Grafos: caminhos (matriz adjacência)

Algoritmos e Estruturas de Dados 2

Graça Nunes

O problema do menor caminho

- Um motorista deseja encontrar o caminho mais curto possível entre duas cidades do Brasil

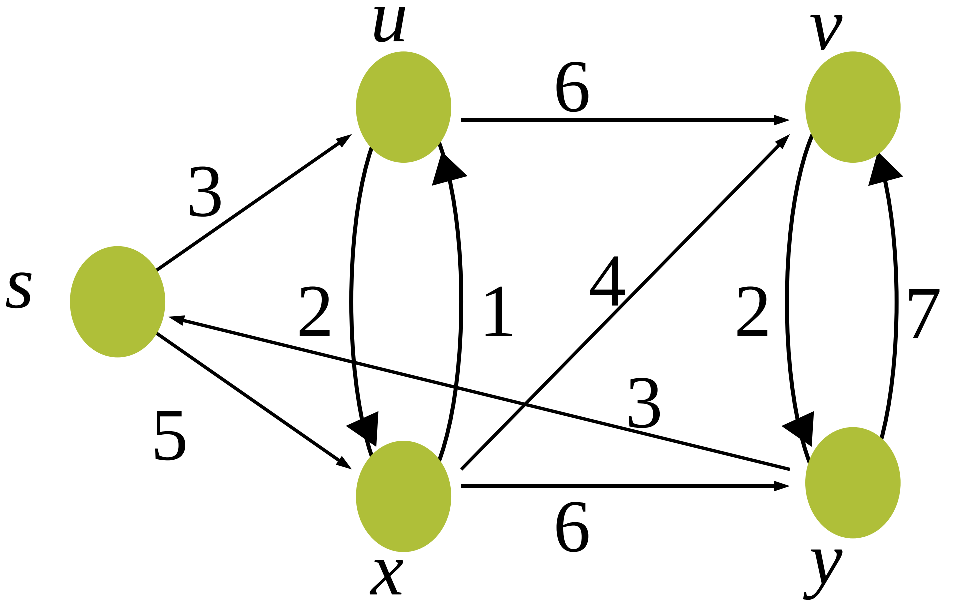
- Caso ele receba um mapa das estradas de rodagem do Brasil, no qual a distância entre cada par adjacente de cidades está exposta, como poderíamos determinar uma rota mais curta entre as cidades desejadas?

- Uma maneira possível é enumerar todas as rotas possíveis que levam de uma cidade à outra, e então selecionar a menor

Caminhos mínimos

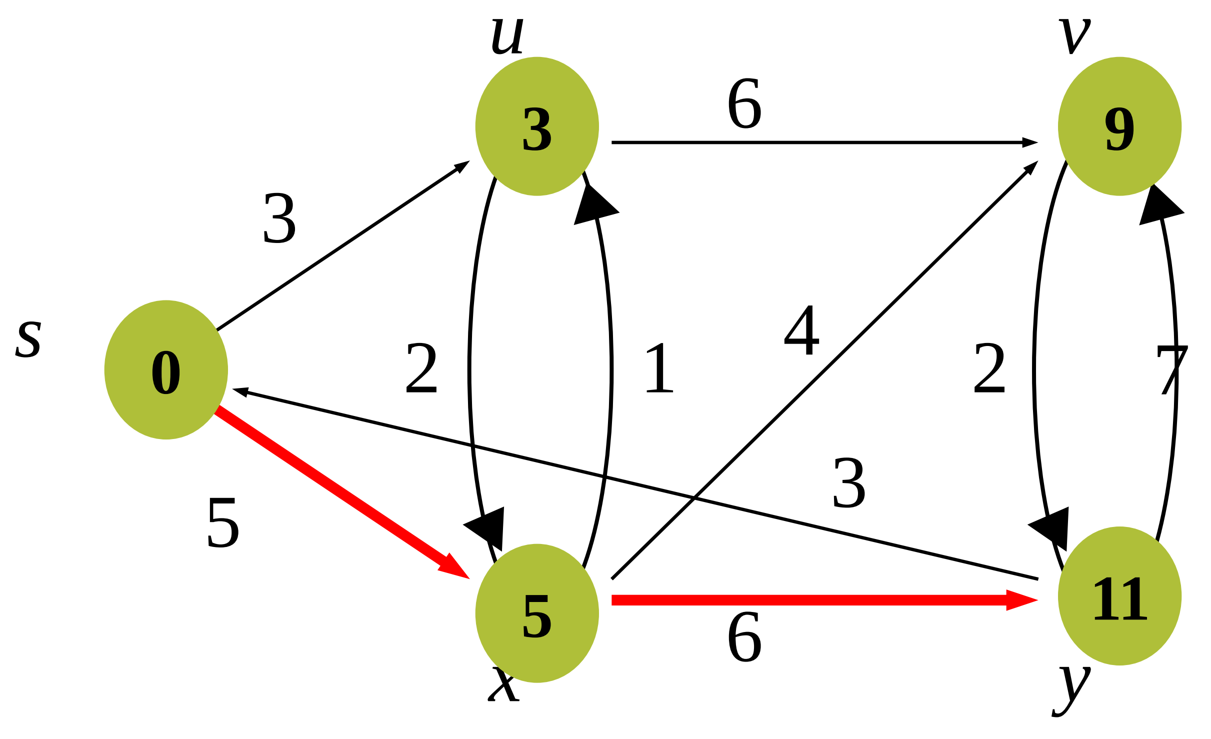
- O problema do caminho mínimo consiste em determinar um menor caminho entre um vértice de origem u e um vértice de destino v

