

Wiederholung Diskrete Mathematik (aus Vorlesung Semester 1, Theoretische Grundlagen der Informatik)

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Berlin School for Economics and Law

27. August 2025

Outline

- 1 Aussagenlogik
- 2 Prädikatenlogik
- 3 Diskrete Mathematik
 - Mengenlehre
 - Relationen
 - Funktionen

Agenda

- 1 Aussagenlogik
- 2 Prädikatenlogik
- 3 Diskrete Mathematik
 - Mengenlehre
 - Relationen
 - Funktionen

Aussagen

Unter einer **Aussage** versteht man einen sprachlichen Ausdruck, dem man eindeutig einen der beiden Wahrheitswerte w („wahr“) bzw. f („falsch“) zuordnen kann.

Aussagen werden mit Großbuchstaben bezeichnet,

$A : \text{Beschreibung}$

und können mit logischen Operationen verknüpft werden.
Grundlegende mathematische Aussagen, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden können, nennt man **Axiome**.

Logische Operationen

Logische Aussagen können durch die in der folgenden Tabelle angegebenen Operationen verknüpft werden.

Bezeichnung	Formelzeichen	Semantik (Aussage wahr gdw)
Negation	$\neg A$	A falsch ist
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B wahr sind
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B wahr ist
Implikation	$A \Rightarrow B$	A falsch oder B wahr
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A und B äquivalent

Wahrheitstabelle

In der folgenden Tabelle sind die Wahrheitswerte der vorgestellten Verknüpfungen angegeben. Dabei steht w für wahr und f für falsch.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Hinweis: Statt w für *wahr* und f für *falsch* werden auch die Symbole \top und \perp verwendet.

Gesetze für logische Operationen

Für logische Operationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

- Kommutativgesetze:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

- Distributivgesetze:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Gesetze für logische Operationen

Für logische Operationen gelten die folgenden Identitäten.

- De Morgansche Regeln:

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

- Idempotenz:

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \vee A = A$$

$$A \wedge A = A$$

- Kürzungsregeln:

$$A \vee \perp = A$$

$$A \wedge \top = A$$

Agenda

1 Aussagenlogik

2 **Prädikatenlogik**

3 Diskrete Mathematik

- Mengenlehre
- Relationen
- Funktionen

Quantoren

Definition (Quantoren)

Wir definieren folgende Notation:

- Mit $\forall x : A(x)$ definieren wir, dass eine Aussage A , die eine Variable x beinhaltet, für alle Werte von x gelten soll (üblicherweise wird dann auch eine Grundmenge, aus denen die x stammen sollen, angegeben).
- Mit $\exists x : A(x)$ drücken wir aus, dass es ein x geben soll, so dass $A(x)$ gilt.

Beispiele prädikatenlogischer Formeln

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in $x_0 \in D$ **stetig**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Um auszudrücken, dass genau ein Element in einer Menge existiert, kann man das wie folgt formulieren:

$$\exists! x \in M : A(x) :\Leftrightarrow \exists x \in M : A(x) \wedge \forall y \in M : A(y) \Rightarrow y = x$$

Agenda

1 Aussagenlogik

2 Prädikatenlogik

3 Diskrete Mathematik

- Mengenlehre
- Relationen
- Funktionen

Mengendefinition

Definition (Naive Mengendefinition)

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten unterschiedlichen Objekten (die Elemente der Menge) zu einem neuen Ganzen. Wir schreiben $x \in M$, falls das Objekt x zur Menge M gehört. Wir schreiben $x \notin M$, falls das Objekt x nicht zur Menge M gehört. Falls $x \in M$ und $y \in M$ gilt, schreiben wir auch $x, y \in M$. Eine Menge, welche nur aus endlich vielen Objekten besteht (eine endliche Menge), kann durch explizite Auflistung dieser Elemente spezifiziert werden.

Beispiel: $M = \{2, 3, 5, 7\}$.

