# Lösungen zu den Aufgaben der zweiten Runde des 50sten Bundeswettbewerbs Mathematik

Philipp Pascal Schmale

(Insgesamt 23 Seiten)

## Inhaltsverzeichnis



## Benutzte Hilfsmittel

### Für Aufgabe 1 benutzte Hilfsmittel

Für Aufgabe 1 habe ich regelmäßig einen Taschenrechner verwendet. Allerdings habe ich in der endgültigen Fassung darauf geachtet, dass alle Berechnungen auch ohne einen Taschenrechner nachvollziehbar sind. In der Regel habe ich hierzu Fußnoten verwendet. Dann steht in Klammern „Berechnung ohne Taschenrechner“ o.Ä. und am Ende ein Superskript mit einer Zahl. Unten auf der Seite sind dann die Inhalte der Fußnoten mit den entsprechenden Zahlen zu finden (Beispiel[1]).

### Für Aufgabe 2 benutzte Hilfsmittel

Für sowohl die Findung als auch die Ausarbeitung der Lösung von Aufgabe 2 habe ich keinerlei Hilfsmittel benutzt.

### Für Aufgabe 3 benutzte Hilfsmittel

Für sowohl die Findung als auch die Ausarbeitung der Lösung von Aufgabe 3 habe ich keinerlei Hilfsmittel benutzt.

### Für Aufgabe 4 benutzte Hilfsmittel

Für sowohl die Findung als auch die Ausarbeitung der Lösung von Aufgabe 4 habe ich keinerlei Hilfsmittel benutzt.

[1]) Hier steht dann die Berechnung oder Berechnungsüberprüfung, die auch ohne einen Taschenrechner nachvollziehbar sein sollte.

# 1 Aufgabe 1

## Hinweise zur Notation

$\mathbb{N}_0$ ist die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null, also $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

[g] heißt, dass die Einheit, in der gerechnet wurde, Gramm ist, dies aber ggf. in Zwischenrechnungen nicht angegeben wurde. Es sollte stets klar sein, in welcher Einheit gerechnet wird, da die Masse die einzige physikalische Größe ist, von der Gebrauch gemacht wird.

„HS" ist kurz für (die entsprechend deklinierte Form von) „Hilfssatz".

## Kurze Antwort

Smilla kann mindestens 1.021.615g Gold für sich garantieren.

## Beweis (d.h. die etwas längere Antwort)

Zu zeigen ist also der folgende Satz:

**Satz 1.1.** *Die größte Masse an Gold, die Smilla mit Sicherheit mindestens gewinnen kann, ist 1.021.615g.*

*Beweis des Satzes.* Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

1. Dem Beweis, dass Smilla stets 1.021.615g Gold gewinnen kann
2. Dem Beweis, dass es keine größere Masse Gold gibt, die Smilla immer gewinnen kann

**HS 1.1.** *Smilla kann stets versichern, dass sie mindestens 1.021.615g Gold gewinnt.*

*Beweis des HS.* Um mindestens 1.021.615g Gold zu gewinnen, kann Smilla folgenden vierschrittigen Plan verfolgen (wobei die Schritte 2 und 3 ggf. mehrfach eintreten):

1. Die 2020 Gold-Nuggets auf drei Haufen aufteilen, und zwar nach folgendem Schema:
   (a) Auf Haufen 1 kommt jedes Gold-Nugget, dessen Masse in Gramm eine der Formen $4k + 1$ und $4k + 2$ annimmt (für ein $k \in \mathbb{N}_0$). Das sind also die Nuggets mit den Massen 1g $(1 = 4 \cdot 0 + 1)$, 2g $(2 = 4 \cdot 0 + 2)$, 5g $(5 = 4 \cdot 1 + 1)$, 6g $(6 = 4 \cdot 1 + 2)$, $\ldots$, 2017g $(2017 = 4 \cdot 504 + 1)$, 2018g $(2018 = 4 \cdot 504 + 2)$.
   (b) Auf Haufen 2 kommt jedes Gold-Nugget, dessen Masse in Gramm eine der Formen $4k$ und $4k + 3$ annimmt (für ein $k \in \mathbb{N}_0$) und dessen Masse nicht 2020g ist. Das sind also die Nuggets mit den Massen 3g $(3 = 4 \cdot 0 + 3)$, 4g $(4 = 4 \cdot 1)$, 7g $(7 = 4 \cdot 1 + 3)$, 8g $(8 = 4 \cdot 2)$, $\ldots$, 2016g $(2016 = 4 \cdot 504)$, 2019g $(2019 = 4 \cdot 504 + 3)$.
   (c) Auf „Haufen" 3 kommt das Nugget mit der Masse 2020g.
2. Wenn Leo die rote Truhe wählt, das leichteste noch verfügbare Nugget von Haufen 1 hineinlegen (das „leichteste" heißt das mit der geringsten Masse). Falls von Haufen 1 kein Nugget mehr verfügbar ist, das Nugget mit der Masse 2020g hineinlegen und falls auch das nicht mehr verfügbar ist, das leichteste noch verfügbare Nugget (das dann offensichtlich von Haufen 2 kommen muss) hineinlegen.
3. Wenn Leo die blaue Truhe wählt, das leichteste noch verfügbare Nugget von Haufen 2 hineinlegen. Falls von Haufen 2 kein Nugget mehr verfügbar ist, das Nugget mit der Masse 2020g hineinlegen und falls auch das nicht mehr verfügbar ist, das leichteste noch verfügbare Nugget (das dann offensichtlich von Haufen 1 sein muss) hineinlegen.

4. Wenn alle Nuggets verteilt sind, die Truhe wählen, in der sich das Nugget mit der Masse 2020g befindet.

Anm.: Im Folgenden werde ich Haufen 1, Haufen 2 und Haufen 3 mit $H_1$ bzw. $H_2$ bzw. $H_3$ bezeichnen.

Zunächst muss natürlich (kurz) bewiesen werden, dass die Aufteilung auf die drei Haufen so, wie sie in Schritt 1 beschrieben wurde, überhaupt möglich ist. D.h., dass jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt. Oder: Dass jedes Nugget auf einen Haufen kommt und kein Nugget auf zwei Haufen kommt. Offensichtlich kann jedes Nugget nur einen der Reste 0, 1, 2, 3 haben, wenn man seine Masse in g durch 4 teilt.
Betrachte man zunächst die mit Rest 0: Sie kommen alle bis auf das mit der Masse 2020g auf $H_2$ und auf keinen anderen (nicht auf $H_1$, da sie weder einen Rest von 1 noch einen von 2 haben, wenn man ihre Masse in g durch 4 teilt; nicht auf $H_3$, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt, welches ja in diesem Fall ausgeschlossen wurde). Das mit der Masse 2020g kommt auf $H_3$ und offensichtlich auch nur auf $H_3$.
Betrachte man nun die mit Rest 1: Sie kommen ausnahmslos auf $H_1$ und auf keinen anderen (nicht auf $H_2$, da sie weder einen Rest von 0 noch von 3 haben, wenn man ihre Massen in g durch 4 teilt; nicht auf $H_3$, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).
Betrachte man nun die mit Rest 2: Sie kommen alle auf $H_1$ und auf keinen anderen (nicht auf $H_2$, da sie weder einen Rest von 0 noch von 3 haben; nicht auf $H_3$, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).
Und zu guter Letzt betrachte man nun die mit Rest 3: Sie kommen alle auf $H_2$ (nicht auf $H_1$, da sie weder einen Rest von 1 noch von 2 haben; nicht auf $H_3$, da auf diesen nur das Nugget mit der Masse 2020g kommt).

Im ersten Schritt wird Smilla also die 2020 Nuggets auf drei Haufen aufteilen, wobei jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt.

Ähnlich zu dem Beweis, dass die Aufteilung tatsächlich möglich ist (also, dass jedes Nugget auf genau einen Haufen kommt), werde ich hier noch beweisen, dass bei dem Verteilen der Nuggets auf die Truhen nach dem in den Schritten 2 und 3 beschriebenen Schema stets eindeutig ist, welches Nugget Smilla in die von Leo gewählte Truhe legen muss, und, dass dieses Nugget auch stets zur Verfügung steht.

Dies ist jedoch ziemlich offensichtlich. Denn man kann sich die Wahl auch folgendermaßen vorstellen:
Wenn Leo die rote Truhe wählt, geht Smilla im Kopf alle Nuggets (auch die, die schon gelegt wurden) durch, allerdings nicht in irgendeiner Reihenfolge, sondern zunächst vom Leichtesten zum Schwersten von $H_1$, dann das mit der Masse 2020g, dann vom Leichtesten zum Schwersten von $H_2$. Dabei nimmt sie dann das Erste, das ihr noch zur Verfügung steht, und legt es in die rote Truhe.
Wenn Leo die blaue Truhe wählt, geht sie auch alle Nuggets durch, allerdings zuerst vom Leichtesten zum Schwersten von $H_2$, dann das mit der Masse 2020g, dann vom Leichtesten zum Schwersten von $H_1$.

In beiden Fällen wird, da es keine zwei Nuggets mit der gleichen Masse gibt, eindeutig bestimmt sein, welches Nugget Smilla in die von Leo gewählte Truhe legen muss.

Es bleibt also zu beweisen, dass, wenn alle Nuggets verteilt sind, die Truhe, in der das Nugget mit der Masse 2020g liegt, Nuggets mit einer Gesamtmasse von mindestens 1.021.615g beinhaltet. Denn dann wird Smilla gemäß Schritt 4 diese Truhe wählen und mindestens 1.021.615g Gold gewinnen.

Zunächst berechne man hierzu folgende Werte: die Masse an Gold, die auf $H_1$ bzw. $H_2$ (bzw. $H_3$) liegt, welche ich im Folgenden mit $m(H_1)$ bzw. $m(H_2)$ bzw. $m(H_3)$ bezeichnen werde.

Offensichtlich befindet sich auf $H_3$ genau ein Nugget (das mit der Masse 2020g). Die Gesamtmasse der Nuggets auf $H_3$ besteht also nur aus dem Nugget mit der Masse 2020g, also ist $m(H_3) = 2020[\text{g}]$ (von hier an werde ich bei $m(H_1), m(H_2), m(H_3)$ die Einheit g nicht mehr dazuschreiben). Betrachte man nun die noch übrigen Nuggets, also die mit Massen von höchstens 2019g. Diese lassen sich folgendermaßen schreiben (wobei ich „das

Nugget mit der Masse" und die Einheit Gramm weggelassen habe): $4\cdot 0+1, 4\cdot 0+2, 4\cdot 0+3, 4\cdot 1+0, 4\cdot 1+1, 4\cdot 1+2, 4\cdot 1+3, 4\cdot 2+0, 4\cdot 2+1, \ldots, 4\cdot 504+0\ \ (=2016), 4\cdot 504+1, 4\cdot 504+2, 4\cdot 504+3$. Offensichtlich sind genau 505 von diesen von der Form $4k+1$ (für ein $k \in \mathbb{N}_0$), nämlich $4\cdot 0+1, 4\cdot 1+1, 4\cdot 2+1, \ldots, 4\cdot 503+1, 4\cdot 504+1$. Gleichzeitig sind 505 von der Form $4k+2$ (für ein $k \in \mathbb{N}_0$), nämlich $4\cdot 0+2, 4\cdot 1+2, 4\cdot 2+2, 4\cdot 3+2, \ldots, 4\cdot 503+2, 4\cdot 504+2$. Es gibt unter den 2019 Nuggets also 505 mit Massen (in g) der Form $4k+1$ und 505 mit Massen (in g) der Form $4k+2$. Nun sind dies aber genau die Nuggets, die auf $H_1$ kommen. Also sind die 1010 Nuggets, die sich auf $H_1$ befinden, die mit folgenden Massen (in g): $4\cdot 0+1, 4\cdot 0+2, 4\cdot 1+1, 4\cdot 1+2, 4\cdot 2+1, 4\cdot 2+2, \ldots, 4\cdot 503+1, 4\cdot 503+2, 4\cdot 504+1, 4\cdot 504+2$. Die Gesamtmasse dieser Nuggets, also $m(H_1)$, ist also:

$$
\begin{aligned}
&m(H_1)\\
=&(4\cdot 0+1)+(4\cdot 0+2)+(4\cdot 1+1)+(4\cdot 1+2)+\cdots+(4\cdot 504+1)+(4\cdot 504+2)\\
=&(4\cdot 0+1)+(4\cdot 1+1)+\cdots+(4\cdot 503+1)+(4\cdot 504+1)\\
&+(4\cdot 0+2)+(4\cdot 1+2)+\cdots+(4\cdot 503+2)+(4\cdot 504+2)\\
=&(4\cdot 0+4\cdot 1+\cdots+4\cdot 503+4\cdot 504)+(1+1+\cdots+1)\\
&+(4\cdot 0+4\cdot 1+\cdots+4\cdot 503+4\cdot 504)+(2+2+\cdots+2)
\end{aligned}
$$

