Grafos: Busca

Algoritmos e Estruturas de Dados 2

Graça Nunes

Percorrendo um grafo

Percorrendo um Grafo

- Percorrer um grafo é uma tarefa fundamental
- Pense no caso de se procurar uma certa informação associada a um vértice/aresta num grafo
- Deve-se ter uma forma sistemática de visitar as arestas e os vértices
- O algoritmo deve ser suficientemente flexível para se adequar à diversidade de grafos

Eficiência

Percorrendo um Grafo

- Eficiência
  - Não deve haver repetições (desnecessárias) de visitas a um vértice e/ou aresta

Correção

Percorrendo um Grafo / Busca em Grafos

- Correção
  - Todos os vértices e/ou arestas devem ser visitados, se o objetivo for passar por todos

Algoritmo Básico de Busca em Grafo

- Utiliza o conceito de marcar os vértices, de modo a registrar que ele já foi visitado.
- Seja G um grafo conexo em que todos vértices não estão marcados (não foram ainda visitados)
- Passo Inicial:
  - escolher e marcar um vértice arbitrário v;
- Passo Geral:
  - selecionar (explorar) uma aresta (v,w) incidente a um vértice marcado v e que não tenha sido selecionada anteriormente
  - Se w é não marcado, marca-se w
- O processo termina quando todas as arestas de G tiverem sido selecionadas

Algoritmo Geral de Busca num Grafo Conexo

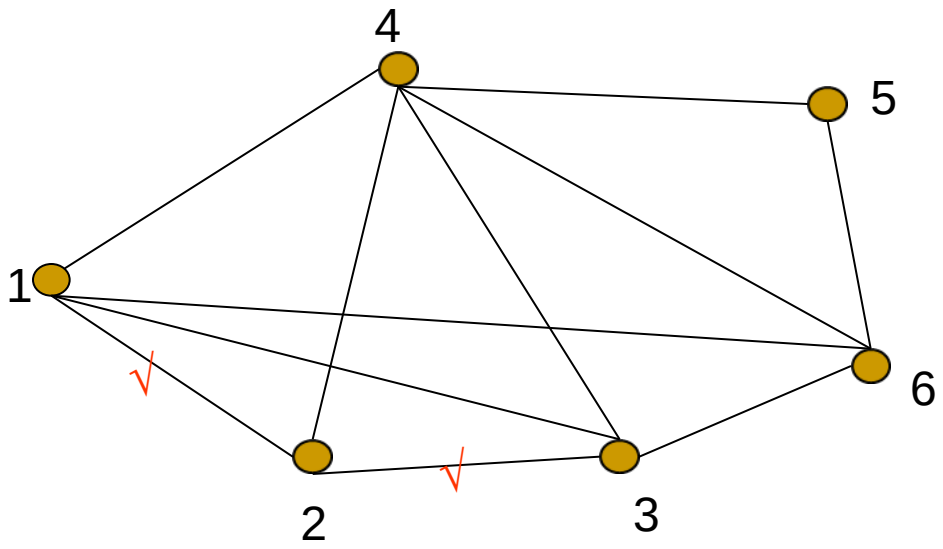
- Dado um Grafo (V,A) conexo:

início

escolher e marcar um vértice inicial;
enquanto existir algum vértice v marcado e incidente a uma aresta (v,w) não explorada,
faça escolher o vértice v e explorar
(marcar) a aresta (v,w)
se w é não marcado
então marcar w

fim

Exemplo



Vértice inicial: 1 (raiz da busca)

Marca (v)	Explora (aresta)
1	(1,2)
2	(2,3)

