Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Runde des 50sten Bundeswettbewerbs Mathematik

Philipp Pascal Schmale

17. August 2020

Inhaltsverzeichnis

Benutzte Hilfsmittel

Für Aufgabe 1 benutzte Hilfsmittel

Für Aufgabe 1 habe ich regelmäßig einen Taschenrechner verwendet. Allerdings habe ich in der endgültigen Fassung darauf geachtet, dass alle Berechnungen auch ohne einen Taschenrechner nachvollziehbar sind. In der Regel habe ich hierzu Fußnoten verwendet. Dann steht in Klammern „Berechnung ohne Taschenrechner“ o.ä. und am Ende ein Superskript mit einer Zahl. Unten auf der Seite sind dann die Inhalte der Fußnoten mit den entsprechenden Zahlen zu finden (Beispiel[1]).

Für Aufgabe 2 benutzte Hilfsmittel

Für sowohl die Findung als auch die Ausarbeitung der Lösung von Aufgabe 2 habe ich keinerlei Hilfsmittel benutzt.

Für Aufgabe 3 benutzte Hilfsmittel

Für sowohl die Findung als auch die Ausarbeitung der Lösung von Aufgabe 3 habe ich keinerlei Hilfsmittel benutzt.

Für Aufgabe 4 benutzte Hilfsmittel

[1]) Hier steht dann die Berechnung oder Berechnungsüberprüfung, die hoffentlich auch ohne Taschenrechner nachvollzihebar ist.

Aufgabe 1

Hinweise zur Notation

$\mathbb{N}_0$ ist die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null, also $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
[g] heißt, dass die Einheit, in der gerechnet wurde, Gramm ist, dies aber ggf. in Zwischenrechnungen nicht angegeben wurde. Es sollte stets klar sein, welche Einheit verwendet wird, da Gramm die einzige ist, die benutzt wird.

Kurze Antwort

Smilla kann mindestens 1.021.615g Gold für sich garantieren.

Beweis (d.h. die etwas längere Antwort)

Z.z. ist also der folgende Satz:

Satz 1. *Die größte Masse an Gold, die Smilla mit Sicherheit mindestens gewinnen kann, ist 1.021.615g.*

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

1. Dem Beweis, dass Smilla stets 1.021.615g Gold gewinnen kann
2. Dem Beweis, dass es keine größere Masse Gold gibt, die Smilla immer gewinnen kann

Lemma 1.1. *Smilla kann stets versichern, dass sie mindestens 1.021.615g Gold gewinnt.*

Beweis. Um mindestens 1.021.615g Gold zu gewinnen, kann Smilla folgenden vierschrittigen Plan verfolgen (wobei die Schritte 2 und 3 ggf. mehrfach eintreten):

1. Die 2020 Gold-Nuggets auf drei Haufen aufteilen, und zwar nach folgendem Schema:
   (a) Auf Haufen 1 kommt jedes Gold-Nugget, dessen Masse in Gramm eine der Formen $4k + 1$ und $4k + 2$ annimmt (für ein $k \in \mathbb{N}_0$). Das sind also die Nuggets mit den Massen 1g ($1 = 4 \cdot 0 + 1$), 2g ($2 = 4 \cdot 0 + 2$), 5g ($5 = 4 \cdot 1 + 1$), 6g ($6 = 4 \cdot 1 + 2$), ..., 2017g ($2017 = 4 \cdot 504 + 1$), 2018g ($2018 = 4 \cdot 504 + 2$).
   (b) Auf Haufen 2 kommt jedes Gold-Nugget, dessen Masse in Gramm eine der Formen $4k$ und $4k + 3$ annimmt (für ein $k \in \mathbb{N}_0$) und dessen Masse nicht 2020g ist. Das sind also die Nuggets mit den Massen 3g ($3 = 4 \cdot 0 + 3$), 4g ($4 = 4 \cdot 1$), 7g ($7 = 4 \cdot 1 + 3$), 8g ($8 = 4 \cdot 2$), ..., 2016g ($2016 = 4 \cdot 504$), 2019g ($2019 = 4 \cdot 504 + 3$).
   (c) Auf „Haufen“ 3 kommt das Nugget mit der Masse 2020g.
2. Wenn Leo die rote Truhe wählt, das leichteste noch verfügbare Nugget von Haufen 1 hineinlegen (das „leichteste“ heißt das mit der kleinsten Masse). Falls von Haufen 1 kein Nugget mehr verfügbar ist, das Nugget mit der Masse 2020g hineinlegen und falls auch das nicht mehr verfügbar ist, das leichteste noch verfügbare Nugget (das dann offensichtlich von Haufen 2 kommen muss) hineinlegen.
3. Wenn Leo die blaue Truhe wählt, das leichteste noch verfügbare Nugget von Haufen 2 hineinlegen. Falls von Haufen 2 kein Nugget mehr verfügbar ist, das Nugget mit der Masse 2020g hineinlegen und falls auch das nicht mehr verfügbar ist, das leichteste noch verfügbare Nugget (das dann offensichtlich von Haufen 1 sein muss) hineinlegen.
4. Wenn alle Nuggets verteilt sind, die Truhe wählen, in der sich das Nugget mit der Masse 2020g befindet.

Anm.: Im Folgenden werde ich Haufen 1, Haufen 2 und Haufen 3 mit H_1 bzw. H_2 bzw. H_3 bezeichnen.

Zunächst muss natürlich (kurz) bewiesen werden, dass die Aufteilung auf die drei Haufen so, wie sie in Schritt 1 beschrieben wurde, überhaupt möglich ist. D.h., dass jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt. Oder: Dass jedes Nugget auf einen Haufen kommt und kein Nugget auf zwei Haufen kommt. Offensichtlich kann jedes Nugget nur einen der Reste 0, 1, 2, 3 haben, wenn man seine Masse in g durch 4 teilt.
Betrachte man zunächst die mit Rest 0: Sie kommen alle bis auf das mit der Masse 2020g auf H_2 und auf keinen anderen (nicht auf H_1, da sie weder einen Rest von 1 noch einen von 2 haben, wenn man ihre Masse in g durch 4 teilt; nicht auf H_3, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt, welches ja in diesem Fall ausgeschlossen wurde). Das mit der Masse 2020g kommt auf H_3 und offensichtlich auch nur auf H_3.
Betrachte man nun die mit Rest 1: Sie kommen ausnahmslos auf H_1 und auf keinen anderen (nicht auf H_2, da sie weder einen Rest von 0 noch von 3 haben, wenn man ihre Massen in g durch 4 teilt; nicht auf H_3, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).
Betrachte man nun die mit Rest 2: Sie kommen alle auf H_1 und auf keinen anderen (nicht auf H_2, da sie weder einen Rest von 0 noch von 3 haben; nicht auf H_3, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).
Und zu guter Letzt betrachte man nun die mit Rest 3: Sie kommen alle auf H_2 (nicht auf H_1, da sie weder einen Rest von 1 noch von 2 haben; nicht auf H_3, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).

