DS7 : Cinétique et mécanique

Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.

Exercice 1 : Temps de demi-réaction d'après Mines psi

On étudie la cinétique à 20 °C de la réaction entre l'ion hydroxyde HO^- et le 1-bromo-2-méthylpropane (qui sera noté RBr dans la suite de l'énoncé) qui conduit à l'obtention du 2-méthylpropane-1-ol (qui sera noté ROH) :

$$R\mathrm{Br} + \mathrm{HO}^- \rightleftharpoons R\mathrm{OH} + \mathrm{Br}^-$$

Deux lois de vitesse sont *a priori* possibles pour cette réaction chimique :

- Loi 1 : ordre 1 par rapport à RBr et ordre 0 par rapport à HO^-
- Loi 2 : ordre 1 par rapport à RBr et ordre 1 par rapport à HO^-

On se propose de déterminer la loi de vitesse réelle grâce à l'analyse de la cinétique de la réaction.

I. **Temps de demi-réaction**
Dans le cas d'une réaction $A \rightarrow B$ admettant un ordre a par rapport à A, exprimer le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ en fonction de la constante de réaction k et de la concentration initiale en A notée $[A]_0$, pour les ordre $a = 0$, 1 et 2.

II. **Première expérience**
Une première expérience a pour conditions initiales $[R\mathrm{Br}]_0 = 0{,}010\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$ et $[\mathrm{HO}^-]_0 = 1{,}0\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$. On mesure la concentration en bromoalcane RBr à l'instant t :

t (min)	0	10	20	30	40
$[R\mathrm{Br}]$ (mmol.dm^{-3})	10	5,0	2,5	1,2	0,6

1 Comment s'appelle une expérience réalisée avec des concentrations initiales si différentes ?

2 Définir alors la constante de vitesse apparente k_{app} de la réaction dans le cadre de cette expérience.

3 À l'aide des valeurs expérimentales, déterminer trois valeurs de $t_{1/2}$ en utilisant différentes origines.

4 Cette réaction admet-elle un ordre ? Dans l'affirmative, quel est-il, et que vaut la constante de vitesse apparente ?

III. **Seconde expérience**
On recommence une expérience analogue à la précédente avec les concentrations initiales suivantes $[R\mathrm{Br}]_0 = 0{,}010$ mol.dm^{-3} et $[\mathrm{HO}^-]_0 = 0{,}50$ mol.dm^{-3}. On mesure alors l'évolution suivante des concentrations :

t (min)	0	10	20	30	40
$[R\mathrm{Br}]$ (mmol.dm^{-3})	10	7,1	5,0	3,5	2,5

5 Déterminer trois nouvelles valeurs de temps de demi-réaction

6 En déduire éventuellement un ordre partiel de la réaction et une constante de vitesse apparente.

7 En déduire l'ordre global de la réaction, ainsi que sa constante de vitesse k.

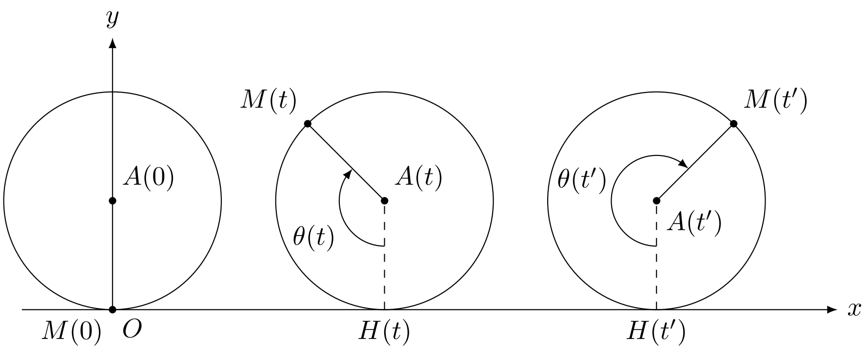
8 Quelle loi de vitesse doit-on retenir pour cette réaction ?

Exercice 2 : Cycloïde

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut expérimentalement observer cette courbe en observant la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

Cette courbe présente d'étonnantes propriétés que nous allons développer, et a notamment intéressé le physicien néerlandais Huygens.

