Bern University of Applied Sciences

Analysis

Authoren:
Martin Schmidli

Dozent:
Rolf Müller

Bern, 23. April 2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen und Grenzen

1.1 Definition von Folgen

Betrachten wir Zahlenfolgen wie

1. $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$
2. $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$
3. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots$
4. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

So fällt einerseits die Gesetzmässigkeit und andererseits ein immer vorhandenes erstes Element auf.

Bezeichnen wir allgemeine Folgen mit

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

so finden wir bei

1. $a_n = 4n - 1 (n \in /N)$ das explizites Gesetz oder
   $a_n + 1 = a_n + 4$ und $a_1 = 3$ das rekursives Gesetz.
2. $b_n = 2^{5-n}$ oder
   $b + 1 = \frac{bn}{2}$ und $b_1 = 16$
3. $c_n = (-3)^{n-1}$
   Die Folge ist alternierend, das heisst + und - wechseln sich ab.
4. $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ und $d_1 = 1, d_2 = 1$ heisst Fibonacci-Folge

Definition 1. *Eine Folge ist eine Funktion mit* $\mathbb{N}$ *als Definitionsmenge*

Anstatt $f(n)$ schreiben wir bei Folgen a_n

Beispiel 1.

1. $a_n = 3n + 5$
   Also $8, 11, 14, 17, \ldots$

2. $b_n + 1 = (-2)b_n$ *und* $b_1 = -3$ *also*
   $6, -12, 24, -48$

3. $c_n + 1 = c_n + n$ *und* $c_1 = 4$ *also*
   $c_2 = c_1 + 1 = 5$
   $c_3 = c_2 + 2 = 7$
   $c_4 = c_3 + 3 = 10$
   etc.

1.2 Teilsummen

Definition 2. *Bei einer Arithmetischen Folge (AF) ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlen immer gleich.*

Beispiel 2. *1.* $2, 7, 12, 17, \ldots \to d = 5$

2. $10, 6, 2, -2, -6, \ldots \to d = -4$

Allgemein ist eine AF

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_3 + 3d \ldots, a_1 + (n-1)d$$

und damit die Teilsumme

$$s_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_3 + 3d \ldots + a_1 + (n-1)d$$

aber auch

$$s_n = a_n + a_n - d + a_n + a_n - 2d + \ldots + a_n - (n-1)d$$

und damit

$$\begin{aligned} 2s_n &= n(a_1 + a_n) \\ s_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Beispiel 3. *Wollen wir*

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$$

berechnen, so greifen wir auf die Idee von Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855, Göttingen) zurück.

$$\begin{aligned} s_{100} &= (1 + 100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Beispiel 4.

$$530 = 4 + 7 + 10 + \ldots + a_{30}$$

Es ist

$$a_n = 3_n + 1$$

also

$$a_3 0 = 91$$

und so

$$\begin{aligned} s_3 0 &= \frac{30}{2}(4 + 91) \\ &= 1435 \end{aligned}$$

Wollen wir

$$s_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + ... + a_n$$

berechnen, so bestimmen wir die Teilsummenfolge.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{10} && (1.2)\\
s_2 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{5\cdot 8} = \frac{8+2}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16} && (1.3)\\
s_3 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 11} = \frac{11+1}{8\cdot 11} = \frac{12}{8\cdot 11} = \frac{3}{22} && (1.4)\\
s_4 &= \frac{3}{22} + \frac{1}{11\cdot 14} = \frac{42+2}{2\cdot 11\cdot 14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = \frac{4}{28} && (1.5)
\end{aligned}
$$

also finden wir

$$s_n = \frac{n}{6n+4}$$

Wir beweisen mit vollständiger Induktion.

Beweis 1. *1. Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn*

$$s_1 = \frac{1}{10}$$

und s_n wird mit $n = 1$ zu

$$s_1 = \frac{1}{6\cdot 1+4} = \frac{1}{10}$$

2. Voraussetzung:

$$s_n = \frac{n}{6n+4}$$

Behauptung:

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{6(n+1)+4} = \frac{n+1}{6n+10}$$

Beweis:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

und wir müssen a_{n+1} bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

, also

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{(3(n+1)-1)(3(n+1)+2)} && (1.6)\\
&= \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.7)
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
s_{n+1} &= \frac{n}{6n+4} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.8)\\
&= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} && (1.9)\\
&= \frac{3n^2+5n+2}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.10)\\
&= \frac{(3n+2)(n+1)}{2(3n+2)(3n+5)} && (1.11)\\
&= \frac{n+1}{2(3n+5)} = \frac{n+1}{6n+10} && (1.12)
\end{aligned}
$$

3. *Nach (1) ist die Behauptung für $n = 1$ wahr und nach (2) für $n+1$, also für $n = 2$ usw. Also ist die Behauptung für alle $\mathbb{N}$ wahr.*

Natürlich finden wir auch sofort

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = (1+n)\frac{n}{2}$$

Teilsummen schreiben wir mit dem Summenzeichen $\sum$

Beispiel 5. *1.*

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{100} 4n-1 &= 3+7+10+\ldots+399\\
&= 50(3+399)\\
&= 50(402)\\
&= 20'100
\end{aligned}
$$

Summe $4n-1$, n von 1 = 100

2.

$$\sum_{k=1}^{10} 2^{3-k} = 4+2+1+\ldots+\frac{1}{128}$$

3.

$$\sum_{j=1}^{5} ajx^j = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_5x^5$$

1.3 Grenzwerte

Betrachten wir die Folge

$$a_n = (-1)^{n+1}(1 + \frac{1}{n})$$

so erhalten wir

$$2, -1.5, 1.3\overline{3}, -1.25, 1.2, -1, 1\overline{6}, \ldots$$

Zeichnen wir die Werte auf der Zahlengerade

BILD TODO

so sehen wir zwei Häufungswerte 1 und -1

Definition 3. *Wir nennen*

$$U_\epsilon(a) := [a - \epsilon; a + \epsilon]; \epsilon > 0$$

eine ϵ-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$.

Wählen wir einen kleinen ϵ -Wert so sollen unendlich-viele Zahlen in $U_\epsilon(a)$ liegen.

Definition 4. *Eine Zahl a heisst Häufungswert einer Folge a_n wenn für jedes $\epsilon > 0$ unendlich-viele Folgenglieder in $U_\epsilon(a)$ liegen.*

Beispiel 6. *1.*

$$\begin{aligned} a_n &= 2n + 1 && (1.13) \\ &\to 3, 5, 7, 9, \ldots && (1.14) \\ & && (1.15) \end{aligned}$$

also kein Häufungswert

2.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n} \\ &\to 2, 1.5, 1.\overline{3}, 1.25, 1.2, 1.16, 1.14\overline{2}857 && (1.16) \end{aligned}$$

also ist 1 ein Häufungswert.

3.

$$\begin{aligned} b_n &= 4n + 1 \\ &\to 5, 9, 13, 17, ... && (1.17) \end{aligned}$$

Also kein Häufungswert.

Besitzt eine Folge genau einen einzigen Häufungswert, so nennen wir diesen den Limes (Grenzwert) der Folge und schreiben

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a}$$

Beispiel 7. *1.*

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{1}{n} \\ &\to -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \\ \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} b_n &= (2)^{3-n} \\ &\to 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \\ \lim_{n\to\infty} (2)^{3-n} &= 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} c_n &= 3 + \frac{1}{n^2} \\ &\to 4, 3 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{9}, 3 + \frac{1}{16}, \dots \\ \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{n^2} &= 3 \end{aligned}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

5.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n (2 + \frac{1}{n})$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Definition 5. *Definition von Couchy*
Im Folgenden die Definition des Limes nach Cauchy (Louis Augustin Cauchy, 1789 bis 1857, Paris, Schweiz, Prag):
Eine Zahlenfolge (a_n) besitzt den Grenzwert a, wenn für alle $\epsilon > 0$ von einem bestimmten n an, alle weiteren Folgenglieder in $U_\epsilon(a)$ liegen:

$$\epsilon \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N} : \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \to |a_n - a| < \epsilon)$$

Beispiel 8. $a_n = \frac{5}{n}$ *hat Grenzwert* $a = 0$
Ist $\epsilon = \frac{1}{100}$*, so wird* $n_0 = 500$*, denn von* a_{501} *an sind alle Folgenglieder zwischen* $0,01$ *und* 0.

Definition 6. *Besitzt eine Folge a_n einen Grenzwert, so heisst sie konvergent, andernfalls divergent. Folgen mit Grenzwert 0 heissen Nullfolgen.*

Beispiel 9. *Nullfolgen*

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$c_n = \frac{1}{n^3} \qquad d_n = \frac{2}{n}$$

$$e_n = \frac{3}{n^2} \qquad f_n = \frac{4}{n^3}$$

Suchen wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n}$$

so formen wir um

$$\frac{4n}{n} + \frac{1}{n} = 4 + \frac{1}{n}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$$

Bei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{6n-2}$$

kürzen wir mit n und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n+3}{n}}{\frac{6n-2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}}{6-\frac{2}{n}} = \frac{5}{6}$$

Beispiel 10. *Wir kürzen jeweils mit der Variabel (n) mit der höchsten Potenz*

1.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{3n^2+5n-7} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}-\frac{7}{n^2}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4}{n^2-5} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{4}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}-\frac{5}{n^3}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{4}{n^3}}{\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}}
\end{aligned}$$

$\frac{2}{0}$ *ist nicht erlaubt*
Ist divergent, es existiert kein Grenzwert.