Im ersten Schritt wird Smilla also die 2020 Nuggets auf drei Haufen aufteilen, wobei jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt.

Ähnlich zu dem Beweis, dass die Aufteilung tatsächlich möglich ist (also, dass jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt), werde ich hier noch beweisen, dass bei dem Verteilen der Nuggets auf die Truhen nach dem in den Schritten 2 und 3 beschriebenen Schema stets eindeutig ist, welches Nugget Smilla in die von Leo gewählte Truhe legen muss, und, dass dieses Nugget auch stets zur Verfügung steht.

Dies ist jedoch ziemlich offensichtlich. Denn man kann sich die Wahl auch folgendermaßen vorstellen:
Wenn Leo die rote Truhe wählt, geht Smilla im Kopf alle Nuggets (auch die, die schon gelegt wurden) durch, allerdings nicht in irgendeiner Reihenfolge, sondern zunächst vom Leichtesten zum Schwersten von H_1, dann das mit der Masse 2020g, dann vom Leichtesten zum Schwersten von H_2. Dabei nimmt sie dann das Erste, das ihr noch zur Verfügung steht, und legt es in die rote Truhe.
Wenn Leo die blaue Truhe wählt, geht sie auch alle Nuggets durch, allerdings zuerst vom Leichtesten zum Schwersten von H_2, dann das mit der Masse 2020g, dann vom Leichtesten zum Schwersten von H_1.

In beiden Fällen wird, da es keine zwei Nuggets mit der gleichen Masse gibt, eindeutig bestimmt sein, welches Nugget Smilla in die von Leo gewählte Truhe legen muss.

Es bleibt also zu beweisen, dass, wenn alle Nuggets verteilt sind, die Truhe, in der das Nugget mit der Masse 2020g liegt, Nuggets mit einer Gesamtmasse von mindestens 1.021.615g beinhaltet. Denn dann wird Smilla gemäß Schritt 4 diese Truhe wählen und mindestens 1.021.615g Gold gewinnen.

Zunächst berechne man hierzu folgende Werte: die Masse an Gold, die auf H_1 bzw. H_2 (bzw. H_3) liegt, welche ich im Folgenden mit $m(H_1)$ bzw. $m(H_2)$ bzw. $m(H_3)$ bezeichnen werde.

Offensichtlich befindet sich auf H_3 genau ein Nugget (das mit der Masse 2020g). Die Gesamtmasse der Nuggets auf H_3 besteht also nur aus dem Nugget mit der Masse 2020g, also ist $m(H_3) = 2020[\text{g}]$ (von hier an werde ich bei $m(H_1), m(H_2), m(H_3)$ die Einheit g nicht mehr dazuschreiben). Betrachte man nun die noch übrigen Nuggets, also die mit Massen von höchstens 2019g. Diese lassen sich folgendermaßen schreiben (wobei ich „das Nugget mit der Masse“ und die Einheit Gramm weggelassen habe): $4\cdot 0+1, 4\cdot 0+2, 4\cdot 0+3, 4\cdot 1+0, 4\cdot 1+1, 4\cdot 1+2, 4\cdot 1+3, 4\cdot 2+0, 4\cdot 2+1, \ldots, 4\cdot 504+0\ \ (= 2016), 4\cdot 504+1, 4\cdot 504+2, 4\cdot 504+3$. Offensichtlich sind genau 505 von diesen von der Form $4k+1$ (für ein $k \in \mathbb{N}_0$), nämlich $4\cdot 0+1, 4\cdot 1+1, 4\cdot 2+1, \dots, 4\cdot 503+1, 4\cdot 504+1$. Gleichzeitig sind 505 von der Form $4k+2$ (für ein $k \in \mathbb{N}_0$), nämlich $4\cdot 0+2, 4\cdot 1+2, 4\cdot 2+2, 4\cdot 3+2, \dots, 4\cdot 503+2, 4\cdot 504+2$. Es gibt unter den 2019 Nuggets also 505 mit Massen (in g) der Form $4k+1$ und 505 mit Massen (in g) der Form $4k+2$. Nun sind dies aber genau die Nuggets, die auf H_1 kommen. Also sind die 1010 Nuggets, die sich auf H_1 befinden, die mit folgenden Massen (in g): $4\cdot 0+1, 4\cdot 0+2, 4\cdot 1+1, 4\cdot 1+2, 4\cdot 2+1, 4\cdot 2+2, \dots, 4\cdot 503+1, 4\cdot 503+2, 4\cdot 504+1, 4\cdot 504+2$. Die Gesamtmasse dieser Nuggets, also $m(H_1)$, ist also:

$$\begin{aligned}
&m(H_1)\\
=&(4\cdot 0+1)+(4\cdot 0+2)+(4\cdot 1+1)+(4\cdot 1+2)+\cdots+(4\cdot 504+1)+(4\cdot 504+2)\\
=&(4\cdot 0+1)+(4\cdot 1+1)+\cdots+(4\cdot 503+1)+(4\cdot 504+1)\\
&+(4\cdot 0+2)+(4\cdot 1+2)+\cdots+(4\cdot 503+2)+(4\cdot 504+2)\\
=&(4\cdot 0+4\cdot 1+\cdots+4\cdot 503+4\cdot 504)+(1+1+\cdots+1)\\
&+(4\cdot 0+4\cdot 1+\cdots+4\cdot 503+4\cdot 504)+(2+2+\cdots+2)
\end{aligned}$$