Da $4\cdot 0+1, 4\cdot 1+1, \ldots, 4\cdot 504+1$ insgesamt 505 Summanden sind, handelt sich bei der Summe $(1+1+\cdots+1)$ in der zweitletzten Zeile um 505 Einer (aus jedem der Summanden $(4k+1)$ mit $0 \leq k \leq 504$ wurde die Eins genommen). Da auch $4\cdot 0+2, 5\cdot 1+2, \ldots, 4\cdot 504+2$ insgesamt 505 Summanden sind, handelt es sich mit gleicher Begründung bei der Summe $(2+2+\cdots+2)$ in der letzten Zeile um 505 Zweier. Es ist also:

$$
\begin{aligned}
&m(H_1)\\
=&4\cdot(0+1+2+3+\cdots+504)+(505\cdot 1)\\
&+4\cdot(0+1+2+3+\cdots+504)+(505\cdot 2)\\
=&4\cdot\left(\frac{504\cdot(504+1)}{2}\right)+505+4\cdot\left(\frac{504\cdot(504+1)}{2}\right)+2\cdot 505\\
=&2\cdot 504\cdot 505+505+2\cdot 504\cdot 505+2\cdot 505\\
=&1008\cdot 505+505+1008\cdot 505+2\cdot 505=(1008+1+1008+2)\cdot 505\\
=&(2016+3)\cdot 505=2019\cdot 505=1.019.595
\end{aligned}
$$

(Berechnung von $2019\cdot 505$ ohne Taschenrechner[2])
Anm.: Zur Berechnung von $0+1+2+3+\cdots+504$ habe ich die aus der Schule bekannte Gaußsche Summenformel verwendet, nach welcher $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$, also hier (mit $n=504$): $0+1+2+3+\cdots+504=1+2+3+\cdots+504=\frac{504\cdot(504+1)}{2}$.

Es ist also $m(H_1)=1.019.595$ und $m(H_3)=2020$. Gleichzeitig ist aber, da jedes der Nuggets auf einem der drei Haufen, allerdings keines auf zweien landet, die Gesamtmasse der drei Haufen gleich der Gesamtmasse aller Nuggets; d.h.: $m(H_1)+m(H_2)+m(H_3)=1+2+3+\cdots+2019+2020=\frac{2020\cdot 2021}{2}=2.041.210$ (nach der Gaußschen Summenformel mit $n=2020$; Berechnung ohne Taschenrechner[3]). Es ist also $m(H_2)=2.041.210-m(H_1)-m(H_3)=2.041.210-1.019.595-2020=1.019.595$ (Überprüfung der Berechnung ohne Taschenrechner[4])

Die berechneten Werte sind also: $m(H_1)=1.019.595, m(H_2)=1.019.595, m(H_3)=2020$.

Nun ist in den Regeln des Spiels festgelegt, dass erst aufgehört wird, wenn alle Nuggets in einer der beiden Truhen liegen. Also muss auch das Nugget mit der Masse 2020g in einer

[2]) $2019\cdot 505=2019\cdot 1010\cdot\frac{1}{2}=(2019\cdot 1000+2019\cdot 10)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2.019.000+20.190)=1.009.500+10.095=1.019.595$

[3]) $\frac{2020\cdot 2021}{2}=1010\cdot 2021=1000\cdot 2021+10\cdot 2021=2.021.000+20.210=2.041.210$

[4]) $2.041.210-1.019.595-2020=1.019.595 \Leftrightarrow 2.041.210-2020=2\cdot 1.019.595=2.039.190 \Leftrightarrow 2.041.210=2.039.190+2020=2.039.210+2000=2.041.210$

der beiden Truhen liegen. Um nicht zu allgemein formulieren zu müssen (was vermutlich unverständlicher wäre), kann man die beiden Fälle einzeln betrachten:

*Fall 1: Das Nugget mit der Masse 2020g landet in der roten Truhe.* Offensichtlich können dann zu dem Zeitpunkt, zu dem Smilla das Nugget mit der Masse 2020g in die rote Truhe legt, noch keine Nuggets von $H_1$ in der blauen Truhe liegen. Denn wann immer sie eines hätte legen können (also wann immer Leo die blaue Truhe gewählt hat), hätte sie auch noch das mit der Masse 2020g legen können (da sie es jetzt zur Verfügung hat, hätte sie es zu diesem früheren Zeitpunkt auch zur Verfügung gehabt), was sie dann gemäß Schritt 3 zunächst hätte tun müssen. Es liegt also kein Nugget von $H_1$ in der blauen Truhe. Da sie aber auch kein Nugget von $H_1$ mehr zur Verfügung hat (sonst müsste sie das zuerst legen, wenn Leo die rote Truhe wählt), müssen alle Nuggets von $H_1$ bereits in einer der beiden Truhen liegen. Weil diese Truhe nicht die blaue sein kann (in ihr liegen ja keine Nuggets von $H_1$), müssen also alle Nuggets von $H_1$ in der roten Truhe liegen.

*Fall 2: Das Nugget mit der Masse 2020g landet in der blauen Truhe.* Offensichtlich können dann zu dem Zeitpunkt, zu dem sie das Nugget mit der Masse 2020g in die blaue Truhe legt, noch keine Nuggets von $H_2$ in der roten Truhe liegen. Denn wann immer sie eines hätte legen können (also wann immer Leo die rote Truhe gewählt hat), hätte sie auch noch das mit der Masse 2020g legen können (da sie es jetzt zur Verfügung hat, hätte sie es zu diesem früheren Zeitpunkt auch zur Verfügung gehabt), was sie dann gemäß Schritt 2 zunächst hätte tun müssen. Es liegt also kein Nugget von $H_2$ in der roten Truhe. Da sie aber auch kein Nugget von $H_2$ mehr zur Verfügung hat (sonst müsste sie das zuerst legen, wenn Leo die blaue Truhe wählt), müssen alle Nuggets von $H_2$ bereits in einer der beiden Truhen liegen. Weil diese Truhe nicht die rote sein kann (in ihr liegen ja keine Nuggets von $H_2$), müssen also alle Nuggets von $H_2$ in der blauen Truhe liegen.

Wenn das Nugget mit der Masse 2020g in der roten Truhe landet, müssen in ihr also auch alle Nuggets von $H_1$ sein, und wenn es in der blauen Truhe liegt, müssen in dieser auch alle Nuggets von $H_2$ liegen. In erstem Fall hat also die rote Truhe eine Gesamtmasse von mindestens $m(H_1) + 2020 = 1.021.615[\text{g}]$, da in ihr alle Nuggets von $H_1$ (die eine Gesamtmasse von $m(H_1)$ haben) und das mit der Masse 2020g liegen. In letzterem Fall muss die blaue Truhe eine Gesamtmasse von mindestens $m(H_2) + 2020 = 1.021.615[\text{g}]$ haben, da in ihr alle Nuggets von $H_2$ (die eine Gesamtmasse von $m(H_2)$ haben) und das mit der Masse 2020g liegen. (Berechnungen von $m(H_1) + 2020$ und $m(H_2) + 2020$ ohne Taschenrechner[5])

In beiden Fällen beinhaltet also die Truhe, in der das Nugget mir der Masse 2020g liegt, Gold mit einer Gesamtmasse von mindestens 1.021.615g. Wenn Smilla dann gemäß Schritt 4 diese Truhe, in der das Nugget mit der Masse 2020g liegt, wählt, wählt sie stets eine mit mindestens 1.021.615g Gold.

Smilla kann also stets mit Sicherheit mindestens 1.021.615g Gold gewinnen! □

**HS 1.2.** *Leo kann stets verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt.*

*Beweis des HS.* Dieser Beweis ist recht simpel, da Leo, um zu verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt, einfach folgenden zweischrittigen Plan verfolgen kann:

1. Solange die blaue Truhe wählen, bis in ihr insgesamt mehr als 1.019.595g Gold sind.
2. Sobald in der blauen Truhe mehr als 1.019.595g Gold sind, nur noch die rote Truhe wählen.

Am Ende sind damit in der blauen Truhe auf jeden Fall mindestens 1.019.595g Gold. Wie im Beweis von HS 1.1 berechnet, ist die Gesamtmasse der 2020 Nuggets 2.041.210g. Wenn also in der blauen Truhe mindestens 1.019.595g Gold sind, können in der roten

[5]) $m(H_1)+2020 = 1.019.595+2020 = 1.019.615+2000 = 1.021.615$ und $m(H_2)+2020 = 1.019.595+2020 = m(H_1) + 2020 = 1.021.615$

Truhe nur noch höchstens 2.041.210g − 1.019.595g = 1.021.615g Gold sein (Überprüfung der Berechnung ohne Taschenrechner[6]).

Offensichtlich kann Smilla in einem Zug nur maximal 2020g Gold in eine der beiden Truhen legen. Wenn nun irgendwann mehr als 1.021.615g Gold in der blauen Truhe wären, muss es einen Zug geben, in dem Smilla das Nugget in die Truhe legt, das dafür sorgt, dass die Gesamtmasse der in der blauen Truhe befindlichen Nuggets größer als 1.021.615g ist. Dieses Nugget kann höchstens 2020g wiegen. Bevor sie das Nugget hineinlegt, müssten sich also schon Nuggets in der Truhe befinden, die eine Gesamtmasse von mehr als 1.021.615g − 2020g = 1.019.595g haben (Überprüfung ohne Taschenrechner[7]), denn sonst würden die zusätzlichen maximal 2020g nicht genügen, um die Gesamtmasse über 1.021.615g zu bringen. Wenn sich aber bereits mehr als 1.019.595g Gold in der blauen Truhe befunden hätten, hätte Leo – gemäß seinem Plan – die rote Truhe gewählt; Smilla hätte also gar kein Nugget mehr in die blaue Truhe legen können! Wenn Leo seinen simplen Plan verfolgt, kann es also nicht passieren, dass sich in der blauen Truhe mehr als 1.021.615g Gold befinden.

