

# Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Runde des 50sten Bundeswettbewerbs Mathematik

Philipp Pascal Schmale

21. August 2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>Benutzte Hilfsmittel</b>	<b>2</b>
<b>1 Aufgabe 1</b>	<b>3</b>
<b>2 Aufgabe 2</b>	<b>8</b>
<b>3 Aufgabe 3</b>	<b>10</b>
<b>4 Aufgabe 4</b>	<b>16</b>

## Benutzte Hilfsmittel

### Für Aufgabe 1 benutzte Hilfsmittel

Für Aufgabe 1 habe ich regelmäßig einen Taschenrechner verwendet. Allerdings habe ich in der endgültigen Fassung darauf geachtet, dass alle Berechnungen auch ohne einen Taschenrechner nachvollziehbar sind. In der Regel habe ich hierzu Fußnoten verwendet. Dann steht in Klammern „Berechnung ohne Taschenrechner“ o.Ä. und am Ende ein Superskript mit einer Zahl. Unten auf der Seite sind dann die Inhalte der Fußnoten mit den entsprechenden Zahlen zu finden (Beispiel<sup>1</sup>).

### Für Aufgabe 2 benutzte Hilfsmittel

Für sowohl die Findung als auch die Ausarbeitung der Lösung von Aufgabe 2 habe ich keinerlei Hilfsmittel benutzt.

### Für Aufgabe 3 benutzte Hilfsmittel

Für sowohl die Findung als auch die Ausarbeitung der Lösung von Aufgabe 3 habe ich keinerlei Hilfsmittel benutzt.

### Für Aufgabe 4 benutzte Hilfsmittel

---

<sup>1</sup>) Hier steht dann die Berechnung oder Berechnungsüberprüfung, die hoffentlich auch ohne Taschenrechner nachvollziehbar ist.

# 1 Aufgabe 1

## Hinweise zur Notation

$\mathbb{N}_0$  ist die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null, also  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

[g] heißt, dass die Einheit, in der gerechnet wurde, Gramm ist, dies aber ggf. in Zwischenrechnungen nicht angegeben wurde. Es sollte stets klar sein, welche Einheit verwendet wird, da Gramm die einzige ist, die benutzt wird.

## Kurze Antwort

Smilla kann mindestens 1.021.615g Gold für sich garantieren.

## Beweis (d.h. die etwas längere Antwort)

Zu zeigen ist also der folgende Satz:

**Satz 1.1.** *Die größte Masse an Gold, die Smilla mit Sicherheit mindestens gewinnen kann, ist 1.021.615g.*

*Beweis des Satzes.* Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

1. Dem Beweis, dass Smilla stets 1.021.615g Gold gewinnen kann
2. Dem Beweis, dass es keine größere Masse Gold gibt, die Smilla immer gewinnen kann

**Hilfssatz 1.1.** *Smilla kann stets versichern, dass sie mindestens 1.021.615g Gold gewinnt.*

*Beweis des Hilfssatzes.* Um mindestens 1.021.615g Gold zu gewinnen, kann Smilla folgenden vierschrittigen Plan verfolgen (wobei die Schritte 2 und 3 ggf. mehrfach eintreten):

1. Die 2020 Gold-Nuggets auf drei Haufen aufteilen, und zwar nach folgendem Schema:
  - (a) Auf Haufen 1 kommt jedes Gold-Nugget, dessen Masse in Gramm eine der Formen  $4k + 1$  und  $4k + 2$  annimmt (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ). Das sind also die Nuggets mit den Massen 1g ( $1 = 4 \cdot 0 + 1$ ), 2g ( $2 = 4 \cdot 0 + 2$ ), 5g ( $5 = 4 \cdot 1 + 1$ ), 6g ( $6 = 4 \cdot 1 + 2$ ), ..., 2017g ( $2017 = 4 \cdot 504 + 1$ ), 2018g ( $2018 = 4 \cdot 504 + 2$ ).
  - (b) Auf Haufen 2 kommt jedes Gold-Nugget, dessen Masse in Gramm eine der Formen  $4k$  und  $4k + 3$  annimmt (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ) und dessen Masse nicht 2020g ist. Das sind also die Nuggets mit den Massen 3g ( $3 = 4 \cdot 0 + 3$ ), 4g ( $4 = 4 \cdot 1$ ), 7g ( $7 = 4 \cdot 1 + 3$ ), 8g ( $8 = 4 \cdot 2$ ), ..., 2016g ( $2016 = 4 \cdot 504$ ), 2019g ( $2019 = 4 \cdot 504 + 3$ ).
  - (c) Auf „Haufen“ 3 kommt das Nugget mit der Masse 2020g.
2. Wenn Leo die rote Truhe wählt, das leichteste noch verfügbare Nugget von Haufen 1 hineinlegen (das „leichteste“ heißt das mit der kleinsten Masse). Falls von Haufen 1 kein Nugget mehr verfügbar ist, das Nugget mit der Masse 2020g hineinlegen und falls auch das nicht mehr verfügbar ist, das leichteste noch verfügbare Nugget (das dann offensichtlich von Haufen 2 kommen muss) hineinlegen.
3. Wenn Leo die blaue Truhe wählt, das leichteste noch verfügbare Nugget von Haufen 2 hineinlegen. Falls von Haufen 2 kein Nugget mehr verfügbar ist, das Nugget mit der Masse 2020g hineinlegen und falls auch das nicht mehr verfügbar ist, das leichteste noch verfügbare Nugget (das dann offensichtlich von Haufen 1 sein muss) hineinlegen.

4. Wenn alle Nuggets verteilt sind, die Truhe wählen, in der sich das Nugget mit der Masse 2020g befindet.

Anm.: Im Folgenden werde ich Haufen 1, Haufen 2 und Haufen 3 mit  $H_1$  bzw.  $H_2$  bzw.  $H_3$  bezeichnen.

Zunächst muss natürlich (kurz) bewiesen werden, dass die Aufteilung auf die drei Haufen so, wie sie in Schritt 1 beschrieben wurde, überhaupt möglich ist. D.h., dass jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt. Oder: Dass jedes Nugget auf einen Haufen kommt und kein Nugget auf zwei Haufen kommt. Offensichtlich kann jedes Nugget nur einen der Reste 0, 1, 2, 3 haben, wenn man seine Masse in g durch 4 teilt.

Betrachte man zunächst die mit Rest 0: Sie kommen alle bis auf das mit der Masse 2020g auf  $H_2$  und auf keinen anderen (nicht auf  $H_1$ , da sie weder einen Rest von 1 noch einen von 2 haben, wenn man ihre Masse in g durch 4 teilt; nicht auf  $H_3$ , da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt, welches ja in diesem Fall ausgeschlossen wurde). Das mit der Masse 2020g kommt auf  $H_3$  und offensichtlich auch nur auf  $H_3$ .

Betrachte man nun die mit Rest 1: Sie kommen ausnahmslos auf  $H_1$  und auf keinen anderen (nicht auf  $H_2$ , da sie weder einen Rest von 0 noch von 3 haben, wenn man ihre Massen in g durch 4 teilt; nicht auf  $H_3$ , da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).

Betrachte man nun die mit Rest 2: Sie kommen alle auf  $H_1$  und auf keinen anderen (nicht auf  $H_2$ , da sie weder einen Rest von 0 noch von 3 haben; nicht auf  $H_3$ , da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).

Und zu guter Letzt betrachte man nun die mit Rest 3: Sie kommen alle auf  $H_2$  (nicht auf  $H_1$ , da sie weder einen Rest von 1 noch von 2 haben; nicht auf  $H_3$ , da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).