3.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{2n-1}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}{1-\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1-\sqrt{2-\frac{1}{n}}} \\
=\ &\frac{1+\sqrt{1}}{1-\sqrt{2}} \\
=\ &\frac{2}{1-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Um

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

zu berechnen, bestimmen wir

$$a_{100} = 2,70481\ldots, a_{1000} = 2,7169\ldots$$

und finden, dass die Folge beschränkt ist. Es ist

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e}$$

und $e = 2,71828...$ ist irrational und transzendent.

Beispiel 11. *1.*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{5n})^{5n} = e$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{3}})^{\frac{n}{3}} = e$$

3.

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{4n} \\ = & \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n]^4 \\ = & e^4 \end{aligned}$$

4.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n, k\in\mathbb{Z}$$

Wir überlegen, dass

$$1+\frac{k}{n} = 1+\frac{1}{\frac{n}{k}}$$

und finden

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}} = e$$

Weiter ist dann

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{k}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}}]^k = e^k$$

ist $k = -1$, so

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{-1}{n})^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Zusammengefasst

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \qquad (1.18)$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} = e^{-1} \qquad (1.19)$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = e^k, k\in\mathbb{Z} \qquad (1.20)$$

Kapitel 2

Differentialrechnung

2.1 Tangentenproblem

Wir betrachten eine stetige Funktion
$$f : D_f \mapsto \mathbb{R}$$
und suchen die Steigung der Tangente an dem Graphen an der Stelle $x_0 \in D_f$.

TODO

Die Tangente ist eine spezielle Lage der Sekante. Die Steigung der Sekante ist
$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
, was wir den Differenzenquotient nennen. Wird h immer kleiner, so nähert sich die Sekante der Tangente. Also ist die Tangentensteigung
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definition 7. *Wir nennen*
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{("dy nach dx")}$$
den Differentialquotienten.

Beispiel 12. *1. Welche Gleichung hat die Tangte in $x_0 = 2$ an den Graphen von $f(x) = x^3$ mit $Df = \mathbb{R}$? Mit*
$$f(x_0) = 2^3 = 8$$
und
$$f(x_0 + h) = (2 + h)^3$$
Mithilfe des Pascalschen Dreiecks finden wir
$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2h^2 + h^3$$
$$= 8 + 12h + 6h^2 + h^3$$

damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{12h+6h^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 12+6h+h^2 \\
&= 12
\end{aligned}$$

2. $g(x) = \frac{1}{x}$ *mit* $D_g = \mathbb{R}$
   0 *und* $x_0 = 3$
   Mit

$$g(x_0) = \frac{1}{3}$$

und

$$g(x_0+h) = \frac{1}{3+h}$$

wird

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} frac\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}h \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{3(3+h)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3(3+h)} \\
&= -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Welche Gleichung hat die Tangente in $x_0 = 4$ an den Graphen von $f(x) = x^2$ mit $Df = \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{8h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 8 + h \\
m &= 8
\end{aligned}$$

Der Punkt $P(4/16)$ liegt auf t.
In $y = mxy + q$
erhalten wir

$$\begin{aligned}
16 &= 8 \cdot 4 + q \\
q &= -16
\end{aligned}$$

und so

$$t : y = 8x - 16$$

Kennen wir $P(x_p/y_p)$ einer Geraden $g : y = mx + q$ so ist

$$\begin{aligned}
y_p &= mx_p + q \\
y_p - mx_p &= q
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
q : y &= mx + y_p - mx_p \\
y - y_p &= mx - mx_p \\
&\boxed{y - y_p = m(x - x_p)}
\end{aligned}$$

Wir nennen diese Form Punkt Steigungsform

2.2 Ableitung

Wir berechnen $\frac{dy}{dx}$ allgemein für ein beliebiges x_0
Ist

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } f(x) = x^2 \tag{2.1}$$

so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 2x_0 + h \\
&= \underline{2x_0} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Ist $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0)^3 - x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 + x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2 \\
&= \underline{3x_0^2} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Ist $h : \mathbb{R} \mapsto \{2\}$ mit $h(x) = 2$, So ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ Ist $i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $i(x) = x$ so ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$
Wie haben also jedem $x_0 \in D_f$ den Differentialquotienten zugeordnet und so eine Funktion gebildet. Schreiben wir x anstatt x_0, so erhalten wir die 1. Ableitung.

Definition 8. *Ist f eine differenzierbare Funktion, so heisst*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

die 1. Ableitung von f.

Wir kennen also schon

$$f(x) = k \quad \to \quad f'(x) = 0 \quad (k \in \mathbb{R}) \tag{2.4}$$
$$f(x) = x \quad \to \quad f'(x) = 1 \tag{2.5}$$
$$f(x) = x^2 \quad \to \quad f'(x) = 2x \tag{2.6}$$
$$f(x) = x^3 \quad \to \quad f'(x) = 3x^2 \tag{2.7}$$

Satz 1. *Ist*

$$f(x) = x^n \mapsto f'(x) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Beweis 2. *Mit*

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h)^n \\
&= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

wird

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+...+h^n \\
&= h(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+...+h^{n-1}) \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

und so

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+...+h^{n-1}) \\
&= nx^{n-1} \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 13.

$$f(x)=x^5-x^3 \to f'(x)=5x^4-3x^2$$

Eigenschaften der Ableitung

Die Ableitung ist ein Grenzwert und deshalb können wir die Grenzwertsätze zum teil übertragen:

$$k \in \mathbb{R} : (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel 14. *Wir wenden diese Sätze an Beispielen an:*

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 + x^4 + x^2 + 5 \\ \rightarrow f'(x) &= (x^6)' + (x^4)' + (x^2)' + (5)' \\ &= 6x^5 + 4x^3 + 2x \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= 4x^3 + 2x^2 + 6x \\ \rightarrow g'(x) &= 4(x^3)' + 2(x^2)' + 6(x)' \\ &= 4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x + 6 \cdot 1 \\ &= 12x^2 + 4x + 6 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 + 2x^3 - 6x + 8 \\ \rightarrow f'(x) &= (5x^4)' + (2x^3)' - (6x)' + (8)' \\ &= 5(x^4)' + 2(x^3)' - 6(x)' + 0 \\ &= 5(4x^3) + 2(3x^2) - 6 \\ &= 20x^3 + 6x^2 - 6 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^3}{7} + \frac{x^2}{9} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{7}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{2}x \\ \rightarrow g'(x) &= \frac{3x^2}{7} + \frac{2x}{9} - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

5.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2 + 2)(x - 1) \\ &= x^3 - x^2 + 2x - 2 \\ \rightarrow h'(x) &= 3x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

Treten in der Funktion noch Parameter auf, so wird oft die Schreibweise nach Leibniz gewählt.

Beispiel 15.

$$\begin{aligned} v &= at^2 + a^2t + a^3t^3 \\ \rightarrow \frac{dv}{dt} &= a \cdot 2t + a^2 + a^3 \cdot 3t^2 \\ &= 2at + a^2 + 3a^3t^2 \end{aligned}$$

2.3 Horizontale Tangenten

Der Graph einer Funktion f kann Punkte mit horizontaler Tangente besitzen.

$$f'(x) = 0$$

Bild Todo

- H_1, H_2 sind Hochpunkten
- S ist ein Terrassenpunkt (Scheitelpunkt) und
- T ist ein Tiefpunkt

Man beachte

$$\text{ein Graph} \neq \text{Funktion}$$

Bei einem Graph spricht man von einem ein Hoch (Hochpunkt), bei einer Funktion von einem Maximum.

Ist in x_1 die Tangente Horizontal, so ist $f'(x_1) = 0$; also können wir mit Hilfe von f' die besonderen Punkte der Graphen finden.

Beispiel 16. *1.*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Es ist

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

und

$$f'(x) = 0$$

wenn

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_{1,2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Damit

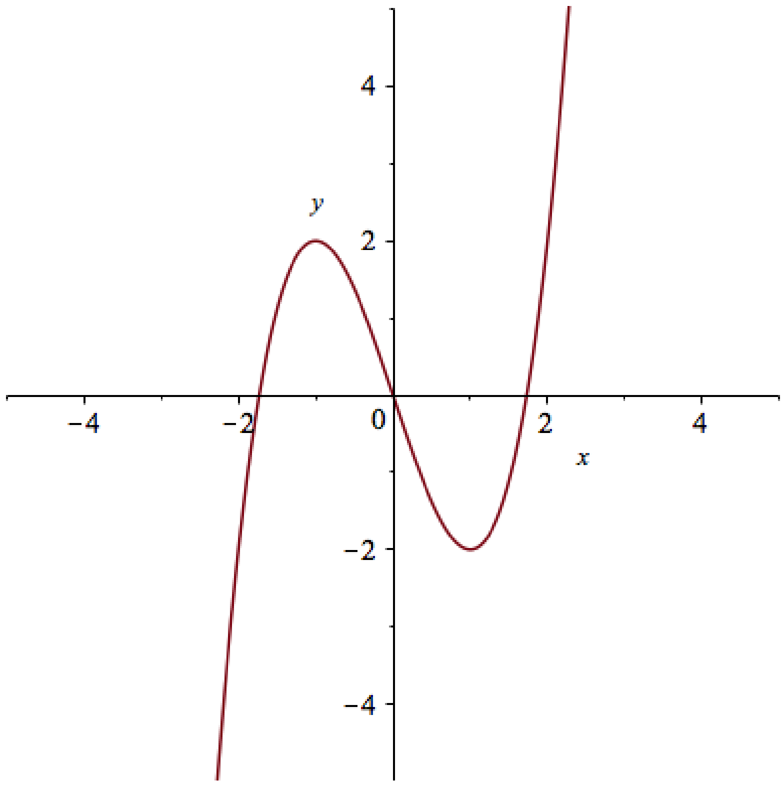
$$y_1 = f(1) = -2, y_2 = f(-1) = 2$$

BILD TODO
Wir suchen einen 3. Punkt
Mit

$$f(0) = 0$$

und

$$\begin{aligned} x^3 - 3x &= 0 \\ x(x^2 - 3) &= 0 \\ x_3 = 0, x_4 = \sqrt{3}, x_5 &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$



also hat der Graph die Form

2.

