

# Strukturgleichungen mit latenten Variablen

Prof. Dr. Martin Elff  
E-mail: martin.elff@zu.de

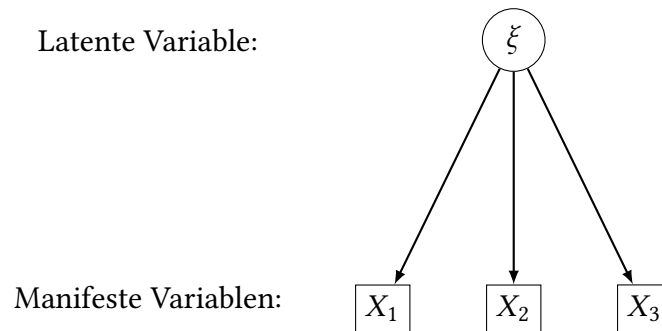
Fall Semester 2015

## 1 Das allgemeine lineare Faktorenmodell

### Hintergrund: latente und Manifeste Variablen

- Viele sozialwissenschaftliche und psychologische Konzepte lassen sich nicht direkt Messen.
- Besonders deutlich wird das bei psychologischen Konzepten z.B. Angst, Introversion/Extroversion etc.
- Statt direkter Messung versucht man es mit *indirekter* Messung
- Grundidee: nicht direkt messbare konzeptuelle Variable beeinflussen kausal direkt messbare Variablen
- Im Fall indirekter Messung spricht man von
  - Konzepten und deren Indikatoren
  - Latente Variablen und manifeste Variablen

### Illustration von latenten und manifesten Variablen



## Das allgemeine lineare Faktorenmodell

- Das allgemeine lineare Faktorenmodell ist eine mathematische Repräsentation der Beziehungen zwischen latenten Variablen und manifesten Variablen.
- Man unterscheidet zwischen:
  - Indikatoren, den beobachteten bzw. direkt gemessenen Variablen
  - *Unique factors*, Faktoren, die jeweils genau einen Indikator beeinflussen
  - *Common factors*, Faktoren, die mehrere Indikatoren simultan beeinflussen
- Gleichungen des linearen Faktorenmodells

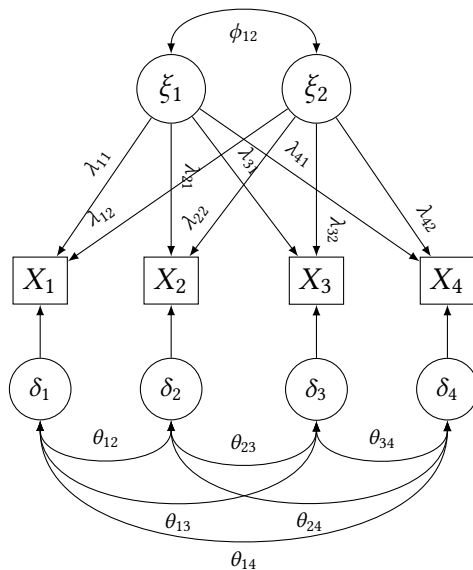
$$\begin{aligned}
 X_1 &= \mu_1 + \lambda_{11}\xi_1 + \cdots + \lambda_{1q}\xi_q + \delta_1 \\
 X_2 &= \mu_2 + \lambda_{21}\xi_1 + \cdots + \lambda_{2q}\xi_q + \delta_2 \\
 &\vdots \\
 X_n &= \mu_n + \lambda_{n1}\xi_1 + \cdots + \lambda_{nq}\xi_q + \delta_n
 \end{aligned}$$

(Achtung:  $n$  bezieht sich hier *nicht* auf die Anzahl der Beobachtungen in einem Datensatz, sondern auf die Anzahl der Indikatoren)

- Die Indikatoren sind hier:  $X_1, \dots, X_n$
- Die *common factors* sind hier:  $\xi_1, \dots, \xi_q$
- Die *unique factors* sind hier:  $\delta_1, \dots, \delta_n$
- Grundannahme: Die Erwartungswerte der *common factors* und der *unique factors* sind alle gleich Null.
- Parameter des Faktorenmodells:
  - $\lambda_{jk}$ : Die Ladungen der Indikatoren  $X_j$  auf den Faktoren  $\xi_k$
  - $\phi_{kk}, \phi_{k_1, k_2}$ : Die Varianzen der *common factors*  $\xi_k$  und Kovarianzen zwischen den *common factors*  $\xi_{k_1}$  und  $\xi_{k_2}$
  - $\theta_{jj}, \theta_{j_1, j_2}$ : Die Varianzen der *unique factors*  $\delta_j$  und die Kovarianzen zwischen den *unique factors*  $\delta_{j_1}$  und  $\delta_{j_2}$
- Die Parameter des allgemeinen linearen Faktorenmodells werden meist in die Matrizen  $\Lambda$ ,  $\Phi$  und  $\Theta$  zusammengefasst.

- In der Regel müssen viele der Parameter eines Faktorenmodells auf bestimmte Werte (typischerweise Null für viele Kovarianzen und/oder mehrere Ladungen und Eins für die Varianzen der *common factors*).
- Die Erwartungswerte der beobachteten Variablen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  werden i.d.R. nicht als relevante Modellparameter angesehen, da meist davon *zentrierte* Variablen betrachtet werden (d.h.  $X_i$  wird durch  $X_i - \mu_i$  ersetzt.)

### Illustration der Parameter eines allgemeinen linearen Faktorenmodells



Anmerkung: Die Varianzen sind hier (wie meist üblich) der Übersichtlichkeit wegen nicht auch noch dargestellt.

### Das Identifikationsproblem in der Faktorenanalyse

- Die Parameter eines Faktormodells werden in der Regel über die Varianzen und Kovarianzen der beobachteten Variablen  $X_1, \dots, X_n$  identifiziert bzw. geschätzt.
- Der Zusammenhang zwischen den Parameter des Faktormodells und den Varianzen und Kovarianzen der beobachteten Variablen – zusammengefasst in der Matrix  $\Sigma$  – ist

$$\Sigma = \Lambda \Phi \Lambda + \Theta$$

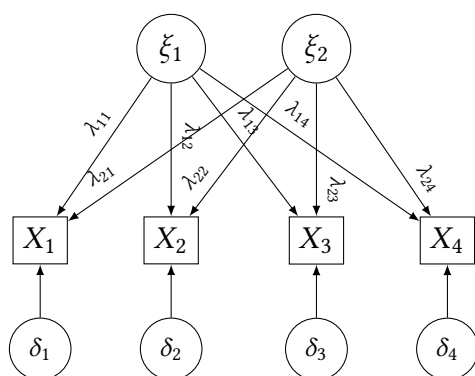
- In  $\Sigma$  gibt es maximal  $n(n+1)/2$  funktional von einander unabhängige Elemente (da  $\text{Cov}(X_{j_1}, X_{j_2}) = \text{Cov}(X_{j_2}, X_{j_1})$ ). Ohne Restriktionen von Parametern auf festgelegte Werte hat ein Faktormodell aber  $nq + q(q+1)/2 + n(n+1)/2$  unbestimmte Parameter.

## 2 Explorative Faktorenanalyse

### Explorative Faktorenanalyse

- In der explorativen Faktorenanalyse sind
  - die Kovarianzen (aber nicht Varianzen!) der *unique factors* auf Null festgelegt, d.h.  $\theta_{j_1, j_2} = 0$  für  $j_1 \neq j_2$
  - die Varianzen der *common factors* auf Eins und die Kovarianzen auf Null festgelegt, d.h.  $\phi_{kk} = 1$  und  $\phi_{k_1, k_2} = 0$  für  $k_1 \neq k_2$  oder in Matrixform  $\Phi = I$ .
  - die Faktorladungen mehr oder weniger freie Parameter, denen aber gewisse summarische Restriktionen auferlegt werden, um deren Identifikation sicherzustellen – üblicherweise erstens, dass  $\Lambda' \Lambda = I$  und zweitens, dass die Ladungen einem Rotationskriterium entsprechen, z.B. dem Varimax-Kriterium.
- Die Struktur des Modells der explorativen Faktorenanalyse ist der Hauptkomponentenanalyse sehr ähnlich. Ergebnisse der explorativen Faktorenanalyse sind daher denen der Hauptkomponentenanalyse (mit „Extraktion“ der selben Anzahl von Hauptkomponenten und anschließender Rotation z.B. entsprechend dem Varimax-Kriterium).
- Anzahl der Faktoren wird durch Hypothesentests bestimmt. Z.B.:
  - Nullhypothese: ein *common factor* ausreichend um Kovarianzen unter den beobachteten Variablen zu beschreiben
  - Alternativhypothese: mehr als ein *common factor* wird benötigt.(Mehr zu Hypothesentests in einer späteren Sitzung)

### Illustration der Parameter eines explorativen Faktorenmodells



Anmerkung: Nur die Parameter, deren Wert nicht auf Null festgesetzt ist, werden durch Pfeile dargestellt. Die Varianzen sind hier (wie meist üblich) der Übersichtlichkeit wegen nicht dargestellt.