Im ersten Schritt wird Smilla also die 2020 Nuggets auf drei Haufen aufteilen, wobei jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt.

Ähnlich zu dem Beweis, dass die Aufteilung tatsächlich möglich ist (also, dass jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt), werde ich hier noch beweisen, dass bei dem Verteilen der Nuggets auf die Truhen nach dem in den Schritten 2 und 3 beschriebenen Schema stets eindeutig ist, welches Nugget Smilla in die von Leo gewählte Truhe legen muss, und, dass dieses Nugget auch stets zur Verfügung steht.

Dies ist jedoch ziemlich offensichtlich. Denn man kann sich die Wahl auch folgendermaßen vorstellen:

Wenn Leo die rote Truhe wählt, geht Smilla im Kopf alle Nuggets (auch die, die schon gelegt wurden) durch, allerdings nicht in irgendeiner Reihenfolge, sondern zunächst vom Leichtesten zum Schwersten von  $H_1$ , dann das mit der Masse 2020g, dann vom Leichtesten zum Schwersten von  $H_2$ . Dabei nimmt sie dann das Erste, das ihr noch zur Verfügung steht, und legt es in die rote Truhe.

Wenn Leo die blaue Truhe wählt, geht sie auch alle Nuggets durch, allerdings zuerst vom Leichtesten zum Schwersten von  $H_2$ , dann das mit der Masse 2020g, dann vom Leichtesten zum Schwersten von  $H_1$ .

In beiden Fällen wird, da es keine zwei Nuggets mit der gleichen Masse gibt, eindeutig bestimmt sein, welches Nugget Smilla in die von Leo gewählte Truhe legen muss.

Es bleibt also zu beweisen, dass, wenn alle Nuggets verteilt sind, die Truhe, in der das Nugget mit der Masse 2020g liegt, Nuggets mit einer Gesamtmasse von mindestens 1.021.615g beinhaltet. Denn dann wird Smilla gemäß Schritt 4 diese Truhe wählen und mindestens 1.021.615g Gold gewinnen.

Zunächst berechne man hierzu folgende Werte: die Masse an Gold, die auf  $H_1$  bzw.  $H_2$  (bzw.  $H_3$ ) liegt, welche ich im Folgenden mit  $m(H_1)$  bzw.  $m(H_2)$  bzw.  $m(H_3)$  bezeichnen werde.

Offensichtlich befindet sich auf  $H_3$  genau ein Nugget (das mit der Masse 2020g). Die Gesamtmasse der Nuggets auf  $H_3$  besteht also nur aus dem Nugget mit der Masse 2020g, also ist  $m(H_3) = 2020[\text{g}]$  (von hier an werde ich bei  $m(H_1), m(H_2), m(H_3)$  die Einheit g nicht mehr dazuschreiben). Betrachte man nun die noch übrigen Nuggets, also die mit Massen von höchstens 2019g. Diese lassen sich folgendermaßen schreiben (wobei ich „das

Nugget mit der Masse“ und die Einheit Gramm weggelassen habe):  $4 \cdot 0 + 1, 4 \cdot 0 + 2, 4 \cdot 0 + 3, 4 \cdot 1 + 0, 4 \cdot 1 + 1, 4 \cdot 1 + 2, 4 \cdot 1 + 3, 4 \cdot 2 + 0, 4 \cdot 2 + 1, \dots, 4 \cdot 504 + 0$  ( $= 2016$ ),  $4 \cdot 504 + 1, 4 \cdot 504 + 2, 4 \cdot 504 + 3$ . Offensichtlich sind genau 505 von diesen von der Form  $4k+1$  (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ), nämlich  $4 \cdot 0 + 1, 4 \cdot 1 + 1, 4 \cdot 2 + 1, \dots, 4 \cdot 503 + 1, 4 \cdot 504 + 1$ . Gleichzeitig sind 505 von der Form  $4k+2$  (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ), nämlich  $4 \cdot 0 + 2, 4 \cdot 1 + 2, 4 \cdot 2 + 2, 4 \cdot 3 + 2, \dots, 4 \cdot 503 + 2, 4 \cdot 504 + 2$ . Es gibt unter den 2019 Nuggets also 505 mit Massen (in g) der Form  $4k+1$  und 505 mit Massen (in g) der Form  $4k+2$ . Nun sind dies aber genau die Nuggets, die auf  $H_1$  kommen. Also sind die 1010 Nuggets, die sich auf  $H_1$  befinden, die mit folgenden Massen (in g):  $4 \cdot 0 + 1, 4 \cdot 0 + 2, 4 \cdot 1 + 1, 4 \cdot 1 + 2, 4 \cdot 2 + 1, 4 \cdot 2 + 2, \dots, 4 \cdot 503 + 1, 4 \cdot 503 + 2, 4 \cdot 504 + 1, 4 \cdot 504 + 2$ . Die Gesamtmasse dieser Nuggets, also  $m(H_1)$ , ist also:

$$\begin{aligned} m(H_1) &= (4 \cdot 0 + 1) + (4 \cdot 0 + 2) + (4 \cdot 1 + 1) + (4 \cdot 1 + 2) + \dots + (4 \cdot 504 + 1) + (4 \cdot 504 + 2) \\ &= (4 \cdot 0 + 1) + (4 \cdot 1 + 1) + \dots + (4 \cdot 503 + 1) + (4 \cdot 504 + 1) \\ &\quad + (4 \cdot 0 + 2) + (4 \cdot 1 + 2) + \dots + (4 \cdot 503 + 2) + (4 \cdot 504 + 2) \\ &= (4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + \dots + 4 \cdot 503 + 4 \cdot 504) + (1 + 1 + \dots + 1) \\ &\quad + (4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + \dots + 4 \cdot 503 + 4 \cdot 504) + (2 + 2 + \dots + 2) \end{aligned}$$

Da  $4 \cdot 0 + 1, 4 \cdot 1 + 1, \dots, 4 \cdot 504 + 1$  insgesamt 505 Summanden sind, handelt sich bei der Summe  $(1 + 1 + \dots + 1)$  in der zweitletzten Zeile um 505 Einer (aus jedem Summanden der oberen Summe wurde ja eine Eins genommen). Da auch  $4 \cdot 0 + 2, 4 \cdot 1 + 2, \dots, 4 \cdot 504 + 2$  insgesamt 505 Summanden sind, handelt es sich mit gleicher Begründung bei der Summe  $(2 + 2 + \dots + 2)$  in der letzten Zeile um 505 Zweier. Es ist also:

$$\begin{aligned} m(H_1) &= 4 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 504) + (505 \cdot 1) \\ &\quad + 4 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 504) + (505 \cdot 2) \\ &= 4 \cdot \left( \frac{504 \cdot (504 + 1)}{2} \right) + 505 + 4 \cdot \left( \frac{504 \cdot (504 + 1)}{2} \right) + 2 \cdot 505 \\ &= 2 \cdot 504 \cdot 505 + 505 + 2 \cdot 504 \cdot 505 + 2 \cdot 505 \\ &= 1008 \cdot 505 + 505 + 1008 \cdot 505 + 2 \cdot 505 = (1008 + 1 + 1008 + 2) \cdot 505 \\ &= (2016 + 3) \cdot 505 = 2019 \cdot 505 = 1.019.595 \end{aligned}$$

(Berechnung von  $2019 \cdot 505$  ohne Taschenrechner<sup>2</sup>)

Anm.: Zur Berechnung von  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 504$  habe ich die aus der Schule bekannte Gaußsche Summenformel verwendet, nach welcher  $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , also hier (mit  $n = 504$ ):  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 504 = 1 + 2 + 3 + \dots + 504 = \frac{504 \cdot (504+1)}{2}$ .