Hierbei spielt die Reihenfolge der Auflistung keine Rolle:

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{7, 5, 3, 2\}$$

Auch Mehrfachauflistungen spielen keine Rolle:

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{2, 2, 2, 3, 3, 5, 7\}$$

Mengennotation

Mengen können definiert werden durch

- Aufzählung der Elemente
- Formulierung von Bedingungen in der Form $M := \{x | p(x)\}$, wobei p ein *Prädikat*, also eine Aussage ist, die x enthält, so dass man jeweils bei Einsetzen von x entscheiden kann, ob sie wahr (und damit das Element zur Menge gehört) oder falsch ist (und damit das Element x nicht zu M gehört).

Wir schreiben zur Abkürzung auch $M := \{x \in N | p(x)\}$ statt $M := \{x | x \in N \wedge p(x)\}$.

Besondere Mengen

Eine besonders wichtige Menge ist die leere Menge $\emptyset = \{\}$, die keinerlei Elemente enthält.

In der Mathematik hat man es häufig auch mit unendlichen Mengen zu tun (Mengen, die aus unendlich vielen Objekten bestehen). Solche Mengen können durch Angabe einer Eigenschaft, welche die Elemente der Menge auszeichnet, spezifiziert werden.

Beispiele:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

Warum naive Mengenlehre?

Die „Definition“ der Menge ist anfällig für Widersprüche, z.B. die

Russelsche Antinomie:

Man bilde die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, in Formeln:

$$M := \{N \mid N \notin N\}$$

Frage: Gilt $M \in M$? Das führt auf einen Widerspruch.

Daher hat man die Mengenlehre mit dem **Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem** auf ein solides Fundament gehoben. Mehr dazu im optionalen Inhalt (ist zu kompliziert für eine erste Einführung).

Teilmengen

Definition (Teilmenge)

Seien A und B Mengen. $A \subseteq B$ bedeutet A ist *Teilmenge* von B , genau dann, wenn

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

oder äquivalent dazu

$$\forall x \in A : x \in B$$

Lemma (Gleichheit von Mengen)

Seien A und B Mengen. Es ist $A = B$ genau dann, wenn

$\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$, was wiederum äquivalent ist zu

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Um also die Gleichheit von zwei Mengen zu zeigen beweist man üblicherweise erst $A \subseteq B$ und dann $B \subseteq A$.

Mengenoperationen

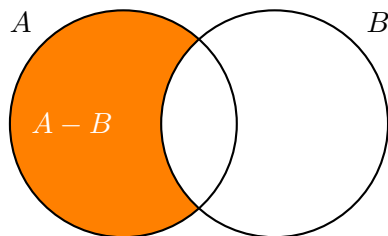
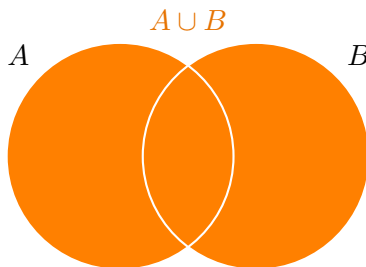
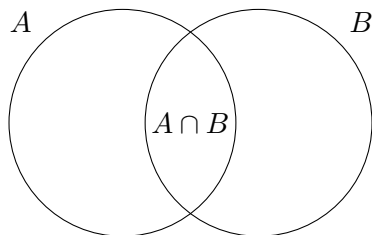
Definition (Mengenoperationen)

Seien A und B Mengen. Wir definieren:

- $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, den *Schnitt* von A und B
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, die *Vereinigung* von A und B
- $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$, die *Differenz* von A und B

Venn-Diagramme

Die Operationen lassen sich in **Venn-Diagrammen** visualisieren.



Weitere Mengen und Eigenschaften

Definition (Potenzmenge)

Mit

$$\mathcal{P}(A) := 2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

bezeichnen wir die **Potenzmenge**, die Menge aller Teilmengen von A .