### Anwendungsbeispiel mit R

- Wie wenden uns wieder Lijphart's Daten zu

- Die Hauptkomponenten-Analyse legt nahe, dass ein Zwei-Faktoren-Modell benötigt wird, wir prüfen das jetzt nach.
- Erst ein Ein-Faktoren-Modell

```
lijphart <- read.csv("lijphart.csv")
names(lijphart) <- tolower(names(lijphart))
fa1.lijphart <- factanal(lijphart[, -(1:3)], factors=1)
# oder:
fa1.lijphart <- factanal(~effnumpa
                        +minwin
                        +exdom
                        +disprop
                        +pluralis
                        +federali
                        +bicamera
                        +constrig
                        +judrevie
                        +centralb,
                        data=lijphart, factors=1)
```

**fa1.lijphart**

- Der erste Teil der Ausgabe, berichtet, wie gut die Indikatoren (*unique factors*) durch die gemeinsamen Faktoren (*common factors*) vorhergesagt/reproduziert werden. Je höher die *uniqueness*, desto schlechter die Vorhersage der Indikatoren.

---

Output

---

Call:

```
factanal(x = ~effnumpa + minwin + exdom + disprop + pluralis +
          federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb,
          factors = 1,
          data = lijphart)
```

Uniquenesses:

effnumpa	minwin	exdom	disprop	pluralis	federali	bicamera	constrig	judrevie	centralb
0.205	0.056	0.503	0.656	0.530	0.923	1.000	0.996	0.994	0.985

---

- Die Ladungen sagen ähnlich wie die *Uniquenesses* aus, dass die letzten fünf Variablen nicht gut vorhergesagt werden.

---

Output

---

Loadings:

	Factor1
effnumpa	-0.892
minwin	0.971
exdom	0.705
disprop	0.587
pluralis	0.685
federali	-0.277

```
bicamera
constrig
judrevie
centralb -0.123
```

```

                Factor1
SS loadings      3.151
Proportion Var   0.315
```

- Der Hypothesentest sagt auch, dass wir mehr als einen *common factor* brauchen.

Output

```
Test of the hypothesis that 1 factor is sufficient.
The chi square statistic is 77 on 35 degrees of freedom.
The p-value is 0.0000553
```

- Jetzt ein Zwei-Faktoren-Modell

```
fa2.lijphart <- factanal(lijphart[, -(1:3)], factors=2)
# oder:
fa2.lijphart <- factanal(~effnumpa
                        +minwin
                        +exdom
                        +disprop
                        +pluralis
                        +federali
                        +bicamera
                        +constrig
                        +judrevie
                        +centralb,
                        data=lijphart, factors=2)
```

**fa2.lijphart**

- Die *Uniquenesses* sehen besser aus:

Output

```
Call:
factanal(x = ~effnumpa + minwin + exdom + disprop + pluralis +
          federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb,
         factors = 2,
         data = lijphart)
```

Uniquenesses:

effnumpa	minwin	exdom	disprop	pluralis	federali	bicamera	constrig	judrevie	centralb
0.180	0.088	0.489	0.646	0.526	0.083	0.526	0.658	0.665	0.639

- Die Ladungen ähneln jetzt sehr den Ladungen der rotierten ersten zwei Hauptkomponenten:

Output

Loadings:

	Factor1	Factor2
effnumpa	-0.905	
minwin	0.955	
exdom	0.713	
disprop	0.595	
pluralis	0.684	
federali	-0.258	0.922
bicamera		0.688
constrig		0.584
judrevie	0.113	0.568
centralb		0.594

	Factor1	Factor2
SS loadings	3.150	2.350
Proportion Var	0.315	0.235
Cumulative Var	0.315	0.550

- 
- Der Hypothesentest sagt aus, dass wir nicht noch mehr *common factors* brauchen.

---

Output

---

Test of the hypothesis that 2 factors are sufficient.

The chi square statistic is 25.4 on 26 degrees of freedom.

The p-value is 0.494

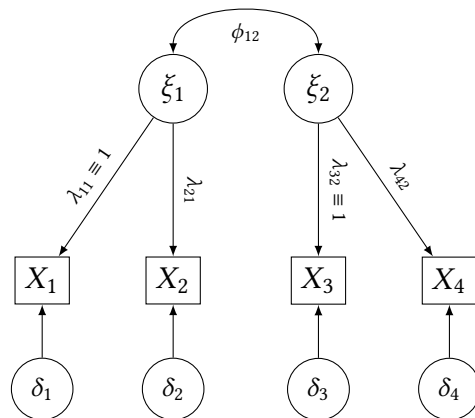
---

## 2.1 Konfirmatorische Faktorenanalyse

### Konfirmatorische Faktorenanalyse

- Im Unterschied zur explorativen Faktorenanalyse liegt bei der konfirmatorischen Faktorenanalyse die Konstruktion des Modells, bzw. die Entscheidung darüber, welche Parameter gleich Null oder einen anderen Wert zu setzen sind, ganz und gar in der Verantwortung des Anwenders.
- Während sich einfache und klar zu interpretierende Ladungsmuster quasi im Nachhinein ergeben, wird in der konfirmatorischen Faktorenanalyse ein interpretierbares Ladungsmuster vorgegeben.

## Ein typisches Modell in der konfirmatorischen Faktorenanalyse



Anmerkung: Nur die Parameter, deren Wert nicht auf Null festgesetzt ist, werden durch Pfeile dargestellt. Die Varianzen sind hier (wie meist üblich) der Übersichtlichkeit wegen nicht dargestellt. Die Ladungen  $\lambda_{11}$  und  $\lambda_{32}$  sind auf den Wert Eins fixiert.

Die Matrizen der Parameter des dargestellten Modells sind (auf Null fixierte Elemente werden nicht angezeigt)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \lambda_{11} & & & \\ & 1 & & \\ & & & \lambda_{42} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & & & \\ & \theta_{22} & & \\ & & \theta_{33} & \\ & & & \theta_{44} \end{bmatrix}$$

Das Modell hat  $2 + 3 + 4 = 9$  freie Parameter, maximal  $4 \cdot 5/2 = 10$  freie Parameter sind möglich.

## Das Identifikationsproblem in der konfirmatorischen Faktorenanalyse

- Es obliegt der Anwenderin des Verfahrens, sicher zu stellen, dass das Faktorenmodell identifiziert ist.
- Es gibt einige allgemeine Regeln für notwendige und für hinreichende Bedingungen für die Identifikation. – Für diese Regel sei auf die Literatur verwiesen.
- Im Einzelfall kann der Nachweis der Identifikation allerdings ein ziemlich vertracktes Problem darstellen.

## Anwendungsbeispiel mit R

- Wie wenden uns wieder Lijphart's Daten zu
- Die explorative Faktorenanalyse legt ein zwei-Faktoren-Modell nahe, in dem jeweils fünf der Indikatorvariablen jeweils auf einen *common factor* laden:



```
library(lavaan)
cfa.lijphart <- cfa(
  '
  F1 =~ effnumpa + minwin + exdom + disprop + pluralis
  F2 =~ federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  ',
  data=lijphart)
summary(cfa.lijphart, standardized=TRUE)
```

- Zunächst grundlegende Angaben zur Anpassungsgüte:

---

Output	
lavaan (0.5-20) converged normally after 51 iterations	
Number of observations	36
Estimator	ML
Minimum Function Test Statistic	37.123
Degrees of freedom	34
P-value (Chi-square)	0.327

Parameter Estimates:

---

Information	Expected
Standard Errors	Standard

---

- Das Ladungsmuster ähnelt dem Ergebnis der explorativen Analyse, aber die Werte der Ladungen variieren stark, da die Kovarianzen und nicht die Korrelationen den Ausgangspunkt bilden. Aber die vollständig standardisierten Ladungen sind weniger „wild“ (vollständig heißt, dass sowohl die Varianzen der *common factors* als auch der beobachteten Variablen auf Eins re-skaliert sind).

		Output				
Latent Variables:						
	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )	Std.lv	Std.all
F1 =~						
effnumpa	1.000				1.029	0.891
minwin	-29.592	3.254	-9.093	0.000	-30.459	-0.972
exdom	-1.113	0.215	-5.186	0.000	-1.146	-0.704
disprop	-3.153	0.793	-3.975	0.000	-3.245	-0.586
pluralis	-0.646	0.130	-4.958	0.000	-0.665	-0.684
F2 =~						
federali	1.000				1.421	0.949
bicamera	0.468	0.111	4.203	0.000	0.665	0.664
constrig	0.378	0.105	3.606	0.000	0.538	0.581

judrevie	0.313	0.097	3.230	0.001	0.445	0.527
centralb	0.047	0.012	3.769	0.000	0.067	0.604

Jeweils die erste Ladung ist auf Eins fixiert, damit das Modell identifiziert ist.