Es ist also  $m(H_1) = 1.019.595$  und  $m(H_3) = 2020$ . Gleichzeitig ist aber, da jedes der Nuggets auf einem der drei Haufen, allerdings keines auf zweien landet, die Gesamtmasse der drei Haufen gleich der Gesamtmasse aller Nuggets; d.h.:  $m(H_1) + m(H_2) + m(H_3) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019 + 2020 = \frac{2020 \cdot 2021}{2} = 2.041.210$  (nach der Gaußschen Summenformel mit  $n = 2020$ ; Berechnung ohne Taschenrechner<sup>3</sup>). Es ist also  $m(H_2) = 2.041.210 - m(H_1) - m(H_3) = 2.041.210 - 1.019.595 - 2020 = 1.019.595$  (Überprüfung der Berechnung ohne Taschenrechner<sup>4</sup>)

Die berechneten Werte sind also:  $m(H_1) = 1.019.595, m(H_2) = 1.019.595, m(H_3) = 2020$ .

Nun ist in den Regeln des Spiels festgelegt, dass erst aufgehört wird, wenn alle Nuggets in einer der beiden Truhen liegen. Also muss auch das Nugget mit der Masse 2020g in einer

<sup>2</sup>)  $2019 \cdot 505 = 2019 \cdot 1010 \cdot \frac{1}{2} = (2019 \cdot 1000 + 2019 \cdot 10) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2.019.000 + 20.190) = 1.009.500 + 10.095 = 1.019.595$

<sup>3</sup>)  $\frac{2020 \cdot 2021}{2} = 1010 \cdot 2021 = 1000 \cdot 2021 + 10 \cdot 2021 = 2.021.000 + 20.210 = 2.041.210$

<sup>4</sup>)  $2.041.210 - 1.019.595 - 2020 = 1.019.595 \Leftrightarrow 2.041.210 - 2020 = 2 \cdot 1.019.595 = 2.039.190 \Leftrightarrow 2.041.210 = 2.039.190 + 2020 = 2.039.210 + 2000 = 2.041.210$

der beiden Truhen liegen. Um nicht zu allgemein formulieren zu müssen (was vermutlich unverständlicher wäre), kann man die beiden Fälle einzeln betrachten:

*Fall 1: Das Nugget mit der Masse 2020g landet in der roten Truhe.* Offensichtlich können dann zu dem Zeitpunkt, zu dem Smilla das Nugget mit der Masse 2020g in die rote Truhe legt, noch keine Nuggets von  $H_1$  in der blauen Truhe liegen. Denn wann immer sie eines hätte legen können (also wann immer Leo die blaue Truhe gewählt hat), hätte sie auch noch das mit der Masse 2020g legen können (da sie es jetzt zur Verfügung hat, hätte sie es zu diesem früheren Zeitpunkt auch zur Verfügung gehabt), was sie dann gemäß Schritt 3 zunächst hätte tun müssen. Es liegt also kein Nugget von  $H_1$  in der blauen Truhe. Da sie aber auch kein Nugget von  $H_1$  mehr zur Verfügung hat (sonst müsste sie das zuerst legen, wenn Leo die rote Truhe wählt), müssen alle Nuggets von  $H_1$  bereits in einer der beiden Truhen liegen. Weil diese Truhe nicht die blaue sein kann (in ihr liegen ja keine Nuggets von  $H_1$ ), müssen also alle Nuggets von  $H_1$  in der roten Truhe liegen.

*Fall 2: Das Nugget mit der Masse 2020g landet in der blauen Truhe.* Offensichtlich können dann zu dem Zeitpunkt, zu dem sie das Nugget mit der Masse 2020g in die blaue Truhe legt, noch keine Nuggets von  $H_2$  in der roten Truhe liegen. Denn wann immer sie eines hätte legen können (also wann immer Leo die rote Truhe gewählt hat), hätte sie auch noch das mit der Masse 2020g legen können (da sie es jetzt zur Verfügung hat, hätte sie es zu diesem früheren Zeitpunkt auch zur Verfügung gehabt), was sie dann gemäß Schritt 2 zunächst hätte tun müssen. Es liegt also kein Nugget von  $H_2$  in der roten Truhe. Da sie aber auch kein Nugget von  $H_2$  mehr zur Verfügung hat (sonst müsste sie das zuerst legen, wenn Leo die blaue Truhe wählt), müssen alle Nuggets von  $H_2$  bereits in einer der beiden Truhen liegen. Weil diese Truhe nicht die rote sein kann (in ihr liegen ja keine Nuggets von  $H_2$ ), müssen also alle Nuggets von  $H_2$  in der blauen Truhe liegen.

Wenn das Nugget mit der Masse 2020g in der roten Truhe landet, müssen in ihr also auch alle Nuggets von  $H_1$  sein, und wenn es in der blauen Truhe liegt, müssen in dieser auch alle Nuggets von  $H_2$  liegen. In erstem Fall hat also die rote Truhe eine Gesamtmasse von mindestens  $m(H_1) + 2020 = 1.021.615[\text{g}]$ , da in ihr alle Nuggets von  $H_1$  (die eine Gesamtmasse von  $m(H_1)$  haben) und das mit der Masse 2020g liegen. In letzterem Fall muss die blaue Truhe eine Gesamtmasse von mindestens  $m(H_2) + 2020 = 1.021.615[\text{g}]$  haben, da in ihr alle Nuggets von  $H_2$  (die eine Gesamtmasse von  $m(H_2)$  haben) und das mit der Masse 2020g liegen. (Berechnungen von  $m(H_1) + 2020$  und  $m(H_2) + 2020$  ohne Taschenrechner<sup>5</sup>)

In beiden Fällen beinhaltet also die Truhe, in der das Nugget mit der Masse 2020g liegt, Gold mit einer Gesamtmasse von mindestens 1.021.615g. Wenn Smilla dann gemäß Schritt 4 diese Truhe, in der das Nugget mit der Masse 2020g liegt, wählt, wählt sie stets eine mit mindestens 1.021.615g Gold.

Smilla kann also stets mit Sicherheit mindestens 1.021.615g Gold gewinnen!  $\square$

**Hilfssatz 1.2.** *Leo kann stets verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt.*

*Beweis des Hilfssatzes.* Dieser Beweis ist recht simpel, da Leo, um zu verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt, einfach folgenden zweischrittigen Plan verfolgen kann:

1. Solange die blaue Truhe wählen, bis in ihr insgesamt mehr als 1.019.595g Gold sind.
2. Sobald in der blauen Truhe mehr als 1.019.595g Gold sind, nur noch die rote Truhe wählen.

Am Ende sind damit in der blauen Truhe auf jeden Fall mindestens 1.019.595g Gold. Wie im Beweis von Lemma 1.1 berechnet, ist die Gesamtmasse der 2020 Nuggets 2.041.210g. Wenn also in der blauen Truhe mindestens 1.019.595g Gold sind, können in der roten

<sup>5</sup>)  $m(H_1) + 2020 = 1.019.595 + 2020 = 1.019.615 + 2000 = 1.021.615$  und  $m(H_2) + 2020 = 1.019.595 + 2020 = m(H_1) + 2020 = 1.021.615$

Truhe nur noch höchstens  $2.041.210\text{g} - 1.019.595\text{g} = 1.021.615\text{g}$  Gold sein (Überprüfung der Berechnung ohne Taschenrechner<sup>6</sup>).

