

Berechnung von Dirichletzellen kristallographischer Gruppen mittels endlicher Wortlänge

Lukas Schnelle

Grüppchen 2025
In Zusammenarbeit mit
Alice C. Niemeyer und Reymond Akpanya

Motivation

- ooooo

Kristallographische Gruppen

Dirichletzellen ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse

Ziel

Konstruiere eine Anordnung von gleichen Blöcken, sodass wenn ein Teil fixiert ist, alles fixiert ist.

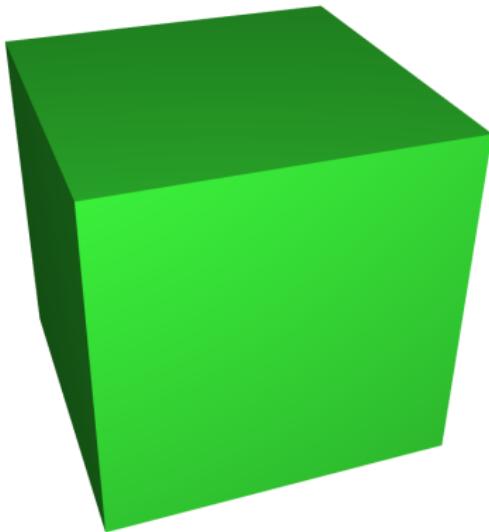
Ziel

Konstruiere eine Anordnung von gleichen Blöcken, sodass wenn ein Teil fixiert ist, alles fixiert ist.

Existenz

Gibt es solche Blöcke?

Würfel?



Motivation
oo●ooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Definition

Eine solche Anordnung heißt *topologisch verriegelnde Baugruppe*.

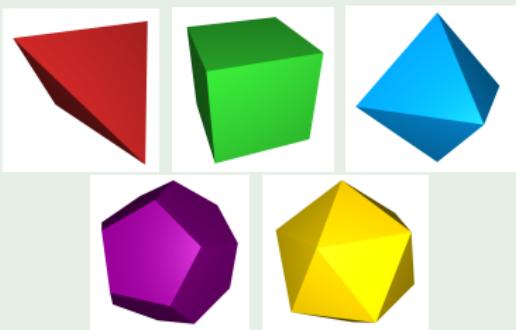
Definition

Eine solche Anordnung heißt *topologisch verriegelnde Baugruppe*.

Weitere Beispiele

Alle fünf platonischen Körper

- Tetraeder
- Hexaeder (a.k.a. Würfel)
- Oktaeder
- Dodekaeder
- Ikosaeder



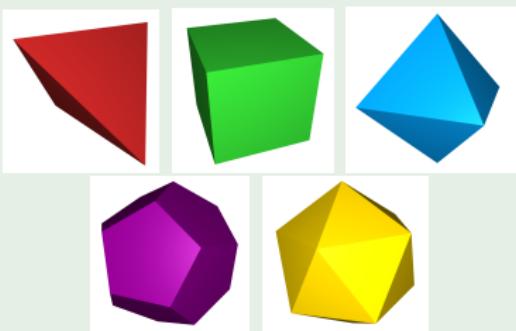
Definition

Eine solche Anordnung heißt *topologisch verriegelnde Baugruppe*.

Weitere Beispiele

Alle fünf platonischen Körper

- Tetraeder
- Hexaeder (a.k.a. Würfel)
- Oktaeder
- Dodekaeder
- Ikosaeder



Motivation

000000

Kristallographische Gruppen

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
0000000

Ergebnisse

Anwendungen

- #### ▪ Reparierbarkeit

Anwendungen

- Reparierbarkeit
 - Recyclebarkeit

Anwendungen

- Reparierbarkeit
 - Recyclebarkeit
 - Spröde Materialien d.h. Druck, aber nicht Zug aushalten können

Anwendungen

- Reparierbarkeit
 - Recyclebarkeit
 - Spröde Materialien d.h. Druck, aber nicht Zug aushalten können
 - Viele kleine Blöcke einfacher zu transportieren/herzustellen

Anwendungen

- Reparierbarkeit
 - Recyclebarkeit
 - Spröde Materialien d.h. Druck, aber nicht Zug aushalten können
 - Viele kleine Blöcke einfacher zu transportieren/herzustellen
 - Zugang relativ klein

Anwendungen

- Reparierbarkeit
 - Recyclebarkeit
 - Spröde Materialien d.h. Druck, aber nicht Zug aushalten können
 - Viele kleine Blöcke einfacher zu transportieren/herzustellen
 - Zugang relativ klein
 - Falls Klebstoffe problematisch

Historischer Kontext

Erste Interlockings in 1735 gefunden.

