

Übung

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengenbeweise)

(5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$

(ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(iv) $(\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (D_i \cap B)$

(v) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \pi| \leq \varepsilon\} = \{\pi\}$

— Lösung Anfang —

Beweis (i): „ \Rightarrow “:

Sei $A \subseteq B \cap C$. Wir zeigen $A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.

Sei $x \in A$. Wir müssen zeigen, dass dann $x \in B$ und $x \in C$. Nach Voraussetzung ist $x \in B \cap C$, d.h. $x \in B \wedge x \in C$, was zu zeigen war.

„ \Leftarrow “: analog

□

Beweis (ii):

Sei $x \in A \setminus (B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

□

Beweis (iii):

Sei $x \in (A \cup B) \times C$

$$\Leftrightarrow x \in A \times C \vee x \in B \times C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

□

Beweis (iv):

Sei $x \in (\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B$

$$\Leftrightarrow x \in \{x \mid \exists i \in I : x \in D_i\} \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in (\bigcup_{i \in I} D_i \cap B)$$

□

Beweis (v):„ \subseteq “:Annahme: $\exists x \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} : x \neq \pi$ Wegen $x \neq \pi$ muss es ein $\varepsilon > 0$ geben mit $|x - \pi| > \varepsilon$. Andererseits ist $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \pi| \leq \varepsilon\} = \{y \mid \forall \varepsilon > 0 : |y - \pi| \leq \varepsilon\}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : |x - \pi| \leq \varepsilon$. Widerspruch! Also muss $x = \pi$ sein.„ \supseteq “:Da $|\pi - \pi| = 0 \leq \varepsilon$ für beliebige (also alle) $\varepsilon > 0$ und $\pi \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\pi \in \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \pi| \leq |\varepsilon|\}$

□

— Lösung Ende —

Aufgabe 2 (Symmetrische Differenz)

(4 Punkte)

Unter

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

versteht man die *symmetrische Differenz* der Mengen A und B .

- (i) Machen Sie sich anhand eines Venn-Diagramms klar, was unter der symmetrischen Differenz anschaulich zu verstehen ist.
- (ii) Beweisen Sie: $\forall A, B : A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

— Lösung Anfang —

Venn-Diagramm zeichne ich jetzt mal nicht. Bleibt als Übung.

Beweis:

$$\text{Sei } x \in A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A) \text{ (Distributivität)}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \text{ (} x \in A \vee x \notin A \text{ ist immer wahr, kann man also kürzen)}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge \neq (x \in A \wedge x \in B) \text{ (De Morgan)}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

□

— Lösung Ende —

Aufgabe 3 (Beweisen oder Widerlegen)

(2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

Aus $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$ folgt $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \neq \emptyset$.

— Lösung Anfang —

Sei $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{1, 3\}$. Dann ist $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$. Aber $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Die Behauptung ist also falsch.

— Lösung Ende —

Aufgabe 4 (Relation)

(2 Punkte)

Gegeben sei die Relation $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (a, d)\}$.

(i) Stellen Sie die Adjazenzmatrix der Relation dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

— Lösung Anfang —

Das ist eine ganz einfache Aufgabe. Lass ich mal als Übung.

— Lösung Ende —

Aufgabe 5 (Mengen)

(3 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $(\{1, 2\} \times \{3, 4\}) \cup \{1, 2, 3\}$

(ii) $\{a, b\} \times \mathcal{P}(\{1, 2\})$

(iii) $\mathcal{P}(\{1, 2\}) \cap \mathcal{P}(\{1\})$

— Lösung Anfang —

(i) $\{1, 2, 3, (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

(ii) $\{(a, \emptyset), (b, \emptyset), (a, \{1\}), (b, \{1\}), (a, \{2\}), (b, \{2\}), (a, \{1, 2\}), (b, \{1, 2\})\}$

(iii) $\{\emptyset, \{1\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 6 (Aussagen über Mengen)

(11 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

- (i) $1 \in A$
- (ii) $\{1\} \subseteq A$
- (iii) $1 \in \mathcal{P}(A)$
- (iv) $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$
- (v) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
- (vi) $A \in \mathcal{P}(B)$
- (vii) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- (viii) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$
- (ix) $\{\{1\}, A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
- (x) $(1, 2) \in \mathcal{P}(A \times B)$
- (xi) $\{1, 2\} \times \{1, 2\} \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

— Lösung Anfang —

- (i) wahr
- (ii) wahr
- (iii) falsch
- (iv) wahr
- (v) wahr
- (vi) wahr
- (vii) wahr
- (viii) wahr
- (ix) wahr
- (x) wahr
- (xi) falsch