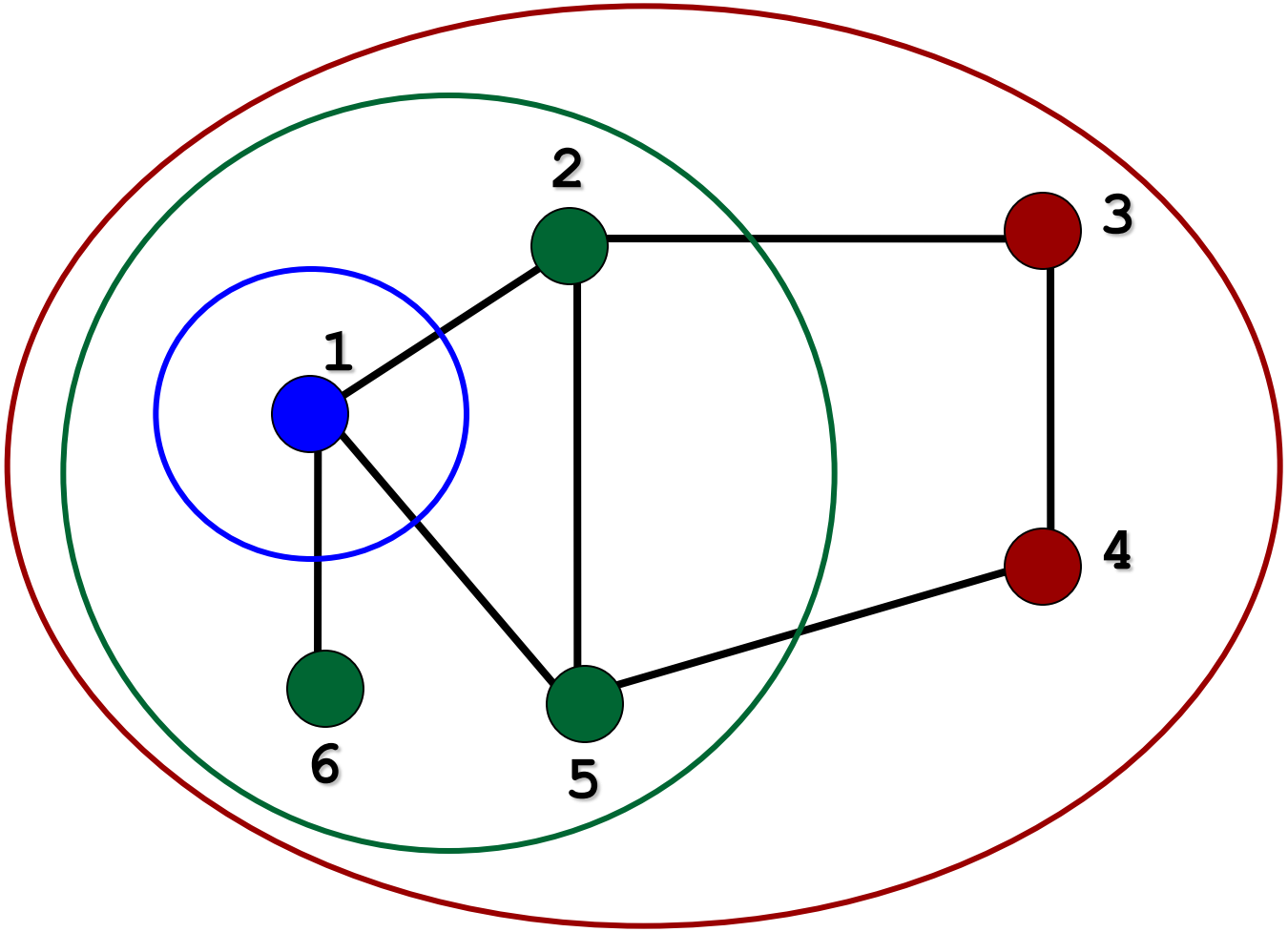
.....

Variação do Algoritmo Geral

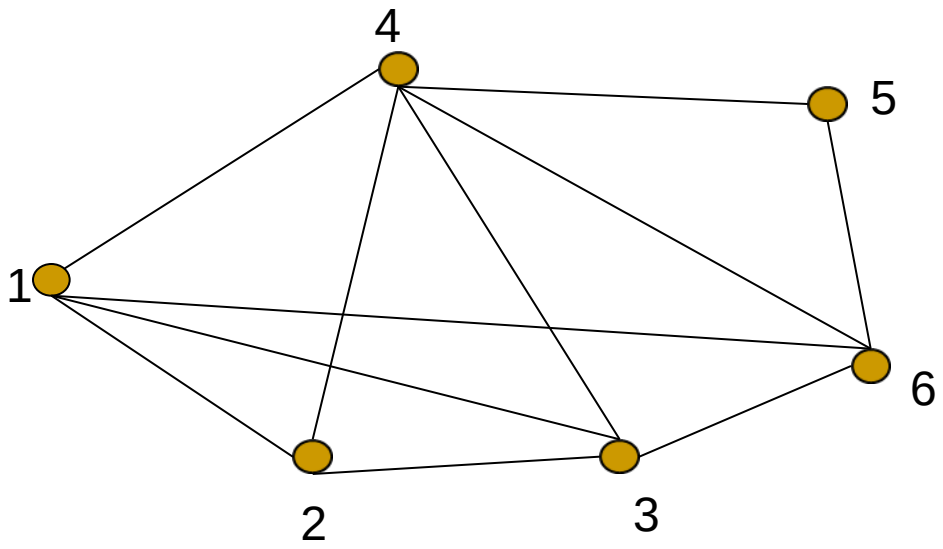
- BFS – *Breadth-First Search – Busca em Largura*
- A busca em largura é obtida do método básico, onde a seleção do próximo vértice marcado obede a:
  - *Dentre todos os vértices marcados e incidentes a alguma aresta ainda não explorada, escolher aquele menos recentemente alcançado na busca*
- Dessa forma, os vértices são armazenados numa fila de modo a serem processados *"first in first out"*

BFS – exemplo

Percorre-se o grafo como se houvesse uma onda na água!