Es können sich also weder in der blauen noch in der roten Truhe mehr als 1.021.615g Gold befinden. Demnach kann Smilla natürlich auch keine Truhe wählen, in der sich mehr als 1.021.615g Gold befinden. Leo kann also stets verhindern, dass Smilla mehr als 1.021.615g Gold bekommt! □

Smilla kann also nach HS 1.1 stets 1.021.615g Gold gewinnen. Allerdings kann sie keine größere Masse Gold mit Sicherheit gewinnen, denn das kann Leo nach HS 1.2 stets verhindern. Die gröte Masse an Gold, die Smilla mit Sicherheit gewinnen kann, ist also 1.021.615g. ■

[6]) $2.041.210 - 1.019.595 = 1.021.615 \Leftrightarrow 2.041.210 = 1.021.615 + 1.019.595 = 2.021.615 + 19.595 = 2.031.615 + 9.595 = 2.040.615 + 595 = 2.041.115 + 95 = 2.041.210$

[7]) $1.021.615 - 2020 = 1.019.5959 \Leftrightarrow 1.021.615 = 1.019.595 + 2020 = m(H_1) + 2020$, s. Fußnote 5

# 2 Aufgabe 2

## Hinweise zur Darstellung

$\gcd(\alpha, \beta)$ steht für den größten gemeinsamen Teiler (engl.: greatest common divisor) der Zahlen $\alpha$ und $\beta$. Also ist z.B. $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ äquivalent zu „$\alpha$ und $\beta$ sind teilerfremd".
$\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.
$\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.
$\alpha \mid \beta$ heißt, dass $\alpha$ ein Teiler von $\beta$, also $\beta$ ein Vielfaches von $\alpha$ ist.

## Lösung von Aufgabe 2

Die in Aufgabe 2 zu zeigende Aussage ist nun die des folgenden Satzes:

**Satz 2.1.** *Es gibt keine drei Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Q}$ mit $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.*

*Beweis des Satzes durch Widerspruch.* Nehme man an, es gäbe drei Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Q}$, die beide Gleichungen erfüllen. Da $x, y$ rationale Zahlen sind, muss es vier Zahlen $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$ $(b', d' \neq 0)$ geben, für die $x = \frac{a'}{b'}$ und $y = \frac{c'}{d'}$. Sei nun $\frac{a}{b}$ die vollständig gekürzte Form des Bruches $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{d}$ die des Bruches $\frac{c'}{d'}$ und sei hierbei $b, d > 0$, also, wenn $x$ bzw. $y$ negativ ist, ist es $a$ bzw. $c$, aber nie $b$ bzw. $d$. D.h. es ist $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$ mit $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$ (wären die größten gemeinsamen Teiler größer als 1, wären die Brüche offensichtlich nicht vollständig gekürzt). Nun ist wegen $x + y + z = 0$ offenbar $z = -x - y = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = -\frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = -\frac{ad+cb}{db}$. Damit gilt dann wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 100$:

$$
\begin{aligned}
100 = x^2 + y^2 + z^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(-\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot d}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot b}{d \cdot b}\right)^2 + \left(\frac{ad + cb}{db}\right)^2 \\
&= \frac{(ad)^2}{(db)^2} + \frac{(cb)^2}{(db)^2} + \frac{(ad)^2 + 2(ad)(cb) + (cb)^2}{(db)^2} \\
&= \frac{(ad)^2 + (cb)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (cb)^2}{(db)^2} \\
&= \frac{2\left((ad)^2 + abcd + (cb)^2\right)}{(db)^2} \qquad \| \cdot \frac{(db)^2}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\iff 100 \cdot \frac{(db)^2}{2} = 50 \cdot (db)^2 = (ad)^2 + abcd + (cb)^2 \tag{1}
$$

Sei nun $\gcd(b, d) = t$ und seien die dann natürlichen Zahlen $\frac{b}{t}$ und $\frac{d}{t}$ mit $p$ bzw. $q$ bezeichnet (sie sind natürlich, da, weil $t$ der größte gemeinsame Teiler von $b$ und $d$ ist, natürlich $t$ von sowohl $b$ als auch $d$ Teiler sein muss).

**HS 2.1.** *Die Zahlen $p$ und $q$ sind teilerfremd.*

*Beweis des HS durch Widerspruch.* Sei $k > 1$ ein gemeinsamer Teiler von $p$ und $q$. Sei ferner $k^e$ die größte Potenz von $k$, die $p$ und $q$ teilt. Es ist also $k^e | p$ und $k^e | q$, aber gleichzeitig $k^{e+1} \nmid p$ oder $k^{e+1} \nmid q$; hierbei muss $e > 0$, damit $k$ ein gemeinsamer Teiler von $p$ und $q$ ist. Sei nun $k^i$ die größte Potenz von $k$, die $t$ teilt. Dann ist offensichtlich $k^{e+i}$ die größte Potenz von $k$, die $pt = b$ und $qt = d$ teilt. Es ist also $k^{e+i} | b$ und $k^{e+i} | d$. Damit ist dann aber offensichtlich auch $k^{e+i} | \gcd(b, d) = t$. Gleichzeitig ist aber $k^i$ die größte Potenz von $k$, die $t$ teilt; es muss also $e = 0$. Das widerspricht aber der aus der Annahme, es gäbe ein $k > 1$, das $p$ und $q$ teilt, folgenden Ungleichung $e > 0$. Also muss die Annahme falsch sein und damit müssen $p$ und $q$ teilerfremd sein. □

Wenn man nun $b = pt$ und $d = qt$ in (1) einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} & 50 \cdot (db)^2 = (ad)^2 + abcd + (cb)^2 \\ &= 50 \cdot q^2t^2 \cdot p^2t^2 = a^2 \cdot q^2t^2 + ac \cdot pt \cdot qt + c^2 \cdot p^2t^2 \quad \| \cdot \frac{1}{t^2} \\ \iff & 50 \cdot t^2 \cdot q^2p^2 = a^2q^2 + acpq + c^2p^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Nun ist in (2) offensichtlich die linke Seite durch $p$ und durch $q$ teilbar, also muss es die rechte Seite auch sein. Es muss also $p \mid a^2q^2 + acpq + c^2p^2$ und $q \mid a^2q^2 + acpq + c^2p^2$. Aus $p \mid a^2q^2 + acpq + c^2p^2$ folgt wegen $p \mid acpq + c^2p^2$ offenbar, dass $p \mid a^2q^2$, während aus $q \mid a^2q^2 + acpq + c^2p^2$ wegen $q \mid a^2q^2 + acpq$ folgt, dass $q \mid c^2p^2$. Es gilt also:

$$p \mid a^2q^2 \text{ und } q \mid c^2p^2$$

Da aber $p$ und $q$ teilerfremd sind, folgt direkt:

$$p \mid a^2 \text{ und } q \mid c^2 \iff \frac{b}{t} \mid a^2 \text{ und } \frac{d}{t} \mid c^2$$

Nun sind aber $a$ und $b$ teilerfremd, d.h. kein Teiler von $b$ (was $\frac{b}{t}$ ja ist) außer 1 kann $a$ bzw. $a^2$ teilen. Es muss also $\frac{b}{t} = 1$ und damit $b = t$. Da auch $d$ und $c$ teilerfremd sind, folgt mit gleicher Begründung, dass $d = t$. Damit ist dann $b = d$. Setzt man dies in (1) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 50 \cdot b^2 \cdot b^2 = a^2b^2 + ac \cdot b^2 + c^2b^2 \quad \| \cdot \frac{1}{b^2} \\ \iff & 50b^2 = a^2 + ac + c^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Nun ist die linke Seite von (3) offensichtlich gerade und damit muss es die rechte auch sein. Wenn nun aber beide Zahlen $a, c$ ungerade sind, so sind alle drei Summanden ungerade (das Produkt zweier ungerader Zahlen ist stets eine ungerade Zahl) und damit dann die gesamte rechte Seite ungerade. Es muss also mindestens eine der beiden Zahlen gerade sein. Wenn nun aber nur genau eine gerade ist, so ist auch das Quadrat dieser und $ac$ gerade, jedoch nicht das Quadrat der anderen dann ungeraden Zahl. Die rechte Seite wäre die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl, also auch ungerade. Da nicht beide und nicht genau eine der beiden Zahlen ungerade sein können, müssen beide gerade sein. D.h. es gibt zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{Z}$, für die $a = 2r$ und $c = 2s$. Setzt man dies in (3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & 50b^2 = (2r)^2 + (2r)(2s) + (2s)^2 = 4\left(r^2 + rs + s^2\right) \quad \| \cdot \frac{1}{2} \\ \iff & 25b^2 = 2\left(r^2 + rs + s^2\right) \end{aligned}$$

Da in dieser Gleichung die rechte Seite offensichtlich gerade ist, muss auch die linke, also $25b^2$, gerade sein. Da aber 25 nicht gerade ist, muss $b^2$ gerade sein, wozu offensichtlich $b$ gerade sein muss. Nun sind also sowohl $a$ also auch $b$ gerade, d.h. durch 2 teilbar. $a$ und $b$ haben also den gemeinsamen Teiler 2. Dies stellt aber einen Widerspruch zu $\gcd(a, b) = 1$ dar! Denn offensichtlich ist ihr größter gemeinsamer Teiler nicht 1, wenn 2 ein gemeinsamer Teiler von $a$ und $b$ ist. Da die Annahme, es gäbe drei Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Q}$, für die die beiden Gleichungen von Satz 2.1 gelten, zu einem Widerspruch führt, muss sie falsch sein, was dann den Widerspruchsbeweis von Satz 2.1 vervollständigt. ∎

# 3 Aufgabe 3

### Anmerkungen zur Notation und einer häufig verwendeten Formel

Im Folgenden wird $x_A$ die $x$- und $y_A$ die $y$-Koordinate des allgemeinen Punktes $A$ bezeichnen. D.h. hier, dass $P = (x_P, y_P), N = (x_N, y_N), M = (x_M, y_M), S = (x_S, y_S), Q = (x_Q, y_Q)$.

$\overline{AB}$ ist die Distanz von $A$ zu $B$ (stets mit positivem Vorzeichen; es ist also stets $\overline{AB} \geq 0$).

„HS“ ist kurz für (die entsprechend deklinierte Form von) „Hilfssatz“.

Sehr oft habe ich die Distanzformel

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \text{ für alle Punkte } A, B$$

verwendet. Ich habe bei den Gleichungen, bei denen ich sie verwendet habe, oft nicht dazugeschrieben, dass sich die Gleichungen mit der Distanzformel ergeben. Diese Entscheidung habe ich getroffen, da ich diese Formel so oft verwendet habe, dass, wenn ich sie jedes mal erwähnt hätte, dies einige Sätze deutlich komplizierter und teilweise sogar relativ unverständlich gemacht hätte. Ich denke, dass dies die mathematische Vollständigkeit nicht einschränkt, da die Formel aus der Schule bekannt ist und es ziemlich offensichtlich ist, wann sie verwendet wurde; ähnlich, wie die mathematische Vollständigkeit nicht dadurch eingeschränkt wird, dass ich nie dazuschreibe, wenn ein Bruch gekürzt wird.

### Algebraisierung der Aufgabe mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems

Um die Aufgabe von einer Geometrischen in eine eher Algebraische zu übersetzen, habe ich mich dazu entschieden, die in der Aufgabenstellung beschriebene Konstruktion mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems zu beschreiben. Hierzu definiere man folgendermaßen ein kartesisches Koordinatensystem: $P$ sei der Urspung und $n$ die $x$-Achse; dabei sei die $x$-Achse so beschriftet, dass der Punkt $N$ eine positive $x$-Koordinate hat, bevor er $P$ passiert, und die $y$-Achse so, dass der Punkt $M$ eine positive $y$-Koordinate hat, bevor er $P$ passiert. Dies ist offensichtlich möglich, da $P$ auf $n$ liegt. Offensichtlich ist auch die Beschriftung der $y$-Achse (also der Orthogonalen zu $n$, die durch $P$ geht) möglich, denn die Geraden $m$ und $n$ liegen nicht aufeinander (sonst würden sie sich in mehr als einem Punkt schneiden); der Punkt $M$ muss also, bevor er $P$ passiert, auf nur einer Seite der $x$-Achse liegen.