- Qual o menor caminho entre s e y?



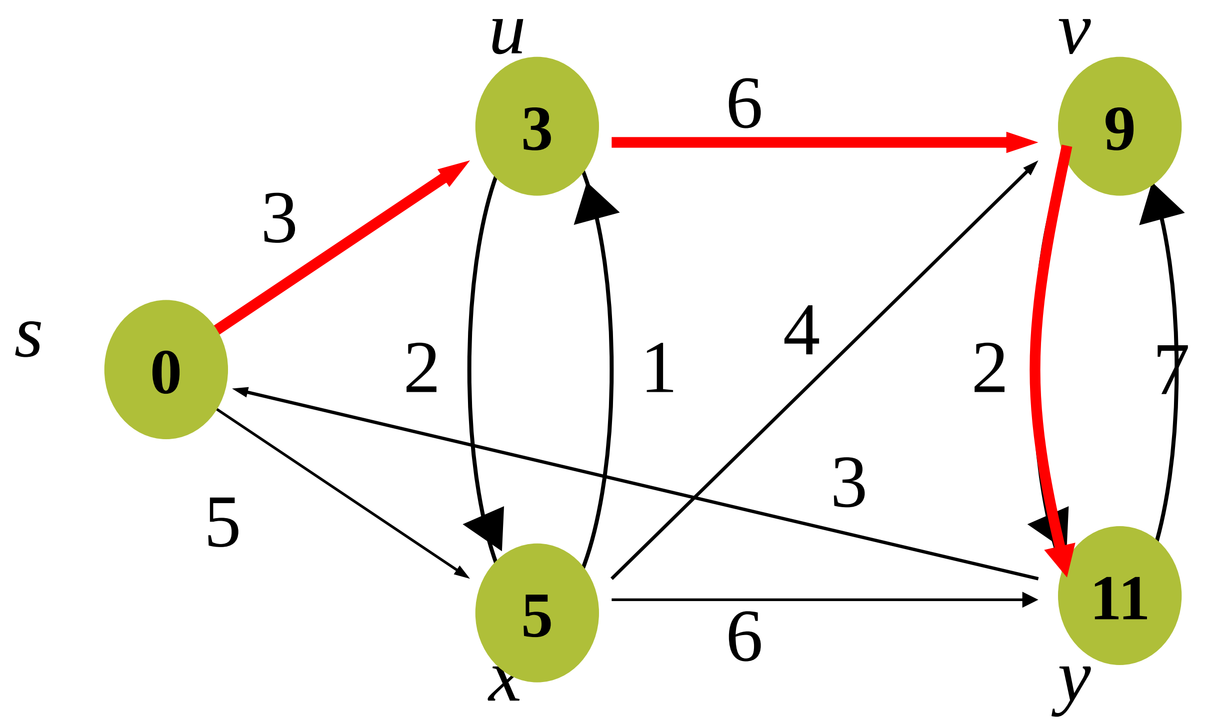
Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos simples