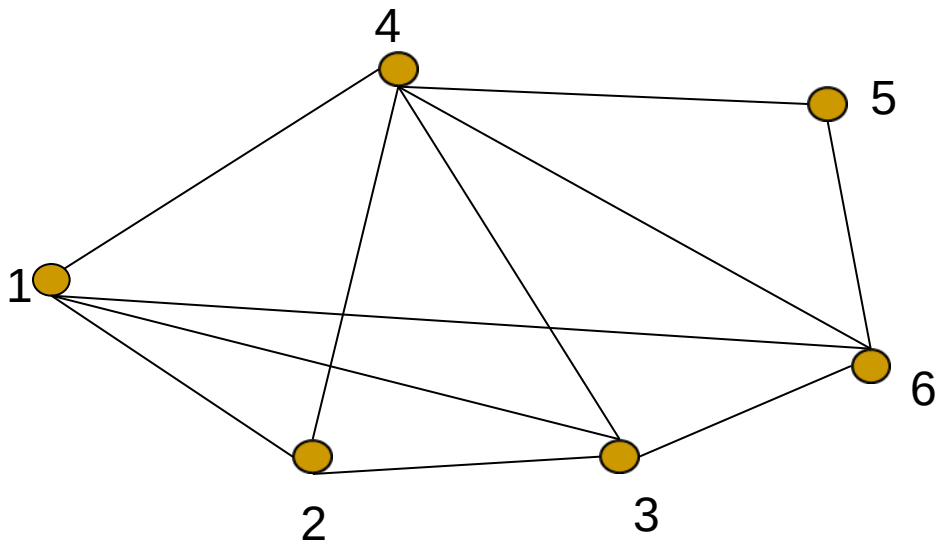
Aplique o algoritmo ao grafo abaixo



Listas de Adjacências:
1: (4,2,3,6)
2: (1,4,3)
3: (2,1,4,6)
4: (1,2,3,6,5)
5: (4,6)
6: (3,1,4,5)

Vértice inicial: 1 (raiz da busca)
Q:
Vértices Marcados:
Arestas Visitadas:

Aplique o algoritmo ao grafo abaixo



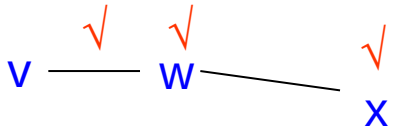
Listas de Adjacências:
1: (4,2,3,6)
2: (1,4,3)
3: (2,1,4,6)
4: (1,2,3,6,5)
5: (4,6)
6: (3,1,4,5)

Vértice inicial: 1 (raiz da busca)
Q: (1,4,2,3,6,5)
Vértices Marcados: 1,2,3,6,5
Arestas Visitadas: (1,4) (1,2) (1,3) (1,6) (4,2) (4,3) (4,6) (4,5) (2,3) (3,6) (6,5)

Algoritmo Busca em Largura

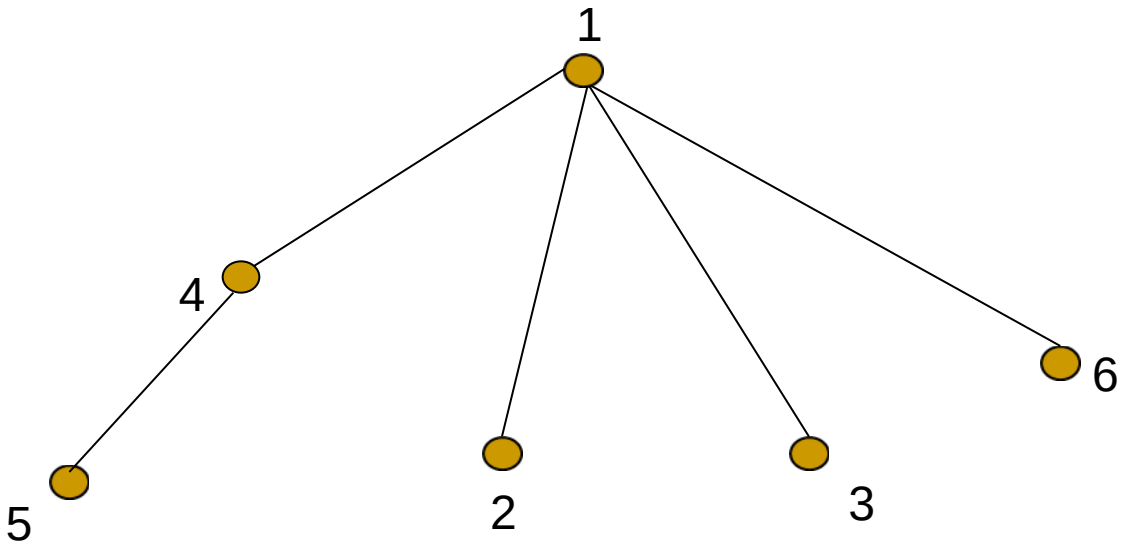
Dado G(V,A), conexo:

escolher uma raiz s de V
definir uma fila Q, vazia
marcar s
inserir s em Q
enquanto Q não vazia faça
    seja v o 1o. vértice de Q
    para cada w ∈ ListaAdjacencia(v) faça
        se w é não marcado então
(I)   visitar (v,w)
                   marcar w
                   inserir w em Q
(II)   senão se w ∈ Q então visitar (v,w) /*w alcançado por outro caminho*/
            /*senão já processou w e portanto (w,v)*/
    /*fim_para*/
    retirar v de Q
/*fim_enquanto*/



