Klausur

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengenbeweise) (5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \subseteq C$

(ii) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(iv) $(\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (D_i \cap B)$

(v) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \backslash \{0\}} \{x \in \mathbb{R} | |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} = \{\pi\}$

— Lösung Anfang —

Beweis (i): „$\Rightarrow$“:

Sei $A \subseteq B \cap C$. Wir zeigen $A \subseteq B \land A \subseteq C$.

Sei $x \in A$. Wir müssen zeigen, dass dann $x \in B$ und $x \in C$. Nach Voraussetzung ist $x \in B \cap C$, d.h. $x \in B \land x \in C$, was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$“: analog

□

Beweis (ii):

Sei $x \in A \backslash (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \land x \notin (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \land x \notin B \land x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A \land x \notin B \land x \in A \land x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A \backslash B \land x \in A \backslash C$

$\Leftrightarrow x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

□

Beweis (iii):

Sei $x \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow x \in A \times C \lor x \in B \times C$

$\Leftrightarrow x \in (A \times C) \cup (B \times C)$

□

Beweis (iv):

Sei $x \in (\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B$

$\Leftrightarrow x \in \{x | \exists i \in I : x \in D_i\} \cap B$

$\Leftrightarrow x \in (\bigcup_{i\in I} D_i \cap B)$

$\square$

Beweis (v):
„$\subseteq$“:
Annahme: $\exists x \in \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{x \in \mathbb{R} | |x-\pi| \leq |\varepsilon|\} : x \neq \pi$

Wegen $x \neq \pi$ muss es ein $\varepsilon > 0$ geben mit $|x-\pi| > \varepsilon$. Andererseits ist $x \in \bigcap_{\varepsilon>0}\{x \in \mathbb{R} | |x-\pi| \leq \varepsilon\} = \{y | \forall\varepsilon > 0 : |y-\pi| \leq \varepsilon\}$, d.h. $\forall\varepsilon > 0 : |x-\pi| \leq \varepsilon$. Widerspruch! Also muss $x = \pi$ sein.

„$\supseteq$“:
Da $|\pi-\pi| = 0 \leq \varepsilon$ für beliebige (also alle) $\varepsilon > 0$ und $\pi \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\pi \in \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{x \in \mathbb{R} | |x-\pi| \leq |\varepsilon|\}$

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 2 (Symmetrische Differenz) (4 Punkte)

Unter

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

versteht man die *symmetrische Differenz* der Mengen A und B.

(i) Machen Sie sich anhand eines Venn-Diagramms klar, was unter der symmetrischen Differenz anschaulich zu verstehen ist.

(ii) Beweisen Sie: $\forall A, B : A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

— Lösung Anfang —

Venn-Diagramm zeichne ich jetzt mal nicht. Bleibt als Übung.

Beweis:

Sei $x \in A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$ (Distributivität)

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$ ($x \in A \vee x \notin A$ ist immer wahr, kann man also kürzen)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge \neq (x \in A \wedge x \in B)$ (De Morgan)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 3 (Beweisen oder Widerlegen) (2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

Aus $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$ folgt $\bigcap_{i \in \{1.2.3\}} A_i \neq \emptyset$.

— Lösung Anfang —

Sei $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{1,3\}$. Dann ist $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Aber $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Die Behauptung ist also falsch.

— Lösung Ende —

Aufgabe 4 (Relation) (2 Punkte)

Gegeben sei die Relation $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (a, d)\}$.

(i) Stellen Sie die Adjazenzmatrix der Relation dar.

(ii) Stellen Sie die Relation als Graph dar.

— Lösung Anfang —

Das ist eine ganz einfache Aufgabe. Lass ich mal als Übung.

— Lösung Ende —

Aufgabe 5 (Mengen) (3 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\}$

(ii) $\{a,b\} \times \mathscr{P}(\{1,2\})$

(iii) $\mathscr{P}(\{1,2\}) \cap \mathscr{P}(\{1\})$

— Lösung Anfang —

(i) $\{1,2,3,(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

(ii) $\{(a,\emptyset),(b,\emptyset),(a,\{1\}),(b,\{1\}),(a,\{2\}),(b,\{2\}),(a,\{1,2\}),(b,\{1,2\})\}$

(iii) $\{\emptyset,\{1\}\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 6 (Aussagen über Mengen) (11 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig?