Da $4\cdot 0+1, 4\cdot 1+1, \dots, 4\cdot 504+1$ insgesamt 505 Summanden sind, handelt sich bei der Summe $(1+1+\cdots+1)$ in der zweitletzten Zeile um 505 Einer (aus jedem Summanden der oberen Summe wurde ja eine Eins genommen). Da auch $4\cdot 0+2, 5\cdot 1+2, \dots, 4\cdot 504+2$ insgesamt 505 Summanden sind, handelt es sich mit gleicher Begründung bei der Summe $(2+2+\cdots+2)$ in der letzten Zeile um 505 Zweier. Es ist also:

$$\begin{aligned}
&m(H_1)\\
=&4\cdot(0+1+2+3+\cdots+504)+(505\cdot 1)\\
&+4\cdot(0+1+2+3+\cdots+504)+(505\cdot 2)\\
=&4\cdot\left(\frac{504\cdot(504+1)}{2}\right)+505+4\cdot\left(\frac{504\cdot(504+1)}{2}\right)+2\cdot 505\\
=&2\cdot 504\cdot 505+505+2\cdot 504\cdot 505+2\cdot 505\\
=&1008\cdot 505+505+1008\cdot 505+2\cdot 505=(1008+1+1008+2)\cdot 505\\
=&(2016+3)\cdot 505=2019\cdot 505=1.019.595
\end{aligned}$$

(Berechnung von $2019\cdot 505$ ohne Taschenrechner[2])
Anm.: Zur Berechnung von $0+1+2+3+\cdots+504$ habe ich die aus der Schule bekannte Gaußsche Summenformel verwendet, nach welcher $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$, also hier (mit $n=504$): $0+1+2+3+\cdots+504=1+2+3+\cdots+504=\frac{504\cdot(504+1)}{2}$.

Es ist also $m(H_1)=1.019.595$ und $m(H_3)=2020$. Gleichzeitig ist aber, da jedes der Nuggets auf einem der drei Haufen, allerdings keines auf zweien landet, die Gesamtmasse der drei Haufen gleich der Gesamtmasse aller Nuggets; d.h.: $m(H_1)+m(H_2)+m(H_3)=1+2+3+\cdots+2019+2020=\frac{2020\cdot 2021}{2}=2.041.210$ (nach der Gaußschen Summenformel mit $n=2020$; Berechnung ohne Taschenrechner[3]). Es ist also $m(H_2)=2.041.210-m(H_1)-m(H_2)=2.041.210-1.019.595-2020=1.019.595$ (Überprüfung der Berechnung ohne Taschenrechner[4])

Die berechneten Werte sind also: $m(H_1)=1.019.595, m(H_2)=1.019.595, m(H_3)=2020$.

Nun ist in den Regeln des Spiels festgelegt, dass erst aufgehört wird, wenn alle Nuggets in einer der beiden Truhen liegen. Also muss auch das Nugget mit der Masse 2020g in einer der beiden Truhen liegen. Um nicht zu allgemein formulieren zu müssen (was vermutlich unverständlicher wäre), kann man die beiden Fälle einzeln betrachten:

[2]) $2019\cdot 505=2019\cdot 1010\cdot\frac{1}{2}=(2019\cdot 1000+2019\cdot 10)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2.019.000+20.190)=1.009.500+10.095=1.019.595$

[3]) $\frac{2020\cdot 2021}{2}=1010\cdot 2021=1000\cdot 2021+10\cdot 2021=2.021.000+20.210=2.041.210$

[4]) $2.041.210-1.019.595-2020=1.019.595 \Leftrightarrow 2.041.210-2020=2\cdot 1.019.595=2.039.190 \Leftrightarrow 2.041.210=2.039.190+2020=2.039.210+2000=2.041.210$

Fall 1: Das Nugget mit der Masse 2020g landet in der roten Truhe. Offensichtlich können dann zu dem Zeitpunkt, zu dem Smilla das Nugget mit der Masse 2020g in die rote Truhe legt, noch keine Nuggets von H_1 in der blauen Truhe liegen. Denn wann immer sie eines hätte legen können (also wann immer Leo die blaue Truhe gewählt hat), hätte sie auch noch das mit der Masse 2020g legen können (da sie es jetzt zur Verfügung hat, hätte sie es zu diesem früheren Zeitpunkt auch zur Verfügung gehabt), was sie dann gemäß Schritt 3 zunächst hätte tun müssen. Es liegt also kein Nugget von H_1 in der blauen Truhe. Da sie aber auch kein Nugget von H_1 mehr zur Verfügung hat (sonst müsste sie das zuerst legen, wenn Leo die rote Truhe wählt), müssen alle Nuggets von H_1 bereits in einer der beiden Truhen liegen. Weil diese Truhe nicht die blaue sein kann (in ihr liegen ja keine Nuggets von H_1), müssen also alle Nuggets von H_1 in der roten Truhe liegen.

Fall 2: Das Nugget mit der Masse 2020g landet in der blauen Truhe. Offensichtlich können dann zu dem Zeitpunkt, zu dem sie das Nugget mit der Masse 2020g in die blaue Truhe legt, noch keine Nuggets von H_2 in der roten Truhe liegen. Denn wann immer sie eines hätte legen können (also wann immer Leo die rote Truhe gewählt hat), hätte sie auch noch das mit der Masse 2020g legen können (da sie es jetzt zur Verfügung hat, hätte sie es zu diesem früheren Zeitpunkt auch zur Verfügung gehabt), was sie dann gemäß Schritt 2 zunächst hätte tun müssen. Es liegt also kein Nugget von H_2 in der roten Truhe. Da sie aber auch kein Nugget von H_2 mehr zur Verfügung hat (sonst müsste sie das zuerst legen, wenn Leo die blaue Truhe wählt), müssen alle Nuggets von H_2 bereits in einer der beiden Truhen liegen. Weil diese Truhe nicht die rote sein kann (in ihr liegen ja keine Nuggets von H_2), müssen also alle Nuggets von H_2 in der blauen Truhe liegen.

Wenn das Nugget mit der Masse 2020g in der roten Truhe landet, müssen in ihr also auch alle Nuggets von H_1 sein, und wenn es in der blauen Truhe liegt, müssen in dieser auch alle Nuggets von H_2 liegen. In erstem Fall hat also die rote Truhe eine Gesamtmasse von mindestens $m(H_1) + 2020 = 1.021.615[g]$, da in ihr alle Nuggets von H_1 (die eine Gesamtmasse von $m(H_1)$ haben) und das mit der Masse 2020g liegen. In letzterem Fall muss die blaue Truhe eine Gesamtmasse von mindestens $m(H_2) + 2020 = 1.021.615[g]$ haben, da in ihr alle Nuggets von H_2 (die eine Gesamtmasse von $m(H_2)$ haben) und das mit der Masse 2020g liegen. (Berechnungen von $m(H_1) + 2020$ und $m(H_2) + 2020$ ohne Taschenrechner[5])

In beiden Fällen beinhaltet also die Truhe, in der das Nugget mir der Masse 2020g liegt, Gold mit einer Gesamtmasse von mindestens 1.021.615g. Wenn Smilla dann gemäß Schritt 4 diese Truhe, in der das Nugget mit der Masse 2020g liegt, wählt, wählt sie stets eine mit mindestens 1.021.615g Gold.