Definition (Disjunktheit)

Zwei Mengen A und B sind *disjunkt*, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Beispiele für Mengenaussagen

Es gilt:

- $\forall A : \emptyset \subseteq A$
- $\forall A : A \subseteq A$
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\forall A : A \cap \emptyset = \emptyset$
- $\forall A : A \cup \emptyset = A$
- $\forall A, B, C : A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\forall A, B, C : A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\forall A, B, C : A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $\forall A, B, C : A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Agenda

1 Aussagenlogik

2 Prädikatenlogik

3 Diskrete Mathematik

- Mengenlehre
- Relationen
- Funktionen

Kartesisches Produkt

Zunächst führen wir Paare ein. Diese werden, im Gegensatz zu Mengen mit runden Klammern notiert, z.B. $(1, 2)$ das Paar, dessen erste Komponente die Zahl 1 und zweite Komponente 2 ist. Hier kommt es auf die Reihenfolge an, z.B. $(1, 2) \neq (2, 1)$, aber $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, weil es bei Mengen nur auf die Elemente, nicht auf deren Reihenfolge ankommt.

Es gilt insbesondere

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Definition (Kartesisches Produkt)

Seien M, N Mengen. Dann ist

$$M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$$

das **kartesische Produkt** von M und N .

Relationen

Relationen sind intuitiv Strukturen, um Beziehungen zwischen Objekten auszudrücken.

Definition (Relationen)

Seien M und N Mengen. Eine Teilmenge R des kartesischen Produktes $M \times N$, also

$$R \subseteq M \times N$$

nennen wir **Relation** von M auf N .

Beispiele von Relationen

Ist M die Menge der Menschen, dann ist $R \subseteq M \times M$ die Eltern-Kind-Beziehung ein Beispiel für eine Relation. Also

$(x, y) \in R \Leftrightarrow x$ ist Elternteil von y .

Ein anderes Beispiel ist die \leq Relation auf \mathbb{N} , also

$(x, y) \in R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \leq y$.

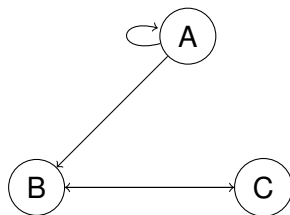
Generell kann man eine Relation zwischen zwei Elementen auf zwei Arten notieren: auf die herkömmliche Weise, also $(x, y) \in R$ oder mittels **Infixschreibweise** xRy .

Darstellung von Relationen

Eine Möglichkeit ist die Angabe als Menge, z.B.

$$R = \{(A, B), (A, A), (B, C), (C, B)\}$$

Eine Alternative ist ein Graph.



Darstellung von Relationen

Eine andere ist die einer Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier kann man sich die Zeilen und Spalten der Matrix annotiert mit den Elementen der Grundmengen denken. Etwas formaler: Eine

Adjazenzmatrix einer Relation $R \subseteq M \times N$ mit $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ und $N = \{y_1, \dots, y_n\}$, also m Elementen in M und n Elementen in N , die man sich geordnet vorstellen kann (über die Indizierung) ist eine Matrix (a_{ij}) mit $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ und für die Einträge a_{ij} in Zeile i und Spalte j gilt:

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (x_i, y_j) \in R, a_{ij} = 0 \Leftrightarrow (x_i, y_j) \notin R$$

Eigenschaften von Relationen

Relationen sind in höchster Allgemeinheit definiert. Nun kann man bestimmte Eigenschaften untersuchen.

Definition

Sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation über einer Menge M (Man beachte, dass die Elemente nur aus einer Menge M stammen). Dann ist R

- ❶ **reflexiv**, wenn $\forall x \in M : (x, x) \in R$
- ❷ **irreflexiv**, wenn $\forall x \in M : (x, x) \notin R$
- ❸ **symmetrisch**, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- ❹ **antisymmetrisch**, wenn
 $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- ❺ **asymmetrisch**, wenn $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$
- ❻ **transitiv**, wenn $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Komposition von Relationen

Definition (Komposition von Relationen)

Seien $R \subseteq M \times N, S \subseteq N \times P$. Wir definieren

$$R \circ S = \{(x, z) \in M \times P \mid \exists y \in N : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

als **Komposition** von R und S .

