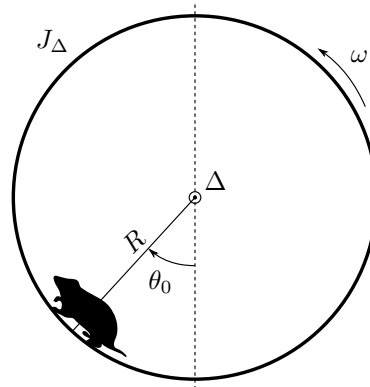


## DS8 : Mécanique et Induction

*Durée : 4h. Les calculatrices sont autorisées. Le devoir est probablement trop long pour être terminé, faites-en le maximum.*

### Problème 1 : UN HAMSTER DANS SA CAGE

Pour permettre à un hamster domestique de faire de l'exercice, on place dans sa cage une roue que le hamster peut faire tourner en courant. La roue a un rayon  $R$  et son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est  $J_{\Delta} = MR^2$  où  $M$  est la masse de la roue. La masse du hamster est notée  $m$ .



On commence par négliger tous les frottements. On considère également que lors de sa course, le hamster se trouve à une position constante repérée par un angle  $\theta_0$  par rapport à la verticale.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la roue. Faire un schéma.
2. Quel est le moment cinétique  $L_{\Delta}$  de la roue du hamster en fonction de  $\omega$
3. À  $t = 0$  le hamster commence à courir. Donner l'expression de l'accélération angulaire  $\frac{d\omega}{dt}$  en fonction de  $R$ ,  $\theta_0$ ,  $m$  et  $J_{\Delta}$ .
4. Donner l'évolution temporelle  $\omega(t)$  de la vitesse angulaire de rotation de la roue.
5. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_c(t)$  de la roue en fonction du temps.
6. Un hamster court en moyenne à environ  $v_0 = 3 \text{ km/h}$ . Calculer le temps qu'il mettra avant d'atteindre sa vitesse de croisière. On donne  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $m = 100 \text{ g}$ ,  $\theta_0 = 30^\circ$  et  $M = 200 \text{ g}$ .
7. Calculer l'énergie cinétique de la roue lorsque le hamster a atteint cette vitesse.
8. Expliquer pourquoi lorsque la vitesse de course du hamster est constante on a nécessairement  $\theta_0 = 0$ .

On prend maintenant en compte les frottements entre la roue et son axe de rotation, ceux-ci produisent un couple résistant dont le moment par rapport à l'axe  $\Delta$  est  $\Gamma_{\Delta}$ .

9. Montrer que la nouvelle accélération angulaire  $\frac{d\omega}{dt}$  s'écrit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{mRg \sin \theta_0 - \Gamma_{\Delta}}{J_{\Delta}} \quad (1)$$

10. Montrer que dans ces conditions, lorsque le hamster court à vitesse constante, l'angle  $\theta_0$  n'est plus nul, donner son expression.

On se pose le problème suivant : **Comment faire subir un looping au Hamster ?** On part d'une situation où le Hamster court dans la roue à sa vitesse de croisière de  $v_0$ , avec un angle  $\theta_0 = 0$ . Subitement il décide de s'arrêter de courir, on considère qu'il ne glisse alors pas par rapport à la roue qui l'entraîne vers la droite (et le haut). L'étude qui suit est faite dans le référentiel du laboratoire, on néglige à nouveau les frottements entre la roue et son axe de rotation.

