zu Aufgabe 6:

a) Für den Erwartungswert der Zufallsgröße Z_n gilt

$$\mathbb{E}\left(Z_n\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_k\right) \overset{(2)}{=} \frac{1}{n}\, n\, \mathbb{E}\left(Y_1\right) = \mathbb{E}\left(Y_1\right) = \mathbb{E}\left(g(X_1)\right)$$

mit (1) wegen der Linearität des Erwartungswertes (siehe (§ 0.54) 1)) und mit (2) wegen der identischen Verteilung der Zufallsgrößen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.
Für die Varianz der Zufallsgröße Z_n gilt

$$\operatorname{var}\left(Z_n\right) = \operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{var}\left(Y_k\right) \overset{(2)}{=} \frac{1}{n^2}\, n \operatorname{var}\left(Y_1\right) = \frac{1}{n}\operatorname{var}\left(Y_1\right) = \frac{1}{n}\operatorname{var}\left(g(X_1)\right)$$

mit (1) wegen (§ 0.51) 5) und da aus der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ nach (§ 0.57) auch deren (paarweise) Unkorreliertheit folgt und mit (2) wegen der identischen Verteilung der Zufallsgrößen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

b) Für die Grenzwerte erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Z_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(g(X_1)\right) = \mathbb{E}\left(g(X_1)\right) = \text{konst.} \quad \text{und}$$
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}\left(Z_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\operatorname{var}\left(g(X_1)\right) = 0.$$

zu Aufgabe 9:

a) Gegeben seien zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsvektoren $p, q \in \mathcal{M}$ der Länge n. Damit gilt:

$$p = (p_k)_{k=1}^n = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad p_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1 \quad \text{sowie}$$
$$q = (q_k)_{k=1}^n = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad q_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n q_k = 1.$$

Jede mögliche mit Hilfe von $\lambda \in [0,1]$ gebildete Linearkombination von p und q soll auch wieder ein Wahrscheinlichkeitsvektor sein, d. h. zur Menge $\mathcal{M}$ gehören und die damit verbundenen Eigenschaften erfüllen. Ein solcher Vektor ist

$$r := \lambda \cdot p + (1-\lambda) \cdot q,$$

wobei die einzelnen Vektorkomponenten durch $r_k := \lambda\, p_k + (1-\lambda)\, q_k$ gegeben sind.
Es ist nun zu zeigen, dass der Vektor r die durch die Menge $\mathcal{M}$ definierten Eigenschaften erfüllt.

(1) Es gilt $r = (r_k)_{k=1}^n = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ wegen $\lambda \in [0,1]$ und $p_k, q_k \in \mathbb{R}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$.

(2) Es gilt $p_k > 0$ und $q_k > 0$ nach Voraussetzung. Weiterhin gilt $\lambda \geq 0$ und $(1-\lambda) \geq 0$ für $\lambda \in [0,1]$, wobei mindestens einer der beiden Terme echt größer Null ist, d. h. es gilt $\lambda > 0$ oder $(1-\lambda) > 0$. Damit ergibt sich zwangsläufig $r_k > 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$.

(3) Es gilt $\sum_{k=1}^n r_k = 1$ wegen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n r_k &= \sum_{k=1}^n (\lambda\, p_k + (1-\lambda)\, q_k) \\ &= \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^n p_k}_{=1} + (1-\lambda) \underbrace{\sum_{k=1}^n q_k}_{=1} \\ &= \lambda + (1-\lambda) = 1.\end{aligned}$$

Damit gilt $r \in \mathcal{M}$ für beliebige Vektoren $p, q \in \mathcal{M}$ und jede reelle Zahl $\lambda \in [0,1]$. Daraus folgt, dass $\mathcal{M}$ eine konvexe Menge ist.

b) Für die Herleitung verwenden wir wieder die Schreibweise $r := \lambda \cdot p + (1-\lambda) \cdot q$ mit den Vektorkomponenten $r_k := \lambda\, p_k + (1-\lambda)\, q_k$.
Wir erhalten folgende (Un-)Gleichungskette:

$$\begin{aligned}H(\lambda \cdot p + (1-\lambda) \cdot q) &\overset{(1)}{=} -\sum_{k=1}^n (\lambda\, p_k + (1-\lambda)\, q_k) \log_2(\lambda\, p_k + (1-\lambda)\, q_k) \\ &= -\lambda \sum_{k=1}^n p_k \log_2(\underbrace{\lambda\, p_k + (1-\lambda)\, q_k}_{=\, r_k}) - (1-\lambda) \sum_{k=1}^n q_k \log_2(\underbrace{\lambda\, p_k + (1-\lambda)\, q_k}_{=\, r_k}) \\ &= -\lambda \sum_{k=1}^n p_k \log_2 r_k - (1-\lambda) \sum_{k=1}^n q_k \log_2 r_k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \underbrace{\left(-\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 r_k\right)}_{\overset{(2)}{\geq} -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k} + (1-\lambda) \underbrace{\left(-\sum_{k=1}^{n} q_k \log_2 r_k\right)}_{\overset{(2)}{\geq} -\sum_{k=1}^{n} q_k \log_2 q_k} \\
&\overset{(2)}{\geq} \lambda \left(-\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k\right) + (1-\lambda) \left(-\sum_{k=1}^{n} q_k \log_2 q_k\right) \\
&\overset{(1)}{=} \lambda\, H(p) + (1-\lambda)\, H(q).
\end{aligned}
$$

Dabei ergibt sich (1) aus der Definition der Funktion H und (2) aus der Anwendung des Hinweises in der Aufgabenstellung. Damit ist die Ungleichung

$$
H(\lambda \cdot p + (1-\lambda) \cdot q) \geq \lambda\, H(p) + (1-\lambda)\, H(q)
$$

für alle $p, q \in \mathcal{M}$ und $\lambda \in [0,1]$ gezeigt. Die Funktion H ist somit auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsvektoren $\mathcal{M}$ konkav.