
Nachklausur
Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengen und Funktionen)

(4 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ ist gerade}\}$

- (a) Geben Sie die Menge $A \cup B$ an.
- (b) Geben Sie die Menge $A \cap B$ an.
- (c) Geben Sie die Menge $A \setminus B$ an.
- (d) Geben Sie $\mathcal{P}(A \setminus B)$ an.

Aufgabe 2 (Aussagen zu Mengen)

(10 Punkte)

Gegeben sei die Menge $A = \{1, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A . Bewerten Sie die folgenden Aussagen (jeweils ja oder nein angeben).

- (a) $1 \in A$
- (b) $\{1\} \in A$
- (c) $\{1\} \subseteq A$
- (d) $\{\{1\}\} \in A$
- (e) $\{\{1\}\} \subseteq A$
- (f) $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$
- (g) $\emptyset \in A$
- (h) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- (i) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$
- (j) $1 \in \mathcal{P}(A)$

Aufgabe 3 (Relationen)

(6 Punkte)

Gegeben seien die Relationen $R, S \subseteq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ mit $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ und $S = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

- (a) Stellen Sie R und S als Graphen und Adjazenzmatrix dar.
- (b) Stellen Sie die Relation $R \circ S$ als Graphen dar.
- (c) Stellen Sie die Relation $S \circ R$ als Graphen dar.

- (d) Geben Sie an, ob $(R \circ S)^*$ und $(S \circ R)^*$ Ordnungen oder Äquivalenzrelationen sind und im Falle einer Äquivalenzrelation die Menge der Äquivalenzklassen, im Falle einer Ordnung das Hasse-Diagramm.
Hinweis: R^* bezeichnet die reflexiv-transitive Hülle einer Relation R .

Aufgabe 4 (Eigenschaften von Relationen)

(5 Punkte)

Der nachfolgende (falsche) Beweis versucht zu zeigen, dass jede Relation, die symmetrisch und transitiv ist, auch reflexiv sein muss:

Ist R eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X , dann folgt für alle $x, y \in X$ mit $(x, y) \in R$ wegen der Symmetrie auch $(y, x) \in R$ und wegen der Transitivität aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ auch $(x, x) \in R$. Die Relation R ist also eine Äquivalenzrelation.

Geben Sie ein Gegenbeispiel dieser Aussage und erklären Sie, weshalb die Argumentation fehlerhaft ist.

Aufgabe 5 (Komposition von Relationen)

(3 Punkte)

Geben Sie zwei Relationen $R, S \subseteq X \times X$ und eine Menge X an, so dass $R \circ S \neq S \circ R$.

Aufgabe 6 (Mengenbeweis)

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B gilt:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$$

Hinweis: $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A

Formelsammlung

Hier eine kleine Formelsammlung. Sie ist nicht vollständig, enthält aber alle wichtigen Statements / Definitionen, die man brauchen könnte.

1. Aussagen- und Prädikatenlogik

- a) Distributivgesetz: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- b) Distributivgesetz: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- c) DeMorgan: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- d) DeMorgan: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- e) Idempotenz: $A \wedge A \Leftrightarrow A$
- f) Idempotenz: $A \vee A \Leftrightarrow A$
- g) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \perp$
- h) $A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$
- i) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- j) $\neg\forall x \in M : A(x) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
- k) $\neg\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

2. Mengen

- a) Teilmenge: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$
- b) Potenzmenge: $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$
- c) Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- d) Schnittmenge: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- e) Differenzmenge: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- f) Distributivgesetz: $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- g) Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- h) DeMorgan: $A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- i) DeMorgan: $A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- j) Es ist $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$.
- k) Es ist $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$.

3. Relationen

- a) Für Mengen M, N ist $R \subseteq M \times N$ eine Relation von M nach N .
- b) $R \subseteq M \times M$ ist reflexiv, wenn $\forall x \in M : (x, x) \in R$.

- c) $R \subseteq M \times M$ ist symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.
- d) $R \subseteq M \times M$ ist antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$.
- e) $R \subseteq M \times M$ ist transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.
- f) $R \subseteq M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- g) $R \subseteq M \times M$ ist eine Ordnungsrelation, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- h) Für eine Äquivalenzrelation \sim auf M ist $[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}$ die Äquivalenzklasse von x , $M/\sim = \{[x] \mid x \in M\}$ die Menge der Äquivalenzklassen oder Quotientenmenge von M modulo \sim . Die Menge der Äquivalenzklassen ist eine Partition von M . Umgekehrt induziert jede Partition eine Äquivalenzrelation.
- i) Für eine Ordnungsrelation \leq auf M und $X \subseteq M$ ist g ein kleinstes Element von X , wenn $\forall x \in X : g \leq x$, g ein minimales Element von X , wenn $\forall g' \in X : g' \leq g \Rightarrow g = g'$, maximale und größte Elemente analog.
- j) Es ist R^* die reflexiv-transitive Hülle für eine Relation R .

4. Funktionen

- a) Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist eine Relation (also $f \subseteq X \times Y$), die jedem Element aus der Definitionsmenge X genau ein Element aus der Zielmenge Y zuordnet.
- b) f ist injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- c) f ist surjektiv, wenn $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$.
- d) f ist bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.
- e) Die Umkehrfunktion f^{-1} ist definiert $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : y = f(x)\}$