Lineare Algebra

Kevin Häni & Martin Schmidli

3. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vektoren

1.1 Definition

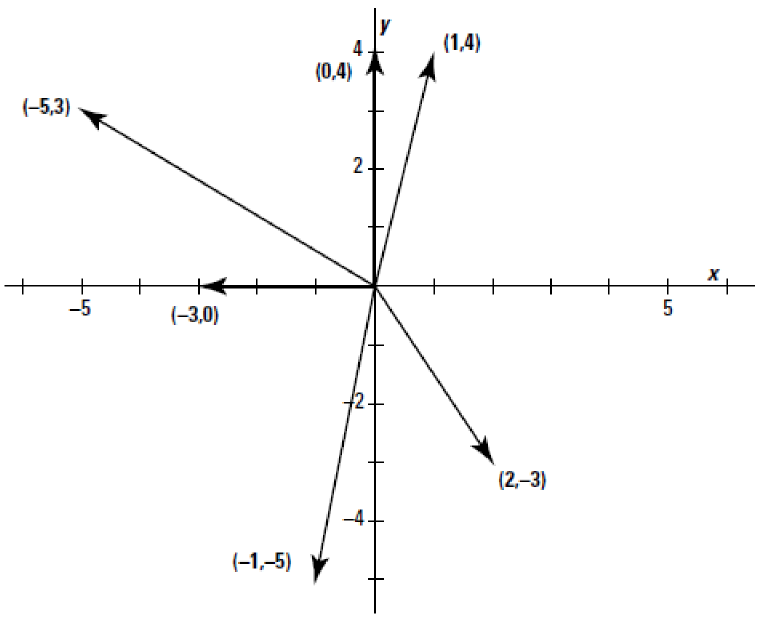
Definition 1. *Ein Vektor ist eine Äquivalenzklasse aller gleich langen und gleichgerichteten Pfeilen. Jeder Pfeil aus dieser Menge ist ein Repräsentant des Vektors.*

1.2 Darstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Einen Repräsentanten a eines Vektors stellen wir typischer mit einem Pfeil dar: $\vec{a}$. Dieser setzt sich aus einer x- und y-Koordinate zusammen. z.B:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{z.B.} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

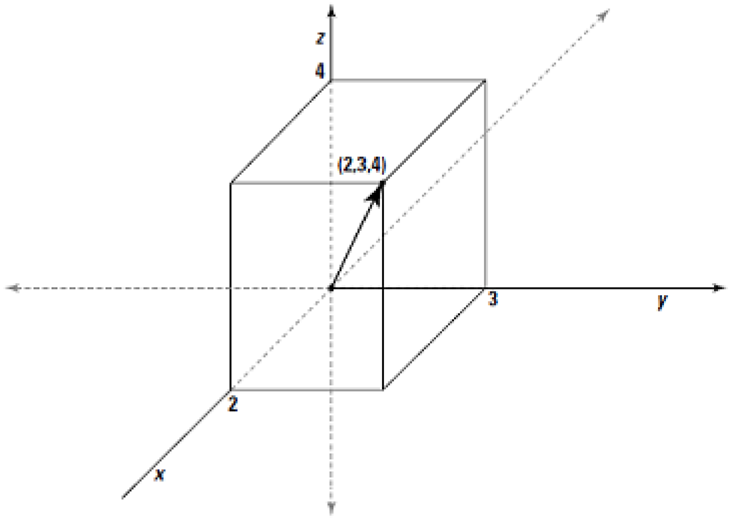
Vektoren lassen sich somit auch im kartesischen Koordinatensystem darstellen:



1.3 Darstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man auch als dreidimensional.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{z.B.} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



1.4 Spezielle Vektoren

Definition 2. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *heisst* ***Nullvektor***.

Dargestellt wird der Nullvektor als Punkt. Der Nullvektor ist das neutrale Element der Addition:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

Definition 3. $-\vec{a}$ *ist der zu* $\vec{a}$ ***inverse Vektor***.

$$\vec{a} + -(\vec{a}) = \vec{0}$$

1.4.1 Einheistvektor

Definition 4. *Ein* ***Einheitsvektor*** *(auch Basisvektor oder normierter Vektor) ist ein Vektor mit der Länge 1.*

Um aus einem beliebigen Vektor einen Vektor mit der selben Richtung, aber der Länge 1 zu erstellen - einen Vektor zu normalisieren - rechnet man

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Ein Einheitsvektor wird aus einem Vektor, Bsp. $\vec{a}$ gebildet. Der Einheitsvektor von $\vec{a}$ hat dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ aber die Länge 1. Anders gesagt, der Vektor wurde Normalisiert, also auf die Länge 1 gebracht.

Der Einheitsvektor von $\vec{v}$ist $\vec{v}_0$

Die eigentliche Länge des Einheitsvektors ist laut Definition immer 1.
Die Formel zur Berechnung der Einheitsvektoren Werte für x,y und z lautet wie folgt.

$$\vec{v_0} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Ein Rechenbeispiel:
Gegeben ist der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v_0} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{8^2 + 6^2 + 1}}$$

Zuerst berechnen wir den Betrag des Vektors

$$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 6^2 + 1} = \sqrt{101} = 10.04987$$

Danach werden die x, y und z Werte des Vektors durch den Betrag des Vektors gerechnet. Daraus ergeben sich die x, y und z Werte des Einheitsvektors $\vec{v_0}$

$$8/10.04987 = 0.79603$$
$$6/10.04987 = 0.59702$$
$$1/10.04987 = 0.99503$$
$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0.79603 \\ 0.59702 \\ 0.99503 \end{pmatrix}$$

Wichtig Der Einheitsvektor eines Nullvektors kann nicht ausgerechnet werden weil der Nullvektor hat keine definierte Richtung hat. Da der Betrag des Vektors gleich 0 ist, würde zudem während der Berechnung durch 0 geteilt, was selbstverständlich nicht erlaubt ist.

1.5 Ortsvektoren

Definition 5. *Ein **Ortsvektor** ist ein Vektor, der vom Bezugspunkt (Ursprung* $(0, 0, 0)$*) zu einem Punkt zeigt.*

$$A(3/5) \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Herleitung: Punkte lassen sich ebenfalls mit den Komponenten x, y und z darstellen, z.B.

$$A(x/y/z) \qquad \text{z.B.} \quad A(1/2/3)$$

Den Punkt A erreichen wir vom Koordinatenursprung, indem wir 1 Einheit in die X, 2 Einheiten in die Y und 3 Einheiten in die Z Richtung gehen. Durch diese Bewegung ergibt sich der Ortsvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Definition 6. *Ein **Verbindungsvektor** verbindet zwei Punkte A und B.*

Um zwei Punkt zu verbinden, gehen wir von Punkt A zum Koordinatenursprung (dies entspricht dem negativen Ortsvektor $\vec{a}$) und von dort aus zum Punkt B über den Ortsvektor $\vec{b}$.

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

1.6 Vektorraum

Definition 7. *Ein **Vektorraum** ist eine algebraische Struktur, welche als Elemente Vektoren besitzt.*

Mit den Vektoren in einem Vektorraum müssen bestimmte Operationen möglich sein, beispielsweise die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar. Als Ergebnis muss dabei wieder ein Vektor des selben Vektorraumes entstehen. Ausserdem müssen das Assoziativgesetz und Kommutativgesetz gelten und es braucht ein neutrales sowie ein inverses Element.

Definition 8. *Die **Basis** eines Vektorraums ist die Menge von Vektoren, die es ermöglicht, jeden anderen Vektor als Linearkombination darzustellen.*

Definition 9. *Die Anzahl Basisvektoren wird **Dimension** des Vektorraums genannt.*

1.7 Gesetze und Rechenoperationen mit Vektoren

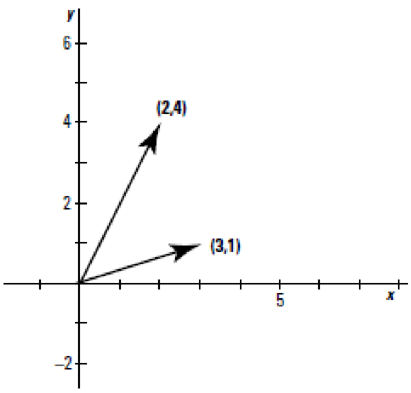
1.7.1 Addition

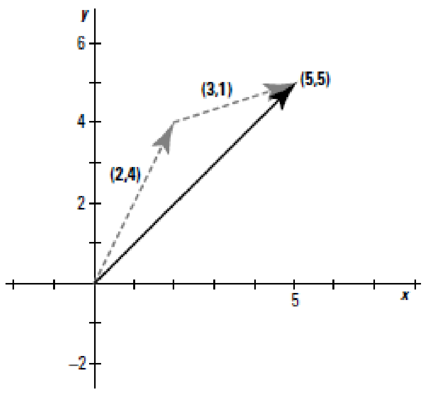
Zwei Vektoren werden addiert, indem ihre Komponenten addiert werden. Es entsteht ein neuer Vektor.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$





1.7.2 Skalare Grösse

In der Mathematik und in der Physik werden zwei Arten von Grössen unterschieden. Die Vektoriellen und die Skalaren. Die Vektorielle Grösse sind richtungsabhängig und die Skalaren richtungsunabhängig. Als passendes Beispiel für eine vektorielle Grösse kann ein Vektor genannt werden. Er besitzt zwei Werte, in welche Richtung zeigt er und wie lang ist er. Eine Skalare Grösse hat dagegen nur einen bestimmten Wert. Skalare Grössen sind:

- Masse
- Temperatur
- Druck
- Dichte

1.7.3 Multiplikation mit einem Skalar

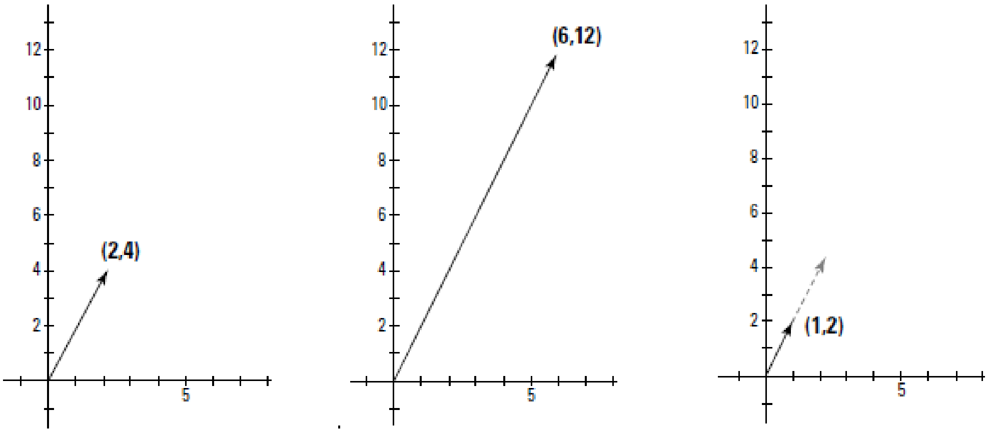
Wird ein Vektor mit einem Skalar (einer Zahl) multipliziert, wird der Vektor um diesen Faktor gestreckt/gestaucht. Die Zahl wird mit jeder Komponente des Vektors multipliziert:

$$k \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kv_x \\ kv_y \\ kv_z \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.

$$5 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Grafisch:



1.7.4 Wert eines Vektors

Der Wert (auch Betrag oder Norm) eines Vektors ist seine Länge und wird wie folgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Beispiel 3.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

1.7.5 Skalarprodukt

Definition 10. *Das Skalarprodukt (auch inneres Produkt oder Punktprodukt) ist die mathematische Verknüpfung, die zwei Vektoren eine Zahl (Skalar) zuordnet.*

Mulitplikation von zwei Vektore, als Ergebniss erhalten wir ein Skalar / Zahl

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Ausserdem gilt auch:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \\ \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

Liegen die Vektoren also in einem Koordinatensystem, so können wir das Skalarprodukt ausrechnen. Mit der zweiten Formel können wir zudem den Winkel phi ϕ zwischen den beiden Vektoren ermitteln. Diese Formel lässt sich aus dem Cosinussatz herleiten.

Eigenschaften des Skalarprodukts

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

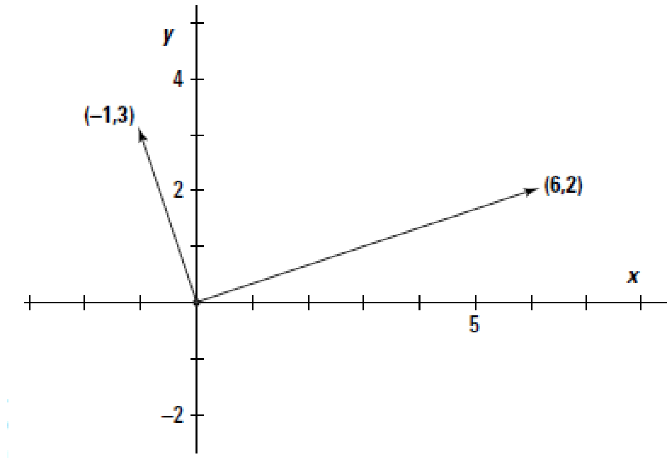
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3. $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$

1.7.6 Orthogonalität

Definition 11. *Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander (sie sind orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt 0 beträgt.*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ wenn } \measuredangle(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 6 + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$$

1.7.7 Betrag mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen

Berechnen wir das Skalarprodukt von ein und demselben Vektor, finden wir folgendes heraus:

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ &= |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

Wir können also den Betrag eines Vektors mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen.

1.8 Aufgaben

1. Gegeben sind $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\measuredangle(a, b) = 60^\circ$, $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. Berechnen Sie das Skalarprodukt und den Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Zuerst berechnen wir das Skalarprodukt von $\vec{a}$

$$\begin{aligned} a^2 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}^2 \\ &= |a|^2 = 4^2 = 16 \end{aligned}$$

Nun das Skalarprodukt von $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} b^2 &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}^2 \\ &= |b|^2 = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

Nun nun noch das Skalarprodukt zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(60^o) = 6$$

Nun berechnen wir den Winkel:

$$\begin{aligned} \cos(\measuredangle(u, v)) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \\ &= \frac{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{3} - 2\vec{b})}{|2\vec{a} + \vec{b}| \cdot |3\vec{a} - 2\vec{b}|} \\ &= \frac{6\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2}{|2\vec{a} + \vec{b}| \cdot |3\vec{a} - 2\vec{b}|} \\ &= \frac{6 \cdot 16 - 6 - 2 \cdot 9}{\sqrt{(2\vec{a} + \vec{b})^2} \cdot \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b})^2}} \\ &= \frac{72}{\sqrt{4\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} \cdot \sqrt{9\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2}} \\ &= \frac{72}{\sqrt{4 \cdot 16 + 4 \cdot 6 + 9} \cdot \sqrt{9 \cdot 16 - 12 \cdot 6 + 4 \cdot 9}} \\ &= \frac{72}{\sqrt{97} \cdot \sqrt{108}} \end{aligned}$$

Somit ist der Winkel 45.29^o und das Skalarprodukt $\vec{u}\vec{v} = 72$.

1.9 Geschlossene Vektorkette

Eine geschlossene Vektorenkette sind aneinandergelegte Vektoren (Addition von mehreren Vektoren) die wieder zum Ausgangspunkt zurückführen. Die Summe aller Vektoren ist der Nullvektor, es findet also keine Verschiebung statt.

1.10 Verschiebevektor

Verschiebungsvektor Ein Verschiebungsvektor beschreibt die Verschiebung/Translation resp. das Abbilden von einem Punkt auf einen Anderen. Ein Beispiel: Folgende Punkte sind gegeben:

$$A(2/3)$$
$$B(1/5)$$

Nun gilt es zu bestimmen, welcher Vektor (Verschiebungsvektor), den Punkt A auf den Punkt B abbildet.
Dazu Subtrahieren wir die x und y Werte des Urbildpunktes A von den Werten des Bildpunktes B. Es ergibt sich der Verschiebungsvektor $\vec{AB}$.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.11 Linearkombination

Unter einer Linearkombination von Vektoren versteht man eine Summe von Vektoren (Vektoraddition), wobei jeder Vektor noch mit einer reelen Zahl multipliziert wird. Als Ergebnis erhält man wieder einen Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$$

Dabei ist $\vec{v}$ der Ergebnisvektor und $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$,...,$\vec{a_n}$ sind die Vektoren, die jeweils mit einer reelen Zahl $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ multipliziert und anschliessend addiert werden.

Beispiel: Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

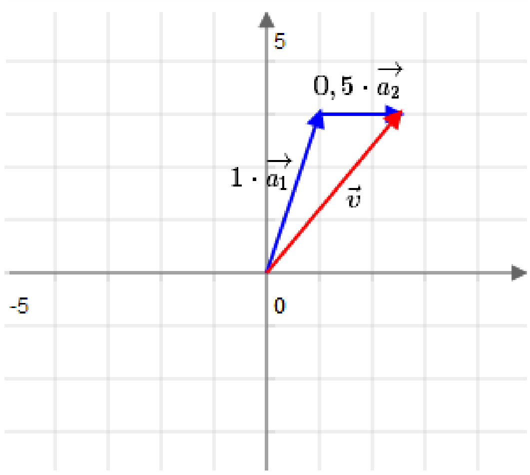
Finde zwei Linearkombinationen der beiden Vektoren

$$\vec{v_1} = 2 \cdot \vec{a_1} + 3 \cdot \vec{a_2} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = 3 \cdot \vec{a_1} - 1 \cdot \vec{a_2} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

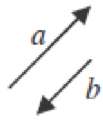
Betrachten wir nun folgende Linearkombination grafisch:

$$\vec{v} = 1 \cdot \vec{a_1} + 0.5 \cdot \vec{a_2} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$



1.12 Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit

Haben zwei Vektoren die gleiche Richtung - sie sind kolinear - so sind sie linear abhängig.



Definition 12. *Eine Menge von Vektoren heisst linear abhängig, wenn sich mindestens einer davon als Linearkombination der anderen darstellen lässt:*

$$c = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$$

In der Regel ist vorher allerdings nicht bekannt, welcher der Vektoren sich als Linearkombination der anderen darstellen lässt, deshalb wird eine allgemeine Gleichung eingeführt, deren Lösungsmenge zu bestimmen ist:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

1.12.1 Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

Zwei Vektoren heissen linear abhängig, wenn es zwei Zahlen λ_1 und λ_2 gibt, die nicht beide Null sind, so dass gilt

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Anders formuliert: Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sich der Nullvektor durch eine Linearkombination der beiden Vektoren erzeugen lässt.

1.12.2 Lineare Abhängigkeit im $\mathbb{R}^2$

Beispiel: Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{b} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn es nun ein λ ungleich Null gibt, das das Gleichungssystem löst, so sind die Vektoren linear abhängig.

$$\begin{aligned} 1 = \lambda \cdot 2 \quad &\rightarrow \quad \lambda = 0.5 \\ 2 = \lambda \cdot 4 \quad &\rightarrow \quad \lambda = 0.5 \end{aligned}$$

Alternativ können wir die Determinante untersuchen, die sich aus den zwei Vektoren ergibt. Ist diese gleich Null, so sind die Vektoren linear abhängig

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

1.12.3 Eigenschaften von Vektoren im $\mathbb{R}^2$

- 2 Vektoren sind im $\mathbb{R}^2$ genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.
- 3 (oder mehr) Vektoren sind im $\mathbb{R}^2$ stets linear abhängig.

Erklärung: Der $\mathbb{R}^2$ ist definiert als ein Vektorraum, der durch 2 linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Diese zwei Vektoren nennt man Basis des Vektorraums. Meist verwendet man die sog. Standardbasis (kanonische Basis):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Basisvektoren kann jeder beliebige Vektor des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination geschrieben werden, z.B.:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es geling also nicht, uns einen dritten Vektor auszudenken, der nicht als Basis der beiden Basisvektoren geschrieben werden könnte. Daraus folgt, dass 3 (oder mehr) Vektoren im $\mathbb{R}^2$ stets linear abhängig sind.

1.12.4 Lineare Abhängigkeit von 3 Vektoren

Drei Vektoren heissen linear abhängig, wenn es drei Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass gilt

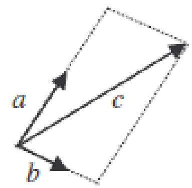
$$\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \lambda_3 \cdot \vec{a_3} = 0$$

1.12.5 Lineare Abhängigkeit im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.



Das ist dann der Fall, wenn sich der dritte Vektor durch die beiden anderen ausdrücken lässt. Es entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 3 \\ 2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

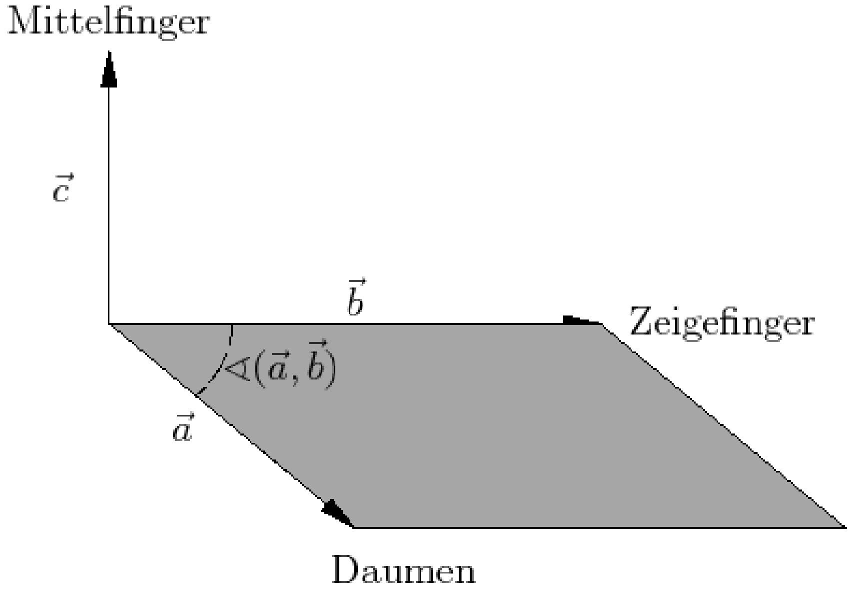
Lassen sich die Unbekannten λ_1 und λ_2 eindeutig berechnen, ohne dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ gilt, sind die Vektoren linear abhängig.

Alternativ lässt sich wiederum die Determinante berechnen. Ist diese gleich Null, so sind die Vektoren linear abhängig.

1.12.6 Eigenschaften von Vektoren im $\mathbb{R}^3$

- 2 Vektoren sind im $\mathbb{R}^3$ genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.
- 3 Vektoren sind im $\mathbb{R}^3$ genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.
- 4 (oder mehr) Vektoren sind im $\mathbb{R}^3$ stets linear abhängig (selbe Erklärung wie im $\mathbb{R}^2$)

1.13 Vektorprodukt



Wir suchen $\vec{c}$, so dass $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$, wenn

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ist.

Es muss

$$\vec{a} * \vec{c} = 0 \wedge \vec{b} * \vec{c} = 0$$

sein.
Ist

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

so muss also

$$\begin{vmatrix} a_1x + a_2y + a_3z & = & 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z & = & 0 \end{vmatrix}$$

Wir haben also 2 Gleichungen, aber 3 Variabeln $\rightarrow$ Eine Variebel ist frei wählbar
Ein Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 4x + 5y + z & = & 1 \\ 2x - y + 2z & = & 0 \end{vmatrix}$$

Wir nehmen an $z = 1$

$$\begin{vmatrix} 4x + 5y & = & 0 \\ 2x - y & = & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4x + 5y & = & 0 \\ 4x - 2y & = & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4x & = & -5y \\ 4x & = & -4 + 2y \end{vmatrix}$$

Wir setzn die beiden Gleichungen eineander Gleich und erhalten für y:

$$7y = 4$$
$$y = \frac{4}{7}$$

Wir setzen y ein in:

$$14x = -10$$
$$x = -\frac{10}{14}$$
$$x = -\frac{5}{7}$$

Eine Lösung lautete also

$$(-\frac{5}{7}/\frac{4}{7}/1)$$

Dann finden wir weitere Lösungen mit

$$z = 2, z = 3, z = 4 \ldots$$

Also berechen wir x und y in Abhängigkeit von z
somit müssen wir

$$\begin{vmatrix} a_1x + a_2y & = & -a_3z \\ b_1x + b2_y & = & -b_3z \end{vmatrix}$$

lösen

Mit der Cramerschen Regel finden wir

$$\begin{aligned} D &= a_1b_2 - a_2b_1 \\ \\ D_x &= \begin{vmatrix} -3a_z & a_2 \\ -b_3z & b_2 \end{vmatrix} \\ &= -a_3b_2z + a_2b_3z \\ &= z(a_2b_3 - a_3b_2) \\ \\ D_y &= \begin{vmatrix} a_1 & -a_3z \\ b_1 & -b_3z \end{vmatrix} \\ &= -a_1b_3z + a_3b_1z \\ &= z(a_3b_1 - a_1b_3) \end{aligned}$$

Somit

$$x = \frac{z(a_2b_3 - a_3b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{z(a_3b_1 - a_1b_3)}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

z ist frei wählbar.
Damit wir die Brüche auflösen können, wählen wir z = Nenner, damit wird

$$\begin{aligned} x &= a_2b_3 - a_3b_2 \\ y &= a_3b_1 - a_1b_3 \\ z &= a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

Definition 13. *Ist*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

So heisst

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

"a kreuzt b"
das Vektorprodukt/ Kreuzprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Beim Skalarprodukt erhalten wir als Ergebnis einen Skalar, beim Vektorprodukt einen Vektor.

Jede Komponente (x,y,z) lässt sich als Determinante darstellen

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 * 1 & - & 0(-1) \\ 0 * 3 & - & 2 * 1 \\ 2 * (-1) & - & 1 * (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erinnern uns, dass wir jeden Vektor als Linearkombination darstellen können

$$\vec{a} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e_a} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

also

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e_3} \\ &= a_2b_3\vec{e_1} + a_3b_1\vec{e_2} + a_1b_2\vec{e_3} - a_3b_2\vec{e_1} - a_1b_3\vec{e_2} - a_2b_1\vec{e_3} \end{aligned}$$

Ein Term mit 3 positiven und 3 negativen Produkten, die je aus 3 Faktoren bestehen. Dies ist eine dreireihige Determinante.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

Beispiel 5.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

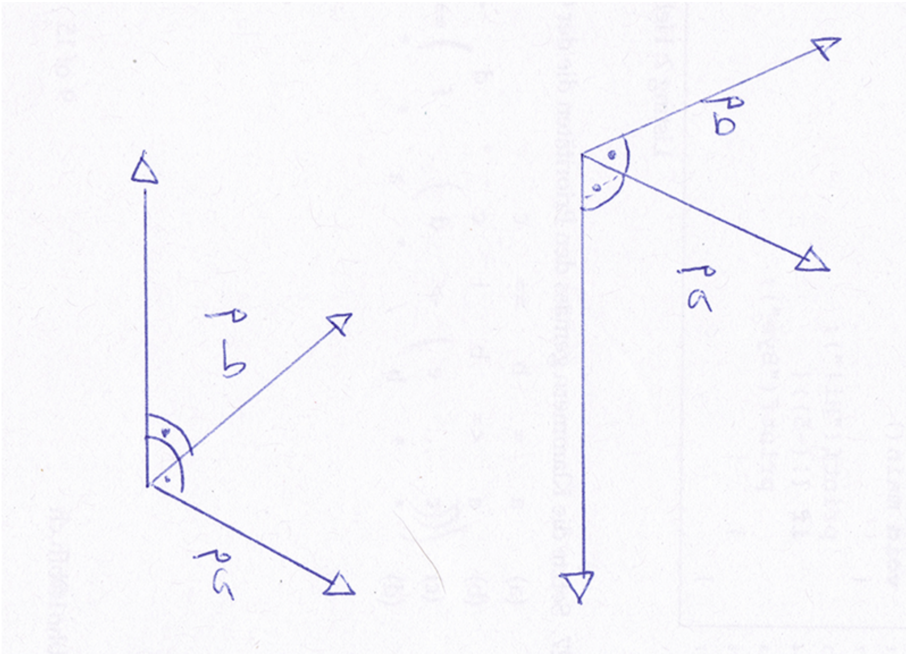
Regel von Sarrus anwenden

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 2 & 1 & e_1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & e_2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & e_3 & -1 & 3 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 6\vec{e_3} - \vec{e_2} + 12\vec{e_1} - 4\vec{e_3} - 6\vec{e_2} + 3\vec{e_1} \\ &= 15\vec{e_1} - 7\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ &= \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.13.1 Vektorprodukt Richtung

Welche Richtung hat nun $\vec{a} \times \vec{b}$?
Es gibt 2 Möglichkeiten:

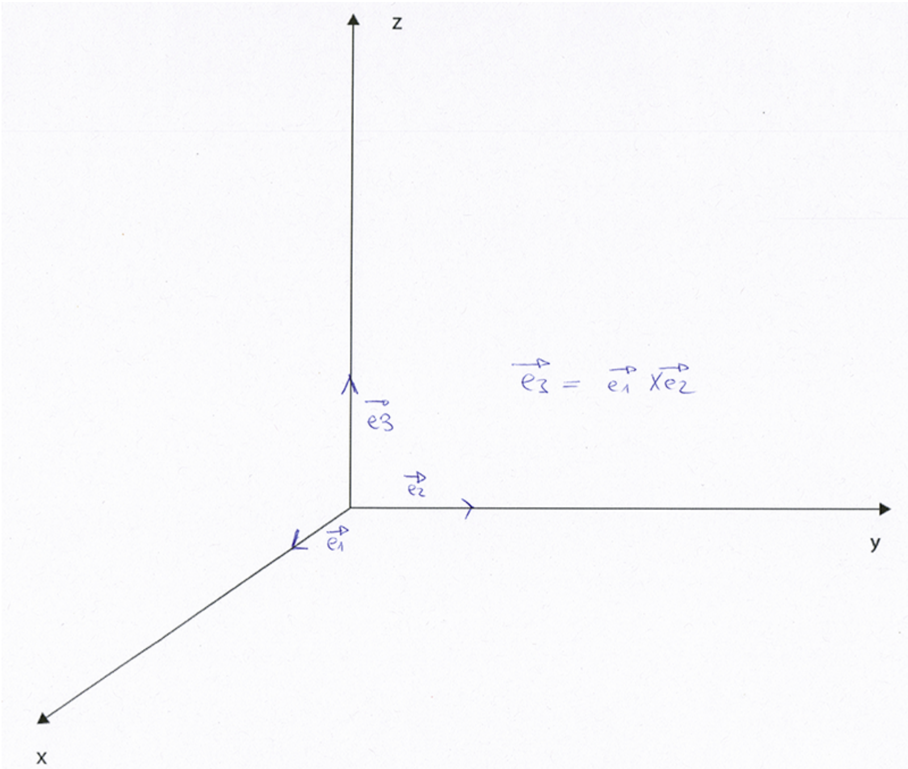


Zum überprüfen, wählen wir $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ und untersuchen, ob $\vec{e_3}$ oder $-\vec{e_3}$ entsteht

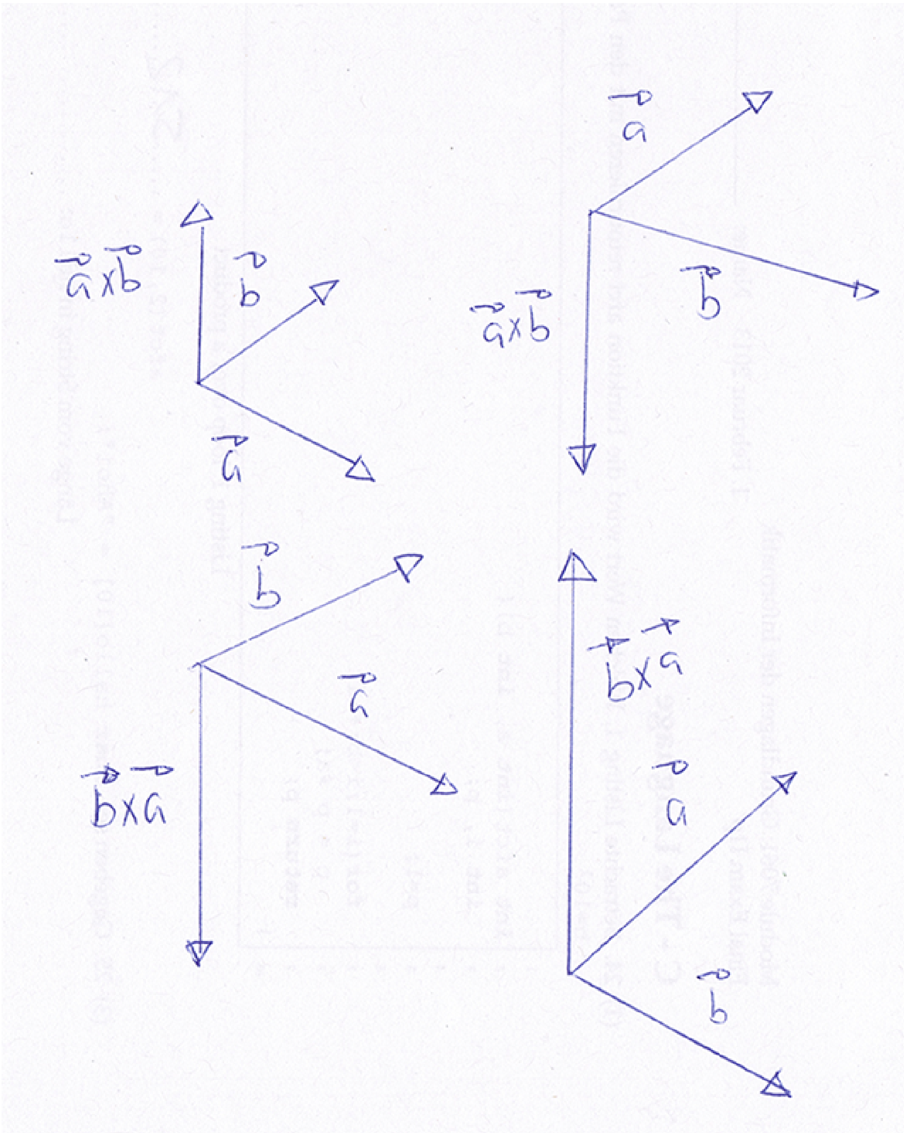
$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} =$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 0 & e_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= \vec{e_3}$$



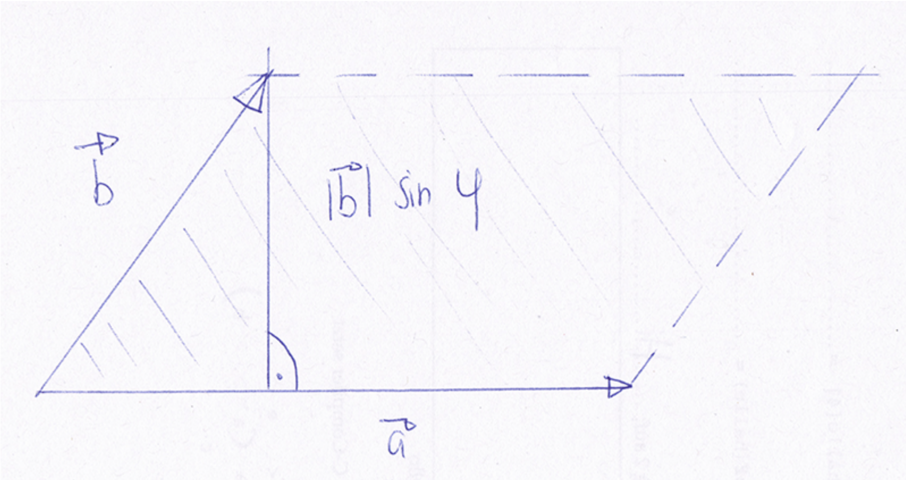
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden <u>in dieser Reihenfolge</u> ein Rechtssystem.



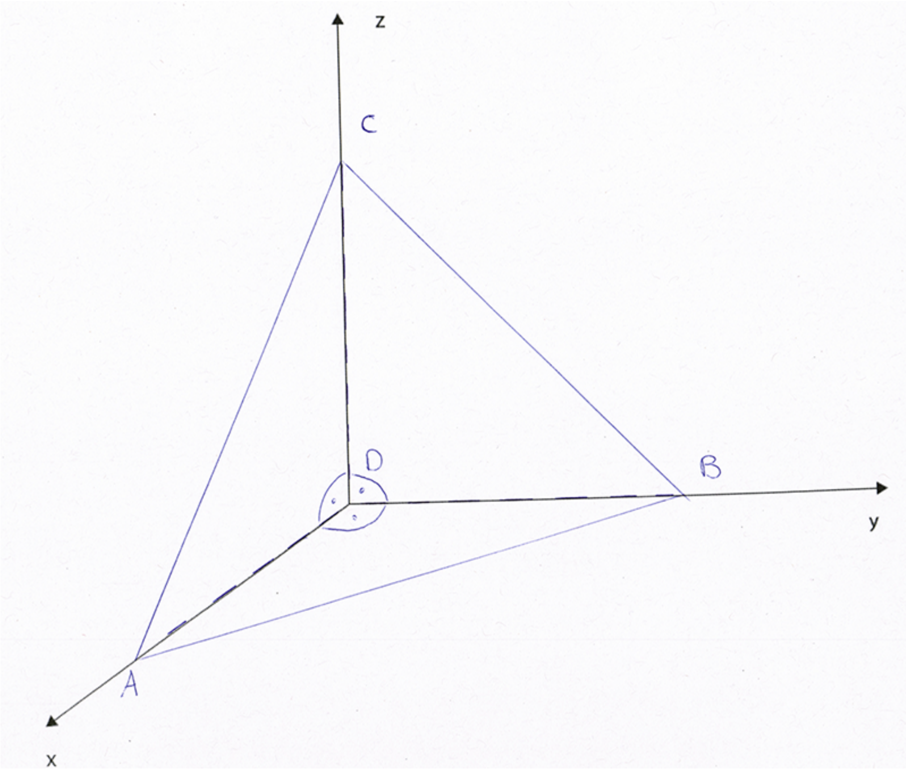
also $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
Das Kreuzprodukt ist nicht kommutativ.