$$g(x) = x^4 - 2x^2$$

bestimme auch die Wertemenge

Es ist

$$g'(x) = 4x^3 - 4x$$

und

$$g'(x) = 0$$

wenn

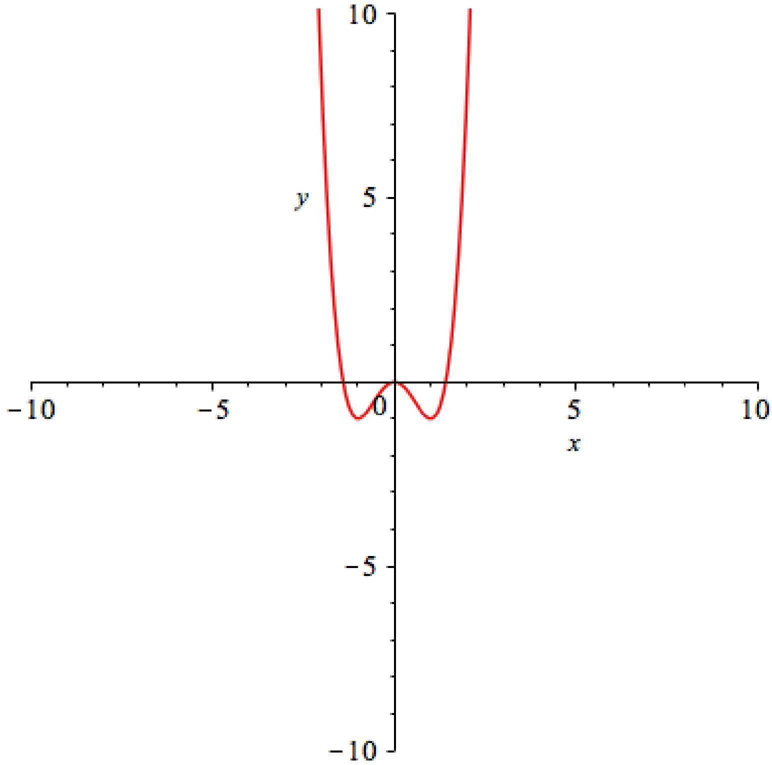
$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x^2 - 1) = 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Wir finden weiter

$$y_1 = g(0) = 0, y_2 = g(1) = -1, y_3 = g(-1) = -1$$

Wir haben die Punkte mit Horizontaler Tangente gefunden und können diese nun in den Graphen einzeichnen

Um den Graphen korrekt zeichnen zu können, suchen wir weitere Punkte.



Wir suchen die Nullstellen

$$x^4 - 2x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 2) = 0$$
$$x_1 = 0, x_4 = \sqrt{2}, x_5 = -\sqrt{2}$$
$$\textit{Wertemenge: } Wg = [-1, \infty[$$

3.

$$h : \mathbb{R}\ 0 \rightarrow R\ mit\ h(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

Mit

$$h(x9 = x + x^{-2}$$

wird

$$h'(x) = 1 - 2x^{-3} = 1 - \frac{2}{x^3}$$

und

$$h'(x) = 0$$

wenn

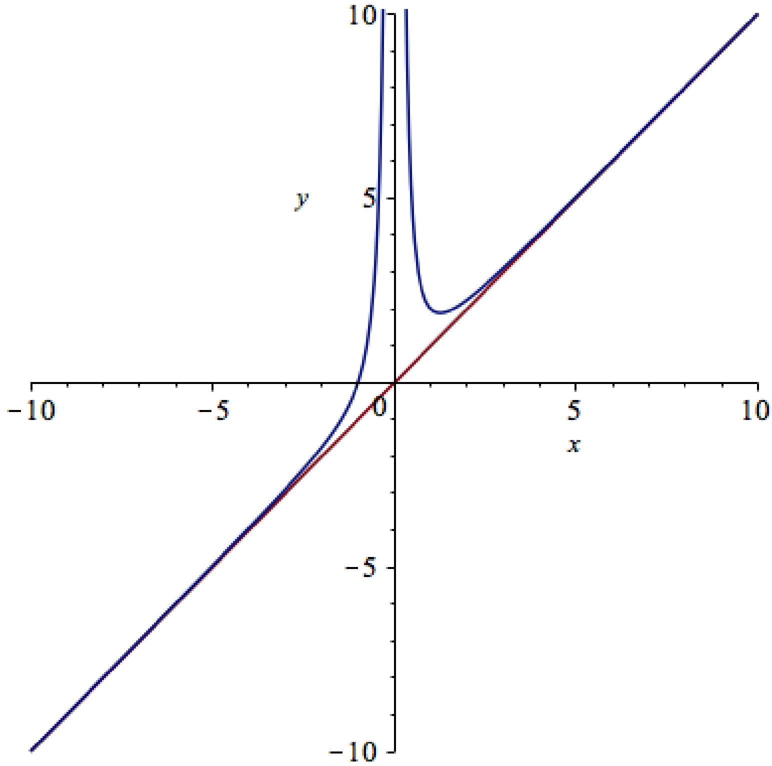
$$1 = \frac{2}{x^3}$$

$$x^3 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 1.26$$

$$\rightarrow y_1 - f(x_1) = 1.9$$

Für Grösse x ist $x + \frac{1}{x^2} \approx x$, also ist $y = x$ die Asymptote.



Definition 9. *Eine Asymptote ist eine Gerade, welcher sich der Graph einer Funktion für sehr grosse x (bzw. sehr kleine x) immer mehr nähert.*

Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x + \frac{1}{x^2} &= 0 \\
x^3 + 1 &= 0 \\
x^3 &= -1 \\
x_0 &= -1
\end{aligned}
$$

4.

$$i : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \ mit \ i(x) = x - \sqrt{x}$$

Mit

$$i(x) = x - x^{\frac{1}{2}}$$

wird

$$i'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

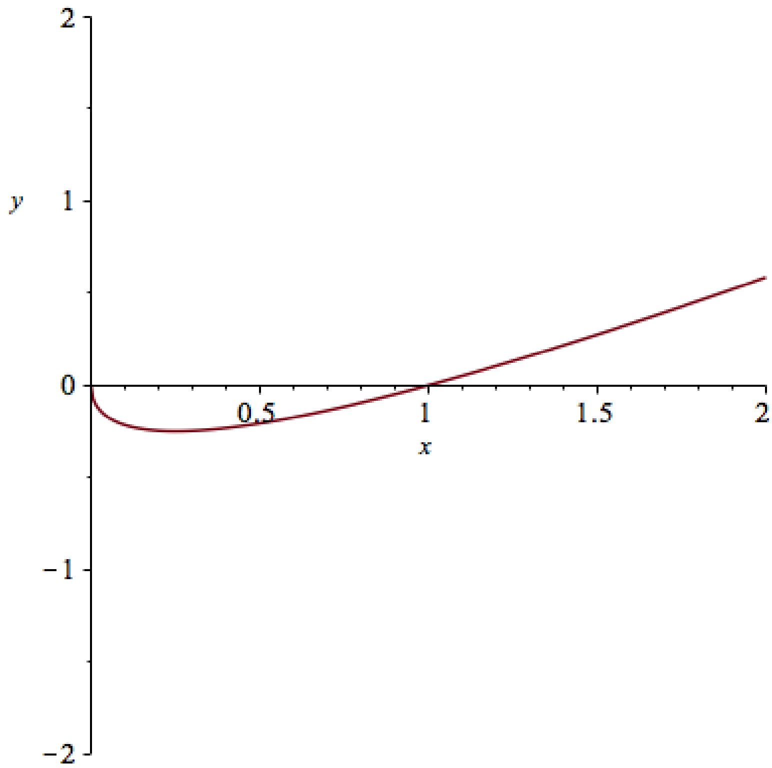
und

$$i(x) = 0$$

, wenn

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 2\sqrt{x} &= 1 \\ \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \\ x_1 &= \frac{1}{4} \to y_1 = f(x_1) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nullstellen:



$$\begin{aligned}
x - x^{\frac{1}{2}} &= 0 \\
x &= \sqrt{x} \\
x^2 &= x \\
x^2 - x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x_2 = 0, x_3 = 1
\end{aligned}$$