Die Komposition ist praktisch die „Hintereinanderschaltung“ der Relationen R und S .

Algorithmische Berechnung der Komposition (Matrixmultiplikation)

Example

Seien R und S zwei Relationen auf den Mengen M und N mit den Adjazenzmatrizen:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $R = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $S = (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Um das (i,j) -te Element von $R \circ S$, $\gamma_{i,j}$ zu berechnen, definieren wir $\gamma_{i,j} = \bigvee_{\nu=1}^n \alpha_{i,\nu} \wedge \beta_{\nu,j}$. Das bedeutet, dass wir das Element der Zielmatrix in Zeile i und Spalte j so erhalten, indem wir die i -te Zeile von R und die j -te Spalte von S durchgehen und suchen, ob 1 auf 1 trifft. Finden wir ein Paar, wird das Zielelement 1, sonst 0.

Ordnungen und Äquivalenzrelationen

Definition (Ordnung)

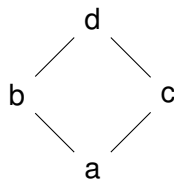
Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Ordnung**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Definition (Äquivalenzrelation)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramme sind eine spezielle Art von Graphen, die Ordnungen visualisieren. Sie sind besonders nützlich, um die Struktur von Ordnungen zu verdeutlichen.



In dem Beispiel ist die Ordnung $\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$ dargestellt. Die Idee ist, die reflexiven und transitiven Beziehungen nicht darzustellen. Sie gelten implizit. Und gilt aRb in der Ordnung R , dann wird a unterhalb von b angeordnet und beide werden mit einer Linie verbunden.

Partitionen

Definition (Partition)

Eine Partition einer Menge M ist eine Menge von nicht-leeren Teilmengen $\{A_i\}_{i \in I}$, so dass

- $\bigcup_{i \in I} A_i = M$ (die Vereinigung aller Teilmengen ergibt die Menge M)
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ (die Teilmengen sind paarweise disjunkt)

Example

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Eine mögliche Partition von M ist $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

Zusammenhang von Partitionen und Äquivalenzrelationen

- Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge M definiert eine Partition von M .
- Umgekehrt definiert jede Partition einer Menge M eine Äquivalenzrelation auf M .

Example

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Partition $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Die entsprechende Äquivalenzrelation ist:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

Zusammenhang von Partitionen und Äquivalenzrelationen

Definition (Menge der Äquivalenzklassen)

Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M . Die Menge der Äquivalenzklassen von M bzgl. R (auch bezeichnet als Quotienten- oder Faktormenge) ist definiert als:

$$M/R := \{[x]_R \mid x \in M\}$$

wobei $[x]_R := \{y \in M \mid (x, y) \in R\}$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. R ist.

Es gilt, dass zu jeder Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ die Menge der Äquivalenzklassen M/R eine Partition bildet. Umgekehrt gibt es zu jeder Partition $P \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine passende Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, so dass also $M/R = P$.

Reflexiv-transitive Hülle

Zu jeder Relation $R \subseteq M \times M$ lässt sich die reflexiv-transitive Hülle R^* bilden. Das ist die kleinste (im Sinne \subseteq) R enthaltende Relation, die reflexiv und transitiv ist.

Es gilt $R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$ mit $R^0 = Id$, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Dabei ist $Id = \{(x, x) | x \in M\}$ die Relation, die jedes Element und nur diese mit sich selbst in Beziehung setzen.

Bei endlichen Mengen kann man R^* berechnen, indem man so lange R^n hinzufügt bis $\bigcup_i R^i$ stationär wird.