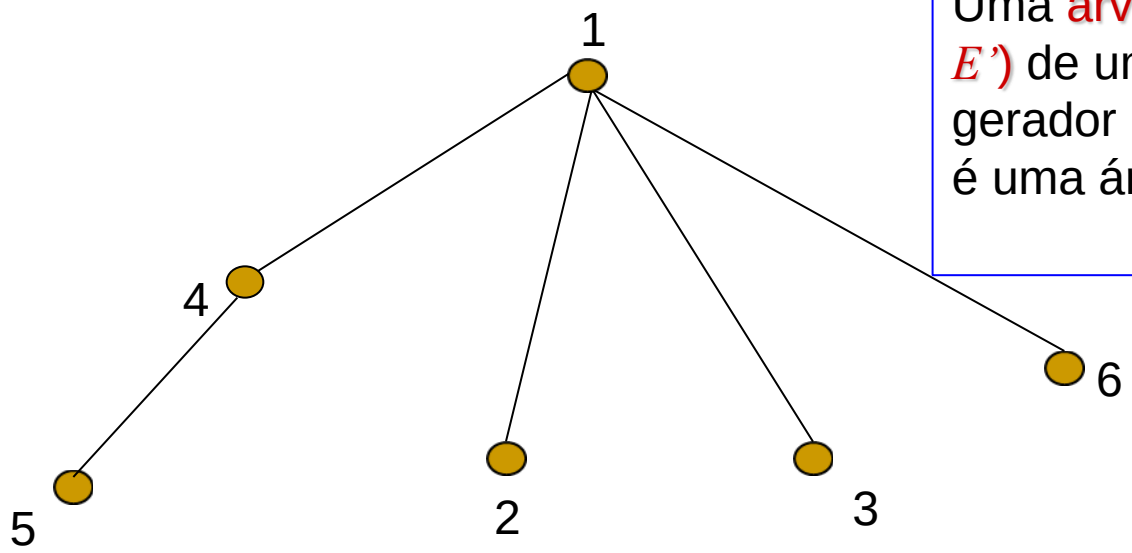
Árvore Geradora do Grafo

Seja E_T o conjunto das arestas visitadas em (I). O Grafo $T(V,E_T)$ é uma árvore geradora de G (também chamada de árvore de largura de G).



Árvore Geradora do Grafo

Seja E_T o conjunto das arestas visitadas em (I). O Grafo $T(V,E_T)$ é uma <u>árvore geradora</u> de G (também chamada de árvore de largura de G).



Uma árvore geradora $G' = (V', E')$ de um grafo é um subgrafo gerador ($V' = V$ e $E' \subseteq E$) que é uma árvore.

BFS (Busca em Largura)

- BFS – *Breadth-First Search*
  - Todos os nós com distância k a um nó v são visitados antes dos nós com distância k+1(garantido pelo uso da fila)
  - Descobre todos os vértices alcançáveis a partir de v (portanto, pode ser usada para achar caminhos)
  - A busca em largura resulta no caminho mais curto entre o vértice inicial e um vértice qualquer x

BFS – outra forma de visualizar

- É comum a utilização de esquemas de cores para identificar os nós ainda não visitados (branco), visitados (cinza) e já completamente processados (preto)
- Entre todos os visitados, o próximo a ser processado é o primeiro de uma Fila (Fila_Visitado)

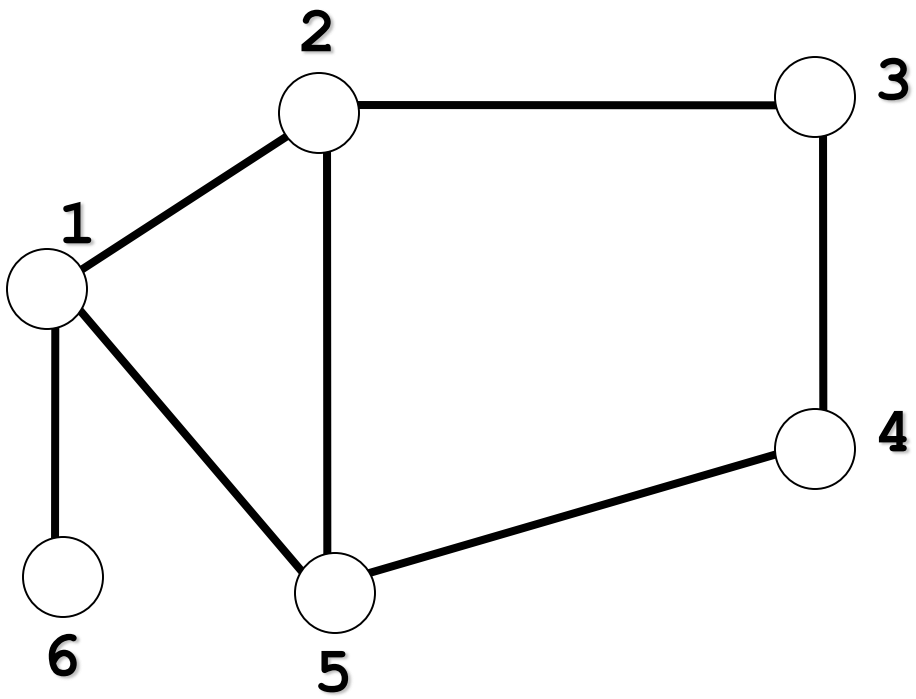
BFS (Busca em Largura)

Percorrendo um Grafo

- BFS – *Breadth-First Search*
  - Todos os vértices são inicializados brancos
  - Quando um vértice v é descoberto pela primeira vez, ele se torna cinza
  - Quando todos os vértices adjacentes a v são descobertos, v se torna preto

