Klausur

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengenoperationen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b, 3, 4\}$ und $B = \{1, 2, a, b\}$.

(i) Bestimmen Sie $A \cap B$.

(ii) Bestimmen Sie $A \cup B$.

(iii) Bestimmen Sie $A \backslash B$.

(iv) Bestimmen Sie $\mathscr{P}(A \cap B)$

— Lösung Anfang —

1. $A \cap B = \{a, b\}$
2. $A \cup B = \{1, 2, a, b, 3, 4\}$
3. $A \backslash B = \{3, 4\}$
4. $\mathscr{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2 (Überlegungen mit Mengen) (2 Punkte)

Die beiden folgenden Aussagen gelten nicht allgemein für alle Mengen A, B, C. Finden Sie Gegenbeispiele für Mengen A, B, C zu folgenden Aussagen:

(i) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

(ii) $A \cap B \neq \emptyset \land B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$

— Lösung Anfang —

1. $A = \emptyset, B = \{1\}$

2. $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 3 (Mengenbeweis) (2 Punkte)

Seien M, N Mengen. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\mathscr{P}(M) \cap \mathscr{P}(N) \subseteq \mathscr{P}(M \cap N)$$

— Lösung Anfang —

Beweis:

Sei $X \in \mathscr{P}(M) \cap \mathscr{P}(N)$. Dann ist $X \in \mathscr{P}(M)$ und $X \in \mathscr{P}(N)$. Also ist $X \subseteq M$ und $X \subseteq N$. Daraus folgt $X \subseteq M \cap N$. Also ist $X \in \mathscr{P}(M \cap N)$. □

— Lösung Ende —

Aufgabe 4 (Relationen) (14 Punkte)

Gegeben seien die Relation $R \subseteq M \times M$ und $S \subseteq M \times M$ mit $M = \{1, 2, 3, 4\}$,

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 2), (1, 4)\}$.

(i) Stellen Sie R und S als Adjazenzmatrix und Graph dar.

(ii) Sind R oder S Ordnungen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
(Hinweis zur Erinnerung: Eine Ordnung ist eine Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Sie muss nicht unbedingt total sein (Total würde bedeuten, dass jeweils zwei Elemente immer in Relation stehen - in der einen oder anderen Richtung, also $\forall x, y \in M : (x, y) \in M \vee (y.x) \in M$, was wir in der Vorlesung und auch hier nicht fordern.)).

(iii) Berechnen Sie $R \circ S$ und stellen Sie das Ergebnis als Adjazenzmatrix und Graph dar.
(Hinweis zur Erinnerung: Es ist $R \circ S = \{(x, y) \in M \times M | \exists z \in M : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$)

(iv) Wir bezeichnen im Folgenden $T = R \circ S$ (T als Abkürzung von $R \circ S$). Berechnen Sie $T \circ T$ und stellen Sie diese Relation als Adjazenzmatrix und Graph dar.

(v) Sei $Id = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ die Relation, die jedes Element von M mit sich selbst in Beziehung setzt. Geben Sie die Adjazenzmatrix und den Graph der Relation $O = Id \cup T \cup T \circ T$ an.

(vi) Begründen Sie, dass O eine Ordnung ist.

(vii) Stellen Sie O als Hasse-Diagramm dar.

— Lösung Anfang —

Das belass ich als Übung (einfach die Graphen zeichnen und die Matrizen ausrechnen).

— Lösung Ende —

Aufgabe 5 (Relationen und Eigenschaften) (5 Punkte)

Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie zutrifft, begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

Es gibt eine Relation $R \subseteq M \times M$ über einer Menge M, die

(i) reflexiv und irreflexiv ist
(Hinweis zur Erinnerung: R ist reflexiv, wenn $\forall x \in M : (x,x) \in R$, irreflexiv, wenn $\forall x \in M : (x,x) \notin R$)

(ii) weder reflexiv noch irreflexiv ist

(iii) symmetrisch und antisymmetrisch ist
(Hinweis zur Erinnerung: R ist symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$, antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$)

(iv) antisymmetrisch und irreflexiv ist

(v) symmetrisch und antisymmetrisch ist.

— Lösung Anfang —

(i) geht nicht, weil sich die Bedingungen ausschließen.

(ii) $R = \{(1,1)\}$ auf $M = \{1,2\}$

(iii) $R = \emptyset$

(iv) $R = \emptyset$

(v) $R = \emptyset$

— Lösung Ende —

Aufgabe 6 (Beweis mit Relationen) (4 Punkte)

Seien $R_1, S_1, R_2, S_2 \subseteq M \times M$ Relationen auf einer Menge M. Zeigen Sie

$$R_1 \subseteq R_2 \wedge S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$$

— Lösung Anfang —

Beweis:

Sei $(x, y) \in R_1 \circ S_1$. Dann existiert ein $z \in M$ mit $(x, z) \in R_1$ und $(z, y) \in S_1$. Da $R_1 \subseteq R_2$ und $S_1 \subseteq S_2$ folgt $(x, z) \in R_2$ und $(z, y) \in S_2$. Also ist $(x, y) \in R_2 \circ S_2$. $\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 7 (Funktionen) (2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen an, ob sie injektiv oder surjektiv sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(Hinweis zur Erinnerung:
$f : M \to N$ ist injektiv, wenn $\forall x, y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ und surjektiv, wenn $\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$)

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$

(ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto 1$