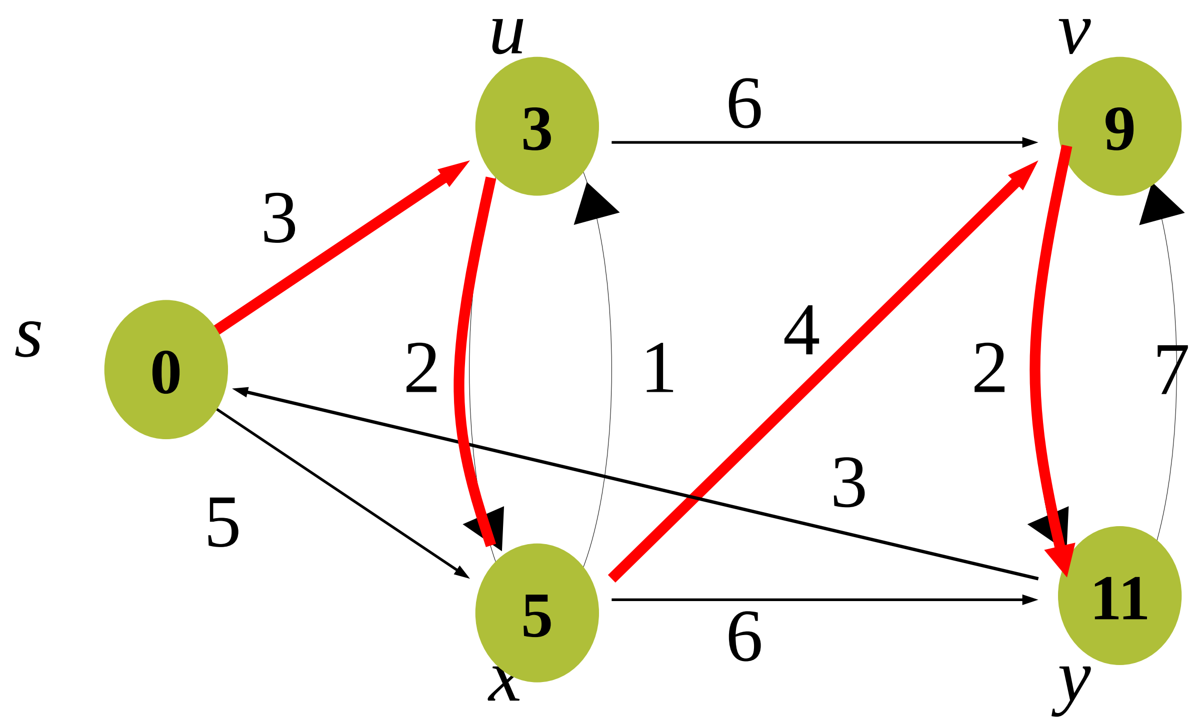
Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos simples



Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos simples



Além de outros com ciclos....

Caminho mínimo

- Duas abordagens para caminho mínimo
  - Se grafo não valorado (assume-se que cada aresta tem peso 1), busca em largura é uma boa opção ➔ o caminho mínimo coincide com o caminho mais curto
  - Se grafo valorado, outros algoritmos são necessários

Caminho mínimo

- Grafo dirigido G(V,E) com função peso *w*: $E \rightarrow \Re$ que mapeia as arestas em pesos
- Peso (custo) do caminho p = <v_0, v_1, ..., v_k>

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

- Caminho de menor peso entre u e v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\Rightarrow} v\}\, se \exists\, rota\ de\ u\ \ p/v \\ \infty\ cc \end{cases}$$