BFS – exemplo

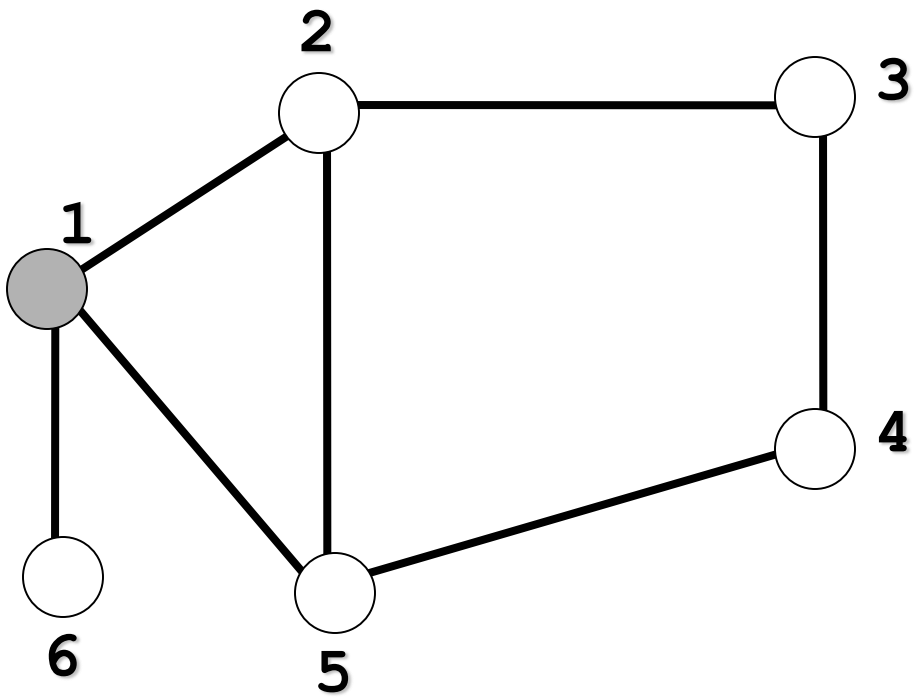
Percorrendo um Grafo: BFS



NãoVisitado:[1,2,3,4,5,6]; Processado:[ ]; Fila_Visitado:[ ];

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

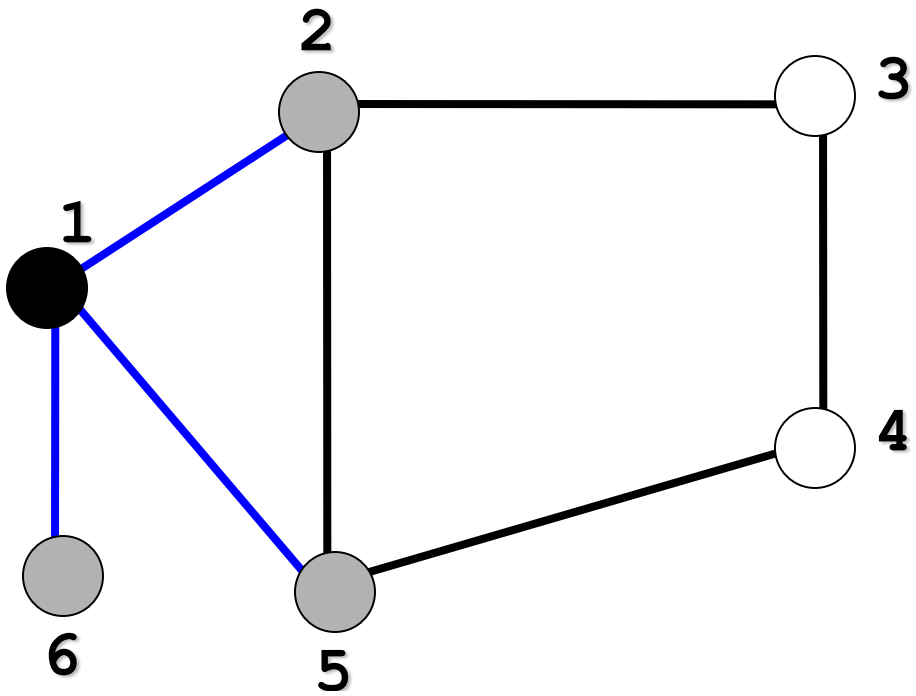


inicial: 1; Fila_Visitado:[1]; NãoVisitado:[2,3,4,5,6]; Processado:[ ];