Der Punkt $N$ hat, da er auf $n$, also der $x$-Achse, liegt, natürlich eine $y$-Koordinate von 0. Es ist also: $N = (x_N, 0)$. Sei nun $d_M$ die Distanz $\overline{PM}$, allerdings mit negativem Vorzeichen, wenn $y_M$ ein negatives Vorzeichen hat, also nachdem $M$ den Punkt $P$ passiert hat. Nun ist $x_N$ wegen $y_N = 0$ die Distanz $\overline{PN}$, allerdings mit negativem Vorzeichen, nachdem $N$ den Punkt $P$ passiert hat. Damit lässt sich folgender HS beweisen:

**HS 3.1.** *Die Differenz $d_M - x_N$ ist konstant.*

*Beweis des HS durch Widerspruch.* Nehme man für den Widerspruchsbeweis an, es gäbe zwei Zeitpunkte $t_0$ und $t_1$, von denen $t_0$ der frühere ist, zu denen $d_M - x_N$ unterschiedliche Werte annimmt. Sei $v$ die Geschwindigkeit, mit der sich $M$ und $N$ bewegen; diese ist natürlich gemäß der Aufgabenstellung konstant. Von $t_0$ bis $t_1$ vergeht natürlich eine Zeitspanne von $t_1 - t_0$. Bei einer konstanten Geschwindigkeit von $v$ bewegen sich die Punkte also (gemäß der aus dem Physikunterricht bekannten Formel „$v \cdot \Delta t = \Delta s$“) jeweils um $(t_1 - t_0) \cdot v$. Sei diese Länge mit $a$ bezeichnet. Nun werden sowohl $d_M$ als auch $x_N$ stets kleiner; denn bevor sie $P$ passieren, wird ihre Distanz zu $P$ immer kleiner und damit auch $d_M$ bzw. $x_N$, und danach wird die Distanz größer und damit, da $d_M$ und $x_N$ dann ein negatives Vorzeichen haben, werden $d_M$ und $x_N$ ebenfalls kleiner. Also werden $d_M$ und $x_N$ während der Zeitspanne zwischen $t_0$ und $t_1$ beide um $a$ kleiner. Wenn allerdings beide um das Gleiche kleiner werden, ändert sich ihre Differenz natürlich nicht:

$$(d_M - a) - (x_N - a) = d_M - a - x_N + a = d_M - x_N$$

Der Wert von $d_M - x_N$ ist also zu beiden Zeitpunkten der Gleiche, was einen Widerspruch zu der Annahme darstellt, dass $d_M - x_N$ zu den beiden Zeitpunkten unterschiedliche Werte annimmt. Die Annahme, es gäbe zwei Zeitpunkte, zu denen $d_M - x_N$ unterschiedliche Werte annimmt, führt also zu einem Widerspruch. Es kann also keine zwei Zeitpunkte geben, zu denen $d_M - x_N$ unterschiedliche Werte annimmt; $d_M - x_N$ muss also stets den gleichen Wert annehmen, d.h. konstant sein! $\square$

Sei diese Konstante $d_M - x_N$ im Folgenden mit $c$ bezeichnet. Dann ist $d_M - x_N = c$, also auch $d_M = x_N + c$ und damit $\overline{PM} = |x_N + c|$. Nun ist $|x_N + c| = \overline{PM} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$, da $y_P = x_P = 0$. Die Gerade $m$ ist, da sie durch $P$, den Urspung des kartesischen Koordinatensystems, geht, natürlich eine Urspungsgerade. Im Folgenden werde ich nur die Fälle betrachten, in denen $m$ nicht auf der $y$-Achse liegt, also nicht orthogonal zu $n$ ist. Dann hat $m$ eine reelle Steigung, die nicht Null ist, da $m$ sonst auf $n$ liegen würde, was einen Widerspruch dazu darstellt, dass $m$ und $n$ sich nur in einem Punkt $P$ schneiden. Diese Steigung wird im Folgenden $r$ genannt. Die Geradengleichung von $m$ ist also: $y = r \cdot x$ bzw. $x = \frac{y}{r}$. Da $M$ auf $m$ liegt, muss $x_M = \frac{y_M}{r}$ gelten. Zusammen mit $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$ ergibt das dann: $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{(\frac{y_M}{r})^2 + y_M^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} \cdot y_M^2 + y_M^2} = \sqrt{(1 + \frac{1}{r^2}) \cdot y_m^2} = |y_M| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}$. Da aber $y_M$ das gleiche Vorzeichen wie $d_M = x_N + c$ hat und $\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}$ stets positiv ist, gilt die Gleichung auch ohne Betragsstriche:

$$\begin{aligned} x_N + c &= y_M \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \\ \Leftrightarrow y_M &= \frac{x_N + c}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} &&= \frac{r \cdot (x_N + c)}{r \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} \\ &= \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)}} &&= \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \end{aligned}$$

Es ist also: $y_M = \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2+1}}$.
Nun ist $x_M = \frac{y_M}{r}$, also mit $y_M = \frac{r(x_N+c)}{\sqrt{r^2+1}}$:

$$x_M = \frac{1}{r} \cdot y_M = \frac{1}{r} \cdot \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} = \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

Es ist also:

$$M = \left( \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)$$

Die Punkte $P, N, M$ haben also folgende Koordinaten, wenn $m$ nicht orthogonal zu $n$ ist:

$$P = (0, 0); N = (x_N, 0); M = \left( \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2 + 1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2 + 1}} \right)$$

Wenn $m$ orthogonal zu $n$ ist, also $m$ auf der $y$-Achse liegt, hat $M$ natürlich eine $x$-Koordinate von 0. Es gilt aber immer noch $|x_N + c| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$, was mit $x_M = 0$ dann $|x_N + c| = \sqrt{y_M^2} = |y_M|$ ergibt. Da $y_M$ das gleiche Vorzeichen wie $d_M = x_N + c$ hat, gilt die Gleichung auch ohne die Betragsstriche; es ist also $y_M = x_N + c$. Zusammen mit $x_M = 0$ ist dann also, wenn $m$ orthogonal zu $n$ ist, $M = (0, x_N + c)$.

## Beweis der zu zeigenden Aussage

Nun muss nur noch bewiesen werden, dass es stets einen festen Punkt $Q \neq P$ gibt, sodass $P, M, N, Q$ zu jedem Zeitpunkt auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Es muss also stets einen Punkt $S$ geben, von dem $P, M, N, Q$ den gleichen Abstand haben.

Zunächst beweise ich hierzu den folgenden HS:

**HS 3.2.** *$x_A^2 + y_A^2 = 2x_Ax_S + 2y_Ay_S$ ist äquivalent zu $\overline{AS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$ für alle Punkte $A = (x_A, y_A), S = (x_S, y_S)$.*

*Beweis des HS.* Die Behauptung ergibt sich direkt durch Umformen:

$$\begin{aligned}
\overline{AS} = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2} &= \sqrt{x_S^2 + y_S^2} && \|(\ldots)^2 \\
\Leftrightarrow (x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2 &= x_S^2 + y_S^2 && \|2.\text{ Binomische Formel} \\
\Leftrightarrow (x_A^2 - 2x_Ax_S + x_S^2) + (y_A^2 - 2y_Ay_S + y_S^2) &= x_S^2 + y_S^2 && \| - x_S^2 - y_S^2 \\
\Leftrightarrow x_A^2 - 2x_Ax_S + y_A^2 - 2y_Ay_S &= 0 && \| + 2x_Ax_S + 2y_Ay_S \\
\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 &= 2x_Ax_S + 2y_Ay_S
\end{aligned}$$

Anm.: Das Quadrieren ist hier eine Äquivalenzumformung, da sowieso beide Seiten nicht-negativ sind. □

Der folgende Satz beschäftigt sich nur mit dem Fall „$m$ orthogonal zu $n$“:

**Satz 3.1.** *Wenn $m$ orthogonal zu $n$ ist, gibt es einen festen Punkt $Q \neq P$ so, dass $P, M, N, Q$ stets den gleichen Abstand zu einem Punkt $S$ haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Hierbei sind $S$ und $Q$ durch $S = \left(\frac{x_N}{2}, \frac{x_N+c}{2}\right)$ und $Q = \left(-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$ gegeben.*

*Beweis des Satzes.* Anm.: Im folgenden Beweis ist natürlich $M = (0, x_N + c)$, da in Satz 3.1 davon ausgegangen wird, dass $m$ orthogonal zu $n$ ist.

Wenn $P = Q$ wäre, wäre offensichtlich auch $x_P = x_Q$, also $x_Q = 0$. Dann wäre aber auch $c = 0$ und damit $d_M = x_N + c = x_N$. Wenn $N$ den Punkt $P$ passiert, also $x_N = 0$ ist, wäre also auch $d_M = 0$ und damit auch $|d_M| = \overline{PM} = 0$. Damit würden aber $M$ und $N$ beide auf $P$ liegen, also würden $M$ und $N$ gleichzeitig den Punkt $P$ passieren, was in der Aufgabenstellung ausgeschlossen wurde. Also muss $P \neq Q$ sein. Auch bewegt sich $Q$ offensichtlich nicht, ist also fest, da $c$ und damit auch $\frac{c}{2}$ und $-\frac{c}{2}$ konstant sind. $Q$ ist also ein fester, von $P$ verschiedener Punkt.

Zunächst werde ich ein paar Gleichungen in den folgenden HS beweisen, aus denen dann Satz 3.1 quasi von selbst folgen wird:

**HS 3.3.** *Es ist $\overline{PS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.*

*Beweis des HS.* Die Behauptung ergibt sich direkt mit der Distanzformel:

$$\overline{PS} = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2} = \sqrt{(x_S - 0)^2 + (y_S - 0)^2} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$$

□

**HS 3.4.** *Es ist $\overline{MS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.*

*Beweis des HS.* Durch Umformen ergibt sich direkt die Gleichung $x_M^2 + y_M^2 = 2x_Mx_S + 2y_My_S$:

$$\begin{aligned}
x_M^2 + y_M^2 &= 0^2 + (x_N + c)^2 = 0 + 2 \cdot \frac{(x_N + c)^2}{2} = 0 + 2 \cdot (x_N + c) \cdot \frac{x_N + c}{2} \\
&= 2 \cdot 0 \cdot \frac{x_N}{2} + 2 \cdot y_M \cdot y_S = 2x_Mx_S + 2y_My_S
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $x_M^2 + y_M^2 = 2x_Mx_S + 2y_My_S$ ergibt sich mit HS 3.2 direkt die Behauptung. □

**HS 3.5.** *Es ist $\overline{NS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.*

*Beweis des HS.* Durch Umformen ergibt sich direkt die Gleichung $x_N^2 + y_N^2 = 2x_N x_S + 2y_N y_S$:

$$\begin{aligned} x_N^2 + y_N^2 &= x_N^2 + 0^2 = x_N^2 + 0 = 2 \cdot \frac{x_N^2}{2} + 0 = 2x_N \frac{x_N}{2} + 0 \\ &= 2x_N x_S + 2 \cdot 0 \cdot \frac{x_N + c}{2} = 2x_N x_S + 2y_N y_S \end{aligned}$$

Aus der Gleichung $x_N^2 + y_N^2 = 2x_N x_S + 2y_N y_S$ ergibt sich mit HS 3.2 direkt die Behauptung. □

**HS 3.6.** *Es ist* $\overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.

*Beweis des HS.* Durch Umformen ergibt sich direkt die Gleichung $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Q x_S + 2y_Q y_S$:

$$\begin{aligned} x_Q^2 + y_Q^2 &= \left(-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = 2 \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2} = 0 \cdot \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} \\ &= (-x_N + x_N)\frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} = -x_N\frac{c}{2} + x_N\frac{c}{2} + c \cdot \frac{c}{2} \\ &= x_N\left(-\frac{c}{2}\right) + (x_N + c)\frac{c}{2} = 2\frac{x_N}{2}\left(-\frac{c}{2}\right) + 2\frac{x_N + c}{2}\frac{c}{2} \\ &= 2x_S x_Q + 2y_S y_Q = 2x_Q x_S + 2y_Q y_S \end{aligned}$$

Aus der Gleichung $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Q x_S + 2y_Q y_S$ ergibt sich mit HS 3.2 direkt die Behauptung. □

Aus den HS 3.3, 3.4, 3.5 und 3.6 folgt direkt: $\overline{PS} = \overline{MS} = \overline{NS} = \overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$. Wenn $n$ orthogonal zu $m$ ist, gibt es also einen festen Punkt $Q \neq P$ so, dass $P, M, N, Q$ stets den gleichen Abstand zu einem Punkt $S$ haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. ■

Nun muss noch bewiesen werden, dass es einen solchen Punkt $Q$ auch gibt, wenn $m$ nicht orthogonal zu $m$ ist:

**Satz 3.2.** *Wenn $m$ nicht orthogonal zu $n$ ist, gibt es einen festen Punkt $Q \neq P$ so, dass $P, M, N, Q$ den gleichen Abstand zu einem Punkt $S$ haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Hierbei sind $S$ und $Q$ durch*

$$S = \left(\frac{x_N}{2}, \frac{(x_N + c)\sqrt{r^2+1} - x_N}{2r}\right) \text{ und}$$

$$Q = \left(\frac{c\sqrt{r^2+1}\left(1 - \sqrt{r^2+1}\right)}{\left(1 - \sqrt{r^2+1}\right)^2 + r^2}, \frac{cr\sqrt{r^2+1}}{\left(1 - \sqrt{r^2+1}\right)^2 + r^2}\right)$$

*gegeben.*

*Beweis des Satzes.* Anm.: Im folgenden Beweis ist natürlich $M = \left(\frac{x_N + c}{\sqrt{r^2+1}}, \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2+1}}\right)$, da in Satz 3.2 davon ausgegangen wird, dass $m$ nicht orthogonal zu $n$ ist.

