soit $d < \frac{g}{\omega_0^2}$
6. La masse décolle du plateau lorsque $R = 0$, soit lorsque $\cos(\omega_0 t) = -\frac{g}{d\omega_0^2}$. En utilisant l'expression précédente de $z(t)$ on obtient bien $z_d = \frac{g}{\omega_0^2}$
7. La vitesse de la masse suivant l'axe (Oz) est $\dot{z}(t) = d\omega_0\sin(\omega_0 t)$. Or comme $\sin(\omega_0 t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t)}$, on a
$$\dot{z}(t) = d\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2}$$
8. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, on a $E_m(1) = E_m(2)$ où (1) est le moment du décollage et (2) celui où la masse est au sommet de sa trajectoire. On obtient donc
$$E_c(1) + E_p(1) = E_p(2) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m\dot{z}(1)^2 + mgz(1) = mgz(2)$$
En utilisant les expressions trouvées jusqu'ici on a :
$$\frac{1}{2}md^2\omega_0^2\left(1 - \left(\frac{g}{d\omega_0^2}\right)^2\right) + mg\frac{g}{\omega_0^2} = mgz_{max}$$
On trouve finalement
$$z_{max} = \frac{g}{2\omega_0^2} + \frac{d^2\omega_0^2}{2g}$$