11. Exprimer la vitesse de rotation  $\omega_0$  de la roue lorsque le hamster court.
12. Juste avant que le hamster ne s'arrête de courir, quelle est son énergie cinétique ? potentielle ? Quelle est l'énergie cinétique de rotation de la roue ? En déduire l'énergie mécanique totale du système roue+hamster. On donnera les expressions littérales sans utiliser les valeurs numériques fournies.
13. On considère que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste la même lorsque le hamster arrête de courir. Montrer que la vitesse de rotation  $\omega_1$  de la roue juste après que le hamster ait arrêté de courir s'exprime comme :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{J_{\Delta} + mR^2}} \quad (2)$$

14. Justifier pourquoi on peut considérer que l'énergie mécanique du système roue+hamster reste constante au cours du temps. Exprimer cette énergie mécanique en fonction de la vitesse de rotation  $\omega$  et de l'angle  $\theta$  dont la roue a tourné.
15. En déduire l'expression de la vitesse de rotation  $\omega$  de la roue en fonction de l'angle  $\theta$  dont elle a tourné.
16. Lorsque la roue a tourné de  $\pi$ , le hamster se trouve au point le plus haut. Faire le bilan des forces subies par le hamster à cet instant.
17. Montrer que l'accélération normale subie par le hamster à cet instant peut s'écrire :

$$\vec{a} = -R \left( \omega_1^2 - \frac{2mgR(1 - \cos \theta)}{J_\Delta + mR^2} \right) \vec{e}_r$$

18. Le hamster reste "collé" à la roue et peut faire un looping si la composante normale de la réaction de la roue sur le hamster ne s'annule pas. Avec les valeurs numériques données précédemment, le hamster va-t-il faire un looping ?
19. Comment faudrait-il modifier sa roue pour que le hamster fasse un looping lorsqu'il s'arrête de courir ?

### Problème 2 : MOTEUR ASYNCHRONE (CENTRALE 2016)

Le compresseur d'une pompe à chaleur fonctionne grâce à un moteur asynchrone que nous allons à présent étudier. Le moteur asynchrone est constitué de deux bobinages fixes (modélisés par des solénoïdes infinis) et d'une bobine plate carrée en rotation autour d'un axe fixe. Il est alimenté par le secteur via une prise de courant classique.

Dans toute cette partie, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

En faisant abstraction des spires manquant dans la partie centrale, on considère deux solénoïdes (1) et (2) identiques, de rayon  $A$ , de grande dimension selon leur axe, disposés de sorte que leurs axes respectifs  $(x'x)$  et  $(y'y)$  soient perpendiculaires et concourant au point  $O$  (figure 1). Ils comportent  $n$  spires par mètre et sont parcourus par les courants respectifs  $i_1(t) = I_M \cos(\omega_0 t)$  et  $i_2(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \alpha)$  où  $\omega_0$  est une pulsation constante. Le sens de parcours des courants est indiqué sur la figure 1.

On rappelle :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ .

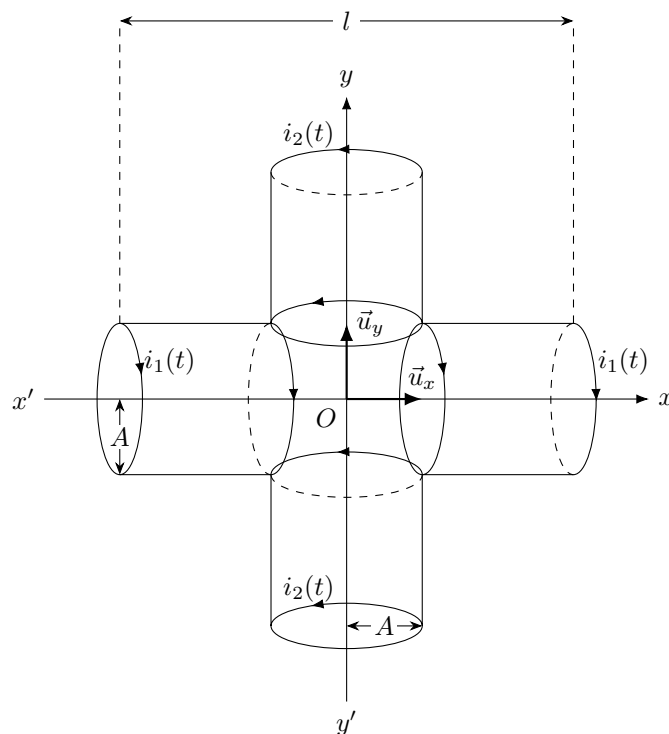


FIGURE 1 – Moteur asynchrone

1. À quelle condition peut-on faire l'hypothèse de l'approximation des régimes quasi-stationnaires ?
2. L'intensité du champ magnétique créé par un solénoïde infini comportant  $n$  spires par mètre, parcouru par un courant  $i$  est  $B = \mu_0 n i$ . Donner la direction et le sens des champs magnétiques créés par les solénoïdes (1) et (2) lorsque  $i_1 > 0$  et  $i_2 > 0$ .
3. Montrer que l'inductance propre  $L_S$  d'un solénoïde est donnée par :  $L_S = \mu_0 n^2 \pi A^2 l$ . Calculer la valeur numérique de  $L_S$  sachant que chaque solénoïde est constitué d'un enroulement de 4 rangées de spires jointives. On donne  $a = 0,2 \text{ mm}$  le rayon du fil de cuivre utilisé,  $A = 2 \text{ cm}$  et  $l = 20 \text{ cm}$ .

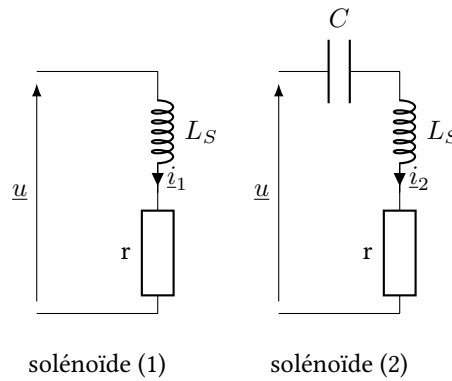


FIGURE 2 – Circuit électrique des solénoïdes du moteur

4. On considère maintenant l'association des deux solénoïdes (1) et (2) décrite ci-dessus. Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}(O, t)$  créé en  $O$  dans les cas où  $\alpha = \pi/2$  et  $\alpha = -\pi/2$ .
5. Pourquoi peut-on qualifier ce champ magnétique de *champ tournant* ? Dans quel sens tourne le champ lorsque  $\alpha = \pi/2$  et  $\alpha = -\pi/2$  ?

Dans la suite du problème, on se placera dans le premier cas  $\alpha = \pi/2$ .

6. On donne  $I_M = 0,1$  A. Calculer la norme du champ magnétique créé en  $O$ . Commenter.

En pratique, on réalise un déphasage de  $\pi/2$  entre les deux courants en mettant un condensateur  $C$  en série avec le solénoïde (2). Les circuits électriques pour les solénoïdes (1) et (2) sont représentés sur la figure 2.

7. La résistance  $r$  correspond à la résistance du fil de cuivre utilisé dans la bobine. La résistance d'un conducteur cylindrique de longueur  $l_c$ , de surface  $S$  et de résistivité  $\rho$  est  $r = \frac{\rho l_c}{S}$ .

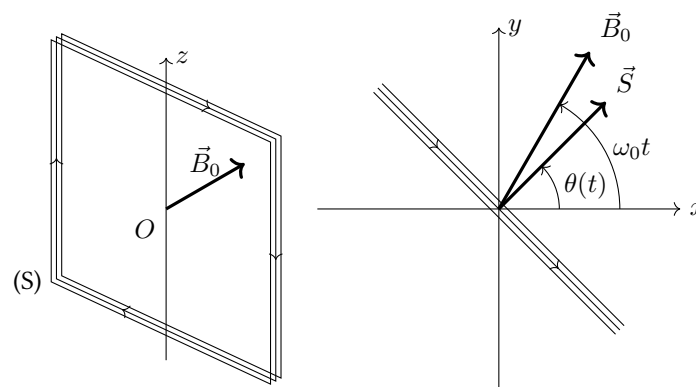
Calculer la valeur de  $r$  pour les solénoïdes sachant. La résistivité du cuivre  $\rho = 17 \times 10^{-9} \Omega \text{m}$

