Klausur

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengen und Funktionen) (5 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ und $C = \{1, 2\}$.

1. Geben Sie die Menge $A \cup B$ an
2. Geben Sie die Menge $A \cap B$ an
3. Geben Sie die Menge $A \setminus B$ an.
4. Was ist $\mathscr{P}(C)$?
5. Geben Sie eine bijektive Abbildung $f : A \to \mathscr{P}(C)$ an.

— Lösung Anfang —

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
2. $A \cap B = \{2, 4\}$
3. $A \setminus B = \{1, 3\}$
4. $\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
5. $f(1) = \{1\}, f(2) = \{2\}, f(3) = \emptyset, f(4) = \{1, 2\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2 (Relationen) (10 Punkte)

Gegeben seien die Relationen $R, S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ mit $R = \{(1, 2), (3, 1), (4, 1)\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (4, 3)\}$.

(i) Stellen Sie R und S als Graphen und Adjazenzmatrix dar.

(ii) Geben Sie die Relation $R \circ S$ an und stellen Sie sie auch als Graphen dar.

(iii) Geben Sie die Relation $S \circ R$ an und stellen Sie sie auch als Graphen dar.

(iv) Ist R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort.

(v) Berechnen Sie die reflexiv-transitive Hülle von R.

(vi) Ist die reflexiv-transitive Hülle von R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort.

— Lösung Anfang —

Ich überlasse das als Übung (straight-forward die Graphen zeichnen und die Matrizen berechnen).

— Lösung Ende —

Aufgabe 3 (Äquivalenzrelation) (5 Punkte)

Sei $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$ eine Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Bestimmen Sie die Quotientenmenge $\mathbb{Z}/\sim$.

— Lösung Anfang —

Beweis:
Reflexivität: Wir müssen zeigen, dass $x \sim x$. Das ist klar, da $x = x$.
Symmetrie: Wir müssen zeigen, dass $x \sim y \Rightarrow y \sim x$. Das ist klar, da $x = y \Rightarrow y = x$ und $x = -y \Rightarrow y = -x$.
Transitivität: Wir müssen zeigen, dass $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$. Das zeigt man durch Fallunterscheidung. □
Es ist $\mathbb{Z}/\sim = \{\{x, -x\} | x \in \mathbb{Z}\}$.

— Lösung Ende —

Aufgabe 4 (Ordnungen) (7 Punkte)

Sei $\sim$ eine Relation auf $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Wir definieren $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Ordnungsrelation ist.

(ii) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für die Teilmenge $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$.

(iii) Was sind die größten und kleinsten Elemente, maximalen und minimalen Elemente von $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \backslash \{(2, 2)\}$?

— Lösung Anfang —

Beweis:
Reflexivität: Wir müssen zeigen, dass $x \sim x$. Das ist klar, da $a \leq a$ und $b \leq b$.
Antisymmetrie: Wir müssen zeigen, dass $x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y$. Das ist klar, da $a \leq c \wedge b \leq d \wedge c \leq a \wedge d \leq b \Rightarrow a = c \wedge b = d$.
Transitivität: Wir müssen zeigen, dass $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$. Das ist klar, da $a \leq c \wedge b \leq d \wedge c \leq e \wedge d \leq f \Rightarrow a \leq e \wedge b \leq f$. $\square$

Hasse-Diagramm überlass ich als Übung. Das kleinste Element und das einzige minimale Element ist $(0, 0)$, es gibt kein größtes Element. Die maximalen Elemente sind $(2, 0)$ und $(0, 2)$.

— Lösung Ende —

Aufgabe 5 (Beweise) (6 Punkte)

Zeigen Sie

(i) $B\backslash(B\backslash A) = A \cap B$ für Mengen A, B.

(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ für Abbildungen $f : A \to B$ und $B_1, B_2 \subseteq B$.

(Hinweis: Es ist $f^{-1}(X) = \{a \in A \mid f(a) \in X\}$.)

— Lösung Anfang —

Erster Beweis:

Sei $x \in B\backslash(B\backslash A)$.

Dies ist äquivalent zu $x \in B \wedge x \notin (B\backslash A)$.

Dies ist äquivalent zu $x \in B \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin A)$.

Dies ist äquivalent zu $x \in B \wedge (x \notin B \vee x \in A)$. (De Morgan)

Dies ist äquivalent zu $(x \in B \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \in A)$. (Distributivgesetz)

Dies ist äquivalent zu $x \in B \wedge x \in A$, was wiederum zu $x \in A \cap B$ äquivalent ist. $\square$

Zweiter Beweis:

Sei $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Das bedeutet, dass $f(x) \in B_1 \cap B_2$, also $x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)$, also $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. $\square$

— Lösung Ende —