Motivation
oooo●o

Kristallographische Gruppen
oooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo

Historischer Kontext

Erste Interlockings in 1735 gefunden.

Wiederaufleben der Forschung durch u.a. Estrin, Dyskin, Pasternak im 21. Jahrhundert

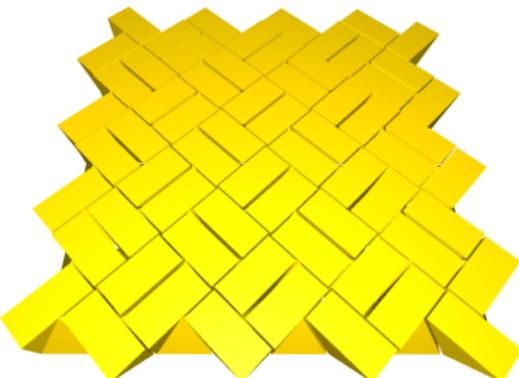
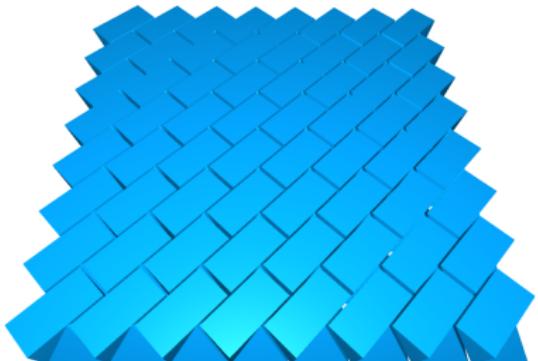
Historischer Kontext

Erste Interlockings in 1735 gefunden.

Wiederaufleben der Forschung durch u.a. Estrin, Dyskin, Pasternak im 21. Jahrhundert

Bisherige Arbeiten der Forschungsgruppe

T. Goertzen [2] hat Verfahren für Erstellung von Blöcken durch Deformation von **Fundamentalbereichen** von **kristallographischen Gruppen** erzeugt.



Motivation
ooooo●

Kristallographische Gruppen
oooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo

Ziel

Verfahren erweitern von 2D auf 3D.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
●oooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Dann $d(v, w) := \|v - w\|$ die *Euklidische Distanz*.

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Dann $d(v, w) := \|v - w\|$ die *Euklidische Distanz*.

Definition

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie*, falls $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$d(v^\varphi, w^\varphi) = d(v, w).$$

Notation

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Dann $d(v, w) := \|v - w\|$ die *Euklidische Distanz*.

Definition

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie*, falls $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$d(v^\varphi, w^\varphi) = d(v, w).$$

Weiterhin

$$E(n) := \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Isometrie}\}.$$

Alle Blöcke in einer Baugruppe stehen durch Isometrien miteinander in Verbindung.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
o●oooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo

Bemerkung

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann

- $(E(n), \circ)$ ist Gruppe, genannt *Euklidische Gruppe*,
- $E(n)$ operiert auf \mathbb{R}^n .

Bemerkung

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann

- $(E(n), \circ)$ ist Gruppe, genannt *Euklidische Gruppe*,
- $E(n)$ operiert auf \mathbb{R}^n .

Notation

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $O(n)$ die *orthogonale Gruppe*. Diese ist isomorph zur Menge der orthogonalen $n \times n$ Matrizen.

Es gilt $E(n) \cong O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. D.h. für $\varphi \in E(n)$

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_t),$$

wobei $\varphi_o \in O(n)$ orthogonaler Anteil und $\varphi_t \in \mathbb{R}^n$ translatorischer Anteil.

Motivation



Kristallographische Gruppen

Dirichletzellen ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse



Es gilt $E(n) \cong O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. D.h. für $\varphi \in E(n)$

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_t),$$

wobei $\varphi_o \in O(n)$ orthogonaler Anteil und $\varphi_t \in \mathbb{R}^n$ translatorischer Anteil.