Wenn $P = Q$ wäre, müsste auch $y_Q = y_P = 0$ sein. Es müsste also gelten:

$$y_Q = \frac{cr\sqrt{r^2+1}}{(1 - \sqrt{r^2+1})^2 + r^2} = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt muss dann mindestens einer der Faktoren $c, r, \sqrt{r^2+1}$ und $\frac{1}{(1-\sqrt{r^2+1})^2+r^2}$ gleich 0 sein. Offensichtlich kann $\frac{1}{(1-\sqrt{r^2+1})^2+r^2}$ nicht 0 sein. Auch $\sqrt{r^2+1}$ ist offensichtlich positiv, also nicht 0. Wenn $r$, die Steigung von $m$, 0 wäre, würde das bedeuten, dass $m$ auf der $x$-Achse, also $n$, liegt. Das kann aber ebenfalls nicht sein, denn $n$ und $m$ schneiden sich nur in einem Punkt. Es muss also, damit $y_Q = 0$ sein kann, $c = 0$ gelten. Dann müssten aber (wie am Anfang des Beweises von Satz 3.1 bewiesen) $M$ und $N$ gleichzeitig den Punkt $P$ passieren, was ebenfalls nicht sein kann! Es kann also nicht $y_M = 0 = y_P$ sein, also kann auch nicht $P = Q$ sein.

Auch bewegt sich der Punkt $Q$ offensichtlich nicht, denn seine Koordinaten sind nur von den Konstanten $c$ und $r$ abhängig. Also ist $Q$ ein fester, von $P$ verschiedener Punkt.

Wie im Beweis von Satz 3.1 folgen nun Beweise von ein paar Gleichungen:

**HS 3.7.** *Es ist* $\overline{PS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.

*Beweis des HS.* Die Behauptung ergibt sich direkt mit der Distanzformel:

$$\overline{PS} = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2} = \sqrt{(x_S - 0)^2 + (y_S - 0)^2} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$$

□

**HS 3.8.** *Es ist* $\overline{MS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.

*Beweis des HS.* Zunächst ergibt sich durch Umformen die Gleichung $x_M^2 + y_M^2 = 2x_M x_S + 2y_M y_S$. Diese Umformung ist zwar etwas länger, allerdings in jedem Schritt elementar genug, dass ich einen Kommentar für überflüssig halte.

$$\begin{aligned}
x_M^2 + y_M^2 &= \left(\frac{x_N + c}{\sqrt{r^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2+1}}\right)^2 = \frac{(x_N + c)^2}{r^2+1} + \frac{r^2(x_N + c)^2}{r^2+1} \\
&= \frac{(x_N + c)^2 + r^2(x_N + c)^2}{r^2+1} = \frac{(1+r^2)(x_N + c)^2}{r^2+1} = (x_N + c)^2 \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} - \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} + (x_N + c)^2 \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} - \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} + \frac{(x_N + c)^2\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} + \frac{-(x_N + c)x_N + (x_N + c)^2\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} + \frac{(x_N + c)^2\sqrt{r^2+1} - (x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} + \frac{(x_N + c)\cdot(x_N + c)\sqrt{r^2+1} - (x_N + c)\cdot x_N}{\sqrt{r^2+1}} \\
&= \frac{(x_N + c)x_N}{\sqrt{r^2+1}} + \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2+1}} \cdot \left((x_N + c)\sqrt{r^2+1} - x_N\right) \\
&= \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2+1}} \cdot x_N + 2r \cdot \frac{x_N + c}{\sqrt{r^2+1}} \cdot \frac{(x_N + c)\sqrt{r^2+1} - x_N}{2r} \\
&= 2 \cdot x_M \cdot \frac{x_N}{2} + 2 \cdot \frac{r(x_N + c)}{\sqrt{r^2+1}} \cdot y_S = 2x_M x_S + 2y_M y_S
\end{aligned}$$

Aus $x_M^2 + y_M^2 = 2x_M x_S + 2y_M y_S$ ergibt sich mit HS 3.2 direkt die Behauptung. □

**HS 3.9.** *Es ist* $\overline{NS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.

*Beweis des HS.* Die Behauptung ergibt sich direkt mit der Distanzformel:

$$\begin{aligned}
\overline{NS} &= \sqrt{(x_N - x_S)^2 + (y_N - y_S)^2} = \sqrt{\left(x_N - \frac{x_N}{2}\right)^2 + (0 - y_S)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_N}{2}\right)^2 + (-y_S)^2} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}
\end{aligned}$$

□

**HS 3.10.** *Es ist* $\overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$.

*Beweis des HS.* Zunächst ergibt sich durch simples Umformen die Gleichung $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Q x_S + 2y_Q y_S$. Auch diese Umformung ist ziemlich lang, aber auch hier ist wieder jeder Schritt sehr elementar; die Umformung sollte also trotz ihrer Länge nachvollziehbar sein. Um sie etwas übersichtlicher zu machen, habe ich in folgender Umformung zwischendurch für $\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2 + r^2$ kurz $d$ geschrieben:

$$\begin{aligned}
x_Q^2 + y_Q^2 &= \left(\frac{c\cdot\sqrt{r^2+1}\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\right)^2 + \left(\frac{cr\sqrt{r^2+1}}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\right)^2 \\
&= \frac{c^2(r^2+1)\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2}{\left(\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2\right)^2} + \frac{c^2r^2(r^2+1)}{\left(\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2\right)^2} \\
&= \frac{c^2(r^2+1)}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2} \\
&\quad + \frac{c^2(r^2+1)}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\cdot\frac{r^2}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2} \\
&= \frac{c^2(r^2+1)}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\cdot\left(\frac{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2} + \frac{r^2}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\right) \\
&= \frac{c^2(r^2+1)}{d}\cdot\left(\frac{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\right) \\
&= \frac{c^2(r^2+1)}{d} = \frac{1}{d}\cdot\left(c^2(r^2+1)\right) = \frac{1}{d}\left(0 + c^2(r^2+1)\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(-cx_N\left(r^2+1\right) + x_N\cdot c\left(r^2+1\right) + c\cdot c\left(r^2+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(-cx_N\left(r^2+1\right) + (x_N+c)\,c\left(r^2+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(-cx_N\sqrt{r^2+1} + cx_N\sqrt{r^2+1} - cx_N\left(r^2+1\right) + (x_N+c)\,c\left(r^2+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(cx_N\sqrt{r^2+1} - cx_N\left(r^2+1\right) + (x_N+c)\,c\left(r^2+1\right) - cx_N\sqrt{r^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(cx_N\sqrt{r^2+1} - cx_N\left(r^2+1\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{d}\left((x_N+c)\,c\left(r^2+1\right) - cx_N\sqrt{r^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(1\cdot cx_N\sqrt{r^2+1} + \left(-\sqrt{r^2+1}\right)\cdot cx_N\sqrt{r^2+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{d}\left((x_N+c)\sqrt{r^2+1}\cdot c\sqrt{r^2+1} - x_N\cdot c\sqrt{r^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)\left(cx_N\sqrt{r^2+1}\right) + \frac{1}{d}\left((x_N+c)\sqrt{r^2+1} - x_N\right)\left(c\sqrt{r^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{d}\left(c\sqrt{r^2+1}\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)\right)x_N + \frac{1}{d}\left(c\sqrt{r^2+1}\right)\left((x_N+c)\sqrt{r^2+1} - x_N\right) \\
&= \frac{c\sqrt{r^2+1}\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)}{d}x_N + \frac{c\sqrt{r^2+1}}{d}\left((x_N+c)\sqrt{r^2+1} - x_N\right) \\
&= \frac{c\sqrt{r^2+1}\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}x_N + \frac{c\sqrt{r^2+1}}{\left(1-\sqrt{r^2+1}\right)^2+r^2}\left((x_N+c)\sqrt{r^2+1} - x_N\right) \\
&= x_Q x_N + y_Q\left((x_N+c)\sqrt{r^2+1} - x_N\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_Q^2 + y_Q^2 &= x_Q x_N + y_Q \left( (x_N + c)\sqrt{r^2+1} - x_N \right) \\ &= 2x_Q \frac{x_N}{2} + 2y_Q \frac{(x_N + c)\sqrt{r^2+1} - x_N}{2} \\ &= 2x_Q x_S + 2y_Q y_S \end{aligned}$$

Aus der Gleichung $x_Q^2 + y_Q^2 = 2x_Q x_S + 2y_Q y_S$ ergibt sich mit HS 3.2 direkt die Behauptung. □

Aus den HS 3.7, 3.8, 3.9 und 3.10 folgt direkt: $\overline{PS} = \overline{MS} = \overline{NS} = \overline{QS} = \sqrt{x_S^2 + y_S^2}$. Wenn $n$ nicht orthogonal zu $m$ ist, gibt es also einen festen Punkt $Q \neq P$ so, dass $P, M, N, Q$ den gleichen Abstand zu einem Punkt $S$ haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. ■

Nach Satz 3.1 gibt es also, wenn $m$ orthogonal zu $n$ ist, einen festen Punkt $Q \neq P$ so, dass $P, M, N, Q$ stets den gleichen Abstand zu einem Punkt $S$ haben, also stets auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Nach Satz 3.2 gibt es einen solchen Punkt $Q$ auch, wenn $m$ nicht orthogonal zu $n$ ist. Es gibt also stets einen festen Punkt $Q \neq P$ so, dass $P, M, N, Q$ zu jedem Zeitpunkt auf einem gemeinsamen Kreis liegen!

# 4 Aufgabe 4

## Einführung hilfreicher Begriffe

Seien zunächst folgende Begriffe eingeführt, die den Beweis hoffentlich kürzer, aber auch besser lesbar machen:

[Im Folgenden ist die $k$-te Spalte immer die $k$-te Spalte von links und die $k$-Zeile immer die $k$-te Zeile von oben.]