1.13.2 Vektorprodukt Betrag

Welchen Betrag hat nun $\vec{a} \times \vec{b}$
Es ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ der Flächeninhalt der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.



Beispiel 6. *Welche Oberfläche besitzt der Tetraeder ABDC, wenn A($\sqrt{2}$/0/0), B(0/2$\sqrt{2}$/0), C(0/0/3$\sqrt{2}$)und D(0/0/0)?*



$$O = F(\triangle ABC) + F(\triangle ADB) + F(\triangle DBC) + F(\triangle ABC)$$

wobei

$$
\begin{aligned}
F(\triangle ADC) &= \frac{\sqrt{2} * 3\sqrt{2}}{2} = 3 \\
F(\triangle ADB) &= \frac{\sqrt{2} * 2\sqrt{2}}{2} = 2 \\
F(\triangle DBC) &= \frac{2\sqrt{2} * 3\sqrt{2}}{2} = 6 \\
F(\triangle ABC) &= |\vec{AC} \times \vec{AB}| * \frac{1}{2} \\
\vec{AC} &= \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
\vec{AB} &= \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

wird

$$
\vec{AC} \times \vec{AB} =
$$

$$
\begin{array}{|ccc|cc}
\multicolumn{1}{c}{+} & + & \multicolumn{1}{c}{+} & & \\
-\sqrt{2} & -\sqrt{2} & e_1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\
0 & 2\sqrt{2} & e_2 & 0 & 2\sqrt{2} \\
3\sqrt{2} & 0 & e_3 & 3\sqrt{2} & 0 \\
\multicolumn{1}{c}{-} & - & \multicolumn{1}{c}{-} & &
\end{array}
$$

$$
= 4\vec{e_3} - 6\vec{e_2} - 12\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

und so

$$
\begin{aligned}
|\vec{AC} \times \vec{AB}| &= \sqrt{144 + 36 + 16} = \sqrt{196} = 14 \\
F(\triangle ADC) &= |\vec{AC} \times \vec{AB}|/2 = 14/2 = 7
\end{aligned}
$$

Alle Flächen zusammenzählen

$$
O = 3 + 2 + 6 + 7 = \underline{\underline{18}}
$$

Kapitel 2

Lineare Gleichungssysteme

2.1 Additionsmethode

Beim Lösen eines Gleichungssystemes, versucht man herauszufinden, ob die einzelnen Gleichungen des Systems gemeinsame Lösungen besitzen.

$$\begin{vmatrix} 4x + 3y & = & 10 \\ -5y & = & 2x - 19 \end{vmatrix}$$

Wir formen die Gleichungen so um, dass alle Variablen auf einer Seite stehen.

$$\begin{vmatrix} 4x + 3y & = & 10 \\ -2x - 5y & = & -19 \end{vmatrix}$$

Nun multiplizieren wir die zweite Gleichung mit 2, damit wir bei einer der beiden Unbekannten entweder den selben Koeffizienten oder das additiv inverse Element als Koeffizienten erhalten.

$$\begin{vmatrix} 4x + 3y & = & 10 \\ -4x - 10y & = & -38 \end{vmatrix}$$

Jetzt addieren wir die beiden Gleichungen miteinander und können anschliessend die Lösung für y bestimmen:

$$\begin{aligned} 0x - 7y &= -28 \\ -7y &= -28 \quad | : (-7) \\ y = 4 & \end{aligned}$$

Diesen Wert setzen wir nun in eine der ursprünglichen Gleichungen ein und lösen sie nach x auf:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 10 \\ 4x + 3 \cdot 4 &= 10 \\ 4x + 12 &= 10 \quad | - 12 \\ 4x &= -2 \quad | : 4 \\ x &= -0.5 \end{aligned}$$

Um y zu erhalten muss x in eine der Terme eingesetzt werden

2.2 Cramersche Regel

Wie lösen wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} a_1x + a_2y & = & c_1 \\ b_1x + b_2y & = & c_2 \end{vmatrix}$$

mit unbekannten Parameter?
Mulitplikation mit b_1 sowie a_1
Mit

$$\begin{aligned} a_1b_1x + a_2b_1y &= c_1b_1 \\ -a_1b_1x - a_1b_2y &= -c_2a_1 \end{aligned}$$

Wird

$$\begin{aligned} a_2b_1y - a_1b_2y &= b_1c_1 - a_1c_2 \\ y(a_2b_1 - a_1b_2) &= b_1c_1 - a_1c_2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{b_1c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

Und mit Mulitplikation mit b_2 sowie a_2

$$\begin{aligned} a_1b_2x + a_2b_2y &= b_2c_2 \\ -a_2b_1x - a_2b_2y &= -a_2c_2 \end{aligned}$$

Wird

$$\begin{aligned} a_1b_2x - a_2b_1x &= b_2c_1 - a_2c_2 \\ x(a_1b_2 - a_2b_1) &= b_2c_1 - a_2c_2 \\ x &= \frac{b_2c_1 - a_2c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}$$

Erwarten wir y mit -1, so wird

$$y = \frac{a_1c_2 - b_1c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Die Nenner sind gleich und wir definieren

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} := a_1b_2 - a_2b_1$$

Als eine <u>zweireihige Determinante</u>
Auch die Zähler lassen sich als Determinanten schreiben

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} := a_1c_2 - a_2c_1$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} := c_1b_2 - c_2b_1$$

Wir sehen also, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} a_1x + a_1y & = & c_1 \\ b_1x + b2_y & = & c_2 \end{vmatrix}$$

hat die Lösung

$$x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{D}, D \neq 0$$

Diese Regel gilt für alle linearen Gleichungssysteme mit n Variabeln

$$D \neq \text{eine Lösung}$$
$$D = 0, D_y \text{ oder } D_x \neq \text{keine Lösung}$$
$$D = 0, D_y = 0, D_x = 0\text{unendlich viele Lösungen} \rightarrow \text{Funktionsgleichung}$$

2.3 Regel von Sarrus

Gemäss der Camerschen Regel ist bei einem Gleichungssystem mit 3 Variabeln wie

$$\begin{vmatrix} 4x - 2 + 2 = 1 \\ x + 5y - 6z = 3 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{vmatrix}$$

Ist also

$$x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{y}, z = \frac{Dz}{z}$$

Wobei

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Dy \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Dz \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Dreireihige Determinanten sind.

Hinweis: Im obigen Beispiel, ersetzen wir ganz einfach die jeweilige Spalte x,y oder z mit der Spalte der Ergebnisse

Dreireihige Determinanten werden nach der Regel von Sarus berechnet.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_2 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= a_1 b_2 c_3 + b_c c_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 \\ &-b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 \end{aligned}$$

Diese Regel gilt nicht für 4 und höherreihige Determinanten

Beispiel 7. *So werden im Beispiel*

$$D =$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 4 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -6 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= 40 + 24 + 1 + 4 + 24 - 10 = \underline{83}$$

$$Dx =$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= 10 + 48 + 3 - 20 + 6 + 12 = \underline{59}$$

$$Dy =$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= 24 - 12 + 4 - 6 + 96 - 1 = \underline{104}$$

$$Dz =$$

$$\dots$$

$$= \underline{55}$$

also

$$x = \frac{59}{83}, y = \frac{104}{83}, z = \frac{55}{83}$$

2.4 3 Gleichungen mit 2 Variabeln

Mit 2 der 3 Gleichungen, können wir die Variabeln berechnen und dann mit der 3. Gleichung überprüfen.

Beispiel 8.

$$\left|\begin{array}{lcr} x+y & = & 5 \\ x-y & = & 1 \\ x+2y & = & 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Mit (1) und (2) wird $x = 3, y = 2$. Eingesetzt in (3) erhalten wir

$$3 + 2 * 2 = 7 \neq 3$$

also

$$L \not\emptyset$$

Beispiel 9. *Bei*

$$\left|\begin{array}{lcr} x+y & = & 3 \\ x-y & = & 1 \\ 2x+2y & = & 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Ist (3) von (1) linear abhängig$\rightarrow$ keine neuen Informatione aus (3)
Also ist die Lösung der Gleichung (1) und (2)

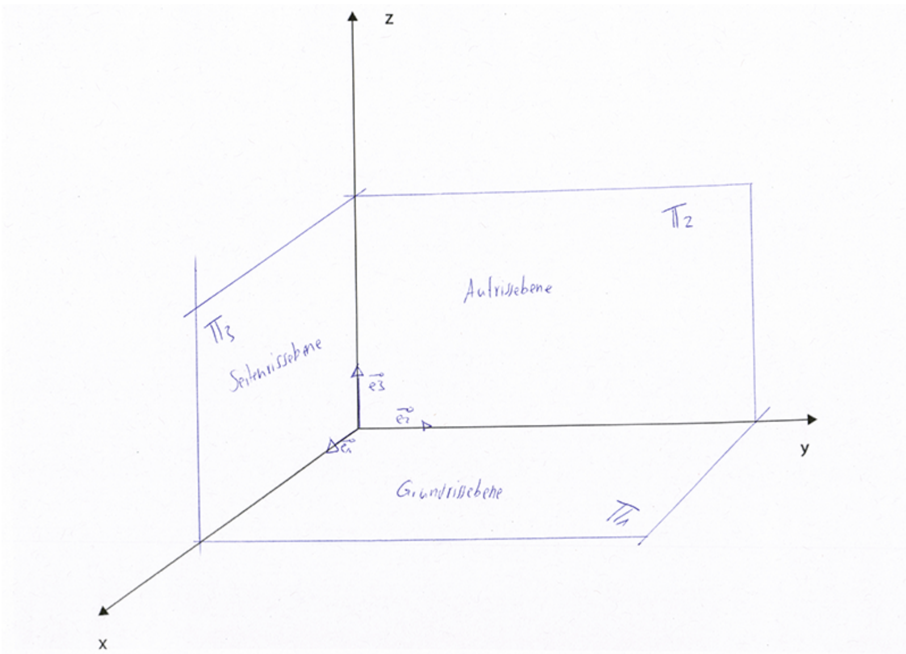
$$L = \{2/1\}$$

Kapitel 3

Vektorgeometrie

3.1 Geraden

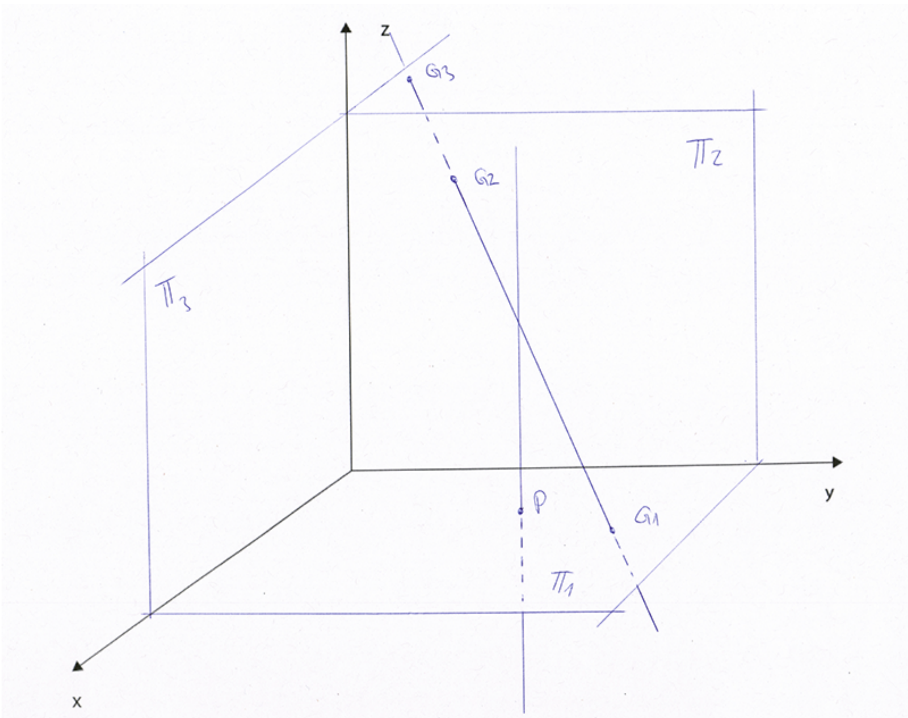
In R^3 haben wir ein Koordinatensystem, wobei



je zwei Achsen, eine Ebene bestimmen; Die Rissebenen genannt werden, und zwar

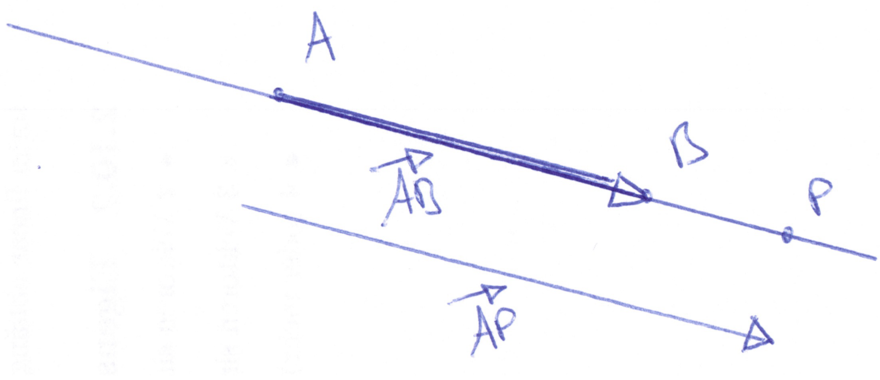
- π_1 die Grundrissebene (x,y Achse)
- π_2 die Aufrissebene (y,z Achse)
- π_3 die Seitenrissebene (x,z Achse)

Eine Gerade in R^3 schneidet jede Rissebene in einem Punkt, den wir Spurpunkt nennen. Es gibt auch spezielle Lagen, bei denen nur ein oder zwei Spurpunkte entstehen.



- $\{G_1\} =$ g $\cap \pi_1$ heisst 1. Spurpunkt
- $\{G_2\} =$ g $\cap \pi_2$ heisst 2. Spurpunkt
- $\{G_3\} =$ g $\cap \pi_3$ heisst 3. Spurpunkt

P ϕ_1 heisst erstprojizierende Gerade;
Sie besitzt nur ein Spurpunkt.
Wie können wir nun Punkte, im speziellen Spurpunkt, berechnen?
Dazu benötigen wir eine Geradengleichung. Diese suchen wir mit Hile von Vektoren.
"Eine Gerad eist durch zwei Punkte A,B bestimmt"
(Ein Axiom der Geometrie)



Damit also $\vec{AB}$ bekannt und für einen beliebigen Punkt p auf g ist dann $\vec{AP}$

$$\vec{AP} = \lambda * \vec{AB}, \lambda \in R$$

also

$$\vec{p} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$
$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in R$$

wir haben die Geradengleichung gefunden

Beispiel 10. *Gerade g durch $A(4/5/-1)$ und $B(2/-3/6)$*
Es ist

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und so

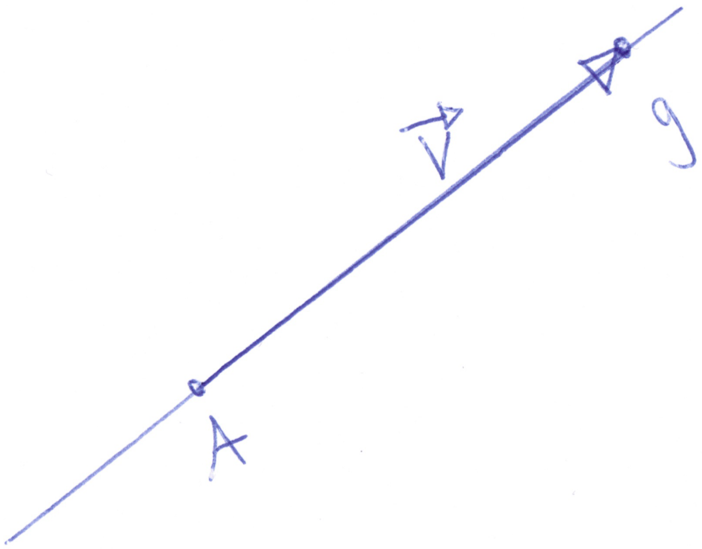
$$g : \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Definition 14. *Wir nennen*

$$g : \vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{v}; \lambda \in R$$

Die <u>Parametergleichung</u> der Geraden g mit dem

- *<u>Trägerprunkt</u> A (Aufpunkt)*
- *<u>Richtungsvektor</u> $\vec{v}$*
- *<u>Parameter</u> λ*



Beispiel 11. *Welchen zweiten Spurpunkt/G_2 besitzt*

$$g : \vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} ?$$

Wir wissen, $G_2 \in \phi_2$ und somit ist $x = 0$
Mit

$$\vec{p} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wird also

$$\begin{aligned} x &= 8 + 2\lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= -3 + 5\lambda \end{aligned}$$

Wenn wir die Geradengleichung komponentenweise schreiben.
Ist

$$x = 0$$

so wird

$$\begin{aligned} 8 + 2\lambda &= 0 \\ 2\lambda &= -8 \\ \lambda &= -4 \end{aligned}$$

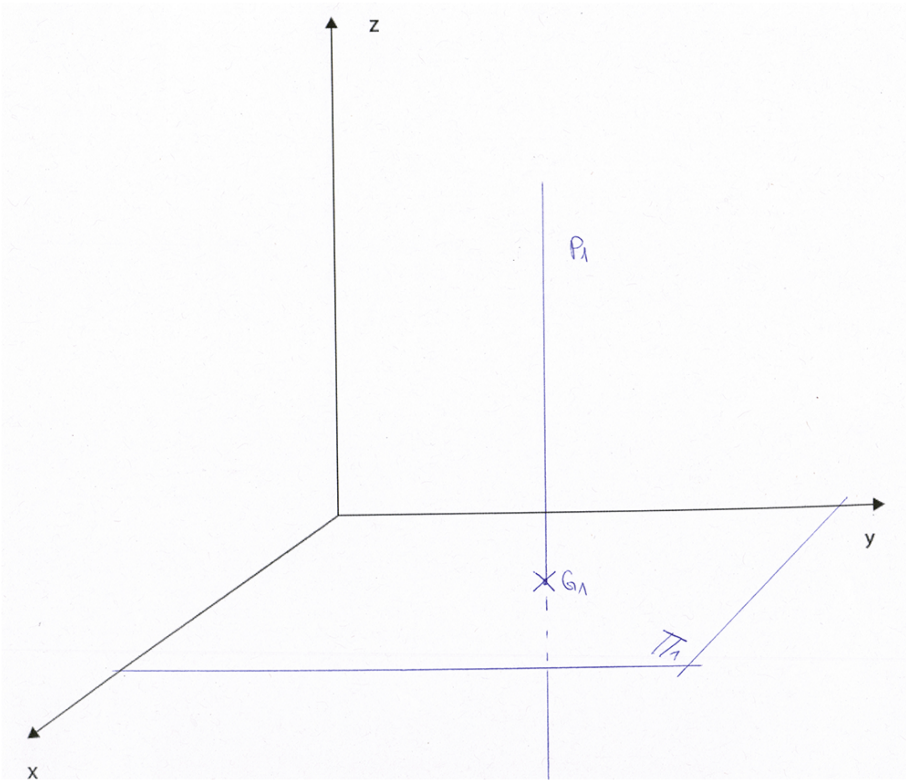
Damit wird

$$\begin{aligned} y &= 1-(-4) \\ y &= 5 \\ \\ z &= -3+5(-4) \\ z &= -23 \end{aligned}$$

und so

$$G_2(0/5/-23)$$

Beispiel 12. *Welche Parametergleichung hat die erstprojizierende Gerade durch $A(5/-4/7)$?*



Richtungsvektor ist zum Beispiel

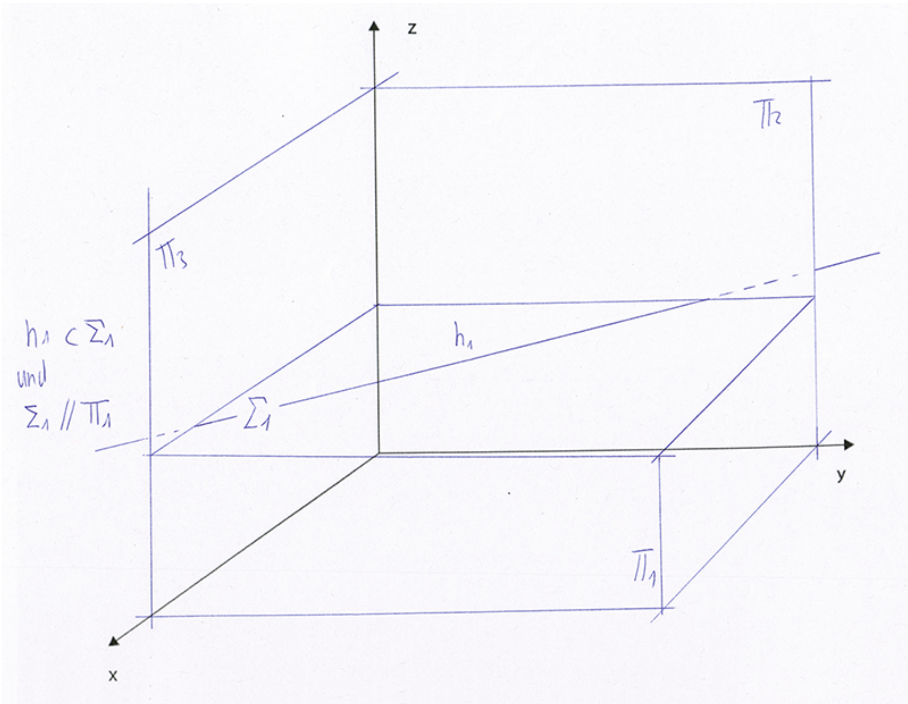
$$\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \textit{etc.}$$

Also

$$p_1 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.1.1 Hauptgerade

Eine Gerade, die parallel zu einer Rissebene liegt, heisst Hauptgerade
Bei einer ersten Hauptgeraden $h_1 \parallel \pi_1$ sind also alle z-komponenten gleich.



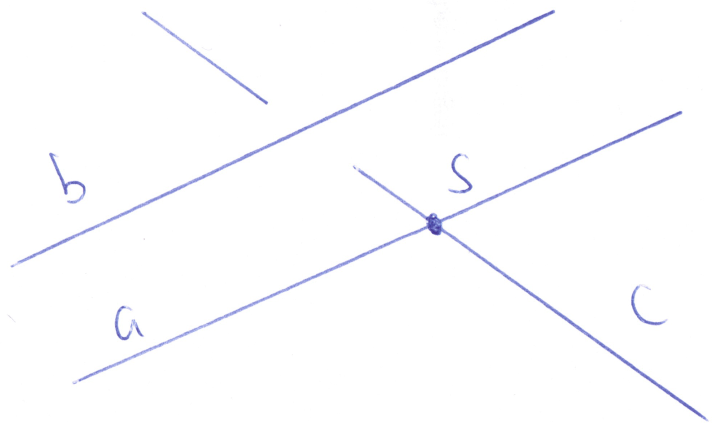
Beispiel 13. *h_1 durch $A(4/-1/5)$ und $B(-2/3/5)$*
Mit

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird

$$h_1 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Gegenseitige Lage



- parallel $a \parallel b$
  $(a \cap b \neq 0)$
- schneiden sich:
  $a \cap c = \{S\}$
- windschief: $\not(b \parallel c) \wedge (b \cap c \neq \emptyset)$

Parallel

Kennen wir die beiden Parametergleichungen

$$a : \vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$$
$$b : \vec{p} = \vec{b} + \mu\vec{w}$$

so finden wir sofort, ob $a \parallel b$ ist,
denn dann ist

$$\vec{v} \text{ und } \vec{w} \text{ koolinear}$$

Beispiel 14.

$$a : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$b : \vec{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

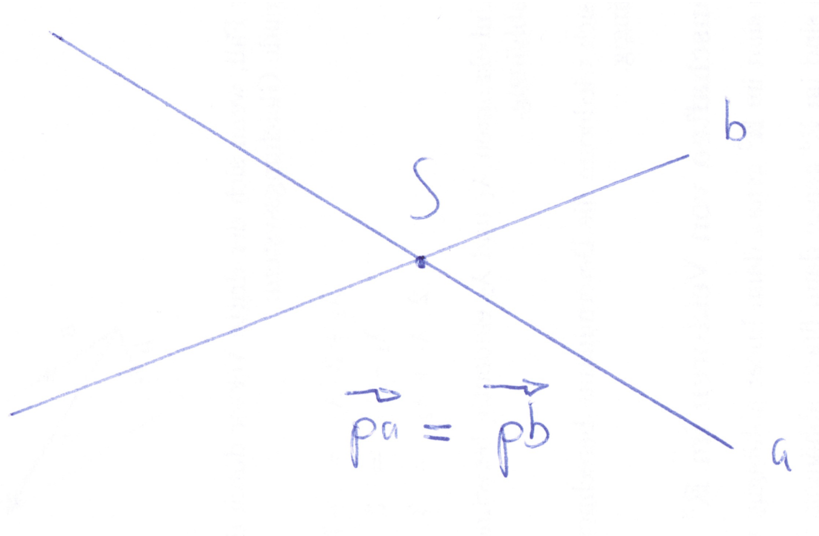
$a \parallel b$, denn $\vec{v_a} = (-3)\vec{v_b}$

Geschnitten

Sind die Geraden nicht parallel, wie

$$a: \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$b: \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

So suchen wir einen Schnittpunkt.



mit

$$\vec{pa} = \vec{pb}$$

also komponentenweise

$$\left| \begin{array}{lcl} 2-\lambda & = & 1+3\mu \\ 1+3\lambda & = & 2+\mu \\ 2+4\lambda & = & -1+\mu \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

und wir erhalten 3 Gleichungen mit 2 Variabeln.

$$\begin{aligned} (3)-(2): 1+\lambda &= -3 \\ \lambda &= -4 \end{aligned}$$

Eingesetzt in

$$\begin{aligned} (3): 2-16 &= -1+\mu \\ \mu &= -13 \end{aligned}$$

Kontrolle mit 1

Mit

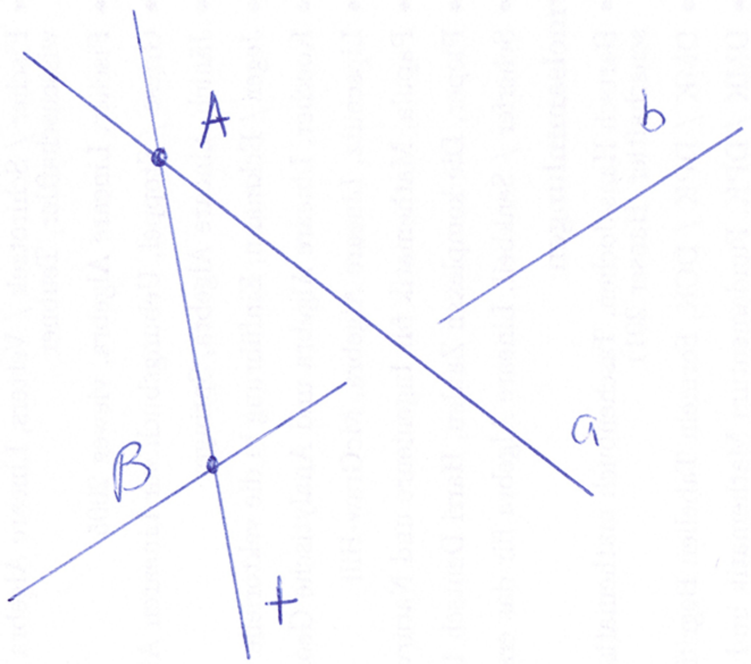
$$\lambda = -4$$
$$\mu = -13$$

Wird

$$2 - (-4)\lambda = 1 + 3(-13)\mu$$
$$2 + 4 = 1 - 39$$
$$6 = -38$$

Also ist $a \nparallel b$ und $a \cap b \not\emptyset$,
also sind a und b windschief.

Windschief



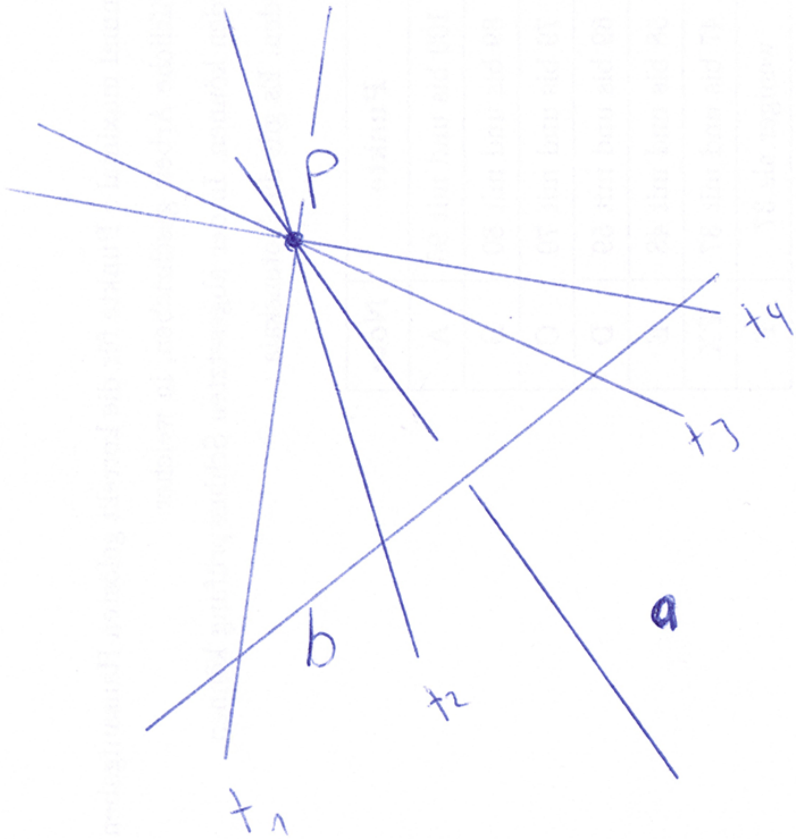
Definition 15. *Eine Gerade t, die zwei windschiefe Geraden schneidet, heisst* <u>*Transversale*</u>

Beispiel 15. *Suche eine Transversale durch* $P(2/3/5)$*, wobei* $P \in a$ *mit*

$$a : \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

und

$$b : \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Es gibt unendlich viele. Eine davon finden wir mit der Wahl von μ in $b : \vec{q}$. μ kan beliebig gewählt werden. Durch das Wählen von μ erhalten wir einen Vektor. Dieser Zeigt auf den Punkt Q auf der Geraden b. Der Vektor von P zu Q ist die gesuchte Transversale.

$$\mu = 5$$

$$\vec{q}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}35\\15\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}34\\16\\14\end{pmatrix}$$

und so

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix}34\\16\\14\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\13\\9\end{pmatrix}$$

womit

$$t : \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}32\\13\\9\end{pmatrix}$$

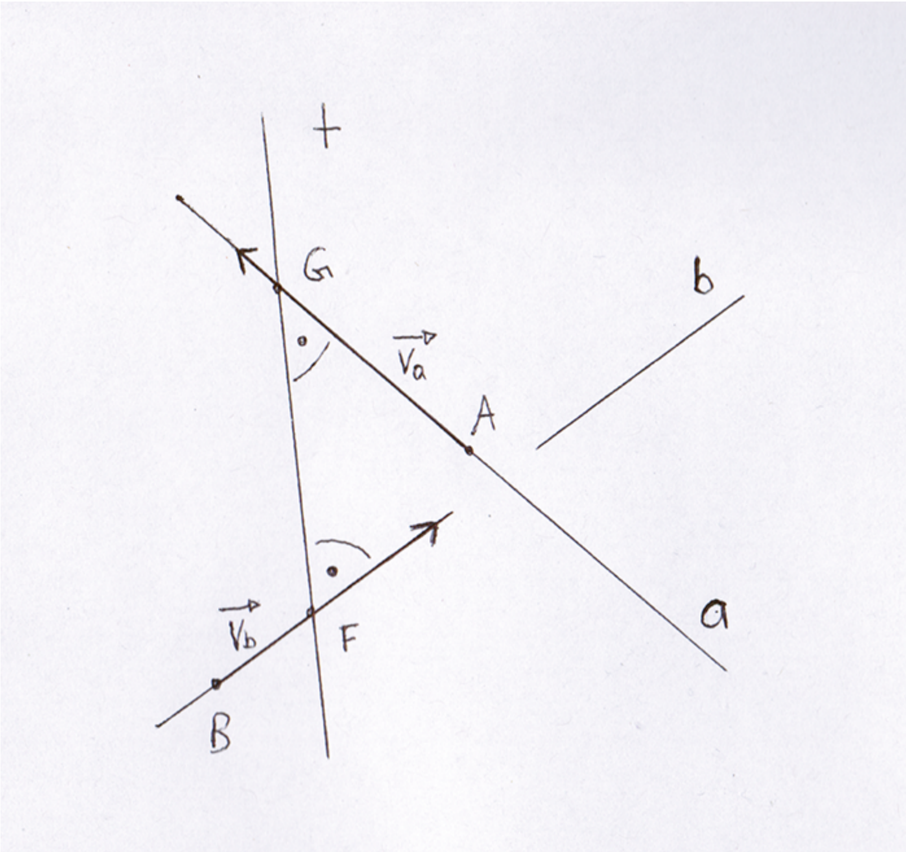
Beispiel 16. *Suche eine Transversale, die sowohl zu*

$$a : \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als auch

$$b : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

senkrecht steht.



Es gibt genau eine solche Transversale.
Sind F und G die Schnittpunkte, so ist

$$\vec{FG} * \vec{V_b} = 0 \wedge \vec{FG} * \vec{V_a} = 0$$

Mit $F \in b$ *wird*

$$F(1 + 3\mu/6 - 2\mu/ - 2)$$

und $G \in a$*, also*

$$G(2/3 + 2\lambda/5 + \lambda)$$

so wird

$$\vec{FG}\begin{pmatrix} 2-(1+3\mu) \\ 3+2\lambda-(6-2\mu) \\ 5+\lambda-(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-3\mu) \\ -3+2\lambda+2\mu) \\ 7+\lambda \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\vec{FG} * \vec{V_a} &= (1-3\mu)*0+(-3+2\lambda+2\mu)*2+(7+\lambda)*1 \\
&= -6+4\lambda+4\mu+7+\lambda \\
&= 5\lambda+4\mu+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{FG} * \vec{V_b} &= (1-3\mu)*3+(-3+2\lambda+2\mu)(-2) \\
&= 3-9\mu+6-4\lambda-4\mu \\
&= -4\lambda-13\mu+9
\end{aligned}$$

womit wir

$$\begin{vmatrix} 5\lambda+4\mu+1 & = & 0 \\ -4\lambda-13\mu+9 & = & 0 \end{vmatrix}$$

erhalten. Weiter ist dann

$$\begin{aligned}
-49\mu+49 &= 0 \\
\mu &= 1
\end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned}
5\lambda+4+1 &= 0 \\
\lambda &= -1
\end{aligned}$$

Damit wird

$$F(4/4/-2), G(2/1/4)$$

und

$$\vec{FG} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 1-4 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

also

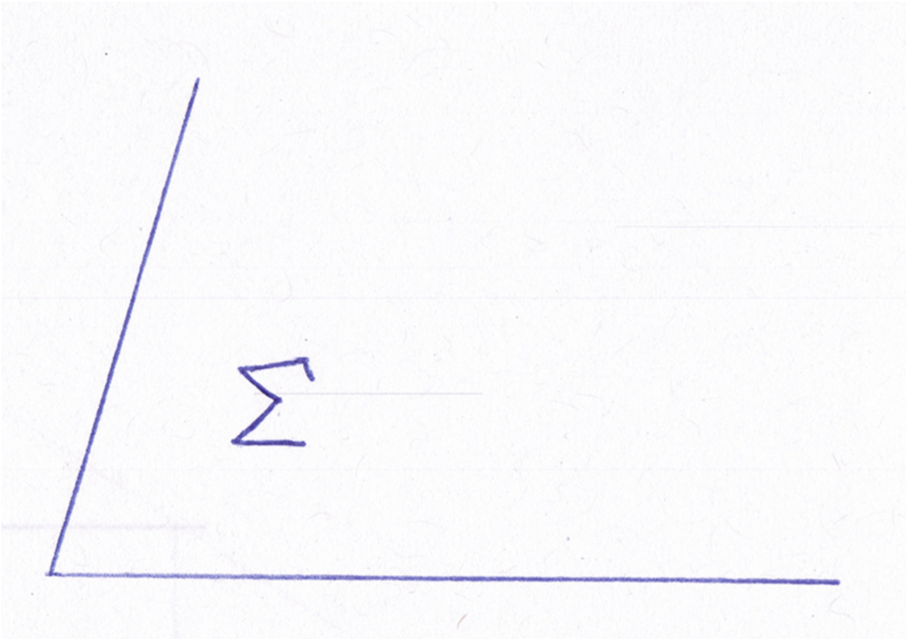
$$t : \vec{p}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ausserdem haben wir nun noch den <u>Abstand der Windschiefen Geraden</u>

$$|\vec{FG}| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2+6^2} = 7$$

mit dem <u>Fusspunkt</u> F und G eralten.

