Grafos – Ordenação Topológica

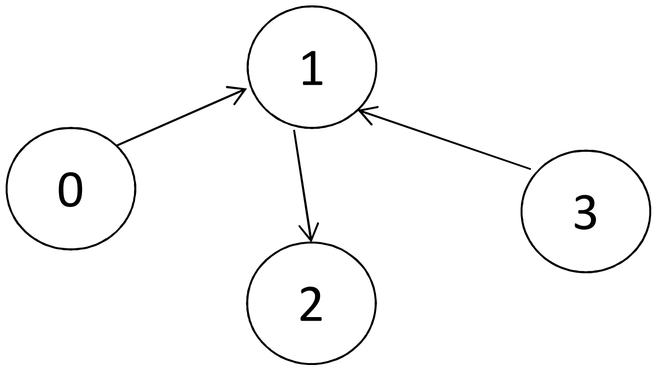
Graça Nunes

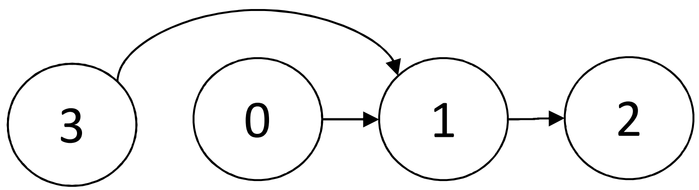
1º. Semestre 2012

Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico

- Ordenação linear dos vértices do grafo tal que u aparece antes de v se há uma aresta (u,v)

- Ordenação topológica: exemplo





Ordenação Topológica

- Todo dígrafo acíclico D(V,A) induz um conjunto parcialmente ordenado (V, <) – reflexivo, antissimétrico e transitivo, onde < é definido como:

  $v_i < v_j \leftrightarrow v_i$ alcança v_j no dígrafo D (há um caminho de v_i a $v_{j)}$

- Baseando-se nessa ordem parcial, é possível ordenar os vértices de D de modo a obter a sequência $S \equiv v_1, v_2, \ldots, v_n \mid v_i < v_j \leftrightarrow i<j,\ 1\leq i, j \leq n$

Ordenação Topológica

- Algoritmo

Início

Dado G um dígrafo acíclico;

Inicializar S vazia;

Enquanto houver vértice para ser eliminado do Grafo
    faça

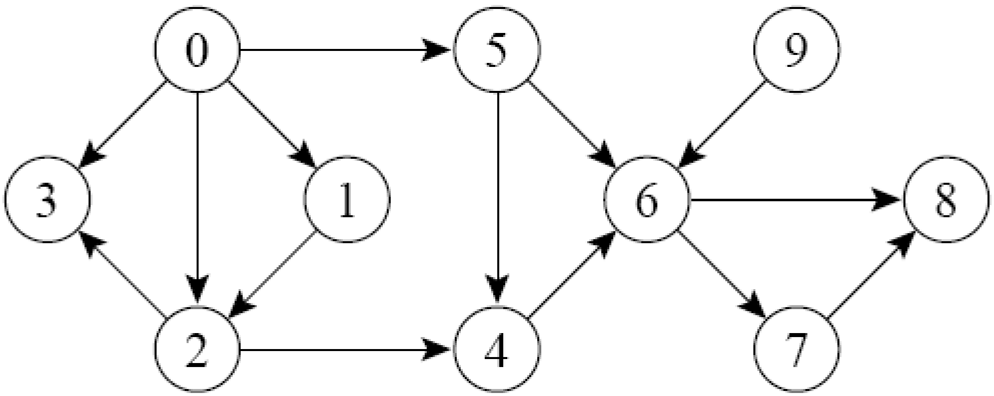
        Seja v, um vértice que tenha grau de entrada nulo;

        Insira v como próximo vértice da sequência S;

        Exclua v do Grafo (resulta num novo dígrafo acíclico)

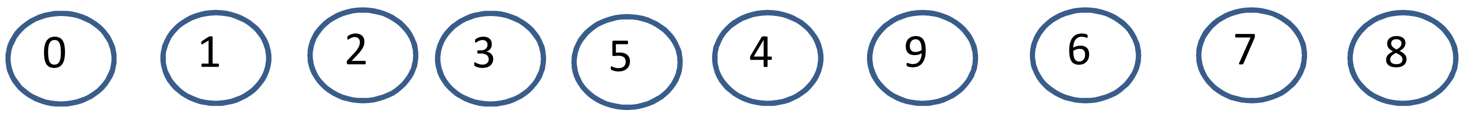
Fim

- Faça uma ordenação topológica do grafo abaixo

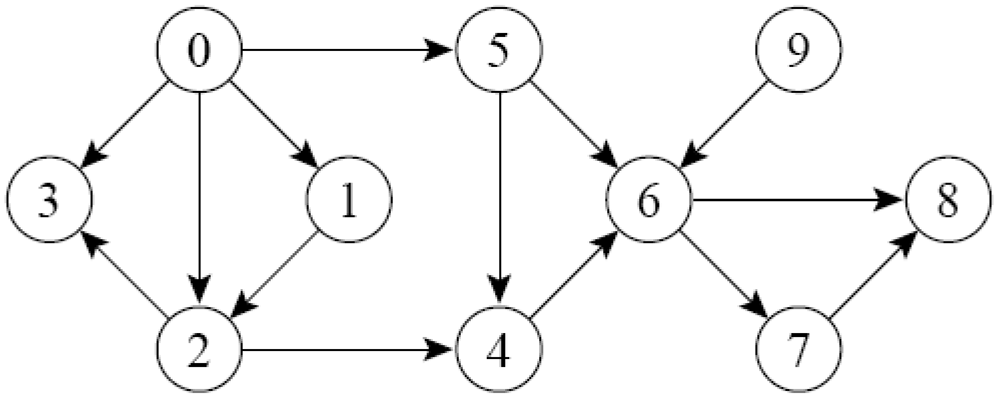


Listas de Adjacência:

0: (1,2,3,5)
1: (2)
2: (3,4)
3: ( )
4: (6)
5: (4,6)
6: (7,8)
7: (8)
8: ( )
9: (6)

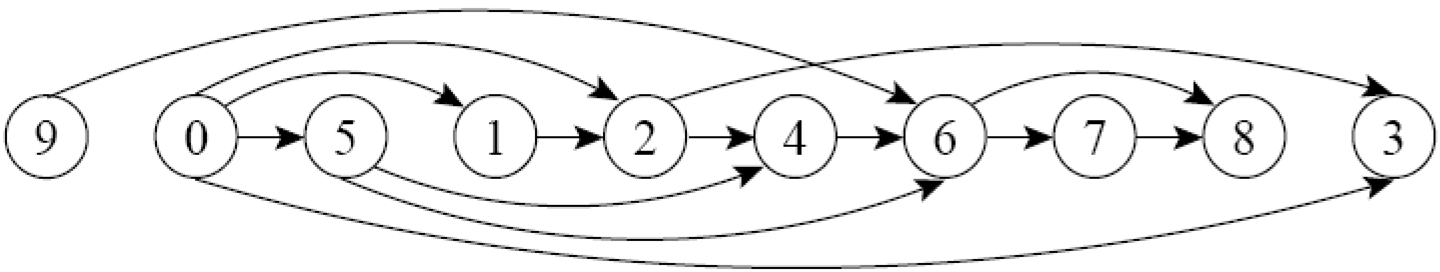


- Outra ordenação topológica do grafo abaixo



Listas de Adjacência:

0: (1,2,3)	5: (4,6)
1: (2)	6: (7,8)
2: (3,4)	7: (8)
3: ( )	8: ( )
4: (6)	9: (6)



Implementação da Ordenação Topológica

Requisitos:

- TAD Dígrafo (Listas de Adjacência)
- Na entrada do dígrafo, já calcular os graus de entrada de cada vértice e armazenar num array n-dimensional:
  - Para cada aresta (i,j) inserida, incrementar o grau de entrada de j
- Na eliminação de uma aresta (i,j), por ocasião da exclusão do vértice i, decrementar o grau de entrada de j.

Implementação da Ordenação Topológica

Dados: (V, A) de um dígrafo acíclico

Saída: sequência ordenada S

a) Inicializar dígrafo D, sequência S e array de graus Grau;
b) Enquanto tem arestas para inserir
   - Ler aresta (i,j)
   - Inserir (i,j) em D
   - Incrementar Grau(j)
c) Enquanto tem vértice a ser incluído em S faça
   - Incluir em S um vértice de grau de entrada 0
   - Eliminar esse vértice de D

- Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico
  - Qual a complexidade de tempo do algoritmo?
  - Seja |V| = n e |A| = m
  - Para a entrada do dígrafo:
  - Para a eliminação dos vértices do dígrafo:
  - Total (após n eliminações):
- Atenção
  - Pode haver mais de uma ordenação topológica
  - Não há ordenação topológica em grafos com ciclos

- Ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico
  - Qual a complexidade de tempo do algoritmo?
  - Seja |V| = n e |A| = m
  - Para a entrada do dígrafo: O(m)
  - Para a eliminação dos vértices do dígrafo: equivale a eliminar as arestas
  - Total (após n eliminações): O(m)

- Atenção
  - Pode haver mais de uma ordenação topológica
  - Não há ordenação topológica em grafos com ciclos

Exercício

- Faça um programa que implementa a ordenação topológica de um dígrafo acíclico e que resolva o problema abaixo:

Uma pessoa pretende mudar de casa e para isso precisa realizar as seguintes tarefas:

(a) Procurar caixas para empacotar suas coisas

(b) Encontrar uma casa para alugar

(c) Arrumar suas malas e pacotes

(d) Despachar a bagagem

(e) Procurar uma empresa de mudanças

(f) Alugar a casa encontrada

Desenhe o dígrafo com as relações de dependência entre essas tarefas e as ordene de modo que ele possa realiza-las em sequência.

Para pensar

- Suponha adicionalmente que as tarefas têm previsão de realização em dias:

Uma pessoa pretende mudar de casa e para isso precisa realizar as seguintes tarefas:

(a) Procurar caixas para empacotar suas coisas	- 1 dia
(b) Encontrar uma casa para alugar	- 14 dias
(c) Arrumar suas malas e pacotes	- 5 dias
(d) Despachar a bagagem	- 1 dia
(e) Procurar uma empresa de mudanças	- 2 dias
(f) Alugar a casa encontrada	- 10 dias

Desenhe o dígrafo com as relações de dependência entre essas tarefas e encontre a sequência de tarefas que o faça mudar no menor tempo possível.