Smilla kann also stets mit Sicherheit mindestens 1.021.615g Gold gewinnen! □

Lemma 1.2. *Leo kann stets verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt.*

Beweis. Dieser Beweis ist recht simpel, da Leo, um zu verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt, einfach folgenden zweischrittigen Plan verfolgen kann:

1. Solange die blaue Truhe wählen, bis in ihr insgesamt mehr als 1.019.595g Gold sind.

2. Sobald in der blauen Truhe mehr als 1.019.595g Gold sind, nur noch die rote Truhe wählen.

Am Ende sind damit in der blauen Truhe auf jeden Fall mindestens 1.019.595g Gold. Wie im Beweis von Lemma 1.1 berechnet, ist die Gesamtmasse der 2020 Nuggets 2.041.210g. Wenn also in der blauen Truhe mindestens 1.019.595g Gold sind, können in der roten Truhe nur noch höchstens 2.041.210g − 1.019.595g = 1.021.615g Gold sein(Überprüfung der Berechnung ohne Taschenrechner[6]).

[5]) $m(H_1)+2020 = 1.019.595+2020 = 1.019.615+2000 = 1.021.615$ und $m(H_2)+2020 = 1.019.595+2020 = m(H_1) + 2020 = 1.021.615$

[6]) $2.041.210 - 1.019.595 = 1.021.615 \Leftrightarrow 2.041.210 = 1.021.615 + 1.019.595 = 2.021.615 + 19.595 = 2.031.615 + 9.595 = 2.040.615 + 595 = 2.041.115 + 95 = 2.041.210$

Offensichtlich kann Smilla in einem Zug nur maximal 2020g Gold in eine der beiden Truhen legen. Wenn nun irgendwann mehr als 1.021.615g Gold in der blauen Truhe wären, muss es einen Zug geben, in dem Smilla das Nugget in die Truhe legt, das dafür sorgt, dass die Gesamtmasse der in der blauen Truhe befindlichen Nuggets größer als 1.021.615g ist. Dieses Nugget kann höchstens 2020g wiegen. Bevor sie das Nugget hineinlegt, müssten sich also schon Nuggets in der Truhe befinden, die eine Gesamtmasse von mehr als 1.021.615g − 2020g = 1.019.595g haben (Überprüfung ohne Taschenrechner[7]), denn sonst würden die zusätzlichen maximal 2020g nicht genügen, um die Gesamtmasse über 1.021.615g zu bringen. Wenn sich aber bereits mehr als 1.019.595g Gold in der blauen Truhe befunden hätten, hätte Leo – gemäß seinem Plan – die rote Truhe gewählt; Smilla hätte also gar kein Nugget mehr in die blaue Truhe legen können! Wenn Leo seinen simplen Plan verfolgt, kann es also nicht passieren, dass sich in der blauen Truhe mehr als 1.021.615g Gold befinden.

Es können sich also weder in der blauen noch in der roten Truhe mehr als 1.021.615g Gold befinden. Demnach kann Smilla natürlich auch keine Truhe wählen, in der sich mehr als 1.021.615g Gold befinden. Leo kann also stets verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt! □

Smilla kann also nach Lemma 1.1 stets 1.021.615g Gold gewinnen. Allerdings kann sie keine größere Masse Gold mit Sicherheit gewinnen, denn das kann Leo nach Lemma 1.2 stets verhindern. Die gröte Masse an Gold, die Smilla mit Sicherheit gewinnen kann, ist also 1.021.615g. ■

[7]) $1.021.615 - 2020 = 1.019.5959 \Leftrightarrow 1.021.615 = 1.019.595 + 2020 = m(H_1) + 2020$, s. Fußnote 4

Aufgabe 2

Hinweise zur Darstellung

$\gcd(\alpha, \beta)$ steht für den größten gemeinsamen Teiler (engl.: greatest common divisor) der Zahlen α und β. Also ist z.B. $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ äquivalent zu „α und β sind teilerfremd“.
„O.B.d.A.“ (oder mitten im Satz „o.B.d.A.“) ist kurz für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.
$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.
$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen (ohne die 0) und $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen mit der 0.
$\alpha \mid \beta$ heißt, dass α ein Teiler von β, also β ein Vielfaches von α ist.

Lösung von Aufgabe 2

Die in Aufgabe 2 zu zeigende Aussage habe ich in folgenden Satz „umformuliert“:

Satz 2. *Es gibt keine drei Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Q}$ mit $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.*

Beweis. Es folgt ein Beweis durch Widerspruch. Nehme man hierzu an, es gäbe drei Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Q}$, die beide Gleichungen erfüllen. Offenbar können nicht alle drei Zahlen x, y, z nicht-positiv und auch nicht alle drei Zahlen x, y, z nicht-negativ sein, denn damit dann $x + y + z = 0$ erfüllt wäre, müsste $x = y = z = 0$, was der zweiten Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ widerspricht. Es sind also entweder zwei der drei Zahlen x, y, z nicht-negativ und eine nicht-positiv oder es sind zwei nicht-positiv und eine nicht-negativ. Unter der Annahme, dass es ein Lösungstripel x, y, z gibt, müsste es auch eines mit zwei nicht-negativen und einer nicht-positiven Zahl geben. Denn zu jedem Lösungstripel x, y, z, dass zwei nicht-positive Zahlen und eine nicht-negative Zahl beinhaltet, gibt es ein Lösungstripel $-x, -y, -z$ (das, wenn x, y, z hinreichend für die beiden Gleichungen ist, dies offensichtlich ebenfalls ist), das dann zwei nicht-negative Zahlen und eine nicht-positive Zahl beinhaltet. Wenn es also überhaupt Lösungstripel gibt (wovon ja für den Widerspruchsbeweis ausgegangen wurde), so muss es also auch welche mit zwei nicht-negativen Zahlen und einer nicht-positiven Zahl geben. Sei nun x, y, z ein solches Tripel und sei o.B.d.A. z die nicht-positive Zahl (ansonsten benenne man einfach um, die Gleichungen ändern dadurch ihre Form nicht). Es ist also $z \leq 0$ und $x, y \geq 0$. Da x, y nicht-negative rationale Zahlen sind, muss es vier Zahlen $a', b', c', d' \in \mathbb{N}_0$ $(b, d \neq 0)$ geben, für die $x = \frac{a'}{b'}$ und $y = \frac{c'}{d'}$. Sei nun $\frac{a}{b}$ die vollständig gekürzte Form des Bruches $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{d}$ die des Bruches $\frac{c'}{d'}$. D.h., es ist $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$ mit $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$. Nun ist wegen $x + y + z = 0$ offenbar $z = -x - y = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = -\frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = -\frac{ad+cb}{db}$. Damit gilt dann wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 100$:

$$
\begin{aligned}
100 = x^2 + y^2 + z^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(-\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot b}{d \cdot b}\right)^2 + \left(\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
&= \frac{(ad)^2}{(db)^2} + \frac{(cb)^2}{(db)^2} + \frac{(ad)^2 + 2abcd + (cb)^2}{(db)^2} \\
&= \frac{2\left((ad)^2 + abcd + (cb)^2\right)}{(db)^2} \qquad \| \cdot \frac{(db)^2}{2} \\
\iff 50 \cdot (db)^2 &= (ad)^2 + abcd + (cb)^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Sei nun $\gcd(b, d) = t$ und seien die dann natürlichen Zahlen $\frac{b}{t}$ und $\frac{d}{t}$ mit p bzw. q

bezeichnet. p und q sind dann teilerfremde natürliche Zahlen. Wenn man nun $b = pt$ und $d = qt$ in (1) einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} & 50 \cdot (db)^2 = (ad)^2 + abcd + (cb)^2 \\ &= 50 \cdot p^2t^2 \cdot q^2t^2 = a^2 \cdot q^2t^2 + ac \cdot pt \cdot qt + c^2 \cdot p^2t^2 \quad \| \cdot \frac{1}{t^2} \\ \iff & 50 \cdot t^2 \cdot p^2q^2 = a^2q^2 + acpq + c^2p^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Nun ist in (2) offensichtlich die linke Seit durch p und durch q teilbar, also muss es die rechte Seite auch sein. Der mittlere Summand $acpq$ muss dabei nicht beachtet werden, schließlich ist er bereits durch sowohl p als auch q teilbar. Es muss also $p \mid a^2q^2 + c^2p^2$ und $q \mid a^2q^2 + c^2p^2$. Aus $p \mid a^2q^2 + c^2p^2$ folgt wegen $p \mid c^2p^2$ offenbar, dass $p \mid a^2q^2$, während aus $q \mid a^2q^2 + c^2p^2$ wegen $q \mid a^2q^2$ folgt, dass $q \mid c^2p^2$. Es gilt also:

$$p \mid a^2q^2 \text{ und } q \mid c^2p^2$$

Da aber p und q teilerfremd sind, folgt direkt:

$$p \mid a^2 \text{ und } q \mid c^2 \iff \frac{b}{t} \mid a^2 \text{ und } \frac{d}{t} \mid c^2$$

Nun sind aber a und b teilerfremd, d.h. kein Teiler von b (was $\frac{b}{t}$ ja ist) außer 1 kann a bzw. a^2 teilen. Es muss also $\frac{b}{t} = 1$ und damit $b = t$. Da auch q und c teilerfremd sind, folgt mit gleicher Begründung, dass $d = t$. Damit ist dann $b = d$. Setzt man dies in (1) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 50 \cdot b^2 \cdot b^2 = a^2b^2 + ac \cdot b^2 + c^2b^2 \quad \| \cdot \frac{1}{b^2} \\ \iff & 50b^2 = a^2 + ac + c^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Nun ist die linke Seite von (3) offensichtlich gerade und damit muss es die rechte auch sein. Wenn nun aber beide Zahlen a, c ungerade sind, so sind alle drei Summanden ungerade (das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets eine ungerade Zahl) und damit dann die gesamte rechte Seite ungerade. Es muss also mindestens eine der beiden Zahlen gerade sein. Wenn nun aber nur genau eine gerade ist, so ist auch das Quadrat dieser und ac gerade, jedoch nicht das Quadrat der anderen dann ungeraden Zahl. Die rechte Seite wäre die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl, also auch ungerade. Da nicht beide und nicht genau eine der beiden Zahlen ungerade sein können, müssen beide gerade sein. D.h., es gibt zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$, für die $a = 2r$ und $c = 2s$ ist. Setzt man dies in (3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 50b^2 = (2r)^2 + (2r)(2s) + (2s)^2 = 4\left(r^2 + rs + s^2\right) \quad \| \cdot \frac{1}{2} \\ \iff & 25b^2 = 2\left(r^2 + rs + s^2\right) \end{aligned}$$

Da nun $25b^2$ anscheinend eine gerade Zahl ist (schließlich ist $2\left(r^2 + rs + s^2\right)$ offensichtlich gerade), muss (da 25 ungerade ist) b^2 und damit b erade sein. Nun sind also sowohl a also auch b gerade, d.h. durch 2 teilbar. a und b haben also den gemeinsamen Teiler 2. Dies stellt aber einen Widerspruch zu $\gcd(a, b) = 1$ dar! Denn offensichtlich ist ihr größter gemeinsame Teiler nicht 1, wenn 2 ein gemeinsamer Teiler von a und b ist. Dies vervollständigt dann den Widerspruchsbeweis von Satz 2. ■

Aufgabe 3

Anmerkungen zur Notation und einer häufig verwendeten Formel

Im Folgenden wird x_A die x- und y_A die y-Koordinate des allgemeinen Punktes A bezeichnen. D.h. hier, dass $P = (x_P, y_P), N = (x_N, y_N), M = (x_M, y_M), S = (x_S, y_S), Q = (x_Q, y_Q)$.
$\overline{AB}$ ist die Distanz von A zu B (stets positiv).

Sehr oft habe ich die Distanzformel

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ (für alle } A, B)$$

verwendet. Ich habe bei den Gleichungen, bei denen ich sie verwendet habe, nicht dazugeschrieben, dass sich die Gleichungen mit der Distanzformel ergeben. Diese Entscheidung habe ich getroffen, da ich diese Formel so oft verwendet habe, dass, wenn ich sie jedes mal erwähnt hätte, dies einige Sätze deutlich komplizierter und teilweise sogar relativ unverständlich gemacht hätte. Ich denke, dass dies nicht problematisch ist; ich habe ja auch nicht dazugeschrieben, wenn ich z.B. einen Bruch gekürzt habe.