**Definition 4.1.** *Mit einer „fast-positiv-reell-wertigen" (kurz f.p.r.w.) Tabelle ist eine Tabelle gemeint, in deren Feldern nur nicht-negative reelle Zahlen stehen und dabei in jeder Spalte der Tabelle mindestens eine positive steht.*

**Definition 4.2.** *Das Feld $(i,j)$ einer Tabelle ist das Feld in der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte dieser Tabelle.*

**Definition 4.3.** *Wenn $'$ die Feldwertfunktion einer Tabelle ist, ist $(i,j)'$ der Wert, der im Feld $(i,j)$ dieser Tabelle steht.*

**Definition 4.4.** *Wenn $R$ die Rechtecksfunktion und $'$ die Feldwertfunktion einer Tabelle ist, ist $R(a_1,a_2;b_1,b_2)$ kurz für die folgende Summe, wobei $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \leq b_2$ gelten muss:*

$$\begin{aligned} R(a_1,a_2;b_1,b_2) = &(a_1, a_2)' + (a_1, a_2+1)' + \cdots + (a_1, b_2)' \\ &+ (a_1+1, a_2)' + (a_1+1, a_2+1)' + \cdots + (a_1+1, b_2)' \\ &+ (a_1+2, a_2)' + (a_1+2, a_2+1)' + \cdots + (a_1+2, b_2)' \\ &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ &+ (b_1-1, a_2)' + (b_1-1, a_2+1)' + \cdots + (b_1-1, b_2)' \\ &+ (b_1, a_2)' + (b_1, a_2+1)' + \cdots + (b_1, b_2)' \end{aligned}$$

**Definition 4.5.** *Mit einer „spaltenweise geordneten" Tabelle ist eine Tabelle gemeint, für die stets $R(1,s;m,s) \leq R(1,s+1;m,s+1)$ (für $1 \leq s \leq n-1$) gilt, wobei $m$ die Anzahl an Zeilen, $n$ die Anzahl an Spalten und $R$ die Rechtecksfunktion dieser Tabelle ist. Ähnlich ist mit einer „zeilenweise geordneten" Tabelle eine gemeint, für die stets $R(z,1;z,n) \leq R(z+1,1;z+1,n)$ (für $1 \leq z \leq m-1$) gilt, wobei $m$ die Anzahl an Zeilen, $n$ die Anzahl an Spalten und $R$ die Rechtecksfunktion dieser Tabelle ist. Ist eine Tabelle zeilen- und spaltenweise geordneten, heißt sie kurz auch „wohlgeordnet".*

## Hilfssätze über die eingeführten Begriffe

**HS 4.1.** *Wenn $R$ die Rechtecksfunktion einer Tabelle ist und $a_1 \leq b_1 \leq c_1$ und $a_2 \leq b_2 \leq c_2$ ist, gilt: $R(a_1,a_2;b_1,b_2) + R(b_1+1,a_2;c_1,b_2) = R(a_1,a_2;c_1,b_2)$ und $R(a_1,a_2;b_1,b_2) + R(a_1,b_2+1;b_1,c_2) = R(a_1,a_2;b_1,c_2)$.*

*Beweis des HS.* Erstere Aussage ergibt sich direkt aus der Definition der Rechtecksfunktion:

$$\begin{aligned} &R(a_1,a_2;b_1,b_2) + R(b_1+1,a_2;c_1,b_2) \\ = \;& (a_1,a_2)' + (a_1,a_2+1)' + \cdots + (a_1,b_2)' \\ &+ (a_1+1,a_2)' + (a_1+1,a_2+1)' + \cdots + (a_1+1,b_2)' \\ &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &+ (b_1-1,a_2)' + (b_1-1,a_2+1)' + \cdots + (b_1-1,b_2)' \\ &+ (b_1,a_2)' + (b_1,a_2+1)' + \cdots + (b_1,b_2)' \\ &+ R(b_1+1,a_2;c_1,b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rllll}
= & (a_1,a_2)' & +\,(a_1,a_2+1)' & +\cdots+(a_1,b_2)' \\
& +\,(a_1+1,a_2)' & +\,(a_1+1,a_2+1)' & +\cdots+(a_1+1,b_2)' \\
& & \vdots & \vdots \\
& +\,(b_1-1,a_2)' & +\,(b_1-1,a_2+1)' & +\cdots+(b_1-1,b_2)' \\
& +\,(b_1,a_2)' & +\,(b_1,a_2+1)' & +\cdots+(b_1,b_2)' \\
& +\,(b_1+1,a_2)' & +\,(b_1+1,a_2+1)' & +\cdots+(b_1+1,b_2)' \\
& +\,(b_1+2,a_2)' & +\,(b_1+2,a_2+1)' & +\cdots+(b_1+2,b_2)' \\
& & \vdots & \vdots \\
& +\,(c_1-1,a_2)' & +\,(c_1-1,a_2+1)' & +\cdots+(c_1-1,b_2)' \\
& +\,(c_1,a_2)' & +\,(c_1,a_2+1)' & +\cdots+(c_1,b_2)' \\
= & R(a_1,a_2;c_1,b_2) & & 
\end{array}$$

Auch letztere Aussage ergibt sich direkt durch Einsetzen der Definition der Rechtecksfunktion:

$$\begin{array}{lllll}
R(a_1,a_2;b_1,b_2) & & +\,R(a_1,b_2+1;b_1,c_2) & \\
=\ (a_1,a_2)' & +\cdots+(a_1,b_2)' & +\,(a_1,b_2+1)' & +\cdots+(a_1,c_2)' \\
+\,(a_1+1,a_2)' & +\cdots+(a_1+1,b_2)' & +\,(a_1+1,b_2+1)' & +\cdots+(a_1+1,c_2)' \\
\vdots & \vdots & +\ \vdots & \vdots \\
+\,(b_1-1,a_2)' & +\cdots+(b_1-1,b_2)' & +\,(b_1-1,b_2+1)' & +\cdots+(b_1-1,c_2)' \\
+\,(b_1,a_2)' & +\cdots+(b_1,b_2)' & +\,(b_1,b_2+1)' & +\cdots+(b_1,c_2)' \\
=R(a_1,a_2;b_1,c_2) & & &
\end{array}$$

□

Anm. zu HS 4.1: Wenn die für die Gültigkeit dieses HS nötigen Ungleichungen offensichtlich waren, habe ich sie oft gar nicht erwähnt, wodurch die mathematiksce Vollständigkeit aber nicht eingeschränkt werden sollte, da sie dann immer ohne Umformungsschritte überprüfbar sind.

**HS 4.2.** *Wenn $R$ die Rechtecksfunktion einer Tabelle mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten ist, ist $R(i,1;i,n)$ die Summe der Werte in den Feldern der $i$-ten Zeile dieser Tabelle und $R(1,j;m,j)$ die Summe der Werte in den Feldern der $j$-ten Spalte dieser Tabelle.*

*Beweis des HS.* Per Defintion ist $R(i,1;i,n) = (i,1)' + (i,2)' + \cdots + (i,n-1)' + (i,n)'$. Die Felder der $i$-ten Zeile sind die der Form $(i,a)$, wobei $1 \leq a \leq n$. Offensichtlich sind diese genau die Felder, deren Feldwerte aufaddiert werden, um $R(i,1;i,n)$ zu berechnen. $R(i,1;i,n)$ ist also die Summe der Werte in den Feldern der $i$-ten Zeile.

Ähnlich ist per Definition $R(1,j;m,j) = (1,j)' + (2,j)' + \cdots + (m-1,j)' + (m,j)'$. Die Felder der $j$-ten Spalte sind die der Form $(a,j)$, wobei $1 \leq a \leq m$. Offensichtlich sind diese genau die Felder, deren Feldwerte aufaddiert werden, um $R(1,j;m,j)$ zu berechnen. $R(1,j;m,j)$ ist also die Summe der Werte in den Feldern der $j$-ten Spalte. □

**HS 4.3.** *Wenn in einer wohlgeordneten Tabelle mit Rechtecksfunktion $R$ für zwei Zahlen $i,j$ die Ungleichung $R(i,1;i,n) > R(1,j;m,j)$ gilt, so gilt auch $R(i+a,1;i+a,n) > R(1,j-b;m,j-b)$ für alle $a,b \geq 0$, für die es eine $(i+a)$-te Zeile und eine $(j-b)$-te Spalte gibt.*

*Beweis des HS.* Zunächst gilt, da die Tabelle wohlgeordnet ist:

$$\begin{aligned} R(i,1;i,n) &\leq R(i+1,1;i+1,n) \\ R(i+1,1;i+1,n) &\leq R(i+2,1;i+2,n) \\ &\vdots \\ R(i+(a-1),1;i+(a-1),n) &\leq R(i+a,1;i+a,n) \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$R(i,1;i,n) \leq R(i+1,1;i+1,n) \leq R(i+2,1;i+2,n) \leq \cdots \leq R(i+a,1;i+a,n)$$

Insbesondere ist also $R(i+a,1;i+a,n) \geq R(i,1;i,n)$. Erneut aufgrund der Wohlgeordnetheit der Tabelle gilt auch:

$$\begin{aligned} R(1,j;m,j) &\geq R(1,j-1;m,j-1) \\ R(1,j-1;m,j-1) &\geq R(1,j-2;m,j-2) \\ &\vdots \\ R(1,j-(b-1);m,j-(b-1)) &\geq R(1,j-b;m,j-b) \end{aligned}$$

Auch diese Gleichungen lassen sich in einer Zeile zusammenfassen:

$$R(1,j;m,j) \geq R(1,j-1;m,j-1) \geq R(1,j-2;m,j-2) \geq \cdots \geq R(1,j-b;m,j-b)$$

Insbesondere ist also $R(1,j;m,j) \geq R(1,j-b;m,j-b)$. Es gelten also die folgenden drei Ungleichungen:

$$\begin{aligned} R(i+a,1;i+a,n) &\geq R(i,1;i,n) \\ R(i,1;i,n) &> R(1,j;m,j) \\ R(1,j;m,j) &\geq R(1,j-b;m,j-b) \end{aligned}$$

In einer Zeile zusammengefasst ergibt das:

$$R(i+a,1;i+a,n) \geq R(i,1;i,n) > R(1,j;m,j) \geq R(1,j-b;m,j-b)$$

Insbesondere ist also $R(i+a,1;i+a,n) > R(1,j-b;m,j-b)$. □

## Lösung von Aufgabe 4

In Aufgabe 4 werden Tabellen betrachtet, bei denen in jedem Feld eine nicht-negative reelle Zahl steht und dabei in jeder Spalte mindestens eine positive. Es handelt sich also um f.p.r.w. Tabellen. Auch müssen die Tabellen mehr Spalten als Zeilen haben. Es werden also f.p.r.w. Tabellen mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten betrachtet, wobei $m < n$. Es soll nun bewiesen werden, dass es ein Feld mit einer positiven Zahl derart gibt, dass die Summe der Zahlen in der Zeile dieses Feldes größer als die Summe der Zahlen in der Spalte dieses Feldes ist. Nenne man dieses Feld $(i,j)$, die Feldwertfunktion der betrachteten Tabelle $'$ und ihre Rechtecksfunktion $R$. Dann muss also der Feldwert von $(i,j)$ positiv sein; es muss also $(i,j)' > 0$ gelten. Auch muss die Summe der Zahlen in der Zeile dieses Feldes (welche gemäß HS 4.2 durch $R(i,1;i,n)$ gegeben ist) größer als die Summe der Zahlen in der Spalte dieses Feldes (welche gemäß HS 4.2 durch $R(1,j;m,j)$ gegeben ist) sein; es muss also $R(i,1;i,n) > R(1,j;m,j)$. Insgesamt ist die in Aufgabe 4 zu zeigende Aussage also äquivalent zu folgendem Satz:

**Satz 4.1.** *In jeder f.p.r.w. Tabelle mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten, wobei $m < n$, gibt es ein Feld $(i,j)$, sodass $(i,j)' > 0$ und $R(i,1;i,n) > R(1,j;m,j)$, wobei $'$ die Feld- und $R$ die Rechtecksfunktion dieser Tabelle ist.*

*Beweis des Satzes durch Widerspruch.* Nehme man zunächst an, es gäbe eine Tabelle, für die Satz 4.1 nicht gilt. Nach folgendem HS kann man davon ausgehen, dass diese Tabelle wohlgeordnet ist.

