Klausur

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengen und Funktionen) (6 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, \{4\}\}$, $B = \{2, 4\}$ und $C = \{\emptyset, \{1\}\}$.

1. Geben Sie die Menge $A \cup B$ an
2. Geben Sie die Menge $A \cap B$ an
3. Geben Sie die Menge $A \setminus B$ an.
4. Was ist $\mathscr{P}(C)$?
5. Geben Sie eine bijektive Abbildung $f : A \to \mathscr{P}(C)$ an.

— Lösung Anfang —

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, \{4\}, 4\}$
2. $A \cap B = \{2\}$
3. $A \setminus B = \{1, 3, \{4\}\}$
4. $\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$
5. $f(1) = \emptyset, f(2) = \{\emptyset\}, f(3) = \{\{1\}\}, f(\{4\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2 (Relationen) (12 Punkte)

Gegeben seien die Relationen $R, S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit $R = \{(1, 2), (2, 3), (4, 3), (5, 4), (6, 4)\}$ und $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.

(i) Stellen Sie R und S als Graphen und Adjazenzmatrix dar.

(ii) Stellen Sie die Relation $R \circ S$ als Graphen dar.

(iii) Stellen Sie die Relation $S \circ R$ als Graphen dar.

(iv) R ist nicht transitiv. Begründen Sie warum (Gegenbeispiel).

(v) Ergänzen Sie den Graphen von R zur reflexiv-transitiven Hülle R_{trans} von R (also nochmal neu zeichnen als reflexiv-transitive Hülle).

(vi) R_{trans} ist eine Ordnungsrelation. Was sind die minimalen, maximalen, kleinsten, größten Elemente (sofern existent) davon? Begründen Sie Ihre Antwort.

— Lösung Anfang —

Aufzeichnungen s. Vorlesung (straight-forward).

— Lösung Ende —

Aufgabe 3 (Äquivalenzrelationen und Partitionen) (6 Punkte)
Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, also $A \subseteq M$ und die Partition P auf M mit $P = \{A, \{4\}, \{5\}\}$ gegeben.

(i) Warum ist P eine Partition auf M?

(ii) Eine Partition induziert eine Äquivalenzrelation. Definieren Sie die zu P passend Äquivalenzrelation.

(iii) Argumentieren Sie warum Ihre Relation eine Äquivalenzrelation ist.

(iv) Geben Sie die Äquivalenzklasse $[1]$ an.

— Lösung Anfang —

1. Eine Partition P von M ist eine Menge von Teilmengen von M, also eine Teilmenge der Potenzmenge von M, so dass je paarweise verschiedene Mengen aus P disjunkt sind (Schnitt leer ist) und die Vereinigung aller Mengen aus P die gesamte Menge M ergibt. Das ist hier der Fall.

2. $R \subseteq M \times M$ mit $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in A \vee x = y$.

3. reflexiv: wegen $x = y$ im zweiten Teil der Bedingung, symmetrisch: klar, entweder beide in A oder beide gleich, transitiv: entweder alle in A oder alle gleich.

4. $[1] = A$

— Lösung Ende —

Aufgabe 4 (Indexmengen und Beweis) (4 Punkte)

Es sei $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n < i\}$.

(i) Bestimmen Sie A_4.

(ii) Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$.

— Lösung Anfang —

$A_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Beweis:
$\supseteq$ ist trivial ($\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge).
$\subseteq$: Es ist $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : x \in A_i \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : x < i$. Da es aber keine natürliche Zahl gibt, die kleiner als alle natürlichen Zahlen ist, ist die Schnittmenge leer. $\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 5 (Funktionen und Relationen) (5 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $\sim$ eine Relation über X mit $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.

(i) Stellen Sie die Funktion f und die Relation $\sim$ für $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 3$ dar.

(ii) Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Ordnungsrelation genau dann, wenn f injektiv ist.

