Dr. Martin Mittelbach, Dr. Anne Wolf 06.04.2023

Selbsttest zur Lehrveranstaltung Informationstheorie

In der Lehrveranstaltung *Informationstheorie* verwenden wir Begriffe und Konzepte aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, vor allem aus dem Themenkomplex Stochastik. Dieser Test soll Ihnen ein Feedback über Ihren Leistungsstand (Vorwissen und mathematische Fähigkeiten) zu Beginn der Lehrveranstaltung geben. Beachten Sie bitte folgendes:

- Dieser Selbsttest sollte idealerweise nach der 1. Vorlesung (05.04.2023) durchgeführt werden. Er kann wahlweise vor oder nach der 1. Übung (06.04.2023) durchgeführt werden.
- Nehmen Sie sich ausreichend Zeit für diesen Test (am besten ohne Störungen).
- Sie können Ihre Antworten direkt in den Freiräumen unter den Fragen notieren (wahlweise im pdf-Dokument oder im Ausdruck). Alternativ notieren Sie Ihre Lösungen auf eigenem Papier.
- Bearbeiten Sie den Test eigenständig und ohne zusätzliches Material oder Taschenrechner.
- Geben Sie neben jeder (Teil-)Aufgabe an, wie sicher Sie sich bei der jeweiligen Lösung sind.
  $\rightsquigarrow$ 0 % (vollkommen unsicher) ... 100 % (vollkommen sicher)
- Vergleichen und diskutieren Sie danach (wenn möglich) Ihre Antworten mit Ihren Kommilitonen.
- Recherchieren Sie anschließend Antworten zu Fragen, bei denen Sie sich unsicher sind, z. B. im Skript (online verfügbar), vor allem Kapitel § 0 und Anhang, oder anderen geeigneten Quellen.
- Offene Fragen zum Selbsttest können im 1. Tutorium (Donnerstag, 13.04.2023, 2. DS) gemeinsam diskutiert werden.

Themenkomplex I: Stochastik

$\rightsquigarrow$ *Möglichkeit zur Auffrischung: überwiegend durch Studium der 1. Vorlesung*

Aufgabe 1: (diskrete Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert, Varianz)

Gegeben sei die diskrete Zufallsgröße X mit dem Alphabet $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_X\colon\ \mathcal{X} \to [0, 1]$.

a) Ergänzen Sie die folgende Tabelle.

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	

____ %

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ der Zufallsgröße X.

$\mathbb{E}(X) =$

____ %

c) Berechnen Sie die Varianz $\operatorname{var}(X)$ der Zufallsgröße X.

$\operatorname{var}(X) =$

____ %

d) Gegeben sei weiterhin eine Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Was ist $f(X)$?

☐ *diskrete Zufallsgröße* ☐ *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

☐ *stetige Zufallsgröße* ☐ *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*

____ %

Aufgabe 2: (gemeinsame / Rand- / bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Zufallsgrößen)

Gegeben sei der diskrete Zufallsvektor (X, Y) mit dem Alphabet $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, wobei $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$ gilt, und der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{X,Y} \colon \ \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, 1]$.

$p_{X,Y}(x, y)$		y 0	1	2	$p_X(x)$
	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	
x	1	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	
	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	
$p_Y(y)$					

a) Berechnen Sie die Werte der Randwahrscheinlichkeitsfunktionen p_X und p_Y der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{X,Y}$, d. h. die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsgrößen X und Y. Tragen Sie die Werte in die oben gegebene Tabelle ein. ____%

b) Sind die Zufallsgrößen X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

____%

c) Berechnen Sie die Werte der bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_{Y \mid X}(\cdot \mid x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$ und tragen Sie die Werte in die unten gegebene Tabelle ein.

$p_{Y \mid X}(y \mid x)$		y 0	1	2	
	0				
x	1				
	2				

____%

d) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, welche Teilaussage korrekt ist.