I. **Equations paramétriques cartésiennes du mouvement.**
On note M un point donné d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R roulant sans glissement sur une surface plane. A l'instant initial ($t = 0$ s) on suppose que le point M est confondu avec l'origine O d'un repère (Oxy). On note H(t) le projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox) **qui dépend du temps car la roue avance**. La position de M à l'instant t est repérée par l'angle orienté $\theta(t) = (\vec{AH}, \vec{AM})$, le sens positif étant le sens horaire.



On souhaite déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction du paramètre θ. Le mouvement du point M est étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (Oxy).

1. Démontrer que la distance OH est donnée par la relation $\overline{OH} = R\theta(t)$.
2. Exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}(t)$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, dirigeant les axes Ox et Oy, en fonction de R et de $\theta(t)$.
3. En décomposant judicieusement le vecteur $\overrightarrow{OM}$, montrer que les équations horaires du mouvement s'écrivent sous la forme
$$\begin{cases} x(t) &= R[\theta(t) - \sin\theta(t)] \\ y(t) &= R[1 - \cos\theta(t)] \end{cases}$$

II. **Vecteur vitesse.**

Afin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle $\mathcal{C}$ a un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0.

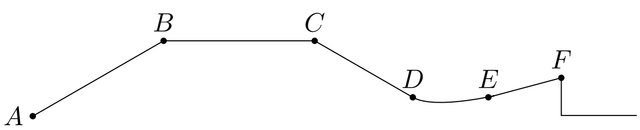
4. En utilisant la relation établie à la question I.1, montrer que la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est constante. Donner sa valeur en fonction de R et de v_0.
5. Montrer que le mouvement de M dans le référentiel (Axy), de centre A et d'axes Ax et Ay parallèles à Ox et Oy, est circulaire uniforme.
6. Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de R, θ et $\dot{\theta}$.
7. Représenter sur un même schéma la position du cercle $\mathcal{C}$ et la trajectoire de M au cours du temps (la fameuse cycloïde), en dessinant l'allure du vecteur vitesse $\vec{v}$ pour les valeurs suivantes du paramètre θ : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$, et $\theta_4 = 2\pi$
8. Déterminer la norme $v = |\vec{v}(M/\mathcal{R})|$ de la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0 et de θ.
9. Démontrer la relation trigonométrique $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$. Et l'utiliser pour simplifier l'expression précédente de v. Représenter graphiquement $v(t)$ en indiquant la valeur de v_0 sur le graphique.

III. **Vecteur accélération.**

10. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de v_0, R et θ.
11. Sur le dessin de la question II..7, représenter l'allure du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ pour les valeurs θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4.
12. On dit que le point M est accéléré lorsque la norme de sa vitesse augmente. Dans quelles zones le point M est-il accéléré ou décéléré ?
13. En quoi les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ pour $\theta_4 = 2\pi$ présentent-ils un caractère surprenant ?
14. Montrer que la norme $a = |\vec{a}(M/\mathcal{R})|$ du vecteur accélération de M dans $\mathcal{R}$ est constante. Calculer sa valeur pour un pneu de voiture de rayon $R = 35\,\mathrm{cm}$ et tel que $v_0 = 130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.
15. Montrer que $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est toujours dirigé de M vers A.

Exercice 3 : Saut à ski

On s'intéresse à la dynamique des différentes étapes d'un saut à ski. Le saut est décomposé en 4 étapes : Le remonte-pente (AB), une partie plate (BC), la descente (CD) et le tremplin (EF). Le skieur est assimilé à un point matériel.



Le skieur remonte la pente (AB) inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale à vitesse constante. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant la même direction que la perche qui forme un angle $\beta = 20°$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et par l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\vec{F_1}$ de valeur 65N, opposée au mouvement.

1. Faire un schéma représentant la pente, la perche les angles α et β. Représenter toutes les forces subies par le skieur.
2. Justifier pourquoi on peut affirmer que la somme des forces appliquées au skieur est nulle.
3. Déterminer la valeur de la force exercée par la perche sur le skieur.