Algebraisierung der Aufgabe mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems

Um die Aufgabe von einer Geometrischen in eine eher Algebraische zu übersetzen, habe ich mich dazu entschieden, die in der Aufgabenstellung beschriebene Konstruktion mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems zu beschreiben. Hierzu definiere man folgendermaßen ein kartesisches Koordinatensystem: P sei der Urspung und n die x-Achse; dabei sei die x-Achse so beschriftet, dass der Punkt N eine positive x-Koordinate hat, bevor er P passiert, und die y-Achse so, dass der Punkt M eine positive y-Koordinate hat, bevor er P passiert. Dies ist offensichtlich möglich, da P auf n liegt. Offensichtlich ist auch die Beschriftung der y-Achse (also der Orthogonalen zu n, die durch P geht) möglich, denn die Geraden m und n liegen nicht aufeinander (sonst würden sie sich in mehr als einem Punkt schneiden); der Punkt M muss also, bevor er P passiert, auf einer Seite der x-Achse liegen.

Der Punkt N hat, da er auf n, also der x-Achse, liegt, natürlich eine y-Koordinate von 0. Es ist also: $N = (x_N, 0)$. Sei nun d_M die Distanz $\overline{PM}$, allerdings mit negativem Vorzeichen, wenn y_M ein negatives Vorzeichen hat, also nachdem M den Punkt P passiert hat. Nun ist x_N wegen $y_N = 0$ die Distanz $\overline{PN}$, allerdings mit negativem Vorzeichen, nachdem N den Punkt P passiert hat. Offensichtlich ist dann, da N und M sich mit der gleichen, konstanten Geschwindigkeit von P weg/zu P hin bewegen, $d_M - x_N$ konstant. Sei diese Konstante mit c bezeichnet. Dann ist $d_M - x_N = c \Leftrightarrow d_M = x_N + c$ und damit $\overline{PM} = |x_N + c|$. Nun ist $|x_N + c| = \overline{PM} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$, da $y_P = x_P = 0$. Die Gerade m ist, da sie durch P, den Urspung des kartesischen Koordinatensystems, geht, natürlich eine Urspungsgerade. Im Folgenden werde ich nur die Fälle betrachten, in denen m nicht auf der y-Achse liegt, also nicht orthogonal zu n ist. Dann hat m eine reele Steigung, die nicht Null ist, da m sonst auf n liegen würde, was einen Widerspruch dazu darstellt, dass m und n sich nur in einem Punkt P schneiden. Diese Steigung wird im Folgenden r genannt. Die Geradengleichung von m ist also: $y = r \cdot x$ bzw. $x = \frac{y}{r}$. Da M auf m liegt, muss $x_M = \frac{y_M}{r}$ gelten. Zusammen mit $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$ ergibt das dann: $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{(\frac{y_M}{r})^2 + y_M^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} \cdot y_M^2 + y_M^2} = \sqrt{(1 + \frac{1}{r^2}) \cdot y_m^2} = |y_M| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}$. Da aber y_M das gleiche Vorzeichen wie $d_M = x_N + c$ hat, sind die Betragsstriche nicht notwendig:

$$\begin{aligned} x_N + c &= y_M \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \\ \Leftrightarrow y_M &= \frac{x_N + c}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} &&= \frac{r \cdot (x_N + c)}{r \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} \\ &= \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)}} &&= \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \end{aligned}$$

Es ist also: $y_M = \frac{r(x_N+c)}{\sqrt{r^2+1}}$.
Nun ist $x_M = \frac{y_M}{r}$, also mit $y_M = \frac{r(x_N+c)}{\sqrt{r^2+1}}$:

$$x_M = \frac{1}{r} \cdot y_M = \frac{1}{r} \cdot \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} = \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

Es ist also:

$$M = \left(\frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)$$

Die Punkte P, N, M haben also folgende Koordinaten, wenn m nicht orthogonal zu n ist:

$$P = (0, 0); N = (x_N, 0); M = \left(\frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)$$

Wenn m orthogonal zu n ist, also m auf der y-Achse liegt, hat M natürlich eine x-Koordinate von 0. Es gilt aber immer noch $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$, was mit $x_M = 0$ dann $|x_N + c| = \sqrt{y_M^2} = |y_M|$ ergibt. Da y_M das gleiche Vorzeichen wie $d_M = x_N + c$ hat, gilt die Gleichung auch ohne die Betragsstriche; es ist also $y_M = x_N + c$. Zusammen mit $x_M = 0$ ist dann also, wenn m orthogonal zu n ist, $M = (0, x_N + c)$.

Beweis der zu zeigenden Aussage

Nun muss nur noch bewiesen werden, dass es einen Punkt Q gibt, sodass P, M, N, Q stets auf einem Kreis liegen. Es muss also stets einen Punkt S geben, von dem P, M, N, Q den Gleichen Abstand haben.

Folgender Satz wird später hilfreich sein:

Satz 3. *$x_A^2 + y_A^2 = 2x_Ax_S + 2y_Ay_S$ ist äquivalent zu $\overline{AS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ für alle Punkte $A = (x_A, y_A), S = (x_S, y_S)$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich direkt durch Umformen:

$$\begin{aligned} \overline{AS} = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2} &= \sqrt{x_S^2 + y_S^2} && \|(\ldots)^2 \\ \Leftrightarrow (x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2 &= x_S^2 + y_S^2 && \|\text{2. Binomische Formel} \\ \Leftrightarrow (x_A^2 - 2x_Ax_S + x_S^2) + (y_A^2 - 2y_Ay_S + y_S^2) &= x_S^2 + y_S^2 && \| - x_S^2 - y_S^2 \\ \Leftrightarrow x_A^2 - 2x_Ax_S + y_A^2 - 2y_Ay_S &= 0 && \| + 2x_Ax_S + 2y_Ay_S \\ \Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 &= 2x_Ax_S + 2y_Ay_S \end{aligned}$$

■

Der folgende Satz beschäftigt sich nur mit dem Fall „m orthogonal zu n“:

Satz 4. *Die Punkte P, M, N haben stets den gleichen Abstand zu einem Punkt S wie der Punkt $Q \neq P$, wenn m orthogonal zu n ist. Hierbei ist $S = \left(\frac{x_N}{2}, \frac{x_N+c}{2}\right)$ und $Q = \left(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$.*

Beweis. Wenn $P = Q$ wäre, wäre offensichtlich auch $x_P = x_Q$, also $x_Q = 0$. Dann wäre aber auch $c = 0$ und damit $d_M = x_N + c = x_N$. Wenn N den Punkt P passiert, also $x_N = 0$ ist, wäre also auch $d_M = 0$ und damit auch $|d_M| = \overline{PM} = 0$. Damit würden aber M und N beide auf P liegen, also würden M und N gleichzeitig den Punkt P passieren, was ja nicht sein kann. Also muss $P \neq Q$ sein. Auch bewegt sich Q offensichtlich nicht, da c und damit auch $\frac{c}{2}$ und $-\frac{c}{2}$ konstant sind.