Die diskreten Zufallsgrößen X und Y sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn gilt:

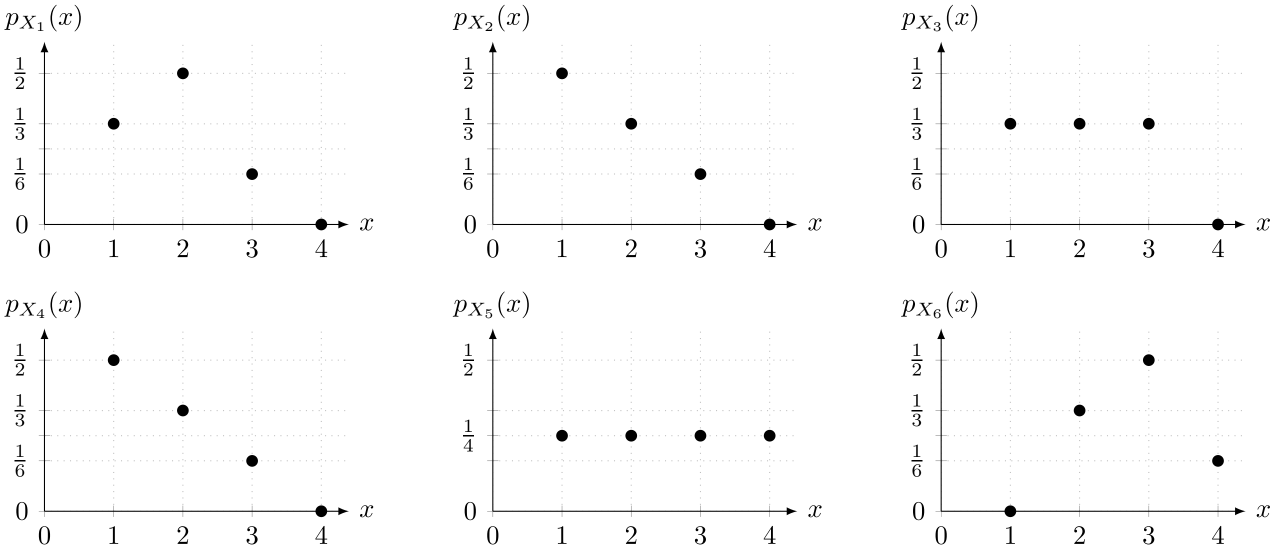
- ○ $p_{X,Y} = p_X \, p_Y$.
  ○ $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \, p_Y(y)$. ____%

- ○ $\exists \, (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:
  ○ $\forall \, (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:
  $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \, p_Y(y)$. ____%

- $\forall \, (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$: $p_{Y \mid X}(y \mid x) =$
  ○ $p_X(x)$.
  ○ $p_Y(y)$.
  ○ $p_{X,Y}(x, y)$. ____%

Aufgabe 3: (Gleichverteilung, identische Verteilung)

Gegeben seien die diskreten Zufallsgrößen X_i mit $i = 1, 2, \dots, 6$, dem Alphabet $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ und den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_{X_i} \colon \mathcal{X} \to [0, 1]$, die hier graphisch dargestellt sind.



a) Welche der gegebenen Zufallsgrößen sind gleichverteilt?
☐ X_1 ☐ X_2 ☐ X_3 ☐ X_4 ☐ X_5 ☐ X_6 ____%

b) Welche der gegebenen Zufallsgrößen sind identisch verteilt?
☐ X_1 ☐ X_2 ☐ X_3 ☐ X_4 ☐ X_5 ☐ X_6 ____%

Aufgabe 4: (Transformation diskreter Zufallsgrößen)

Gegeben seien die diskreten Zufallsgrößen X und Y mit dem Alphabet $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$ und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X bzw. p_Y. Die beiden Zufallsgrößen sind unabhängig und gleichverteilt auf $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Die Zufallsgrößen Z und W sind definiert als $Z := X + Y$ bzw. $W := Z \bmod 3$.

x	y	z	w
1	1		
1	2		
1	3		
2	1		
2	2		
2	3		
3	1		
3	2		
3	3		

a) Bestimmen Sie den Träger $\mathcal{S}_Z$ der Zufallsgröße Z und den Träger $\mathcal{S}_W$ der Zufallsgröße W.