Arrivé au sommet B, le skieur lâche la perche avec une vitesse horizontale de $3{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. L'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur $F_2 = 42\,\mathrm{N}$.

4. Faire un bilan des forces appliquées au skieur
5. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ du skieur en fonction du temps.
6. Intégrer l'équation précédente pour trouver $v(t)$ et $x(t)$. Quelle distance le skieur va-t-il parcourir avant de s'arrêter ?

Le skieur aborde la pente (CD) inclinée d'un angle $\alpha' = 35°$ avec l'horizontale. Il subit maintenant une force de frottement F_3 proportionnelle au carré de sa vitesse $F_3 = kv^2$ avec $k = 0{,}56\,\mathrm{Ns^2m^{-2}}$

7. Justifier pourquoi la vitesse du skieur augmentera jusqu'à une vitesse limite v_l.
8. Lorsqu'il atteint la vitesse v_l le mouvement du skieur est rectiligne homogène, déterminer la valeur de v_l

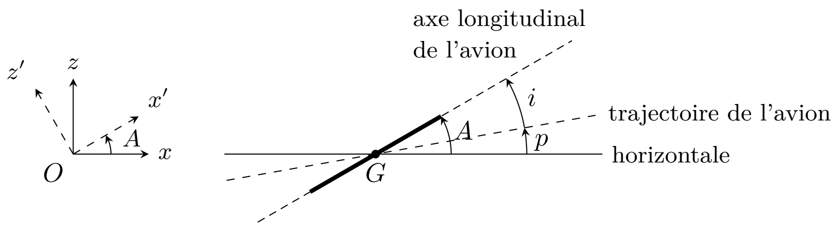
Il aborde le tremplin (EF) incliné d'un angle $\gamma = 15°$ avec l'horizontale, on ne prend pas en compte les forces exercées par l'air. On considère également que sa vitesse en F vaut $25\,\mathrm{ms^{-1}}$.

9. Quelles sont les forces exercées sur le skieur lors du saut ?
10. Déterminer les équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du skieur.
11. Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. On pourra prendre le point F comme origine du repère.
12. Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5 m au dessous du point F.

Données :
Taille du skieur : $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$, masse du skieur : $m = 80\,\mathrm{kg}$, $AB = 150\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{ms^{-2}}$

Exercice 4 : Mécanique du vol d'un avion (Centrale TSI 2015)

On étudie différentes phases du vol d'un avion, en l'absence de vent, dans le référentiel terrestre $(\mathcal{R})$ supposé galiléen auquel on associe un système d'axes cartésien dont (Oz) constitue la verticale ascendante.



La trajectoire et la configuration de vol de l'avion dans l'espace sont définis à l'aide de trois angles orientés représentés dans la figure ci-dessus :

— la pente p, angle de l'horizontale vers la trajectoire de l'avion ;

— l'assiette A, angle de l'horizontale vers l'axe longitudinal de l'avion ;

— l'incidence i, angle de la trajectoire de l'avion vers son axe longitudinal.

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre d'inertie G de l'avion, de masse $m = 2{,}3 \times 10^3$ kg, soumis aux forces suivantes :

— son poids $\vec{P}$;

— la force de traction $\vec{F}_m$ de l'hélice, entraînée par le moteur, dont la direction est celle de l'axe longitudinal de l'avion ;

— la résultante des forces aérodynamiques, contenue dans le plan de symétrie de l'avion, décomposée en portance $\vec{F}_p$ et trainée $\vec{F}_t$:

  — la portance, perpendiculaire à la trajectoire de l'avion, de norme $F_p = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_p$;

  — la traînée, de même direction que la trajectoire mais s'opposant au mouvement de l'avion, de norme $F_t = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_t$;

où $\rho = 1{,}2\,\text{kgm}^{-3}$ est la masse volumique de l'air supposée constante et égale à celle mesurée au niveau de la mer, $S = 220\,\text{m}^2$ est l'aire de la surface des ailes de l'avion projetée sur le plan horizontal et v est la vitesse de l'avion par rapport à l'air.

L'intensité du champ de pesanteur supposé uniforme est $g = 9{,}8\,\text{ms}^{-2}$.

Les coefficients sans dimension C_p et C_t ne dépendent que de l'incidence i. Pour une incidence nulle ($i = 0°$), ces coefficients vérifient :

$$C_p = 0{,}24 \qquad \text{et} \quad C_t = 0{,}008$$

Lors de l'étude du mouvement de l'avion dans différentes configurations, on évalue les efforts mécaniques subis par la structure en déterminant le facteur de charge η défini comme le rapport de la norme de la portance sur la norme du poids.

Compte tenu de la résistance des matériaux, la conception mécanique de la structure impose une borne supérieure η_{max} au facteur de charge de l'ordre de 2.

I – Vol en montée

Après avoir quitté le sol, l'avion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme en montée avec une pente p à incidence nulle $i = 0$. Le pilote impose au moteur de l'avion une puissance constante $\mathcal{P}_m$.

1. Faire un schéma de la configuration de vol en y représentant toutes les forces appliquées à l'avion ($\vec{P}$, $\vec{F}_m$, $\vec{F}_p$ et $\vec{F}_t$).
2. Justifier pourquoi on peut écrire la relation :
$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = \vec{0} \tag{1}$$
3. Projeter la relation (1) sur l'axe longitudinal de l'avion et sur l'axe qui lui est perpendiculaire (les axes Ox' et Oz') pour obtenir deux relations scalaires.
4. En déduire que la relation liant la vitesse v de l'avion à l'assiette A s'écrit :
$$v = \sqrt{\frac{2mg\cos A}{\rho S C_p}}$$
5. Exprimer la puissance du moteur (puissance fournie par la force $\vec{F}_m$ à l'avion) en fonction de $\|\vec{F}_m\|$ et v.
6. On admet que la relation entre l'assiette A et la puissance $\mathcal{P}_m$ du moteur s'écrit :
$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{m0}(\cos A + f_0 \sin A)\sqrt{\cos A} \qquad \text{avec} \quad f_0 = \frac{C_p}{C_t} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{m0} = mg\frac{C_t}{C_p}\sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}$$
Vérifier par analyse dimensionnelle la cohérence de l'expression de $\mathcal{P}_{m0}$ puis calculer numériquement f_0 et $\mathcal{P}_{m0}$.
7. Le pilote impose une puissance du moteur égale à sa valeur maximale $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{\text{max}} = 50\,\text{kW}$. Déterminer une expression approchée de $\mathcal{P}_m$, sachant que l'assiette ne dépasse généralement pas 10°. En déduire la valeur numérique de l'assiette A. (On rappelle que pour $x \ll 1$ on a $\sin x \approx x$ et $\cos x \approx 1$)
8. Déterminer la relation liant la vitesse ascensionnelle v_z de l'avion à l'assiette A. Calculer sa valeur numérique.
9. Déterminer l'expression du facteur de charge η en montée en fonction de l'assiette A. Commenter le résultat.

II – Vol en virage

L'avion effectue maintenant un virage circulaire de rayon R en palier ($p = 0°$), avec une incidence nulle ($i = 0°$) et à vitesse v constante. Pour réaliser ce virage, le pilote incline l'avion d'un angle ϕ (le plan moyen des ailes est incliné de ϕ par rapport au plan horizontal).

10. L'avion étant incliné pour effectuer le virage, faire le schéma de la configuration de vol en vue arrière en y représentant les forces et l'angle Φ.
11. Exprimer dans le système de coordonnées polaires, dont l'origine est au centre de la trajectoire de l'avion, l'accélération de l'avion.
12. En déduire que les forces s'exerçant sur l'avion sont reliées par la relation :
$$\vec{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_p + \vec{F}_t = -m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r \tag{2}$$
où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire dirigé du centre de la trajectoire vers l'avion.
13. Projeter la relation précédente sur les axe $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$. En déduire une expression du rayon R du virage en fonction de la vitesse v de l'avion, de l'angle d'inclinaison ϕ et de g.
14. Déterminer l'expression du facteur de charge η en fonction de ϕ.
15. Sachant que la conception structurale de l'avion impose une borne supérieure au facteur de charge η_{max}, déterminer l'expression du rayon minimal du virage que le pilote peut faire prendre à l'avion en toute sécurité.