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

K=1

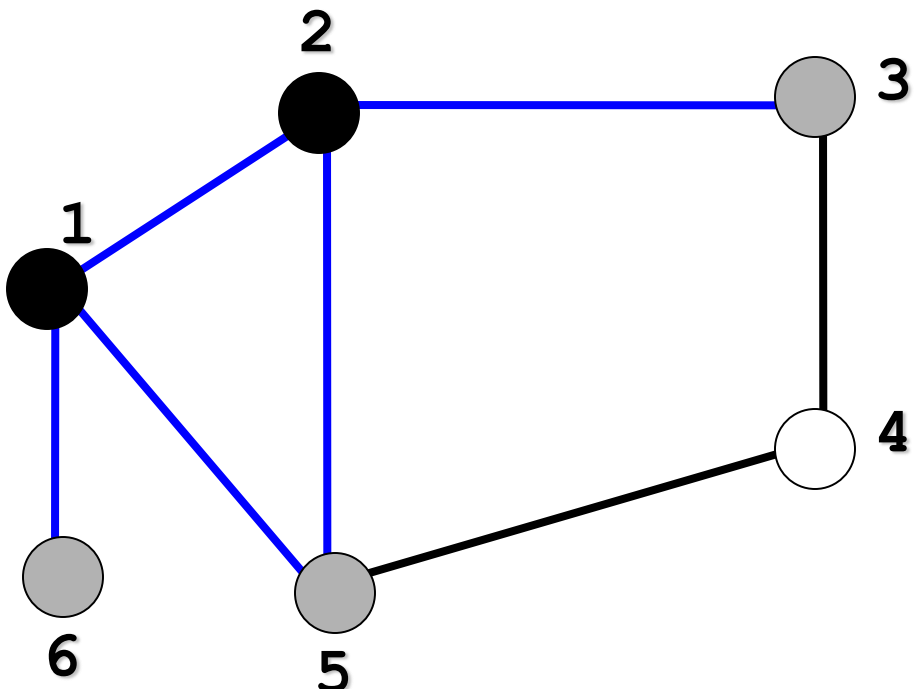


Visitam-se todos os nós não visitados adjacentes a 1: 2, 5 e 6;
NãoVisitado:[3,4]; Processado:[1]; Fila_Visitado:[2,5,6]

BFS – exemplo

- Percorrendo um Grafo: BFS

K=2

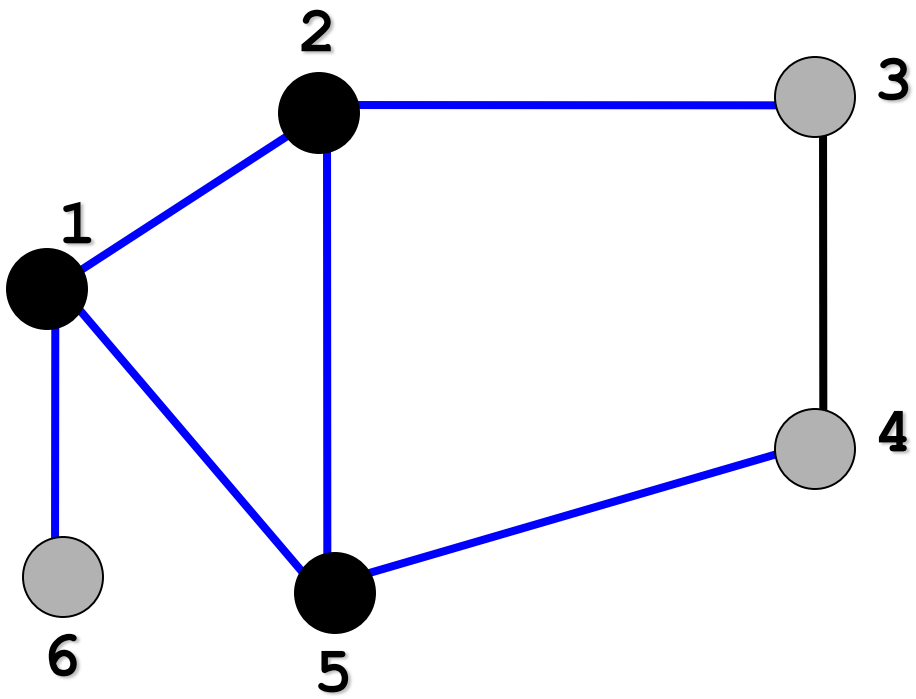


Visitam-se todos os nós não visitados adjacentes a 2: 3;
NãoVisitado:[4]; Processado:[1,2]; Fila_Visitado:[5,6,3]

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

K=2

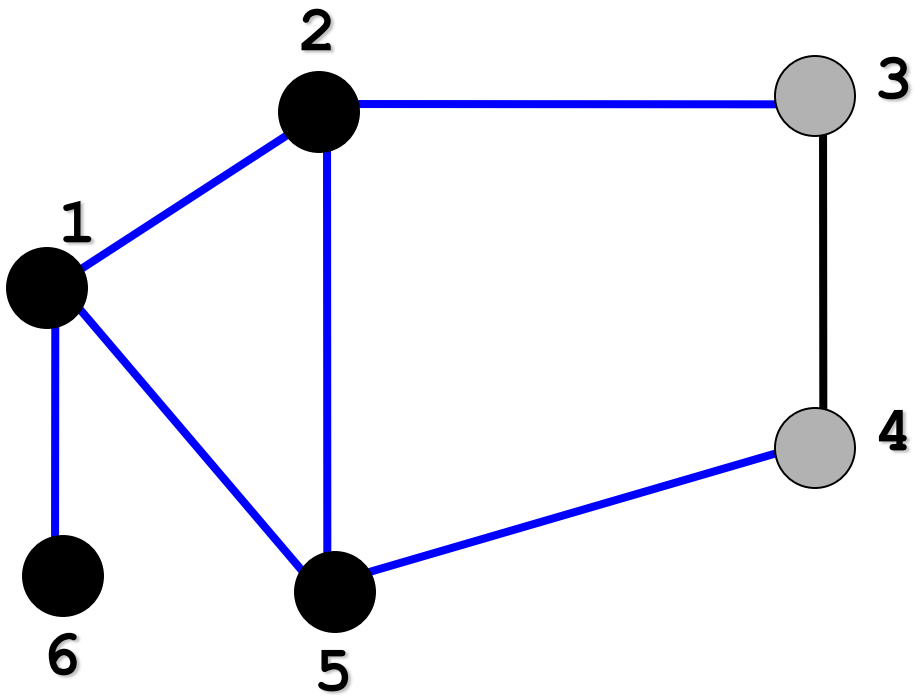


- Visitam-se todos os nós não visitados adjacentes a 5: 4
  NãoVisitado:[ ]; Processado:[1,2,5]; Fila_Visitado:[6,3,4]

