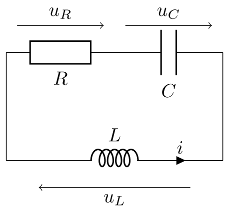
Oscillateurs et filtrage

l'oscillateur harmonique

Exemple : circuit RLC série



Équation différentielle satisfaite par i(t) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}\, t^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\omega_0/Q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} = 0$$

Équation différentielle d'un oscillateur harmonique en régime libre

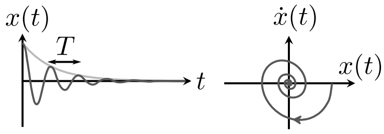
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Ou constante

$Q > \frac{1}{2}$	régime pseudo-périodique

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$$

$\frac{\omega_0}{2Q}$; $\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

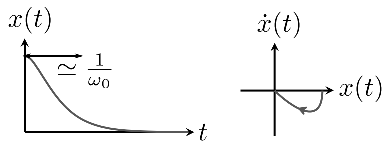


Évolution temporelle — Portrait de phase

$Q = \frac{1}{2}$	régime critique

$$x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

retour à l'équilibre le plus rapide

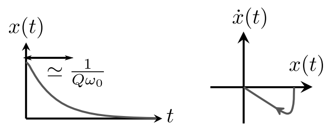


Évolution temporelle — Portrait de phase

$Q < \frac{1}{2}$	régime apériodique

$$x(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$$

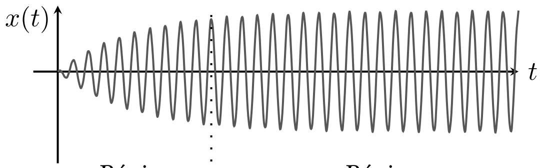
$$r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\pm\sqrt{1 - 4Q^2} - 1\right)$$



Évolution temporelle — Portrait de phase

Régime sinusoïdal forcé

Le système est soumis à une excitation sinusoïdale



On étudie le régime permanent où toutes les grandeurs oscillent sinusoïdalement à la pulsation ω

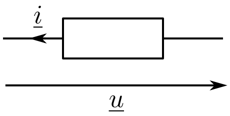
$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{x}(t) = Xe^{j(\omega t + \varphi)}$$

grandeur réelle — grandeur complexe

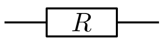
$$\dot{\underline{x}} = j\omega\underline{x} \qquad x = Re(\underline{x})$$

$$\ddot{\underline{x}} = -\omega^2\underline{x} \qquad X = |\underline{x}| \qquad \omega t + \varphi = \arg(\underline{x})$$

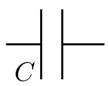
Impédance complexe



$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$



Résistance $\quad \underline{Z}_R = R$



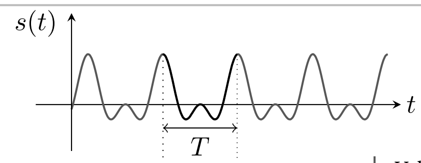
Condensateur $\quad \underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$

Bobine $\quad \underline{Z}_L = jL\omega$

Tout fonctionne comme pour des résistances : associations série/parallèle, ponts diviseurs, ...

Filtrage

Signal périodique



T : période
$f = \frac{1}{T}$: fréquence
$\omega = 2\pi f$: pulsation

Décomposition en série de Fourier :

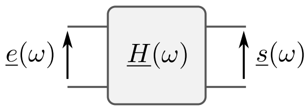
$$s(t) = \underbrace{c_0}_{\text{composante continue}} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_n\cos(n\omega t + \varphi_n)}_{\text{harmonique de rang } n}$$

Valeur moyenne :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt$$

Valeur efficace :

$$\langle s(t)\rangle = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$$



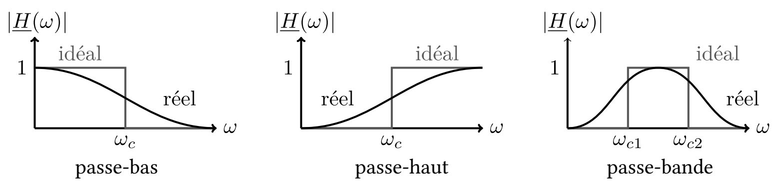
Fonction de transfert harmonique :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)}$$

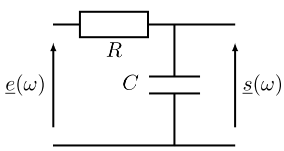
Gain : $G = |\underline{H}(\omega)|$

Déphasage : $\varphi = \arg(\underline{H}(\omega))$

Gain en décibels : $G_{dB} = 20\log(G)$



Exemple d'un filtre passe-bas d'ordre 1



$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

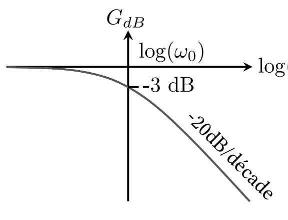


diagramme de Bode