(i) $1 \in A$

(ii) $\{1\} \subseteq A$

(iii) $1 \in \mathscr{P}(A)$

(iv) $\{1\} \in \mathscr{P}(A)$

(v) $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$

(vi) $A \in \mathscr{P}(B)$

(vii) $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$

(viii) $\emptyset \subseteq \mathscr{P}(A)$

(ix) $\{\{1\}, A\} \subseteq \mathscr{P}(A)$

(x) $(1, 2) \in \mathscr{P}(A \times B)$

(xi) $\{1, 2\} \times \{1, 2\} \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$

— Lösung Anfang —

(i) wahr

(ii) wahr

(iii) falsch

(iv) wahr

(v) wahr

(vi) wahr

(vii) wahr

(viii) wahr

(ix) wahr

(x) wahr

(xi) falsch

— Lösung Ende —

Aufgabe 7 (Kartesische Produkte) (4 Punkte)

Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

(i) $A \times B$

(ii) $(A \times A) \cap (B \times B)$

(iii) $(A \times B) \setminus (B \times B)$

(iv) $A \times A \times A$

— Lösung Anfang —

(i) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

(ii) $(A \times A) \cap (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \cap \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} = \{(2, 2)\}$

(iii) $(A \times B) \setminus (B \times B) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

(iv) $A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$

— Lösung Ende —

Aufgabe 8 (Potenzmengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$$

— Lösung Anfang —

„$\Rightarrow$“:

Sei $M \in \mathscr{P}(A)$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $M \in \mathscr{P}(B)$.

Dann ist $M \subseteq A$. Da aber $A \subseteq B$ ist auch $M \subseteq B$ und damit $M \in \mathscr{P}(B)$.

„$\Leftarrow$“:

Sei $x \in A$. Wir wollen zeigen, dass dann $x \in B$. Es ist $\{x\} \subseteq A$, also $\{x\} \in \mathscr{P}(A)$.

Wegen Voraussetzung ist aber $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$, also $\{x\} \in \mathscr{P}(B)$ und damit $x \in B$.

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 9 (Potenzmengenbeweis) (4 Punkte)

Zeigen Sie für beliebige Mengen A, B:

$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$$

— Lösung Anfang —

Sei $M \in \mathscr{P}(A \cap B)$

$\Leftrightarrow M \subseteq A \cap B$

$\Leftrightarrow \forall x \in M : x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow \forall x \in M : x \in A \wedge x \in B$

$\Leftrightarrow M \subseteq A \wedge M \subseteq B$

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{P}(A) \wedge M \in \mathscr{P}(B)$

$\Leftrightarrow M \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

$\square$

— Lösung Ende —

Aufgabe 10 (Relationendarstellungen) (2 Punkte)
Sei $R = \{(1,1),(2,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1)\}$ eine Relation. Stellen Sie die Relation als Graph und Adjazenzmatrix dar.

Aufgabe 11 (Relation) (5 Punkte)
Diese Aufgabe ist etwas schwieriger.

Wir definieren $a \equiv b \Leftrightarrow 3|(a-b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie was die Relation ausdrückt.

Hinweis: Denken Sie an die Division mit Rest.

— Lösung Anfang —
Zwei Zahlen sind in Relation, wenn sie den gleichen Rest bei der Division durch 3 haben.

Begründung:

Jede Zahl a lässt sich darstellen als $a = 3 \cdot \xi + \eta$ mit geeignetem a, ξ, η, wobei $\eta \in \{0,1,2\}$. η ist der Rest bei der Division von a durch 3. Hat man nun $b = 3 \cdot \kappa + \lambda$, dann ist $a - b = 3 \cdot \xi + \eta - 3 \cdot \kappa - \lambda = \eta - \lambda$ und es gilt $3|(a-b) \Leftrightarrow \eta - \lambda = 0$, also wenn a und b denselben Rest bei der Division durch 3 ergeben.
— Lösung Ende —