Betrachte $v \in \mathbb{R}^n$. Dann

$$v^{(\varphi_0, \varphi_t)} = v^{\varphi_0} + \varphi_t.$$

Beispiel

Betrachte

$$p4 := \langle \rho, \tau_1, \tau_2 \rangle \leq E(n)$$

wobei

$$\rho = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

Beispiel

Betrachte

$$p4 := \langle \rho, \tau_1, \tau_2 \rangle \leq E(n)$$

wobei

$$\rho = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\tau_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

Beispiel

Betrachte

$$p4 := \langle \rho, \tau_1, \tau_2 \rangle \leq E(n)$$

wobei

$$\rho = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\tau_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\tau_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

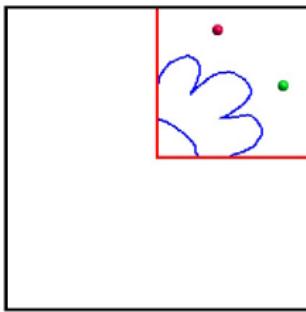
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooo●oooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo



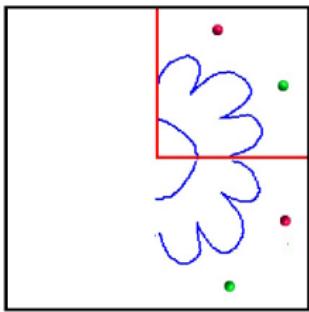
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooo●oooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo



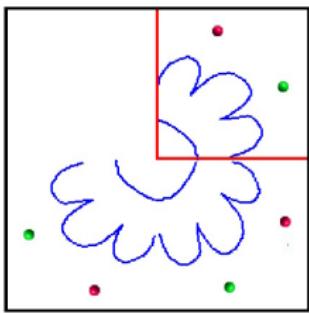
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooo●oooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo



Motivation

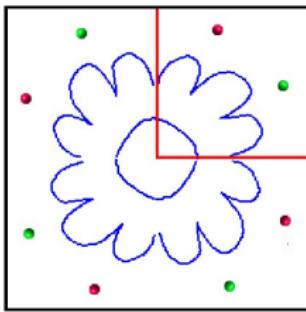


Kristallographische Gruppen

Dirichletzellen ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse



Motivation

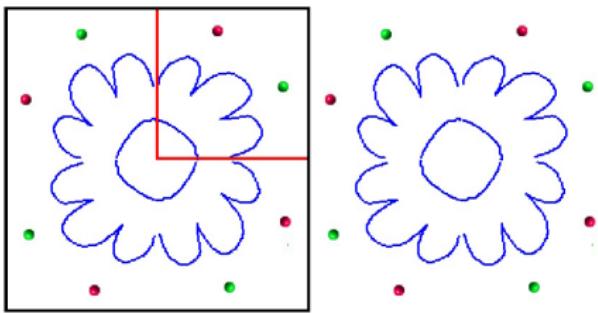


Kristallographische Gruppen

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse



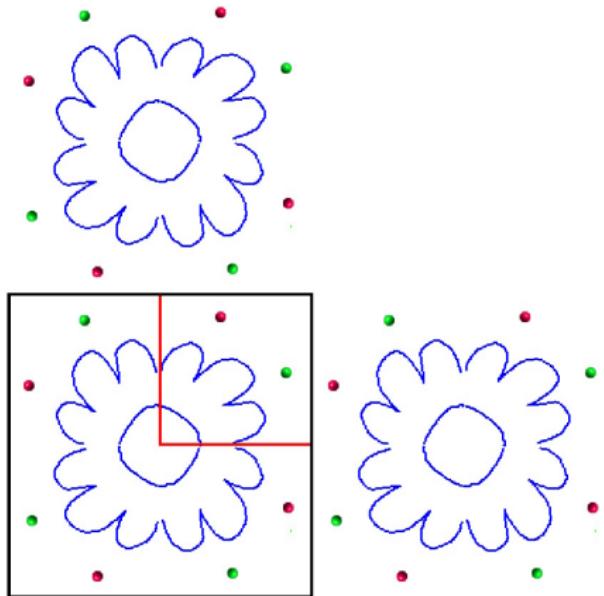
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooo●oooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo



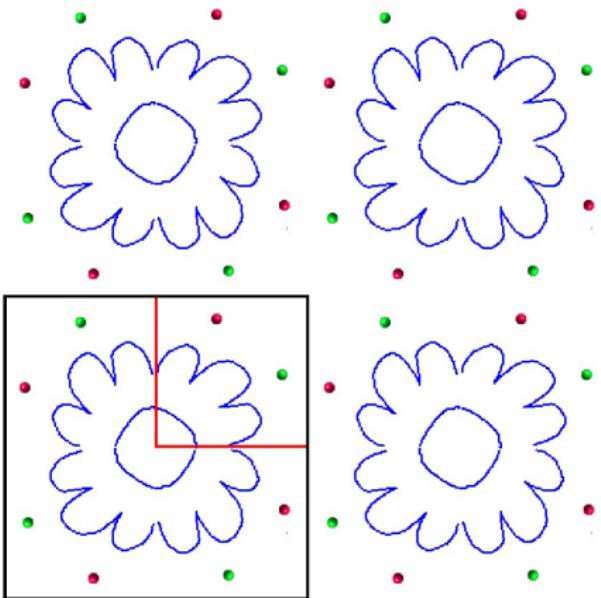
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooo●oooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo



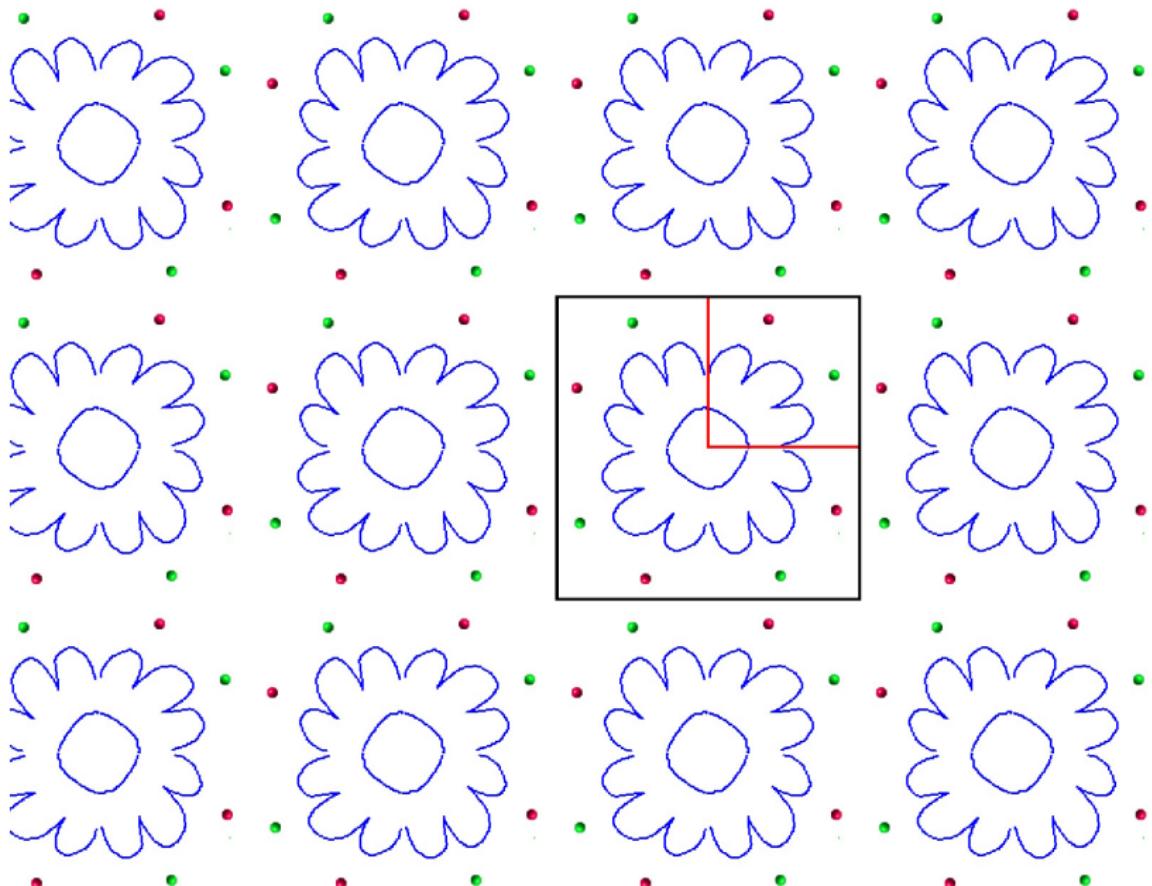
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooo●oooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo



Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooo●ooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Proposition

Sei $\Gamma \leq E(n)$. Dann wird der *Translationennormalteiler* von Γ definiert als

$$\mathcal{T}(\Gamma) := \{(\varphi_o, \varphi_t) \in \Gamma \mid \varphi_o = Id\}.$$

$\mathcal{T}(\Gamma)$ ist ein Normalteiler von Γ .