3.2 Ebenen



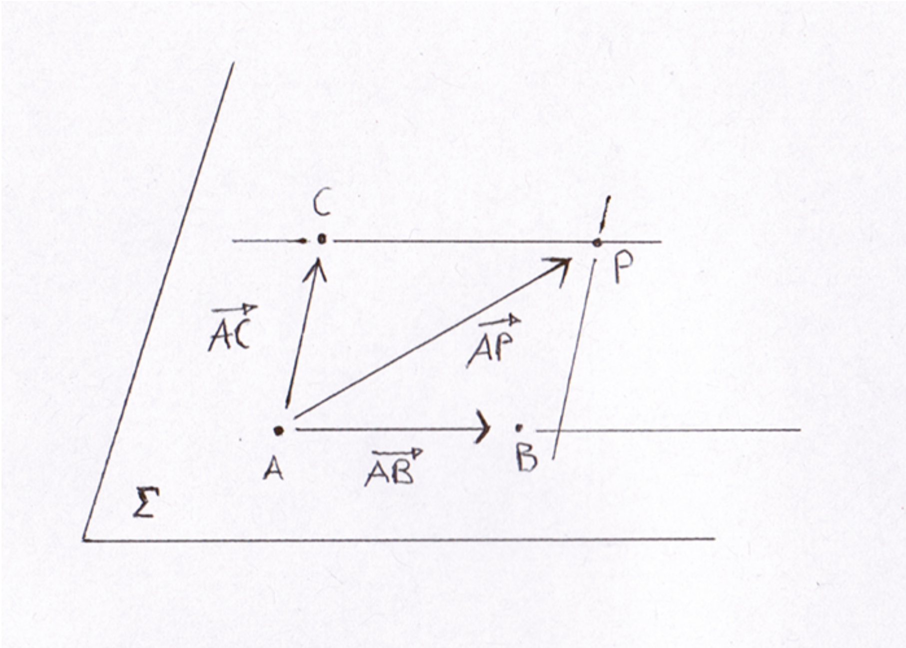
Eine Ebene ist bestimmt durch

- 3 Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen
- 2 paralelle Geraden
- zwei sich schneidende Geraden
- Eine Gerade g und ein Punkt $p \notin g$

Ebenen bezeichnen wir mit griechischen Grossbuchstaben

$$\Delta, \Omega, \Sigma, \Pi, \ldots$$

Kennen wir 3 nicht auf derselben Geraden liegende Punkte $A, B, C \in \Sigma$,



und suchen einen weiteren Punkt $P \in \Sigma$,

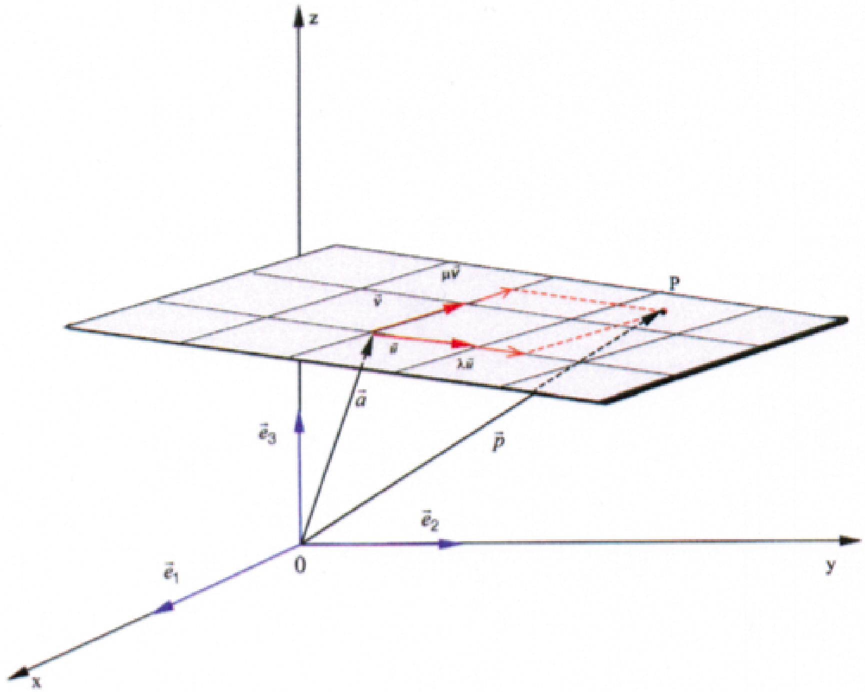
$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}; \lambda, \mu \in R \\ \Sigma : \vec{p} &= \vec{a} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} \end{aligned}$$

Beispiel 17. Ω *durch A(3/1/-4), B(-2/1/5) und C(3/4/4) Mit*

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

wird

$$\Omega : \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$



Definition 16. *Wir nennen*

$$\Sigma : \vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \lambda, \mu \in R$$

Die Parametergleichung der Ebene mit

- *den Richtungsvektor* $\vec{u}$,$\vec{v}$
- *dem Trägerpunkt* A
- *den Parameter* λ,μ

Vektoriell ist eine Eben also durch 2 lin. unabhängige Vektoren und ein Punkt bestimmt.

Schreiben wir die Parametergleichung

$$\Lambda : \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

komponentenweise

$$\left| \begin{array}{l} \text{x} = 2{+}4\ \lambda\ {+}\mu \\ \text{y} = \text{-3 - } \lambda \text{ -2 } \mu \\ \text{z} = 5 + 3\lambda\text{- } \mu \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

So können wir mit 2 der 3 Gleichungen λ und μ berechnen und dann diese Resultate in die 3. Gleichung einsetzen.
Rechnen wollen wir aber mit dem Gaus-Algorithmus

$$\begin{aligned} (1) + (3) : x + z &= 7 + 7\lambda \\ 2(1) + (2) : 2x + y &= 1 + 7\lambda \\ x + z - 2x - y &= 6 \\ \Lambda : -x - y + z - 6 &= 0 \\ \Lambda : x + y - z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Definition 17. *Wir nennen*

$$\Sigma : ax + by + cz + d = 0$$

(a,b,c und d nicht gleichzeitig 0)

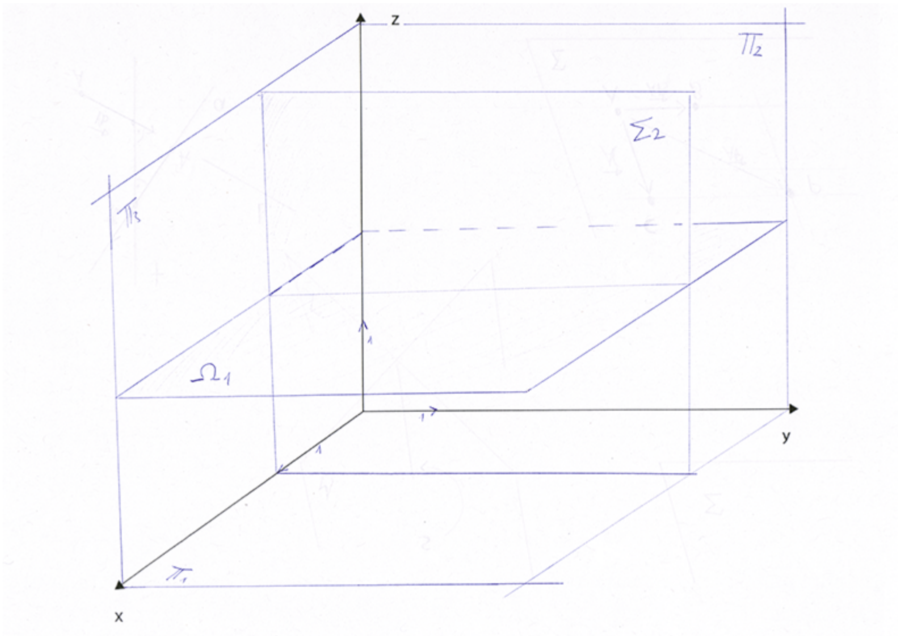
die Koordinatengleichung von Σ

Beispiel 18. *Welche Koordinatengleichung hat die Grundrissebene?*

$$\Pi_1 : z = 0$$

Die Koordinatengleichung definiert was ein Punkt erfüllen muss um in dieser Ebene zu liegen.

Definition 18. *Eine Ebene Σ, die parallel zu einer Rissebene liegt, Hauptebene*



$\Omega \parallel \Pi_1$ ist eine erste und
$\Sigma \parallel \Pi_2$ ist eine zweite Hauptebene.
Der Index bestimmt zu welcher Ebene die Hauptebene parallel ist.

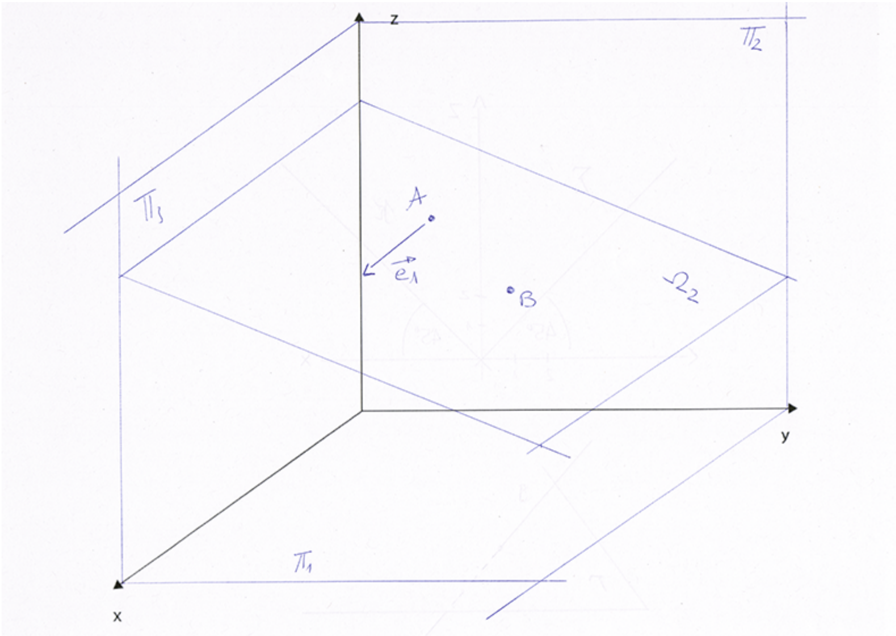
Beispiel 19. *Welche Koordinatengleichung und welche Parallelgleichung hat die zweite Hauptebene Σ_2, die Punkt $A(4/5/3)$ enthält.*
Koordinatengleichung:

$$\Sigma_2 : x = 4$$
$$\Sigma_2 : x - 4 = 0$$

Parametergleichung: Richtungsvektoren sind $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$, also

$$\Sigma_3 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition 19. *Eine Ebene, die Senkrecht zu einer Rissebene steht, heisst projizierende Ebene.*



$\Omega_2 \perp \Pi_2$ ist eine zweitprojizirende Ebene.
Ist $A(1/2/6), B(4/4/1)$ so ist $\vec{AB}$ der eine und $\vec{e_1}$ der andere Richtungsvektor.
Also wird

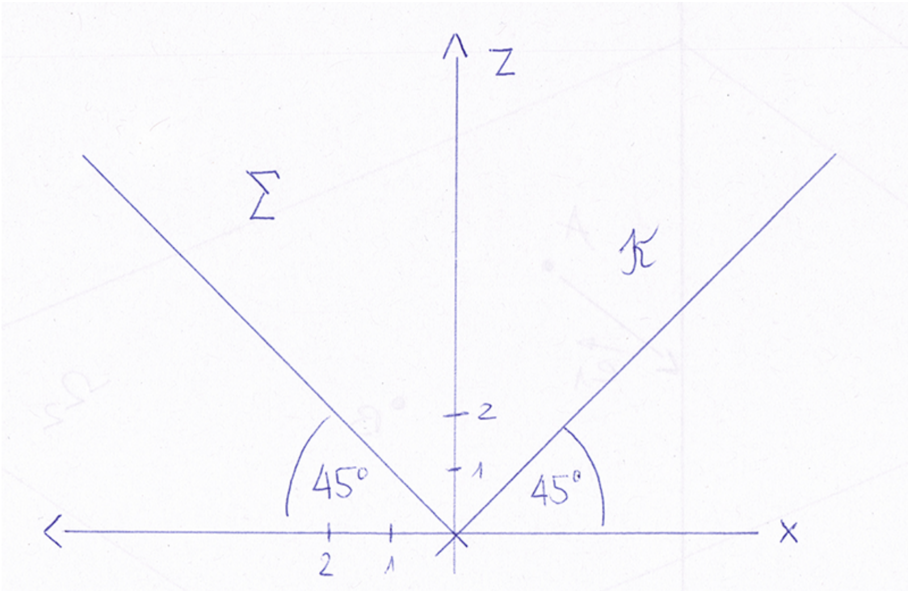
$$\Omega_2 : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6-5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und so

$$\left| \begin{array}{l} \text{x} = 1 + 3\lambda + \mu \\ \text{y}= 2+2\lambda \\ \text{z} = 6\text{-}5\lambda \end{array} \right| \begin{array}{ll} (1) & \\ (2) & 5(2) + 2(3) : 5y + 2z = 22 \\ (3) & \end{array}$$

$$\Omega_2 : 5y + 2z - 22 = 0$$

Also liegen $(4/4/1), (7/4/1), (-9/4/1) \ldots in \Omega_2$, denn x ist frei wählbar.
Eine Variable frei wählbar $\rightarrow$ eine projizierende Ebene



Σ heisst symmetrieebene und κ heisst die Koinzidenzebene
Es ist

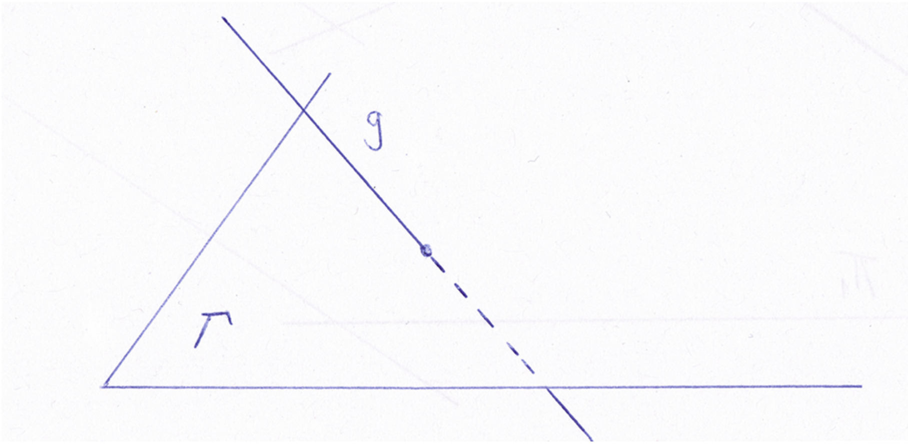
$$\Sigma : x = z$$
$$\Sigma : x - z = 0$$

und

$$\kappa : x = -z$$
$$\kappa : x + z = 0$$

3.2.1 Schnittprobleme

Schnitt Gerade mit Ebene



$\{D\} = g \cap \Gamma$ heisst <u>Durchstosspunkt</u>

Ist

$$\Gamma : \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

so muss $\vec{p_\gamma} = \vec{p_g}$ sein, also komponentenweise

$$\left| \begin{array}{l} -1 + \lambda + \mu = 7 + 2\alpha \\ 3 - \lambda + 2\mu = 6 - \alpha \\ 9 + 4\lambda - 2\mu = 3 - 2\alpha \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

und wir berechnen α

$$\begin{aligned} (1) + (2) : 2 + 3\mu &= 13 + \alpha \\ 4(2) + (3) : 21 + 6\mu &= 27 - 6\alpha \\ -17 &= -1 + 8\alpha \\ -16 &= 8\alpha\alpha = -2 \end{aligned}$$

Setzen wir αein, erhalten wir den Punkt

$$D(3/8/7)$$

Beispiel 20. *Ist*

$$\Omega : 2x - y + 3z + 1 = 0$$

und

$$g : \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so ist

$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = -4 - \lambda$$
$$z = -1 + \lambda$$

was eingesetzt in Ω zu

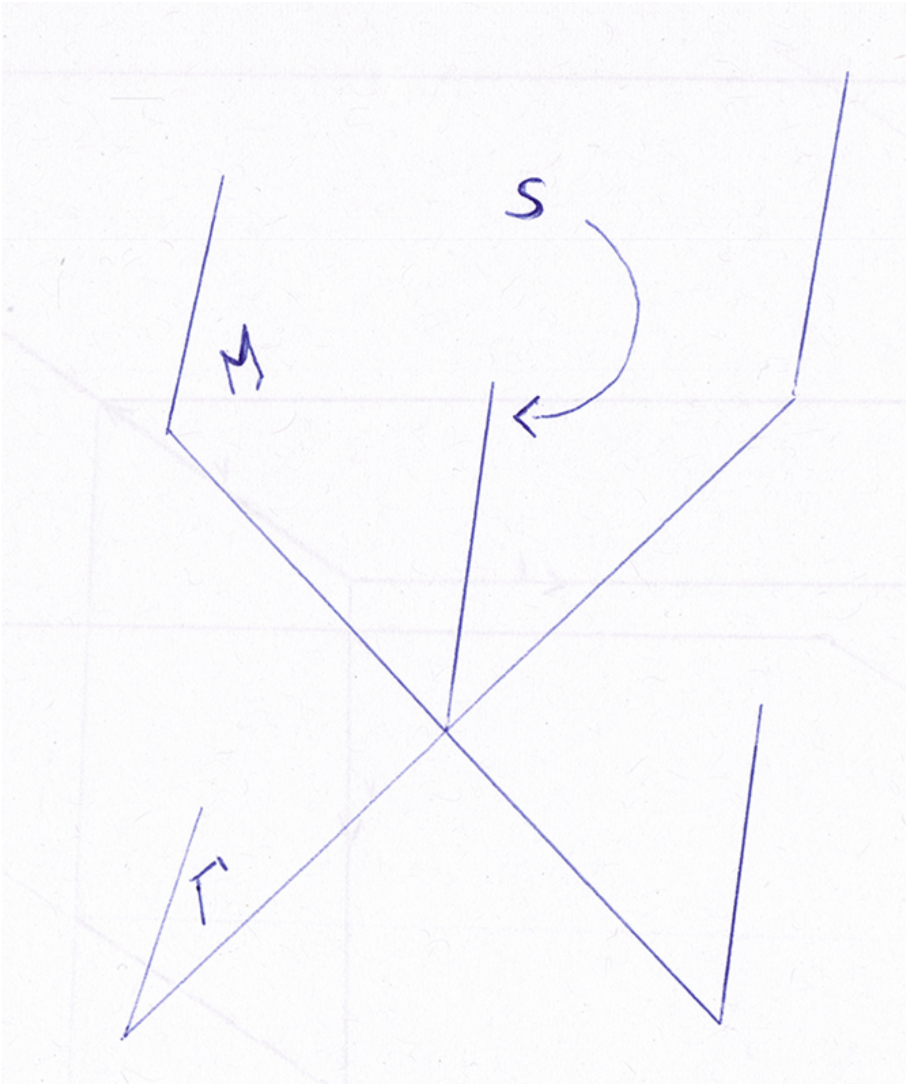
$$2(3 + 2\lambda) - (-4 - \lambda) + 3(-1 + \lambda) + 1 = 0$$
$$6 + 4\lambda + 4 + \lambda + -3 + 3\lambda + 1 = 0$$
$$8\lambda = -8$$
$$\lambda = -1$$

führt

somit wird

$$D(1/-3/-2)$$

Schnitt Ebene mit Ebene



$\{S\} = \Gamma \cap \Sigma$ heisst Schnittgerade
Ist

$$\Gamma : x - 2y + 2z - 1 = 0$$

und

$$\Sigma : 2x - 3y - z + 2 = 0$$

so wird

$$\left|\begin{array}{l} \text{x-2y+2z-1} = 0 \\ \text{2x-3y-z+2} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Und wir können eine Variable frei wählen.
Zum Beispiel

$$x = 0, y = 1, z = 3 \ldots$$

Da wir aber einen Parameter benötigen, wählen wir

$$x = \lambda$$

Damit erhalten wir

$$\left| \begin{array}{l} \lambda - 2y + 2z - 1 = 0 \\ 2\lambda - 3y - z + 2 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) : 5\lambda - 8y + 3 &= 0 \\ 8y &= 3 + 5\lambda \\ y &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\lambda \\ 3(1) - 2(2) : -\lambda + 8z - 7 &= 0 \\ 8z &= 7 + \lambda \\ z &= \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\lambda \end{aligned}$$

zusammengefasst

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\lambda \\ z &= \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\lambda \\ S : \vec{p} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Länge von $\vec{v}$ ist beliebeig
also

$$S : \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einen ganzzahligen Trägerpunkt erhalten wir mit der Wahl von

$$\lambda = \frac{1}{8}$$

dann wird

$$\begin{aligned} x &= 0 + \frac{1}{8} * 8 = 1 \\ y &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} * 5 = 1 \\ z &= \frac{7}{8} + \frac{1}{8} * 1 = 1 \end{aligned}$$

also

$$S : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kennen wir die Parametergleichung

$$\Sigma : \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi : \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so erhalten wir mit

$$\vec{P_\Sigma} = \vec{P_\Phi}$$

komponentenweise

$$\left| \begin{array}{l} 2 + \lambda - \mu = 4 - 2\sigma + \tau \\ 2\lambda + \mu = -1 + \sigma - \tau \\ -1 - 3\lambda + 3\mu = 1 + 2\sigma + \tau \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

und wir können eine Variable frei wählen. Kennen wir zum Beispiel μ, so können wir die die anderen Variabeln in Abhängikeit von μ berechnen. Am interessantesten ist der Zusammenhang zwischen

$$\lambda \text{ und } \mu$$

oder zwischen

$$\sigma \text{ und } \tau$$

weil die 2 Parameter in derselben Ebenengleichung stehen.
Wir suchen das Verhältnis von μ und λ.

$$\begin{array}{rc} (1) + (2) : & 2 + 3\lambda = 3 - \sigma \\ & -1 + 3\lambda = -\sigma \\ & 1 - 3\lambda = \sigma \\ (2) + (3) : & -1 - \lambda + 4\mu = 3\sigma \\ & -1 - \lambda + 4\mu = 3 - 9\lambda \\ & 4\mu = 4 - 8\lambda \\ & \mu = 4 - 2\lambda \end{array}$$

Damit wird

$$\begin{array}{rc} x = & 2 + \lambda - (1 - 2\lambda) = 1 + 3\lambda \\ y = & 2\lambda + (1 - 2\lambda) = 1 \\ z = & -1 - 3\lambda + 3(1 - 2\lambda) = 2 - 9\lambda \end{array}$$

also ist

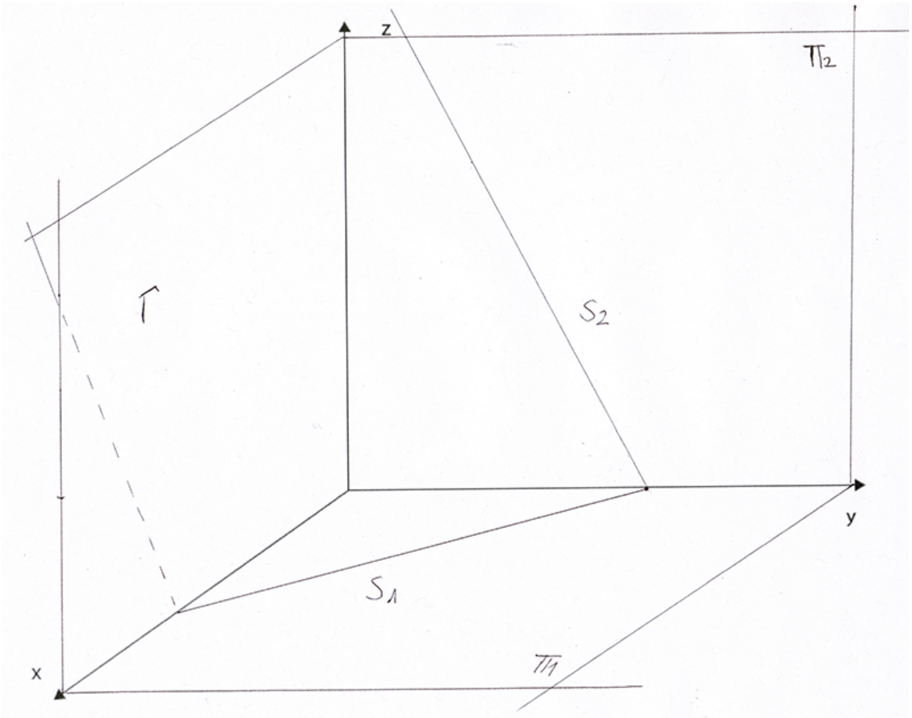
$$s : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Wir können auch

$$s : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

schreiben. Ist aber reine Kosmetik

Definition 20. *Die Schnittgerade einer Ebene mit der Rissebene heisst* <u>*Spuren/Spurgerade*</u>



$$s_1 = \Gamma \cap \Pi_1 \text{erster Spurgerade}$$
$$s_2 = \Gamma \cap \Pi_2 \text{zweiter Spurgerade}$$

Beispiel 21. *Berechne die erste Spur von*

$$\Gamma : \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es ist

$$\Pi_1 : z = 0$$

also muss

$$-3 + \lambda + 3\mu = 0$$

sein. Also

$$\lambda = 3 - 3\mu$$

und damit

$$
\begin{aligned}
x &= 2 - (3 - 3\mu) + 2\mu = -1 + 5\mu \\
y &= 5 + 3 - 3\mu + 4\mu = 8 + \mu
\end{aligned}
$$

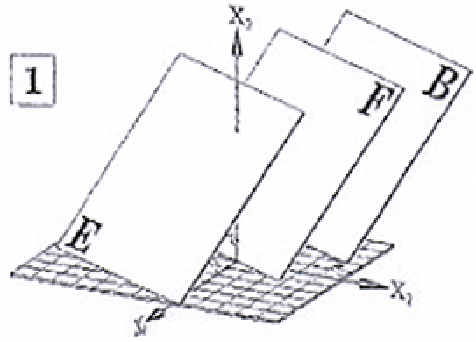
also ist die erste Spur

$$s_1 : \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

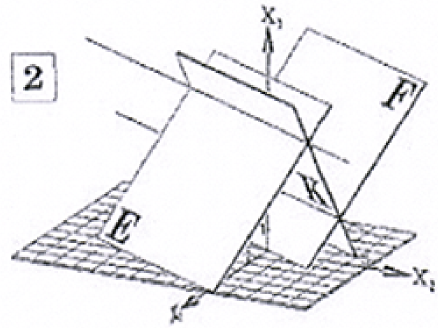
Lage dreier Ebenen

Für die Lage dreier verschiedener Ebenen gibt es fünf charakteristische Fälle:

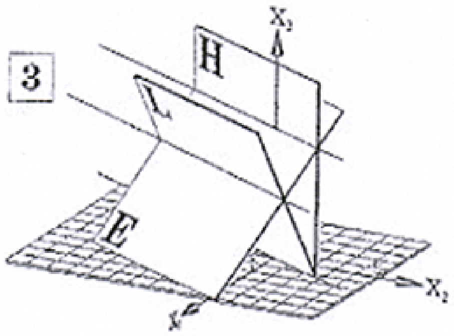
1 die drei Ebenen sind parallel



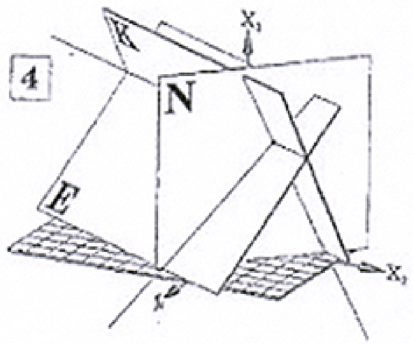
2 genau zwei Ebenen sind parallel; es gibt genau zwei parallele Schnittgeraden



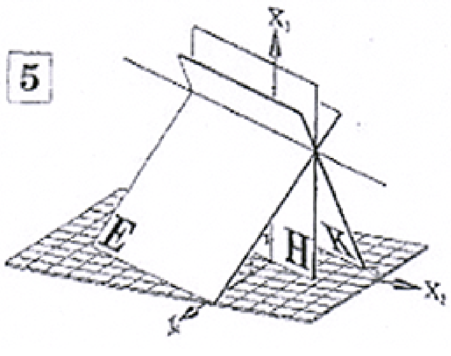
3 es gibt drei parallele Schnittgeraden



4 es gibt genau einen gemeinsamen Punkt



5 es gibt genau eine gemeinsame Schnittgerade



Sind 3 Ebenene parallel, so sind die Koordinatengleichungen

$$\begin{aligned}
\Sigma: &\quad x - y + 2z - 4 = 0 \\
\Omega: &\quad 2x - 2y + 4z - 8 = 0 \\
\Gamma: &\quad 3x - 3y + 6z - 12 = 0
\end{aligned}$$

Beispiel 22. *Berechne den Schnittpunkt der drei Ebenen*

$$\begin{aligned}
\Lambda: &\quad 2x + y + 5z + 17 + 0 = 0 \\
\Omega: &\quad x + 2y + z - 2 = 0 \\
\Psi: &\quad 2x + 5y + z - 1 = 0
\end{aligned}$$

Existiert kein solcher Schnittpunkt, so ist die gegenseitige Lage der drei Ebenen und eventuelle Schnittgeraden zu bestimmen.

Parallel

Keine zwei der drei Ebenen sind parallel. Also suchen wir einen Schnittpunkt

Schnittpunkt

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y + 5z + 17 = 0 \\ x + 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y + z - 1 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(1) - (3): -4y + 4z + 18 &= 0 \\
-2y + 2z + 9 &= 0 \\
(1) - 2(2): -3y + 3z + 21 &= 0
\end{aligned}$$

also

$$\left| \begin{array}{l} y - z - \frac{9}{2} = 0 \\ y - z - 7 = 0 \end{array} \right|$$

Was ein Wiederspruch ist.
Nun müssen wir die Schnittgerade suchen.

Schnittgerade

Λ *und* Δ *mit* $x = \alpha$ *wird*

$$\left| \begin{array}{l} 2\alpha + y + 5z + 17 = 0 \\ \alpha + 2y + z - 2 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
2(1) - (2): \alpha + 9z + 36 &= 0 \\
9z &= -36 - 3\alpha \\
z &= -4 - \frac{\alpha}{3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(1)-5(2):-3a-9y+27&=0\\ 9y&=27-3\alpha\\ y&=3-\frac{\alpha}{3}\end{aligned}$$

somit ist

$$s_1:\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Δ *und* Ψ *mit* $y=\beta$ *wird*

$$\begin{array}{r|l}x+2\beta+z-2=0 & \textit{(1)}\\ 2x+5\beta+z-1=0 & \textit{(2)}\end{array}$$

$$\begin{aligned}(1)-(2):-x-3\beta-1&=0\\ x&=-1-3\beta\\ 2(1)-1:-\beta+z-3&=0\\ z&=3+\beta\end{aligned}$$

und damit

$$s_2:\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

Also ist $s_1\parallel s_2$
Falls der rägerpunkt von s_1 *auf* s_2 *, so sind die Geraden identisch-*

$$\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

komponentenweise

$$\left|\begin{array}{l|l}0=-1-3\beta & \to\beta=-\frac{1}{3}\\ 3=0+\beta & \to\beta=3\\ -4=3+\beta & \to\beta=-7\end{array}\right.$$

Also ist der Trägerpunkt von

$$T_{s_1}\in s_2$$

Damit ist klar, dass die drei Ebenen so liegen, dass die drei Schnittgeraden parallel sind.
Die dritte Schnittgerade finden wir mit

$$\left|\begin{array}{l|l}2x+y+5z+17=0 & (1)\\ 2x+5y+z-1=0 & (2)\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}(1)-(2)&:\\ -4y+4z+18&=0\\ 2y-2z-9&=0\\ y&=\frac{9}{2}+z\end{aligned}$$

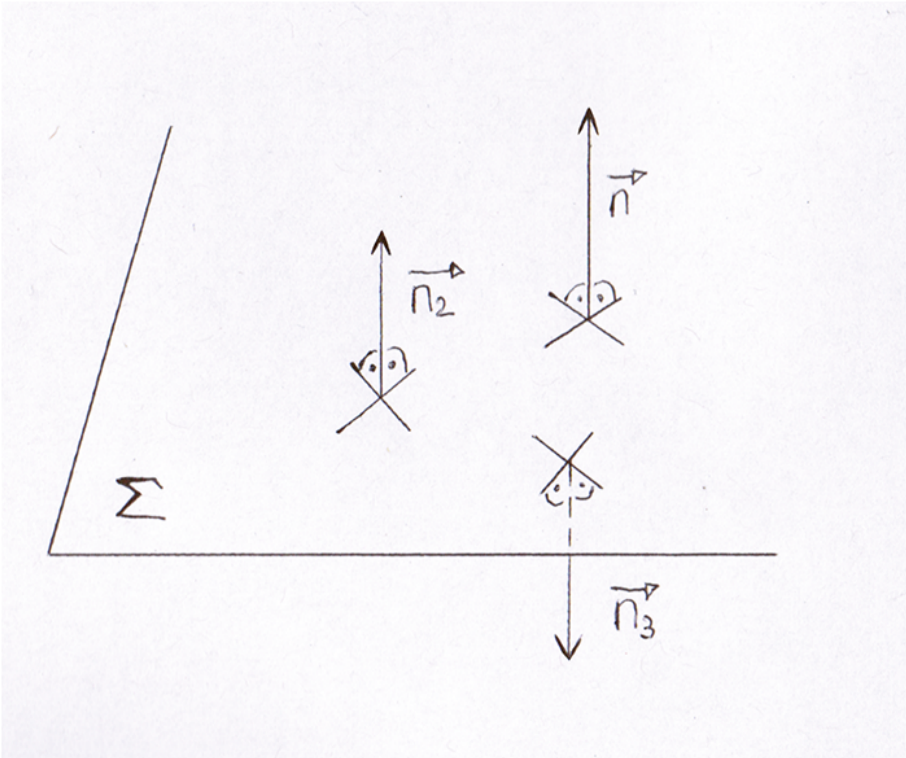
und

$$\begin{aligned} 5(1) - (2): \\ 8x + 24z + 86 = 0 \\ 8x - 86 - 24z \\ x = -\frac{43}{4} - 3z \end{aligned}$$

also

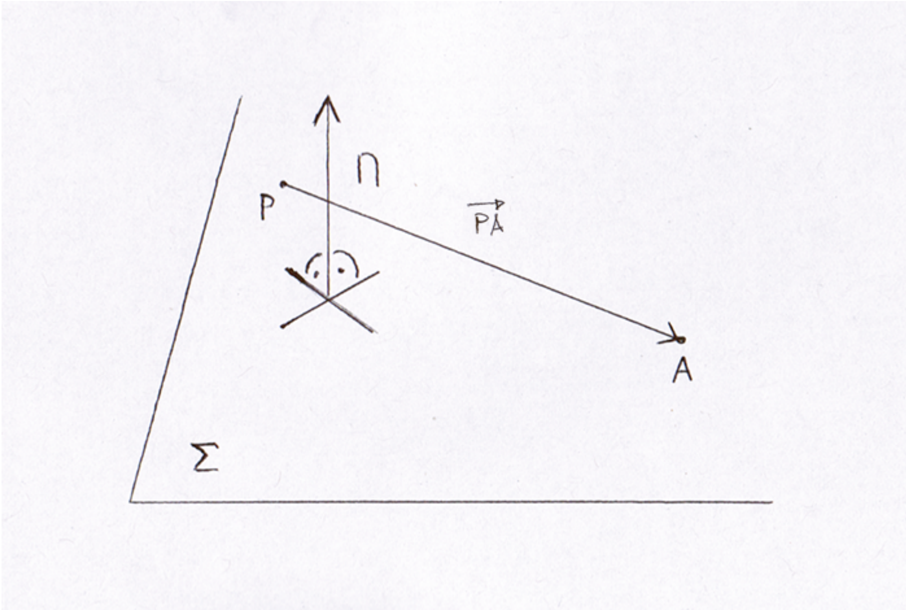
$$s_3 : \vec{p} = \begin{pmatrix} -\frac{43}{4} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Normalen und Abstandsprobleme



Definition 21. *Einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht zu einer Ebene Σ steht, heisst* Normalenvektor *von* Σ

Kennen wir einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und einen Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$ einer Ebenen Σ und suchen einen beliebeigen Punkt $A(x/y/z)$ von Σ