2.4 Nullstellen

Suchen wir die Nullstellen von

$$f(x) = x^2 - x - 30 \text{ mit } Df = \mathbb{R}$$

so ist

$$\begin{aligned} x^2 - x - 30 &= 0 \\ (x+5)(x-6) &= 0 \end{aligned}$$

also

$$x_1 = -5, x_2 = 6$$

Bei

$$g(x) = x^2 - 6x + 9, Dg = \mathbb{R}$$

wird also

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ (x-3)^2 = 0 \\ (x-3)(x-3) = 0 \end{aligned}$$

und so

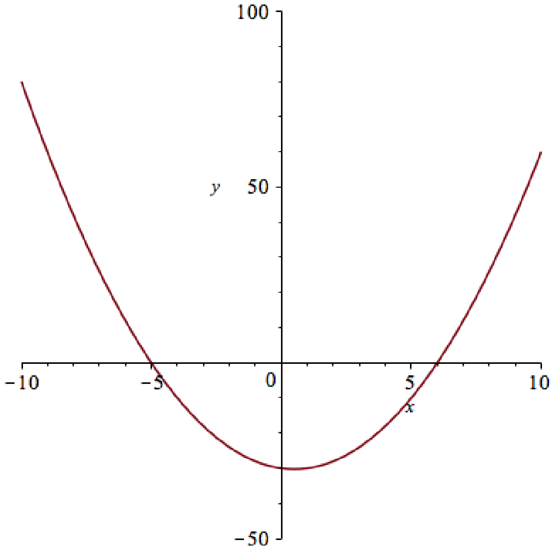
$$x_1 = 3, x_2 = 3$$

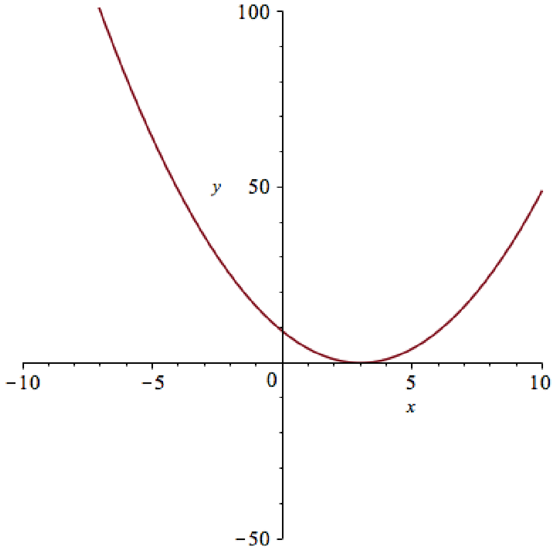
und wir nennen

$$x_{1,2} = 3$$

eine doppelte Nullstelle

Graphen von f und g





Gg besitzt einen Berührungspunkt auf der x-Achse und damit eine horizontale Tangente.

Ist

$$f(x) = (x-2)(x+3)^2 \text{ mit } Df = \mathbb{R}$$

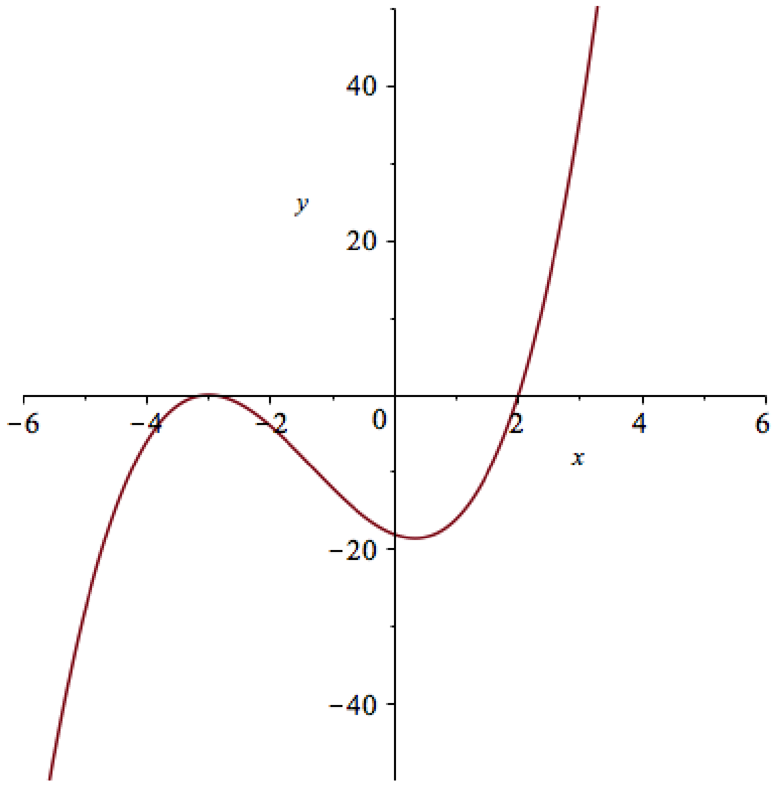
So wissen wir sofort, die Nullstelle

$$x_1 = 2$$

doppelte Nullstelle

$$x_2 = -3$$

Also berührt Gf bei $x = -3$ die x-Achse.
Wir wissen



$$f(0) < 0$$

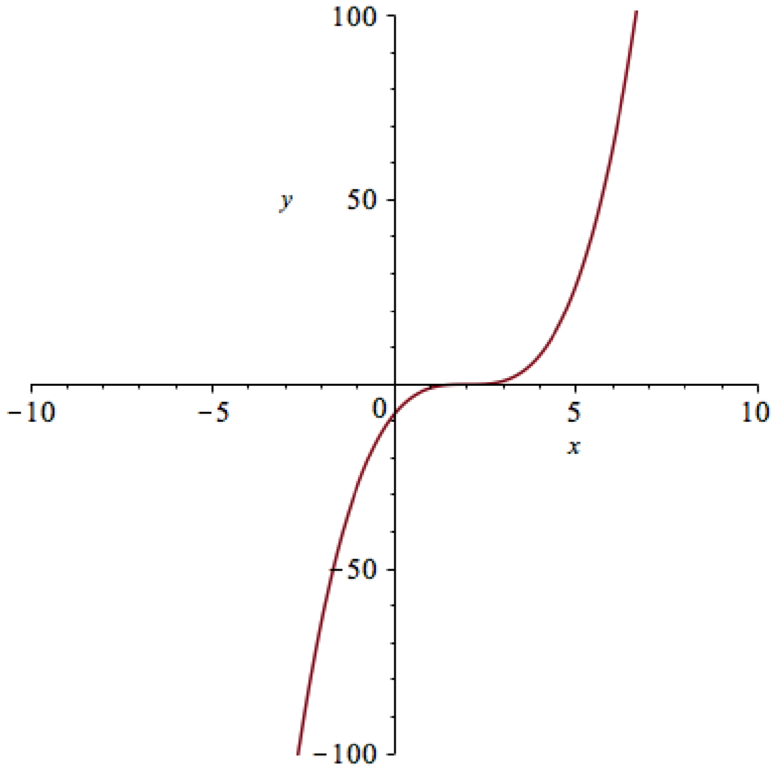
da

$$\begin{aligned} f(0) &= (0-2)(0+3)^2 \\ &= (-2)9 \\ &= -18 \end{aligned}$$

Die Funktion

$$g(x) = (x-2)^3 \text{ mit } Dg = \mathbb{R}$$

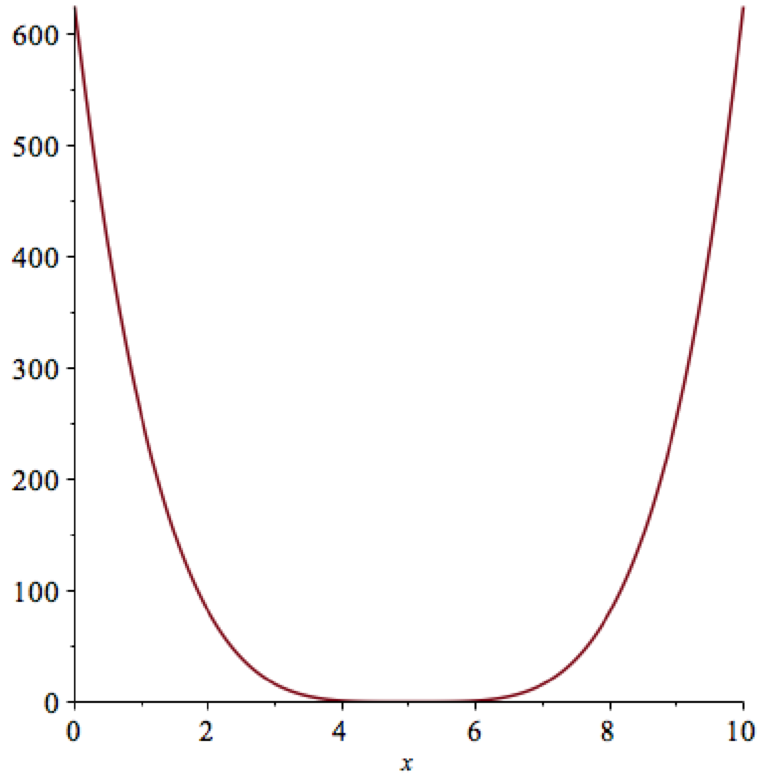
besitzt die <u>dreifache Nullstelle</u> $x_{1,2,3} = 2$
Der Graph besitzt einen Terassenpunkt auf der x-Achse.



Die Funktion

$$h(x) = (x-5)^4 \text{ mit } Dh = \mathbb{R}$$

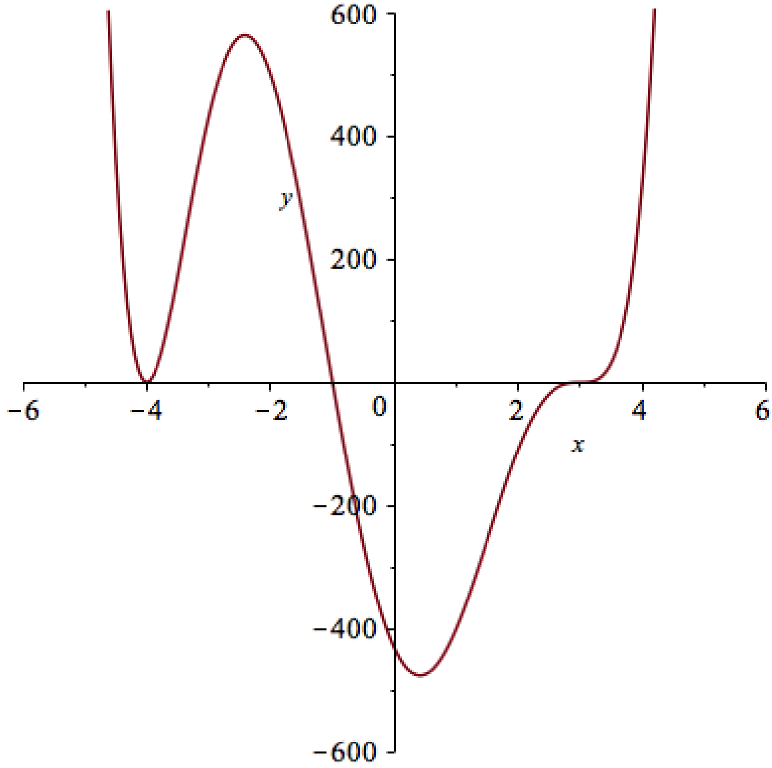
besitzt die vierfache Nullstelle $x_{1,2,3,4} = 5$ und der Graph besitzt bei $x = 5$ einen underlineFlachpunkt auf der x-Achse.