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann heißt F ein *Fundamentalbereich* von Γ falls

- (i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F^\gamma = \mathbb{R}^n$ und

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann heißt F ein *Fundamentalbereich* von Γ falls

- (i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F^\gamma = \mathbb{R}^n$ und
- (ii) es gibt ein Vertretersystem $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von den Bahnen von Γ auf \mathbb{R}^n , sodass

$$F^\circ \subseteq V \subseteq F.$$

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann heißt F ein *Fundamentalbereich* von Γ falls

- (i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F^\gamma = \mathbb{R}^n$ und
- (ii) es gibt ein Vertretersystem $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von den Bahnen von Γ auf \mathbb{R}^n , sodass

$$F^\circ \subseteq V \subseteq F.$$

Definition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine Untergruppe. Dann heißt Γ *kristallographische Gruppe* falls Γ eine diskrete Untergruppe ist und ein kompakter Fundamentalbereich von Γ existiert.

In der Literatur für $n = 3$ auch als Raumgruppen bezeichnet.

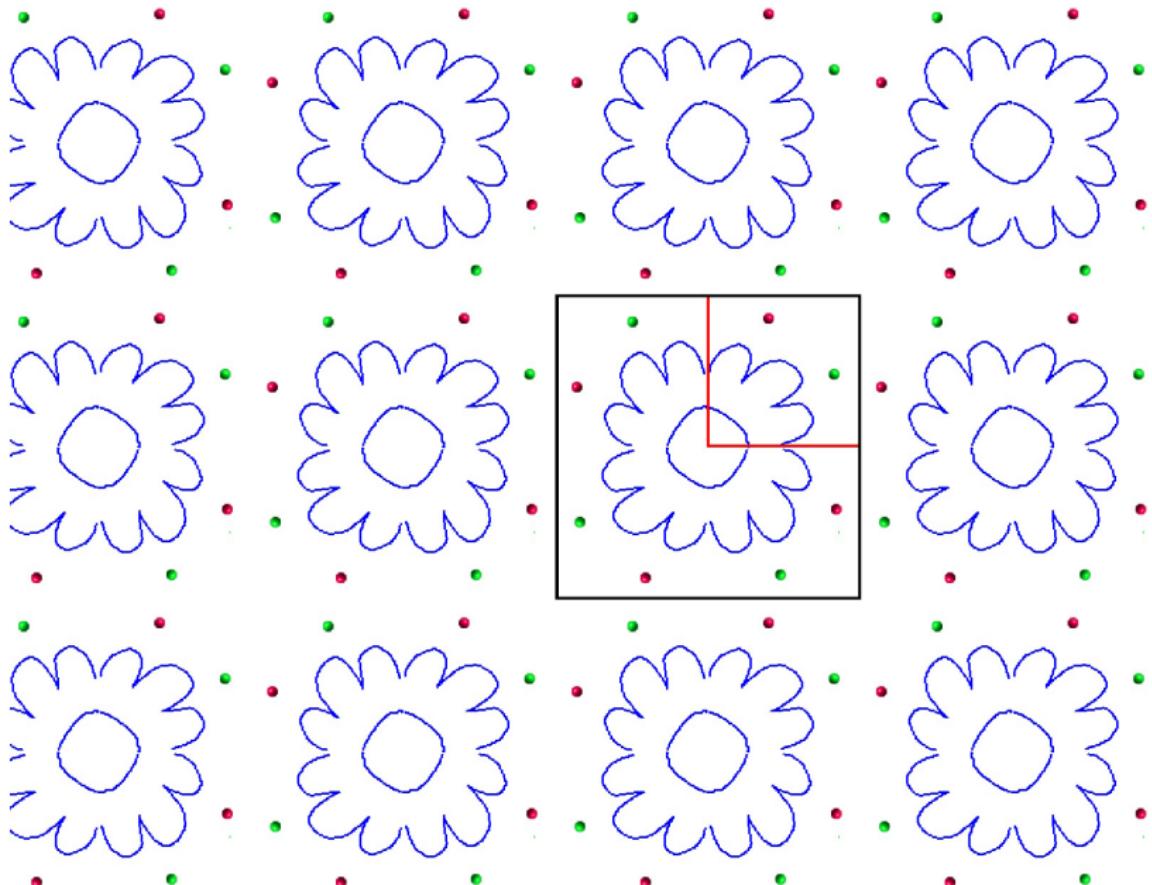
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooo●○