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

K=2

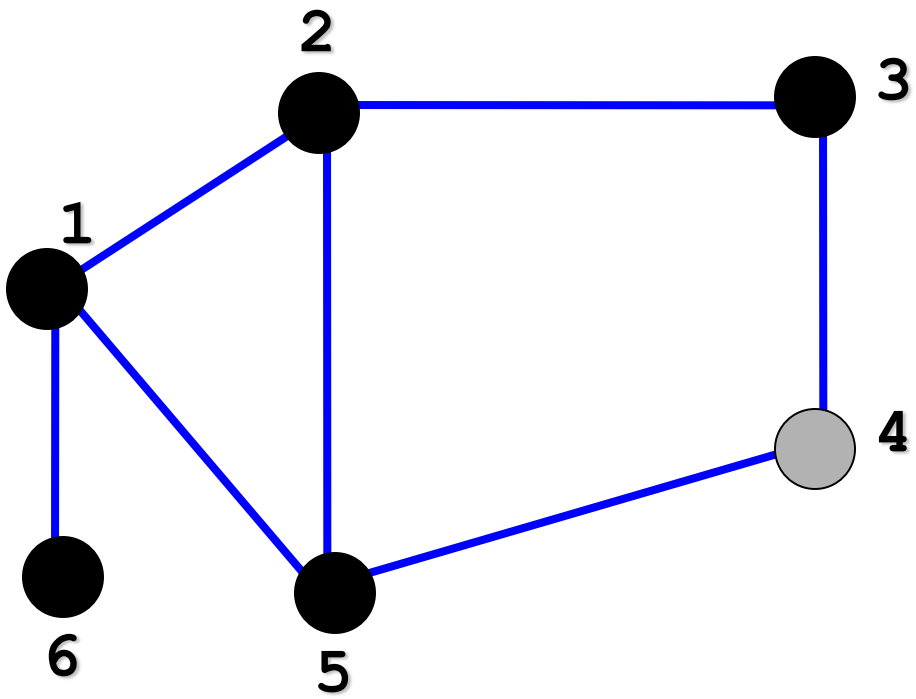


Visitam-se todos os nós não visitados adjacentes a 6: nenhum;
NãoVisitado:[ ]; Processado:[1,2,5,6]; Fila_Visitado:[3,4]

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

K=3

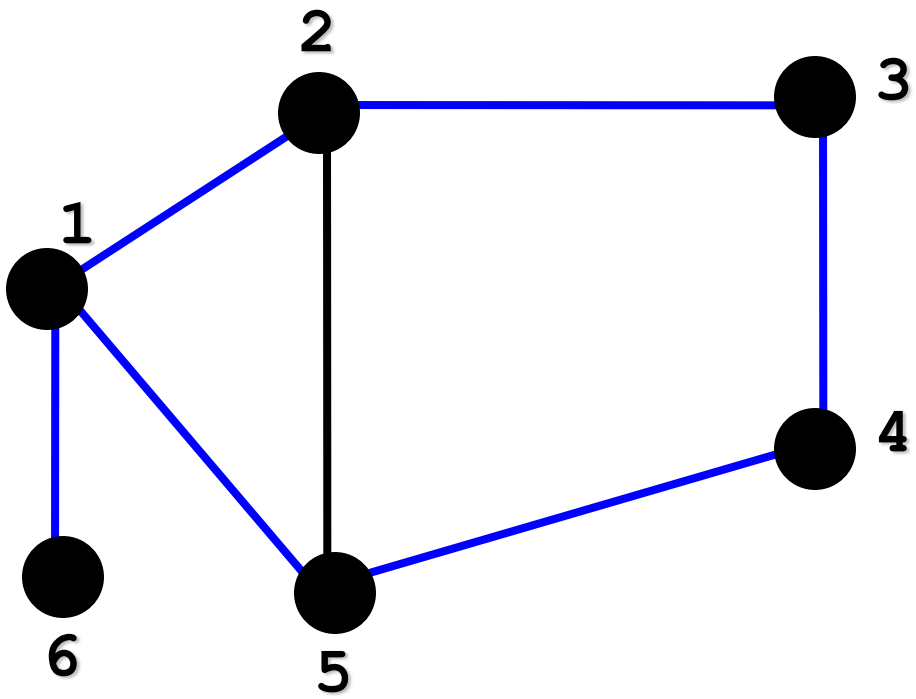


Visitam-se todos os nós não visitados adjacentes a 3: nenhum;
NãoVisitado:[ ]; Processado:[1,2,5,6,3]; Fila_Visitado:[4]