**HS 4.4.** *Wenn es keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt, so gibt es überhaupt keine Tabellen, für die Satz 4.1 nicht gilt.*

*Beweis des HS durch Widerspruch.* Nehme man für den Widerspruchsbeweis an, es gäbe eine f.p.r.w. Tabelle $T$ mit mehr Spalten als Zeilen, für die Satz 4.1 nicht gilt, aber keine solchen Tabellen, die wohlgeordnet sind.

Sei zunächst $\dot{T}$ die gleiche Tabelle wie $T$, allerdings mit den Zeilen so umgeordnet, dass sie zeilenweise geordnet ist. Da sich nur die Reihenfolge der Zeilen ändert, gibt es in jeder Spalte immer noch mindestens ein Feld mit einer positiven Zahl. Natürlich gibt es auch immer noch nur Felder mit nicht-negativen Zahlen, also ist $\dot{T}$ insgesamt f.p.r.w. Außerdem hat $\dot{T}$ genau wie $T$ mehr Spalten als Zeilen. Wenn für $\dot{T}$ Satz 4.1 gelten würde, müsste es ein Feld $(i, j)$ geben, sodass $(i, j)^* > 0$ und $\dot{R}(i, 1; i, \dot{n}) > \dot{R}(1, j; \dot{m}, j)$, wobei $^*$ die Feld-, $\dot{R}$ die Rechtecksfunktion, $\dot{m}$ die Anzahl an Zeilen und $\dot{n}$ die Anzahl an Spalten von $\dot{T}$ ist. Sei nun die $l$-te Zeile von $T$ die Zeile, die nach der Umordnung die $i$-te Zeile von $\dot{T}$ bildet. Der Wert des Feldes $(l, j)$ von $T$ steht also nach der Umordnung im Feld $(i, j)$ von $\dot{T}$. Da $(i, j)^* > 0$, ist also:

$$(l, j)' > 0,$$

wobei $'$ die Feldwertfunktion von $T$ ist. In der $j$-ten Spalte von $\dot{T}$ befinden sich offensichtlich die gleichen Zahlen wie in der $j$-ten Spalte von $T$; lediglich ihre Reihenfolge ändert sich durch die Umordnung der Zeilen. Ihre Summe (gemäß HS 4.2 durch $R(1, j; m, j)$ bzw. $\dot{R}(1, j; \dot{m}, j)$ gegeben) ist also auch die gleiche:

$$R(1, j; m, j) = \dot{R}(1, j; \dot{m}, j),$$

wobei $R$ die Rechtecksfunktion, $m$ die Anzahl an Zeilen und $n$ die Anzahl an Spalten von $T$ ist. Sämtliche Zahlen der $i$-ten Zeile von $\dot{T}$ standen vor der Umordnung in der $l$-ten Zeile von $T$. Die Summe der Zahlen in diesen beiden Zeilen muss also die gleiche sein. Es ist also (erneut ergeben sich die folgenden Werte direkt aus HS 4.2):

$$R(l, 1; l, n) = \dot{R}(i, 1; i, \dot{n})$$

Insgesamt ist also $(l, j)' > 0$, $R(1, j; m, j) = \dot{R}(1, j; \dot{m}, j)$ und $R(l, 1; l, n) = \dot{R}(i, 1; i, \dot{n})$. Da $\dot{R}(i, 1; i, \dot{n}) > \dot{R}(1, j; \dot{m}, j)$, muss also auch $R(l, 1; l, n) > R(1, j; m, j)$. Damit gibt es dann aber das Feld $(l, j)$ der Tabelle $T$, für das $(l, j)' > 0$ und $R(l, 1; l, n) > R(1, j; m, j)$. Für die Tabelle $T$ gilt also Satz 4.1. Da das nicht sein kann, muss die Annahme, für $\dot{T}$ würde Satz 4.1 gelten, falsch sein! Für $\dot{T}$ gilt Satz 4.1 also nicht!

Sei nun $\ddot{T}$ die gleiche Tabelle wie $\dot{T}$, allerdings mit den Spalten so umgeordnet, dass $\ddot{T}$ spaltenweise geordnet ist. Da sich nur die Reihenfolge der Spalten ändert, gibt es in jeder Spalte immer noch mindestens ein Feld mit einer positiven Zahl. Natürlich gibt es auch immer noch nur Felder mit nicht-negativen Zahlen, also ist $\ddot{T}$ insgesamt f.p.r.w. Außerdem hat $\ddot{T}$ genau wie $\dot{T}$ mehr Spalten als Zeilen. Wenn für $\ddot{T}$ Satz 4.1 gelten würde, müsste es ein Feld $(i, j)$ geben, sodass $(i, j)^{**} > 0$ und $\ddot{R}(i, 1; i, \ddot{n}) > \ddot{R}(1, j; \ddot{m}, j)$, wobei $^{**}$ die Feld-, $\ddot{R}$ die Rechtecksfunktion, $\ddot{m}$ die Anzahl an Zeilen und $\ddot{n}$ die Anzahl an Spalten von $\ddot{T}$ ist. Sei nun die $k$-te Spalte von $\dot{T}$ die Spalte, die nach der Umordnung die $j$-te Spalte von $\ddot{T}$ bildet. Der Wert des Feldes $(i, k)$ von $\dot{T}$ steht also nach der Umordnung im Feld $(i, j)$ von $\ddot{T}$. Da $(i, j)^{**} > 0$, ist also:

$$(i, k)^* > 0$$

In der $i$-ten Zeile von $\ddot{T}$ befinden sich offensichtlich die gleichen Zahlen wie in der $i$-ten Zeile von $\dot{T}$; lediglich ihre Reihenfolge ändert sich durch die Umordnung der Spalten.

Ihre Summe (gemäß HS 4.2 durch $\dot{R}(i,1;i,\dot{n})$ bzw. $\ddot{R}(i,1;i,\ddot{n})$ gegeben) ist also auch die gleiche:

$$\dot{R}(i,1;i,\dot{n}) = \ddot{R}(i,1;i,\ddot{n}),$$

Sämtliche Zahlen der $j$-ten Spalte von $\ddot{T}$ standen vor der Umordnung in der $k$-ten Spalte von $\dot{T}$. Die Summe der Zahlen in diesen beiden Zeilen muss also die gleiche sein. Es ist also (erneut ergeben sich die folgenden Werte direkt aus HS 4.2):

$$\dot{R}(1,k;\dot{m},k) = \ddot{R}(1,j;\ddot{m},j)$$

Insgesamt ist also $(i,k)^* > 0$, $\dot{R}(i,1;i,\dot{n}) = \ddot{R}(i,1;i,\ddot{n})$ und $\dot{R}(1,k;\dot{m},k) = \ddot{R}(1,j;\ddot{m},j)$. Da $\ddot{R}(i,1;i,\ddot{n}) > \ddot{R}(1,j;\ddot{m},j)$, muss auch $\dot{R}(i,1;i,\dot{n}) > \dot{R}(1,k;\dot{m},k)$. Damit gibt es aber ein Feld $(i,k)$ mit $(i,k)^* > 0$ und $\dot{R}(i,1;i,\dot{n}) > \dot{R}(1,k;\dot{m},k)$. Für $\dot{T}$ gilt also Satz 4.1. Das kann aber–wie oben gezeigt–nicht sein. Die Annahme, für $\ddot{T}$ würde Satz 4.1 gelten, führt also zu einem Widerspruch, d.h. sie muss falsch sein! Für $\ddot{T}$ kann Satz 4.1 also nicht gelten!

Während der Umordnung der Spalten von $\dot{T}$, um $\ddot{T}$ zu erhalten, wurden offensichtlich die Summen der Zahlen in den Spalten der Tabelle nicht geändert; jedes Feld blieb ja in der gleichen Zeile, da nur die Spalten entlang der Zeilen umgeordnet wurden. Also ist $\ddot{T}$, da $\dot{T}$ zeilenweise geordnet ist, ebenfalls zeilenweise geordnet. Nun ist $\ddot{T}$ aber auch spaltenweise geordnet, also ist $\ddot{T}$ wohlgeordnet!

$\ddot{T}$ ist also eine wohlgeordnete Tabelle, für die Satz 4.1 nicht gilt. Nun wurde am Anfang dieses Widerspruchsbeweises angenommen, es gäbe zwar Tabellen, für die Satz 4.1 nicht gilt, allerdings keine solchen wohlgeordneten. Da diese Annahme zu einem Widerspruch–nämlich einer wohlgeordneten Tabelle, für die Satz 4.1 nicht gilt–geführt hat, muss sie falsch sein! Wenn es also keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt, kann es überhaupt keine Tabellen geben, für die Satz 4.1 nicht gilt; da aus der Existenz letzterer die Existenz ersterer folgen würde! □

Da es nach HS 4.4 überhaupt keine Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt, wenn es keine wohlgeordneten gibt, genügt es, zu beweisen, dass es keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt, um zu beweisen, dass es überhaupt keine gibt. Es folgt also ein Widerspruchsbeweis dafür, dass es keine wohlgeordneten Tabellen gibt, für die Satz 4.1 nicht gilt:

Nehme man für den Widerspruchsbeweis an, es gäbe eine wohlgeordnete, f.p.r.w. Tabelle $T^*$ mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten, wobei $m < n$, für die Satz 4.1 nicht gilt; in der es also kein Feld $(i,j)$ mit $(i,j)' > 0$ und $R(i,1;i,n) > R(1,j;m,j)$ gibt, wobei $'$ die Feldwert- und $R$ die Rechtecksfunktion der Tabelle $T^*$ ist. Dann folgt mit vollständiger Induktion, dass $R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$ für alle $t$ mit $1 \leq t \leq m$:

*Induktionsanfang ($t = 1$)*: Es folgt ein Beweis durch Widerspruch. Nehme man hierzu an, es sei nicht $R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$ für $t = 1$, also:

$$R(1,1;1,n) > R(1,1;m,1)$$

Nach HS 4.3 (mit $i = 1$, $j = 1$, $b = 0$) muss dann auch $R(1+a,1;1+a,n) > R(1,1;m,1)$ für alle $a$ mit $0 \leq a < m$, denn nur für diese gibt es eine $(1+a)$-te Zeile. Sei nun $\dot{a} = a+1$, also $1 \leq \dot{a} \leq m$. Dann sind die Felder $(\dot{a},1)$ offensichtlich genau die Felder der ersten Spalte. Natürlich muss in mindestens einem der Felder der ersten Spalte eine positive Zahl stehen, da $T^*$ f.p.r.w. ist. Es gibt also ein Feld $(\dot{a},1)$ mit $(\dot{a},1)' > 0$ und $R(\dot{a},1;\dot{a},n) > R(1,1;m,1)$. Wenn für $T^*$ nicht Satz 4.1 gelten würde, dürfte es ein solches Feld aber nicht geben. Dessen Existenz stellt also einen Widerspruch dazu dar, dass für $T^*$ nicht Satz 4.1 gilt! Da aus $R(1,1;1,n) > R(1,1;m,1)$ ein Widerspruch folgt, kann nicht $R(1,1;1,n) > R(1,1;m,1)$ sein; es muss also:

$$R(1,1;1,n) \leq R(1,1;m,1)$$

Das entspricht $R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$ mit $t = 1$; die Aussage gilt also für $t = 1$.