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo



Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooo●

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo

In 1900 hat Hilbert 23 Probleme vorgestellt, die zu diesem Zeitpunkt ungelöst waren.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooo●

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo

In 1900 hat Hilbert 23 Probleme vorgestellt, die zu diesem Zeitpunkt ungelöst waren.

18. Hilbert Problem

Gegeben n , gibt es **endlich** viele kristallographische Gruppen?

In 1900 hat Hilbert 23 Probleme vorgestellt, die zu diesem Zeitpunkt ungelöst waren.

18. Hilbert Problem

Gegeben n , gibt es **endlich** viele kristallographische Gruppen?

Bieberbachsche Sätze (1910)

Ja, z.B. für $n = 2$ gibt es 17, für $n = 3$ gibt es 230.

Für niedrige Dimensionen sind diese Gruppen bekannt, z.B.
Crystallographic Groups of Four-dimensional Space [1].

Problem

Gegeben eine kristallographische Gruppe $\Gamma \leq E(n)$ durch ein endliches Erzeugendensystem. Wie kann ein Fundamentalbereich berechnet werden?

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
●○○

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Problem

Gegeben eine kristallographische Gruppe $\Gamma \leq E(n)$ durch ein endliches Erzeugendensystem. Wie kann ein Fundamentalbereich berechnet werden?

Antwort

Hier: Algorithmus für Dirichletzellen

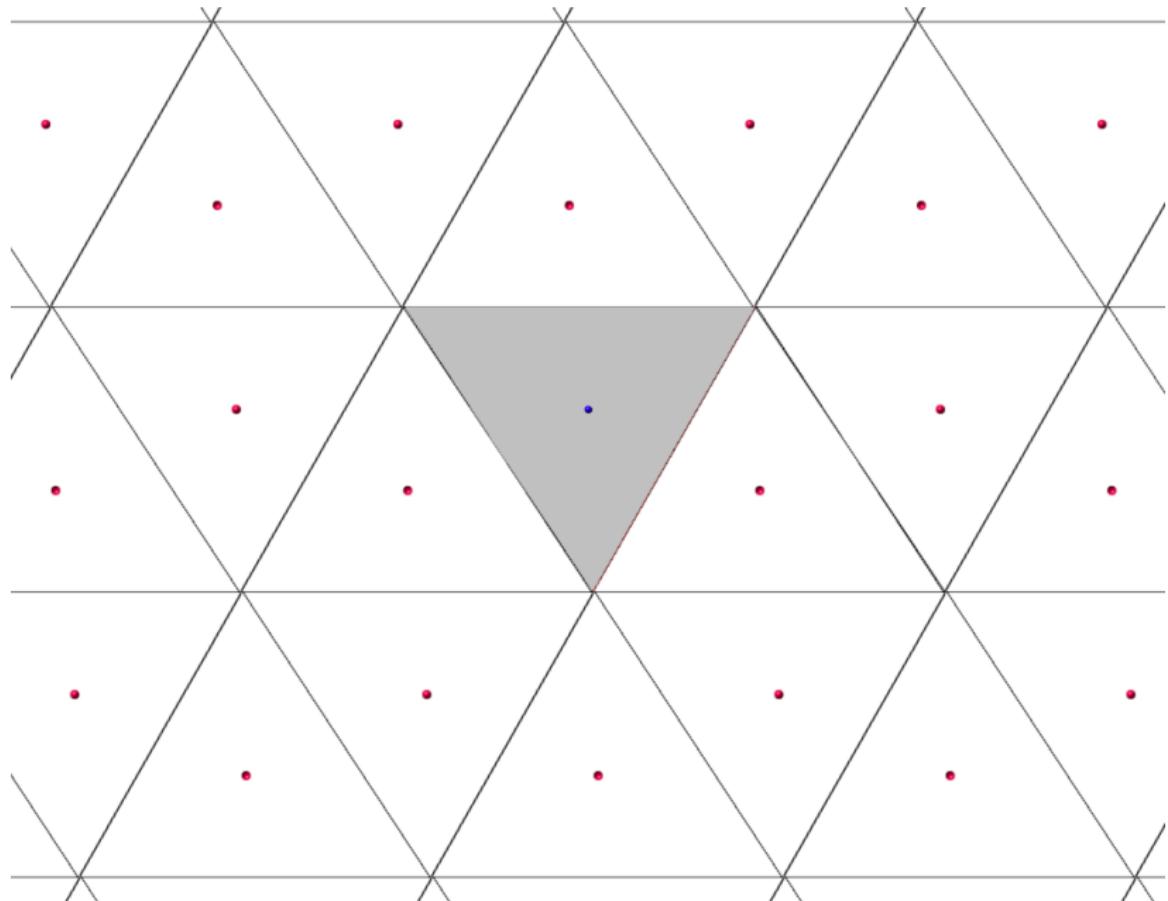
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
oo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo



Theorem (Dirichlet)

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine kristallographische Gruppe und $u \in \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage. Dann ist die *Dirichletzelle*

$$D(u, u^\Gamma) := \bigcap_{v \in u^\Gamma, v \neq u} \{w \in \mathbb{R}^n \mid d(u, w) \leq d(v, w)\}.$$

ein Fundamentalbereich von Γ .

Motivation



Kristallographische Gruppen

Dirichletzellen ooo

Wortlänge

Ergebnisse



Erinnerung:

$$D(u, u^\Gamma) := \bigcap_{w \in u^\Gamma, w \neq u} \{w \in \mathbb{R}^n \mid d(u, w) \leq d(v, w)\}$$

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
●oooooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Erinnerung:

$$D(u, u^\Gamma) := \bigcap_{w \in u^\Gamma, w \neq u} \{w \in \mathbb{R}^n \mid d(u, w) \leq d(v, w)\}$$

Problem

u^Γ ist unendlich.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
o●ooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Idee

Halbräume die von zwei weit entfernten Punkten aufgespannt werden, haben weniger Einfluss als Halbräume, die von nahe beieinander liegenden Punkten aufgespannt werden.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
o●ooooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Idee

Halbräume die von zwei weit entfernten Punkten aufgespannt werden, haben weniger Einfluss als Halbräume, die von nahe beieinander liegenden Punkten aufgespannt werden.

Ansatz

Betrachte nur Isometrien, die einen Punkt nicht "zu weit weg" operieren.