BFS – exemplo

- Percorrendo um Grafo: BFS

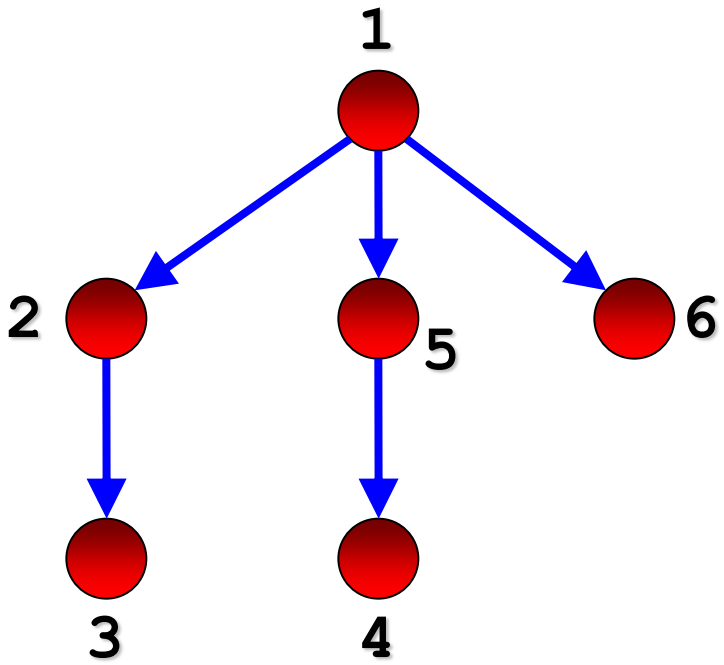
K=3



Visitam-se todos os nós não visitados adjacentes a 4: nenhum;
NãoVisitado:[ ]; Processado:[1,2,5,6,3,4]; Fila_Visitado:[ ]

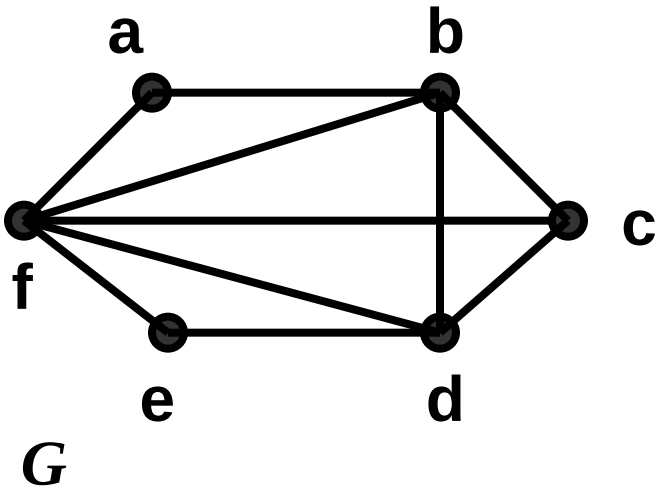
BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: **árvore de busca em largura**



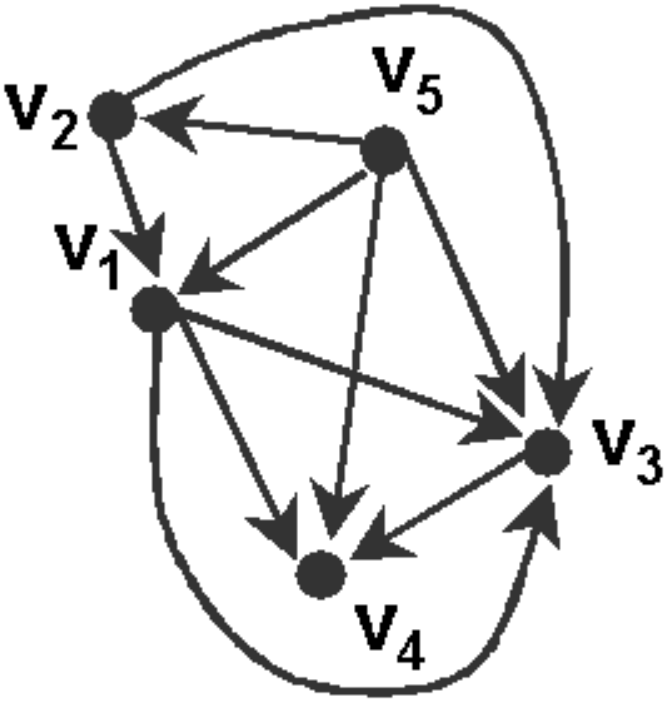
BFS (Busca em Largura)

- Exercício: faça a busca em largura no grafo abaixo, mostrando a ordem de visita aos vértices



BFS (Busca em Largura)

- Exercício: faça a busca em largura no dígrafo abaixo, mostrando a ordem de visita aos vértices



BFS (Busca em Largura)

- Implementação da busca em largura com Listas de Adjacência

Complexidade do BFS

O(|V| + |E|), ou seja, linear em relação ao tamanho da representação do grafo por listas de adjacências

- Todos os vértices são enfileirados/desenfileirados no máximo uma vez; o custo de cada uma dessas operações é O(1), e elas são executadas O(|V|) vezes
- A lista de adjacências de cada vértice é percorrida no máximo uma vez (quando o vértice é desenfileirado); o tempo total é O(|E|) (soma dos comprimentos de todas as listas, igual ao número de arestas)