*Induktionsschritt*: (Beweis, dass aus der Induktionsannahme, $R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$ für ein $t$ mit $1 \leq t \leq m-1$, folgt, dass $R(1,1;t+1,n) \leq R(1,1;m,t+1)$) Nehme man hierzu an, es sei:

$$R(t+1,1;t+1,n) > R(1,t+1;m,t+1)$$

Dann muss gemäß HS 4.3 auch:

$$R(t+1+a,1;t+1+a,n) > R(1,t+1-b;m,t+1-b), \tag{4}$$

wobei $0 \leq a \leq m-(t+1)$ und $0 \leq b \leq t$. Offensichtlich ist mit $0 \leq a \leq m-(t+1)$ dann $t+1 \leq t+1+a \leq m$, woraus zusammen mit $0 < t+1$ folgt, dass es eine $(t+1+a)$-te Zeile gibt. Ähnlich ist mit $0 \leq b$ zunächst $t+1-b \leq t+1$ und mit $b \leq t$, also $-t \leq -b$, auch $t+1-t \leq t+1-b \Leftrightarrow 1 \leq t+1-b$, also insgesamt $1 \leq t+1-b \leq t+1$, woraus zusammen mit $t \leq m-1$, also $t+1 \leq m$, folgt, dass es eine $(t+1-b)$-te Spalte gibt. Alle nötigen Bedingungen für HS 4.3 sind also gegeben, weshalb (4) gilt. Die Ungleichung (4) lässt sich wegen $t+1 \leq t+1+a \leq m$ und $1 \leq t+1-b \leq t+1$ kürzer schreiben, indem man $c = t+1+a$ und $d = t+1-b$ setzt:

$$R(c,1;c,n) > R(1,d;m,d), \tag{5}$$

wobei $t+1 \leq c \leq m$ und $1 \leq d \leq t+1$.

Nehme man nun an, es gäbe ein Feld $(i,j)$ mit $t+1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq t+1$ und $(i,j)' > 0$. Dann ist wegen (5) $R(i,1;i,n) > R(1,j;m,j)$. Wenn es ein solches Feld $(i,j)$ gäbe, würde also für $T^*$ Satz 4.1 gelten. Das kann aber unter der Annahme des Widerspruchsbeweises nicht sein; es kann also kein Feld $(i,j)$ mit $t+1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq t+1$ und $(i,j)' > 0$ geben. D.h. es muss $(i,j)' = 0$ für alle $(i,j)$ mit $t+1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq t+1$ gelten. Diese lassen sich in zwei Gruppen unterteilen:

1. Die mit $t+1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j < t+1$, also $1 \leq j \leq t$
2. Die mit $t+1 \leq i \leq m$ und $j = t+1$

Erstere sind genau die Felder, deren Feldwerte aufaddiert werden, um $R(t+1,1;m,t)$ zu berechnen, denn:

- Sämtliche Felder $(i,j)$ (genauer gesagt, ihre Feldwerte) mit $t+1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq t$ sind offensichtlich in der Summe, die $R(t+1,1;m,t)$ definiert, enthalten; nämlich im $j$-ten Summand der $(i-t)$-ten Zeile (und in keinem anderen):

$$\begin{array}{rllll} & R(t+1,1;m,t) & & & \\ = & (t+1,1)' & +(t+1,2)' & +\cdots+(t+1,t)' \\ & +(t+2,1)' & +(t+2,2)' & +\cdots+(t+1,t)' \\ & & \vdots & \vdots \\ & +(m-1,1)' & +(m-1,2)' & +\cdots+(m-1,t)' \\ & +(m,1)' & +(m,2)' & +\cdots+(m,t)' \end{array}$$

- Sämtliche Summanden dieser Summe sind offensichtlich von der Form $(i,j)'$ mit $t+1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq t$.

Also sind insgesamt die Felder der ersteren Gruppe genau die, deren Feldwerte aufaddiert werden, um $R(t+1,1;m,t)$ zu berechnen. Die der letzteren Gruppe sind offensichtlich genau die Felder, deren Feldwerte aufaddiert werden, um $R(t+1,t+1;m,t+1)$ zu berechnen, denn es ist $R(t+1,t+1;m,t+1) = (t+1,t+1)' + (t+2,t+1)' + \cdots + (m,t+1)'$. Beide sind also eine Summe von lauter Nullern, also selbst 0:

$$R(t+1,1;m,t) = 0 \tag{6}$$

$$R(t+1,t+1;m,t+1) = 0 \tag{7}$$

Nun ist nach HS 4.1 (mit $a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = t, b_2 = t$ und $c_1 = m$):

$$R(1,1;m,t) = R(1,1;t,t) + R(t+1,1;m,t)$$

Mit (6) ergibt sich daraus direkt:

$$R(1,1;m,t) = R(1,1;t,t) \tag{8}$$

Auch ergibt sich mit HS 4.1 (mit $a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = t, b_2 = t$ und $c_2 = n$):

$$R(1,1;t,n) = R(1,1;t,t) + R(1,t+1;t,n)$$

Wenn man in diese Gleichung (8) einsetzt, erhält man:

$$R(1,1;t,n) = R(1,1;m,t) + R(1,t+1;t,n) \tag{9}$$

Nun ist $R(1,t+1;t,n)$ die Summe nicht-negativer Zahlen, also selbst nicht-negativ. Allerdings kann $R(1,t+1;t,n)$ auch nicht positiv sein, denn dann wäre wegen (9):

$$R(1,1;t,n) = R(1,1;m,t) + R(1,t+1;t,n) > R(1,1;m,t)$$

Also wäre insbesondere:

$$R(1,1;t,n) > R(1,1;m,t)$$

Das widerpsicht aber der Induktionsannahme, nach welcher $R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$. Also ist $R(1,t+1;t,n)$ nicht-negativ und nicht positiv, also Null. Es ist also:

$$R(1,t+1;t,n) = 0 \tag{10}$$

Nun ist nach HS 4.1 (mit $a_1 = 1, a_2 = t+1, b_1 = t, b_2 = t+1$ und $c_2 = n$):

$$R(1,t+1;t,n) = R(1,t+1;t,t+1) + R(1,t+2;t,n)$$

Da die linke Seite nach (10) Null ist, muss es natürlich auch die rechte sein. Nun sind die beiden Summanden auf der rechten Seite nicht-negativ, da sie Summen von nicht-negativen Zahlen sind. Damit ihre Summe also Null sein kann, müssen sie beide Null sein. Es ist also insbesondere:

$$R(1,t+1;t,t+1) = 0 \tag{11}$$

Gemäß HS 4.1 (mit $a_1 = 1, a_2 = t+1, b_1 = t, b_2 = t+1$ und $c_1 = m$) ist nun:

$$R(1,t+1;m,t+1) = R(1,t+1;t,t+1) + R(t+1,t+1;m,t+1)$$

Wegen (11) ist der erste Summand gleich 0. Wegen (7) ist aber auch der zweite Summand gleich Null! Es muss also auch ihre Summe gleich Null sein:

$$R(1,t+1;m,t+1) = 0$$

Nun ist $R(1,t+1;m,t+1)$ aber gemäß HS 4.2 die Summe der Zahlen in der $(t+1)$-ten Spalte. Da all diese Zahlen nicht-negativ sind, müssen sie, damit ihre Summe gleich Null sein kann, alle gleich Null sein. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass $T^*$ eine f.p.r.w. Tabelle ist, denn in einer f.p.r.w. Tabelle gibt es in jeder Spalte mindestens ein Feld mit einer positiven Zahl! Die Annahme, es sei $R(t+1,1;t+1,n) > R(1,t+1;m,t+1)$ führt also zu einem Widerspruch und muss dementsprechend falsch sein. Es ist also:

$$R(t+1,1;t+1,n) \leq R(1,t+1;m,t+1)$$

Außerdem gilt natürlich–das ist die Induktionsannahme–folgende Ungleichung:

$$R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$$

Zusammen ergeben diese beiden Ungleichungen direkt:

$$R(1,1;t,n) + R(t+1,1;t+1,n) \leq R(1,1;m,t) + R(1,t+1;m,t+1) \qquad (12)$$

Nun gelten nach HS 4.1 (mit $a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = t, b_2 = n, c_1 = t+1$ bzw. $a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = m, b_2 = t, c_2 = t+1$) folgende Gleichungen:

$$R(1,1;t,n) + R(t+1,1;t+1,n) = R(1,1;t+1,n)$$
$$R(1,1;m,t) + R(1,t+1;m,t+1) = R(1,1;m,t+1)$$

Setzt man diese in (12) ein, erhält man:

$$R(1,1;t+1,n) \leq R(1,1;m,t+1)$$

Insgesamt folgt also aus $R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$ (für ein $t$ mit $0 \leq t \leq m-1$) die gleiche Ungleichung, allerdings mit $t+1$ statt $t$, also $R(1,1;t+1,n) \leq R(1,1;m,t+1)$.

Die Ungleichung $R(1,1;t,n) \leq R(1,1;m,t)$ gilt also gemäß dem Induktionsanfang für $t = 1$ und damit gilt sie dann gemäß dem Induktionsschritt auch für $t = 2$ (natürlich nur sofern $m \geq 2$) usw. usw. bis $t = m$. Für $t = m$ lautet die Ungleichung dann:

$$R(1,1;m,n) \leq R(1,1;m,m) \qquad (13)$$

Nun ist nach HS 4.1 (mit $a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = m, b_2 = m$ und $c_2 = n$) aber:

$$R(1,1;m,n) = R(1,1;m,m) + R(1,m+1;m,n)$$

Setzt man dies in (13) ein, erhält man:

$$R(1,1;m,m) + R(1,m+1;m,n) \leq R(1,1;m,m)$$
$$\Leftrightarrow R(1,m+1;m,n) \leq 0 \qquad (14)$$

Wegen $m < n$ ist offensichtlich $n \geq m+1$, also entweder $n = m+1$ oder $n > m+1$. Nehme man zunächst an, es sei $n > m+1$, also $n = m+1+k$ mit $1 \leq k$. Es ist also:

$$R(1,m+1;m,n) = R(1,m+1;m,m+1+k)$$

Dann ist unter Verwendung dieser Gleichung gemäß HS 4.1 (mit $a_1 = 1, a_2 = m+1, b_1 = m, b_2 = m+1$ und $c_2 = m+1+k = n$) offenbar:

$$R(1,m+1;m,n) = R(1,m+1;m,m+1) + R(1,m+2;m,m+1+k)$$

Da gemäß (14) die linke Seite nicht-positiv ist, muss es auch die rechte Seite sein. Da die beiden Summanden auf der rechten Seite Summen nicht-negativer Zahlen sind, also selbst nicht-negativ sind, müssen sie, damit ihre Summe nicht positiv wird, beide gleich Null sein. Insbesondere ist also:

$$R(1,m+1;m,m+1) = 0$$

Wenn $n = m+1$ ist, erhält man, indem man das in (14) einsetzt:

$$R(1,m+1;m,n) = R(1,m+1;m,m+1) \leq 0$$

Da $R(1,m+1;m,m+1)$ die Summe nicht-negativer Zahlen ist, ist $R(1,m+1;m,m+1)$ selbst nicht-negativ. Damit $R(1,m+1;m,m+1)$ gleichzeitig auch nicht-positiv sein kann, muss also:

$$R(1,m+1;m,m+1) = 0$$

Egal, ob $n = m+1$ oder $n > m+1$, es gilt also stets diese Gleichung.

Nun ist $R(1,m+1;m,m+1)$ aber gemäß HS 4.2 die Summe der Zahlen in der $(m+1)$-ten Spalte. Da aber all diese Zahlen nicht-negativ sind, müssen sie alle Null sein, damit ihre Summe Null sein kann. Nun ist aber $T^*$ eine f.p.r.w. Tabelle, also muss es in jeder Spalte von $T^*$ mindestens ein Feld geben, in dem eine positive Zahl steht. Aber ein solches Feld gibt es in der $(m+1)$-ten Spalte nicht! Die Annahme, es gäbe eine Tabelle, für die Satz 4.1 nicht gilt, führt also zu einem Widerspruch. Eine solche Tabelle gibt es also nicht, was den Widerspruchsbeweis von Satz 4.1 vollendet. ■