— Lösung Anfang —

$\sim \subseteq X \times X$ mit $)1 \sim 1, 1 \sim 2, 1 \sim 3, 1 \sim 4, 1 \sim 5, 2 \sim 2, 2 \sim 3, 2 \sim 4, 2 \sim 5, 3 \sim 3, 3 \sim 4, 3 \sim 5, 4 \sim 4, 4 \sim 5, 5 \sim 5$
Beweis:
$\Rightarrow$: Sei $\sim$ eine Ordnungsrelation. Wir zeigen f ist injektiv. Sei dazu $x, y \in X$ und $f(x) = f(y)$. Wir wollen zeigen $x = y$. Da $f(x) = f(y)$ ist insbesondere $f(x) \leq f(y)$ und $f(y) \leq f(x)$, also $x \sim y$ und $y \sim x$. Da $\sim$ antisymmetrisch ist, folgt $x = y$.
$\Leftarrow$: Sei nun f injektiv. Wir wollen zeigen, dass $\sim$ eine Ordnungsrelation ist. Dazu zeigen wir die Reflexivität, die Antisymmetrie und die Transitivität. Reflexivität: Wir müssen zeigen $x \sim x$. Das gilt aber, da $f(x) = f(x)$ für beliebiges $x \in X$ und damit $f(x) \leq f(x)$, also $x \sim x$. Antisymmetrie: Falls $x \sim y$ und $y \sim x$, dann ist $f(x) \leq f(y)$ und $f(y) \leq f(x)$. Wegen der Antisymmetrie von $\leq$ folgt damit $f(x) = f(y)$ und wegen der Injektivität von f folgt damit $x = y$. Transitivität: Falls $x \sim y$ und $y \sim z$, dann ist $f(x) \leq f(y)$ und $f(y) \leq f(z)$. Wegen der Transitivität von $\leq$ folgt damit $f(x) \leq f(z)$ und damit $x \sim z$. $\square$

— Lösung Ende —

Formelsammlung

Hier eine kleine Formelsammlung. Sie ist nicht vollständig, enthält aber alle wichtigen Statements / Definitionen, die man brauchen könnte.

1. Aussagen- und Prädikatenlogik

- **a)** Distributivgesetz: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- **b)** Distributivgesetz: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- **c)** DeMorgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- **d)** DeMorgan: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- **e)** Idempotenz: $A \wedge A \Leftrightarrow A$
- **f)** Idempotenz: $A \vee A \Leftrightarrow A$
- **g)** $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \bot$
- **h)** $A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$
- **i)** $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- **j)** $\neg \forall x \in M : A(x) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
- **k)** $\neg \exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

2. Mengen

- **a)** Teilmenge: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$
- **b)** Potenzmenge: $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$
- **c)** Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **d)** Schnittmenge: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **e)** Differenzmenge: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **f)** Distributivgesetz: $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **g)** Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **h)** DeMorgan: $A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- **i)** DeMorgan: $A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- **j)** Es ist $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$.
- **k)** Es ist $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$.

3. Relationen

- **a)** Für Mengen M, N ist $R \subseteq M \times N$ eine Relation von M nach N.
- **b)** $R \subseteq M \times M$ ist reflexiv, wenn $\forall x \in M : (x, x) \in R$.

c) $R \subseteq M \times M$ ist symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

d) $R \subseteq M \times M$ ist antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

e) $R \subseteq M \times M$ ist transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

f) $R \subseteq M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

g) $R \subseteq M \times M$ ist eine Ordnungsrelation, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

h) Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M ist $[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}$ die Äquivalenzklasse von x, $M/\sim = \{[x] \mid x \in M\}$ die Menge der Äquivalenzklassen oder Quotientenmenge von M modulo $\sim$. Die Menge der Äquivalenzklassen ist eine Partition von M. Umgekehrt induziert jede Partition eine Äquivalenzrelation.

i) Für eine Ordnungsrelation $\leq$ auf M und $X \subseteq M$ ist g ein kleinstes Element von X, wenn $\forall x \in X : g \leq x$, g ein minimales Element von X, wenn $\forall g' \in X : g' \leq g \Rightarrow g = g'$, maximale und größte Elemente analog.

4. Funktionen

a) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist eine Relation (also $f \subseteq X \times Y$), die jedem Element aus der Definitionsmenge X genau ein Element aus der Zielmenge Y zuordnet.

b) f ist injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

c) f ist surjektiv, wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.

d) f ist bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

e) Die Umkehrfunktion f^{-1} ist definiert $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : y = f(x)\}$