Offensichtlich kann Smilla in einem Zug nur maximal  $2020\text{g}$  Gold in eine der beiden Truhen legen. Wenn nun irgendwann mehr als  $1.021.615\text{g}$  Gold in der blauen Truhe wären, muss es einen Zug geben, in dem Smilla das Nugget in die Truhe legt, das dafür sorgt, dass die Gesamtmasse der in der blauen Truhe befindlichen Nuggets größer als  $1.021.615\text{g}$  ist. Dieses Nugget kann höchstens  $2020\text{g}$  wiegen. Bevor sie das Nugget hineinlegt, müssten sich also schon Nuggets in der Truhe befinden, die eine Gesamtmasse von mehr als  $1.021.615\text{g} - 2020\text{g} = 1.019.595\text{g}$  haben (Überprüfung ohne Taschenrechner<sup>7</sup>), denn sonst würden die zusätzlichen maximal  $2020\text{g}$  nicht genügen, um die Gesamtmasse über  $1.021.615\text{g}$  zu bringen. Wenn sich aber bereits mehr als  $1.019.595\text{g}$  Gold in der blauen Truhe befunden hätten, hätte Leo – gemäß seinem Plan – die rote Truhe gewählt; Smilla hätte also gar kein Nugget mehr in die blaue Truhe legen können! Wenn Leo seinen simplen Plan verfolgt, kann es also nicht passieren, dass sich in der blauen Truhe mehr als  $1.021.615\text{g}$  Gold befinden.

Es können sich also weder in der blauen noch in der roten Truhe mehr als  $1.021.615\text{g}$  Gold befinden. Demnach kann Smilla natürlich auch keine Truhe wählen, in der sich mehr als  $1.021.615\text{g}$  Gold befinden. Leo kann also stets verhindern, dass Smilla mehr als  $1.021.615\text{g}$  Gold bekommt!  $\square$

Smilla kann also nach Lemma 1.1 stets  $1.021.615\text{g}$  Gold gewinnen. Allerdings kann sie keine größere Masse Gold mit Sicherheit gewinnen, denn das kann Leo nach Lemma 1.2 stets verhindern. Die größte Masse an Gold, die Smilla mit Sicherheit gewinnen kann, ist also  $1.021.615\text{g}$ .  $\blacksquare$

---

<sup>6</sup>)  $2.041.210 - 1.019.595 = 1.021.615 \Leftrightarrow 2.041.210 = 1.021.615 + 1.019.595 = 2.021.615 + 19.595 = 2.031.615 + 9.595 = 2.040.615 + 595 = 2.041.115 + 95 = 2.041.210$

<sup>7</sup>)  $1.021.615 - 2020 = 1.019.595 \Leftrightarrow 1.021.615 = 1.019.595 + 2020 = m(H_1) + 2020$ , s. Fußnote 4

## 2 Aufgabe 2

### Hinweise zur Darstellung

$\gcd(\alpha, \beta)$  steht für den größten gemeinsamen Teiler (engl.: greatest common divisor) der Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ . Also ist z.B.  $\gcd(\alpha, \beta) = 1$  äquivalent zu „ $\alpha$  und  $\beta$  sind teilerfremd“. „O.B.d.A.“ (oder mitten im Satz „o.B.d.A.“) ist kurz für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

$\mathbb{Q}$  ist die Menge der rationalen Zahlen.

$\mathbb{N}$  ist die Menge der natürlichen Zahlen (ohne die 0) und  $\mathbb{N}_0$  die Menge der natürlichen Zahlen mit der 0.

$\alpha \mid \beta$  heißt, dass  $\alpha$  ein Teiler von  $\beta$ , also  $\beta$  ein Vielfaches von  $\alpha$  ist.

### Lösung von Aufgabe 2

Die in Aufgabe 2 zu zeigende Aussage habe ich in folgenden Satz „umformuliert“:

**Satz 2.1.** *Es gibt keine drei Zahlen  $x, y, z \in \mathbb{Q}$  mit  $x + y + z = 0$  und  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ .*

*Beweis des Satzes durch Widerspruch.* Nehme man an, es gäbe drei Zahlen  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ , die beide Gleichungen erfüllen. Offenbar können nicht alle drei Zahlen  $x, y, z$  nicht-positiv und auch nicht alle drei Zahlen  $x, y, z$  nicht-negativ sein, denn damit dann  $x + y + z = 0$  erfüllt wäre, müsste  $x = y = z = 0$ , was der zweiten Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$  widerspricht. Es sind also entweder zwei der drei Zahlen  $x, y, z$  nicht-negativ und eine nicht-positiv oder es sind zwei nicht-positiv und eine nicht-negativ. Unter der Annahme, dass es ein Lösungstriplet  $x, y, z$  gibt, müsste es auch eines mit zwei nicht-negativen und einer nicht-positiven Zahl geben. Denn zu jedem Lösungstriplet  $x, y, z$ , dass zwei nicht-positive Zahlen und eine nicht-negative Zahl beinhaltet, gibt es ein Lösungstriplet  $-x, -y, -z$  (das, wenn  $x, y, z$  hinreichend für die beiden Gleichungen ist, dies offensichtlich ebenfalls ist), das dann zwei nicht-negative Zahlen und eine nicht-positive Zahl beinhaltet. Wenn es also überhaupt Lösungstriplet gibt (wovon ja für den Widerspruchsbeweis ausgegangen wurde), so muss es also auch welche mit zwei nicht-negativen Zahlen und einer nicht-positiven Zahl geben. Sei nun  $x, y, z$  ein solches Tripel und sei o.B.d.A.  $z$  die nicht-positive Zahl (ansonsten benenne man einfach um, die Gleichungen ändern dadurch ihre Form nicht). Es ist also  $z \leq 0$  und  $x, y \geq 0$ . Da  $x, y$  nicht-negative rationale Zahlen sind, muss es vier Zahlen  $a', b', c', d' \in \mathbb{N}_0$  ( $b, d \neq 0$ ) geben, für die  $x = \frac{a'}{b'}$  und  $y = \frac{c'}{d'}$ . Sei nun  $\frac{a}{b}$  die vollständig gekürzte Form des Bruches  $\frac{a'}{b'}$  und  $\frac{c}{d}$  die des Bruches  $\frac{c'}{d'}$ . D.h., es ist  $x = \frac{a}{b}$  und  $y = \frac{c}{d}$  mit  $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$ . Nun ist wegen  $x + y + z = 0$  offenbar  $z = -x - y = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = -\frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = -\frac{ad + cb}{db}$ . Damit gilt dann wegen  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ :

$$\begin{aligned}
 100 = x^2 + y^2 + z^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(-\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot b}{d \cdot b}\right)^2 + \left(\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
 &= \frac{(ad)^2}{(db)^2} + \frac{(cb)^2}{(db)^2} + \frac{(ad)^2 + 2abcd + (cb)^2}{(db)^2} \\
 &= \frac{2((ad)^2 + abcd + (cb)^2)}{(db)^2} \quad \parallel \cdot \frac{(db)^2}{2} \\
 \iff 50 \cdot (db)^2 &= (ad)^2 + abcd + (cb)^2
 \end{aligned} \tag{1}$$