Beispiel 17. *Skizziere den Graphen von*

$$f(x) = (x+4)^2(x+1)(x-3)^3 \text{ mit } Df = \mathbb{R}$$

Also doppelte Nullstelle bei $x_{1,2} = -4 \rightarrow$ *Berührungspunkt*
einfache Nullstelle bei $x_3 = -1 \rightarrow$ *Schnittpunkt*
dreifache Nullstelle bei $x_{4,5,6} = 3 \rightarrow$ *Terassenpunkt*



unf $f(0) < 0$

2.5 Höhere Ableitung und Kurvendiskussion

Wenn wir die Ableitung f' einer Funktion erneut ableiten, so erhalten wir die zweite Ableitung f''. Fahren wir so fort, so erhalten wir $f''', f^(4), f^(5) \ldots$ und schliesslich die n. Abteilung $f^(n)$.

Beispiel 18.

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad mit \quad f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x + 10$$

$$\begin{aligned} \rightarrow f'(x) &= 12x^2 + 4x - 6 \\ f''(x) &= 24x + 4 \\ f'''(x) &= 24 \\ f^{(4)}(x) &= f^{(5)}(x) = f^{(n)}(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Definition 10. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} mit$*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

mit $a_k \in \mathbb{Q}(k = 0, 1, \ldots, n)$ und $n \in \mathbb{N}$ heisst ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) mit Grad n.

Bei ganzrationalen Funktionen n. Grades wird

$$f^{n+1}(x) = 0$$

Welche Informationen für f' erhaten wir von f''
BILD TODO
Besitzt der Graph Gf

- einen Terassenpunkt x_2 so ist $f'(x_2) = 0 \wedge f''(x_2) = 0$
- einen Hochpunkt x_3 so ist $f'(x_3) = 0 \wedge f''(x_3) < 0$
- einen Tiefpunkt x_4, so ist $f'(x_4) = 0 \wedge f''(x_4) > 0$

f" gibt Information über die Krümmung des Graphen.
rechts gekrümmt (Konkav) f"(x)<0
BILD TODO
BILD TODO
f"(x) = 0
links gekrümmt (konvex) f"(x)>0
Wendepunkt

2.5.1 Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendisskussion bestimmen wir

- Nullstellen: $f(x) = 0$
- Punkte mit horizontalen Tangenten/ Extremalwerte: f'(x) = 0

- Wendepunkte: f''(x) = 0

und skizzieren dann den Graphen Gf.

Beispiel 19. *Diskutiere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ *und bestimme die Wertemenge.*

Nullstellen:

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 8 &= 0 \\ (x^2-2)(x^2-4) &= 0 \\ x^2 - 2 = 0 \vee x^2 - 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2} \\ x_{3,4} &= \pm 2 \end{aligned}$$

Extremalwerte:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$
$$f'(x) = 0$$

wenn

$$4x(x^2-3) = 0$$
$$4x = 0 \vee x^2 - 3 = 0$$
$$x_5 = 0, x_{6,7} = 0 \pm \sqrt{3}$$
$$f(x_5) = 8, f(x_6) = f(x_7) = -1$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$
$$f''(x) = 0$$

wenn

$$12(x^2-1)$$
$$x_{8,9} = \pm 1 \to f(x_8) = f(x_9) = 3$$

Graph:
BILD TODO
Wertemenge Wf: $Wf = y | y > -1 \wedge y \in \mathbb{R} = [-1; \infty]$

Beispiel 20. *Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades besitzt in $A(2/5)$ eine horizontale Tangente und in $W(1/3)$ einen Wendepunkt.*
Bestimme die Funktionsvorschrift und skizziere dann den Graphen.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Zuerst suchen wir die Bedingungen

1. $$f(2) = 5$$

2. $$f'(2) = 0$$

3. $$f(1) = 3$$

4. $$f''(1) = 0$$

Mit

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

und

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Suchen wir die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} 8a + 4b + 2x + d = 5 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = 3 \\ 6a + 2b = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

(-1)-(3)

$$7a + 3b + c = 2$$

-(2)

$$\begin{aligned} 12a + 4b + c &= 0 \\ -5a - b &= 2 \end{aligned}$$

$+\frac{1}{2}$*(4)*

$$\begin{aligned} 3a + b &= 0 \\ -2a &= 2 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

damit finden wir

$$\begin{aligned} \rightarrow -3+b &= 0 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

eingesetzt in (2)

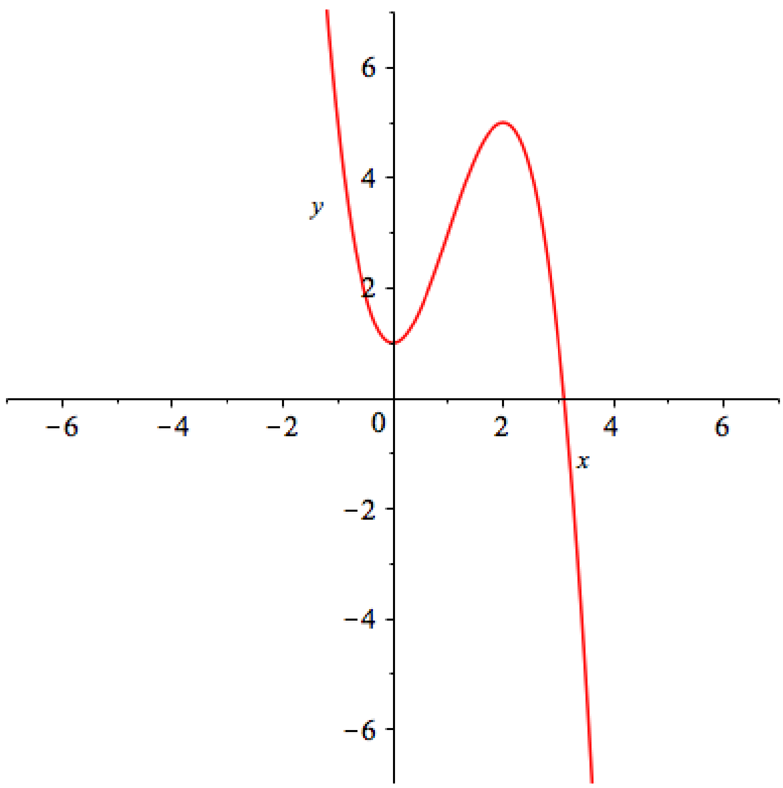
$$\begin{aligned} -12+12+c &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

in (3)

$$-1+3+d = 3$$

also

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \text{ mit } f(x) = -x^3+3x^2+1$$



Beispiel 21. *Von einer ganzrationalen Funktion 4. Grades wissen wir, dass ihr Graph im Ursprung eine horizontale Tangente besitzt und $W(1/-1)$ ein Wendepunkt ist, wobei die Wendetenagente durch den Punkt $P(0/1)$ läuft.*
Bestimme mit Hilfe von Maple die Funktionsvorschrift, diskutiere dann die Funktion und suche die Wertemenge.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

1.
$$f(0) = 0$$

2.
$$f'(0) = 0$$

oder

$$f(x) = x^2(ax^2 + bx + c)$$

da

$$x = 0$$

Eine doppelte Nulstelle ist

1.
$$f''(1) = 0$$

2.
$$f(1) = -1$$

BILD TODO

3.
$$f'(1) = -2$$

Mit Maple finden wir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; text \; f(x) = x^4 - 2x^2$$

Nullstellen:

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

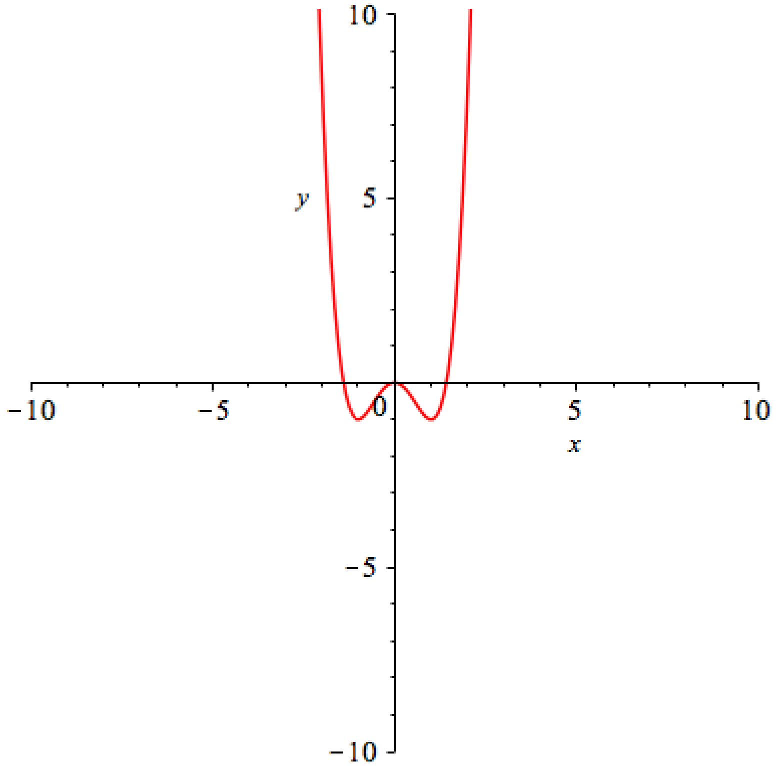
Extremalwerte:

$$x_1 = 0, x_3 = \frac{3}{2}$$
$$\to f(x_3) = -\frac{27}{10}$$

Wendepunkt:

$$x_1 = 0$$
$$\rightarrow (0/0) \ \textit{ist ein Terassenpunkt}$$
$$x_4 = 1$$
$$\rightarrow f(x_4) = -1$$

Graph:



$$\textit{Wertemenge: } Wf = [-\frac{27}{10}; \infty[$$

2.6 Extremalwertprobleme

Stellen wir uns die Frage nach dem kleinsten Benzinverbrauch, dem grössten Gewinn usw. und gelingt es uns, das Problem mit Hilfe einer Funktion zu formulieren, so können wir die Lösung mit der Differenzialrechnung finden.

TODO

Wie müssen wir Länge und Breite wählen, um mit 400m Maschendrahtzaun die grösstmögliche Fläche zu umzäunen?

1. Gesuchte Grösse berechnen
$$F = a \cdot b$$
2. Eine der auftretenden Grössen als Variable wählen

   b sei die Variable
3. Alle anderen Grössen mit Hilfe der Variablen und den bekannten Werten bestimmen
$$\begin{aligned} a + 2b &= 400 \\ a &= 400 - 2b \end{aligned} \tag{2.13}$$
4. Funktion und Definitionsmenge bestimmen
$$\begin{aligned} F(b) &= (400 - 2b) \cdot b \\ &= 400b - 2b^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$
   mit
$$\begin{aligned} D_f &= \{b \mid 0 < b < 200 \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R}\} \\ &=]0; 200[\end{aligned} \tag{2.15}$$

   TODO: Graphs
5. Extremwerte berechnen
$$F'(b) = 400 - 4b$$
   $F'(b)$ ist 0, wenn $b = 100$
6. Lösung diskutieren und alle gesuchten Grössen berechnen

   $b \in D_f$ und mit $F''(b) = -4$ wird $F''(100) < 0$, also ist bei $b = 100$ ein lokales Maximum.
   Also ist $b = 100, a = 200$ und $F_{max} = 20000$

Wählen wir einen Halbkreis, also ist

$U = 400 = r \cdot \pi \rightarrow r = \frac{400}{\pi}$

und so

$$F(Halbkreis) = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\frac{400}{\pi})^2 = \frac{400^2}{2\pi} = 25464,79$$

Beweis 3. *Beweis der Ableitung $f'(x)$: Wir beweisen mit vollständiger Induktion.*

1. *Behauptung ist für $n = 1$ wahr, denn*

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^1 - x^1}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

und

$$1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

2. *Voraussetzung:*

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1}$$

Behauptung:

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{(n+1)} - x^{(n+1)}}{h} = n \cdot x^{n-1} \\ = \quad & \lim_{h\to 0} \frac{x^{n+1}h^0 + (n+1)x^n h^1 + ... + (n+1)x^1 h^n + x^0 h^{n+1} - x^{(n+1)}}{h} \\ = \quad & \lim_{h\to 0} (n+1) \cdot x^n + ... + x^0 h^n \\ = \quad & (n+1)x^n \end{aligned} \tag{2.16}$$

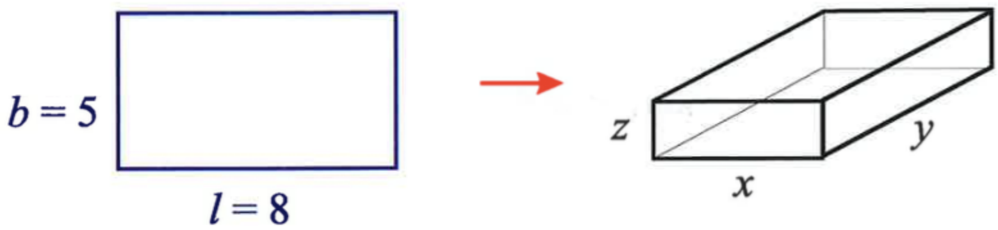
und

$$(n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = (n+1)x^n$$

3. *Nach (1) gilt die Behauptung für $n = 1$ und nach (2) gilt sie für $n + 1$, falls sie für n gilt. Also gilt sie für $n = 2$ und nach (2) für $n + 1$, ist 3 usw. Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.*

□

Beispiel 22. *Ein rechteckiges Blech mit Länge $l = 8$ und Breite $b = 5$ soll zugeschnitten werden, dass daraus eine Schachtel ohne Deckel mit maximalen Volumen entsteht.*



1.
$$V = xyz$$

2. *z sei die Variable*
   dann ist
$$\begin{aligned} x &= 8 - 2z \\ y &= 5 - 2z \end{aligned}$$
   und damit

3.
$$\begin{aligned} V(z) &= (8 - 2z)(5 - 2z)z \\ &= (40 - 16z - 10 + 4z^2)z \\ &= 4z^3 - 26z2 + 40z \end{aligned}$$

4. *mit*
$$D_v =]0; 2,5[$$

5. *Also*
$$V'(z) = 12z^2 - 52z + 40$$
   und
$$V'(z) = 0$$
   wenn
$$\begin{aligned} 3z^2 - 13z + 10 &= 0 \\ (3z - 10)(z - 1) &= 0 \\ z_1 = \frac{10}{3}, z_2 &= 1 \end{aligned}$$

6.

$$z_1 \notin D_v \text{ } aber \text{ } z_2 \in D_v$$

Mit

$$V''(z) = -24 - 52$$

wird

$$V''(1) < 0$$

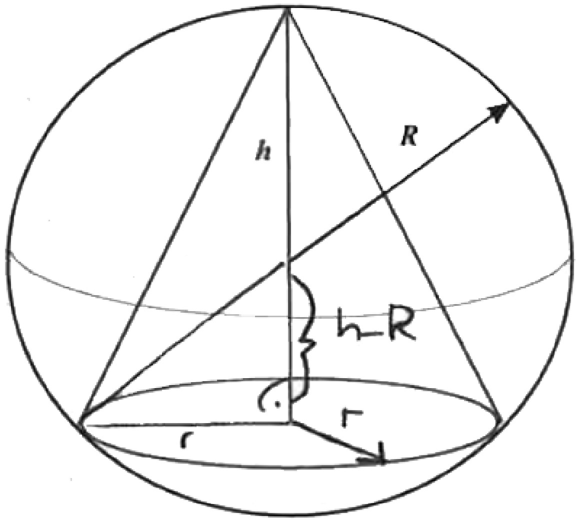
also ist

$$z = 1$$

und damit

$$x = 6, y = 3$$
$$v_{max} = 18$$

Beispiel 23. *Welche Höhe h muss ein gerader Kegel haben, wenn er einer Kugel mit gegebenen Radius R enbeschrieben ist und maximales Volumen besitzen soll?*



1. $$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{r^2 \cdot \Pi \cdot h}{3}$$

2. *h sei die Variable, dann ist*

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 + (h-R)^2 \\ R^2 &= r^2 + h^2 - 2Rh + R^2 \\ r^2 &= 2RH - h^2 \end{aligned}$$

und damit

3. $$\begin{aligned} V(h) &= \frac{(2Rh - h^2) \cdot h\Pi}{3} \\ &= \frac{\Pi}{3}(2Rh^2 - h^3) \end{aligned}$$

4. *mit*

$$D_v =]0; 2R[$$

wird

5.

$$V'(h) = \frac{\Pi}{3}(4Rh - 3h^2)$$

und

$$V'(h) = 0$$

wenn

$$\begin{aligned} h(4R - 3h) &= 0 \\ h_1 = 0 &\vee 4R = 3h \to h_2 = \frac{4R}{3} \end{aligned}$$

6.

$$h_1 \notin D_v, \ \textit{aber}\ h_2 \in D_v$$

und mit

$$V''(h) = \frac{\Pi}{3}(4R - 6h)$$

wird

$$\begin{aligned} V''(h_2) &= \frac{\Pi}{3}(4R - 6 \cdot \frac{4R}{3}) \\ &= \frac{\Pi}{3}(4R - 8R) < 0 \end{aligned}$$

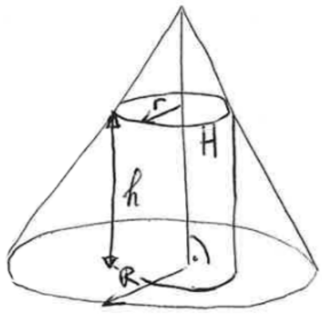
Also ist

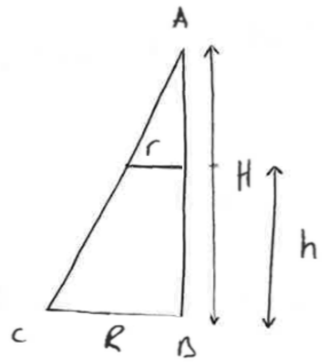
$$h = \frac{4R}{3}$$

und damit

$$\begin{aligned} V_{max} &= \frac{\Pi}{3}(2R \cdot \frac{16R^2}{9} - \frac{64R^3}{27}) \\ &= \frac{3}{\Pi} \cdot \frac{96R^3 - 64R^3}{27} \\ &= \frac{32R^3\Pi}{81} \end{aligned}$$

Beispiel 24. *Auf der Grundfläche eines geraden Drehkegels mit Kreisradius R und Höhe H steht ein Drehzylinder, welcher dem Kegel einbeschrieben ist.*
Welchen Radius muss dieser Zylinder haben, damit sein Volumen maximal wird?
Wie gross wird dann dieses Volumen?





