Übung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengenbeweise) (5 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$

(ii) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(iv) $(\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (D_i \cap B)$

(v) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \backslash \{0\}} \{x \in \mathbb{R} | |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} = \{\pi\}$

Aufgabe 2 (Symmetrische Differenz) (4 Punkte)
Unter

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

versteht man die *symmetrische Differenz* der Mengen A und B.

(i) Machen Sie sich anhand eines Venn-Diagramms klar, was unter der symmetrischen Differenz anschaulich zu verstehen ist.

(ii) Beweisen Sie: $\forall A, B : A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Aufgabe 3 (Beweisen oder Widerlegen) (2 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie:
Aus $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$ folgt $\bigcap_{i \in \{1.2.3\}} A_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 4 (Relation) (2 Punkte)
Gegeben sei die Relation $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (a, d)\}$.

(i) Stellen Sie die Adjazenzmatrix der Relation dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

Aufgabe 5 (Mengen) (3 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $(\{1, 2\} \times \{3, 4\}) \cup \{1, 2, 3\}$

(ii) $\{a, b\} \times \mathscr{P}(\{1, 2\})$

(iii) $\mathscr{P}(\{1, 2\}) \cap \mathscr{P}(\{1\})$

Aufgabe 6 (Aussagen über Mengen) (11 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

(i) $1 \in A$

(ii) $\{1\} \subseteq A$

(iii) $1 \in \mathscr{P}(A)$

(iv) $\{1\} \in \mathscr{P}(A)$

(v) $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$

(vi) $A \in \mathscr{P}(B)$

(vii) $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$

(viii) $\emptyset \subseteq \mathscr{P}(A)$

(ix) $\{\{1\}, A\} \subseteq \mathscr{P}(A)$

(x) $(1, 2) \in \mathscr{P}(A \times B)$

(xi) $\{1, 2\} \times \{1, 2\} \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$

Aufgabe 7 (Kartesische Produkte) (4 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

(i) $A \times B$

(ii) $(A \times A) \cap (B \times B)$

(iii) $(A \times B) \setminus (B \times B)$

(iv) $A \times A \times A$

Aufgabe 8 (Potenzmengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$$

Aufgabe 9 (Potenzmengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

Aufgabe 10 (Python - Two Sums) (5 Punkte)

Gegeben ist ein Array ganzer Zahlen `nums` und eine ganze Zahl `target`. Finde die Indizes der beiden Zahlen, deren Summe gleich `target` ist.

Du darfst dabei annehmen, dass es genau *eine* Lösung gibt, und dass dasselbe Element nicht zweimal verwendet werden darf.

Die Reihenfolge der zurückgegebenen Indizes ist beliebig.

Beispiele:

1. **Eingabe:** `nums = [2, 7, 11, 15]`, `target = 9`
   Ausgabe: `[0, 1]`
   Begründung: `nums[0] + nums[1] = 2 + 7 = 9`, daher geben wir `[0, 1]` zurück.

2. **Eingabe:** `nums = [3, 2, 4]`, `target = 6`
   Ausgabe: `[1, 2]`

3. **Eingabe:** `nums = [3, 3]`, `target = 6`
   Ausgabe: `[0, 1]`

Aufgabe 11 (Python - Duplicates) (5 Punkte)

Gegeben ist ein Array ganzer Zahlen `nums`. Gib `true` zurück, falls ein Wert im Array mindestens zweimal vorkommt, und `false`, falls alle Elemente verschieden sind.

Beispiele:

1. **Eingabe:** `nums = [1, 2, 3, 1]`
   Ausgabe: `true`
   Begründung: Das Element `1` kommt an den Indizes 0 und 3 vor.

2. **Eingabe:** `nums = [1, 2, 3, 4]`
   Ausgabe: `false`
   Begründung: Alle Elemente sind verschieden.

3. **Eingabe:** `nums = [1, 1, 1, 3, 3, 4, 3, 2, 4, 2]`
   Ausgabe: `true`

Aufgabe 12 (Relationendarstellungen) (2 Punkte)

Sei $R = \{(1,1), (2,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1)\}$ eine Relation. Stellen Sie die Relation als Graph und Adjazenzmatrix dar.

Aufgabe 13 (Relation) (5 Punkte)

Diese Aufgabe ist etwas schwieriger.

Wir definieren $a \equiv b \Leftrightarrow 3|(a-b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie was die Relation ausdrückt.

Hinweis: Denken Sie an die Division mit Rest.