8. Montrer que le déphasage  $\alpha$  entre les intensités qui circulent dans les bobines est :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{L_S \omega_0}{r}\right) - \arctan\left(\frac{L_S \omega_0 - \frac{1}{C \omega_0}}{r}\right)$$

9. En déduire l'expression de la capacité  $C$  du condensateur à utiliser pour obtenir un déphasage de  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Calculer la valeur numérique de  $C$ .

On place en  $O$  une bobine plate carrée (S) de surface  $S = b^2$  comportant  $N$  spires orientées. Le vecteur surface  $\vec{S} = b^2 \vec{n}$  reste dans le plan  $xOy$  où il est repéré à la date  $t$  par l'angle  $\theta(t) = \omega_0 t$  par rapport à  $Ox$ .



Cette bobine (S) possède une résistance  $R$  et une inductance propre  $L$ .

Le côté  $b$  de la bobine plate (S) est supposé très petit devant le rayon  $A$  des deux solénoïdes. Ainsi, le champ magnétique  $\vec{B}(O, t)$  créé par les deux solénoïdes peut être supposé uniforme sur toute la surface  $S$  de la bobine (S), on le notera  $\vec{B}_0$ . Dans le plan  $xOy$ , il est repéré à la date  $t$  par l'angle  $\omega_0 t$ .

En fonctionnement, cette bobine (S) entraîne le reste du dispositif en exerçant sur lui un couple  $+\Gamma \vec{u}_z$ . On considère que la liaison entre la bobine et son support est parfaite.

10. Justifier sans calcul l'existence d'un courant induit  $i(t)$  dans la bobine (S).
11. Justifier sans calcul l'origine du mouvement de la bobine (S).
12. Faire un schéma électrique équivalent de la bobine (S) en faisant apparaître l'inductance  $L$ , la résistance  $R$  et la fem induite  $e$  dans la bobine. On fera apparaître l'intensité  $i$  du courant qui circule dans la bobine.

13. Écrire l'équation différentielle (E) vérifiée par l'intensité du courant  $i(t)$  circulant dans (S). Pour alléger les notations, on pourra poser :  $\Omega = \omega_0 - \omega$  et  $\Phi_0 = NSB_0$ .

Dans la suite du problème, on suppose le régime forcé établi :  $\Omega = \text{constante}$ .

On note :  $i(t) = i_m \sin(\Omega t - \psi)$  la solution de l'équation (E) en régime établi.

14. Exprimer  $i_m$  et  $\psi$  en fonction de  $\Omega$  et des données du problème.
15. Définir le moment magnétique  $\vec{M}$  associé à la bobine plate (S).
16. Expliciter l'action mécanique de Laplace s'exerçant sur la bobine (S).
17. Exprimer le couple  $\Gamma(t)$  en fonction de  $\Omega$  et des données du problème.
18. Dans un fonctionnement usuel, c'est la valeur moyenne temporelle  $\langle \Gamma \rangle$  du couple qui intervient.

Montrer que :  $\langle \Gamma \rangle = \frac{\Gamma_0(1 - X)}{1 + \lambda^2(1 - X)^2}$  avec  $X = \omega/\omega_0$ .

On exprimera  $\lambda$  et  $\Gamma_0$  en fonction des données du problème.

19. Tracer l'allure de  $\langle \Gamma \rangle / \Gamma_0$  en fonction de  $X$  en prenant  $\lambda = 4$ . Commenter l'allure de la courbe obtenue, notamment sous l'angle du moteur asynchrone.

Dans la suite du problème, on considère la plage de vitesse :  $0 < \omega < \omega_0$ .