So ist

$$\vec{PA} \perp \vec{n}$$

also

$$\vec{PA}''\vec{n} = 0$$

mit

$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix}$$

also wir

$$\begin{aligned} \vec{PA} * \vec{n} &= (x - p_1)n_1 + (y - p_2)n_2 + (z - P_3)n_3 \\ &= n_1x + n_2y + n_3z - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vergleichen wir mit der Koordinatengleichung

$$\Sigma \quad : \quad ax + by + cy + d = 0$$

so sehen wir, dass

$$a = n_1, b = n_2, c = n_3$$

und

$$d = (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3)$$

ist. Aber es ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

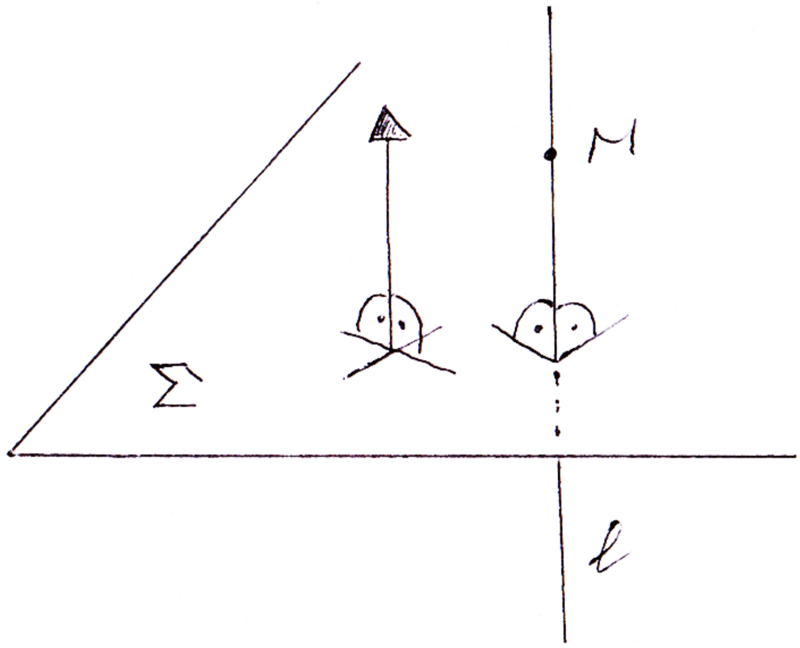
Also besitzt diese Ebene

$$\Sigma \quad : \quad ax + by + cz + d = 0$$

den Normalenvektor

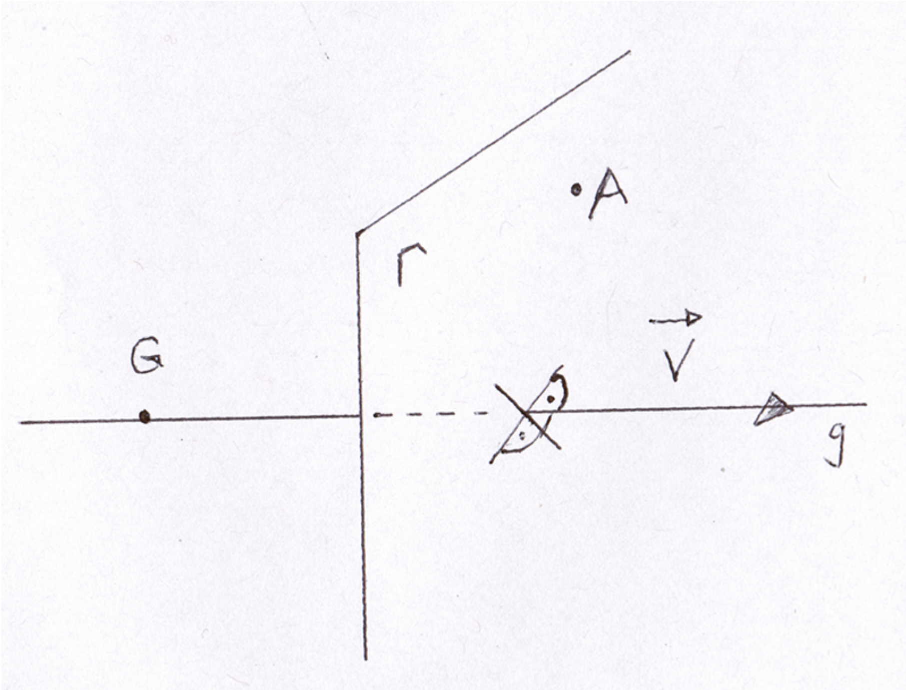
$$\vec{n} \quad = \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Beispiel 23. *Suchen wir die Parametergleichung der Senkrechten (Normalen, Lot) zur Ebene* $\Sigma : 4x + 3y - z + 11 = 0$ *wenn* $M(5/-2/1)$ *auf dem Lot liegen soll.*



$$l : \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{m} + \lambda \vec{n}$$

Beispiel 24. *Welche Koordinatengleichung besitzt dijenige Ebene* Γ, *die* $A(4/1/1)$ *enthält und senkrecht zu* $g : \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *stehen soll.*



Γ *ist eine Normalenebene zu* g
$\vec{v}$ *ist ein Normalenvektor von* Γ
alos

$$\Gamma : 4x + 5y + 2z + d = 0$$

Da

$$A \in \Gamma$$

setzen wir A *in die unfertige Koordinatengleichung ein, wird*

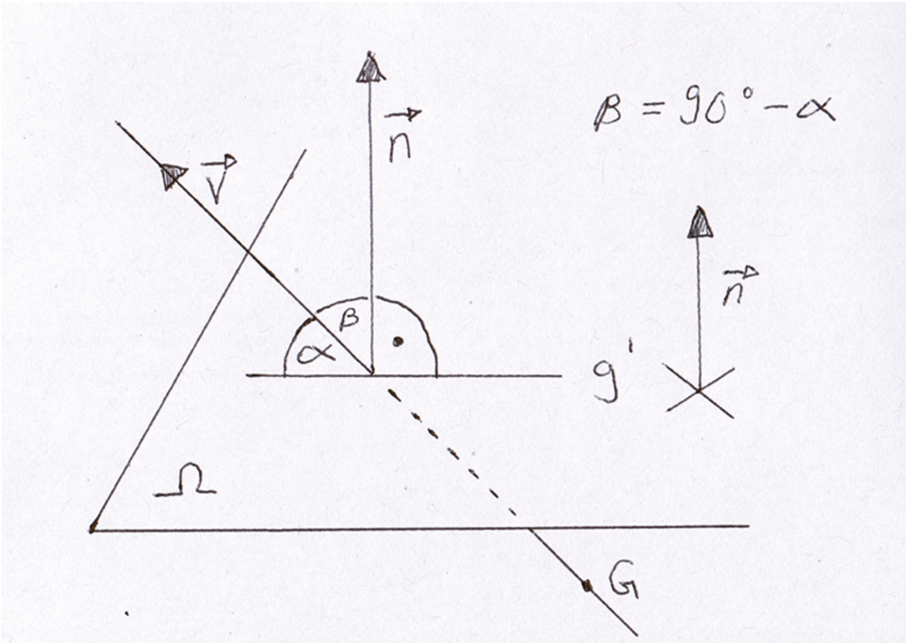
$$\begin{aligned} 4 * 4 + 5 * 1 + 2 * 1 + d &= 0 \\ 16 + 5 + 2 + d &= 0 \\ 23 + d &= 0 \\ d &= 23 \end{aligned}$$

somit ist die Koordinatengleichung von Γ

$$\Gamma : 4x + 5y + 2z - 23 = 0$$

3.3.1 Zwischenwinkel

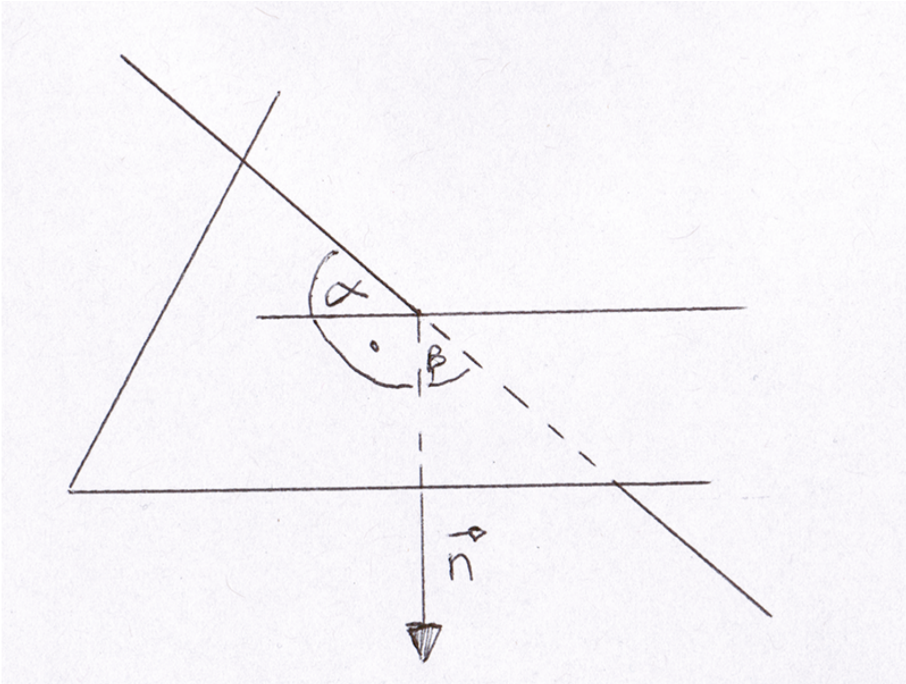
$\vec{n}$ kann beliebig platziert werden.



g' heisst <u>Normalprojektion</u> von g auf Ω. Es ist

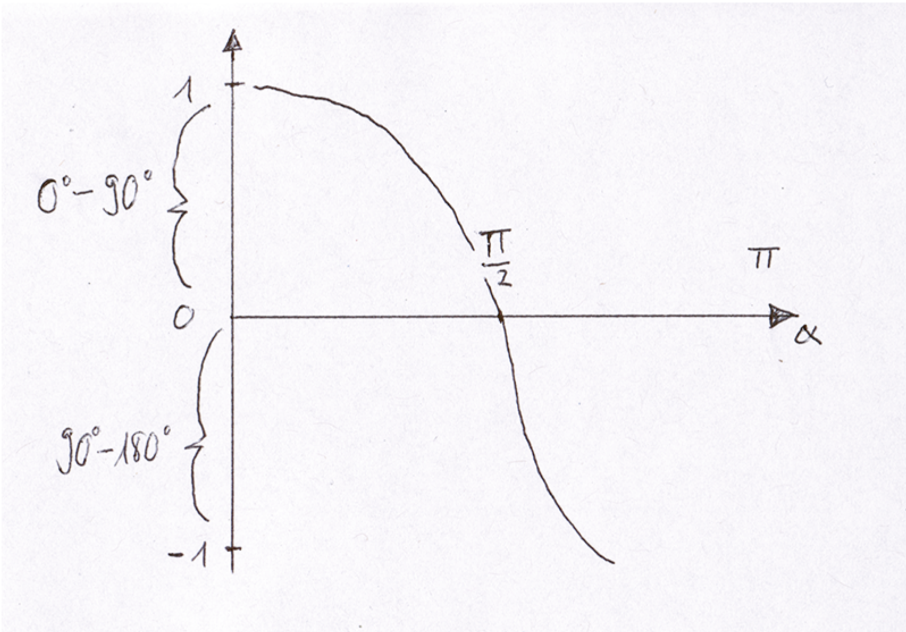
$$cos(90 \circ -\alpha) = \frac{\vec{n} * \vec{v}}{|\vec{n}| * |\vec{v}|}$$

aber, weil wir die Richtung nicht kennen



also

$$cos(90^{\pm}\alpha) = \frac{\vec{n} * \vec{v}}{|\vec{n}| * |\vec{v}|}$$



Es ist

$$\begin{aligned}1 \geq cos(\alpha) \geq 0 \rightarrow 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ\\ 0 \geq cos(\alpha) \geq -1 \rightarrow 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ\end{aligned}$$

Beispiel 25. *Berechne den Durchstosspunkt und den Zwischenwinkel, wenn*

$$g : \vec{p} = \begin{pmatrix}7\\6\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

und

$$\Omega : \vec{p} = \begin{pmatrix}-1\\3\\9\end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ finden wir entweder mit der Koordinatengleichung oder mit $\vec{n} = \vec{n} \times \vec{v}$

Durchstosspunkt berechnen
Versuchen wi es mit der Koordinatengleichung. Zuerst müssen wir von der Parametergleichung der Ebene auf die Koordinatengleichung kommen.

$$\left|\begin{array}{l} x = -1 + \sigma + \tau \\ y = 3 - \sigma + 2\tau \\ z = 9 + 4\sigma - 2\tau \end{array}\right| \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

$$\begin{aligned}(2) + (3) \quad &: \quad y + z = 12 + 3\sigma\\ 2(1) + (3) \quad &: \quad 2x + z = 7 + 6\sigma\\ & \quad\;\; 2y - 2x + z = 17\\ & \quad\;\; 2y - 2x + z - 17 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega \quad &: \quad -2x + 2y + z - 17 = 0\\ \Omega \quad &: \quad 2x - 2y - z + 17 = 0\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}g \quad &: \quad x = 7 + 2y\\ & \quad\;\; y = 6 - \lambda\\ & \quad\;\; z = 3 - 2\lambda\end{aligned}$$

wird dann also

$$\begin{aligned}2(7 + 2\lambda) - 2(6 - \lambda) - (3 - 2\lambda) + 17 = 0\\ 14 + 4\lambda - 12 + 2\lambda - 3 + 2\lambda = 0\\ 16 + 8\lambda = -16\lambda = -2\end{aligned}$$

wir setzen lambda in die Prametergeleichung der Geraden g ein. Damit wird

$$D(3/8/7)$$

Zwischenwinkel berechnen
Mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wird

$$\begin{aligned} \vec{n} * \vec{v} &= 4 + 2 + 2 = 8 \\ |\vec{n}| &= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \\ |\vec{v}| &= \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

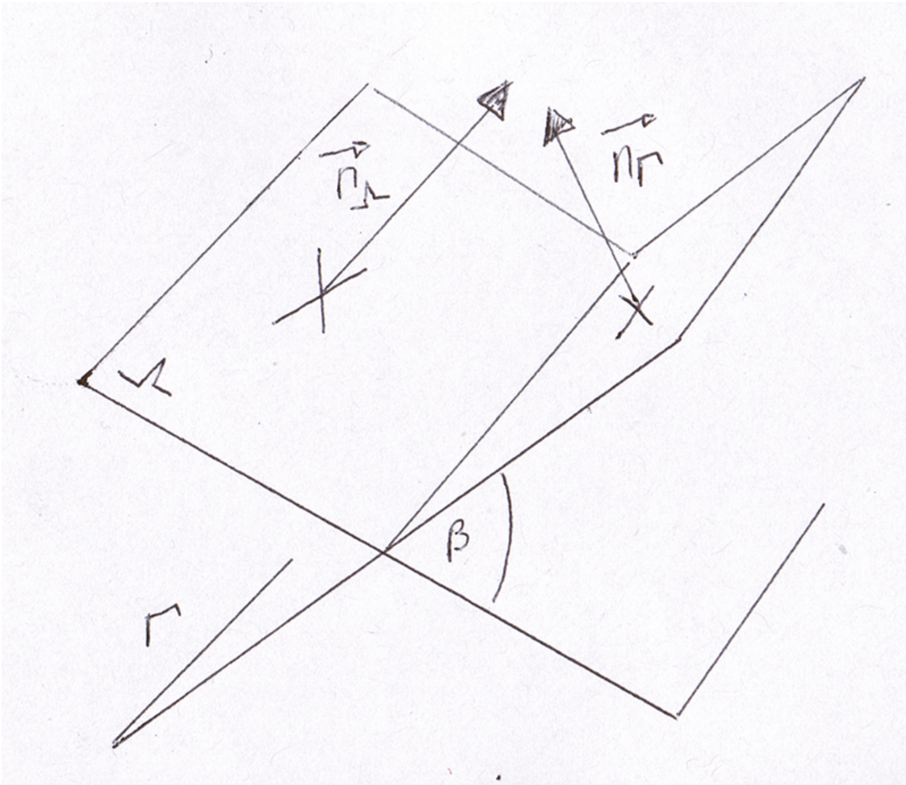
und so

$$cos(90^\circ \pm \alpha) = \frac{8}{9}$$

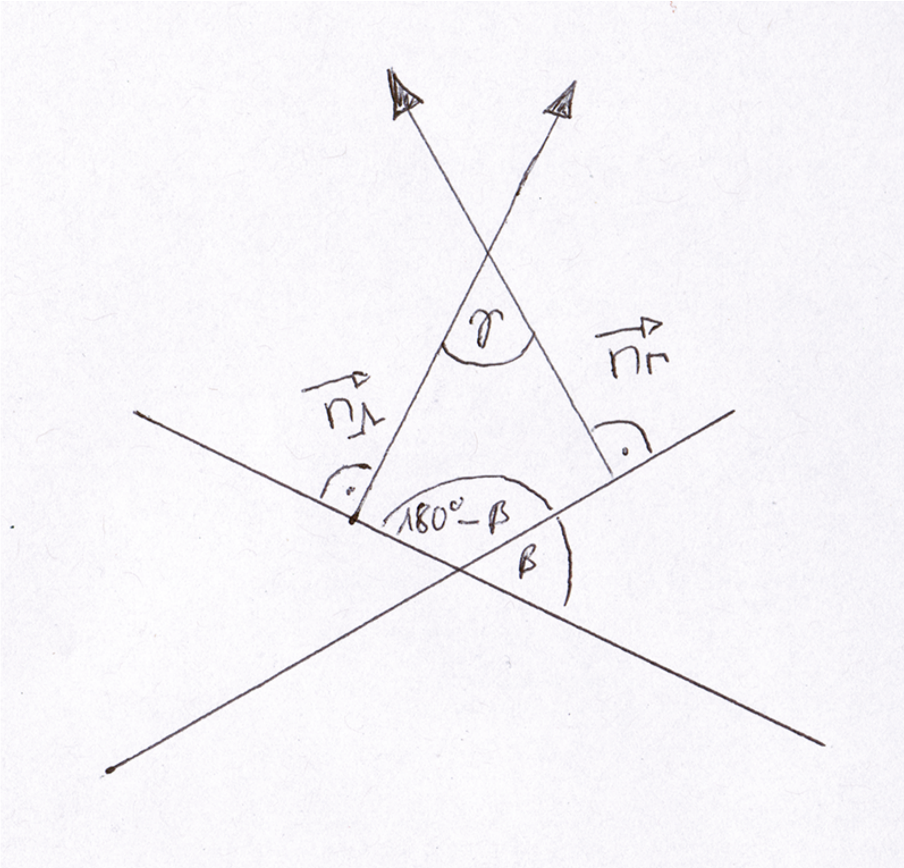
Der Wert liegt zwischen 0 und 1, also liegt der Winkel α *zwischen* 0° *und* 90°*. Wir müssen also* $90^\circ - \alpha$ *rechnen*

$$\begin{aligned} cos(90^\circ - \alpha) &= \frac{8}{9} \\ 90^\circ - \alpha &= 27^\circ.27 \\ \alpha &= 62.^\circ.73 \end{aligned}$$

Zwischenwinkel zweier Ebenen



Schnitt



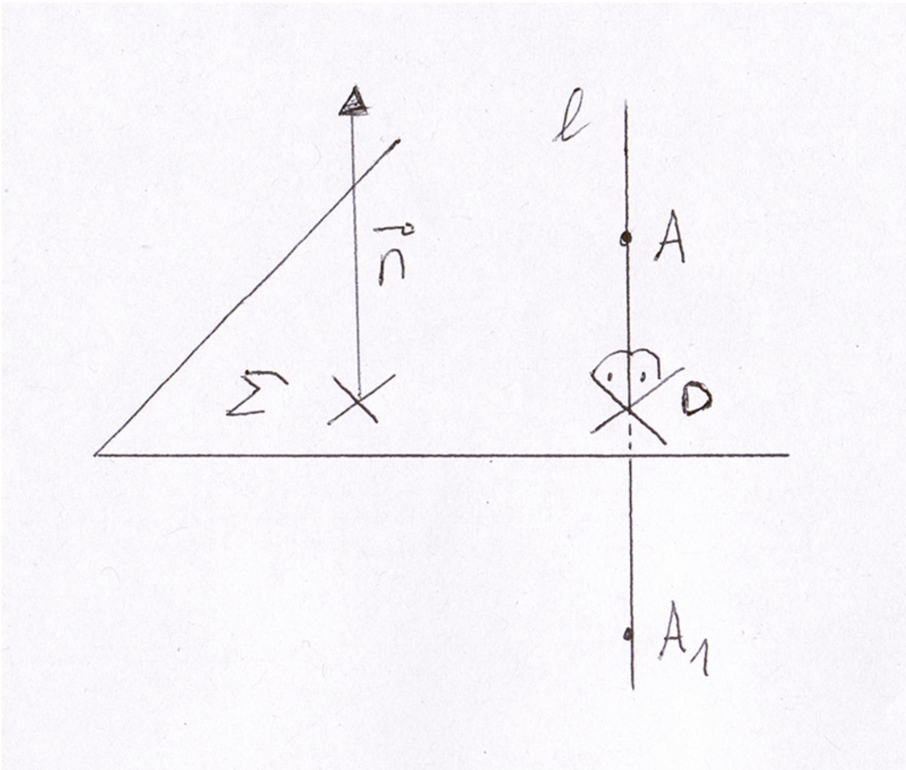
also

$$\begin{aligned} \gamma + 180° + \beta + 90° + 90° &= 360° \\ \gamma - \beta + 360° &= 360° \\ \gamma - \beta &= 0\gamma = \beta \end{aligned}$$

das heisst

$$\boxed{cos(\beta) = \frac{\vec{n_\Gamma} * \vec{n_\Lambda}}{|\vec{n_\Gamma}| * |\vec{n_\Lambda}|}}$$

3.3.2 Spiegelung



Punkt $A(3/1/-1)$ wird an der Ebene $\Sigma : x + 2y + 3z - 44 = 0$ gespiegelt. Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt A_1

Es ist also Vekotr $\vec{AD} = \vec{DA}_1$
D finden wir mit dem *Lotl*

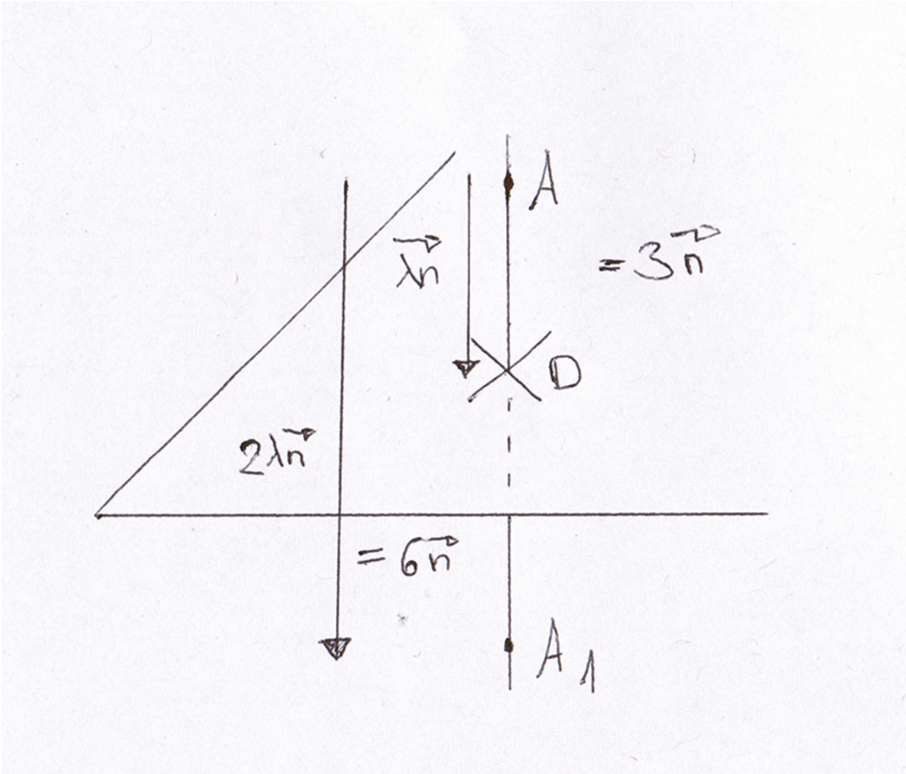
$$l : \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} x &= 3 + \lambda \\ y &= 1 + 2\lambda \\ z &= -1 + 3\lambda \end{aligned}$$

eingesetzt in Σ

$$\begin{aligned} 3 + \lambda + 2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) - 44 &= 0 \\ 3 + \lambda + 2 + 41 - 3 + 9\lambda - 44 &= 0 \\ 14\lambda - 42 &= 0 \\ 14\lambda &= 42\underline{\underline{\lambda = 3}} \end{aligned}$$



Es ist

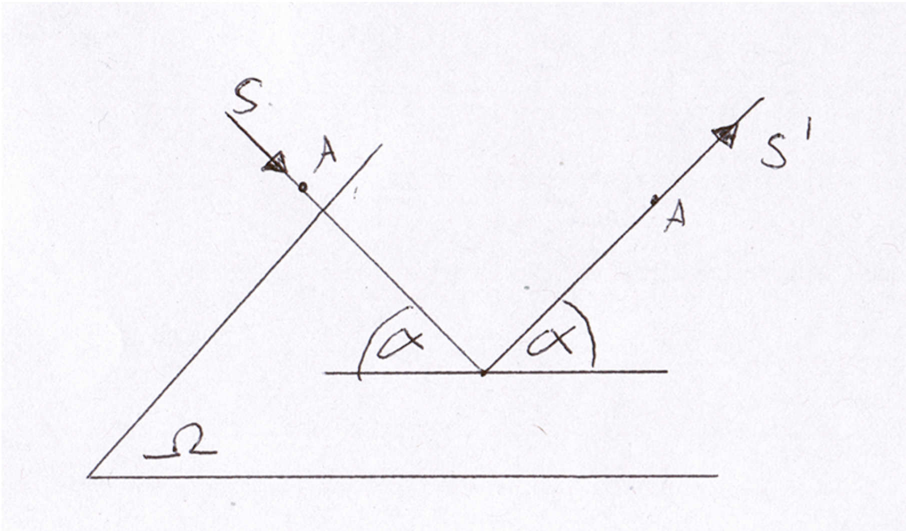
$$\vec{a_1} = \vec{a} + 2\lambda * \vec{n}$$

Mit 2 λ finden wir

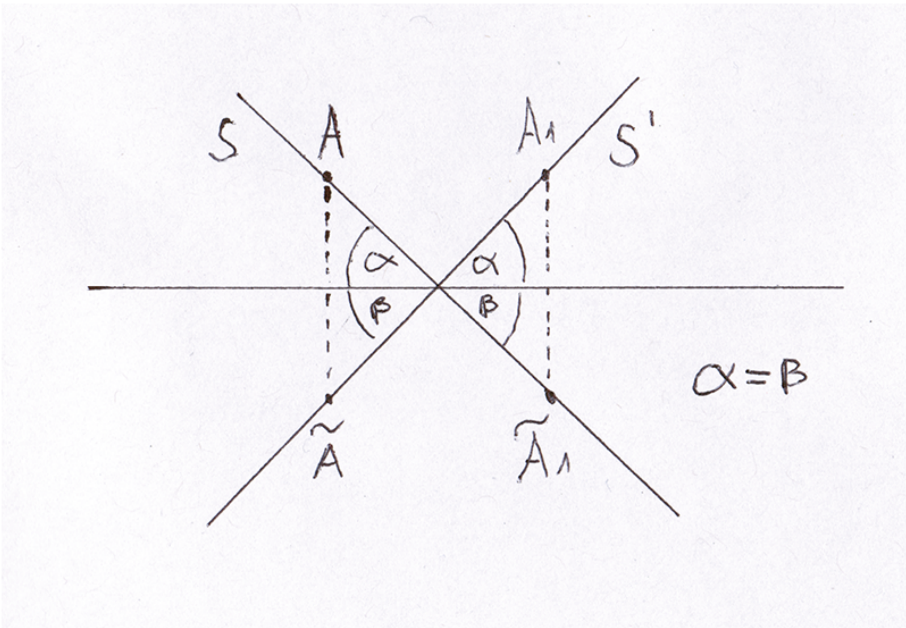
$$x = 3 + 6 = 9$$
$$y = 1 + 12 = 13$$
$$z = -1 + 18 = 17$$

also $A_1(9/13/17)$

3.3.3 Reflexion

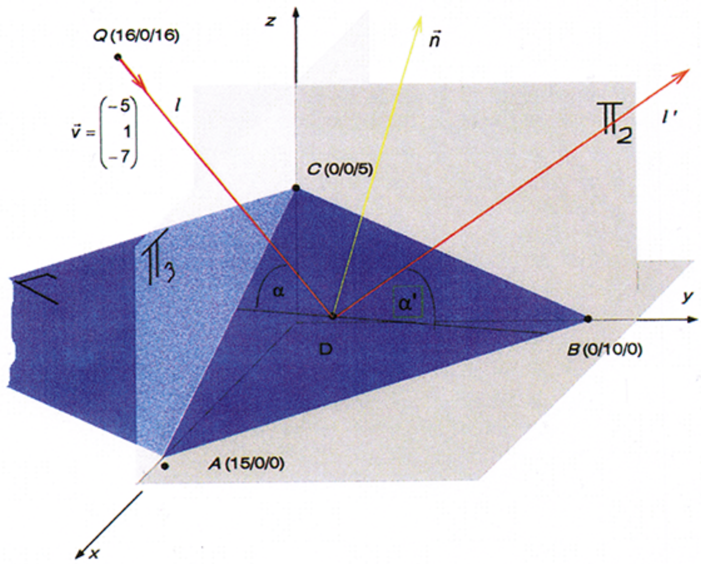


Einfallswinkel und Ausfallswinkel sind identisch



s' ist das Spiegelbild von s

Reflexion eines Lichtstrahls l an der Ebene Γ



Der Lichtstrahl l durch Q wird an der Ebene Γ reflektiert

- Wo trifft der Strahl auf die Ebene Γ ?
- Wie gross ist der Einfallswinkel α ?
- Welche Parametergleichung hat der reflektierte Strahl l' ?

Beispiel 26.

Wo trifft der Strahl auf die Ebene Γ

Wir suchen die Ebenengleichung

$$\Gamma : \vec{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

komponentenweise

$$\left| \begin{array}{l} x = 15 - 3\lambda - 3\mu \\ y = 2\lambda \\ z = \mu \end{array} \right| \begin{array}{l} \textit{(1)} \\ \textit{(2)} \\ \textit{(3)} \end{array}$$

wir setzen y und z in (1) ein

$$
\begin{aligned}
x &= 15 - 3\frac{y}{2} - 3z \\
2x &= 30 - 3y - 6z \\
\Gamma : 2x + 3y + 6z - 30 &= 0
\end{aligned}
$$

Mit

$$
l : \vec{p} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1-5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}
$$

wird der Durchstosspunkt D

$$
\begin{aligned}
2(16-5\lambda) + 3\lambda + 6(16-7\lambda) - 30 &= 0 \\
32 - 10\lambda + 3\lambda + 96 - 42\lambda - 30 &= 0 \\
-49\lambda + 98 &= 0 \\
49\lambda &= 98 \\
\lambda &= 2
\end{aligned}
$$

also

$$
D(/6/2/2)
$$

Der Strahlt tritt bei D(6/2/2) auf die Ebene Γ

Wie gross ist der Einfallswinkel α

Mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

wird

$$\begin{aligned} \vec{n} * \vec{v} &= -10 + 3 - 42 = -49 \\ |\vec{n}| &= \sqrt{4 + 9 + 36} = 7 \\ |\vec{v}| &= \sqrt{25 + 1 + 49} = \sqrt{75} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} cos(90^\circ + \alpha) &= \frac{49}{7 * \sqrt{75}} = \frac{-7}{\sqrt{75}} \\ 90^\circ + \alpha &= 143^\circ.93 \\ \alpha &= 53^\circ.93 \end{aligned}$$

textbfWelche Parametergleichung hat der Strahl l' *Wir berechnen nun wie gross* β *ist, damit der Normalenvektor die Ebene* Γ *vom Punkt* Q *aus schneidet. Wenn wir* β *verdoppeln, werdne wir den gespiegelten Punkt* Q' *erhalten.*

Lot n *zu* Γ *ist*

$$n : \vec{p} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

geschnitten mit Γ

$$\begin{aligned} 2(16 + 2\beta) + 3 * 3\beta + 6(16 + 6\beta) - 30 &= 0 \\ 32 + 4\beta + 9\beta + 96 + 36\beta - 30 &= 0 \\ 49\beta + 98 &= 0 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

mit 2β *im Lot* n *zu* Γ, *wird*

$$\begin{vmatrix} x = 16 + 2(-4) = 8 \\ y = 3(-4) = -12 \\ z = 16 + 6(-4) = -8 \end{vmatrix}$$

also $Q'(8/-12/-8)$

Der Richtungsvektor von l' *ist*

$$\vec{QD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$l : \vec{p} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$$

nach etwas kosmetik erhalten wir

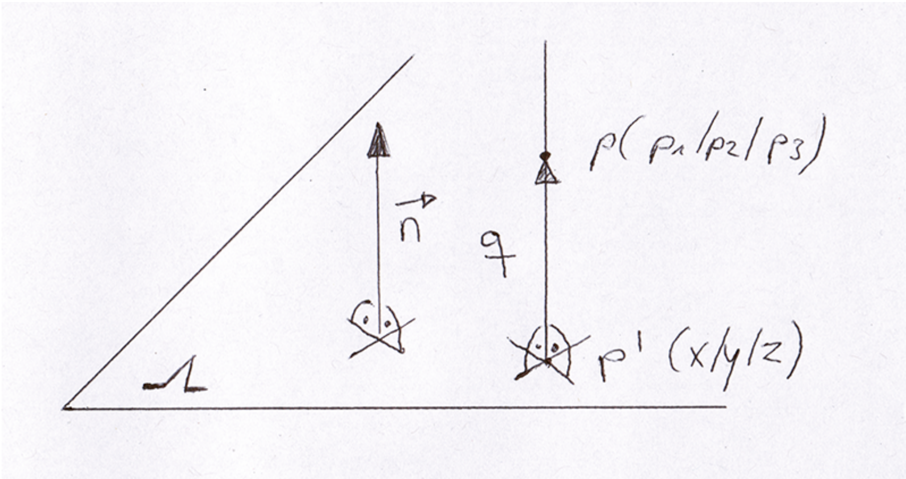
$$l : \vec{p} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Aufhängepunkt ist wählbar. Möglich wäre auch

$$l : \vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

was das Ganze etwas anschalicher macht

3.3.4 Abstand



Ist

$$\Lambda : ax + bx + cz + d = 0 q = |\vec{pp'}|$$

mit Hilfe des Skalarprodukts

$$\vec{pp'} * \vec{n} = |\vec{pp'}| * |\vec{n}| * \cos(\phi)$$

Es ist

$$\phi = 0° \vee \phi = 180°$$

also

$$\vec{pp'} * \vec{n} = |\vec{pp'}| * |\vec{n}| * (\pm 1)$$

mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

wird

$$\vec{pp'} * \vec{n} = |\vec{pp'}| * \sqrt{a^2 + b^2 + c^3}$$

weiter ist

$$\vec{pp'} = \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} \vec{pp'} * \vec{n} &= a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) \\ &= ax + by + cz - ap_1 - bp_2 - cp_3 \end{aligned}$$

und

$$p' \in \Lambda$$

also ist

$$ax + by + cz = -d$$

und damit

$$\vec{pp'} * \vec{n} = -d - ap_1 - bp_2 - cp_3$$

womit wir

$$-d - ap_1 - bp_2 - cp_3 = |\vec{pp'}| * \sqrt{a^2 + b^2 + c^3}$$

und so wird

$$|\vec{pp'}| = \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^3}}$$

Beispiel 27. *Welcher Abstand hat Punkt $P(-3/2/2)$ von der Ebene $\Lambda : 6x - 6y + 7z + 22 = 0$?*

$$\begin{aligned} q = & \frac{|(6 * -3) + (-6 * 2) + (7 * 2) + 22|}{\sqrt{(6)^2 + (-6)^2 + (7)^2}} \\ &= \frac{|-18 - 12 + 14 + 22|}{\sqrt{36 + 36 + 49}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{121}} \\ &= \frac{6}{11} \end{aligned}$$

Wir finden also den Abstand q eines Punktes von einer Ebene, wenn wir die Koordinaten in die Ebenengleichung einsetzen und dann durch $\vec{n}$ dividieren.