1. $$V = r^2\Pi h$$

   und r sei die Variable.

2. *Mit der Ähnlichkeit des Dreiecks ABC und AB_1C*

   $$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h}$$

   und

   $$\frac{R^2\Pi}{r^2\Pi} = \frac{H^2}{(H-R)^2}$$

   also

   $$\begin{aligned} R(H-h) &= rH \\ RH - Rh &= rH \\ Rh &= RH - rH \\ h &= \frac{H(R-r)}{R} \end{aligned}$$

   und damit

3.

$$V(r) = \Pi r^2 \frac{H(R-r)}{R}$$

wird

4.

$$D_v =]0; R[$$

5.

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{\Pi}{R}(HRr^2 - Hr^3) \\ &= \frac{H\Pi}{R}(Rr^2 - r^3) \end{aligned}$$

so wird

$$= \quad V'(r) = \frac{H\Pi}{R}(R \cdot 2r - 3r^2)$$

und

$$V'(h) = 0$$

wenn

$$\begin{aligned} r(2R - 3r) &= 0 \\ r_1 = 0 \ oder \ r_2 &= \frac{2R}{3} \end{aligned}$$

6.

$$r_1 \notin D_v \quad aber \quad r_2 \in D_v$$

und damit

$$V''(r) = \frac{H\Pi}{R}(2R - 6r)$$

wird

$$V''(r_2) < 0$$

also wird

$$r = \frac{2R}{3}$$

und

$$\begin{aligned} V_{max} &= \frac{H \cdot T}{R}(R \cdot \frac{4R^2}{9} - \frac{8R^3}{27}) \\ &= H \cdot \Pi(\frac{4R^2}{9} - \frac{8R^2}{27}) \\ &= \frac{H \cdot \Pi \cdot 4R^2}{27} \end{aligned}$$

2.7 Winkelfunktionen, Produktregeln, Kettenregel

2.7.1 Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen sind periodisch, und zwar

$$\begin{aligned}\sin(x + k \cdot 2\Pi) &= \sin(x)\\ \cos(x + k \cdot 2\Pi) &= \cos(x)\\ \tan(x + k \cdot \Pi) &= \tan(x)\\ k &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ist

$$f : \mathbb{R} \to [-1; 1] \text{mit} t(x) = \sin(x)$$

so ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

und

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

wird

$$\begin{aligned}\sin(x + h) - \sin x &= 2 \cdot \cos(\frac{x + h + x}{2}) \cdot \sin(\frac{(x + h) - x}{2})\\ &= 2 \cdot \cos(\frac{2x + h}{2}) \sin(\frac{h}{2}) \qquad (2.17)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot (2\cos(\frac{2x + h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2})\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cdot (\cos(\frac{2x + h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2})\\ &= \lim_{h\to 0} \cos(\frac{2x + h}{h}) \cdot \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \qquad (2.18)\end{aligned}$$

Um $\lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ zu bestimmen, betrachten wir den Sinus im Einheitskreis bei 0.

TODO: Zeichnung

Ist α im Bogenmass, so ist

$$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$$

$$\sin\alpha < \alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$$

$$1 \geq \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \lim_{\alpha\to 0} \cos\alpha$$

$$1 \geq \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \geq 1$$

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1}$$

Schliesslich finden wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\boxed{f(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \cos x}$$

Analog finden wir

$$\boxed{g(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad g'(x) = -\sin x}$$

Beispiel 25. *1.*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 3 \cdot \cos x \\ \rightarrow f'(x) &= 2x - 3 \cdot \sin x \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(7\alpha)}{4\alpha} &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{7}{4}\sin(7\alpha)}{\frac{7}{4} \cdot 4\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{7}{4}\sin(7\alpha)}{7\alpha} \\ &= \frac{7}{4} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(7\alpha)}{7\alpha} \\ &= \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4} \end{aligned} \tag{2.21}$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to 0} \frac{\sin(2\beta)}{cos\beta} &= \lim_{\beta \to 0} \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta} \\ &= \lim_{\beta \to 0} 2\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

4. Suche die Extremwerte von

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ mit } f(x) &= \cos(x) - x \\ f'(x) &= -\sin(x) - 1 \end{aligned}$$

und

$$f'(x) = 0$$

wenn

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= -1 \\
x &= \frac{3\Pi}{2} \\
x &= \frac{3\Pi}{2} + k \cdot 2\Pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

so wird

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f(\frac{3\Pi}{2}) \\
&= \cos\frac{3\Pi}{2} - \frac{3\Pi}{2} \\
&= -\frac{3\Pi}{2} \\
f(x_2) &= f(\frac{3\Pi}{2} + 2\Pi) \\
&= \cos(\frac{3\Pi}{2} + 2\Pi) - (\frac{3\Pi}{2} + 2\Pi) \\
&= -\frac{3\Pi}{2} - 2\Pi
\end{aligned}
$$

2.7.2 Produktregeln

Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } h(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

ist das Produkt der Funktionen

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = \sin(x)$$

Wir finden die Ableitung eines Produktes mit

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Damit finden wir die Produktregel:

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

Beispiel 26. *Berechne die Ableitung von*

1.

$$h(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

Mit

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
g(x) &= \sin(x)
\end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \\
g'(x) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

und damit

$$h'(x) = x^2 \cos(x) + 2x \sin(x)$$

2.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \cdot \cos(x) \\
u(x) &= x^2 \\
v(x) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
u'(x) &= 2x \\
v'(x) &= -\sin(x)
\end{aligned}$$

finden wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot (-\sin(x)) \\ &= 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(2x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x) \\ g'(x) &= 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= 2\cos(2x) \end{aligned}$$

2.7.3 Kettenregel

Betrachten wir die folgende Funktion

$$k(x) = \sin(3x)$$

Mit

$$k(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

müssen wir zuerst

$$l(x) = \sin^3 x$$

ableiten

$$\begin{aligned}
l(x) &= \sin x \cdot \sin^2 x \\
l'(x) &= \sin x(\sin^2 x)' + \cos x \cdot \sin^2 x \\
&= \sin x(\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x) + \cos x \cdot \sin^2 x \\
&= 2\sin^2 x \cos x + \cos x \sin^2 x \\
&= 3\sin^2(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned}
k'(x) &= 3\cos x - 4 \cdot 3\sin^2 x \cos x \\
&= 3\cos x(1 - 4\sin^2 x) \\
&= 3\cos x(1 - 4(1 - \cos^2 x)) \\
&= 3\cos x(1 - 4 + 4\cos^2 x) \\
&= 3\cos x(4\cos^2 x - 3) \\
&= 3(4\cos^3 x - 3\cos x) \\
&= 3\cos 3x
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(2x) \to f'(x) = 2\cos 2x \\
g(x) &= \sin(3x) \to g'(x) = 3\cos 3x \\
h(x) &= \sin(4x) \to h'(x) = 4\cos 4x \\
\ldots
\end{aligned}$$

also

$$(\sin kx)' = k\cos(kx), k \in \mathbb{Q}$$

analog

$$(\cos kx)' = -k\sin(kx), k \in \mathbb{Q}$$

Weiter haben wir gefunden

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x \to f'(x) = 2\sin x \cos x \\ g(x) &= \sin^3 x \to g'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x \end{aligned}$$

also

$$(\sin^n x)' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos(x), n \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x \to f'(x) = -2\cos x \sin x \\ g(x) &= cos^3 x \to g'(x) = -3\cos^2 x \sin x \end{aligned}$$

Was wir hier gefunden haben, ist die Anwendung der **Kettenregel**.

Ist

$$h(x) = g(f(x))$$

so ist

$$h'(x) = g'(u) \cdot f'(x) \text{ mit } u = f(x)$$

Wir nennen $f'(x)$ die innere Abletung.

Beispiel 27. *1.*

$$h(x) = \sin^4 x$$

So ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, g(u) = u^4 \\ h'(x) &= 4u^3 \cos x \end{aligned}$$

also

$$h'(x) = 4\sin^3 x \cos x$$

2.

$$\begin{aligned} i(x) &= (x^3 + 2x^2 - 4)^8 \\ i'(x) &= 8(x^3 + 2x^2 - 4)^7 \cdot (3x^2 + 4x) \end{aligned}$$

Kapitel 3

Integralrechnung

3.1 Stammfunktion

Wir kennen die Abbildung f' einer Funktion f und suchen die Funktion $f(x)$.

Beispiel 28. *1.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ \rightarrow f(x) &= \sin x \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g'(x) &= x^3 \\ \rightarrow g(x) &= \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{x^4}{4} + 5$$

oder

$$\frac{x^4}{4} - 7$$

etc.

Ist $f(x)$ die Ableitung einer Funktion $F(x)$, so heisst F eine <u>Stammfunktion</u> von f:

$$F'(x) = f(x)$$

Beispiel 29.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 1 \\ \rightarrow F(x) &= \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Zu einer Funktion f gibt es also beliebig viele Stammfunktionn. Sie unterscheiden sich duch eine Konstante C.