Zunächst werde ich ein paar Gleichungen in den folgenden Lemmata beweisen, aus denen dann mit Satz 3 direkt die Korollare folgen:

Lemma 4.1. *Es ist $x_P^2 + y_P^2 = 2x_Px_S + 2y_Py_S$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich direkt durch Umformen:

$$\begin{aligned} x_P^2 + y_P^2 &= 0^2 + 0^2 \\ &= 0 = 2 \cdot 0 \cdot x_S + 2 \cdot 0 \cdot y_S = 2x_Px_S + 2y_Py_S \end{aligned}$$

□

Korollar 4.1.1. *Mit Satz 3 folgt aus Lemma 4.1 direkt: $\overline{PS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.*

Lemma 4.2. *Es ist $x_M^2 + y_M^2 = 2x_Mx_S + 2y_My_S$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich direkt durch Umformen:

$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 &= 0^2 + (x_N + c)^2 = 0 + 2 \cdot \frac{(x_N + c)^2}{2} = 0 + 2 \cdot (x_N + c) \cdot \frac{x_N + c}{2} \\ &= 2 \cdot 0 \cdot \frac{x_N}{2} + 2 \cdot y_M \cdot y_S = 2x_Mx_S + 2y_My_S \end{aligned}$$

□

Korollar 4.2.1. *Mit Satz 3 folgt aus Lemma 4.2 direkt: $\overline{MS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$*

Lemma 4.3. *Es ist $x_N^2 + y_N^2 = 2x_Nx_S + 2y_Ny_S$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich direkt durch Umformen:

$$\begin{aligned} x_N^2 + y_N^2 &= x_N^2 + 0^2 = x_N^2 + 0 = 2 \cdot \frac{x_N^2}{2} + 0 = 2x_N\frac{x_N}{2} + 0 \\ &= 2x_Nx_S + 2 \cdot 0 \cdot \frac{x_N + c}{2} = 2x_Nx_S + 2y_Ny_S \end{aligned}$$

□

Korollar 4.3.1. *Mit Satz 3 folgt aus Lemma 4.3 direkt: $\overline{NS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.*

Lemma 4.4. *Es ist $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Qx_S + 2y_Qy_S$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich direkt durch Umformen:

$$\begin{aligned} x_Q^2 + y_Q^2 &= \left(-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} \\ &= 2 \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2} = 0 \cdot \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} = (-x_N + x_N)\frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} \\ &= -x_N\frac{c}{2} + x_N\frac{c}{2} + c \cdot \frac{c}{2} = x_N\left(-\frac{c}{2}\right) + (x_N + c)\frac{c}{2} \\ &= 2\frac{x_N}{2}\left(-\frac{c}{2}\right) + 2\frac{x_N + c}{2}\frac{c}{2} = 2x_Sx_Q + 2y_Sy_Q \\ &= 2x_Qx_S + 2y_Qy_S \end{aligned}$$

□

Korollar 4.4.1. *Mit Satz 3 folgt aus Lemma 4.4 direkt: $\overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$*

Aus den Korollaren 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 und 4.4.1 folgt direkt: $\overline{PS} = \overline{MS} = \overline{NS} = \overline{QS}$, da sie alle gleich $\sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ sind. Die Punkte P, M, N, Q haben also alle den gleichen Abstand zu S, wenn m orthogonal zu n ist. ■

Wenn n orthogonal zu m ist, gibt es also eine Punkt Q, der sich nicht bewegt, sodass P, M, N, Q den gleichen Abstand zu einem Punkt S haben, also auf einem Kreis liegen.

Nun muss noch bewiesen werden, dass es auch einen solchen Punkt Q gibt, wenn m nicht orthogonal zu m ist:

Satz 5. *Wenn m nicht orthogonal zu n ist, haben die Punkte P, M, N den gleichen Abstand zu einem Punkt S wie ein Punkt $Q \neq P$*

Aufgabe 4

Vorbemerkungen zu meiner Lösung von Aufgabe 4

Einführung hilfreicher Begriffe

Seien zunächst folgende Begriffe eingeführt, die den Beweis hoffentlich kürzer, aber auch leichter lesbar machen:
Mit einer „proportionierten Tabelle“ ist eine Tabelle gemeint, die mehr Spalten als Zeilen hat.
Mit einer „fast-positiv-reell-wertigen Tabelle“ ist eine Tabelle gemeint, für die in jeder ihrer Felder eine nicht-negative reelle Zahl steht, und dabei in jeder Spalte der Tabelle mindestens eine Positive.
Mit n_T ist die Anzahl der Spalten der Tabelle T gemeint.
Mit m_T ist die Anzahl der Zeilen der Tabelle T gemeint.
Mit (i,j), wobei $1 \leq i \leq m_T$ und $1 \leq j \leq n_T$, ist das Feld in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Tabelle T gemeint (wichtig ist natürlich, dadss hierbei immer klar ist, welche Tabelle T gerdade betrachtet wird).
Wenn $'$ die Feldwertfunktion der Tabelle T ist, ist mit $(i,j)'$, wobei $1 \leq i \leq m_T$ und $1 \leq j \leq n_T$, der Wert, der im Feld (i,j) steht, gemeint.
Wenn R die Rechtecksfunktion der Tabelle T ist, dann ist mit $R(a_1,a_2;b_1,b_2)$, wobei $1 \leq a_1 \leq b_1 \leq m_T$ und $1 \leq a_2 \leq b_2 \leq n_T$, die folgende Summe gemeint (bei der $'$ wieder die Feldwertfunktion von T ist):

$$\begin{aligned}
R(a_1,a_2;b_1,b_2) = &(a_1, \quad a_2)' + (a_1, \quad a_2+1)' + \quad \cdots \quad + (a_1, \quad b_2)' \\
&(a_1+1, a_2)' + (a_1+1, a_2+1)' + \quad \cdots \quad + (a_1+1, b_2)' \\
&(a_1+2, a_2)' + (a_1+2, a_2+1)' + \quad \cdots \quad + (a_1+2, b_2)' \\
&\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&(b_1-1, a_2)' + (b_1-1, a_2+1)' + \quad \cdots \quad + (b_1-1, b_2)' \\
&(b_1, \quad a_2)' + (b_1, \quad a_2+1)' + \quad \cdots \quad + (b_1, \quad b_2)
\end{aligned}$$

Mit einer „spaltenweise geordneten“ bzw. „zeilenweise geordneten Tabelle“ T ist eine Tabelle gemeint, für die stets $S(j) \geq S(j+1)$, wobei $1 \leq j < n_T$, bzw. für die stets $Z(i) \geq Z(i+1)$, wobei $1 \leq i < m_T$.
Eine Tabelle, die zeilenweise und spaltenweise geordnet ist, sei kurz auch mit „wohlgeordnet“ bezeichnet.

