Übungsblatt 1

Mathematik I - Theoretische Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Beweis) (5 Punkte)

Seien A, B, M Mengen mit $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie

$$M \backslash (A \cup B) = (M \backslash A) \cap (M \backslash B)$$

Aufgabe 2 (Funktionen) (2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen an, ob sie injektiv oder surjektiv sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto |x|$

(ii) $f : \emptyset \to \{0\}$

Aufgabe 3 (Indexmengen und Beweis) (4 Punkte)

Es sei $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n < i\}$.

(i) Bestimmen Sie A_4.

(ii) Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$.

Aufgabe 4 (Beweis mit Relationen) (4 Punkte)

Seien $R_1, S_1, R_2, S_2 \subseteq M \times M$ Relationen auf einer Menge M. Zeigen Sie

$$R_1 \subseteq R_2 \wedge S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$$

Aufgabe 5 (Äquivalenzrelation) (5 Punkte)

Sei $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$ eine Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Bestimmen Sie die Quotientenmenge $\mathbb{Z}/\sim$.

Aufgabe 6 (Beweise) (6 Punkte)

Zeigen Sie

(i) $B \backslash (B \backslash A) = A \cap B$ für Mengen A, B.

(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ für Abbildungen $f : A \to B$ und $B_1, B_2 \subseteq B$.

(Hinweis: Es ist $f^{-1}(X) = \{a \in A \mid f(a) \in X\}$.)

Aufgabe 7 (Mengenbeweise) (5 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \subseteq C$

(ii) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(iv) $(\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (D_i \cap B)$

(v) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \backslash \{0\}} \{x \in \mathbb{R} | |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} = \{\pi\}$

Aufgabe 8 (Beweis mit Relationen) (4 Punkte)
Sei $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M. Zeigen Sie

$$R \text{ transitiv } \Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$$

Aufgabe 9 (Funktionen und Relationen) (5 Punkte)
Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $\sim$ eine Relation über X mit $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.

(i) Stellen Sie die Funktion f und die Relation $\sim$ für $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 5 \mapsto 3$ dar.

(ii) Zeigen Sie: $\sim$ ist eine Ordnungsrelation genau dann, wenn f injektiv ist.