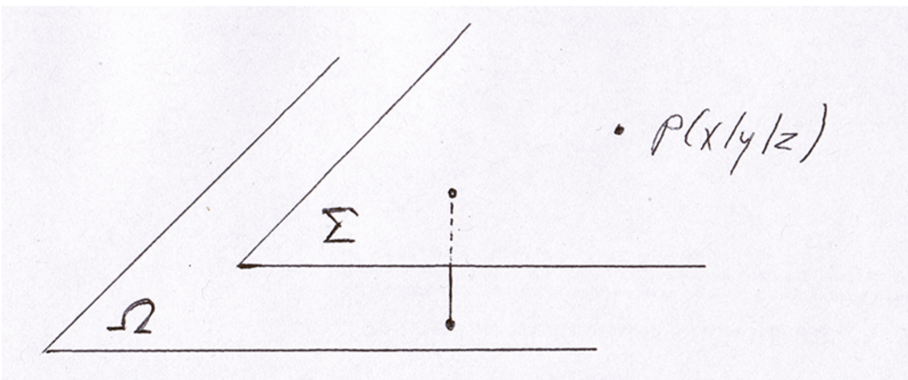
$$q = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{|\vec{n}|}$$

Definition 22. *Wir nennen*

$$\Sigma : \frac{ax + by + cz + d}{|\vec{n}|} = 0$$

Die Hesse Normalform (HNF von Σ

Beispiel 28. *Welche Koordinatengleichung hat die Parallelebene in Abstand 5 zur Ebene Ω : $6x + 2y - 3z - 14 = 0$?*



$$HNF\Omega : \frac{6x+2y-3z-14}{\sqrt{36+14+9}} P \in \Sigma$$

ergibt

$$\frac{|6x+2y-3z-14|}{\sqrt{49}} = 5$$

also

$$\frac{6x+2y-3z-14}{7} = \pm 5$$

und so

$$\Sigma_1 : 6x+2y-3z-14 = 35$$
$$\Sigma_1 : 6x+2y-3z-49 = 0$$

oder

$$\Sigma_2 : 6x+2y-3z-14 = -35$$
$$\Sigma_2 : 6x+2y-3z+21 = 0$$

Beispiel 29. *Welchen Abstand hat die Ebene* $\Omega : 2x - y + 2z + 15 = 0$ *vom Ursprung?*

$$q = \frac{15}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{15}{3} = 5$$

Wir sehen die Variable d *der Ebenengleichung, definiert den Abstand zum Ursprungspunkt.* d *ist ein Vielfaches von* $|\vec{n}|$

Die HNF lässt sich auch im R^2 verwenden.
Ist

$$y = mx + q$$

die explizite,und

$$ax + by + c = 0$$

die implizite Geradengleichung, so ist die HNF

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

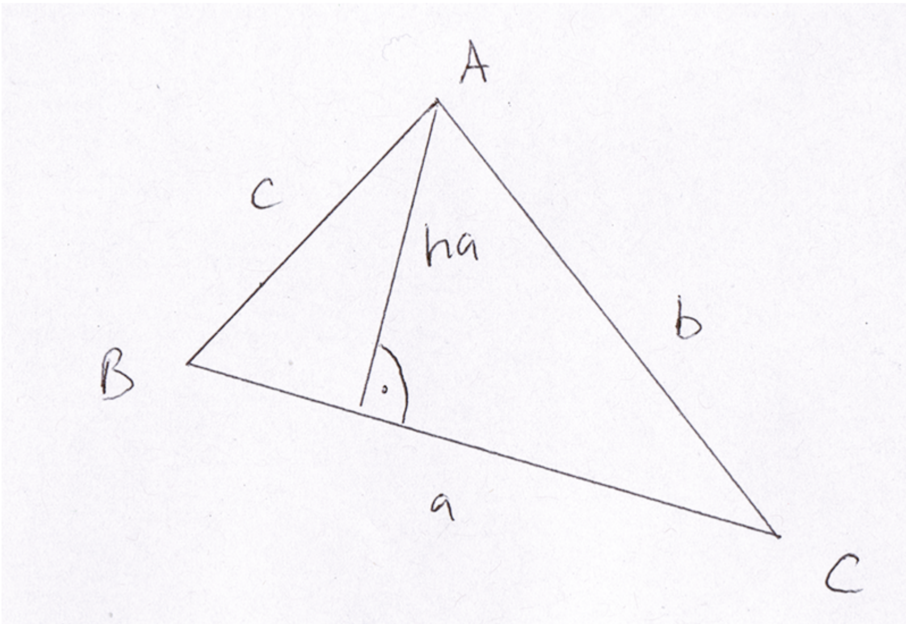
Beispiel 30. *Welchen Abstand hat die Gerade $g : 4x - 3y + 30 = 0$ vom Ursprung?*

$$\frac{4x - 3y + 30}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = 0$$

Setzen wir nun den Urpsurngspunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *ein*

$$q = \frac{30}{\sqrt{25}} = \frac{30}{25} = 6$$

Beispiel 31. *Wie lang ist ha im Dreieck ABC, wenn $A(-4/-1)$, $B(5/2)$ und $C(-1/10)$?*



ha ist der Abstand von a zu A.
Ist

$$a : y = mx + q$$

so finden wir mit B und C

$$\left| \begin{array}{l} 2 = 5m + q \\ 10 = -m + q \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

(1)-2

$$\begin{aligned} -8 &= 6m \\ m = -\frac{4}{3} \rightarrow 10 &= \frac{4}{3} + q \\ \frac{26}{3} &= q \end{aligned}$$

Also

$$a : y = -\frac{4}{3}x + \frac{26}{3}$$

implizit

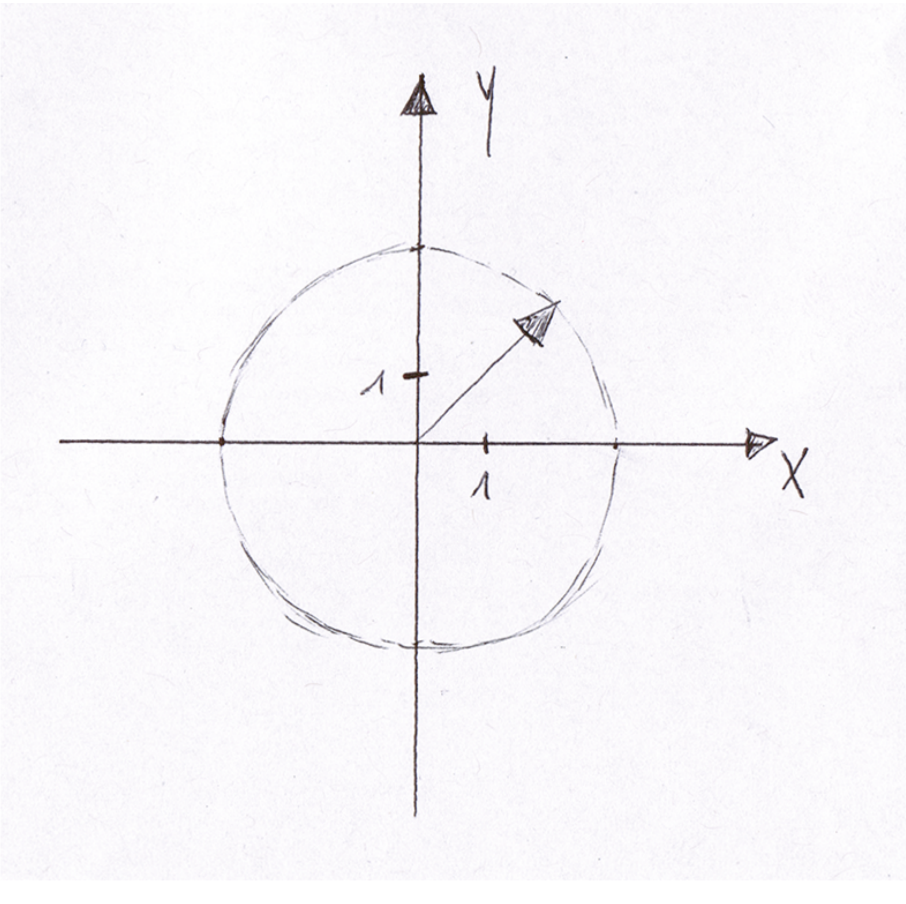
$$\begin{aligned} 3y &= -4x + 26 \\ 4x + 3y - 26 &= 0 \end{aligned}$$

A in die HNF von a einsetzen

$$\begin{aligned} ha &= \frac{|4(-4) + 3(-1) - 26)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|-45|}{\sqrt{25}} \\ &= 9 \end{aligned}$$

Kapitel 4

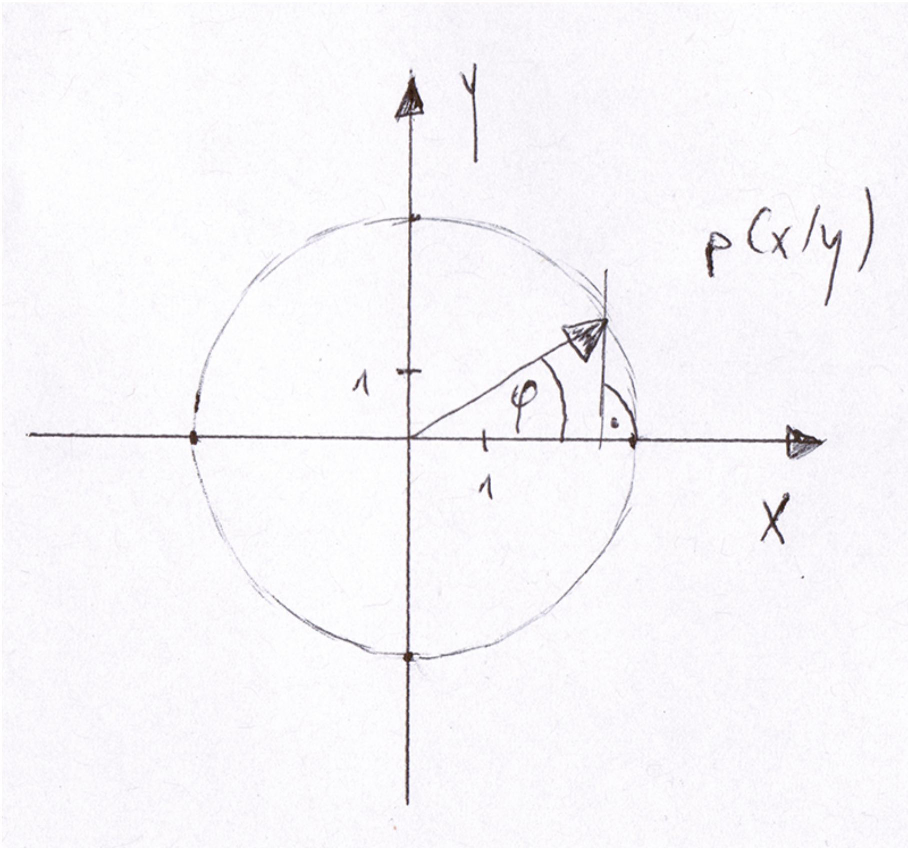
Kreise und Tangenten



Koordinatengleichung des Kreises mit Zentrum im Ursprung

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

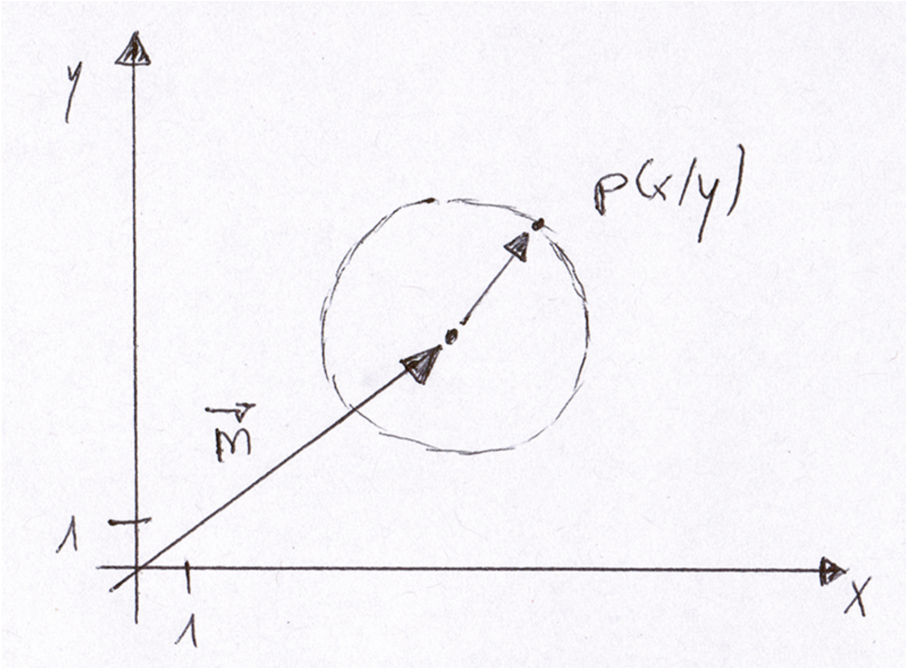
Wählen wir en Winkel λ als Paramater, so erhalten wir



$$x = r * \cos(\lambda)$$
$$y = r * \sin(\lambda) 0^\circ < \lambda < 360^\circ$$
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \end{pmatrix}$$

die Parametergleichung des Kreises

Ist $M(x_m/y_m)$ der Mittelpunkt des Kreises



So ist

$$\vec{p} = \vec{m} + \vec{r}$$

also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(\lambda) \\ r\sin(\lambda) \end{pmatrix} x = x_m + r\cos(\lambda)$$

$$y = y_m + r\sin(\lambda)$$

$$0^\circ < r < 360^\circ$$

die <u>Parametergleichung eines beliebigen Kreises</u>

so wird

$$x - x_m = r\cos(\lambda)$$
$$y - y_m = r\sin(\lambda)$$

also

$$(x - x_m)^2 = r^2\cos^2(\lambda)$$
$$(y - y_m)^2 = r^2\sin^2(\lambda)$$

und so

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2(\cos^2(\lambda) + \sin^2(\lambda))$$

durch die Trigonometrie finden wir

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2(1)$$
$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

die Koordinatengleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $M(x_m/y_m)$

Beispiel 32. *Welche Koordnatengleichung hat der Kreis K mit $M(2/-3)$ und Radius $r = 7$?*

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$$

was ausgerechnet

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 49$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$$

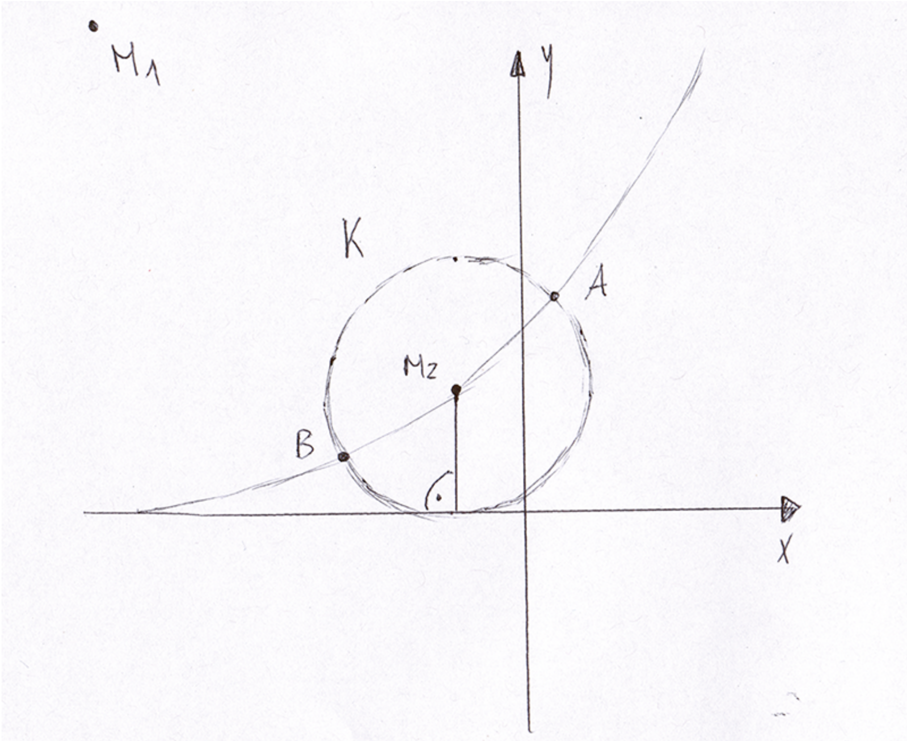
ergibt.

Beispiel 33. *Bestimme Mittelpunkt und Radius, wenn*

1.
$$x^2 + y^2 - 12x + 10y + 52 = 0$$
wir ergänzen quadratisch
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 12y + 25 = -52 + 36 + 25$$
$$(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 9$$
also
$$M(6/-5), r = 3$$

2.
$$x^2 + 2y^2 + 4x - 5y + 7 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 + 2y^2 - 5y + ? = -7$$
Keine Kreisgleichung, sondern eine Ellipse

3. *Wenn der Kreis die X-Achse berührt und die Punkte $A(1/4)$, $B(-1/2)$ auf der Peripherie liegen soll.*



$$
\begin{aligned}
K &: (x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2\\
A\in K &: (1-x_m)^2+(4-y_m)^2=r^2\\
B\in K &: (-1-x_m)^2+(2-y_m)^2=r^2
\end{aligned}
$$

und

$$y_m = r$$

also

$$\left|\begin{array}{l} 1-2x_m+x^2m+16-8r+r^2=r^2 \\ 1+2x_m+x_m^2+4-4r+r^2=r^2 \end{array}\right|\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} x^2m-2x_m-8r+17=0 \\ x_m^2+2x_m-4r+5=0 \end{array}\right|\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(1)-2(2):\\
-x_m^2-6x_m+7=0\\
x_m^2+6x_m-7=0\\
(xm_1+7)(x_m-1)=0\\
x_{m1}=-7\\
x_{m2}=1
\end{aligned}
$$

in (2) mit x_{m1} erhalten wir

$$49 - 14 - 4r_1 + 5 = 0$$
$$40 = 4r_1 r_1 = 10$$

und in (2) mit x_{m2} erhalten wir

$$1 + 2 - 4r_2 + 5 = 0$$
$$8 = 4r_2$$
$$r_2 = 2$$

führt uns also zu

$$ym_1 = 10, ym_2 = 2$$

also

$$M_1(-7/10), r_1 = 10$$
$$M_2(1/2), r_2 = 2$$

Beispiel 34. *Welches Zentrum hat derjenige Kreis durch $P(3/7)$, der den Kreis $(x-4)^2+(y-1)^2 = 9$ von aussen und ausserdem die x-achse berührt?*
BILD TO SCAN

Wir definieren die Ausgangslage:

$$y_m = r$$

und

$$|\vec{MZ}| = r * \rho$$

wobei ρ der Radius des gegebenen kleinen Kreises ist, also

$$\rho = 3$$

Wir können den Radius aus der Kreisgleichung entnehmen. Mit

$$Z(4/1), \vec{MZ} = \begin{pmatrix} 4 - xm \\ 1 - ym \end{pmatrix}$$

Punkt Z können wir aus der Kreigleichung entnehmen und so

$$|\vec{MZ}| = \sqrt{(4 - x_m)^2 + (1 - y_m)^2}$$

also

$$(4 - x_m)^2 + (1 - r)^2 = (r + 3)^2$$

Wir ersetzen $|\vec{MZ}|$ mit (r+3) und erhalten

$$(r + 3)^2 = (4 - x_m)^2 + (1 - r)^2$$
$$r^2 + 6 + 9 = 16 - 8x_m + x_m^2 + 1 + r^2 - 2r$$
$$x_m^2 - 8x_m - 8r + 8 = 0$$

und

$$P \in K$$

also

$$(x_m - 3)^2 + (y_m - 7)^2 = r^2$$

wir ersetzen y_m mit r

$$(x_m - 3)^2 + (r - 7)^2 = r^2$$
$$x_m^2 - 6x_m + 9 + r^2 - 14r + 49 = r^2$$
$$x_m^2 - 6x_m - 14r + 58 = 0$$

somit erhalten wir zwei Kreisgleichungen

$$\left| \begin{array}{l} x_m^2 - 8x_m - 8r + 8 = 0 \\ x_m^2 - 6x_m - 14r + 58 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$
$$-7(1) + 4(2):$$
$$-3x_m^2 + 32x_m + 176 = 0$$
$$3x_m^2 + 32xm + 176 = 0$$

wir ergänzen quadratisch

$$x_m^2 - \frac{32}{3}x_m + (\frac{32}{6})^2 = \frac{176}{3} + (\frac{32}{6})^2$$
$$(x_m - \frac{32}{6})^2 = \frac{176}{3} + \frac{16^2}{3^2}$$
$$(x_m - \frac{32}{6})^2 = \frac{176 * 3 + 256}{9}$$
$$(x_m - \frac{32}{6})^2 = \frac{528 + 256}{9}$$
$$x_m - \frac{32}{6} = \pm\sqrt{\frac{784}{9}}$$
$$x_m - \frac{32}{6} = \pm\frac{28}{3}$$
$$x_m = \pm\frac{28}{3} + \frac{32}{6}$$

damit erhalten wir

$$x_{m1} = \frac{28}{3} + \frac{32}{6} = \frac{88}{6} = \frac{44}{3}$$
$$x_{m2} = -\frac{28}{3} + \frac{32}{6} = -\frac{24}{6} = -4$$

Wir suchen y_{m1}, wir setzen x_m1 in die Kreisgleichung

$$(4 - x_m)^2 + (1 - r)^2 = (r + 3)^2$$

ein. Wir erhalten

$$(4 - \frac{44}{3})^2 + (1 - r)^2 = (r + 3)^2$$
$$(\frac{32}{3})^2 + 8 - 8r = 0$$
$$\frac{32^2 + 8 * 9}{9} - 8r = 0$$
$$\frac{32^2 + 72}{9} - 8r = 0$$
$$\frac{1096}{9} - 8r = 0$$
$$\frac{1096}{9} = 8r$$
$$\frac{1096}{9 * 8} = r$$
$$\frac{1096}{72} = r$$
$$\frac{137}{9} = r = y_{m1}$$

Nun suchen wir y_{m2}, wir setzen x_{m2} in die Gleichung

$$(4 - x_m)^2 + (1 - r)^2 = (r + 3)^2$$

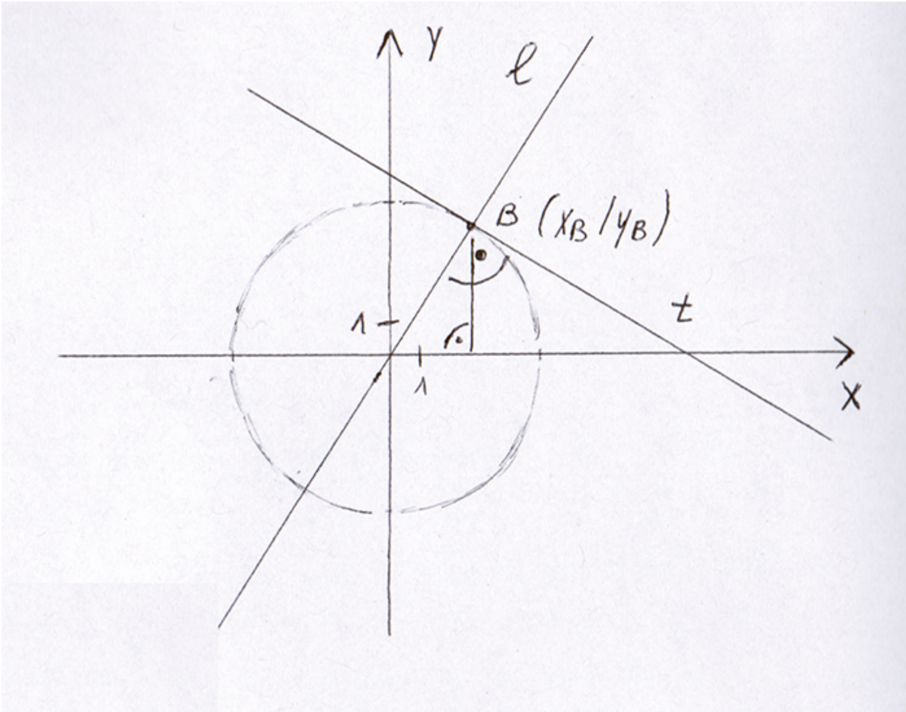
ein. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
(4-(-4))^2+8-8r &= 0 \\
64+8-8r &= 0 \\
72 &= 8r \\
9 = r &= y_{m2}
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
M_1\left(\frac{44}{3}/\frac{157}{9}\right), r_1 = \frac{137}{9} \\
M_2(-4/9), r_2 = 9
\end{aligned}
$$

4.1 Tangenten



Mittels Kehrwert finden wir

$$m_t * m_l = -1$$

und

$$m_l = \frac{y_B}{x_B}$$

wird also

$$m_t = -\frac{x_B}{y_B}$$

Ist

$$t : y = m_t x + q$$

so finden wir mit $B \in t$

$$y_B = m_t x_B + q$$
$$y_B - m_t x_B = q$$

also

$$t : y = m_t x + y_B - m_t x_B$$
$$y = m_t(x - x_B) + y_B$$

mit

$$\begin{aligned}
m_t &= -\frac{x_B}{y_B}(x - x_B) + y_B \\
yy_B &= -xx_B + x_B^2 + y_B^2 \\
xx_B + yy_B &= x_B^2 + y_B^2
\end{aligned}$$

und es ist

$$x_B^2 + y_B^2 = r^2$$

also

$$\boxed{t : xx_B + yy_B = r^2}$$

Beispiel 35. *Welche Gleichung hat die Tangente im Punkt $B(12/y_B)$ des Kreises $x^2 + y^2 = 169$, wenn $y_B < 0$ sein soll?*

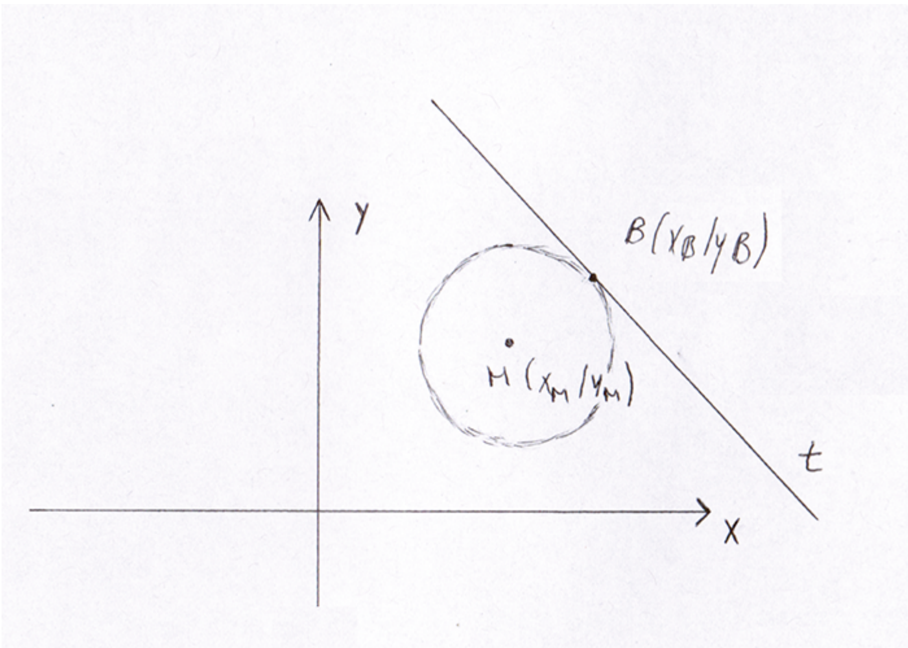
$$\begin{aligned}
(12)^2 + y_B^2 &= 169 \\
169 - 144 = 25 &= y_B^2 \\
y_B &= \pm 5
\end{aligned}$$

also

$$B(12/-5)$$

und damit

$$\begin{aligned}
t : 12x - 5y &= 169 \\
t : 12x - 5y - 169 &= 0
\end{aligned}$$

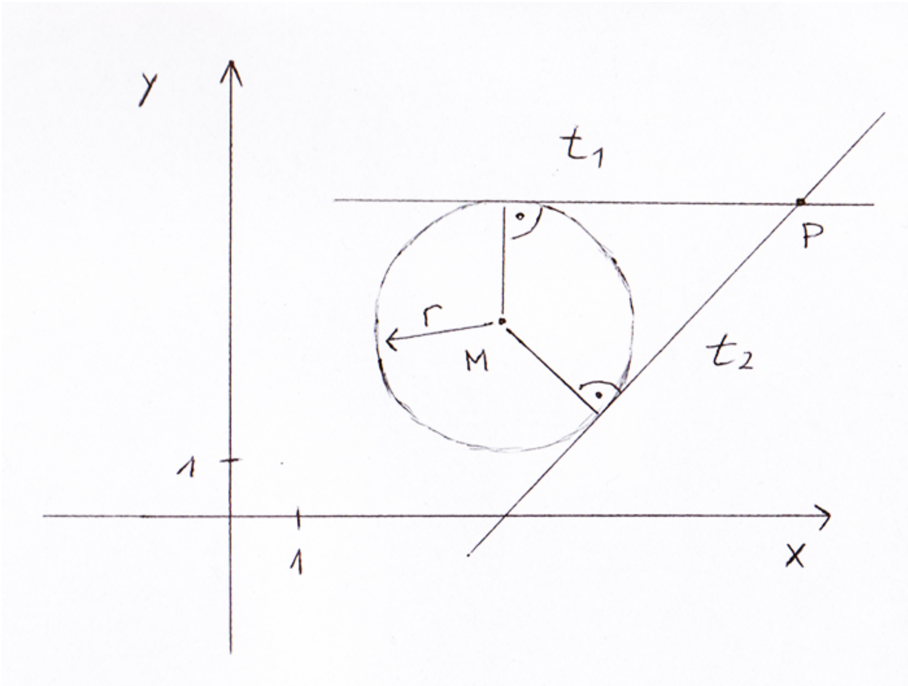


Ist

$$t : (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

so finden wir die Gleichung der Tangente in $B \in K$ analog

$$\boxed{t : (x_B - x_m)(x - x_m) + (y_B - y_m)(y - y_m) = r^2}$$



Wir versuchen nun die Tangentengleichungen von t_1 und t_2 herauszufinden.
Wir überlegen, dass r der Abstand des Mittelpunktes M von den Tangenten t_1 und t_2 ist.

Ist

$$P(-1/-2)$$

und

$$K : x^2 + y^2 - 20x - 16y + 139 = 0$$

mit der Tangentengleichung

$$t : y = mx + q$$

und

$$p \in t$$

finden wir

$$-2 = -m + q$$
$$q = m - 2$$

in der expliziten Form also

$$t = mx + m - 2$$

in der impliziten Form

$$0 = mx - y + m - 2$$

dann ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$$

damit wird die HNF

$$\frac{mx - y + m - 2}{\sqrt{m^2+1}} = 0$$

Den Mittelpunkt finde wir mit

$$K : x^2 - 20x + y^2 - 16y + 139 = 0$$

Wir ergänzen quadratisch und erhalten

$$\begin{aligned} K : x^2 - 20x + 100 + y^2 - 16y + 64 + 139 &= 0 \\ (x-10)^2 + (y-8)^2 &= 25 \\ \rightarrow M(10/8), r &= 5 \end{aligned}$$

was eingesetzt in die HNF

$$\left| \tfrac{10m - 8 + m - 2}{\sqrt{m^2+1}} \right| = 5$$

ergibt

$$\begin{aligned} \frac{11m - 10}{\sqrt{m^2+1}} &= \pm 5 \\ 11m - 10 &= \pm 5\sqrt{m^2+1} \\ (11m-10)^2 &= 25\sqrt{m^2+1} \\ 121m^2 - 220m + 100 &= 25m^2 + 25 \\ 96m^2 - 220m + 75 &= 0 \\ (12m-5)(8m-15) &= 0 \\ \rightarrow m_1 = \frac{5}{12}, m_2 &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Wir haben nun die beiden Steigungen m_1 und m_2 ausgerechnet. Mit diesen Werten lässt sich nun die Tangentengleichung bestimmen. Wir setzen die Werte in die implizite Tangengleichung ein. Mit m_1 wird

$$\begin{aligned} t_1 : y &= \frac{5}{12}x + \frac{5}{12} - 2 \\ 12y &= 5x + 5 - 24 \\ \underline{t_1 : 5x - 12y - 19} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

mit m_2 wird

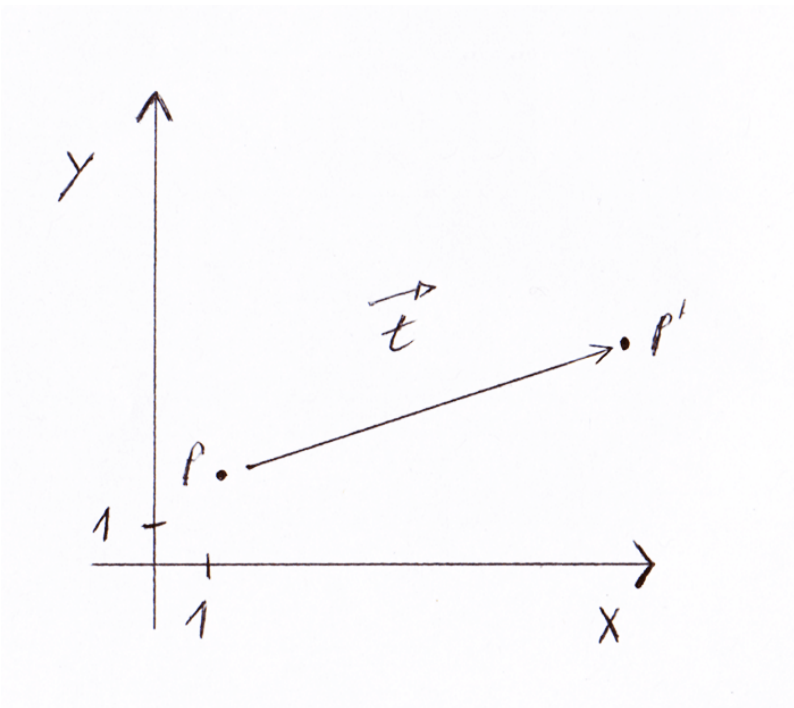
$$\begin{aligned} t_2 : y &= \frac{15}{8}x + \frac{15}{8} - 2 \\ 8y &= 15x + 15 - 16 \\ \underline{t2 : 15x - 8y - 1} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

Kapitel 5

Abbildungen, Matrizen

5.1 Abbildungen $R^2 \to R^2$

1. Translation (Parallelverschiebung)
   mit Vektor $\vec{t}$



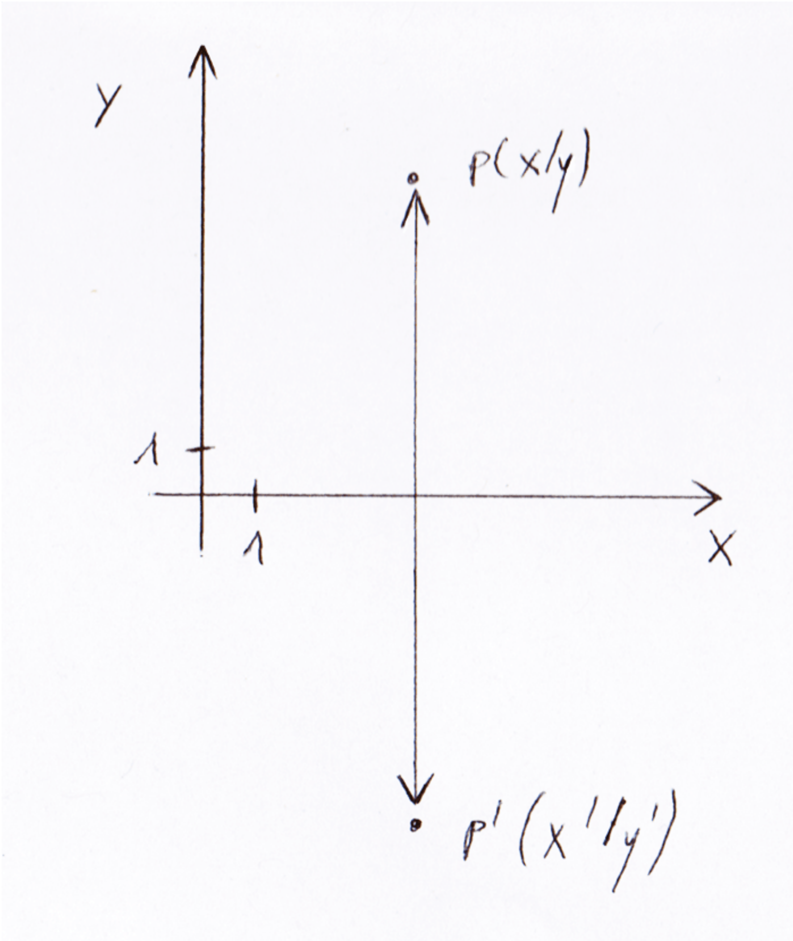
Ist

$$\vec{t} = \frac{t_1}{t_2}$$

so ist

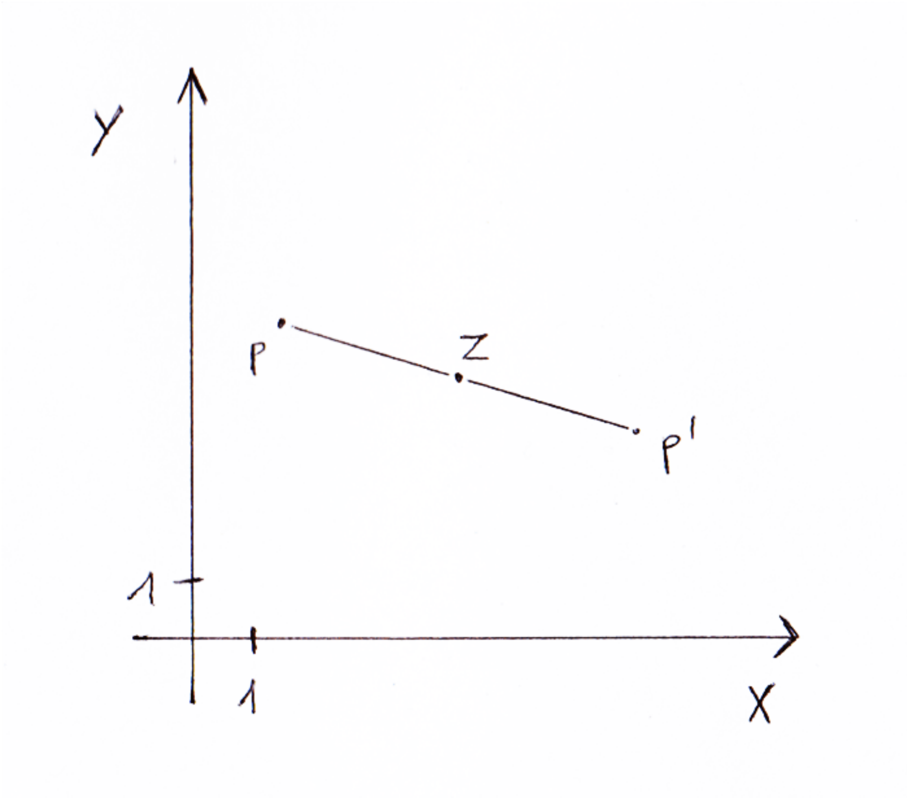
$$
\begin{aligned}
x' &= x + t_1 \\
y' &= y + t_2
\end{aligned}
$$

2. Spiegelung an der x-Achse



$$x' = x$$
$$y' = y$$

3. Punktspiegelung (Zentralsymmetrie) an $z(a/b)$



Es ist der Vektor von

$$\vec{ZP'} = \vec{PZ}$$

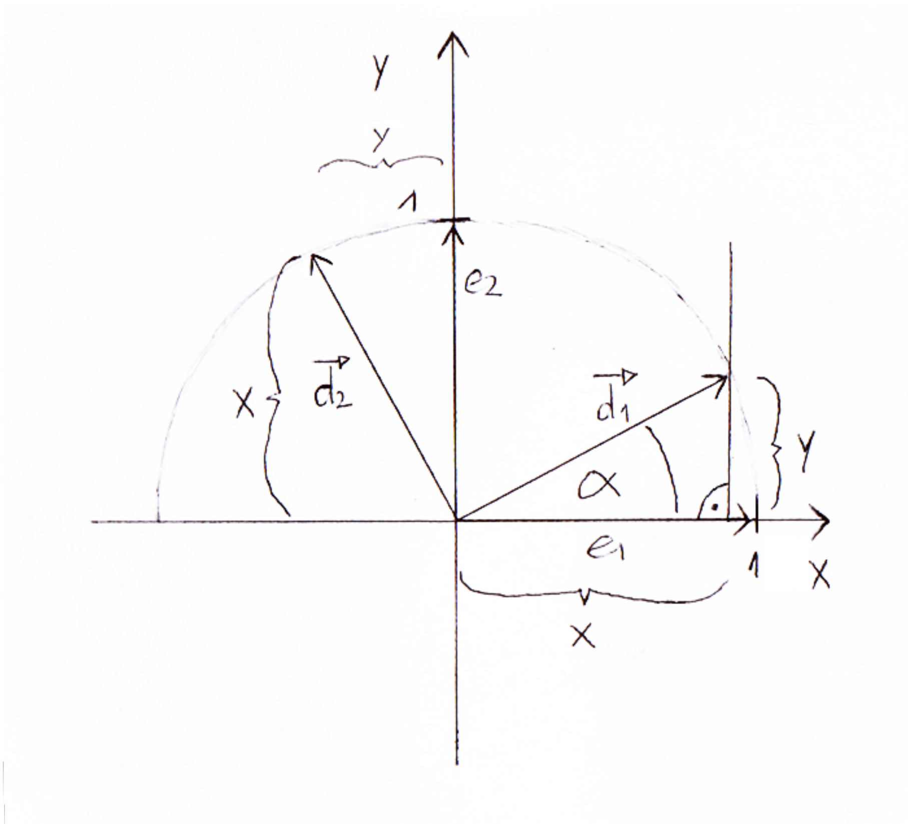
also

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x \\ b - y \end{pmatrix}$$

komponentenweise

$$\begin{aligned} x' - a &= a - x \\ x' &= 2a - x \\ y' - b &= b - y \\ y' &= 2b - y \end{aligned}$$

4. Rotation um den Ursprung mit Winkel α



Wir drehen die Basis um den Ursprung und erhalten so die neue Basis

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

also

$$\vec{d_2} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

ist

$$P(x_p/y_p)$$

so ist bekanntlich

$$\vec{p} = x_p \vec{e_1} + y_p \vec{e_2}$$

und so

$$\begin{aligned} \vec{p'} &= x_p \vec{d_1} + y_p \vec{d_2} \\ &= x_p \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + y_p \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \\ \vec{p'} &= \begin{pmatrix} x_p \cos(\alpha) - y_p \sin(\alpha) \\ x_p \sin(\alpha) + y_p \cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

komponentenweise (ohne Index)

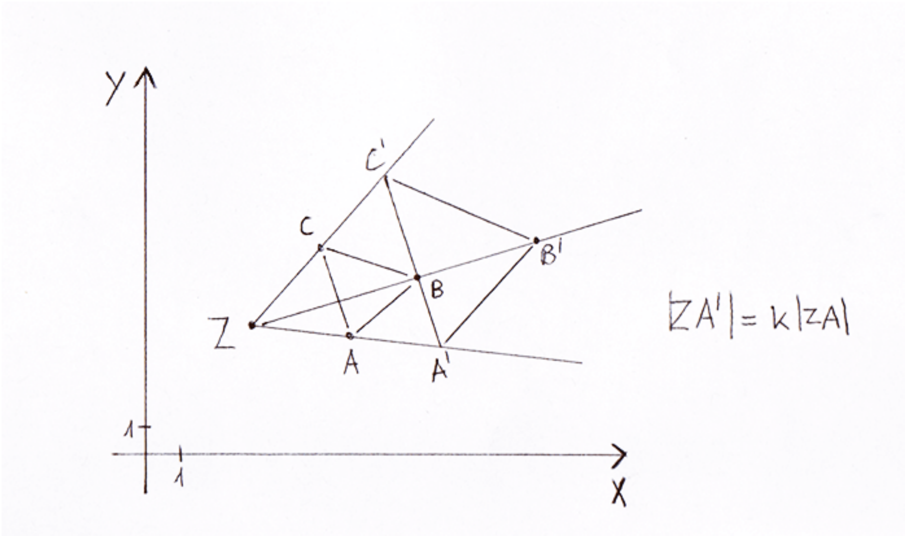
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha) \\ y' &= x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{aligned}}$$

<u>Spiegelung an der Geraden $y = x \tan\gamma$</u>

Die Spiegelungsmatrix lautet

$$S = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}$$

5. Zentrische Streckung (Dilatation) am Zentrum $Z(a/b)$ mit Streckfaktor k



Es ist

$$\vec{ZA'} = k\vec{ZA}$$

Mit

$$A(x/y) \text{ und } A'(x'/y')$$

wird

$$\vec{a'} - \vec{z} = k(\vec{a} - \vec{z})$$
$$\vec{a'} = k\vec{a} + k\vec{z} + \vec{z}$$
$$\vec{a'} = k\vec{a} + \vec{z}(1-k)$$

also

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-k)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= kx + (1-k)a \\ y' &= ky + (1-k)b \\ k &\neq 0 \end{aligned}}$$

5.2 Lineare Abbildungen

Alle unsere Abbildungen haben eine Vorschrift der Form

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f$$

Definition 23. *Eine Abbildung von R^2 im R^2 heisst linear, wenn*

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Die Abbildungsvorschrift ist.

