Berechnung von Dirichletzellen kristallographischer Gruppen mittels endlicher Wortlänge

Lukas Schnelle

Grüppchen 2025

In Zusammenarbeit mit
Alice C. Niemeyer und Reymond Akpanya

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^{φ} für $m \in M$.

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^{φ} für $m \in M$.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^{φ} für $m \in M$.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann bezeichnen wir mit

(i) $\langle v, w \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt,

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^φ für $m \in M$.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann bezeichnen wir mit

(i) $\langle v, w \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt,

(ii) $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Euklidische Norm,

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^φ für $m \in M$.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann bezeichnen wir mit

(i) $\langle v, w \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt,

(ii) $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Euklidische Norm,

(iii) $d(v, w) := ||v - w||$ die Euklidische Distanz,

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^{φ} für $m \in M$.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann bezeichnen wir mit

(i) $\langle v, w \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt,

(ii) $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Euklidische Norm,

(iii) $d(v, w) := ||v - w||$ die Euklidische Distanz,

(iv) $B_r(v) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid d(v, u) < r\}$ den offenen r-Ball und mit

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^φ für $m \in M$.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann bezeichnen wir mit

(i) $\langle v, w \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt,

(ii) $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Euklidische Norm,

(iii) $d(v, w) := ||v - w||$ die Euklidische Distanz,

(iv) $B_r(v) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid d(v, u) < r\}$ den offenen r-Ball und mit

(v) $\overline{B_r(v)} := \{u \in \mathbb{R}^n \mid d(v, u) \leq r\}$ den abgeschlossenen r-Ball.

In diesem Vortrag operieren wir von rechts, also z.B. ein Gruppenelement $\varphi \in G$ einer Gruppe G die auf einer Menge M operiert, wird bezeichnet als m^{φ} für $m \in M$.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann bezeichnen wir mit

(i) $\langle v, w \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt,

(ii) $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die Euklidische Norm,

(iii) $d(v, w) := ||v - w||$ die Euklidische Distanz,

(iv) $B_r(v) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid d(v, u) < r\}$ den offenen r-Ball und mit

(v) $\overline{B_r(v)} := \{u \in \mathbb{R}^n \mid d(v, u) \leq r\}$ den abgeschlossenen r-Ball.

Kurz: Unsere Welt ist eine Euklidische.

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir φ also *Isometrie*, falls für alle $v, w \in R^n$ gilt, dass:

$$d(v^\varphi, w^\varphi) = d(v, w).$$

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir φ also *Isometrie*, falls für alle $v, w \in R^n$ gilt, dass:

$$d(v^\varphi, w^\varphi) = d(v, w).$$

Die Menge aller Isometrien zu einem festen n bezeichnen wir mit $E(n)$.

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir φ also *Isometrie*, falls für alle $v, w \in R^n$ gilt, dass:

$$d(v^\varphi, w^\varphi) = d(v, w).$$

Die Menge aller Isometrien zu einem festen n bezeichnen wir mit $E(n)$.

Proposition

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist die Menge aller Isometrien $E(n)$ eine Gruppe mit der Konkatenation von Abbildungen als Gruppenoperation. Diese Gruppe bezeichnen wir als die *euklidische Gruppe*. Die Gruppe operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch die Anwendung eines Gruppenelements als Abbildung.

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann heißt F ein *Fundamentalbereich* von Γ falls

(i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F^{\gamma} = \mathbb{R}^n$

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann heißt F ein *Fundamentalbereich* von Γ falls

(i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F^\gamma = \mathbb{R}^n$

(ii) es gibt ein Vertretersystem $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von den Bahnen der Operation von Γ auf $\mathbb{R}^n$, sodass

$$F^\circ \subseteq V \subseteq F.$$

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann heißt F ein *Fundamentalbereich* von Γ falls

(i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F^\gamma = \mathbb{R}^n$

(ii) es gibt ein Vertretersystem $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von den Bahnen der Operation von Γ auf $\mathbb{R}^n$, sodass

$$F^\circ \subseteq V \subseteq F.$$

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe. Dann heißt Γ kristallographische Gruppe falls Γ eine diskrete Untergruppe ist und ein kompakter Fundamentalbereich von Γ existiert.

In der Literatur werden kristallographische Gruppen (insbesondere der Dimension 3) auch als Raumgruppen bezeichnet.

TODO: Bieberbach

test

gfddsg