Definition 11. *Die Menge aller Stammfunktionen heisst unbestimmtes Integral, wofür wir*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

schreiben. Dabei heisst

- $f(x)$ *der Integrand*
- $\mathrm{d}x$ *das Differential*
- $C \in \mathbb{R}$ *die Integrationskonstante*

Beispiel 30. *Wir berechnen die unbestimmten Integrale:*

1. $$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

2. $$\int 4x^3 - 3x\,\mathrm{d}x = x^4 - \frac{3x^2}{2} + C$$

3. $$\int 2\cos(x) + 3\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin(x) - 3\cos(x) + C$$

4. $$\int at^2 + bt + c\,\mathrm{d}t = a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct + D$$
$$\int at^2 + bt + c\,\mathrm{d}a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + bta + ca + D$$

Mit Hilfe der Differenzialrechnung finden wir die regeln für die Integralrechnung.

Regeln:

1. $$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

2. $$k \in \mathbb{R} : \int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. $$\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad ; \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

   Anmerkung
   $$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

Beispiel 31. *1.*

$$\begin{aligned} & \int \frac{2}{x^2} + 3x^4 dx \\ = & \int 2x^{-2} dx + 3x^4 dx \\ = & 2 \int x^{-2} dx + 3 \int x^4 dx \\ = & 2\frac{x^{-1}}{-1} + 3\frac{x^5}{5} + C \\ = & \frac{-2}{x} + \frac{3x^5}{5} + C \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{x} + x + 1 dx \\ = & \int x^{\frac{1}{2}} + x + 1 dx \\ = & \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C \\ = & \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & \int a^2 b^2 + ab^3 db \\ = & a^2 \frac{b^3}{3} + a\frac{b^4}{4} + C \end{aligned}$$

4. Mithilfe der Ableitungen der Winkelfunktionen finden wir

$$\begin{aligned} & \int \sin(kx)dx \\ = \quad & -\frac{\cos(kx)}{k} + C \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \int \cos(kx)dx \\ = \quad & \frac{\sin(kx)}{k} + C; k \in R\backslash\{0\} \end{aligned}$$

3.2 Flächeninhalte

Welchen Inhalt besitzt die durch den Graphen von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2$$

die Gerade $x = b$ ($b > 0$) und die x-Achse begrenzte Fläche?

TODO: Grafik

Wir wählen n Rechtecke mit Breite $\frac{b}{n}$, und zwar solche die "zu gross" sind mit Flächeninhalt $F_1, F_2, F_3, F4, \ldots, F_n$ und solche die "zu klein" sind mit Flächeninhalt $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n$ Es ist

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{b}{n} \cdot f(\frac{b}{n}) = \frac{b}{n}(\frac{b}{n})^2 = \frac{b^3}{n^3} \\
F_2 &= \frac{b}{n} \cdot f(\frac{2b}{n}) = \frac{b}{n} \cdot (\frac{2b}{n})^2 = 2^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} \\
F_3 &= \frac{b}{n} \cdot f(\frac{3b}{n}) = \frac{b}{n} \cdot (\frac{3b}{n})^2 = 3^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} \\
\ldots \\
F_n &= \frac{b}{n} \cdot f(\frac{n \cdot b}{n}) = \frac{b}{n} \cdot b^2 = n^2 \cdot \frac{b^3}{n^3}
\end{aligned}$$

und damit ist die erste Näherung die Obersumme.

$$\begin{aligned}
O_n &= F_1 + F_2 + ... + F_n \\
&= \frac{b^3}{n^3} + 2^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} + 3^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} + ... + n^2 \cdot \frac{b^3}{n^3} \\
&= \frac{b^3}{n^3}(1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$f_1 = 0, f_2 = F_1, f_3 = F_2, \ldots, f_n = F_n - 1$$

also

$$f_2 = \frac{b^3}{n^3}, f_3 = \frac{b^3}{n^3} \cdot 2^2, \ldots, f_n = \frac{b^3}{n^3}(n-1)^2$$

und damit wird die Untersumme der ersten Näherung

$$\begin{aligned}
U_n &= f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n \\
&= 0 + \frac{b^3}{n^3} + \frac{b^3}{n^3} \cdot 2^2 + \ldots + \frac{b^3}{n^3}(n-1)^2 \\
&= \frac{b^3}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

in 3.1 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{b^3}{n^2} \cdot \frac{(2n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(2n+1)(n+1)}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(2n+1)}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot (2 + \frac{1}{n}) \cdot (1 + \frac{1}{n}) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + (n-1)^2 &= \frac{(n-1)(2(n-1)+1)(n-1+1)}{6} \\
&= \frac{(n-1)(2-1)(n)}{6}
\end{aligned}$$

in 3.2 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
Un &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(2n-1)(n-1)}{6} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n(2n-1)(n-1)}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6}(2 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n}) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

lassen wir n wachsen, so erhalten wir eine nächste Näherung.
Wir bilden eine Intervallschachtelung für den gesamten Flächeinhalt F:

TO DO: BILD

Dazu muss

1. $$\forall n \, U_n + 1 > U_n$$

2. $$\forall n \, O_{n+1} > O_n$$

3. $$\lim_{n \to \infty} (0 - U_n) = 0$$

4. $$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} O_n$$

erfüllt sein.

Wir müssen nur noch 4. überprüfen.
Mit 3.3 wird

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} O_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}(2+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\\ &= \frac{b^3}{6}\cdot 2\\ &= \frac{b^3}{3}\end{aligned}$$

und mit 3.4

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}(2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})\\ &= \frac{b^3}{6}\cdot 2\\ &= \frac{b^3}{3}\end{aligned}$$

Alsi ist

$$\underline{\underline{F = \frac{b^3}{3}}}$$

Es ist

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

und

$$F = \frac{b^3}{3}$$

deshalb schreiben wir

$$\boxed{\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}} \qquad \text{„Integral von 0 bis b“}$$

welches wir ein <u>bestimmtes Integral</u> mit der

unteren Grenze 0
oberen Grenze b

nennen. Wir sagen auch Riemann-Integral.

3.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es ist

$$\int_2^7 x^2 dx = \frac{7^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

Ist dann auch

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^3 dx &= \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4}? \\ \int_0^n \cos x dx &= \sin \Pi - \sin 0 \end{aligned}$$

Hauptsatz: Ist f in $[a;b]$ integrierbar, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

wobei

$$F'(x) = f(x)$$

Beweisidee:
TO DO: BILD

Ist x_0 variabel, so ist

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$$

Dann ist

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

Es gibt ein Rechteck mit Breite h und Länge $f(\xi)$, $x_0 < \xi < x_0 + h$, so dass

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= h \cdot f(\xi) \\ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= f(\xi) \\ \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} f(\xi) \\ F'(x_0) &= f(x_0) \end{aligned}$$

Regeln

1. $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = ????$$

2. $$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) + g(x)dx$$

3. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

4.
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Wollen wir
$$\int_1^4 x^2 + 2x - 3dx$$
berechnen, so suchen wir eine Stammfunktion.
Um uns die Arbeit zu erleichtern wählen wir $C = 0$.
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

Setzen 4 und 1 ein und subtrahieren.
Dafür schreiben wir
$$\begin{aligned}\int_1^4 x^2 + 2x - 3dx &= \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\Big|_1^4 \\ &= \frac{4^3}{3} + 4^2 - 4 \cdot 3 - (\frac{1^3}{3} + 1^2 - 3 \cdot 1) \\ &= \frac{64}{3} + 16 - 12 - \frac{1}{3} - 1 + 3 \\ &= \underline{27}\end{aligned}$$

Es ist also
$$\begin{aligned}\int_0^{\Pi} \sin(x)dx &= -\cos(x)\Big|_0^{\Pi} \\ &= -\cos \Pi - (-\cos 0) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

TO DO: BILD und
$$\begin{aligned}\int_0^{2\Pi} \sin(x)dx &= -\cos(x)\Big|_0^{2\Pi} \\ &= -\cos 2\Pi - (-\cos 0) \\ &= -1 + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

TO DO: BILD

Das Integral ist 0
Die Fläche ist 4.

Das bestimmte Integral ist negativ, wenn $f(x)$ negativ ist.
$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

TO DO: BILD

Beispiel 32.

$$\begin{aligned}
\int_0^{16} x - 4\sqrt{x}dx &= \frac{x^2}{2} - 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16} \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^{16} \\
&= 128 - \frac{8}{3} \cdot 16\sqrt{16} \\
&= 128 - \frac{512}{3} = \frac{384-512}{3} = -\frac{128}{3}
\end{aligned}$$

3.4 Zwei Graphen

Suchen wir den Inhalt der Fläche , die durch 2 Graphen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schnittpunkte x_1, x_2 begrenzt ist,

So ist

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)dx$$

Ist

$$g(x) < 0 \text{ für } x \in [x_1; x_2]$$

So wählen wir eine $\overline{x}$ Achse, so dass

$$g(\overline{x}) > 0 \text{ für } \overline{x} \in [x_1; x_2]$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= f(x) + k \\ g(\overline{x}) &= g(x) + k \end{aligned}$$

und

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(\overline{x}) - g(\overline{x})d\overline{x}$$

also

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) + k - (g(x) + k)dx$$

$$\boxed{F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)dx}$$

Kapitel 4

Kurzreferenz

4.1 Maximum, Minimum Graphen

BILD TODO

4.2 Begriffe

Schnittwinkel zweier Graphen	Unter dem Schnittwinkel zweier Graphen verstehen wir den Winkel zwischen den Tangen- ten im Schnittpunkt