$\mathcal{S}_Z =$

$\mathcal{S}_W =$

____%

b) Bestimmen Sie die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion p_Z der Zufallsgröße Z für alle $z \in \mathcal{S}_Z$ und tragen Sie sie in die gegebene Tabelle ein.

z					
$p_Z(z)$					

____%

c) Bestimmen Sie die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion p_W der Zufallsgröße W für alle $w \in \mathcal{S}_W$ und tragen Sie sie in die gegebene Tabelle ein.

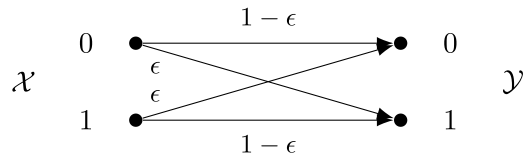
w			
$p_W(w)$			

____%

Aufgabe 5: (totale Wahrscheinlichkeit)

Gegeben seien die diskreten Zufallsgrößen X und Y mit dem Alphabet $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Die Zufallsgröße X ist Bernoulli-verteilt mit dem Parameter q, d. h. für die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X der Zufallsgröße X gilt $p_X(1) = q$ mit $q \in [0, 1]$. Gegeben sind außerdem die folgenden Werte der bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

$$p_{Y\,|\,X}(1\,|\,0) = p_{Y\,|\,X}(0\,|\,1) = \epsilon$$
$$p_{Y\,|\,X}(0\,|\,0) = p_{Y\,|\,X}(1\,|\,1) = 1 - \epsilon$$



Berechnen Sie die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion p_Y der Zufallsgröße Y.

$p_Y(0) =$

$p_Y(1) =$

____ %

Aufgabe 6: (Aussagen zu Zufallsgrößen und deren Verteilung)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese *wahr* (☐ w) oder *falsch* (☐ f) ist.

- Aus der Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen folgt stets deren Unkorreliertheit. ☐ w ☐ f ____ %
- Aus der Unkorreliertheit zweier Zufallsgrößen folgt stets deren Unabhängigkeit. ☐ w ☐ f ____ %
- Zwei Zufallsgrößen, deren Kovarianz Null ist, sind stets unkorreliert. ☐ w ☐ f ____ %
- Zwei Zufallsgrößen, deren Kovarianz Null ist, sind stets unabhängig. ☐ w ☐ f ____ %
- Zwei unkorrelierte normalverteilte Zufallsgrößen sind stets unabhängig. ☐ w ☐ f ____ %
- Unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen sind stets gemeinsam normalverteilt. ☐ w ☐ f ____ %
- Die Summe normalverteilter Zufallsgröße ist stets normalverteilt. ☐ w ☐ f ____ %

Themenkomplex II: Algebra

⇝ *Möglichkeit zur Auffrischung: durch Selbststudium*

Aufgabe 7: (lineares Gleichungssystem)

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2\,x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -3\,x_1 \phantom{{}- x_2} + 2\,x_3 &= 16 \end{aligned}$$