Beispiel 36. *Rotation, Spiegelung am Ursprung, Spiegelung an der x-Achse sind lineare Abbildungen.*

Ist die Abbildung linear, so genügt es also, wenn wir die 4 Zahlen a, b, c und d benennen um die Vorschrift zu finden.

Definition 24. *Eine (m,n)-Matrix besteht aus m Zeilen und n Spalten.*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a23 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei a_{ij} das Element in der i. Zeile und j. Spalte bezeichnet.

Lineare Abbildungen können also mit einer Matrix beschreiben werden.

Zum Beispiel **??**
Matrix Spiegelung an der x-Achse

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel **??**
Matrix Spiegelung am Ursprung

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zum Beispiel **??** Rotationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

auch Matrizen sind Matrizen, so ist

Beispiel 37.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

eine $(3, 1)$ - *Matrix*

Wir können eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Mit einem Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

multiplizieren, aber nicht umgekehrt.

Wir haben Abbildungen mit

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

dargestellt. Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Definition 25.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kurz

$$\vec{p'} = M * \vec{p}$$

Beispiel 38.

$$\begin{aligned} \vec{p'} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2*4+3*7 \\ 1*4+5*7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29 \\ 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 39. *Drehe $P(6/4)$ mit $\alpha = 120°$ um den Ursprung Rotationsmatrix*

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} * 6 & -\frac{\sqrt{3}}{2} * 4 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} * 6 & -\frac{1}{2} * 4 \end{pmatrix} \\ & \to P'(-3 - 2\sqrt{3}/2 - 3\sqrt{3})\end{aligned}$$

Definition 26. *Eine* <u>*(m,m)-Matrix*</u> *heisst* <u>*quadratisch*</u>

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

und $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{mm}$ *heisst* <u>*Hauptdiagonale*</u>.

Die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (0)$$

heisst <u>*Nullmatrix*</u>.

Die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

heisst <u>*Einheitsmatrix*</u>.
In der Einheitsmatrix sind nur 1en auf der Hauptdiagonalen.

5.3 Operationen mit Matrizen

Definition 27. *Sind A und B zwei (m,n) Matrizen, so ist*

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{22} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 40. *1.*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

A + B ist nicht definiert, da A eine 3 und B eine 2 Spaltige Matrix ist.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Ist N die Nullmatrix, so ist

$$\forall(A + N = N + A = A)$$

Definition 28. *Ist*

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

so ist

$$\lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar λ

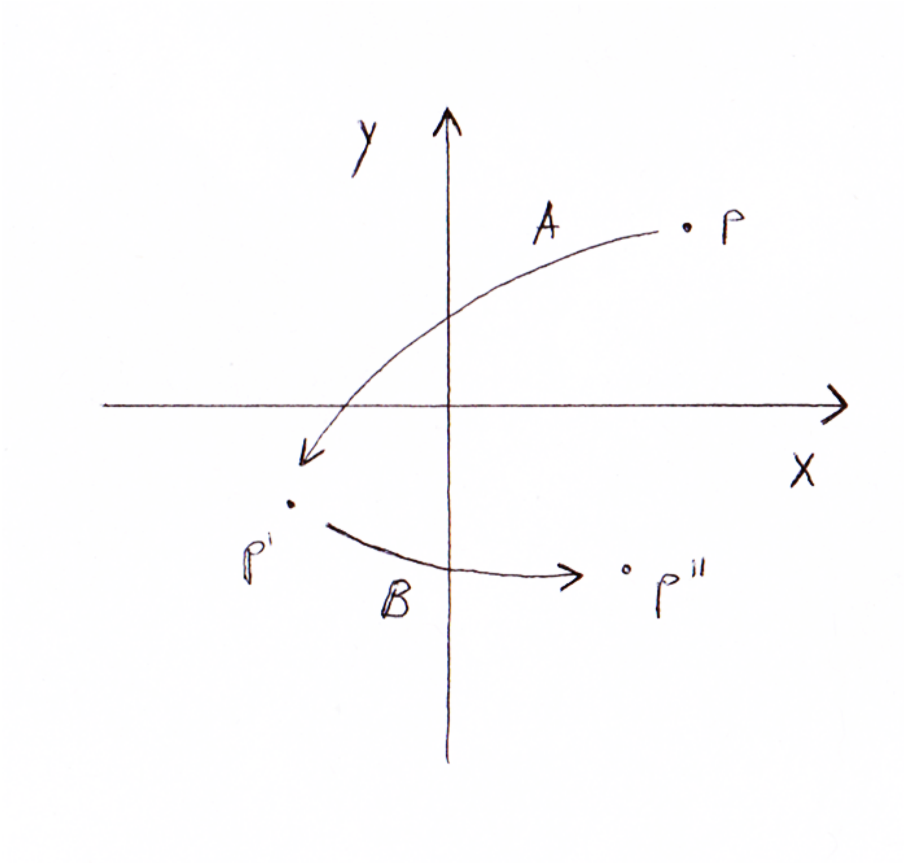
Es ist

$$(-1)A = -A$$

die zu A <u>inverse</u> Matrix.
Dann ist

$$\forall A(A + (-A) = (-A) + A = N)$$

Für die Multiplikation betrachten wir $\vec{p'} = A\vec{p}$ und bilden $\vec{p'}$ mit der Matrix B erneut ab.



$$\vec{p'} = A\vec{p}$$
$$\vec{p''} = B\vec{p'}$$

also ist

$$\vec{p''} = B(A\vec{p})$$

Wir haben also die beiden Abbildungen verkettet. Mit den Funktionen f mit

$$y = f(x)$$

und g mit

$$y = g(x)$$

erhalten wir so

$$\boxed{y = g(f(x)) := (g \circ f)(x)}$$

"g ring f" ist die komposition (Verkettung)von f mit g.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[dr, "g \circ f"'] & u = f(x) \arrow[d] \\
 & y
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= g(u) \\
&= g(f(x))
\end{aligned}
$$

Beispiel 41. *1.*

$$f(x) = \sin(x), g(x) = x^2$$

$$g \circ f$$
$$\to g(f(x)) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x)$$

und

$$f \circ g$$
$$f(g(x)) = \sin(x^2)$$

also

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$$

2.

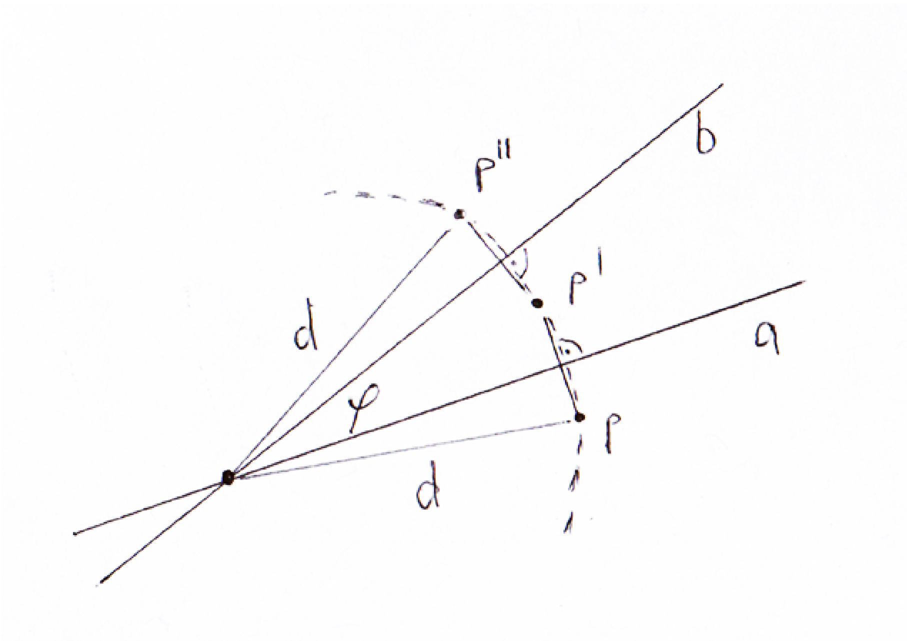
$$f(x) = (x^2 + 3)^2), g(x) = e^x$$

$$g \circ f$$
$$\to g(f(x)) = e^{(x^2+3)^2}$$
$$= e^{x^2+6x^2+9}$$

und

$$f \circ g$$
$$f(g(x)) = (e^x)^2 + 3)^2$$
$$= (e^2 + 3)^2$$
$$= (e^{2x} + 3)^2$$
$$= e^{4x} + 6e^{2x} + 9$$

3. Spiegelung an Achse a und dann Speigelung an Achse b



kann durch eine Rotation mit y um $S = a \cap b$ *ersetzt werden. Dabei ist* $p = 2\sphericalangle(a, b)$.

Bei den Abbildungen ist also

$$\vec{p''} = B(A\vec{p})$$

und wir definieren

$$B(A\vec{p}) := (BA)\vec{p}$$

Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{p'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \vec{p''} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

so ist

$$\vec{p'} = A\vec{p} = \begin{pmatrix} a_{11}x & a_{12}y \\ a_{21}x & a_{22}y \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{p''} = B\vec{p'} = \begin{pmatrix} b_{11}x' & b_{12}y' \\ b_{21}x' & b_{22}y' \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y \\ b_{21}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{22}(a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel 42. *1.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2*1+3*5 & 2*3+3*1 \\ 1*1+4*5 & 1*3+4*1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Um c_{ij} zu erhalten, müssen wir die i. Zeile mit der j. Spalte skalar multiplizieren.
Und wir sehen, dass

$$AB \neq BA$$

Wir müssen die Reihenfolge er Abbildung beachten: Zuerst drehen und dann spiegeln ist nicht dasselbe, wie zuerst spiegeln und dann drehen!

Beispiel 43. *Welche Matrix gehört zu derjenigen Abbildung, bei der die Punkte zuerst mit 210° um den Ursprung und dann noch an der y-Achse gespiegelt werden?*

Rotationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(210°) & -\sin(210°) \\ \sin(210°) & \cos(210°) \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der y Achse

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie die Reihenfolge. Zuerst rotieren, dann spiegeln

$$\begin{aligned} M &= SR / \textit{ Wir schreiben den Ablauf von Rechts nach Links auf} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fehlende SEITE!

Aber

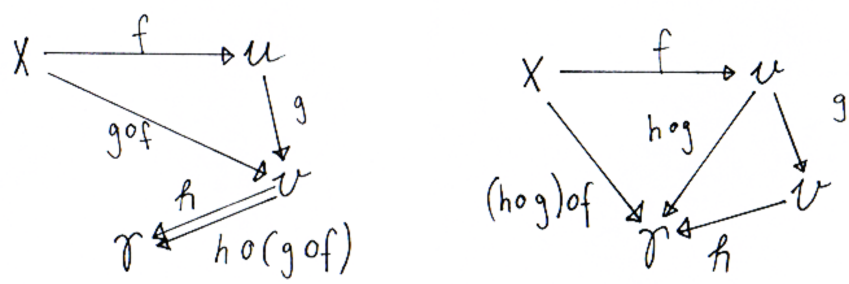
$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 13 & 17 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ist möglich.

- Ist die Matrizenmultiplikation assoziativ?

$$\forall A, B, C((AB)C = A(BC))$$

Ja, denn die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ:



also

$$(n \circ g)f = h \circ (g \circ f)$$

- Gibt es ein neutrales Element?

$$\forall A \exists N(AN = NA = A)$$

Die Abbildung zur Matrix N muss also die Punkte auf sich selbst abbilden:

$$x' = x$$
$$y' = y$$

Diese Abbildung heisst <u>Identität</u> (identische Abbildung) und die Matrix ist dann

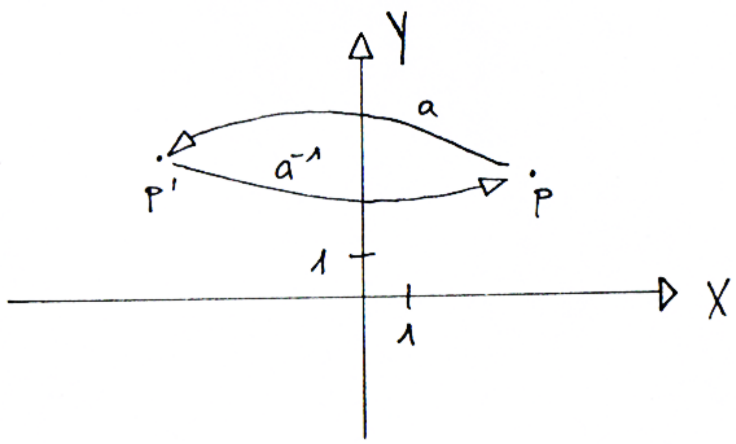
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die <u>Einheitsmatrix E</u>

- Gibt es zu jeder Matrix eine Inverse?

$$\forall A \exists A^{-1}(AA^{-1} = A^{-1}A = E)$$

Das bedeutet also, dass A^{-1} dijenige Matrix ist, die zur Umkehrabbbildung (Umkehrfunktion) gehört, da ja die Verkettung von a und a^{-1} die Identität ergeben soll.



Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

so wird

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

Und wir suchen $P(x/y)$, müssen also das Gleichungssystem nach x und y auflösen. Es ist

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$$

und

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a12a_{21}$$

Definition 29. *Wir nennen*

$$Det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

gehörende Determinante

weiter ist

$$D_x = \begin{vmatrix} x' & a_{12} \\ y' & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}x' - a_{12}y'$$

und

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & x' \\ a_{21} & y' \end{vmatrix} = a_{11}x' - a_{21}y'$$

Damit wird

$$x = \frac{a_{22}x' - a_{12}y'}{Det(A)} = \frac{a_{22}x'}{Det(A)} - \frac{a_{12}y'}{Det(A)}$$

Damit wird

$$y = \frac{a_{11}x' - a_{21}y'}{Det(A)} = -\frac{a_{21}x'}{Det(A)} + \frac{a_{11}y'}{Det(A)}$$

so wird

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}x'}{Det(A)} & -\frac{a_{12}y'}{Det(A)} \\ -\frac{a_{21}x'}{Det(A)} & \frac{a_{11}y'}{Det(A)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

Beispiel 44. *Suche die inverse Matrix*

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 * 5 - (4 * -3) \\ &= 10 + 12 \\ &= 22 \end{aligned}$$

und so

$$A^{-1} = \frac{1}{22} * \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \\
Det(B) &= \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \\
&= -24 + 24 \\
&= 0
\end{aligned}$$

also existiert B^{-1} nicht

3.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Det(C) existiert nicht!

Definition 30. *Eine quadratische Matrix M heisst regulär, wenn $Det(M) \neq 0$. Andernfalls heisst sie singulär.*

$$R = M_{n,n} \text{ist die Menge der regulären quadratischen Matrizen.}$$

Es ist also $< M_{(n,n)}; * >$ eine Gruppe.
Sind $A, B \dots$ reguläre Matritzen und E die Einheitsmatrix, so sind die Gleichungen lösbar.

Beispiel 45. *1.*

$$\begin{aligned}
Ax &= B \\
A^{-1}(Ax) &= A^{-1}B \\
Ex &= A^{-1}B \\
x &= A^{-1}B
\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}
(Ax)A^{-1} &= BA^{-1} \\
A(xA^{-1}) &= BA^{-1}
\end{aligned}$$

führt nicht zur Lösung.
Das Kommultativgesetz gilt bei Matrizen nicht.

2.

$$\begin{aligned}
B(x - A) &= Ax \\
Bx - BA &= Ax \\
Bx - Ax &= BA \\
x(B - A) &= BA
\end{aligned}$$

Wir müssen hier auf die Seite achten wo die Multiplikation durchgeführt wird!

$$x = BA(B - A)^{-1}$$

3. *Wie heisst die inverse Matrix von AB?*
Ist x die Matrix so muss

$$(AB)x = E$$

gelten.

Also

$$\begin{aligned} A(Bx) &= E \\ A^{-1}A(Bx) &= A^{-1}E \\ Bx &= A^{-1} \\ B^{-1}(Bx) &= B^{-1}A^{-1} \\ x &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

wir haben das inverse Element zu AB gefunden.

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Wichtig, auch hier gilt es auf die Reihenfolge zu achten!

Gleichungssysteme wie

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \qquad (x/y) \in \mathbb{R}^2 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

können wir mit Hilfe von Matrizen darstellen. Mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}$$

und

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

folgt

$$Ax = B$$

Die Lösung x lautet dann also

$$\begin{aligned} x &\neq BA^{-1} \\ x &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Beispiel 46.

$$\begin{vmatrix} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und so

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \begin{pmatrix} \frac{15}{7} & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also

$$x = \frac{18}{7}, y = \frac{3}{7}$$

5.4 Abbildungen von Kurven

Suchen wir das Bild des Kreises $x^2 + y^2 = 49$. Bei der Abbildung mit Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

so ist also

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y \\ y' &= 2x + 2y \end{aligned}$$

und wir suchen diejenige Kurvengleichung, die entsteht wenn $x^2 + y^2 = 49$ ist. Dazu brauchen wir x und y in Abhängigkeit von x' und y', müssen also M^{-1} berechnen.

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

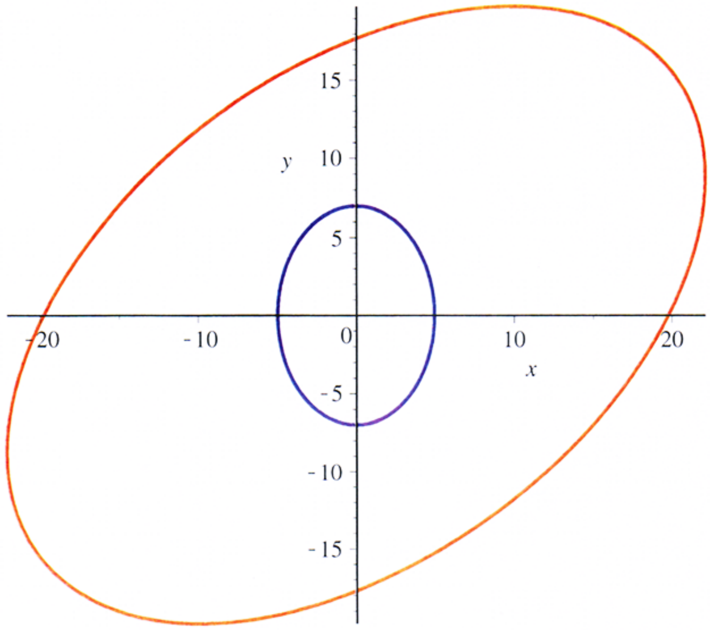
somit ist

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}x' + \frac{1}{8}y' \\ y &= -\frac{1}{4}x' + \frac{3}{8}y' \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Kreisgleichung, ergibt sich folgendes Bild des Kreises

$$\begin{aligned} (\frac{x'}{4} + \frac{y'}{8})^2 + (-\frac{x'}{4} + \frac{3y'}{8})^2 &= 49 \\ \frac{1}{64}(4(x')^2 + 4x'y' + (y')^2) + \frac{1}{64}(4(x')^2) - 12x'y' + 9(y')^2) &= 49 \\ 8(x')^2 + 10(y')^2 - 8x'y' &= 49 \cdot 64 \\ 4(x')^2 + 5(y')^2 - 4x'y' - 32 \cdot 49 &= 0 \\ 4x'^2 + 5y'^2 - 4x'y' - 1569 &= 0 \end{aligned}$$

Grafische Darstellung



Rot: $x^2 + y^2 = 49$
Blau: $4x'^2 + 5y'^2 - 4x'y' - 1569 = 0$

5.5 Affine Abbildungen

Translation mit Vektor $\vec{t}$, Spiegelung an Punkt $Z(a/b)$ und zentrische Streckung sind keine linearen abbildungen.

Definition 31. *Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Vorschrift*

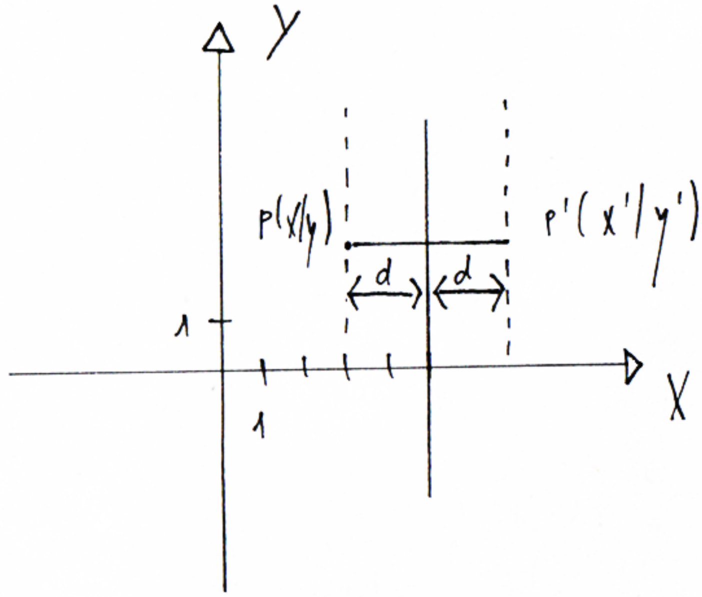
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f \\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}&; c \neq 0 \vee f \neq 0 \end{aligned}}$$

heisst affine Abbildung.

Bei affinen Abbildungen können wir Matrizen nur brauchen, um einen Teil der Abbildung zu beschreiben. Mit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ wird

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{t}$$

Beispiel 47. *Spiegelung an der Geraden $x = 5$*



Mit $d = 5 - x$ und $x' = 5 + d$ wird $x' = 5 + 5 - x = 10 - x$. Also

$$\begin{aligned} x' &= -x + 10 \\ y' &= y \end{aligned}$$

Beispiel 48. *Welche Abbildungsvorschrift hat diejenige affine Abbildung, die*

- *$P(1/-1)$ auf $P'(7/2)$*
- *die x-Achse auf die Gerade $g' : x' + y' - 5 = 0$*
- *und die y-Achse auf die Gerade $h' : x' - 3y' + 3 = 0$*

abbildet? Es ist

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f$$

Mit P, P' wird

$$\begin{aligned} 7 &= a - b + c \textit{(1)} \\ 2 &= d - e + f \textit{(2)} \end{aligned}$$

Weiter ist $s = g' \cap h'$ das Bild des Ursprungs. Wir finden s mit

$$\left| \begin{aligned} x' + y' - 5 = 0 \\ x' - 3y + 3 = 0 \end{aligned} \right|$$
$$4y' - 8 = 0$$
$$y' = 2$$

also

$$3 = c \textit{ (3)}$$
$$2 = f \textit{ (4)}$$

Die x-Achse hat die Gleichung $y = 0$. Damit finden wir

$$x' = ax + c$$
$$y' = dx + f$$

was die Gerade

$$g : ax + c + dx + f - 5 = 0$$

ergeben muss. Mit (3) und (4) ist also

$$\begin{aligned} ax + 3 + dx + 2 - 5 &= 0 \\ ax + dx &= 0 \\ x(a + d) &= 0 \\ a + d &= 0 \textit{ (5)} \end{aligned}$$

Für die y-Achse ist $x = 0$, also

$$x' = by + 3$$
$$y' = ey + 2$$

was in h' eingesetzt

$$\begin{aligned} by + 3 - 3(ey + 2) + 3 &= 0 \\ by + 3 - 3ey - 6 + 3 &= 0 \\ by - 3ey &= 0 \\ y(b - 3e) &= 0 \\ b - 3e &= 0 \; \textit{(6)} \end{aligned}$$

ergibt. So werden

$$\begin{aligned} \textit{(1)}\; 7 &= a - b + 3 \\ \textit{(2)}\; 2 &= d - e + 2 \\ \textit{(5)}\; a + d &= 0 \\ \textit{(6)}\; b - 3e &= 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \textit{(1)}\; a - b &= 4 \\ \textit{(2)}\; d - e &= 0 \end{aligned}$$

Mit (2) wird $d = e$ in (5):

$$\begin{aligned} \textit{(5)}\; a + e = 0 \\ \textit{(6)}\; b - 3e = 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 4a &= 4 \\ a &= 1 \\ \textit{in (1):}\; b &= -3 \\ \textit{in (5):}\; d &= -1 \\ \textit{in (2):}\; e &= -1 \end{aligned}$$

somit lautet die Vorschrift

$$\begin{aligned} x' = x - 3y + 3 \\ y' = -x - y + 2 \end{aligned}$$

Beispiel 49. *Eine lineare Abbildung m bildet $P(1/1)$ in $P'(5/-3)$ und $(2/1)$ in $Q(7/-4)$ ab; wie lautet die Abbildungsmatrix?*

P:

$$\left|\begin{array}{l} 5 = a + b \\ -3 = c + d \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Q:

$$\left|\begin{array}{l} 7 = 2a + b \\ -4 = 2c + d \end{array}\right| \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array}$$

(1)-(3):

$$-2 = -a$$
$$\underline{a = 2}$$

a in (1)

$$5 = 2 + b$$
$$\underline{b = 3}$$

(2)-(4):

$$1 = -c$$
$$\underline{c = -1}$$

in (4)

$$-4 = -2 + d$$
$$\underline{d = -2}$$

Wir haben die Matrix

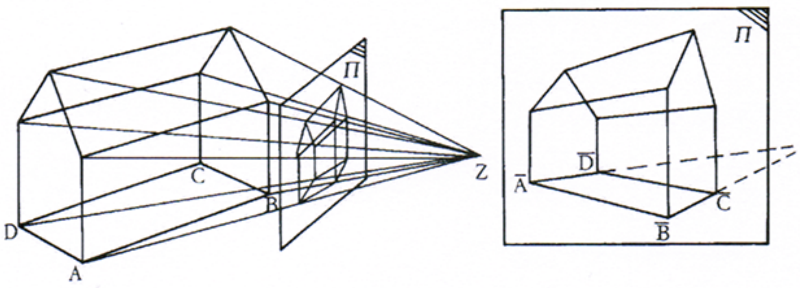
$$m = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5.6 Abbildungen $R^3 \to R^2$

Wollen wir ein dreidimensionales Objekt auf dem Bildschirm darstellen, so stehen uns dijenigen zwei Projekttionsarten zur Verfügung, denen wir auch im täglichen Leben begegnen: Sonnenlicht und Kunstlicht

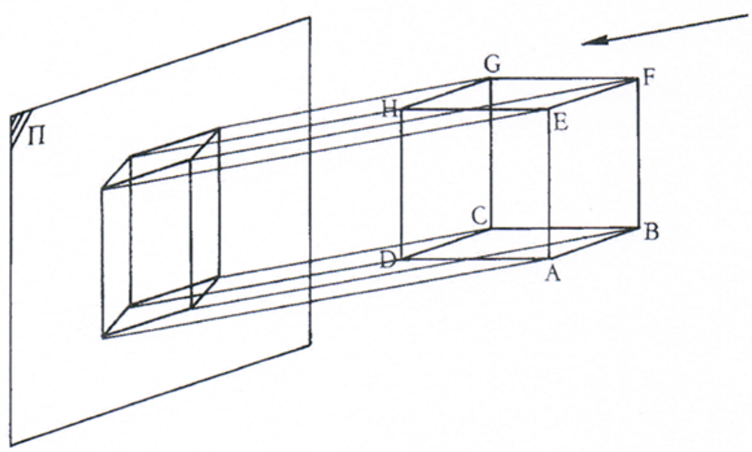
Zentralprojektion

Gehen alle Sehstrahlen durch einen festen Punkt ausserhalb der Projektionsebene, so sprechen wir von einer Zentralrpojektion. Eine Zentralprojektion ist also durch die Angabe dieses ausgezeichneten Punktes, den wir **Projektionszentrum oder Auge** nennen, gegeben.

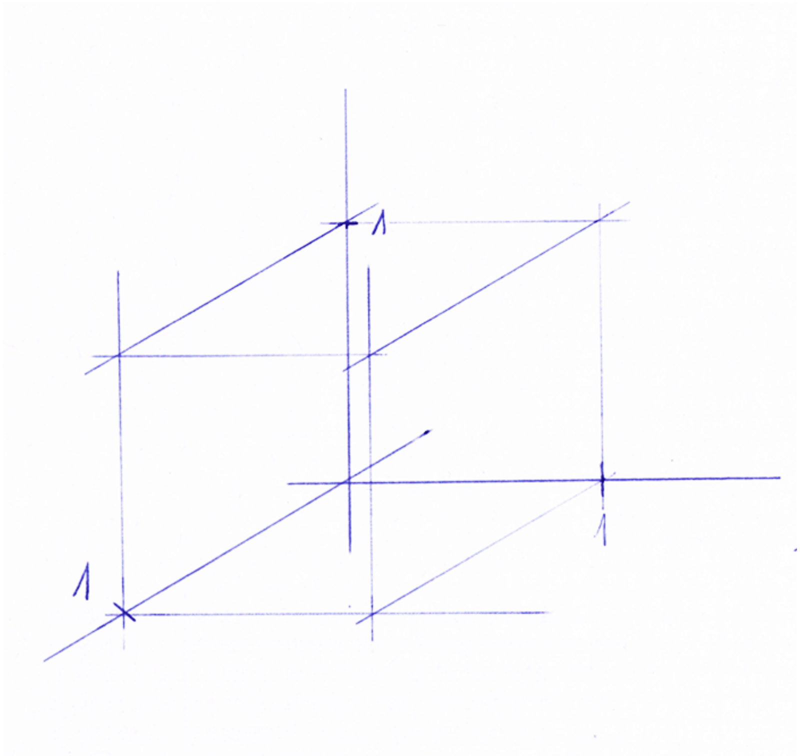


Parallelprojektion

Bei der ParallelProjektion sind alle Sehstrahlen paralell. Eine Paralellprojektion ist also durch die Angabe eines Sehstrals bestimmt. Der Winkel zwischen Sehstrahl und Tafel soll natürlich von 0° verschieden sein. Ist dieser Winkel 90°, so sprechen wir von einer **Normalprojektion**, andernfalls von **schiefer Parallelprojektion oder Axonometrie**.

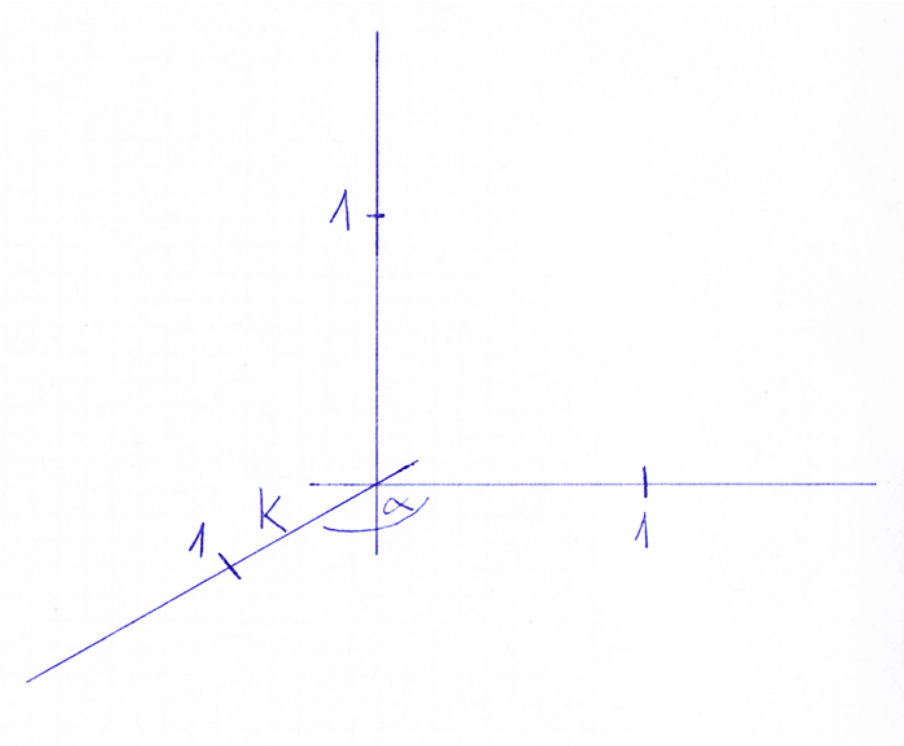


5.6.1 Axonometrie

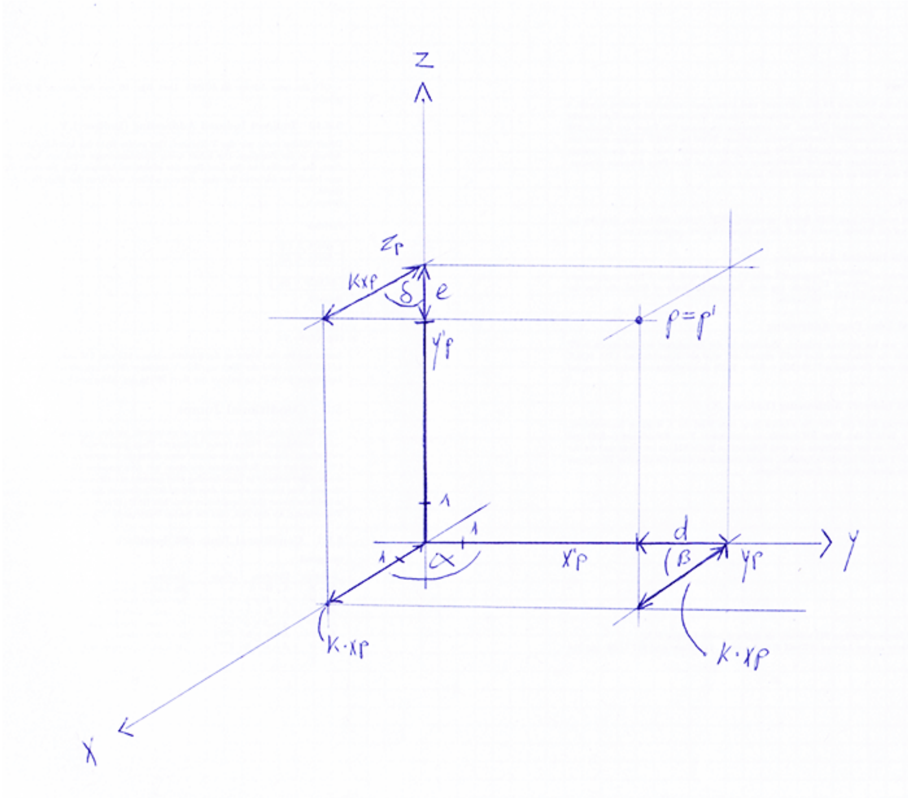


Der Würfel wirkt verzerrt.

