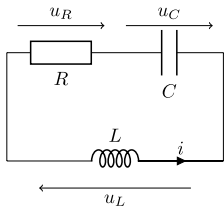


# l'oscillateur harmonique

**Exemple :** circuit RLC série



Équation différentielle satisfaite par  $i(t)$  :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\omega_0/Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} = 0$$

Équation différentielle d'un oscillateur harmonique en régime libre

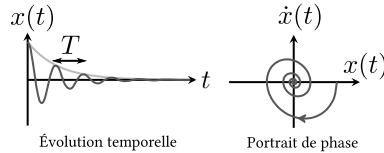
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ou constante

$Q > \frac{1}{2}$  régime pseudo-périodique

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$$

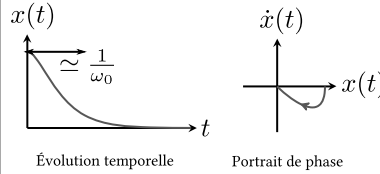
$\frac{2Q}{\omega_0}$        $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$



$Q = \frac{1}{2}$  régime critique

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

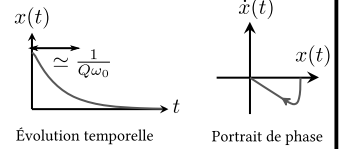
retour à l'équilibre le plus rapide



$Q < \frac{1}{2}$  régime apériodique

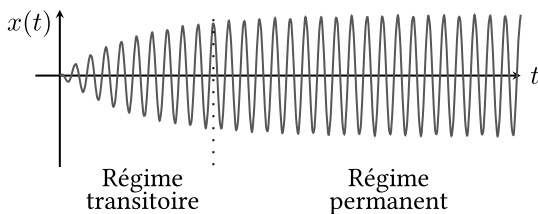
$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} (\pm \sqrt{1 - 4Q^2} - 1)$$



## Régime sinusoïdal forcé

Le système est soumis à une excitation sinusoïdale



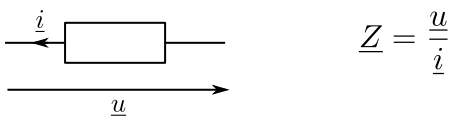
On étudie le régime permanent où toutes les grandeurs oscillent sinusoïdalement à la pulsation  $\omega$

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)}$$

grandeur réelle      grandeur complexe

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= j\omega \underline{x} & \underline{x} &= Re(\underline{x}) \\ \ddot{\underline{x}} &= -\omega^2 \underline{x} & X &= |\underline{x}| & \omega t + \varphi &= \arg(\underline{x}) \end{aligned}$$

Impédance complexe



Résistance       $\underline{Z}_R = R$

Condensateur       $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

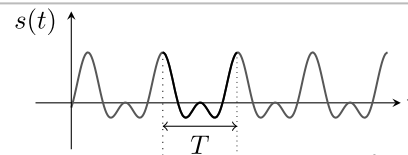
Bobine       $\underline{Z}_L = jL\omega$

Tout fonctionne comme pour des résistances : associations série/parallèle, ponts diviseurs, ...

# Oscillateurs et filtrage

## Filtrage

Signal périodique



$T$  : période  
 $f = \frac{1}{T}$  : fréquence  
 $\omega = 2\pi f$  : pulsation

Décomposition en série de Fourier :

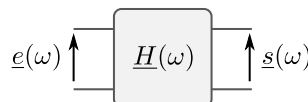
$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^n c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

composante continue      harmonique de rang  $n$

Valeur moyenne :  $\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$

Valeur efficace :  $\langle s(t) \rangle = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$

Fonction de transfert harmonique :

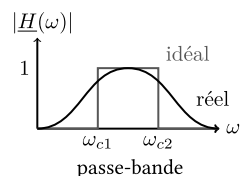
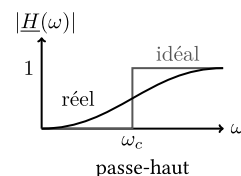
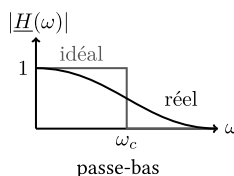


$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}$$

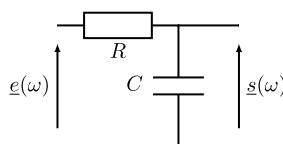
Gain :  $G = |\underline{H}(\omega)|$

Déphasage :  $\varphi = \arg(\underline{H}(\omega))$

Gain en décibels :  $G_{dB} = 20 \log(G)$



Exemple d'un filtre passe-bas d'ordre 1



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

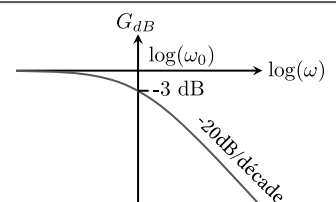


diagramme de Bode