Caminho mínimo

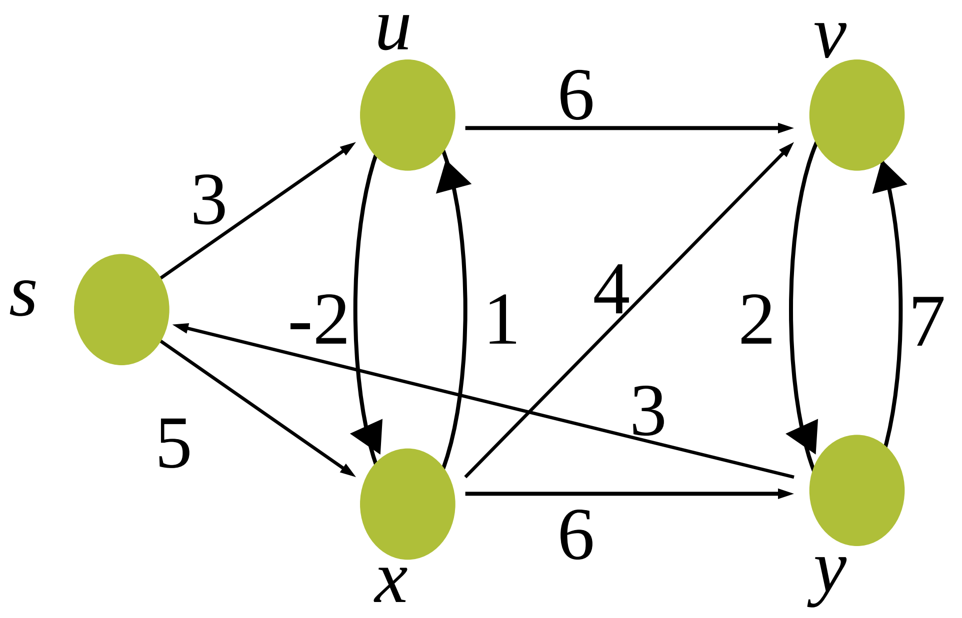
- Caminho mínimo entre os vértices *u* e *v* definido como qualquer rota p com um peso

$$w(p) = \delta(u,v)$$

- Atenção especial com <u>ciclos</u> e <u>pesos negativos</u>

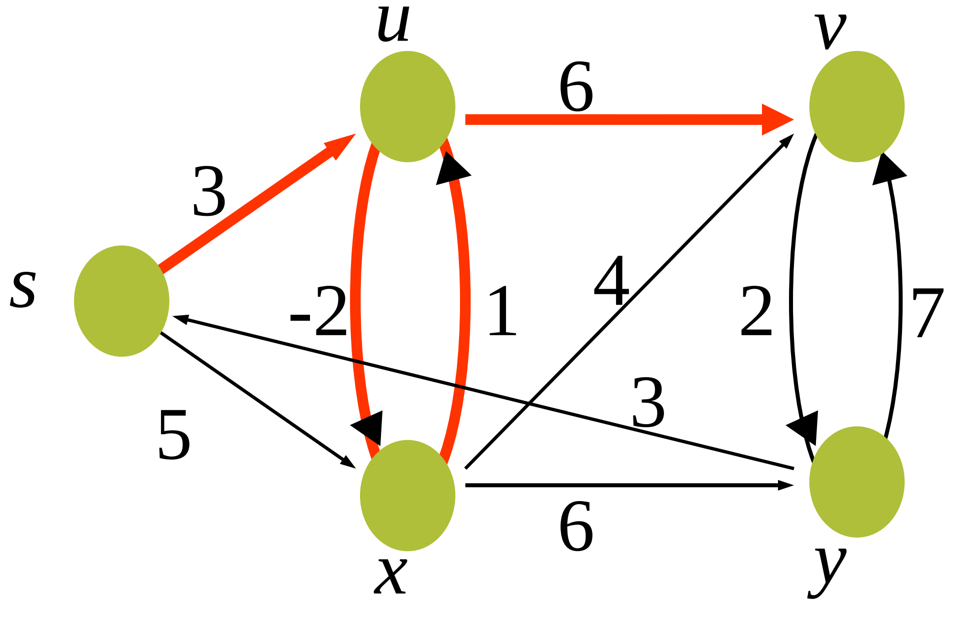
Caminho mínimo

- Qual o caminho mínimo entre s e v?



Caminho mínimo

- Qual o caminho mínimo entre s e v?



Caminho mínimo

- Se há um ciclo positivo no caminho, ele não faz parte do caminho mínimo
  - Por quê?