Bei einer Axonomie wählen wir den Winkel α zwischen x- und y- Achse und das Verkürzungsverhältnis k, weil alle Projekktionen in x Richtung verkürzt werden.



Welches sind die Koordinaten des projizierten Punktes $p'(x'/y')$, wenn $p(y/y/z)$ die Koord. des Punktes im Raum sind?



Die Fläche welche die Vektoren e_3 und e_2 aufspannen, stellen wir uns dabei als imaginären Bildschrim vor. Wir wollen die Position des Punktes $p'(x'/y')$ auf dem Bildschirm herausfinden.

Wir beginnen mit der Suche nach $x'p$, dem Abstand in y Richtung vom Urpsrung

$$x'p = y_p - d$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta &= 180° - \alpha \\ \cos\beta &= \frac{d}{kxp} \\ d &= kxp\cos\beta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta &= 180° - \alpha \\ &= -\cos(\alpha) \end{aligned}$$

damit wird

$$d = -kxp\cos(\alpha)$$

somit

$$\begin{aligned} x'p &= yp - d \\ &= yp + kxp\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Weiter suchen wir den Punkt $y'p$, dem Abstand in z Richtung vom Ursprung

$$y'p = z_p - e$$

wobei

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \frac{e}{kxp} \\ e &= kxp\cos\delta \end{aligned}$$

und

$$\delta = \alpha - 90^\circ$$

also

$$\begin{aligned} \cos\delta &= cos(\alpha - 90^\circ) \\ &= cos(-(90^\circ - \alpha)) \\ &= cos(90^\circ - \alpha) \\ &= sin(\alpha) \end{aligned}$$

somit

$$y'p = zp - kxp\sin(\alpha)$$

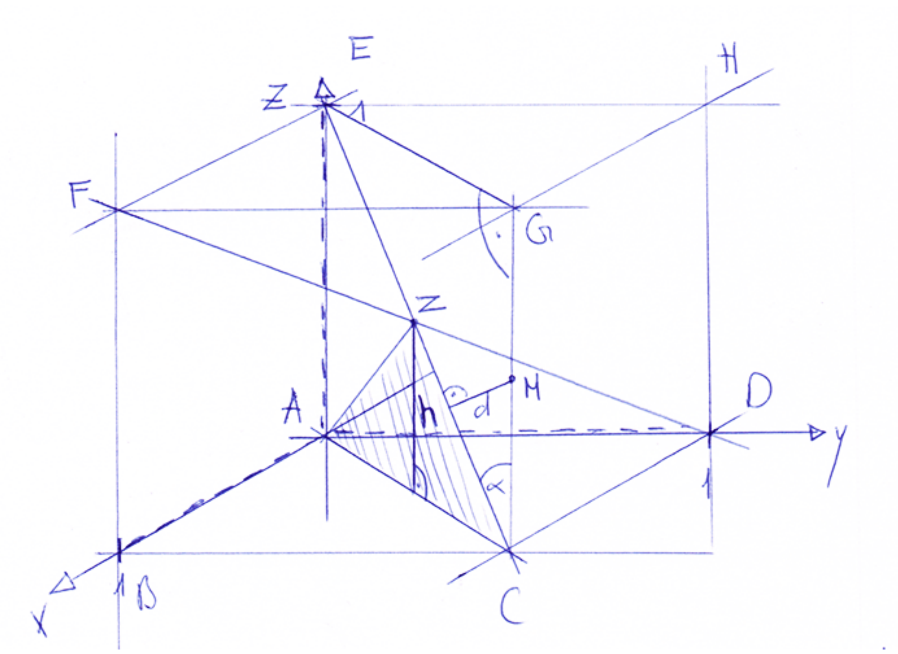
Somit lautet die Abbildungsvorschrift für die Axionometrie

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= y + kx\cos(\alpha) \\ y' &= z - kx\sin(\alpha) \end{aligned}}$$

Beispiel 50. *Konstruiere eine grosse Axonometrie* ($\alpha = 150°, k = \frac{1}{2}$ *des Einheitswürfels* $ABCDEGH$ *mit* A *im Ursprung,* $B(1/0/0)$*,* E *über* A*,* F *über* B *etc.*

1. Z *ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen; zeichne das Dreieck* ACZ *mit Farbe und berechne dessen Flächeninhalt.*

2. *Berechne den (kürzesten) Abstand des Mittelpunktes der Kante* CG *von der Geraden durch* C *und* E



zu 1.)

$$F(\triangle ACZ) = \frac{gh}{2}$$

wobei

$$g = |AC| = \sqrt{2}$$
$$h = \frac{1}{2}$$

also

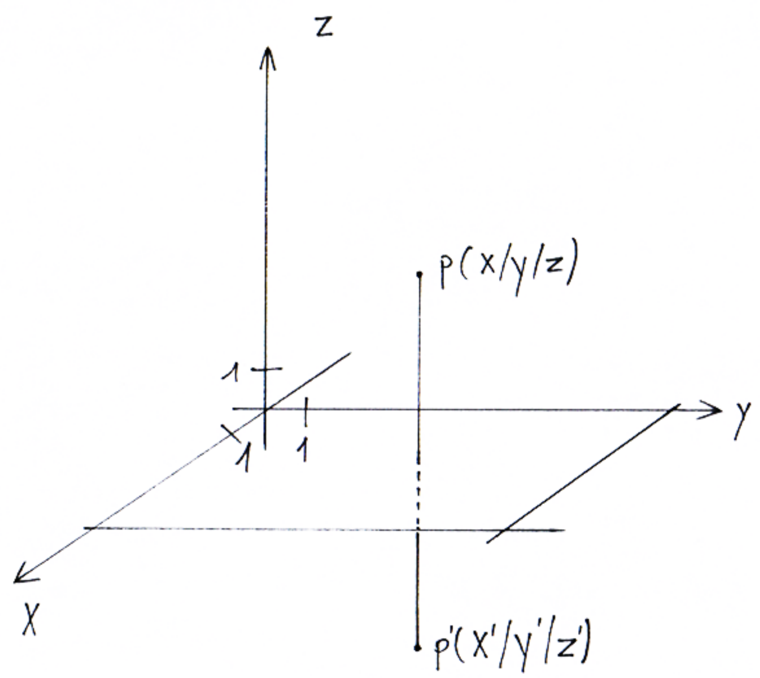
$$F(\triangle ACZ) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

zu 2.)

$$\triangle CMF \sim \triangle CGE$$
$$\frac{d}{|EG|} = \frac{MC}{CE} \rightarrow \frac{d}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}$$
$$\rightarrow d = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} * \sqrt{3}}{2 * 3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

5.7 Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

5.7.1 Spiegelung an der Grundrissebene

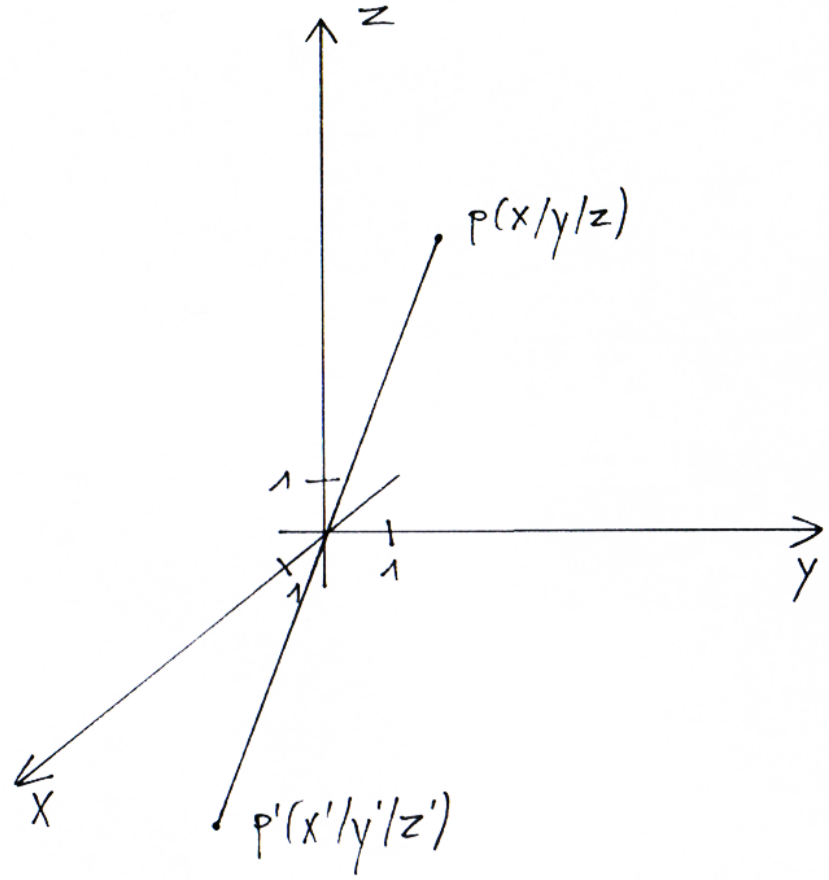


$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z \end{aligned}$$

also

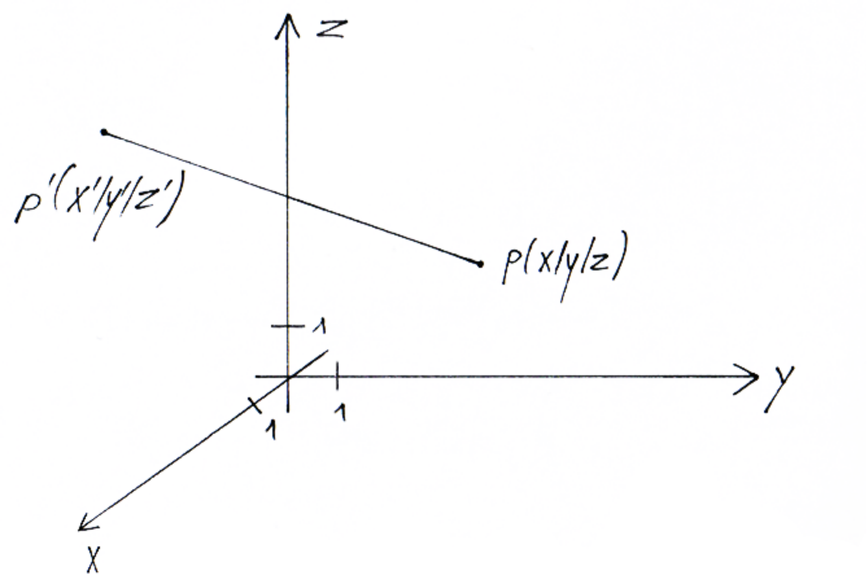
$$s' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.7.2 Spiegelung am Ursprung



$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.7.3 Spiegelung an einer Geraden



$$x' = -x$$
$$y' = -y$$
$$z' = z$$

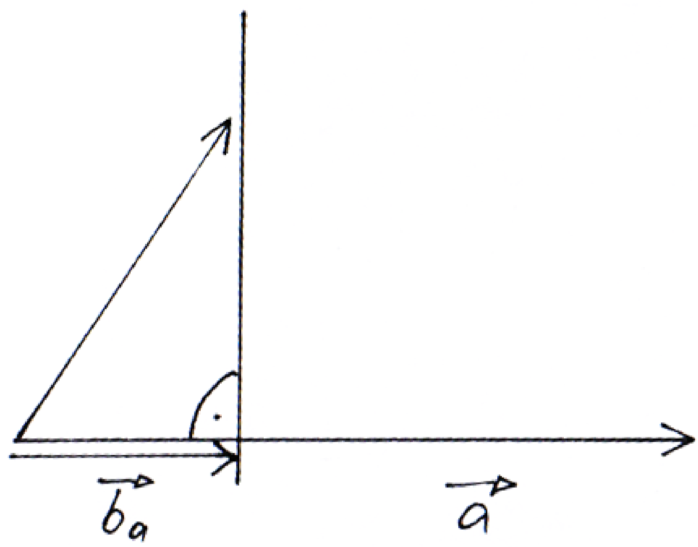
also

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.7.4 Spiegelung an der Geraden $g : \vec{p} = \lambda \vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$

Vorbereitung:

Definition 32. *Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, so heisst $\vec{ba}$ die vektorielle Projektion und $|\vec{ba}|$ die skalare Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$*



Es ist

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{|\vec{ba}|}{|\vec{b}|} \\
|\vec{ba}| &= |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \\
\cos\varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
|\vec{ba}| &= |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
|\vec{ba}| &= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}
\end{aligned}$$

Es ist $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ein Vektor mit Länge 1, ein normierter Vektor. Also wird

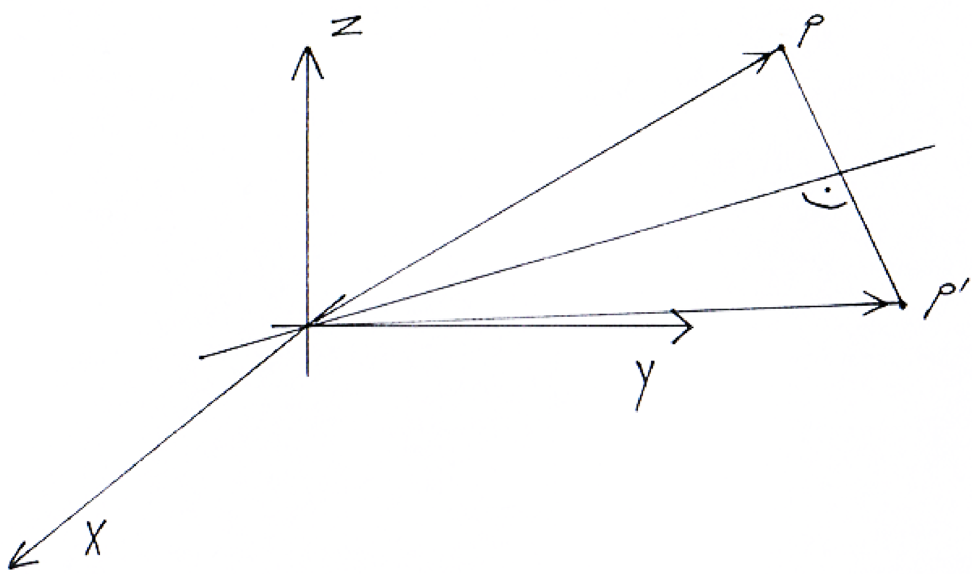
$$\begin{aligned} \vec{ba} &= |\vec{ba}| \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\ \vec{ba} &= \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\ \vec{ba} &= \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

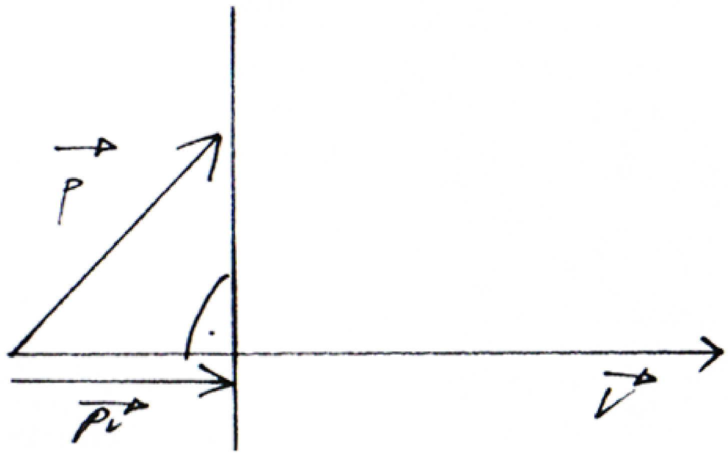
Ist

$$|\vec{a}| = 1$$

so wird

$$\vec{ba} = (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{a}$$





$$\begin{aligned}
\vec{p_v} &= \frac{\vec{p}\vec{v}}{\vec{v}^2} \cdot \vec{v} \ \textit{und} \ |\vec{v}| = 1 \\
\vec{p_v} &= (\vec{p}\vec{v})\vec{v}
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\vec{p'} &= \vec{p} + 2((\vec{p}\vec{v})\vec{v} - \vec{p}) \\
\vec{p'} &= 2(\vec{p}\vec{v})\vec{v} - \vec{p}
\end{aligned}$$

Mit $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{p'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ wird

$$\vec{p}\vec{v} = v_1 x + v_2 y + v_3 z$$

Also

$$(\vec{p}\vec{v})\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1^2 x + v_1 v_2 y + v_1 v_3 z \\ v_1 v_2 x + v_2^2 y + v_2 v_3 z \\ v_1 v_3 x + v_2 v_3 y + v_3^2 z \end{pmatrix}$$

Also

$$\vec{p'} = \begin{pmatrix} 2v_1^2 x + 2v_1 v_2 y + 2v_1 v_3 z - x \\ 2v_1 v_2 x + 2v_2^2 y + 2v_2 v_3 z - y \\ 2v_1 v_3 + 2v_2 v_3 y + 2v_3^2 z - z \end{pmatrix}$$

was folgender Matrix entspricht:

$$G = \begin{pmatrix} 2v_1^2 - 1 & 2v_1v_2 & 2v_1v_3 \\ 2v_1v_2 & 2v_2^2 - 1 & 2v_2v_3 \\ 2v_1v_3 & 2v_2v_3 & 2v_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle mit Spiegelung an der Z-Achse: Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit $|\vec{v} = 1|$. Also

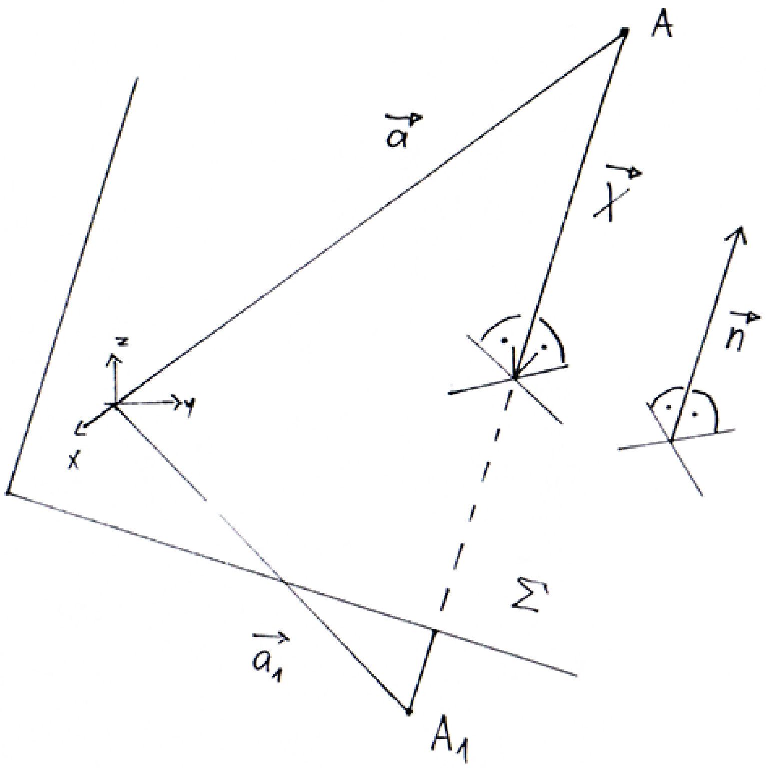
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.7.5 Spiegelug an der Ebene $\Sigma : ax + by + cz = 0$

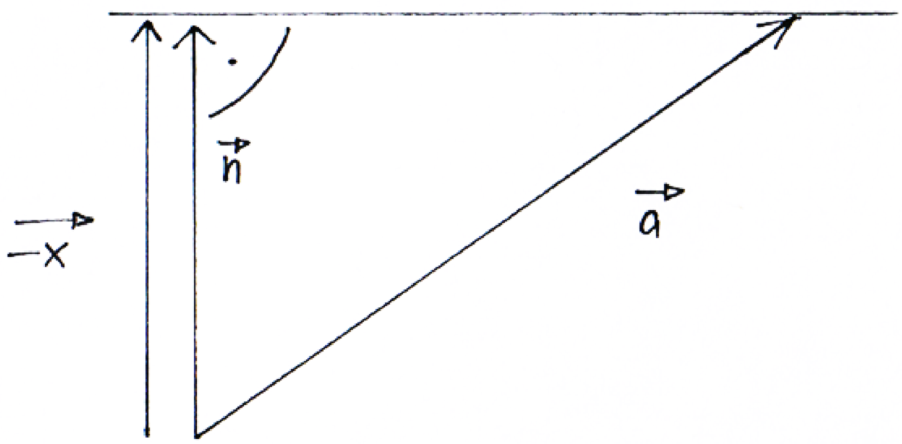
Der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

sei normiert.



$$\vec{a_1} = \vec{a} + 2\vec{x}$$



$-\vec{x}$ ist die skalare Projektion, also

$$-\vec{x} = (\vec{a}\vec{n})\vec{n}$$

da

$$|\vec{n}| = 1$$

ist, Damit wird

$$\vec{a_1} = \vec{a} - 2(\vec{a}\vec{n})\vec{n}$$

ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

sow ird

$$\vec{a}\vec{n} = ax + by + cz$$

und

$$2(\vec{a}\vec{n})\vec{n} = \begin{pmatrix} 2a^2x + 2aby + 2acz \\ 2abx + 2b^2y + 2bcz \\ 2acx + 2bcy + 2c^2z \end{pmatrix}$$

was

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} x - 2a^2x - 2aby - 2acz \\ y - 2abx - 2b^2y - 2bcz \\ z - 2acx - 2bcy - 2c^2z \end{pmatrix}$$

ergibt.
Damit wird die Matrix

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}}$$

Beispiel 51. *Spiegelung an der Aufrissebene* π_2

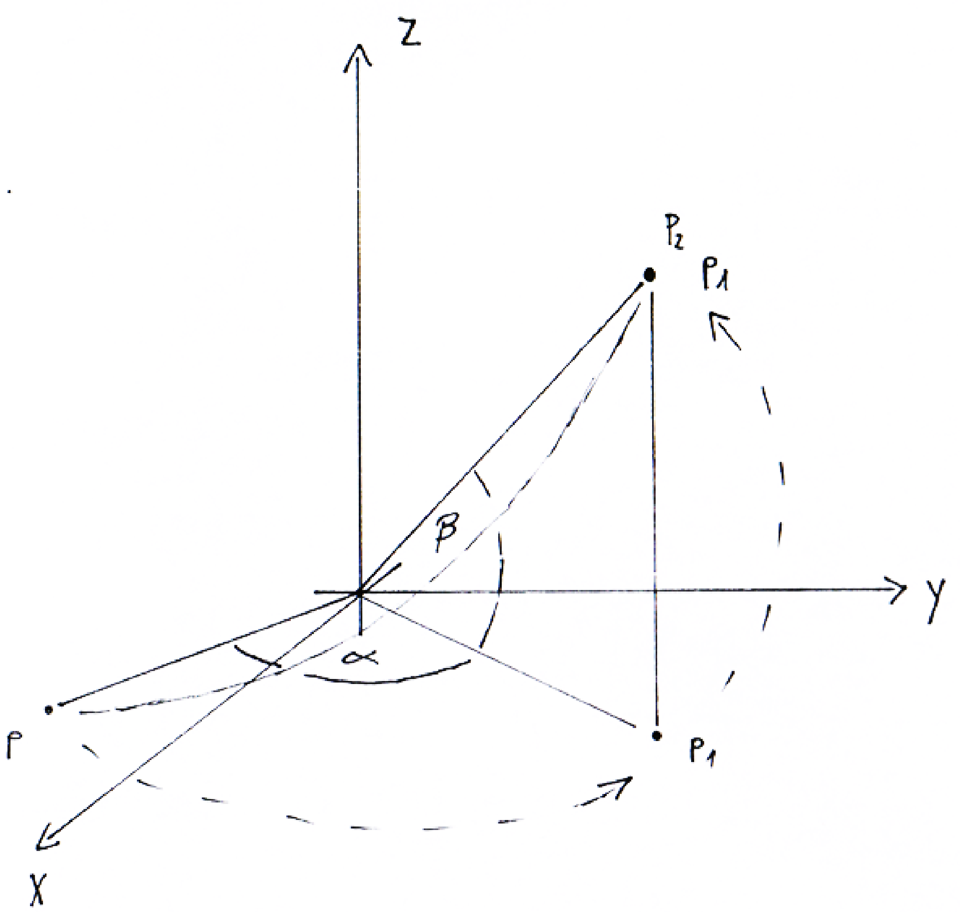
Es ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

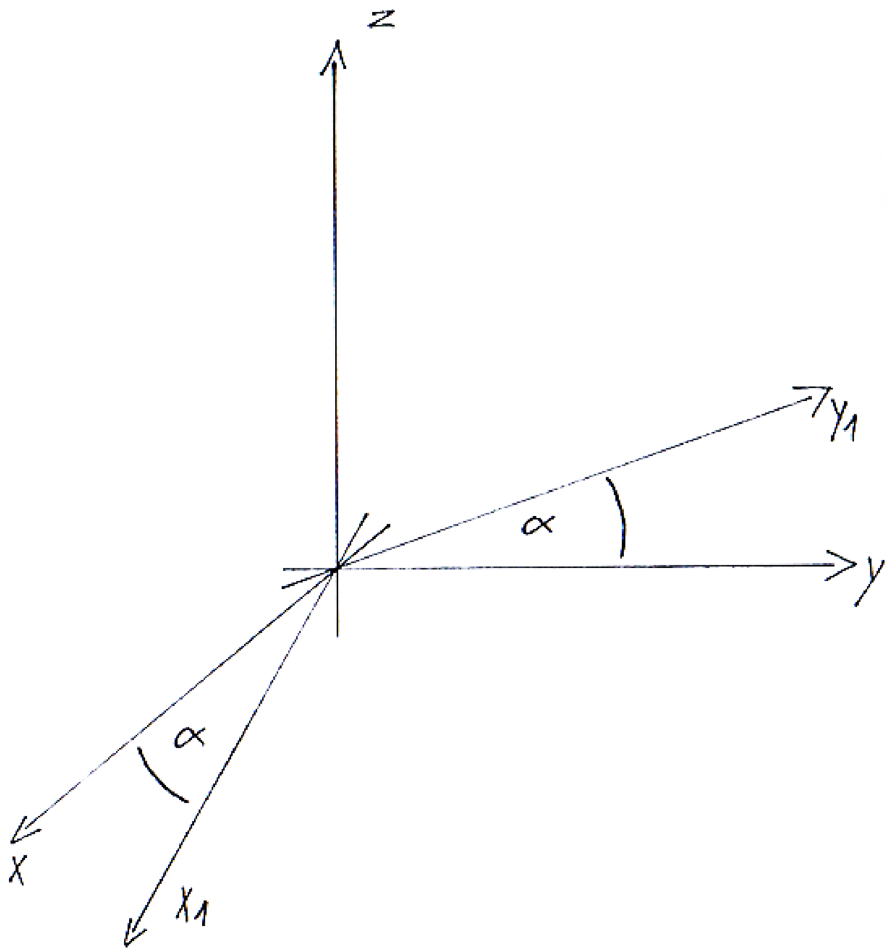
also

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.7.6 Drehung um den Ursprung



Zum Rechnen ist es einfacher, wenn wir die Koordinatenachse drehen.
Zuerst die x- und die y-Achse um die z- Achse drehen und dann um die gedrehte x_1- Achse drehen.



Die zweidimensionale Drehmatrix ist

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und wir drehen das Koordinatensystem. Das bedeutet, dass ein Punkt mit $-\alpha$ gedreht wird. Also

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos(-\alpha) - ys\sin(-\alpha) \\ y_1 &= x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha) \\ z_1 &= z \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ sin(\alpha) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha) \\ y_1 &= -x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha) \\ z_1 &= z \end{aligned}$$

Nun drehen wir mit β um die x_1 - Achse.
Also wird

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ y_2 &= y_1\cos\beta + z_1\sin\beta \\ z_2 &= -x_1\sin\beta + z_1\cos\beta \end{aligned}$$

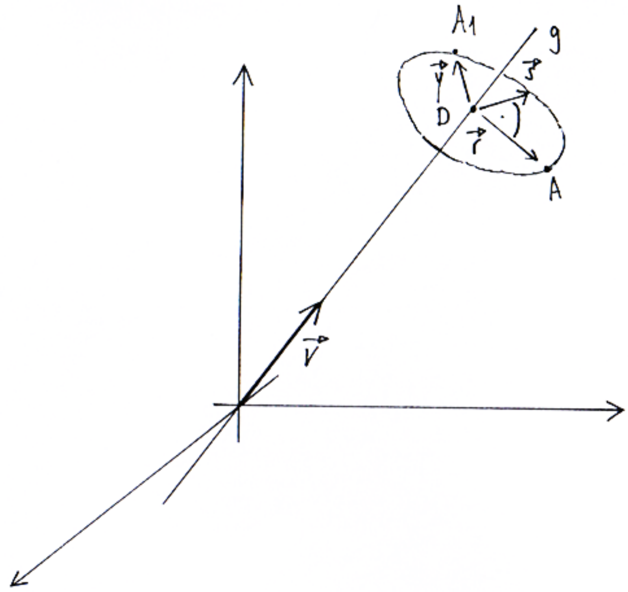
so wird

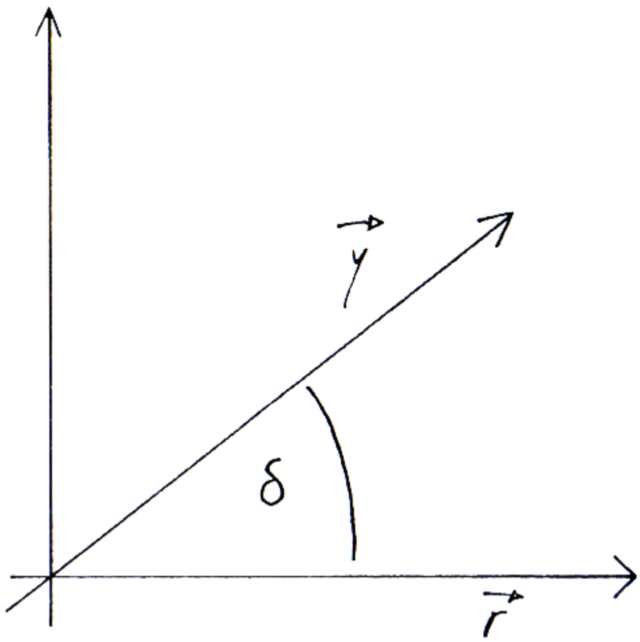
$$\begin{aligned} x_2 &= x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha) \\ y_2 &= (-x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha))\cos\beta + z\sin\beta \\ &= -x\sin(\alpha)\cos\beta + y\cos(\alpha)\cos\beta + z\sin\beta \\ z_2 &= (x\sin(\alpha) - y\cos(\alpha))\sin\beta + z\cos\beta) \\ &= x\sin(\alpha)\sin\beta - y\cos(\alpha)\sin\beta + z\cos\beta \end{aligned}$$

also

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha)\cos\beta & \sin\beta \\ \sin(\alpha)\sin\beta & -\cos(\alpha)\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

5.7.7 Drehung mit Winkel δ um die gerade $g : p = \lambda\vec{v}$, $|\vec{o}| = 1$ durch den Ursprung





$$\vec{y} = \vec{r}\cos\delta + \vec{s}\sin\delta$$

Es ist

$$\vec{a_1} = \vec{d} + \vec{y}$$

und

$$\vec{s} = \vec{r} \times \vec{v}$$

und

$$\vec{d} = \text{die vektorielle Projektion von } \vec{a} \text{ auf } \vec{v}$$

also

$$\vec{d} = (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}$$

so wird

$$\vec{a_1} = \vec{d} + \vec{r}\cos\delta + (\vec{v} \times \vec{a})\sin\delta$$

weil

$$\begin{aligned} \vec{s} = \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{v} \times (\vec{a} - \vec{d}) \\ &= \vec{v} \times \vec{a} - \vec{v} \times \vec{d} \end{aligned}$$

aber

$$\vec{v} \times \vec{d} = \vec{o}$$

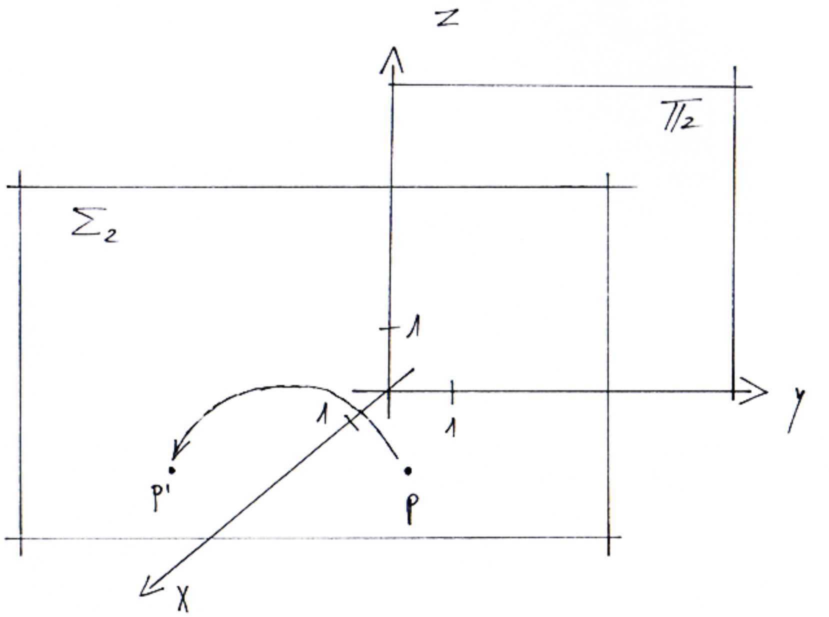
Also

$$\begin{aligned}\vec{a_1} &= \vec{d} + (\vec{a} - \vec{d})\cos\delta + (\vec{v} \times \vec{a})\sin\delta \\ &= \vec{d}(1-\cos\delta) + \vec{\alpha}\cos\delta + (\vec{v} \times \vec{a})\sin\delta \\ \vec{a_1} &= (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{a}(1-\cos\delta) + \vec{a}\cos\delta + (\vec{v} \times \vec{a})\sin\beta \\ &\dots\end{aligned}$$

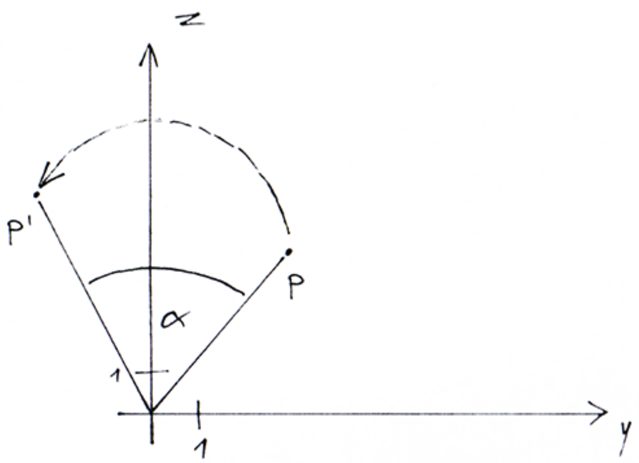
Wir finden schlussendlich die Drehmatrix

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} v_1^2(1-\cos\delta)+\cos\delta & v_1v_2(1-\cos\delta)-v_3\sin\delta & v_1v_3(1-\cos\delta)+v_2\sin\delta \\ v_1v_2(1-\cos\delta)+v_3\sin\ delta & v_2^2(1-\cos\delta)+\cos\delta & v_2v_3(1-\cos\delta)-v_1\sin\delta \\ v_1v_3(1-\cos\delta)-v_2\sin\delta & v_2v_3(1-\cos\delta)+v_1\sin\delta & v_3^2(1-\cos\delta)+\cos\delta \end{pmatrix}}$$

Bei einer Drehung um eine der Koordinatenachsen ist festgelegt, dass der Blickwinkel zum Ursprung von der positiven Richtung aus zu wählen ist. Dann ist im Gegenuhrzeigersinn (positive Richtung) zu drehen.



Drehen wir z.B. um die x-Achse, so ist $x = x'$ und wir können eine z-dimensionale Drehung in der Hauptebene Σ_z betrachten.



Mit

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

wird

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ z' &= y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{aligned}$$

also

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Beispiel 52. *Punkt $P(4/3/2)$ wird mit $60°$ um die x-Achse gedreht.*

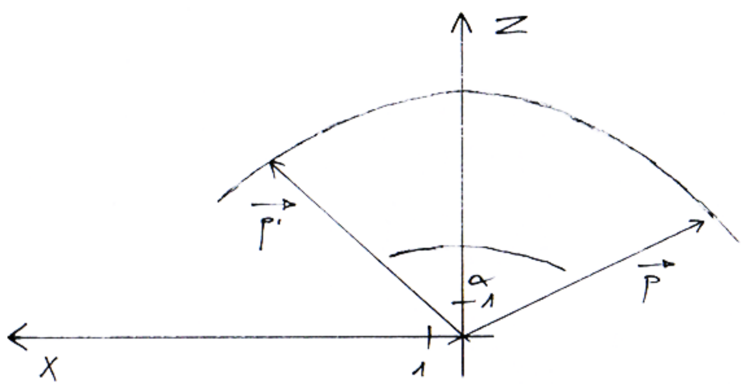
$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60° & -\sin 60° \\ 0 & \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

wird

$$\vec{p}' = D_x \cdot \vec{p}$$

also $P'(4/1-\sqrt{3}/\sqrt{3}+1)$.