- Die *common factors* sind moderat korreliert:

Output						
Covariances:						
	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )	Std.lv	Std.all
F1 ~~						
F2	0.349	0.268	1.302	0.193	0.239	0.239

- Die Varianzen der *unique factors* sind sehr unterschiedlich:

Output						
Variances:						
	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )	Std.lv	Std.all
effnumpa	0.274	0.092	2.981	0.003	0.274	0.206
minwin	53.271	57.124	0.933	0.351	53.271	0.054
exdom	1.333	0.331	4.028	0.000	1.333	0.504
disprop	20.184	4.877	4.139	0.000	20.184	0.657
pluralis	0.502	0.124	4.054	0.000	0.502	0.532
federali	0.225	0.286	0.788	0.431	0.225	0.100
bicamera	0.561	0.149	3.760	0.000	0.561	0.559
constrig	0.568	0.143	3.972	0.000	0.568	0.663
judrevie	0.516	0.127	4.053	0.000	0.516	0.722
centralb	0.008	0.002	3.927	0.000	0.008	0.636
F1	1.059	0.315	3.368	0.001	1.000	1.000
F2	2.020	0.597	3.385	0.001	1.000	1.000

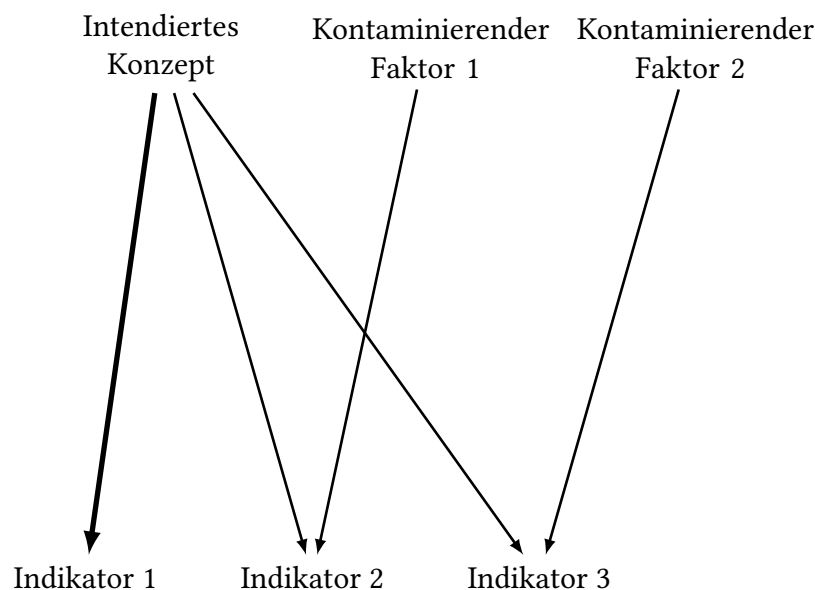
## 2.2 Reliabilität und Validität

### Reliabilität und Validität in faktorenanalytischer Perspektive

- Reliabilität:
  - Reliabilität ist das Ausmaß in dem wiederholte Messungen (annähernd) das gleiche Ergebnis liefern
  - Wiederholte Messungen kann auch bedeuten: mit unterschiedlichen Instrumenten die gleiche Größe/das gleiche Konzept messen
  - Im Rahmen der Faktorenanalyse kann die Reliabilität der Messung des durch den *common factors* repräsentierten Konzepts durch die Indikatoren ausgedrückt werden als Stärke seines Einflusses relativ zu dem der *unique factors*.

- Validität:
  - Eine Messung ist valide, wenn sie misst, was sie messen soll.
  - Im Rahmen der Faktorenanalyse heißt das, dass die „richtigen“ Variablen auf den *common factor* laden, der das zu messende Konzept repräsentiert (und mit den richtigen Vorzeichen). Andere Faktoren zeigen nur geringen Einfluss auf die Indikatoren, oder nur einen, der über den *common factor* vermittelt wird.

### Illustration eines Validitätsproblems



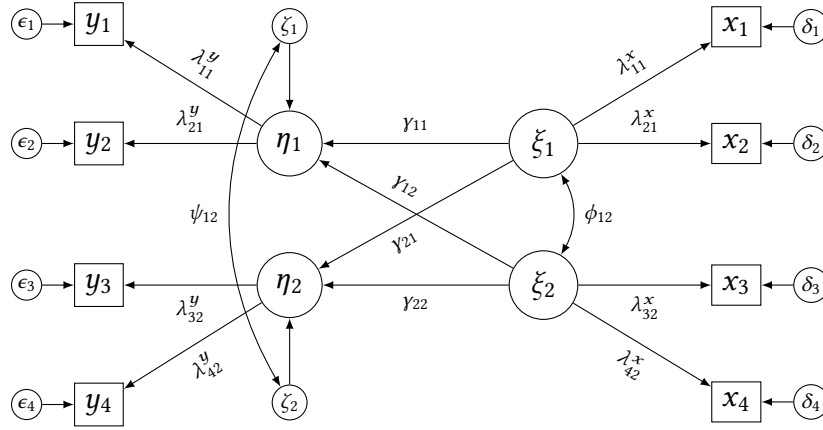
## 3 Strukturgleichungen mit latenten Variablen: LISREL-Modelle

### LISREL-Modelle

- LISREL-Modelle erlauben es, strukturelle lineare Zusammenhänge zwischen latenten und manifesten Variablen auszudrücken.
- LISREL – Name der ersten Software für die Schätzung dieser Modelle, geschrieben von den schwedischen Psychometrikern *Karl Jöreskog* und *Dag Sörbom* (<http://www.ssicentral.com/lisrel/>).
- Herkunft des Namens: *LINEar Structural RELations*
- Komponenten:
  1. Latente Variablen:

- Latente exogene Variablen:  $\xi$
- Latente endogene Variablen:  $\eta$
- 2. Manifeste Variablen:
  - Indikatoren der latenten exogenen Variablen:  $x$
  - Indikatoren der latenten endogenen Variablen:  $y$
- 3. Fehlerterme:
  - Fehlerterme der latenten endogenen Variablen:  $\zeta$
  - Fehlerterme der Indikatoren  $x$  der latenten exogenen Variablen:  $\delta$
  - Fehlerterme der Indikatoren  $y$  der latenten endogenen Variablen:  $\epsilon$
- Strukturgleichungen in Matrixform:
 
$$\begin{aligned} x &= \alpha_X + \Lambda_X \xi + \delta & \text{Cov}(\delta) &= \Theta_\delta \\ y &= \alpha_Y + \Lambda_Y \eta + \epsilon & \text{Cov}(\epsilon) &= \Theta_\epsilon \\ \eta &= B\eta + \Gamma \xi + \zeta & \text{Cov}(\zeta) &= \Psi & \text{Cov}(\xi) &= \Phi \end{aligned}$$
- Ladungsmatrizen:  $\Lambda_X$  und  $\Lambda_Y$
- Matrizen von Strukturkoeffizienten:  $B$  und  $\Gamma$
- Das LISREL-Modell impliziert einige nicht-triviale Restriktionen:
  - Keine direkten Effekte von manifesten exogenen zu manifesten Endogenen Variablen
  - Keine Korrelation zwischen den Fehlertermen der exogenen und der endogenen manifesten Variablen
  - Keine Korrelation zwischen den exogenen und endogenen Variablen anders als durch die Strukturkoeffizienten in  $\Gamma$  ausgedrückt.
  - Keine Korrelationen oder Effekte von latenten endogenen auf manifeste exogene oder von latenten exogenen auf manifeste endogene Variablen
- Keine a-priori Restriktionen für die Ladungs- und Koeffizienten-Matrizen
- A-priori-Restriktionen des LISREL-Modells können durch geeignete Modell-Konstruktion „ausgetrickst“ werden.

## Beispiel eines LISREL Modells



Die zugehörigen Strukturgleichungen:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \alpha_1^x + \lambda_{11}^x \xi_1 + \delta_1 & Y_1 &= \alpha_1^y + \lambda_{11}^y \eta_1 + \epsilon_1 \\
 X_2 &= \alpha_2^x + \lambda_{21}^x \xi_1 + \delta_2 & Y_2 &= \alpha_2^y + \lambda_{21}^y \eta_1 + \epsilon_2 \\
 X_3 &= \alpha_3^x + \lambda_{32}^x \xi_2 + \delta_3 & Y_3 &= \alpha_3^y + \lambda_{32}^y \eta_2 + \epsilon_3 \\
 X_4 &= \alpha_4^x + \lambda_{42}^x \xi_2 + \delta_4 & Y_4 &= \alpha_4^y + \lambda_{42}^y \eta_2 + \epsilon_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \gamma_{11} \xi_1 + \gamma_{12} \xi_2 + \zeta_1 \\
 \eta_2 &= \gamma_{21} \xi_1 + \gamma_{22} \xi_2 + \zeta_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\xi_i) &= \phi_{ii} & \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) &= \phi_{ij} & \text{Var}(\zeta_i) &= \psi_{ii} & \text{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) &= \psi_{ij} \\
 \text{Var}(\delta_i) &= \theta_{ii}^\delta & \text{Cov}(\delta_i, \delta_j) &= \theta_{ij}^\delta & \text{Var}(\epsilon_i) &= \theta_{ii}^\epsilon & \text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) &= \theta_{ij}^\epsilon
 \end{aligned}$$

Vektoren mit latenten Variablen:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{bmatrix}$$

Ladungs- und Koeffizienten-Matrizen im Beispiel

$$\Lambda_X = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^x & & \\ \lambda_{21}^x & & \\ & \lambda_{32}^x & \\ & \lambda_{42}^x & \end{bmatrix} \quad \Lambda_Y = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^y & & \\ \lambda_{21}^y & & \\ & \lambda_{32}^y & \\ & \lambda_{42}^y & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \\
 \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad \Theta_\delta = \begin{bmatrix} \theta_{11}^\delta & & & \\ & \theta_{22}^\delta & & \\ & & \theta_{33}^\delta & \\ & & & \theta_{44}^\delta \end{bmatrix} \quad \Theta_\epsilon = \begin{bmatrix} \theta_{11}^\epsilon & & & \\ & \theta_{22}^\epsilon & & \\ & & \theta_{33}^\epsilon & \\ & & & \theta_{44}^\epsilon \end{bmatrix}$$

## Die Identifikationsproblematik

- Die Identifikationsproblematik ist noch verschärft gegenüber
  - Strukturgleichungsmodellen mit manifesten Variablen
  - Faktormodellen
- Damit ein LISREL-Modell identifiziert ist müssen Identifikationskriterien erfüllt sein über Restriktionen, die den Koeffizienten-Matrizen, Ladungs-Matrizen und Varianz-Kovarianz-Matrizen auferlegt werden.
- Für notwendige und hinreichende Bedingungen für die Identifikation eines LISREL-Modells sei auf die Literatur verwiesen.

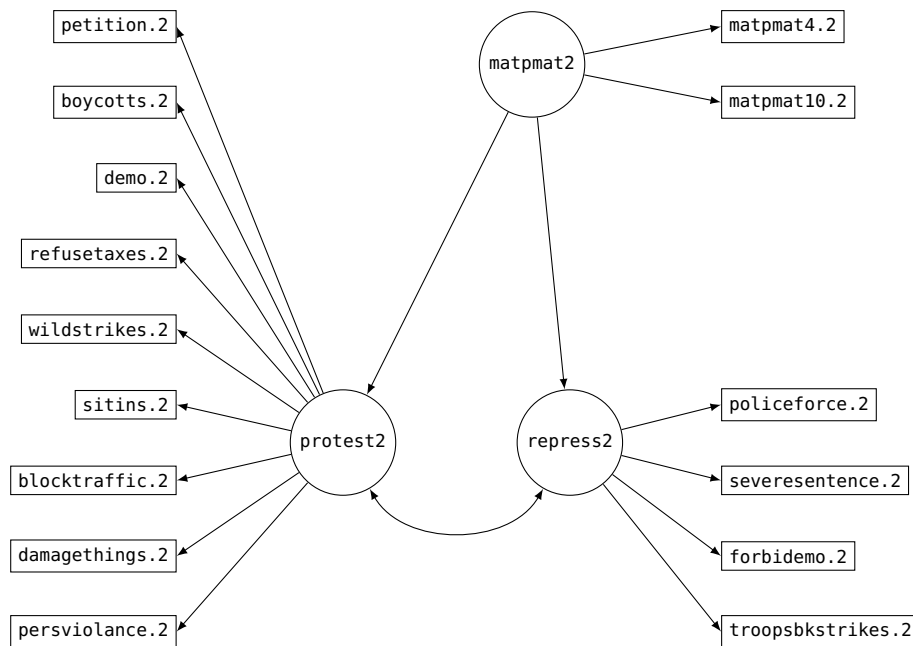
## 3.1 Anwendungsbeispiel

### Political Action I+II

- Political Action-Studien:
  - Zwei Wellen: 1. Welle 1973-75, 2. Welle 1979-81.
  - Zwei Cross-Sections und ein Panel
  - In beiden Wellen: Deutschland, Niederlande, USA
- Daten verfügbar bei GESIS
- Primäres Ziel: Erklärung der Politisierung der Jugend, insbes. der Studierendenschaft und der Protestphänomene der späten 1960er Jahre und frühen 1970er Jahre.
- Relevante Variablen:
  - Einstellungen (disapprove strongly, disapprove, approve, approve strongly) zu „unkonventionellen“ Beteiligungsformen:
    - \* Petitionen
    - \* Boykott
    - \* (Legale) Demonstrationen
    - \* Steuerverweigerung
    - \* Wilde Streiks
    - \* Verkehrsblockaden
    - \* Sachbeschädigung
    - \* Gewalt gegen Personen
  - Einstellungen (disapprove strongly, disapprove, approve, approve strongly) zu staatlichen Repressionsmaßnahmen:
    - \* Polizeieinsatz gegen Demos
    - \* Schwere Gerichtsurteile
    - \* Verbot von Demonstrationen

- \* Truppen zur Unterbindung von Streiks
- Postmaterialismus, zwei Indizes
  - \* 4-Item-Index
  - \* 8-Item-Index

### Erstes Modell: Wertprioritäten, Protest- und Repressionspotential



Syntax in R/lavaan

```
load("polact-work.RData")
# Wir beschränken uns auf Deutschland
PolactWork.Germany <- subset(PolactWork,
                             country=="GERMANY")
```

```
modell1 <- '
  matpmat2 =~ matpmat4.2 + matpmat10.2
  protest2 =~ petition.2
             + boycotts.2
             + demo.2
             + refusetaxes.2
             + wildstrikes.2
             + sitins.2
             + blocktraffic.2
             + damagethings.2
```

```

      + persviolance.2
repress2 =~ policeforce.2
      + severesentence.2
      + forbidemo.2
      + troopsbkstrikes.2
repress2 ~ matpmat2
protest2 ~ matpmat2
repress2 ~~ protest2
,
mod1.Germany <- sem(modell1,data=PolactWork.Germany)

```

## Schätzergebnisse für das erste Modell

- Abruf der Modellschätzwerte

```
summary(mod1.Germany)
```

- Auszug aus den angezeigten Ergebnissen: Ladungen der Indikatoren auf den latenten Variablen

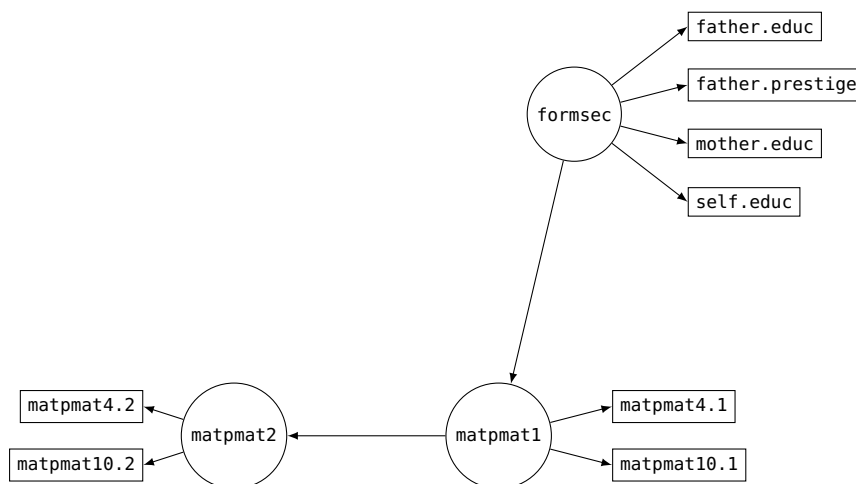
Output				
Latent Variables:				
	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )
matpmat2 =~				
matpmat4.2	1.000			
matpmat10.2	1.021	0.028	37.026	0.000
protest2 =~				
petition.2	1.000			
boycotts.2	1.926	0.235	8.200	0.000
demo.2	1.975	0.248	7.950	0.000
refusetaxes.2	1.665	0.197	8.435	0.000
wildstrikes.2	1.656	0.190	8.737	0.000
sitins.2	1.583	0.180	8.812	0.000
blocktraffic.2	1.862	0.214	8.695	0.000
damagethings.2	0.467	0.067	7.007	0.000
persviolance.2	0.435	0.067	6.497	0.000
repress2 =~				
policeforce.2	1.000			
severesentnc.2	0.939	0.062	15.094	0.000
forbidemo.2	1.126	0.077	14.706	0.000
tropsbkstrks.2	1.009	0.077	13.150	0.000

- Auszug aus den angezeigten Ergebnissen: Regressionsbeziehungen unter den latenten Variablen und Residualkovarianz



Output				
Regressions:				
	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )
repress2 ~				
matpmat2	0.257	0.027	9.614	0.000
protest2 ~				
matpmat2	-0.110	0.016	-6.998	0.000
Covariances:				
	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )
protest2 ~~				
repress2	-0.044	0.008	-5.319	0.000

## Zweites Modell: Formative Sicherheit und Wertorientierungen zu zwei Zeitpunkten



Syntax in **R/lavaan**

```

model2 <- '
  matpmat1 =~ matpmat4.1 + matpmat10.1
  matpmat2 =~ matpmat4.2 + matpmat10.2
  formsec =~ father.educ + father.prestige + mother.educ + self.educ
  matpmat1 ~ formsec
  matpmat2 ~ matpmat1
  ,

```

```

mod2.Germany <- sem(model2,data=PolactWork.Germany)

```

## Schätzergebnisse für das zweite Modell

- Abruf der Modellschätzwerte

**summary(mod2.Germany)**

- Auszug aus den angezeigten Ergebnissen: Ladungen der Indikatoren auf den latenten Variablen

---

Output

---

Latent Variables:

	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )
matpmat1 =~				
matpmat4.1	1.000			
matpmat10.1	1.039	0.035	29.523	0.000
matpmat2 =~				
matpmat4.2	1.000			
matpmat10.2	1.062	0.039	27.346	0.000
formsec =~				
father.educ	1.000			
father.prestig	0.202	0.015	13.363	0.000
mother.educ	0.532	0.026	20.158	0.000
self.educ	0.690	0.040	17.216	0.000

---

- Auszug aus den angezeigten Ergebnissen: Regressionsbeziehungen unter den latenten Variablen und Residualkovarianz

---

Output

---

Regressions:

	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )
matpmat1 ~				
formsec	0.095	0.015	6.307	0.000
matpmat2 ~				
matpmat1	0.396	0.043	9.118	0.000

---

- Auszug aus den angezeigten Ergebnissen: Varianzen der Indikatoren und latenten Variablen

---

Output

---

Variances:

	Estimate	Std.Err	Z-value	P(> z )
matpmat4.1	0.045	0.022	2.054	0.040
matpmat10.1	0.056	0.024	2.357	0.018
matpmat4.2	0.106	0.031	3.391	0.001
matpmat10.2	-0.004	0.035	-0.118	0.906
father.educ	1.075	0.188	5.731	0.000

---

father.prestig	0.585	0.033	17.967	0.000
mother.educ	1.053	0.076	13.789	0.000
self.educ	3.386	0.203	16.704	0.000
matpmat1	0.656	0.042	15.488	0.000
matpmat2	0.787	0.052	15.248	0.000
formsec	4.976	0.361	13.789	0.000

Wir haben es hier mit einem „Heywood case“ zu tun: eine der Restvarianzen der Indikatoren erhält einen negativen Schätzwert – das kann „eigentlich“ nicht sein ...

## 4 Schätzen und Testen

### Grundlagen

- Strukturgleichungsmodell:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\alpha}_X + \boldsymbol{\Lambda}_X \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} & \text{Cov}(\boldsymbol{\delta}) &= \boldsymbol{\Theta}_\delta \\ \mathbf{y} &= \boldsymbol{\alpha}_Y + \boldsymbol{\Lambda}_Y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon} & \text{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) &= \boldsymbol{\Theta}_\epsilon \\ \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} & \text{Cov}(\boldsymbol{\zeta}) &= \boldsymbol{\Psi} & \text{Cov}(\boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{\Phi} \end{aligned}$$

- Vom Modell implizierte Kovarianz-Matrix der beobachteten Variablen

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_x & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_y \end{bmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_x &= \boldsymbol{\Lambda}_X \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda}_X' + \boldsymbol{\Theta}_\delta \\ \boldsymbol{\Sigma}_y &= \boldsymbol{\Lambda}_Y (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} [\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{\Psi}] [(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}]' \boldsymbol{\Lambda}_Y' + \boldsymbol{\Theta}_\epsilon \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy} &= \boldsymbol{\Lambda}_X \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Gamma}' [(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}]' \boldsymbol{\Lambda}_Y' = \boldsymbol{\Sigma}_{yx}' \end{aligned}$$

- Stichprobengröße  $n$ , Varianz-Kovarianz-Matrix der beobachteten Variablen  $\mathbf{S}_n$

$$\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x,n} & \mathbf{S}_{xy,n} \\ \mathbf{S}_{yx,n} & \mathbf{S}_{y,n} \end{bmatrix}$$

- Wenn die Stichprobengröße gegen Unendlich geht ( $n \rightarrow \infty$ ) dann erreicht die Stichproben-Varianz-Kovarianz-Matrix den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}_n = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x & \mathbf{S}_{xy} \\ \mathbf{S}_{yx} & \mathbf{S}_y \end{bmatrix}$$

- Wenn das Modell korrekt konstruiert ist, dann gilt  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\Sigma}$  und die Parameter können durch numerische Verfahren direkt aus  $\mathbf{S}$  berechnet werden.
- Wenn die Stichprobengröße  $n$  endlich ist, dann wird  $\mathbf{S}_n$  in der Regel zufällig von  $\mathbf{S}$  abweichen.

## Schätzverfahren und ihre zugehörigen Diskrepanzfunktionen

- Für die üblichen Schätzverfahren gilt: Modellparameter werden so gewählt, dass eine Diskrepanzfunktion  $F(S_n, \hat{\Sigma})$  minimiert wird, für die gilt

$$\begin{aligned} F(S_n, \hat{\Sigma}) &= 0 \quad \text{wenn} \quad S_n = \hat{\Sigma} \quad \text{und} \\ F(S_n, \hat{\Sigma}) &> 0 \quad \text{wenn} \quad S_n \neq \hat{\Sigma} \end{aligned}$$

- Die gängigen Schätzverfahren unterscheiden sich in der Konstruktion der Diskrepanzfunktion. Absicht ist dabei, einerseits so viel „Information“ aus  $S_n$  heraus zu holen wie möglich, andererseits aber dabei den Stichprobenfehler in  $S_n$  „herauszufiltern“.
- Unweighted Least Squares* (ULS):

$$\begin{aligned} F_{\text{ULS}}(S_n, \hat{\Sigma}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (S_n - \hat{\Sigma})(S_n - \hat{\Sigma}) \right] \\ &= \frac{1}{2} [\text{vec}(S_n - \hat{\Sigma})]' \text{vec}(S_n - \hat{\Sigma}) \end{aligned}$$

- Generalized Least Squares* (GLS):

$$\begin{aligned} F_{\text{GLS}}(S_n, \hat{\Sigma}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (I - \hat{\Sigma} S_n^{-1})(I - \hat{\Sigma} S_n^{-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (S_n - \hat{\Sigma}) S_n^{-1} (S_n - \hat{\Sigma}) S_n^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\text{vec}(S_n - \hat{\Sigma})]' (S_n^{-1} \otimes S_n^{-1}) \text{vec}(S_n - \hat{\Sigma}) \end{aligned}$$

- Maximum Likelihood* (ML):

$$\begin{aligned} F_{\text{ML}}(S_n, \hat{\Sigma}) &= \text{tr} \left[ S_n \hat{\Sigma}^{-1} \right] - \ln \det \left[ S_n \hat{\Sigma}^{-1} \right] - q \\ &= \ln \det \hat{\Sigma} + \text{tr} \left[ S_n \hat{\Sigma}^{-1} \right] - \ln \det S_n - q \end{aligned}$$

wobei  $q$  die Anzahl der Zeilen und Spalten von  $S$  und  $\hat{\Sigma}$  ist.

- Asymptotisch verteilungsfreier (*asymptotic distribution free* – ADF) Schätzer

$$F_{\text{ADF}}(S_n, \hat{\Sigma}) = \frac{1}{2} [\text{vec}(S_n - \hat{\Sigma})]' V_n^{-1} \text{vec}(S_n - \hat{\Sigma})$$

wobei  $V_n$  eine Matrix mit  $q^2$  Zeilen und Spalten ist, die eine konsistente Schätzung von  $\text{Cov}(\text{vec } S_n)$  ist.

## Schätzgleichungen

- Wenn  $\omega$  stellvertretend steht für einen Parameter des Strukturgleichungsmodells (z.B. Ladung oder Covarianz latenter Variablen)
- Schätzgleichung für ULS

$$\frac{\partial F_{\text{ULS}}}{\partial \omega} = -\text{vec} \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \omega} \right)' \text{vec}(\mathbf{S}_n - \hat{\Sigma})$$

- Schätzgleichung für GLS

$$\frac{\partial F_{\text{GLS}}}{\partial \omega} = -\text{vec} \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \omega} \right)' (\mathbf{S}_n^{-1} \otimes \mathbf{S}_n^{-1}) \text{vec}(\mathbf{S}_n - \hat{\Sigma})$$

- Schätzgleichung für ML

$$\frac{\partial F_{\text{ML}}}{\partial \omega} = -\text{vec} \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \omega} \right)' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \hat{\Sigma}^{-1}) \text{vec}(\mathbf{S}_n - \hat{\Sigma})$$

- Schätzgleichung für ADF/WLS

$$\frac{\partial F_{\text{ADF}}}{\partial \omega} = -\text{vec} \left( \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \omega} \right)' \mathbf{V}_n^{-1} \text{vec}(\mathbf{S}_n - \hat{\Sigma})$$

## Konzepte und Notation

- $\text{tr}(\mathbf{A})$  ist die „Spur“ (*trace*) der Matrix  $\mathbf{A}$ , d.i. die Summe der Diagonal-Elemente von  $\mathbf{A}$ .  
Beispiel:

$$\text{tr} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Wichtige Rechenregel dabei (wenn  $a_{ij}$  die Elemente von  $\mathbf{A}$  und  $b_{ij}$  die Elemente von  $\mathbf{B}$  sind)

$$\text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$$

- „vec“ ist der „vec-Operator“:  $\text{vec}(\mathbf{A})$  ist ein Vektor der alle Spaltenvektoren von  $\mathbf{A}$  enthält.

Beispiel:

$$\text{vec} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

- „ $\otimes$ “ bezeichnet das Kronecker-Produkt. Für zwei Matrizen  $A$  und  $B$  ist  $A \otimes B$  eine Matrix die alle Produkte der Elemente von  $A$  und  $B$  enthält. Z.B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

- $\det A$  ist die *Determinante* der quadratischen Matrix  $A$  (manchmal auch  $|A|$  geschrieben). Die Berechnung der Determinante einer Matrix mit mehr als zwei Zeilen und Spalten ist kompliziert. Für eine 2-mal-2-Matrix ist die Determinante:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Für Determinanten gibt es viele wichtige Regeln:

- Genau dann, wenn  $A$  singulär (nicht invertierbar) ist dann  $\det A = 0$ .
- Für das Produkt zweier Matrizen  $A$  und  $B$  gilt  $\det(AB) = \det A \det B$
- Für die Inverse einer Matrix  $A$  gilt:  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = 1/\det(A)$

## Eigenschaften der Schätzverfahren

- Wenn das Strukturgleichungsmodell korrekt spezifiziert ist, dann sind *ULS*, *GLS*, *ML*, und *ADF* konsistent und asymptotisch normalverteilt.
- Wenn  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\delta$  und  $\epsilon$  normalverteilt sind, dann ist *ML* asymptotisch normalverteilt und effizient (kein anderer Schätzer hat eine geringere Varianz in ausreichen Stichproben).
- Wenn  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\delta$  oder  $\epsilon$  nicht normalverteilt ist, dann ist *ML* nicht mehr asymptotisch effizient, wohl aber *ADF*. (Allerdings kann *ADF* eine sehr hohe Varianz in kleinen Stichproben haben.)
- Obwohl *ML* und *ADF* (je nach Gültigkeit der Verteilungsannahme) in großen Stichproben eine kleinere Varianzen haben als *ULS* und *GLS*, können letztere in kleineren Stichproben besser funktionieren.

## 4.1 Klassische Testverfahren

### Nochmals die Grundbegriffe

- *Nullhypothese*: Eine Aussage über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die gewöhnlich genaue Angaben über Parameter der Verteilung enthält. Sie wird der Überprüfung unterzogen.

- *Teststatistik*: Eine Größe, die aus beobachteten Daten errechnet wird, um die Gültigkeit der Nullhypothese zu beurteilen. Wenn die Nullhypothese zutrifft, dann hat diese Teststatistik üblicherweise eine bekannte Verteilung (z.B. eine  $F$ -Verteilung oder eine  $\chi^2$ -Verteilung).
- *Alternativhypothese*: Eine Aussage über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die als gültig angesehen wird, wenn die Nullhypothese verworfen wird. Oft hat diese mit der Nullhypothese einige Verteilungsannahmen gemein.
- *p-Wert*: Die Wahrscheinlichkeit – *wenn die Nullhypothese zutrifft* – dass die Teststatistik einen Wert annimmt, der mindestens so groß ist wie der aus den beobachteten Daten errechnete. Ein besonders kleiner  $p$ -Wert wird in der Regel als Indiz dafür genommen, dass die Nullhypothese verworfen werden sollte.

## Likelihood-Ratio-Tests

- Mit Likelihood Ratio-Tests werden idR zwei Modelle  $M_0$  und  $M_1$  miteinander verglichen, wobei eines einer Nullhypothese entspricht und das andere einer Alternativhypothese.
- Hauptvarianten bei Strukturgleichungsmodellen:
  1. Signifikanztest des Modells
    - Nullhypothese: Alle Koeffizienten in den Strukturgleichungen sind tatsächlich Null
    - Alternativhypothese: einige der Koeffizienten in den Strukturgleichungen sind von Null verschieden
  2. Test der Anpassungsgüte (Goodness-of-Fit) des Modells
    - Nullhypothese: Das Modell für das die Parameter geschätzt werden ist korrekt, d.h.  $\Sigma = S$  und es müssen keine weiteren Koeffizienten oder Kovarianzen „freigegeben“ oder latente Variablen hinzugefügt werden.
    - Alternativhypothese:  $\Sigma \neq S$  und um ein korrektes Modell zu erreichen, muss das geschätzte Modell um weitere freie Parameter erweitert werden.

## Berechnung von LRTs für Strukturgleichungsmodelle

1. Nullmodell  $M_0$ 
  - Vom Nullmodell implizierte Varianz-Kovarianz-Matrix  $\Sigma_0 = \Sigma(M_0)$
  - Wert der Log-Likelihood Funktion des Nullmodells

$$\ell_0 = -\frac{n-1}{2} F_{ML}(S_n, \hat{\Sigma}_0)$$

( $C$  ist eine Konstante die von den Daten, aber nicht vom Modell abhängt)

- Wert der Likelihood-Funktion:  $\mathcal{L}_0 = \exp(\ell_0)$
2. Alternativmodell (das der Alternativhypothese entsprechende Modell)  $M_1$
- Vom Alternativmodell implizierte Varianz-Kovarianz-Matrix  $\Sigma_1 = \Sigma(M_1)$
  - Wert der Log-Likelihood Funktion des Alternativmodells

$$\ell_1 = -\frac{n-1}{2} F_{\text{ML}}(S_n, \hat{\Sigma}_1)$$

- Wert der Likelihood-Funktion:  $\mathcal{L}_1 = \exp(\ell_1)$
3. Likelihood-Ratio:

$$LR = -2 \ln \frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_1} = -2(\ell_0 - \ell_1) = (n-1)[F_{\text{ML}}(S_n, \hat{\Sigma}_0) - F_{\text{ML}}(S_n, \hat{\Sigma}_1)]$$

4. Wenn die Nullhypothese zutrifft, dann hat  $LR$  eine asymptotische  $\chi^2$ -Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung) mit Freiheitsgrad  $df$ , wobei  $df = k_1 - k_0$  die Anzahl der Parameter (Koeffizienten, Varianzen, Kovarianzen) ist, die in  $M_0$  auf einen festen Wert (meist Null) fixiert sind, aber in  $M_1$  freie Parameter sind (deren Wert ggf. geschätzt werden kann).
5. Bei LRTs zur „Güte der Modellanpassung“ gilt üblicherweise für das Alternativmodell  $\hat{\Sigma}_1 = S_n$  – es handelt sich um ein *saturiertes* Modell – also  $F_{\text{ML}}(S_n, \hat{\Sigma}_1) = 0$

## Verteilungsannahmen von LRTs

- In seiner klassischen Form beruht der LRT für Strukturgleichungsmodelle auf der Annahme, dass  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\delta$  und  $\delta\epsilon$  und damit auch  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  (multivariat) IID-normalverteilt sind.
- Es gibt einige neuere Varianten von LRTs (verfügbar im R-Paket **lavaan**), die teilweise ohne normalverteilungsannahme auskommen
- Selbst wenn die Verteilungsannahmen des Modells zutreffen, hat der Wert der LR-Teststatistik nur in *ausreichend großen* Stichproben *annähernd* eine  $\chi^2$ -Verteilung (das ist mit „asymptotisch“ gemeint).
- In kleinen Stichproben sollte der auf der  $\chi^2$ -Verteilung basierende  $p$ -Wert „mit Vorsicht“ interpretiert werden, oder es sollte ein  $p$ -Wert mittels Bootstrap errechnet werden.

## Wald-Tests

- Mit Wald-Tests schätzt man Nullhypothesen der Form  $R\tau = \mathbf{q}$ , wobei  $\tau$  einige der Parameter des Strukturgleichungsmodells sind.
- Die Hypothese, dass ein bestimmter freier Parameter „in Wirklichkeit“ gleich Null ist, ist ein Spezialfall des Wald-Tests.



- Testgröße des allgemeinen Wald-Tests:

$$W = (R\hat{\tau} - q)'[R\widehat{\text{Cov}}(\hat{\tau})R']^{-1}(R\hat{\tau} - q)$$

- „Einfacher Signifikanztest“ eines einzelnen Parameters  $\tau$ :

$$z = \frac{\hat{\tau}}{\widehat{\text{SE}}(\hat{\tau})}$$

- Wenn die Nullhypothese zutrifft, dann hat  $W$  eine  $\chi^2$ -Verteilung, bzw. dann hat  $z$  eine Standard-Normalverteilung.

### Verteilungsannahmen von Wald-Tests

- In seiner klassischen Form basiert der Wald-Test bei Strukturgleichungsmodellen wie der LRT auf der Annahme der IID-Normalverteilung der relevanten latenten Variablen und Fehlerterme.
- Die Verteilungsannahme spielt aber vor allem eine Rolle für die Konstruktion von  $\widehat{\text{Cov}}(\hat{\tau})$  bzw.  $\widehat{\text{SE}}(\hat{\tau})$
- Es gibt aber auch „robuste“ Varianten von Wald-Tests, die ohne die klassischen Verteilungsannahmen auskommen.

### Modifikations-Indices

- Die „Modifikations-Indices“, die man von Software für Strukturgleichungs-Modelle erhält, sind eigentlich Lagrange-Multiplikatoren-Tests (oder Gradienten-Tests)
- Getestet wird die Hypothese, dass die Parameter die im interessierenden Modell auf Null (oder irgendeinen anderen Wert) fixiert sind, „tatsächlich“ diesen Wert auch haben.
- Wird die Nullhypothese verworfen, bedeutet das, dass bestimmte fixierte Parameter als freie Parameter geschätzt werden müssten.
- Modifikations-Indices basieren wie Wald-Tests auf der Annahme der Normalverteilung, aber auch für sie sind im Prinzip „robuste“ Varianten denkbar.
- In ihrer klassischen Form wird der Modifikations-Index für einen Parameter  $\tau_j$  folgendermaßen berechnet:

$$MI = \left( \frac{\partial \ell_0}{\partial \tau_j} \right)^2 \left[ \widehat{\text{Cov}} \left( \frac{\partial \ell_0}{\partial \tau_j} \right) \right]^{-1}$$

- Unter der Nullhypothese (z.B.  $\tau_j = 0$ ) hat  $MI$  eine asymptotische  $\chi^2$ -Verteilung mit Freiheitsgrad von  $df = 1$ .

- Software wie Stata oder R/**lavaan** ergänzen einen berechneten Modifikations-Index durch einen *expected parameter change* (EPC):

$$EPC = \frac{\partial \ell_0}{\partial \tau_j} \left[ \widehat{\text{Cov}} \left( \frac{\partial \ell_0}{\partial \tau_j} \right) \right]^{-1}$$

### Die verschiedenen Testverfahren im Vergleich

- Alle drei Testverfahren haben bei Gültigkeit der Nullhypothese eine asymptotische  $\chi^2$ -Verteilung.
- Alle drei Testverfahren beruhen auf bestimmten Verteilungsannahmen. Sie können durch entsprechende Modifikationen „robust“ gemacht werden.
- LR-Tests erfordern (im Prinzip) die Schätzung der Parameter sowohl des Nullmodells  $M_0$  als auch des Alternativmodells  $M_1$  (allerdings muss bei „Goodness-of-Fit“-Tests  $M_1$  nicht geschätzt werden).
- Wald-Tests erfordern nur die Schätzung von  $M_1$
- Lagrange-Multiplikatoren-Tests und daher auch Modifikations-Indices erfordern nur die Schätzung von  $M_0$

## 4.2 Goodness-of-Fit-Indices

### Probleme der klassischen Testverfahren

- Verteilung der Test-Statistik von Likelihood-Ratio-Tests, Wald-Tests und Lagrange-Multiplikatoren-Tests ist asymptotisch – große Stichproben sind nötig für annähernde Gültigkeit der  $\chi^2$ -Verteilung.
- Die Tests sind *konsistent*, d.h. ihre Teststärke (*Power*) geht gegen Eins wenn  $n \rightarrow \infty$ . Das ist eigentlich eine positive Eigenschaft, andererseits bedeutet das auch, dass bei großen Stichproben auch substantiell unbedeutende Abweichungen der Daten vom Modell zu einem negativen Ergebnis eines Goodness-of-Fit-Tests führen.
- Daher: je größer die Stichprobe desto mehr werden kompliziertere Modell von den Tests „begünstigt“
- Theorien aber implizieren meist einfachere Modelle
- Trade-off: Einfachheit/Sparsamkeit (*Parsimony*) versus Anpassungsgüte.

## Goodness-of-Fit-Indices

- Goodness-of-Fit-Indices wurden entwickelt, um ein Maß der Anpassungsgüte zu haben, dass nicht mit der Stichprobengröße steigt.
- Einige dieser Indices haben zusätzlich das Ziel, eine Balance zwischen der Sparsamkeit eines Modells und seiner Anpassungsgüte zu erreichen.
- Inzwischen sind in der Literatur eine Vielzahl von Goodness-of-Fit-Indices vorgeschlagen worden – Es besteht dadurch eine gewisse Unübersichtlichkeit.
- Viele der Indices sind normiert, so dass sie zwischen Null und Eins variieren. Dann bedeutet ein Wert nahe Eins einen „guten Fit“.

## Root-Mean-Square Error of Approximation (RMSEA)

- Der Root-Mean-Square Error of Approximation (RMSEA) setzt die Diskrepanz zwischen modell-implizierten Varianzen und Kovarianzen der manifesten Variablen in Beziehung mit der Anzahl der verbrauchten Freiheitsgrade
- Berechnung des RMSEA:

$$RMSEA = \sqrt{\frac{F(S_n, \hat{\Sigma}_0)}{df}}$$

Dabei ist:

- $F(S_n, \hat{\Sigma}_0)$  das für die Schätzung des Modells minimierte Diskrepanzmaß
  - $df$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells:  $df = q(q + 1)/2 - k$
  - $q$  die Anzahl der Zeilen und Spalten von  $S_n$  und  $\hat{\Sigma}_0$
  - $k$  die Anzahl der freien Parameter des Modells
- Für den RMSEA gilt:
    - Je kleiner, desto besser.
    - Ein RMSEA kleiner als 0,05 wird im allgemeinen als „akzeptabler Fit“ angesehen.

## Jöreskog und Sörbom's GFI

- Jöreskog und Sörbom's Goodness-of-Fit-Index (GFI) ist eines der ersten vorgeschlagenen Maße der Anpassungsgüte, die von der Stichprobengröße unabhängig sind.
- Die Berechnung von GFI hängt vom verwendeten Schätzverfahren ab:

$$GFI_{ULS} = 1 - \frac{\text{tr}[(S_n - \hat{\Sigma})(S_n - \hat{\Sigma})]}{\text{tr}[S_n S_n]}$$

$$GFI_{GLS} = 1 - \frac{\text{tr}[(I - \hat{\Sigma}S_n^{-1})(I - \hat{\Sigma}S_n^{-1})]}{q}$$

$$GFI_{ML} = 1 - \frac{\text{tr}[(S_n\hat{\Sigma}^{-1} - I)(S_n\hat{\Sigma}^{-1} - I)]}{\text{tr}[(S_n\hat{\Sigma}^{-1})(S_n\hat{\Sigma}^{-1})]}$$

- Es gibt neben dem GFI noch einen korrigierten (adjusted) Index: AGFI Er korrigiert für die verfügbaren Freiheitsgrade:

$$AGFI = 1 - \frac{q(q+1)/2}{df}(1 - GFI)$$

- GFI und AGFI variieren zwischen Null und Eins. In der Regel wird ein  $AGFI > 0.9$  als ein „guter“ Fit zwischen Modell und Daten angesehen.

## Indices der relativen Anpassungsgüte

- Indices der relativen Anpassungsgüte vergleichen ein Modell mit einem Basis-Modell (*baseline*). Man kann Sie also wie der LRT als Vergleich zwischen  $M_0$  und  $M_1$  verwenden. Allerdings sind sie in der Regel so normiert, dass ihr Wert nicht mit der Stichprobengröße steigt.
- Insbesondere von den relativen Anpassungs-Indices gibt es mehrere in der Literatur vorgeschlagene Varianten. Daher hier nur zwei Beispiele:
- Bentler-Bonnet Comparative Fit Index (CFI):

$$CFI = \frac{F(S_n, \hat{\Sigma}_0) - F(S_n, \hat{\Sigma}_1)}{F(S_n, \hat{\Sigma}_0)}$$

- Tucker-Lewis-Index (TLI):

$$TLI = \frac{F(S_n, \hat{\Sigma}_0)/df_0 - F(S_n, \hat{\Sigma}_1)/df_1}{F(S_n, \hat{\Sigma}_0)/df_0 - 1/(n-1)}$$

Der TLI ist nicht normiert, im Unterschied zum CFI. Er kann auch größer als Eins werden. Dies wird als Indiz für ein „overfitting“ der Daten durch das Modell  $M_1$  angesehen werden.

## Determinationskoeffizienten

- Der Determinationskoeffizient in der linearen Regression wird oft als Maß der „Anpassungsgüte“ in dem Sinne interpretiert, dass er ausdrückt, wie gut die unabhängigen Variablen die abhängige Variable „erklären“.
- Ähnliche Maße lassen sich auch für lineare Strukturgleichungen konstruieren.

- Koeffizient der Determination der manifesten Variablen durch die Strukturen der latenten Variablen:

- Einzelne Variablen:

$$R^2(x_i) = 1 - \frac{\theta_{\delta,ii}}{\sigma_{ii}} \text{ bzw. } R^2(y_i) = 1 - \frac{\theta_{\epsilon,ii}}{\sigma_{ii}}$$

- Alle Variablen zusammen:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{tr}(\Theta_\delta) + \text{tr}(\Theta_\epsilon)}{\text{tr} \Sigma}$$

- Koeffizient der Determination der endogenen latenten Variablen (alle zusammen)

$$R^2 = 1 - \frac{\text{tr}(\Psi)}{(I - B)^{-1}[\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi][(I - B)^{-1}]'}$$

### 4.3 Beispiele

#### Lijpharts Patterns of Democracy – Vergleich unterschiedlicher Faktorenmodelle mit R

```
lijphart <- read.csv("lijphart.csv")
library(lavaan)

# Ein wenig "schwarze Magie" ...
setMethod("loadings", "lavaan", function(x)
  structure(inspect(x, "coef")$lambda, class="loadings"))

## Das folgende zeigt, wie im Rahmen von Strukturgleichungs-
## modellen eine explorative Faktorenanalyse möglich ist.

# 1-Faktor-Modell
xcfa1.lijphart <- cfa(
  ,
  F1 =~ effnump + minwin + exdom + disprop + pluralis
    + federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  ,
  orthogonal=TRUE,
  std.lv=TRUE,
  std.ov=TRUE,
  data=lijphart)

## 2-Faktoren-Modell
# Das Modell ist dadurch identifiziert,
# dass eine der Ladungen auf dem zweiten
# Faktor auf Null fixiert ist,
```

```

# die Faktorvarianzen auf Eins und
# die Faktorkovarianzen auf Null fixiert sind
xcfa2.lijphart <- cfa(
  ,
  F1 =~ effnumpa + minwin + exdom + disprop + pluralis
    + federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  F2 =~          + minwin + exdom + disprop + pluralis
    + federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  ,
  orthogonal=TRUE,
  std.lv=TRUE,
  std.ov=TRUE,
  data=lijphart)

```

## 3-Faktoren-Modell

```

# Das Modell ist dadurch identifiziert,
# dass auf jedem weiteren Faktor eine
# weitere Ladung auf Null fixiert ist,
# die Faktorvarianzen auf Eins und
# die Faktorkovarianzen auf Null fixiert sind
xcfa3.lijphart <- cfa(
  ,

```

```

  F1 =~ effnumpa + minwin + exdom + disprop + pluralis
    + federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  F2 =~          + minwin + exdom + disprop + pluralis
    + federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  F2 =~          + exdom + disprop + pluralis
    + federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  ,
  orthogonal=TRUE,
  std.lv=TRUE,
  std.ov=TRUE,
  data=lijphart)

```

# Ladungen des 3-Faktoren-Modells

```
loadings(xcfa3.lijphart)
```

---

Output

---

Loadings:

	F1	F2	F3
effnumpa	0.941		
minwin	-0.895	0.192	
exdom	-0.738		
disprop	-0.524	0.327	

```

pluralis -0.571 0.768
federali 0.266      0.915
bicamera 0.118 0.678
constrig      0.570
judrevie 0.226 0.569
centralb      0.589

```

---

## ## Modellvergleich mit LR-Tests

```

anova(
  xcfa1.lijphart,
  xcfa2.lijphart,
  xcfa3.lijphart
)

```

---

### Output

---

Chi Square Difference Test

	Df	AIC	BIC	Chisq	Chisq diff	Df diff	Pr(>Chisq)
xcfa3.lijphart	18	898.73	957.32	17.562			
xcfa2.lijphart	26	896.20	942.13	31.039	13.477	8	0.09646 .
xcfa1.lijphart	35	985.60	1017.27	138.436	107.397	9	< 2e-16 ***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

---

## ## Ein theoretisch motiviertes

### ## Modell

```

cfas2.lijphart <- cfa(
  ,
  F1 =~ effnumpa + minwin + exdom + disprop + pluralis
  F2 =~ federali + bicamera + constrig + judrevie + centralb
  ,
  std.ov=TRUE,
  data=lijphart)

```

### # Ladungen des konfirmatorischen

### # 2-Faktoren-Modells

```
loadings(cfas2.lijphart)
```

---

### Output

---

Loadings:

	F1	F2
effnumpa	1.000	
minwin	-1.091	

```

exdom      -0.790
disprop    -0.657
pluralis   -0.768
federali    1.000
bicamera    0.700
constrig    0.612
judrevie    0.556
centralb    0.636

```

---

**## Vergleich des explorativen und des  
## konfirmatorischen 2-Faktoren-Modells**

```

anova(
  xcfa2.lijphart,
  cfas2.lijphart
)

```

---

Output

---

Chi Square Difference Test

	Df	AIC	BIC	Chisq	Chisq diff	Df diff	Pr(>Chisq)
xcfa2.lijphart	26	896.20	942.13	31.039			
cfas2.lijphart	34	886.29	919.54	37.123	6.0842	8	0.6378

---

**## Modell-Evaluation:**

**# GOF-LR-Test**

```
anova(cfas2.lijphart)
```

---

Output

---

Chi Square Test Statistic (unscaled)

	Df	AIC	BIC	Chisq	Chisq diff	Df diff	Pr(>Chisq)
Saturated	0			0.0			
Model	34	886	920	37.1	37.1	34	0.33

---

```

fitMeasures(cfas2.lijphart,
  fit.measures=c("baseline.chisq","chisq","pvalue","logl"))

```

---

Output

---

	baseline.chisq	chisq	pvalue	logl
	204.330	37.123	0.327	-422.144

---



```
# Fit-indices
fitMeasures(cfas2.lijphart,
  fit.measures=c("gfi","agfi","rmsea","cfi","tli"))
```

---

Output					
	gfi	agfi	rmsea	cfi	tli
	0.839	0.740	0.051	0.980	0.974

---

```
## Vergleich aller bisher berechneten Modell mit
## diversen GOF-Maßen (mit R-Coolness :)
sapply(
  list(
    "1-Faktor-EFA"= xcfa1.lijphart,
    "2-Faktoren-EFA"= xcfa2.lijphart,
    "3-Faktoren-EFA"= xcfa3.lijphart,
    "2-Faktoren-CFA"=cfas2.lijphart
  ),fitMeasures,
  fit.measures=c("gfi","agfi","rmsea","cfi","tli"))
```

---

	1-Faktor-EFA	2-Faktoren-EFA	3-Faktoren-EFA	2-Faktoren-CFA
gfi	0.535	0.8587	0.915	0.8391
agfi	0.270	0.7010	0.742	0.7398
rmsea	0.287	0.0734	0.000	0.0505
cfi	0.351	0.9684	1.000	0.9804
tli	0.165	0.9453	1.007	0.9741

---

## Modifikations-Indices in R

```
library(lavaan)
load(file="GLES2009-pca.RData")

## Ausgangsmodell
repres.mod <- '
  soecon =~ reprInt.Unions + reprInt.Employers + reprInt.EnvirGroups
            + reprInt.AntiGlob
  farmchurch =~ reprInt.FarmAssoc + reprInt.CathChurch
               + reprInt.ProtChurch
,
cfa.repres <- cfa(repres.mod,
  std.ov=TRUE,
  data=GLES2009.pca
```

)

**anova(cfa.repres)**

Output

Chi Square Test Statistic (unscaled)

	Df	AIC	BIC	Chisq	Chisq diff	Df diff	Pr(>Chisq)
Saturated Model	0			0			
	13	12552	12619	151	151	13	<2e-16 ***
---							
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1							

**## Modifikations-Indices**

**modificationIndices(cfa.repres)**

Output

	lhs	op	rhs	mi	epc	sepc.lv	sepc.all	sepc.nox
1	socecon	==	reprInt.Unions	NA	NA	NA	NA	NA
2	socecon	==	reprInt.Employers	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	socecon	==	reprInt.EnvirGroups	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	socecon	==	reprInt.AntiGlob	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	socecon	==	reprInt.FarmAssoc	11.320	0.271	0.149	0.149	0.149
6	socecon	==	reprInt.CathChurch	32.408	-0.498	-0.273	-0.273	-0.273
7	socecon	==	reprInt.ProtChurch	8.517	0.247	0.136	0.136	0.136
8	farmchurch	==	reprInt.Unions	7.976	-0.241	-0.128	-0.128	-0.128
9	farmchurch	==	reprInt.Employers	50.569	0.680	0.361	0.361	0.361
10	farmchurch	==	reprInt.EnvirGroups	18.187	0.399	0.212	0.212	0.212
11	farmchurch	==	reprInt.AntiGlob	4.432	-0.171	-0.091	-0.091	-0.091
12	farmchurch	==	reprInt.FarmAssoc	NA	NA	NA	NA	NA
13	farmchurch	==	reprInt.CathChurch	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	farmchurch	==	reprInt.ProtChurch	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
15	reprInt.Unions	==	reprInt.Unions	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	reprInt.Unions	==	reprInt.Employers	12.519	-0.119	-0.119	-0.120	-0.120
17	reprInt.Unions	==	reprInt.EnvirGroups	6.516	-0.229	-0.229	-0.229	-0.229
18	reprInt.Unions	==	reprInt.AntiGlob	12.947	0.222	0.222	0.222	0.222
19	reprInt.Unions	==	reprInt.FarmAssoc	1.239	0.034	0.034	0.034	0.034
20	reprInt.Unions	==	reprInt.CathChurch	0.128	-0.010	-0.010	-0.010	-0.010
21	reprInt.Unions	==	reprInt.ProtChurch	13.113	-0.106	-0.106	-0.106	-0.106
22	reprInt.Employers	==	reprInt.Employers	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
23	reprInt.Employers	==	reprInt.EnvirGroups	0.228	0.016	0.016	0.016	0.016
24	reprInt.Employers	==	reprInt.AntiGlob	0.005	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002
25	reprInt.Employers	==	reprInt.FarmAssoc	37.671	0.214	0.214	0.215	0.215
26	reprInt.Employers	==	reprInt.CathChurch	9.940	0.105	0.105	0.105	0.105
27	reprInt.Employers	==	reprInt.ProtChurch	0.036	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006
28	reprInt.EnvirGroups	==	reprInt.EnvirGroups	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
29	reprInt.EnvirGroups	==	reprInt.AntiGlob	6.726	-0.375	-0.375	-0.376	-0.376
30	reprInt.EnvirGroups	==	reprInt.FarmAssoc	6.033	0.065	0.065	0.065	0.065
31	reprInt.EnvirGroups	==	reprInt.CathChurch	5.486	-0.062	-0.062	-0.062	-0.062

32	reprInt.EnvirGroups	~~	reprInt.ProtChurch	18.663	0.114	0.114	0.114	0.114
33	reprInt.AntiGlob	~~	reprInt.AntiGlob	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
34	reprInt.AntiGlob	~~	reprInt.FarmAssoc	0.088	-0.008	-0.008	-0.008	-0.008
35	reprInt.AntiGlob	~~	reprInt.CathChurch	2.508	-0.042	-0.042	-0.043	-0.043
36	reprInt.AntiGlob	~~	reprInt.ProtChurch	0.106	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009
37	reprInt.FarmAssoc	~~	reprInt.FarmAssoc	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
38	reprInt.FarmAssoc	~~	reprInt.CathChurch	8.517	0.228	0.228	0.228	0.228
39	reprInt.FarmAssoc	~~	reprInt.ProtChurch	32.408	-0.411	-0.411	-0.412	-0.412
40	reprInt.CathChurch	~~	reprInt.CathChurch	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
41	reprInt.CathChurch	~~	reprInt.ProtChurch	11.320	0.369	0.369	0.370	0.370
42	reprInt.ProtChurch	~~	reprInt.ProtChurch	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
43	socecon	~~	socecon	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
44	socecon	~~	farmchurch	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
45	farmchurch	~~	farmchurch	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

```

# Die Modifikations-Indices legen nahe
# eine weitere Ladung auf die zweite latente
# Variable hinzuzufügen:
# farmchurch =~ reprInt.Employers
repres.mod.ex <- '
  socecon =~ reprInt.Unions + reprInt.Employers + reprInt.EnvirGroups
              + reprInt.AntiGlob
  farmchurch =~ reprInt.FarmAssoc + reprInt.CathChurch
                + reprInt.ProtChurch
                + reprInt.Employers
'

cfa.repres.ex <- cfa(repres.mod.ex,
                     std.ov=TRUE,
                     data=GLES2009.pca
)

# Der LR-Test zeigt eine signifikante
# Verbesserung der Modellanpassung an:
anova(
  cfa.repres,
  cfa.repres.ex)

```

---

Output

---

Chi Square Difference Test

	Df	AIC	BIC	Chisq	Chisq diff	Df diff	Pr(>Chisq)
cfa.repres.ex	12	12498	12570	95.4			
cfa.repres	13	12552	12619	150.9	55.5	1	9.4e-14 ***
---							
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1							

---

**# Die GOF-Indices führen zu einem ähnlichen Ergebnis**

```
sapply(  
  list(  
    M1=cfa.repres,  
    M2=cfa.repres.ex),  
  fitMeasures,  
  fit.measures=c("gfi","agfi","rmsea","cfi","tli")  
)
```

---

Output

---

	M1	M2
gfi	0.943	0.963
agfi	0.876	0.913
rmsea	0.126	0.102
cfi	0.852	0.910
tli	0.761	0.843

---