Die tatsächliche Lösung von Aufgabe 4

Satz 6. *In jeder proportionierten und fast-positiv-reell-wertigen Tabelle T gibt es ein Feld $T(i,j)$, wobei $1 \leq i \leq m_T$ und $1 \leq j \leq n_T$, sodass $f(i,j) > 0$ und $Z(i) > S(j)$, wobei f, S, Z die Feld- bzw. Spalten- bzw. Zeilenwertfunktionen von T sind.*

Beweis. Um den Kern des Beweises besser erkennbar zu machen, lohnt es sich, zunächst ein paar Lemmata zu beweisen:

Lemma 6.1. *Wenn es keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 6 nicht gilt, so gibt es überhaupt keine Tabellen, für die Satz 6 nicht gilt.*

Beweis. beweis von diesem lemma (zuerst zeilen umordnen, dann spalten umordnen und gültigkeit von satz 3 ändert sich dabei nicht) □

Lemma 6.2. *Wenn in einer wohlgeordneten Tabelle T für zwei Zahlen i,j, wobei $1 \leq i \leq m_T$ und $1 \leq j \leq n_T$, $Z(i) > S(j)$ gilt, so gilt auch $Z(i-a) > S(j+b)$ für alle a,b mit $0 \leq a < i$ und $0 \leq b \leq n_T - j$. Umgekehrt folgt aus $Z(i) \leq S_T(j)$, dass für alle c,d mit $0 \leq c \leq m_T$ und $0 \leq d < j$ gilt: $Z(i+c) \leq S(j-d)$.*

Beweis. beweis für dieses lemma (folgt direkt aus wohlgeordnetheit von T) □

Nun folgt das Herzstück dieses Beweises, denn sobald dieses bewiesen ist, folgt Satz 6 quasi von selbst mit vollständiger Induktion:

Lemma 6.3. *Wenn es eine wohlgeordnete fast-positiv-reelwertige Tabelle gibt, für die Satz 6 nicht gilt, so*

Beweis. Nehme man zunächst an, T^* sei eine solche Tabelle mit $m_{T^*} = m^*$ Zeilen und $n_{T^*} n^*$ Spalten.
Induktionsanfang ($t = 0$): Wenn $S^*(n^*) < Z^*(m^*)$ wäre, müsste nach Lemma 6.2 auch $S^*(n^*) < Z^*(m^* - a)$ für alle a mit $0 \leq a \leq m$ gelten. Da T^* aber eine Tabelle sein soll, für die Satz 6 nicht gilt, müssten dann alle Felder $T^*(m^* - a, n^*)$ den Wert 0 haben. Da dies aber alle Felder der n^*-ten Spalte sind, müssten sie gleichzeitig auch mindestens ein Feld mit einem positiven Wert haben (T^* ist ja fast-positiv-reell-wertig). Da aus der Annahme $S^*(n^*) < Z^*(m)$ also ein Widerspruch folgt, muss gelten: $S^*(n^* - t) \leq Z^*(m^* - t)$ für $t = 0$.
Induktionsschritt (von t zu $t + 1$): (Unter der Induktionsannahme, dass $S^*(n^* - r) \geq Z^*(m^* - r)$ für alle r mit $0 \leq r \leq t$) Nehme man nun an, dass $S^*(n^* - (t + 1)) < Z^*(m^* - (t + 1))$. Da T^* wohlgeordnet und fast-positiv-reell-wertig ist, folgt dann aus Lemma 6.2, dass auch $S^*(n^* - (t + 1) + b) < Z^*(m^* - (t + 1) - a)$ für alle a, b mit $0 \leq a \leq m^* - (t + 1)$ und $0 \leq b \leq t + 1$. Nun würde aber für T^* Satz 6 gelten, wenn es zwei Zahlen a', b' mit $0 \leq a' \leq m^* - (t + 1)$ und $0 \leq b' \leq t + 1$ geben würde, für die $f^*(m^* - (t + 1) - a', n^* - (t + 1) + b') > 0$, denn für diese wäre dann ja auch $S^*(n^* - (t+1) + b) < Z^*(m^* - (t+1) - a)$. Da die Tabelle T^* aber ein Gegenbeispiel für Satz 6 darstellen soll, kann das nicht sein und es muss damit für alle a, b mit $0 \leq a \leq m^* - (t+1)$ und $0 \leq b \leq t + 1$ gelten: $f^*(m^* - (t + 1) - a, n^* - (t + 1) + b) = 0$, wobei f^* die Feldwertfunktion von T^* ist. Sei nun $A = m^* - (t + 1) - a$ und $B = (t + 1) - b$, dann muss wegen $0 \leq a \leq m^* - (t + 1)$ für $A = m^* - (t + 1) - a$ gelten: $0 \leq A \leq m^* - (t + 1)$. Und wegen $0 \leq b \leq t + 1$ muss für $B = (t + 1) - b$ gelten: $0 \leq B \leq t + 1$. Es ist also $f^*(A, n^* - B) = 0$ für alle A, B mit $0 \leq A \leq m^* - (t + 1)$ und $0 \leq B \leq t + 1$.
Nun lässt sich die Induktionsannahme ($S^*(n^* - r) \geq Z^*(m^* - r)$ für alle r mit $0 \leq r \leq t$) wegen $S^*(n^* - r) = f^*(1, n^* - r) + f^*(2, n^* - r) + \cdots + f^*(m^*, n^* - r)$ und $Z^*(m^* - r) = f^*(m^* - r, 1) + f^*(m^* - r, 2) + \cdots + f^*(m^* - r, n^*)$ zu Folgender Umformen:

$$\begin{aligned} &f^*(1, n^* - r) + f^*(2, n^* - r) + \cdots + f^*(m^*, n^* - r) \\ \geq &f^*(m^* - r, 1) + f^*(m^* - r, 2) + \cdots + f^*(m^* - r, n^*), \text{ wobei } 0 \leq r \leq t \end{aligned}$$

□

noch mehr beweisssssss ■