Drehen wir um die y-Achse,



so haben wir ein Linkssystem erhalten. Also müssen wir mit $-\alpha$ drehen, was

$$\begin{aligned} x' &= x\cos-\alpha + z(\sin-\alpha) \\ y' &= y \\ z' &= x\sin-\alpha + z\cos-\alpha \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + z\sin\alpha \\ y' &= y \\ z' &= -x\sin\alpha + z\cos\alpha \end{aligned}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Drehen wir um die z-Achse

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.8 Gleichungssysteme 2

5.8.1 Inhomogenes Gleichungssysteme

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen.

$$\left|\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = bn \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = bn \end{matrix}\right|$$

was wir mit Hilfe von Vektoren und Matrizen als

$$Ax = B$$

schreiben können. x heisst dann der Lösungsvektor.

Definition 33. *Ist $Ax = B$ und $B = 0$, so heisst das Gleichungssystem homogen, im anderen Falle inhomogen.*

Zum Lösen eines Gleichungssystems kennen wir 3 Möglichkeiten:

1. Cramersche Regel: Braucht die Determinanten D_{x1}, D_{x2}, etc. und D.
2. Mit Matrizen: $Ax = B \rightarrow x = A^{-1}B$ und für das Berechnen von A^{-1} brauchen wir $Det(A)$
3. Gauss-Algorithmus: Addieren wir ein Vielfaches einer Zahl zu einer anderen Zeile, so bleibt die Lösungsmenge die gleiche.

5.9 Determinanten

Definition 34. *Unter einer n-**reihigen Determinante** verstehen wir eine bestimmte Funktion von n^2 Variablen, für die wir*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{vmatrix}$$

*schreiben. Die Variablen $a_1, \dots, k_n$ heissen **Elemente** der Determinante und $a_1, b_2, c_3 \dots k_n$ heisst **Hauptdiagonale**.*
Die n-reihige Determinante ist definiert durch die Rekursion :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{vmatrix} :=$$

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ k_1 & k_3 & \dots & k_n \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n-1} a_n \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} \end{vmatrix}$$

Beispiel 53. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 = 2$$

Eigenschaften von Determinanten

1. Werden in einer Determinante zwei Zeilen vertauscht, so ändert ihr Wert das Vorzeichen
2. Eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen hat den Wert Null
3. Wenn in einer Determinante sämtliche Elemente einer Zeile Null sind, so hat die Determinante den Wert Null
4. Multiplizieren wir alle Elemente einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist der Wert der neuen Determinante gleich dem λ-fachen der ursprünglichen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn wir zu einer Zeile ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile addieren:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \lambda a_1 & c_2 + \lambda a_2 & c_3 + \lambda a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Definition 35. *Spiegeln wir die Elemente einer Determinante D an der Hauptdiagonalen, so erhalten wir die* ***transponierte Determinante*** *D^T.*

Satz : Eine Determinante ist gleich ihrer Transponierten.
Beweis: mit vollständiger Induktion nach der Zeilenzahl. Damit ist auch gezeigt, dass die oben aufgeführten Eigenschaften ebenso für Kolonnen gelten.

Satz : Eine Determinante, die oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen lauter Nullen aufweist, ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen.

Beweis : $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ c_2 & c_3 & 0 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \cdot \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\, b_2\, c_3\, d_4$

Diese Eigenschaft von Determinanten erlaubt es uns, zusammen mit Eigenschaft (5), das Berechnen von Determinanten zu vereinfachen. Wir addieren einfach passende Vielfache zu einer Kolonne oder Zeile, so dass wir schlussendlich eine Determinanten erhalten, die ober- oder unterhalb der Hauptdiagonalen lauter Nullen aufweist. Dies lässt sich natürlich auch mit dem Gauss'schen Algorithmus bewerkstelligen.

Beispiel 54. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ *(Addition der 1. zur 4. Kolonne)*

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ *(Addition der 1. zur 3. Kolonne)*

$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ *(Subtraktion der 4. von der 1. Zeile)*

$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ *(Subtraktion der 3. von der 1. Zeile)*

$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ *(Subtraktion des Dreifachen der 2. von der 1. Zeile)*

$= -4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = -16$

5.10 Gauss Algorithmus

Grundlegend ist die Überlegung, dass das Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer aneren Zeile immer noch diesselbe Lösung ergibt.

$$\left|\begin{array}{l} \text{x + 3y + 2z = 2} \\ \text{2x + y +3z = -1} \\ \text{2x -y -2z = -3} \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Mit $(x/y/z) \in \mathbb{R}^3$
wählen wir (2)+(3)

$$4x + z = -4(a)$$

und (1)+3(3)

$$7x - 4z = -7(b)$$

Nun 4(a)+(b)

$$23x = -23$$

$$\underline{x = -1}$$

in (a)

$$-4 + z = -4$$

$$\underline{z = 0}$$

in (2)

$$-2 + y = -1$$

$$\underline{y = 1}$$

so wird

$$L = \{-1/1/0\}$$

dh.

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben also das Gleichungssystem zu

$$\left|\begin{array}{c} x + 3y + 2z = 2 \\ 4x + z = -4 \\ x - 1?????? \end{array}\right|$$

umgeformt und damit die gewünschte Matrix

$$A^x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten.
Die Umformunegen lassen sich auch direkt aus der augmentierten (erweiterte) Koeffizientematrix umgeformt und damit die gewünschte Matrix

$$(A/B) := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & |2 \\ 2 & 1 & 3 & |-1 \\ 2 & -1 & -2 & |-3 \end{pmatrix}$$

machen.

Programme zum lösen von Gleichungsystemen verlangen die augm. Matrix.

5.11 Homogene Gleichungssysteme

In $Ax = B$ ist nun $B = \vec{0}$ wie zum Beispiel

$$\begin{vmatrix} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y = 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{vmatrix}$$

Jedes homogene Gleichungssystem besitzt die triviale Lösung

$$x = 0, y = 0, z = 0, \mathrm{dh.} x = \vec{0}$$

Gibt es noch andere Lösungen?
Also muss das System unendlich - viele Lösungen besitzen.
Dann muss also

$$D = 0 \ \underline{\text{und}} \ D_x = 0$$

sein.
Wir müssen also D berechnen.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= 1 + 8 + 8 - 4 - 4 - 4 = 5$$

Also besitzt das System nur die triviale Lösung.

Bei

$$\begin{array}{l|l} \text{x + 2y + z = 0} & (1) \\ \text{5x + 3y -2z = 0} & (2) \\ \text{3x - y - 4z = 0} & (3) \end{array}$$

Ist

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= -12 - 12 - 5 + 40 - 2 - 9$$
$$= 0$$

Also besitzt das System unendlich viele Lösungen.

Mit dem Gaussalgoritmus wird
2(1) + (2)

$$\begin{aligned} 7x + 7y &= 0 \\ x + y &= 0(a) \end{aligned}$$

4(1)+(3)

$$7x + 7x = 0(b)$$

also sind

$$(1/-1), (2/-2) \dots (-7/7) \dots$$

Lösungen.

also

$$x = -y$$

in (1)

$$\begin{aligned} -y + 2y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ z &= -y \end{aligned}$$

Damit wird

$$(-y/y/-y) \quad \text{für} \quad y \in \mathbb{R}$$

eine Lösung.

Dafür schreiben wir

$$x = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

eine Lösung.
Dafür schrieben wir

Beispiel 55.

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + 3 - z = 0 \\ 4x + 9y + 2z = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 & 4 & 9 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= 12 - 12 + 36 - 6 + 18 - 48 = 0$$

(1)-(2)

$$x + 5z = 0(a)$$

3(1)-(3)

$$\begin{aligned} 2x + 10z &= 0 \\ x + 5z &= 0(b) \end{aligned}$$

also

$$x = -5z$$

in (2)

$$\begin{aligned} -5z + 3y - z &= 0 \\ -6z + 3y &= 0 \\ 3y &= 6z \\ y &= 2z \end{aligned}$$

ist

$$z = \beta$$

so wird

$$x = -5\beta \text{ und } y = 2\beta$$

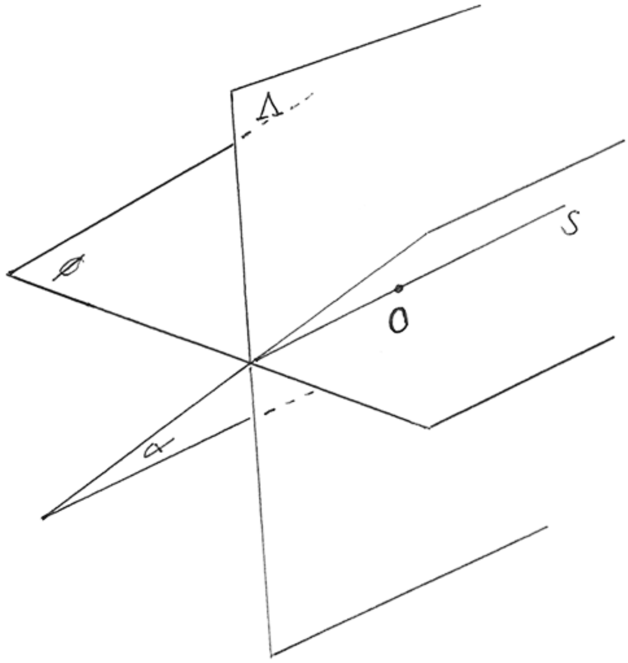
also ist

$$x = \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$$

der Lösungsvektor.

Überlegen wir geometrisch, so ist jede der Gleichungen des Gleichungssystems, die Gleichung einer (Hyper-) Ebene durch den Ursprung.
Existieren beliebeig viele Lösungen, so kann entweder

- Ein Ebenenbüschel



- oder eine Schnittgerade (wenn 2 der 3 Ebenen identisch sind)
- oder eine Ebene (wenn alle 3 Ebenen identisch sind)

existieren.

Beispiel 56. *1.* $\left|\begin{array}{l} 4x - y + z = 3 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ 4x + 4y - 2z = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

(3) ist ein vielfaches von (2), also sind dies die Gleichungen derselbenn Ebene. Damit ist die Schnittgerade der 2 Ebenen (1) und (2) die Lösung des Systems.

Mit

$$y = \sigma$$

wird

$$\left|\begin{array}{l} 4x - \sigma + z = 3 \\ 2x + 2\sigma - z = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

(a)+(b)

$$\begin{aligned} 6x + \sigma &= 4 \\ 6x &= 4 - \sigma \\ x &= \frac{2}{3} - \frac{x}{6} \end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}-\frac{\sigma}{3}+2\sigma-z &= 1\\ 4-\sigma+6\sigma-3z &= 3\\ 5\sigma+1 &= 3z\\ z &= \frac{1}{3}+\frac{5}{3}\sigma\end{aligned}$$

also

$$x = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\ 1\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}, \sigma\in\mathbb{R}$$

2.

$$\left|\begin{array}{l} x - 2y + z = 0\\ 2x - y - z = 0\\ x + y - 2z = 0\end{array}\right| \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 0\\ x + 3 - z = 0\\ 4x + 9y + 2z = 0\end{array}\right| \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= 2+2+2-8+1+1 = 0$$

Keine der Gleichungen ist ein vielfaches einer anderen. Also bilden die 3 Ebenen ein Ebenenbüschel und die gemeinsame Schnittgerade ist die Lösung des Systems. Ist $x=\alpha$, so wird

$$\begin{aligned}\alpha-2y+z &= 0\\ 2\alpha-y-z &= 0\end{aligned}$$

Addiert:

$$\begin{aligned}3\alpha-3y &= 0\\ y &= \alpha\end{aligned}$$

eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned}\alpha-2\alpha+z &= 0\\ z &= \alpha\end{aligned}$$

Wir müssen nicht noch (1) und (3) oder (2) und (3) betrachten, da wir wissen, dass die Schnittgerade zu allen 3 Ebenen gehört. Also ist

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \alpha \\ z &= \alpha \end{aligned}$$

denn

$$s : \vec{p} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3.\quad\left|\begin{array}{l} 8w\text{-}5x\text{+}7y\text{+}6z = 0 \\ w\text{-}2x\text{+}y\text{+}3z\text{=}0 \\ 5w\text{+}2x\text{+}y\text{-}z\text{=}0 \\ w\text{-}3x\text{+}4y\text{+}z\text{=}0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

Ist $D = 0$? Die Regel von Sarrus ist nicht anwendbar und das Berechnen von D führt zu einer Umformung, so dass Oberhalb und Unterhalb der Hauptdiagonale lauter 0 entstehen. Dies machen wir aber auch mit dem Gauss-Algorithmus beim Lösen eines Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} (1) - 2(2) : 6w - x + 5y &= 0|(I) \\ (2) + 3(3) : 16w + 4x + 4y &= 0|(II) \\ (3) + (4) : 6w - x + 5y &= 0|(III) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(I) + (II) : 40w + 24y &= 0 \\ 5w + 3y &= 0|(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) + 4(III) : 40w + 24y &= 0 \\ 5w + 3y &= 0|(b) \end{aligned}$$

Das System hat nicht nur die triviale Lösung, da a und b gleich sind. Somit ist eine Variable als Parameter wählbar, z.B. das w. Ist w=β, so wird $y = -\frac{5\beta}{3}$.

Mit (I) wird

$$\begin{aligned} 6\beta - x + 5(-\frac{5\beta}{3}) &= 0 \\ 18\beta - 3x - 25\beta &= 0 \\ -7\beta &= 3x \\ x &= -\frac{7\beta}{3} \end{aligned}$$

In (4):

$$\begin{aligned} \beta + 7\beta - \frac{20\beta}{3} + z &= 0 \\ 24\beta - 20\beta + 3z &= 0 \\ 3z &= -4\beta \\ z &= -\frac{4\beta}{3} \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ \to x &= \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5.11.1 Inverse Matrix

Das Berechnen einer inversen Matrix mit Hilfe der allgemeinen Lösung ist kompliziert. Wir haben aber überlegt, dass eine quadratische Matrix M zu einer linearen Abbindung

$$\vec{p'} = M\vec{p}$$

gehört. Die inverse Matrix M^{-1} gehört dann zur Umkehrabbildung

$$\vec{p} = M^{-1} \cdot \vec{p'}$$

Also berechnen wir M^{-1} am einfachsten mit dem Bestimmen der Vorschrift der Umkehrabbildung. Ist

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

, so lautet die Abbildungsvorschrift

$$\left| \begin{array}{l} \text{x'=2x-y+z} \\ \text{y'=x-y+2z} \\ \text{z'=2x-z} \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

und wir suchen x,y und z.

$$\begin{aligned} (1)-(2): x'-y' &= x-z \\ (3): z' &= 2x-z \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x'-y'-z' &= -x \\ x &= -x'+y'+z' \end{aligned}$$

in (3):

$$\begin{aligned} z' &= 2(-x'+y'+z')-z \\ z' &= -2x'+2y'+2z'-z \\ z &= -2x'+2y'+z' \end{aligned}$$

in (1):

$$\begin{aligned} x' &= -2x'+2y'+2z'-y-2x'+2y'+z' \\ y &= -5x'+4y'+3z' \end{aligned}$$

Somit ist die Vorschrift für die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} x &= -x'+y'+z' \\ y &= -5x'+4y'+3z' \\ z &= -2x'+2y'+z' \end{aligned}$$

und damit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.11.2 Eigenvektoren und Eigenwert

Definition 36. *Ein Eigenvektor einer Abbildung ist ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dessen Richtung durch die Abbildung nicht verändert wird. Seine Länge darf sich ändern.*

Wir fragen uns, ob es bei einer linearen Abbildung, Vektoren $\vec{a} \neq \vec{o}$ gibt, die in einem Vielfachen $\lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$ von sich selbst abgebildet werden.

Ist die Abbildung bestimmt durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

so muss also

$$\lambda\vec{a} = M\vec{a}$$

sein. Somit ist

$$\begin{aligned} \lambda E\vec{a} &= M\vec{a} \\ \vec{o} &= M\vec{a} - \lambda E\vec{a} \\ \vec{o} &= (M - \lambda E)\vec{a} \end{aligned}$$

Mit M wird

$$\begin{aligned} M - \lambda E &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ist

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

so wird

$$(M - \lambda E)\vec{a} = \begin{pmatrix} (2-\lambda)a_1 + 5a_2 \\ 4_a 1 + (3-\lambda)a_2 \end{pmatrix}$$

Mit

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist somit

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda)a_1 - 5a_2 = 0 \\ 4a_1 + (3-\lambda)a_2 = 0 \end{vmatrix}$$

Dies ist ein homogenes Gleichugssystem und es besitzt nur dann von $\vec{o}$ verschiedene Lösungen,

wenn

$$D = 0$$

ist (Siehe Kapitel Homogene Gleichunssysteme)
Also mit

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda) - 20 \\ &= 6 + \lambda^2 - 5\lambda - 20 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 14 \end{aligned}$$

muss

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

sein

somit

$$\begin{aligned} (\lambda - 7)(\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda_1 &= 7, \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

Definition 37. *Ist A eine (n,n) - Matrix,*
$\vec{v} \neq \vec{o}$ *und* $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$*,*
so

- *heisst* $P(\lambda) := Det(A - \lambda E)$
  das charakteristische Polynom von A
- *heissen die nichttrivialen Lösungen von* $P(\lambda) = 0$
  die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_4$ *der Matrix A*
- *heissen* $\lambda\vec{v}$ *die Eigenvektoren (eigenvectors) der Matrix A.*

Im Beispiel sind also $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -2$ die Eigenwerte von M.

Mit λ_1 wird

$$\left| \begin{array}{l} -5a_1 + 5a_2 = 0 \\ 4a_1 - 4a_2 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

und mit (1) wird

$$a_1 = a_2$$

und ebenso wird

$$a_1 = a_2$$

mit (2)

Also sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \ldots$$

die Eigenvektoren. Dafür schreiben wir

$$\vec{a} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Mit λ_2 wird

$$\left| \begin{array}{c} 4a_1 + 5a_2 = 0 \\ 4a_1 + 5a_2 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} (3) \\ (4) \end{array}$$

also

$$a_1 = -\frac{5}{4} a_2$$

z.Bsp.

$$\vec{a} = \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}, \ldots$$

wofür wir

$$\vec{a} = \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

schreiben.

Es sind also

$$\vec{a_1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{a_2} = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

die Eigenvektoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Häufig werden die normierten Vektoren als Resultat angegeben

$$\vec{a}_{norm} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

also

$$\vec{a_1} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$\vec{a_2} = \frac{\alpha}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Beispiel 57. *Suche die Eigenwerte und die Eigenvektoren von* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Mit

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wird

$$\left| \begin{matrix} (3-\lambda)x + 4y = 0 \\ x + (3-\lambda)y = 0 \end{matrix} \right|$$

und

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2 - 4 \\ &= 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

somit

$$0 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

also sind die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 5 \end{aligned}$$

Mit λ_1 *wird*

$$\left| \begin{matrix} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{matrix} \right|$$

also

$$x = -2y$$

und so

$$\vec{v_1} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Mit

$$\lambda_2 = 5$$

wird

$$\left| \begin{matrix} -2x + 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{matrix} \right|$$

also

$$\begin{aligned} x &= 2y \\ \vec{v_2} &= \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

Kapitel 6

Komplexe Zahlen

In $\mathbb{R}$ sind nicht alle Gleichungen lösbar. Wie z.Bsp.

$$x^2 = -2$$

Deshalb erweitern wir den Zahlenbereich mit i

Definition 38. *Die Zahl i mit $i^2 = -1$ heisst imaginäre Einheit.*

So wird nun

$$\begin{aligned} x^2 &= -2 = 2i^2 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2i^2} = \pm\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Um

$$x^2 + 8x + 16 = -9$$

zu lösen, formen wir nun zu

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &= 9i^2 \\ x+4 &= \pm 3i \\ x_1 &= -4+3i \\ x_2 &= -4-3i \end{aligned}$$

Definition 39. *Die Menge*

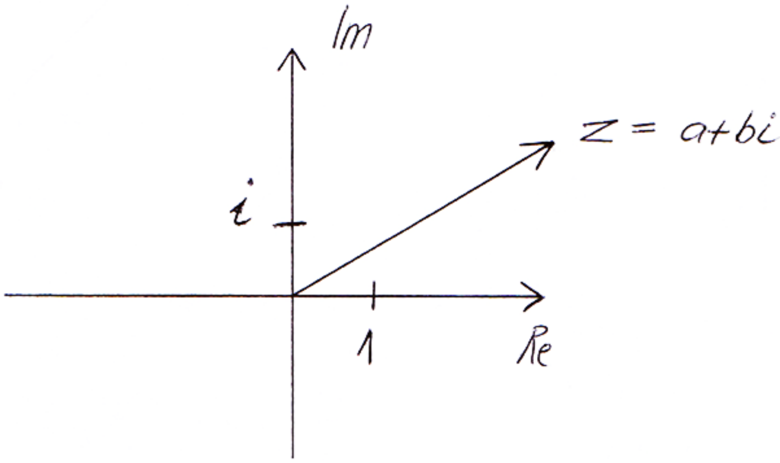
$$\mathbb{C} := \{z | z = a + bi, a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R}\}$$

heisst Menge der komplexen Zahlen

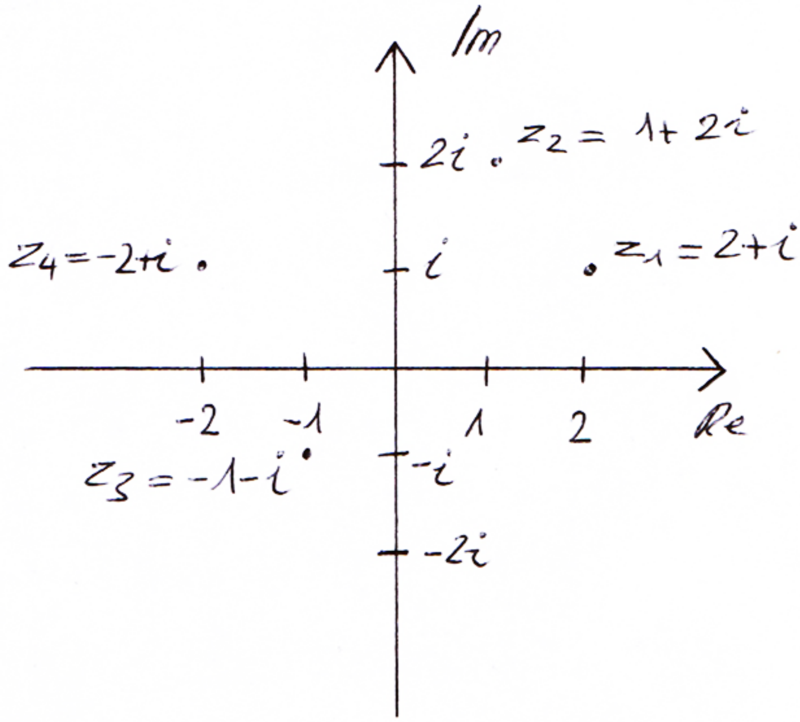
Die Zahl

$$z = a + bi$$

besitzt den Realteil Re(z) $=$ a und den Imaginaärteil Im(z) $=$ b.



Komplexe Zahlen werden in der Gausschen Zahlenebene (C.F.Gauss, 1777 bis 1855, Göttingen) dargestellt.



Beispiel 58. *1.*

$$\begin{aligned}
i^3 &= ?\\
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1)i = -i\\
\\
i^4 &= ?\\
i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1\\
\\
i^5 &= ?\\
i^5 &= i^4 \cdot i = (1)i = i\\
\\
i^6 &= ?\\
i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1\\
\\
i^7 &= ?\\
i^7 &= i^6 \cdot i = -i\\
\\
i^8 &= ?\\
i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
z^2 + 2z + 3 &= 0\\
z^2 + 2z &= -3 / \textit{ wir ergänzen quadratisch + 1}\\
z^2 + 2z + 1 = -2 &\\
(z+1)^2 &= -2\\
(z+1)^2 &= 2i^2\\
z + 1 &= \pm\sqrt{2}i\\
z_1 &= -1 + \sqrt{2}i, z_2 = -1 - \sqrt{2}i
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
z^3 + 1 &= 0\\
z^3 &= -1\\
z &= -1
\end{aligned}$$

Der <u>Fundamantalsatz der Algebra</u> sagt, dass jede Gleichung n. Grades, im Komplexen n Lösungen besitzt.

Also muss $z^3 + 1$ in Faktoren zerlegbar sein.

$$\begin{aligned}
z^3 + 1 &= (z+1)(z^2 + az + 1)\\
&= z^3 + az^2 + z + z^2 + az + 1\\
&= z^3 + 1 + (a+1)z^2 + (a+1)z
\end{aligned}$$

also muss

$$a = -1$$

sein!

somit

$$(z^3+1) = (z+1)(z^2-z+1)$$

analog

$$(z^3-1) = (z-1)(z^2+z+1)$$

aus

$$z^3+1 = 0$$

folgt

$$(z+1)(z^2-z+1) = 0$$

also

$$z+1=0 \quad \vee \quad z^2-z+1=0$$

wir finden

$$z_1 = -1$$

weiter finden wir

$$\begin{aligned} z^2-z+\frac{1}{4} &= -1+\frac{1}{4} \\ (z-\frac{1}{2})^2 &= -\frac{3}{4} \\ (z-\frac{1}{2})^2 &= \frac{3i^2}{4} \\ z-\frac{1}{2} &= \pm\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ z_3 &= \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} z^4 &= 1 \\ z^2 &= \pm 1 \\ z^2 = 1 \quad &\vee \quad z^2 = -1 \end{aligned}$$

wir finden

$$z = \pm 1$$

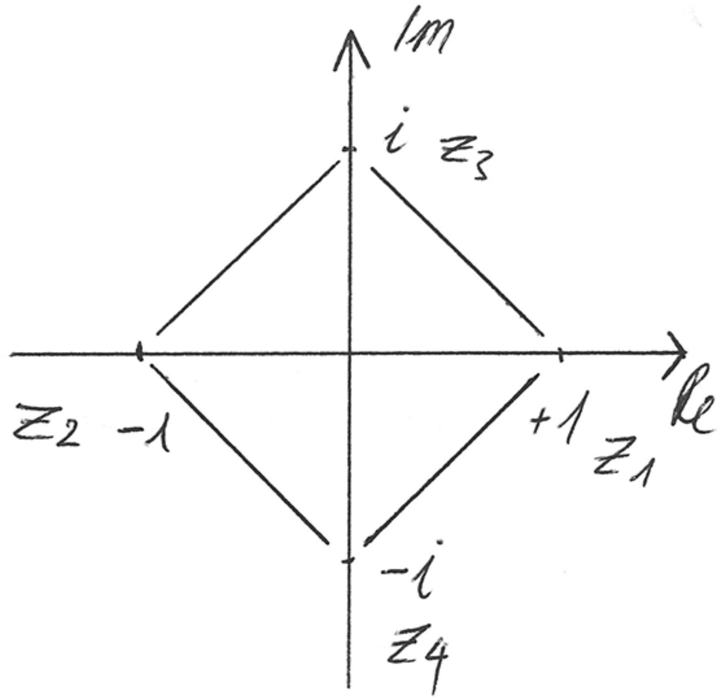
und

$$\begin{aligned} z^2 &= i^2 \\ z &= \pm i \end{aligned}$$

Wir haben also die Lösungen

$$z_1 = 1, z_2 = -1 z_3 = i, z_4 = -i$$

gefunden.



6.1 Division

Dividieren wir zwei komplexe Zahlen

$$\frac{3+2i}{4-3i}$$

so wollen wir das resultat in der Form $a+bi$.
Da

$$(x-y)(x+y) = x^2-y^2$$

erweitern wir mit $4+3i$:

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i} &= \frac{12+17i+6i^2}{4^2-(3i)^2}\\ &= \frac{12-6+17i}{16+9}\\ &= \frac{6+17i}{25}\\ &= \frac{6}{25}+\frac{17i}{25}\end{aligned}$$

Definition 40. *Ist*

$$z = a+bi$$

so heisst

$$\overline{z} : a-bi$$

die zu z <u>konjugiert komplexe</u> Zahl.

Beim Dividieren müssen wir also mit der konj.-komplexen Zahl den Nenner erweitern.

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} &= \frac{2+i-6i^2}{4-9i^2}\\ &= \frac{2+i+6}{4+9}\\ &= \frac{8+i}{13}\\ &= \frac{8}{13}+\frac{i}{13}\end{aligned}$$

Um

$$2z+i\overline{z} = 5i-11, z\in\mathbb{C}$$

zu lösen, schreiben wir

$$z = a+bi$$

und

$$\overline{z} = a-bi$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
2(a+bi)+i(a-bi) &= 5i-11 \\
2a+2bi+ai+b &= 5i-11 \\
2a+2b+i(a+b) &= 5i-11
\end{aligned}$$

also muss

$$\left|\begin{array}{l} 2a + b = -11 \\ a + 2b = 5 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

sein.

2(1)-(2):

$$\begin{aligned}
3a &= -27 \\
a &= -9
\end{aligned}$$

in (1):

$$\begin{aligned}
-18+b &= 11 \\
b &= 7
\end{aligned}$$

Also ist

$$z = -9+7i$$

6.2 Potenzieren

Sollen wir $(1-i)^{10}$ berechnen, so ist das Berechnen mit dem pascalschen Dreieck mühsam. Wir suchen deshalb einen anderen Weg.
Eine komplexe Zahl z ist auch bestimmt, wenn

- der Betrag $|z|$
- das Argument α

bekannt sind.

Es ist

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha &= arg z = \arctan(\frac{b}{a}) \end{aligned}$$

Ist

$$z = 2+2i$$

so ist

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ arg z &= \arctan(\frac{2}{2}) = \arctan 1 \\ &= 45° \end{aligned}$$

Ist

$$z = \sqrt{3} - i$$

so ist

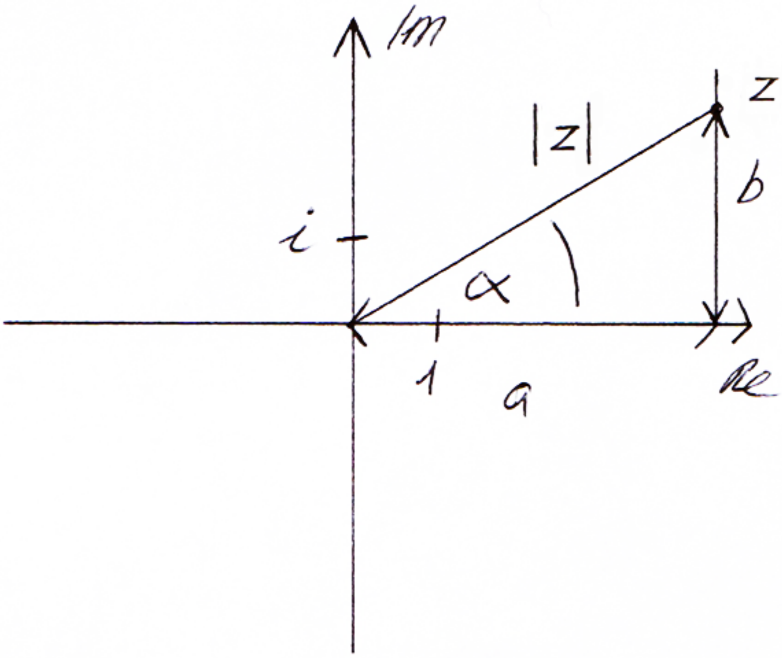
$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \\ arg z &= \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &= \arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ \rightarrow \alpha_1 &= -30° + 180° = 150° \\ \alpha_2 &= 150° + 180° = 330° \end{aligned}$$

z ist im 4. Quadranten, also ist

$$arg z = 330°$$

Definition 41. *Ist z durch arg z und |z| bestimmt, so nennen wir dies die Polarform von z.*

Kennen wir die Polarform, so



ist der Realteil

$$a = |z| \cos \alpha$$

und der imaginärteil

$$b = |z| \sin \alpha$$

also

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= |z| \cos \alpha + i|z| \sin \alpha \\ &= |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= |z| cis\alpha \end{aligned}$$

So ist

$$2 + 2i = 2\sqrt{2} cis 45^\circ$$
$$\sqrt{3} - i = 2 cis 330^\circ$$

Wir nennen $|z|cis\alpha$ auch die Polarform von z.
Ist

$$z = |z|cis\alpha, w = |w|cis\beta$$

so wird

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)|w|(\cos\beta + i\sin\beta) \\
&= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta \\
&= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\
&= |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))
\end{aligned}$$

also

$$\boxed{|z|cis\alpha \cdot |w|cis\beta = |z||w|cis(\alpha+\beta)}$$

Nun ist also

$$\begin{aligned}
z^n &= (|z|cis\alpha)^n \\
&= |z|^n cis(\alpha + \alpha + \ldots + \alpha) \\
&= |z|^n cis(n\alpha)
\end{aligned}$$

Damit wird

$$(1-i)^{10}$$

mit

$$\begin{aligned}
z &= 1 - i \to |z| = \sqrt{2} \\
\alpha &= \arctan(-1) \\
\alpha_1 &= 135° \\
\alpha_2 &= 315°
\end{aligned}$$

also

$$z = \sqrt{2}cis315°$$

und so

$$\begin{aligned}
z^{10} &= (\sqrt{2})^{10} cis3150° \\
z^{10} &= 32cis(3150° \mod 360°) \\
&= 32cis270° \\
&= 32(\cos 270° + i\sin 270°) \\
&= 32(0 + i(-1)) \\
&= \underline{-32i}
\end{aligned}$$

Beispiel 59.

$$(1+\sqrt{3}i)^6$$

Mit

$$z = \sqrt{1+\sqrt{3}i}$$

wird

$$\begin{aligned}
|z| &= 2 \\
\alpha &= \arctan(\sqrt{3}) \\
\alpha_1 &= 60° \\
\alpha_2 &= 240°
\end{aligned}$$

also

$$z = 2cis60^\circ$$

und so

$$\begin{aligned} z^6 &= 2^6 cis360^\circ \\ &= 64(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) \\ &= 64(1 + i \cdot 0) \\ &= \underline{64} \end{aligned}$$

Kapitel 7

Kurzreferenz

7.1 Begriffe

erstprojizierende Gerade	Eine Gerade mit nur einem Spurpunkt
Spurpunkt	Schnittpunkt einer Geraden mit einer Fläche
Hauptgeraden	Eine Gerade, die parallel zu einer Rissebene liegt
Rissebene	Ebene welceh auf einer Achse liegt π_1 z Achse, π_2 y Achse, π_3 x Achse
Fusspunkt	Wo Gerade eine andere Gerade trifft
Parametergleichung	Definiert vektorielle Strukturen, besitzt einen Trägerpunkt/Aufhängepunkt A, Richtumgsvektor $\vec{v}$ und einen Parameter bspw. λ
Projiizierend	Eine Ebene, die Senkrecht zu einer Rissebene steht
Koordinatengleichung	Definiert was ein Punkt erfüllen muss um in dieser Ebene zu liegen.
Hauptebene	Ebene die parallel zu einer Rissebene liegt.
Richtungsvektor	Gibt Richtung einer Geraden an
Symmetriebene	
Koinzidenzebene	Spiegelung der Symmetriebene
Schnittgerade	Menge aller Schnittpunkte zweier Ebenen
Spurgerade/Spuren	Die Schnittgerade einer Ebene mit der Rissebene
Normalenvektor (Senkrechten, Lot)	Ein Vektor der Senkrecht zu einer Ebene steht
Einheitsmatrix	In der Einheitsmatrix sind nur 1en auf der Hauptdiagonalen
Nullmatrix	Alle Werte der Matrix sind 0, Neutrales Element
singuläre Matrix	eine nicht reguläre Matrix
reguläre Matrix	Eine quadratische Matrix M, $Det(M) \neq 0$
Fundamentalsatz der Algebra	Der Fundamantalsatz der Algebra sagt, das jede Gleichung n. Grades, im Komplexen n Lösungen besitzt.

Kapitel 8

Anhang

8.1 Griechisches Alphabet

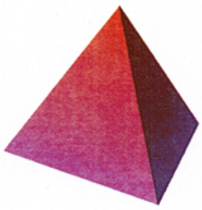
A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	Mü	Υ	υ	Ypsilon
E	ε	Epsilon	N	ν	Nü	Φ	φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	ϑ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

8.2 Polyeder

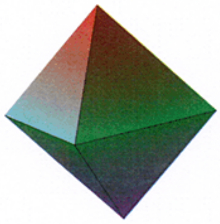
Axonometrien (Schrägbilder) der

R E G U L Ä R E N   P O L Y E D E R

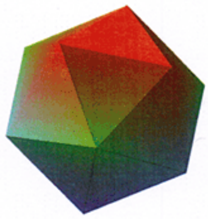
(PLATONISCHE KÖRPER)



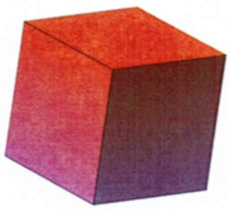
Tetraeder



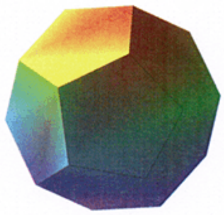
Oktaeder



Ikosaeder



Hexaeder



Dodekaeder

Stellen wir uns die Frage, wieviele reguläre Polygone (Vielecke) mit drei und mehr Eckpunkten es im zweidimensionalen Raum gibt, so sind dies beliebig viele; die Frage der Konstruierbarkeit ist dann ein anderes - hier nicht erläutertes - Problem. Suchen wir entsprechend im dreidimensionalen Raum reguläre konvexe Körper, so finden wir nur deren fünf.

Diese 5 regulären Polyeder waren schon den Griechen der Antike bekannt und wurden von *Platon (von Athen, Schüler des Sokrates, ca. 428 bis 347 v. Chr.)* den damals bekannten vier Elementen

Feuer (Tetraeder), Luft (Oktaeder), Erde (Hexaeder), Wasser (Ikosaeder)

zugeordnet; dem später entdeckten Dodekaeder entsprach dann eben die **quinta essenzia**.

MLR

8.3 Sinus, Cosinus und Tangens Tabelle

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
sin Merkhilfe	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert