Übungsblatt 3

Mathematik I - Theoretische Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Definitionen) (2 Punkte)

Macht Euch nochmal folgende Statements klar:

a) $M, \sigma \models \varphi$ für eine Struktur M, eine Variablenbelegung σ und eine Formel φ

b) $M \models \varphi$ für eine Struktur M und eine Formel φ

Aufgabe 2 (Strukturen) (7 Punkte)

Gegeben sei die Sprache mit Symbolen $S = \{c, f, p\}$ mit

- c eine Konstante,
- f ein zweistelliges Funktionssymbol,
- p ein zweistelliges Prädikatensymbol.
- Die Struktur $\mathcal{M}$ mit
- Trägermenge $D = \mathbb{N}$,
- $c^{\mathcal{M}} = 42$,
- $f^{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a + b$,
- $p^{\mathcal{M}}$ mit $(a, b) \in p^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow a < b$.

a) Sei σ eine Variablenbelegung mit $\sigma(x) = 7$ und $\sigma(y) = 42$. Berechnet die Werte der Terme $f(c, x)$ und $f(x, f(c, y))$ unter der Belegung σ, also $[\![f(c, x)]\!]^{\mathcal{M}}_{\sigma}$ und $[\![f(x, f(c, y))]\!]^{\mathcal{M}}_{\sigma}$.

b) Berechnet $[\![f(c, x)]\!]^{\mathcal{M}}_{\sigma[2/x]}$ und $[\![f(x, f(c, y))]\!]^{\mathcal{M}}_{\sigma[3/x, 2/y]}$.

c) Beurteilt, ob die folgenden Formeln unter der Belegung σ in der Struktur M erfüllt sind:

- $\mathcal{M}, \sigma \models P(c, x)$
- $\mathcal{M}, \sigma \models \forall y(P(x, y) \to P(c, y))$
- $\mathcal{M}, \sigma \models \exists y(P(x, y) \land P(y, c))$

Aufgabe 3 (Beweis im Kalkül des natürlichen Schließens) (18 Punkte)

Beweise, die im Kalkül des natürlichen Schließens geführt werden, bestehen aus einer Folge von Zeilen, wobei jede Zeile entweder eine Voraussetzung (Axiom) ist oder durch Anwendung einer der Schlussregeln, die wir in der Vorlesung hatten. Die Beweise werden in dem Kalkül praktisch von oben nach unten durchgeführt. Also man versucht, die zu zeigende Aussage ganz unten zu erreichen und startet oben mit den Voraussetzungen. Teilweise erfordert es aber auch, neue Voraussetzungen einzuführen, die man letztlich mit den Pfeilregeln (also Implikationen) entlastet.

Beweisen Sie im Kalkül des natürlichen Schließens:

a) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \land B \to C)$

b) $\vdash ((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$

c) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

d) $\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

e) $\forall x(\neg P(x) \to Q(x)), \neg Q(t) \vdash P(t)$

f) $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$