Sei nun  $\gcd(b, d) = t$  und seien die dann natürlichen Zahlen  $\frac{b}{t}$  und  $\frac{d}{t}$  mit  $p$  bzw.  $q$



bezeichnet.  $p$  und  $q$  sind dann teilerfremde natürliche Zahlen. Wenn man nun  $b = pt$  und  $d = qt$  in (1) einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} 50 \cdot (db)^2 &= (ad)^2 + abcd + (cb)^2 \\ &= 50 \cdot p^2 t^2 \cdot q^2 t^2 = a^2 \cdot q^2 t^2 + ac \cdot pt \cdot qt + c^2 \cdot p^2 t^2 \quad \parallel \cdot \frac{1}{t^2} \\ \iff 50 \cdot t^2 \cdot p^2 q^2 &= a^2 q^2 + acpq + c^2 p^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Nun ist in (2) offensichtlich die linke Seite durch  $p$  und durch  $q$  teilbar, also muss es die rechte Seite auch sein. Der mittlere Summand  $acpq$  muss dabei nicht beachtet werden, schließlich ist er bereits durch sowohl  $p$  als auch  $q$  teilbar. Es muss also  $p \mid a^2 q^2 + c^2 p^2$  und  $q \mid a^2 q^2 + c^2 p^2$ . Aus  $p \mid a^2 q^2 + c^2 p^2$  folgt wegen  $p \mid c^2 p^2$  offenbar, dass  $p \mid a^2 q^2$ , während aus  $q \mid a^2 q^2 + c^2 p^2$  wegen  $q \mid a^2 q^2$  folgt, dass  $q \mid c^2 p^2$ . Es gilt also:

$$p \mid a^2 q^2 \text{ und } q \mid c^2 p^2$$

Da aber  $p$  und  $q$  teilerfremd sind, folgt direkt:

$$p \mid a^2 \text{ und } q \mid c^2 \iff \frac{b}{t} \mid a^2 \text{ und } \frac{d}{t} \mid c^2$$

Nun sind aber  $a$  und  $b$  teilerfremd, d.h. kein Teiler von  $b$  (was  $\frac{b}{t}$  ja ist) außer 1 kann  $a$  bzw.  $a^2$  teilen. Es muss also  $\frac{b}{t} = 1$  und damit  $b = t$ . Da auch  $q$  und  $c$  teilerfremd sind, folgt mit gleicher Begründung, dass  $d = t$ . Damit ist dann  $b = d$ . Setzt man dies in (1) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 50 \cdot b^2 \cdot b^2 &= a^2 b^2 + ac \cdot b^2 + c^2 b^2 \quad \parallel \cdot \frac{1}{b^2} \\ \iff 50b^2 &= a^2 + ac + c^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Nun ist die linke Seite von (3) offensichtlich gerade und damit muss es die rechte auch sein. Wenn nun aber beide Zahlen  $a, c$  ungerade sind, so sind alle drei Summanden ungerade (das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets eine ungerade Zahl) und damit dann die gesamte rechte Seite ungerade. Es muss also mindestens eine der beiden Zahlen gerade sein. Wenn nun aber nur genau eine gerade ist, so ist auch das Quadrat dieser und  $ac$  gerade, jedoch nicht das Quadrat der anderen dann ungeraden Zahl. Die rechte Seite wäre die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl, also auch ungerade. Da nicht beide und nicht genau eine der beiden Zahlen ungerade sein können, müssen beide gerade sein. D.h., es gibt zwei Zahlen  $r, s \in \mathbb{N}$ , für die  $a = 2r$  und  $c = 2s$  ist. Setzt man dies in (3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 50b^2 &= (2r)^2 + (2r)(2s) + (2s)^2 = 4(r^2 + rs + s^2) \quad \parallel \cdot \frac{1}{2} \\ \iff 25b^2 &= 2(r^2 + rs + s^2) \end{aligned}$$

Da nun  $25b^2$  anscheinend eine gerade Zahl ist (schließlich ist  $2(r^2 + rs + s^2)$  offensichtlich gerade), muss (da 25 ungerade ist)  $b^2$  und damit  $b$  gerade sein. Nun sind also sowohl  $a$  also auch  $b$  gerade, d.h. durch 2 teilbar.  $a$  und  $b$  haben also den gemeinsamen Teiler 2. Dies stellt aber einen Widerspruch zu  $\gcd(a, b) = 1$  dar! Denn offensichtlich ist ihr größter gemeinsamer Teiler nicht 1, wenn 2 ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  ist. Dies vervollständigt dann den Widerspruchsbeweis von Satz 2.1. ■

### 3 Aufgabe 3

#### Anmerkungen zur Notation und einer häufig verwendeten Formel

Im Folgenden wird  $x_A$  die  $x$ - und  $y_A$  die  $y$ -Koordinate des allgemeinen Punktes  $A$  bezeichnen. D.h. hier, dass  $P = (x_P, y_P)$ ,  $N = (x_N, y_N)$ ,  $M = (x_M, y_M)$ ,  $S = (x_S, y_S)$ ,  $Q = (x_Q, y_Q)$ .

$\overline{AB}$  ist die Distanz von  $A$  zu  $B$  (stets positiv).

Sehr oft habe ich die Distanzformel

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ (für alle } A, B)$$

verwendet. Ich habe bei den Gleichungen, bei denen ich sie verwendet habe, nicht dazugeschrieben, dass sich die Gleichungen mit der Distanzformel ergeben. Diese Entscheidung habe ich getroffen, da ich diese Formel so oft verwendet habe, dass, wenn ich sie jedes mal erwähnt hätte, dies einige Sätze deutlich komplizierter und teilweise sogar relativ unverständlich gemacht hätte. Ich denke, dass dies nicht problematisch ist; ich habe ja auch nicht dazugeschrieben, wenn ich z.B. einen Bruch gekürzt habe.

#### Algebraisierung der Aufgabe mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems

Um die Aufgabe von einer Geometrischen in eine eher Algebraische zu übersetzen, habe ich mich dazu entschieden, die in der Aufgabenstellung beschriebene Konstruktion mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems zu beschreiben. Hierzu definiere man folgendermaßen ein kartesisches Koordinatensystem:  $P$  sei der Ursprung und  $n$  die  $x$ -Achse; dabei sei die  $x$ -Achse so beschriftet, dass der Punkt  $N$  eine positive  $x$ -Koordinate hat, bevor er  $P$  passiert, und die  $y$ -Achse so, dass der Punkt  $M$  eine positive  $y$ -Koordinate hat, bevor er  $P$  passiert. Dies ist offensichtlich möglich, da  $P$  auf  $n$  liegt. Offensichtlich ist auch die Beschriftung der  $y$ -Achse (also der Orthogonalen zu  $n$ , die durch  $P$  geht) möglich, denn die Geraden  $m$  und  $n$  liegen nicht aufeinander (sonst würden sie sich in mehr als einem Punkt schneiden); der Punkt  $M$  muss also, bevor er  $P$  passiert, auf einer Seite der  $x$ -Achse liegen.

Der Punkt  $N$  hat, da er auf  $n$ , also der  $x$ -Achse, liegt, natürlich eine  $y$ -Koordinate von 0. Es ist also:  $N = (x_N, 0)$ . Sei nun  $d_M$  die Distanz  $\overline{PM}$ , allerdings mit negativem Vorzeichen, wenn  $y_M$  ein negatives Vorzeichen hat, also nachdem  $M$  den Punkt  $P$  passiert hat. Nun ist  $x_N$  wegen  $y_N = 0$  die Distanz  $\overline{PN}$ , allerdings mit negativem Vorzeichen, nachdem  $N$  den Punkt  $P$  passiert hat. Offensichtlich ist dann, da  $N$  und  $M$  sich mit der gleichen, konstanten Geschwindigkeit von  $P$  weg/zu  $P$  hin bewegen,  $d_M - x_N$  konstant. Sei diese Konstante mit  $c$  bezeichnet. Dann ist  $d_M - x_N = c \Leftrightarrow d_M = x_N + c$  und damit  $\overline{PM} = |x_N + c|$ . Nun ist  $|x_N + c| = \overline{PM} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$ , da  $y_P = x_P = 0$ . Die Gerade  $m$  ist, da sie durch  $P$ , den Ursprung des kartesischen Koordinatensystems, geht, natürlich eine Ursprungsgerade. Im Folgenden werde ich nur die Fälle betrachten, in denen  $m$  nicht auf der  $y$ -Achse liegt, also nicht orthogonal zu  $n$  ist. Dann hat  $m$  eine reelle Steigung, die nicht Null ist, da  $m$  sonst auf  $n$  liegen würde, was einen Widerspruch dazu darstellt, dass  $m$  und  $n$  sich nur in einem Punkt  $P$  schneiden. Diese Steigung wird im Folgenden  $r$  genannt. Die Geradengleichung von  $m$  ist also:  $y = r \cdot x$  bzw.  $x = \frac{y}{r}$ . Da  $M$  auf  $m$  liegt, muss  $x_M = \frac{y_M}{r}$  gelten. Zusammen mit  $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$  ergibt das dann:  $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{\left(\frac{y_M}{r}\right)^2 + y_M^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} \cdot y_M^2 + y_M^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \cdot y_M^2} = |y_M| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}$ . Da aber  $y_M$  das gleiche Vorzeichen

wie  $d_M = x_N + c$  hat, sind die Betragsstriche nicht notwendig:

$$\begin{aligned} x_N + c &= y_M \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \\ \Leftrightarrow y_M &= \frac{x_N + c}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} = \frac{r \cdot (x_N + c)}{r \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} \\ &= \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)}} = \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \end{aligned}$$

Es ist also:  $y_M = \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}}$ .

Nun ist  $x_M = \frac{y_M}{r}$ , also mit  $y_M = \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}}$ :

$$x_M = \frac{1}{r} \cdot y_M = \frac{1}{r} \cdot \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} = \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

Es ist also:

$$M = \left( \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)$$

Die Punkte  $P, N, M$  haben also folgende Koordinaten, wenn  $m$  nicht orthogonal zu  $n$  ist:

$$P = (0, 0); N = (x_N, 0); M = \left( \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)$$

Wenn  $m$  orthogonal zu  $n$  ist, also  $m$  auf der  $y$ -Achse liegt, hat  $M$  natürlich eine  $x$ -Koordinate von 0. Es gilt aber immer noch  $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$ , was mit  $x_M = 0$  dann  $|x_N + c| = \sqrt{y_M^2} = |y_M|$  ergibt. Da  $y_M$  das gleiche Vorzeichen wie  $d_M = x_N + c$  hat, gilt die Gleichung auch ohne die Betragsstriche; es ist also  $y_M = x_N + c$ . Zusammen mit  $x_M = 0$  ist dann also, wenn  $m$  orthogonal zu  $n$  ist,  $M = (0, x_N + c)$ .

### Beweis der zu zeigenden Aussage

Nun muss nur noch bewiesen werden, dass es stets einen festen Punkt  $Q \neq P$  gibt, sodass  $P, M, N, Q$  zu jedem Zeitpunkt auf einem Kreis gemeinsamen liegen. Es muss also stets einen Punkt  $S$  geben, von dem  $P, M, N, Q$  den gleichen Abstand haben.

Zunächst beweise ich hierzu den folgenden Hilfssatz:

**Hilfssatz 3.1.**  $x_A^2 + y_A^2 = 2x_A x_S + 2y_A y_S$  ist äquivalent zu  $\overline{AS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$  für alle Punkte  $A = (x_A, y_A), S = (x_S, y_S)$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Die Behauptung ergibt sich direkt durch Umformen:

$$\begin{aligned} \overline{AS} &= \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2} &&= \sqrt{x_S^2 + y_S^2} &&\|(\dots)^2 \\ \Leftrightarrow (x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2 &&&= x_S^2 + y_S^2 &&\|2. \text{ Binomische Formel} \\ \Leftrightarrow (x_A^2 - 2x_A x_S + x_S^2) + (y_A^2 - 2y_A y_S + y_S^2) &&&= x_S^2 + y_S^2 &&\| - x_S^2 - y_S^2 \\ \Leftrightarrow x_A^2 - 2x_A x_S + y_A^2 - 2y_A y_S &&&= 0 &&\| + 2x_A x_S + 2y_A y_S \\ \Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 &&&= 2x_A x_S + 2y_A y_S \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz beschäftigt sich nur mit dem Fall „ $m$  orthogonal zu  $n$ “:

**Satz 3.1.** Wenn  $m$  nicht orthogonal zu  $n$  ist, gibt es einen festen Punkt  $Q \neq P$  so, dass  $P, M, N, Q$  den gleichen Abstand zu einem Punkt  $S$  haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Hierbei sind  $S$  und  $Q$  durch  $S = \left( \frac{x_N}{2}, \frac{x_N + c}{2} \right)$  und  $Q = \left( -\frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right)$  gegeben.

*Beweis des Satzes.* Anm.: Im folgenden Beweis ist natürlich  $M = (0, x_N + c)$ , da in Satz 3.1 davon ausgegangen wird, dass  $m$  orthogonal zu  $n$  ist.

Wenn  $P = Q$  wäre, wäre offensichtlich auch  $x_P = x_Q$ , also  $x_Q = 0$ . Dann wäre aber auch  $c = 0$  und damit  $d_M = x_N + c = x_N$ . Wenn  $N$  den Punkt  $P$  passiert, also  $x_N = 0$  ist, wäre also auch  $d_M = 0$  und damit auch  $|d_M| = \overline{PM} = 0$ . Damit würden aber  $M$  und  $N$  beide auf  $P$  liegen, also würden  $M$  und  $N$  gleichzeitig den Punkt  $P$  passieren, was ja nicht sein kann. Also muss  $P \neq Q$  sein. Auch bewegt sich  $Q$  offensichtlich nicht, da  $c$  und damit auch  $\frac{c}{2}$  und  $-\frac{c}{2}$  konstant sind.

Offensichtlich bewegt sich der Punkt  $Q$  nicht, denn seine Koordinaten sind nur von der Konstanten  $c$  abhängig.  $Q$  ist also ein fester, von  $P$  verschiedener Punkt.

Zunächst werde ich ein paar Gleichungen in den folgenden Hilfssätzen beweisen, aus denen dann mit Hilfssatz 3.1 direkt die Korollare folgen:

**Hilfssatz 3.2.** Es ist  $\overline{PS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Die Behauptung ergibt sich direkt mit der Distanzformel:

$$\overline{PS} = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2} = \sqrt{(x_S - 0)^2 + (y_S - 0)^2} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$$

□

**Hilfssatz 3.3.** Es ist  $\overline{MS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Durch Umformen ergibt sich direkt die Gleichung  $x_M^2 + y_M^2 = 2x_Mx_S + 2y_My_S$ :

$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 &= 0^2 + (x_N + c)^2 = 0 + 2 \cdot \frac{(x_N + c)^2}{2} = 0 + 2 \cdot (x_N + c) \cdot \frac{x_N + c}{2} \\ &= 2 \cdot 0 \cdot \frac{x_N}{2} + 2 \cdot y_M \cdot y_S = 2x_Mx_S + 2y_My_S \end{aligned}$$

Aus der Gleichung  $x_M^2 + y_M^2 = 2x_Mx_S + 2y_My_S$  ergibt sich mit Hilfssatz 3.1 direkt die Behauptung. □

**Hilfssatz 3.4.** Es ist  $\overline{NS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Durch Umformen ergibt sich direkt die Gleichung  $x_N^2 + y_N^2 = 2x_Nx_S + 2y_Ny_S$ :

$$\begin{aligned} x_N^2 + y_N^2 &= x_N^2 + 0^2 = x_N^2 + 0 = 2 \cdot \frac{x_N^2}{2} + 0 = 2x_N \frac{x_N}{2} + 0 \\ &= 2x_Nx_S + 2 \cdot 0 \cdot \frac{x_N + c}{2} = 2x_Nx_S + 2y_Ny_S \end{aligned}$$

Aus der Gleichung  $x_N^2 + y_N^2 = 2x_Nx_S + 2y_Ny_S$  ergibt sich mit Hilfssatz 3.1 direkt die Behauptung. □

**Hilfssatz 3.5.** Es ist  $\overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Durch Umformen ergibt sich direkt die Gleichung  $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Qx_S + 2y_Qy_S$ :

$$\begin{aligned} x_Q^2 + y_Q^2 &= \left(-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = 2 \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2} = 0 \cdot \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} \\ &= (-x_N + x_N) \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} = -x_N \frac{c}{2} + x_N \frac{c}{2} + c \cdot \frac{c}{2} \\ &= x_N \left(-\frac{c}{2}\right) + (x_N + c) \frac{c}{2} = 2 \frac{x_N}{2} \left(-\frac{c}{2}\right) + 2 \frac{x_N + c}{2} \frac{c}{2} \\ &= 2x_Sx_Q + 2y_Sy_Q = 2x_Qx_S + 2y_Qy_S \end{aligned}$$

Aus der Gleichung  $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Qx_S + 2y_Qy_S$  ergibt sich mit Hilfssatz 3.1 direkt die Behauptung. □

Aus den Hilfssätzen 3.2, 3.3, 3.4 und 3.5 folgt direkt:  $\overline{PS} = \overline{MS} = \overline{NS} = \overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ . Wenn  $n$  orthogonal zu  $m$  ist, gibt es also einen festen Punkt  $Q \neq P$  so, dass  $P, M, N, Q$  den gleichen Abstand zu einem Punkt  $S$  haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. ■

Nun muss noch bewiesen werden, dass es einen solchen Punkt  $Q$  auch gibt, wenn  $m$  nicht orthogonal zu  $n$  ist:

**Satz 3.2.** *Wenn  $m$  nicht orthogonal zu  $n$  ist, gibt es einen festen Punkt  $Q \neq P$  so, dass  $P, M, N, Q$  den gleichen Abstand zu einem Punkt  $S$  haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Hierbei sind  $S$  und  $Q$  durch*

$$S = \left( \frac{x_N}{2}, \frac{(x_N + c)\sqrt{r^2 + 1} - x_N}{2r} \right) \text{ und}$$

$$Q = \left( \frac{c\sqrt{r^2 + 1}(1 - \sqrt{r^2 + 1})}{(1 - \sqrt{r^2 + 1})^2 + r^2}, \frac{cr\sqrt{r^2 + 1}}{(1 - \sqrt{r^2 + 1})^2 + r^2} \right)$$

gegeben.

*Beweis des Satzes.* Anm.: Im folgenden Beweis ist natürlich  $M = \left( \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)$ , da in Satz 3.2 davon ausgegangen wird, dass  $m$  nicht orthogonal zu  $n$  ist.

Wenn  $P = Q$  wäre, müsste auch  $y_Q = y_P = 0$  sein. Es müsste also  $\frac{cr\sqrt{r^2 + 1}}{(1 - \sqrt{r^2 + 1})^2 + r^2} = 0$  gelten. Nach dem Satz vom Nullprodukt muss dann mindestens einer der Faktoren  $c, r, \sqrt{r^2 + 1}, \frac{1}{(1 - \sqrt{r^2 + 1})^2 + r^2}$  gleich 0 sein. Offensichtlich kann  $\frac{1}{(1 - \sqrt{r^2 + 1})^2 + r^2}$  nicht 0 sein. Auch  $\sqrt{r^2 + 1}$  ist offensichtlich positiv, also nicht 0. Wenn  $r$ , die Steigung von  $m$ , 0 wäre, würde das bedeuten, dass  $m$  auf der  $x$ -Achse, also  $n$ , liegt. Das kann aber ebenfalls nicht sein, denn  $n$  und  $m$  schneiden sich nur in einem Punkt. Es muss also, damit  $y_Q = 0$  sein kann,  $c = 0$  gelten. Dann müssten aber (wie am Anfang des Beweises von Satz 3.1 bewiesen)  $M$  und  $N$  gleichzeitig den Punkt  $P$  passieren, was ebenfalls nicht sein kann! Es kann also nicht  $y_M = 0$  sein, also kann auch nicht  $P = Q$  sein.

Auch bewegt sich der Punkt  $Q$  offensichtlich nicht, denn seine Koordinaten sind nur von den Konstanten  $c$  und  $r$  abhängig. Also ist  $Q$  ein fester, von  $P$  verschiedener Punkt.

Wie im Beweis von Satz 3.1 folgen nun Beweise von ein paar Gleichungen:

**Hilfssatz 3.6.** *Es ist  $\overline{PS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .*

*Beweis des Hilfssatzes.* Die Behauptung ergibt sich direkt mit der Distanzformel:

$$\overline{PS} = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2} = \sqrt{(x_S - 0)^2 + (y_S - 0)^2} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$$

□

**Hilfssatz 3.7.** *Es ist  $\overline{MS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .*

*Beweis des Hilfssatzes.* Zunächst ergibt sich durch Umformen die Gleichung  $x_M^2 + y_M^2 = 2x_M x_S + 2y_M y_S$ . Diese Umformung ist zwar etwas länger, allerdings in jedem Schritt elementar genug, dass ich einen Kommentar für überflüssig halte.

$$\begin{aligned}
x_M^2 + y_M^2 &= \left( \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)^2 + \left( \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)^2 = \frac{(x_N + c)^2}{r^2 + 1} + \frac{r^2(x_N + c)^2}{r^2 + 1} \\
&= \frac{(x_N + c)^2 + r^2(x_N + c)^2}{r^2 + 1} = \frac{(1 + r^2)(x_N + c)^2}{r^2 + 1} = (x_N + c)^2 \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} - \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} + (x_N + c)^2 \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} - \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} + \frac{(x_N + c)^2\sqrt{r^2 + 1}}{\sqrt{r^2 + 1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} + \frac{-(x_N + c)x_N + (x_N + c)^2\sqrt{r^2 + 1}}{\sqrt{r^2 + 1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} + \frac{(x_N + c)^2\sqrt{r^2 + 1} - (x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} + \frac{(x_N + c) \cdot (x_N + c)\sqrt{r^2 + 1} - (x_N + c) \cdot x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2 + 1}} + \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}} \cdot \left( (x_N + c)\sqrt{r^2 + 1} - x_N \right) \\
&= \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}} \cdot x_N + 2r \cdot \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}} \cdot \frac{(x_N + c)\sqrt{r^2 + 1} - x_N}{2r} \\
&= 2 \cdot x_M \cdot \frac{x_N}{2} + 2 \cdot \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \cdot y_S \\
&= 2x_M x_S + 2y_M y_S
\end{aligned}$$

Aus  $x_M^2 + y_M^2 = 2x_M x_S + 2y_M y_S$  ergibt sich mit Hilfssatz 3.1 direkt die Behauptung.  $\square$

**Hilfssatz 3.8.** Es ist  $\overline{NS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Die Behauptung ergibt sich direkt mit der Distanzformel:

$$\begin{aligned}
\overline{NS} &= \sqrt{(x_N - x_S)^2 + (y_N - y_S)^2} = \sqrt{\left(x_N - \frac{x_N}{2}\right)^2 + (0 - y_S)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_N}{2}\right)^2 + (-y_S)^2} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}
\end{aligned}$$

$\square$

**Hilfssatz 3.9.** Es ist  $\overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Zunächst ergibt sich durch simples Umformen die Gleichung  $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Q x_S + 2y_Q y_S$ . Auch diese Umformung ist ziemlich lang, aber auch hier ist wieder jeder Schritt sehr elementar; die Umformung sollte also trotz ihrer Länge nachvollziehbar sein.

Aus der Gleichung  $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Q x_S + 2y_Q y_S$  ergibt sich mit Hilfssatz 3.1 direkt die Behauptung.  $\square$

Aus den Hilfssätzen 3.6, 3.7, 3.8 und 3.9 folgt direkt:  $\overline{PS} = \overline{MS} = \overline{NS} = \overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ . Wenn  $n$  nicht orthogonal zu  $m$  ist, gibt es also einen festen Punkt  $Q \neq P$  so, dass  $P, M, N, Q$  den gleichen Abstand zu einem Punkt  $S$  haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen.  $\blacksquare$

Nach Satz 3.1 gibt es also, wenn  $m$  orthogonal zu  $n$  ist, einen festen Punkt  $Q \neq P$  so, dass  $P, M, N, Q$  stets den gleichen Abstand zu einem Punkt  $S$  haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Nach Satz 3.2 gibt es einen solchen Punkt  $Q$  auch,

wenn  $m$  nicht orthogonal zu  $n$  ist. Es gibt also stets einen festen Punkt  $Q \neq P$  so, dass  $P, M, N, Q$  zu jedem Zeitpunkt auf einem gemeinsamen Kreis liegen!





## Lösung von Aufgabe 4

**Satz 4.1.** *In jeder f.p.r.w. Tabelle mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, wobei  $m > n$ , gibt es ein Feld  $(i, j)$ , sodass  $(i, j)' > 0$  und  $R(i, 1; i, n) > R(1, j; m, j)$ , wobei  $'$  die Feld- und  $R$  die Rechtecksfunktion dieser Tabelle ist.*

*Beweis des Satzes durch Widerspruch.* Nehme man zunächst an, es gäbe eine Tabelle, für die Satz 4.1 nicht gilt. Nach folgendem Lemma kann man davon ausgehen, dass diese Tabelle wohlgeordnet ist.

**Hilfssatz 4.4.** *Wenn es keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt, so gibt es überhaupt keine Tabellen, für die Satz 4.1 nicht gilt.*

*Beweis des Hilfssatzes.* beweis von diesem lemma (zuerst zeilen umordnen, dann spalten umordnen und gültigkeit von satz 3 ändert sich dabei nicht)  $\square$

Da es nach Lemma 4.4 überhaupt keine Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt, wenn es keine wohlgeordneten gibt, genügt es, zu beweisen, dass es keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt, um zu beweisen, dass es überhaupt keine gibt. Es folgt also ein Widerspruchsbeweis dafür, dass es keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt:

Nehme man für den Widerspruchsbeweis an, es gäbe eine wohlgeordnete, f.p.r.w. Tabelle  $T^*$  mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, wobei  $m < n$ , für die Satz 4.1 nicht gilt; in der es also kein Feld  $(i, j)$  mit  $(i, j)' > 0$  und  $R(i, 1; i, n) > R(1, j; m, j)$  gibt, wobei  $'$  die Feldwert- und  $R$  die Rechtecksfunktion der Tabelle  $T^*$  ist. Dann folgt mit vollständiger Induktion, dass  $R(m - t, 1; m, n) \leq R(1, n - t; m, n)$  für alle  $t$  mit  $0 \leq t < m$ :

*Induktionsanfang ( $t = 0$ ):* Es folgt ein beweis durch Widerspruch. Nehme man hierzu an, es sei nicht  $R(m - t, 1; m, n) \leq R(1, n - t; m, n)$  für  $t = 0$ , also  $R(m, 1; m, n) > R(1, n; m, n)$ . Nach dem ersten Satz von Hilfssatz 4.3 (mit  $i = m$ ,  $j = n$ ,  $b = 0$ ) muss dann auch  $R(m - a, 1; m - a, n) > R(1, n; m, n)$  für alle  $a$  mit  $0 \leq a < m$ , denn nur für diese gibt es eine  $(m - a)$ -te Zeile. Nun sind die Felder  $(m - a, n)$  für  $0 \leq a < m$  genau die Felder der  $n$ -ten Spalte (ein beliebiges Feld der  $n$ -ten Spalte  $(j, n)$  ergibt sich mit  $a = m - j$ , was wegen  $j > 0$  kleiner als  $m$  und wegen  $j \leq m$  nicht negativ sein kann). Natürlich muss in mindestens einem der Felder der  $n$ -ten Spalte eine positive Zahl stehen, da  $T^*$  f.p.r.w. ist. Es gibt also ein Feld  $(j, n)$  mit  $(j, n)' > 0$  und  $R(j, 1; j, n) > R(1, n; m, n)$ . Das stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass für  $T^*$  nicht Satz 4.1 gilt! Da aus  $R(m, 1; m, n) > R(1, n; m, n)$  ein Widerspruch folgt, kann nicht  $R(m, 1; m, n) > R(1, n; m, n)$  sein; es muss also  $R(m, 1; m, n) \leq R(1, n; m, n)$ . Das entspricht  $R(m - t, 1; m, n) \leq R(1, n - t; m, n)$  mit  $t = 0$ , die Aussage gilt also für  $t = 0$ .

*Induktionsschritt:* (Beweis, dass aus der Induktionsannahme,  $R(m - t, 1; m, n) \leq R(1, n - t; m, n)$  für ein  $t$  mit  $0 \leq t < m - 1$ , folgt, dass  $R(m - (t + 1), 1; m, n) \leq R(1, n - (t + 1); m, n)$ ) Nehme man nun an, es sei  $R(m - (t + 1), 1; m - (t + 1), n) > R(1, n - (t + 1); m, n - (t + 1))$ . Dann muss gemäß Hilfssatz 4.3 auch  $R()$

Mit dem Induktionsprinzip (Gültigkeit der Aussage für  $t = 0$  wurde im Induktionsanfang bewiesen, mit dem Induktionsschritt folgt dann Gültigkeit für  $t = 1$ , damit dann auch für  $t = 2, \dots$ , für  $t = m$ ) folgt also, dass  $R(m - t, 1; m, n) \leq R(1, n - t; m, n)$  für alle  $t$  mit  $0 \leq t < m$ . Insbesondere ist also auch  $R(m - t, 1; m, n) \leq R(1, n - t; m, n)$  für  $t = m - 1$ , also  $R(m - (m - 1), 1; m, n) \leq R(1, n - (m - 1); m, n) \Leftrightarrow R(1, 1; m, n) \leq R(1, n - m + 1; m, n)$ . Offensichtlich ist  $R(1, 1; m, n)$  die Summe der Werte aller Felder

der gesamten Tabelle. Denn es ist:

$$\begin{aligned}
 R(1, 1; m, n) = & (1, \quad 1)' + (1, \quad 2)' + \cdots + (1, \quad n)' \\
 & + (2, \quad 1)' + (2, \quad 2)' + \cdots + (2, \quad n)' \\
 & + (3, \quad 1)' + (3, \quad 2)' + \cdots + (3, \quad n)' \\
 & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\
 & + (m-1, 1)' + (m-1, 2)' + \cdots + (m-1, n)' \\
 & + (m, \quad 1)' + (m, \quad 2)' + \cdots + (m, \quad n)'
 \end{aligned}$$

■