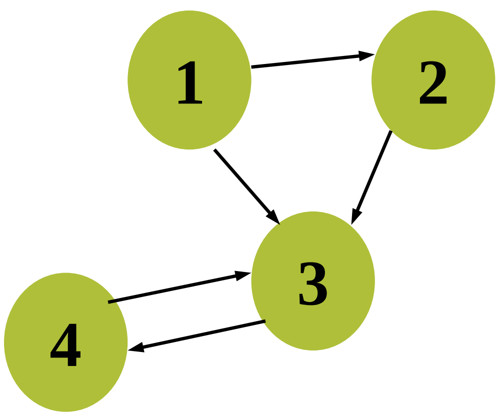
Algoritmos para Dígrafos representados em Matrizes de Adjacência

- Perguntas possíveis de se responder para um dígrafo com n vértices e m arestas:
  - P1: Existe caminho de v_i a v_j? (valorados ou não)
  - P2: Qual o número de caminhos de comprimento k de v_i a v_j? (não valorados)
  - P3: Qual é o comprimento do caminho mínimo de v_i a v_j? (valorados)
  - P4: Qual é o custo do caminho mínimo de v_i a v_j? (valorados)
  - P5: Qual é o caminho mínimo (menor custo) de v_i a v_j? (valorados)

Matriz Caminho - P

- Def.: A Matriz Caminho, P, de um dígrafo D(V,A) é definida como:
  - $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists$ um caminho de v_i para v_j
  - $p_{ij} = 0$, c.c.

- Ex.



X: Matriz Adjacência

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P: Matriz Caminho

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs.: $p_{ii} = 1 \Leftrightarrow \exists$ um ciclo a partir de v_i

- Precisamos então de um algoritmo para calcular P, a partir de X, para então responder à pergunta:

  - P1: Existe caminho de v_i a v_j? (valorados ou não)

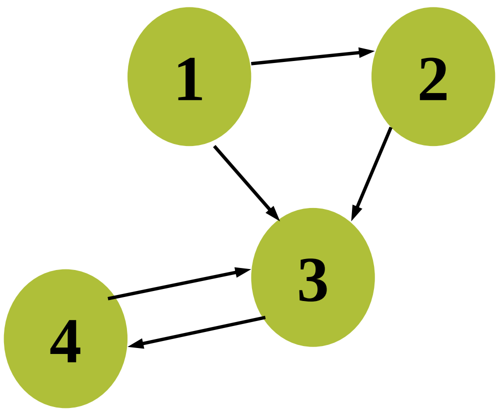
(adiante....)

Teorema

- Seja X a matriz adjacência de D, e seja $Y=X^h$. Então y_{ij} é o número total de sequências distintas $(v_i, ..),...(..,v_j)$ que
  - Possuem comprimento h
  - Correspondem a caminhos em D

- Exercício: provar por indução sobre h

No exemplo anterior



X: Matriz Adjacência

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

X^2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X^3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$X^{4} = X^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

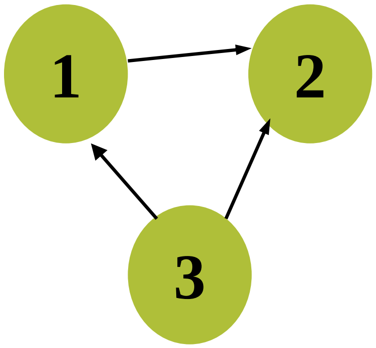
$X^{5} = X^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Corolário 1:

- Se X^h = Matriz Nula, para algum $h \leq n$, então D é <u>acíclico</u>.

- Verifique para o exemplo (n = 3):



- Já temos então um algoritmo que calcula X^h, de ordem n^3, para responder à pergunta:

- P2: Qual o número de caminhos de comprimento k de v_i a v_j? (não valorados)

Corolário 2:

- Se X é matriz adjacência de D e

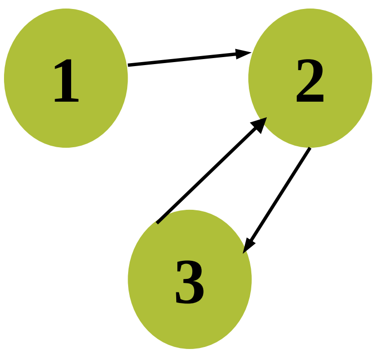
$Q = X + X^2 + X^3 + ... + X^n$, então a matriz caminho P é tal que

$$p_{ij} = 1 \Leftrightarrow q_{ij} \neq 0$$

Repare que:

- q_{ij} é a quantidade de caminhos possíveis de v_i a v_j, de comprimentos $\leq n$ (pode haver mais, sse D for cíclico)
- Pelo Corolário 1, se há caminho de v_i a v_j, ele aparecerá até a potência n de X

Exemplo



$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- O Corolário 2 nos dá um algoritmo para calcular a matriz caminho P a partir de X, mas ele é muito caro, visto que envolve muitos produtos de matrizes.
- Para torná-lo mais eficiente, usamos operações booleanas and $\wedge$ e or $\vee$ no lugar de multiplicação e soma, e redefinimos X^k e Q, a partir de X, com valores booleanos 0 e 1.

X^k : $\quad x^k_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (x^{k-1}_{ik} \wedge x_{kj})$; $1 \leq i,j \leq n$

Q : $\quad q_{ij} = x_{ij} \vee x^2_{ij} \vee \ldots \vee x^n_{ij}$

Mas então Q é a própria matriz P desejada!

Então $P = X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n$,

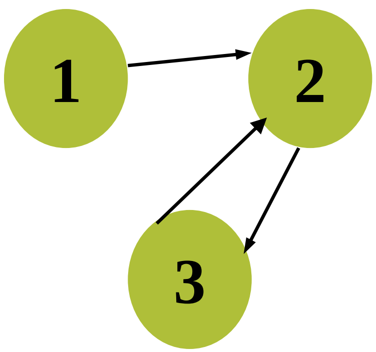
onde $X^k = X^{k-1} \wedge X$

Algoritmo de Roy-Warshall (RW)

- Calcula P, a matriz caminho de D, a partir de sua matriz adjacência, X.

```
Algoritmo:
Dada Xnxn, matriz adjacência de D(V,A)
Início
      Faça P = X;
      para j = 1 até n faça
          para i = 1 até n faça
               se pij = 1 /*se já há caminho de i a j*/
               então para k = 1 até n faça
                          pik = pik ∨ pjk /*então haverá de
i a k se houver de j a k */
Fim
```

Exemplo



$$\begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Então P1 (Existe caminho de v_i a v_j?) já pode ser respondida

Para dígrafos valorados: calculando o caminho mínimo entre 2 vértices

- Neste caso, X, a matriz adjacência, tem os valores 1 substituídos pelos respectivos pesos.
- Seja MC, a Matriz dos custos dos caminhos mínimos, tal que:

$$MC_{ij} = \delta(i,j)$$

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\Rightarrow} v\} \; se \; \exists \; rota \; de \; u \;\; p/v \\ \infty \; cc \end{cases}$$

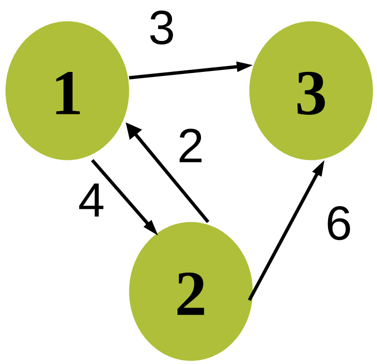
Ou seja, MC_{ij} é o custo do caminho mínimo entre i e j.

- Estratégia: Trocar 0 por ∞ e 1 pelo peso, em X

Algoritmo de Floyd-Warshall(FW)

```
Dada X de D, cria MC, a matriz dos custos dos caminhos
mínimos
Início
 faça MC = X
 para j = 1 até n faça
  para i = 1 até n faça
   se MCij ≠ ∞ então /*se há caminho de custo MCij de i a j*/
     para k = 1 até n faça
      MCik = min (MCik, MCij + MCjk) /*então o custo min. de i
a k é o mínimo entre o caminho direto de i a k e a soma de i a
j e de j a k*/
Fim
```

Exemplo



$$X = MC_1 = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 \\ 2 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \sim MC = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

$(\infty, 4+2)$ $(4, \infty)$ $(3, 4+6)$

$(2, \infty)$ $(6, 2+3)$

$(\infty, 2+4)$

E assim RF responde P4: Qual é o custo do caminho mínimo de v_i a v_j? (valorados)

Consequência

- O que acontece se, no algoritmo FW, todo peso for =1?