Agenda

1 Aussagenlogik

2 Prädikatenlogik

3 Diskrete Mathematik

- Mengenlehre
- Relationen
- Funktionen

Funktionen

Funktionen sind spezielle Relationen, die jedem Element im Urbildraum (der ersten Menge im kartesischen Produkt) genau ein Element im Bildraum zuordnen.

Definition (Funktionen)

Eine Relation $f \subseteq M \times N$ heißt **Funktion**, wenn

$$\forall x \in M \exists y \in N : (x, y) \in f \wedge \forall y' \in N : (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$$

Da somit das mit einem Element x in Relation stehende Element y eindeutig bestimmt ist, schreiben wir auch $y = f(x)$ und bezeichnen y als **das Bild** von x .

Wir notieren eine Relation $f \subseteq M \times N$, die eine Funktion ist auch mit $f : M \rightarrow N, x \mapsto f(x)$.

Ordnungen und Äquivalenzrelationen

Definition (Ordnungen)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Ordnung**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Definition (Äquivalenzrelationen)

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Eigenschaften von Funktionen

Definition (Eigenschaften von Funktionen)

Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt

- **injektiv**, wenn $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- **surjektiv**, wenn $\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$.
- **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Intuitiv bedeutet *injektiv*, dass ein Funktionswert höchstens einen Ursprungswert hat, oder anders: Jeder Wert im Zielraum wird höchstens einmal von f „getroffen“. *Surjektiv* bedeutet, dass jeder Wert von f „getroffen“ wird.

Urbilder von Funktionen

Definition (Urbild)

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion und $B \subseteq N$. Dann heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$$

das **Urbild** von B unter f .

Beachte, dass f^{-1} hier nicht die Umkehrfunktion bezeichnet, sondern nur das Urbild. Das Urbild ist immer wohldefiniert, auch wenn f nicht bijektiv ist.

Bemerkungen zu Funktionen und Bild der Funktion

Beachte, dass $f : X \rightarrow Y$ immer eine *totale* Funktion ist, also jedes Element in X ein Bild in Y hat. Hat nicht jedes Element von X ein Bild, so muss man die Definition entsprechend einschränken. Manche Autoren lassen aber auch partielle Funktionen zu, also solche, die nicht jedes Element in X abbilden. Wir erwähnen das, falls notwendig.

Definition

Bild einer Funktion Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann heißt

$$\text{Im}(f) := f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$$

das **Bild** von X unter f .

Kanonische Faktorisierung einer Abbildung

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Wir definieren die Relation $R \subseteq X \times X$ durch

$$(x_1, x_2) \in R \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation, und wir können die kanonische Faktorisierung von f betrachten. Diese ist gegeben durch die Abbildung

$$\bar{f} : X/R \rightarrow \text{Im}(f), [x] \mapsto f(x).$$

Dabei ist $[x]$ die Äquivalenzklasse von x unter R . *Kanonische Faktorisierung* bedeutet, dass für die Projektion

$$\pi : X \rightarrow X/R, x \mapsto [x]$$

gilt:

$$f = \bar{f} \circ \pi.$$

Beispiel für kanonische Faktorisierung

Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y = \{a, b, c\}$, und $f : X \rightarrow Y$ definiert durch: $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = c$, $f(4) = b$, $f(5) = a$, $f(6) = b$, $f(7) = c$, $f(8) = a$.

- (i) Was ist $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{b\})$, $f^{-1}(\{c\})$? Das ergibt eine Partition von X .
- (ii) Definiere $x_1 \sim x_2$ falls $f(x_1) = f(x_2)$. Was sind die Äquivalenzklassen?
- (iii) Beschreibe $\pi : X \rightarrow X/\sim$.
- (iv) Nun widmen wir uns $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$, definiert durch $\bar{f}([x]) = f(x)$. Macht euch klar, dass es eine Bijektion ist.
- (v) Macht Euch klar, dass $f = \bar{f} \circ \pi$ gilt