Übungsblatt 1

Mathematik I - Theoretische Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Beweis) (5 Punkte)

Seien A, B, C Mengen. Beweisen Sie

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$$

Aufgabe 2 (Symmetrische Differenz) (4 Punkte)

Unter

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

versteht man die *symmetrische Differenz* der Mengen A und B.

(i) Machen Sie sich anhand eines Venn-Diagramms klar, was unter der symmetrischen Differenz anschaulich zu verstehen ist.

(ii) Beweisen Sie: $\forall A, B : A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Aufgabe 3 (Mengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$A \cap (B \cup A) = A$$

Aufgabe 4 (Potenzmengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

Aufgabe 5 (Relationen) (11 Punkte)

Es sei $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (3, 2), (2, 4)\}$ auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Stellen Sie die Relation als Adjazenzmatrix dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

(iii) Ist die Relation reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?

(iv) Falls die Relation nicht transitiv ist, was müsste man hinzufügen, um sie mit möglichst wenigen zusätzlichen Paaren / Pfeilen transitiv zu machen? Anders ausgedückt - was ist die transitive Hülle der Relation? (Allgemein ist die transitive Hülle die kleinste R enthaltende transitive Relation. „Klein“ist im Sinne der Inklusion (Teilmengenbeziehung) gemeint.)

(v) Man erhält die reflexiv-transitive Hülle auch rechnerisch wenn man $R_{trans} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ bildet mit $R^0 = Id$, der Identität, die jedes Element von M mit sich selbst in Relation setzt und $R^{n+1} = R^n \circ R$. Man berechnet also diese R^n und jeder Schritt fügt der Vereinigung der bereits von R^0 bis R^{n-1} berechneten Relationen ggf. weitere Paare / Pfeile hinzu bis die Vereinigung schließlich transitiv wird. In der Praxis, bei endlichen Mengen, hört man auf, weitere Relationen hinzuzufügen sobald der Vorgang stationär wird, also nichts mehr hinzugefügt wird. Berechnen Sie die reflexiv-transitive Hülle von R auf dem beschriebenen Weg.

(vi) Ist R_{trans} im vorliegenden Fall eine Ordnung?

(vii) Stellen Sie das Hasse-Diagramm von R_{trans} dar.

Aufgabe 6 (Verbände) (6 Punkte)

Ein Verband ist eine Menge V zusammen mit Operationen $\sqcap, \sqcup : V \times V \to V$, so dass gilt:

- Assoziaivität: $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ und $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$ für alle $a, b, c \in V$.
- Kommutativität: $a \sqcap b = b \sqcap a$ und $a \sqcup b = b \sqcup a$ für alle $a, b \in V$.
- Verschmelzung: $a \sqcap (a \sqcup b) = a$ und $a \sqcup (a \sqcap b) = a$ für alle $a, b \in V$.

a) Zeigen Sie, dass die Potenzmenge einer Menge M zusammen mit den Operationen $\sqcap = \cap$ und $\sqcup = \cup$ einen Verband bildet. Zeichnen Sie auch das Hasse-Diagramm für die Potenzmenge der Menge $\{a, b, c\}$ und machen Sie sich die Operationen klar.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit den Operationen $\sqcap = \min$ und $\sqcup = \max$ einen Verband bildet. Zeichnen Sie auch das Hasse-Diagramm für die Menge $\{1, 2, 3\}$ und machen Sie sich die Operationen klar.

c) Zeigen Sie, dass die Menge der Teiler einer natürlichen Zahl n zusammen mit den Operationen $\sqcap = \text{gcd}$ und $\sqcup = lcm$ einen Verband bildet. Zeichnen Sie auch das Hasse-Diagramm für die Menge der Teiler von 12 und machen Sie sich die Operationen klar.

Aufgabe 7 (Idempotenzgesetz) (3 Punkte)

Zeigen Sie das Idempotenzgesetz für Verbände: $a \sqcap a = a$ und $a \sqcup a = a$ für alle $a \in V$.

Aufgabe 8 (Beweis Zusammenhang inf und sup) (3 Punkte)

Zeigen Sie $\forall u, v \in V : u \sqcap v = u \Leftrightarrow u \sqcup v = v$ in einem Verband V.

Aufgabe 9 (Induzierter Verband) (10 Punkte)

Sei $(V, \sqsubseteq)$ eine Ordnung, $W \subseteq V$. Macht Euch zunächst nochmal die folgenden Begriffe klar:

- minimales Element, maximales Element von W
- größtes Element, kleinstes Element von W
- obere, untere Schranke von W
- Supremum, Infimum von W

a) Zeigen Sie (bzw. macht Euch klar), dass für $w_1, ..., w_n \in V$ gilt: $\inf(w_1, ..., 1_n) \sqsubseteq w_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ und $w_i \sqsubseteq \sup(w_1, ..., w_n)$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

b) Zeigen Sie, dass $(V, \sqcup, \sqcap)$ einen Verband bildet, wenn $\sqcup = \sup$ und $\sqcap = \inf$ gesetzt wird und je zwei Elemente ein Supremum und ein Infimum besitzen, also $\inf(u, v) = u \sqcap v$ und $\sup(u, v) = u \sqcup v$ für alle $u, v \in V$.

Aufgabe 10 (Induzierte Ordnung) (5 Punkte)

Sei $(V, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband. Definiere eine Ordnung $\sqsubseteq$ auf V durch $a \sqsubseteq b \Leftrightarrow a \sqcap b = a$. Zeigen Sie, dass $(V, \sqsubseteq)$ eine Ordnung ist.