20. On s'intéresse à la stabilité du moteur en cours de fonctionnement. La partie utilisatrice impose une valeur de  $\langle \Gamma \rangle$ , on trouve alors en général deux valeurs possibles de  $\omega$  :  $\omega_1$  et  $\omega_2 > \omega_1$ . Montrer qualitativement que la valeur de  $\omega_2$  correspond à un régime stable.
21. Exprimer la valeur moyenne temporelle  $\langle \mathcal{P} \rangle$  de la puissance mécanique fournie par le moteur. Commenter l'expression obtenue.

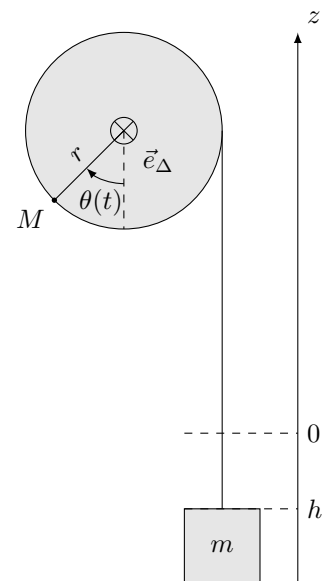
### Exercice 1 : TREUIL (TD13)

Un treuil est composé d'un cylindre de moment d'inertie  $J_\Delta$  par rapport à son axe de rotation et de rayon  $r$ . Une corde enroulée sur le treuil soutient un solide  $S$  de masse  $m$ . La masse de la corde ainsi que tous les frottements sont négligés.

1. Le cylindre du treuil est initialement bloqué, exprimer la tension de la corde.

À  $t = 0$  on relâche le cylindre qui tourne sans frottement autour de son axe. On repère la position de la masse par son altitude  $h(t)$  et la position du cylindre par l'angle  $\theta(t)$  dont il a tourné.

2. Donner la relation entre  $h(t)$  et  $\theta(t)$ .
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse  $m$ , exprimer  $\ddot{h}(t)$  en fonction de la norme  $T$  de la tension de la corde.
4. En appliquant le théorème du moment cinétique au cylindre, exprimer  $\ddot{\theta}(t)$  en fonction de  $T$ .
5. À partir des deux équations précédentes, déterminer l'accélération angulaire  $\alpha = \ddot{\theta}(t)$  du cylindre.
6. Exprimer l'accélération linéaire  $a = \ddot{h}(t)$  du solide  $S$ . La comparer à celle qu'il aurait lors d'une chute libre.
7. A.N. :  $J_\Delta = 0,2 \text{ kgm}^2$ ,  $r = 10 \text{ cm}$  et  $m = 10 \text{ kg}$ . Calculer  $\alpha$  et  $a$ .
8. Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble (cylindre + masse) en fonction de  $h$ .



### Exercice 2 : ÉQUILIBRE D'UNE BARRE (TD14)

On étudie une barre dont l'une des extrémités est fixée par une liaison pivot d'axe  $Oz$ . L'autre extrémité de la barre est en contact avec un bain de mercure qui permet la circulation d'un courant  $I$  en continu. Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . On repère la position de la barre par l'angle de rotation  $\theta$ .

1. Quel est le système de coordonnées le mieux adapté à l'étude de ce problème, représenter ses axes sur le schéma.
2. Déterminer dans ce repère la force de Laplace subie par la barre.
3. On suppose que la force de Laplace est équivalente à une force unique s'appliquant au centre de la barre. La barre de masse  $m$  est également soumise à son poids qui s'applique également au centre de la barre. Dessiner sur le schéma l'ensemble des forces appliquées à la barre.
4. Déterminer en fonction de  $m$ ,  $B$  et  $I$  l'angle  $\theta$  d'équilibre.
5. Expliquer qualitativement ce qu'il se passe lorsque l'angle d'équilibre est tel que le bas de la barre sort du bain de mercure.