MC_{ij} é o <u>comprimento</u> do menor caminho entre v_i e v_j

Assim, RF também responde:

P3: Qual é o comprimento do caminho mínimo de v_i a v_j? (valorados)

Queremos mais…

- Além do custo do caminho mínimo, e do seu comprimento, queremos o <u>próprio caminho</u>, ou seja, a <u>sequência de vértices que o compõe</u>

- Basta uma pequena alteração no algoritmo FW:
- Calcula-se simultaneamente a MC, uma matriz M, de igual dimensão de X.

Cálculo do caminho mínimo

- No início:

$$M_{ik} = k, \text{ se } X_{ik} \neq \infty$$

$$M_{ik} = 0, \text{ se } X_{ik} = \infty$$

- Ou seja, no início, M_{ik} representa o vértice onde incide a aresta que parte de v_i (0 indica inexistência de aresta)
- A ideia é alterar os valores de M sempre que um caminho alternativo é calculado (i.e. quando o custo mínimo é alterado), de forma que no final, M_{ik} contém o rótulo do próximo vértice do caminho mínimo de v_i a v_k

Cálculo do caminho mínimo

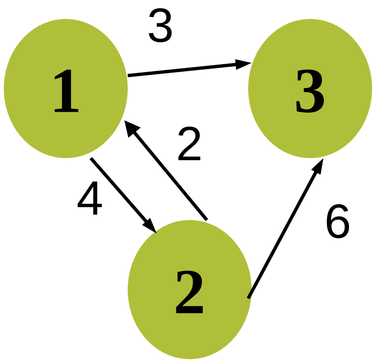
- P.ex.
- Se $(v_i, v_t, v_u, \ldots., v_k)$ é o cam. mínimo de v_i a v_k, então $M_{ik} = t$
- Mas o restante do caminho é facilmente recuperado, uma vez que M_{tk} tem o próximo vértice do caminho: v_u
- E assim por diante

Algoritmo FW com especificação de caminho – FW+

```
Dada X, cria MC e M
Início
 faça MC = X
 inicialize M conforme a definição*
 para j = 1 até n faça
  para i = 1 até n faça
   se MCij ≠ ∞ então
      para k = 1 até n faça
       se Mcik > MCij + MCjk então
              {MCik = MCij + MCjk;
               Mik = Mij}
Fim
```

* Slide 31

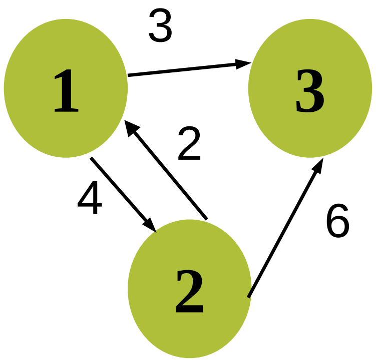
Calculando M para o exemplo anterior



$$X = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 \\ 2 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando M para o exemplo anterior



MC

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

M

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Leitura das Matrizes M e MC:

- o c.m. de v1 a v1 é (v1,v2,v1) com custo 6
- o c.m. de v1 a v2 é (v1,v2) com custo 4
- o c.m. de v1 a v3 é (v1,v3) com custo 3
- o c.m. de v2 a v1 é (v2,v1) com custo 2
- o c.m. de v2 a v2 é (v2,v1,v2) com custo 6
- o c.m. de v2 a v3 é (v2,v1,v3) com custo 5
- Não existem caminhos a partir de v3

Concluindo

- E finalmente FW+ responde também

  P5: Qual é o caminho mínimo (menor custo) de v_i a v_j? (valorados)

- Repare que, ao usar os algoritmos sobre a Matriz de Adjacência, temos as respostas simultaneamente para todo par de vértices (i,j), a um custo de $O(n^3)$

- A seguir, veremos algoritmos sobre Listas de Adjacências, que respondem às perguntas, dados (i,j) específicos.

Exercícios

- Programe os algoritmos vistos usando o TAD Matriz de Adjacência