— Lösung Ende —

Aufgabe 7 (Kartesische Produkte)

(4 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

(i) $A \times B$

(ii) $(A \times A) \cap (B \times B)$

(iii) $(A \times B) \setminus (B \times B)$

(iv) $A \times A \times A$

— Lösung Anfang —

(i) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

(ii) $(A \times A) \cap (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \cap \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} = \{(2, 2)\}$

(iii) $(A \times B) \setminus (B \times B) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

(iv) $A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 8 (Potenzmengenbeweis)

(4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

— Lösung Anfang —„ \Rightarrow “:Sei $M \in \mathcal{P}(A)$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $M \in \mathcal{P}(B)$.Dann ist $M \subseteq A$. Da aber $A \subseteq B$ ist auch $M \subseteq B$ und damit $M \in \mathcal{P}(B)$.„ \Leftarrow “:Sei $x \in A$. Wir wollen zeigen, dass dann $x \in B$. Es ist $\{x\} \subseteq A$, also $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$.Wegen Voraussetzung ist aber $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, also $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ und damit $x \in B$.

□

— Lösung Ende —

Aufgabe 9 (Potenzmengenbeweis)

(4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

— Lösung Anfang —Sei $M \in \mathcal{P}(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow M \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M : x \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M : x \in A \wedge x \in B$$

$$\Leftrightarrow M \subseteq A \wedge M \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A) \wedge M \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

□

— Lösung Ende —

Aufgabe 10 (Python - Two Sums)

(5 Punkte)

Gegeben ist ein Array ganzer Zahlen `nums` und eine ganze Zahl `target`. Finde die Indizes der beiden Zahlen, deren Summe gleich `target` ist.

Du darfst dabei annehmen, dass es genau *eine* Lösung gibt, und dass dasselbe Element nicht zweimal verwendet werden darf.

Die Reihenfolge der zurückgegebenen Indizes ist beliebig.

Beispiele:

1. **Eingabe:** `nums = [2, 7, 11, 15], target = 9`

Ausgabe: `[0, 1]`

Begründung: `nums[0] + nums[1] = 2 + 7 = 9`, daher geben wir `[0, 1]` zurück.

2. **Eingabe:** `nums = [3, 2, 4], target = 6`

Ausgabe: `[1, 2]`

3. **Eingabe:** `nums = [3, 3], target = 6`

Ausgabe: `[0, 1]`

Aufgabe 11 (Python - Duplicates)

(5 Punkte)

Gegeben ist ein Array ganzer Zahlen `nums`. Gib `true` zurück, falls ein Wert im Array mindestens zweimal vorkommt, und `false`, falls alle Elemente verschieden sind.

Beispiele:

1. **Eingabe:** `nums = [1, 2, 3, 1]`

Ausgabe: `true`

Begründung: Das Element 1 kommt an den Indizes 0 und 3 vor.

2. **Eingabe:** `nums = [1, 2, 3, 4]`

Ausgabe: `false`

Begründung: Alle Elemente sind verschieden.

3. **Eingabe:** `nums = [1, 1, 1, 3, 3, 4, 3, 2, 4, 2]`

Ausgabe: `true`

Aufgabe 12 (Relationendarstellungen)

(2 Punkte)

Sei $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1)\}$ eine Relation. Stellen Sie die Relation als Graph und Adjazenzmatrix dar.

Aufgabe 13 (Relation)

(5 Punkte)

Diese Aufgabe ist etwas schwieriger.

Wir definieren $a \equiv b \Leftrightarrow 3|(a - b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie was die Relation ausdrückt.

Hinweis: Denken Sie an die Division mit Rest.

— Lösung Anfang —

Zwei Zahlen sind in Relation, wenn sie den gleichen Rest bei der Division durch 3 haben.

Begründung:

Jede Zahl a lässt sich darstellen als $a = 3 \cdot \xi + \eta$ mit geeignetem a, ξ, η , wobei $\eta \in \{0, 1, 2\}$. η ist der Rest bei der Division von a durch 3. Hat man nun $b = 3 \cdot \kappa + \lambda$, dann ist $a - b = 3 \cdot \xi + \eta - 3 \cdot \kappa - \lambda = \eta - \lambda$ und es gilt $3|(a - b) \Leftrightarrow \eta - \lambda = 0$, also wenn a und b denselben Rest bei der Division durch 3 ergeben.

— Lösung Ende —