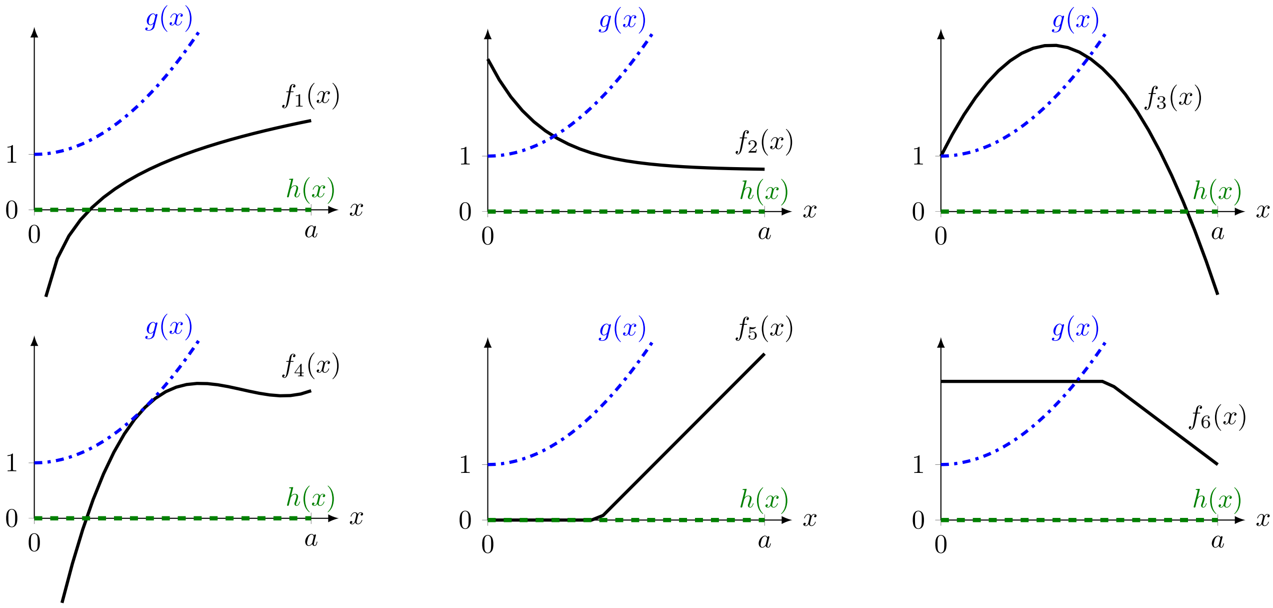
____ %

Themenkomplex III: Analysis

$\rightsquigarrow$ *Möglichkeit zur Auffrischung: überwiegend durch Studium der 1. Übung*

Aufgabe 8: (Eigenschaften von Funktionen)

Gegeben seien die Funktionen $f_i\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_i(x)$ mit $i = 1, 2, \ldots, 6$ und dem Intervall $\mathcal{I} = (0, a]$, die durch folgende Graphen beschrieben sind:



a) Was ist der Unterschied zwischen f_1 und $f_1(x)$ für $x \in \mathcal{I}$?

____%

b) Welche der gegebenen Funktionen sind auf dem Intervall $\mathcal{I} = (0, a]$ …

- positiv? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%
- nichtnegativ? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%
- monoton steigend? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%
- streng monoton fallend? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%
- konvex? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%
- streng konkav? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%
- untere Schanken für $g\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%
- obere Schanken für $h\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$? ☐ f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐ f_6 ____%

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, welche Teilaussage korrekt ist.

c) Eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ heißt monoton steigend, wenn folgendes gilt:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \quad \begin{array}{l} \bigcirc\ \leq\ 0. \\ \bigcirc\ \geq\ 0. \end{array}$$

____%

d) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ heißt genau dann streng monoton fallend, wenn folgendes gilt:

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x_1 < x_2\colon \quad f(x_1) \quad \begin{array}{l} \bigcirc\ <\ f(x_2). \\ \bigcirc\ >\ f(x_2). \end{array}$$

____%

e) Eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ heißt konvex, wenn folgendes gilt:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) \quad \begin{array}{l} \bigcirc\ \leq\ 0. \\ \bigcirc\ \geq\ 0. \end{array}$$

____%

f) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ heißt genau dann streng konkav, wenn folgendes gilt:

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in (0, 1)\colon \quad f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \quad \begin{array}{l} \bigcirc\ <\ \lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2). \\ \bigcirc\ >\ \lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2). \end{array}$$

____%