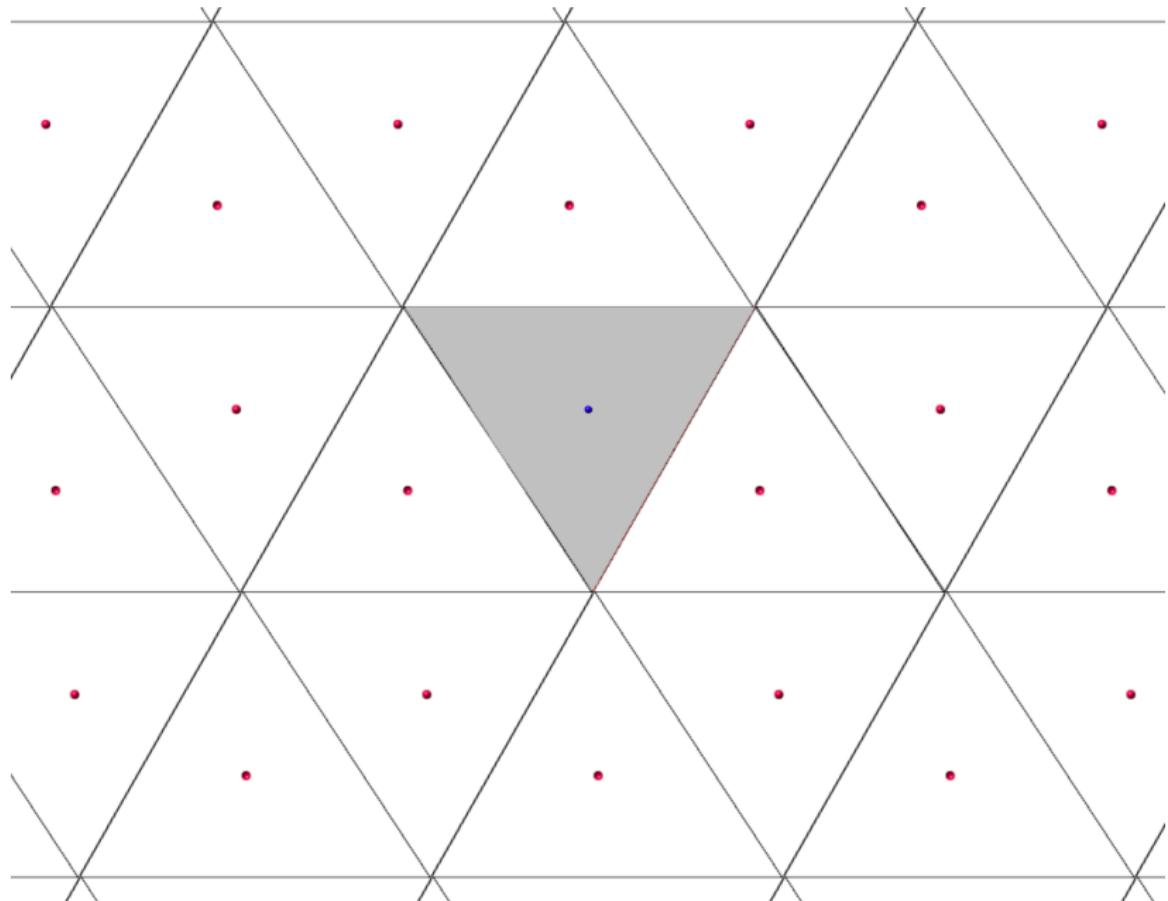
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oo●oooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo



Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooo●oooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Theorem

Sei $\langle X \rangle = \Gamma \leq E(n)$ kristallographische Gruppe und $u \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $A \in \mathbb{N}$ sodass die Dirichletzelle $D(u, u^\Gamma)$ berechnet werden kann, als Schnitt der Halbräume $H^+(u, u^\gamma)$ für $\gamma \in \Gamma$ Wörter der Länge maximal A .

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooo●ooo

Ergebnisse
oooooooooooooooooooo

Proposition

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine kristallographische Gruppe. Die Menge

$$\mathcal{L}(\Gamma) := \{\varphi_t \mid \varphi \in \mathcal{T}(\Gamma)\}$$

enthält n linear unabhängige Vektoren.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooo

Ergebnisse
oooooooooooo

Theorem

Sei $\Gamma \leq E(n)$ eine kristallographische Gruppe mit Fundamentalbereich F und Translationszelle C . Dann gilt

$$\text{vol}(F) = \frac{\text{vol}(C)}{|\Gamma/\mathcal{T}(\Gamma)|}.$$

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo●

Ergebnisse
oooooooooooo

Algorithm 4.2: Berechnung einer Dirichletzelle

Data: eine kristallographische Gruppe $\langle X \rangle = \Gamma \leq E(n)$ und
 $u \in \mathbb{R}^n$, in allgemeiner Lage.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
ooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooo●

Ergebnisse
oooooooooooo

Algorithm 4.3: Berechnung einer Dirichletzelle

Data: eine kristallographische Gruppe $\langle X \rangle = \Gamma \leq E(n)$ und

$u \in \mathbb{R}^n$, in allgemeiner Lage.

Result: Ein Fundamentalbereich.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
ooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
oooooo●

Ergebnisse
oooooooooooo

Algorithm 4.4: Berechnung einer Dirichletzelle

Data: eine kristallographische Gruppe $\langle X \rangle = \Gamma \leq E(n)$ und
 $u \in \mathbb{R}^n$, in allgemeiner Lage.

Result: Ein Fundamentalbereich.

vol \leftarrow Volumen von Fundamentalbereichen von Γ ;

cand \leftarrow Schnitt über Halbräume Wortänge 1;

Algorithm 4.5: Berechnung einer Dirichletzelle

Data: eine kristallographische Gruppe $\langle X \rangle = \Gamma \leq E(n)$ und
 $u \in \mathbb{R}^n$, in allgemeiner Lage.

Result: Ein Fundamentalbereich.

vol \leftarrow Volumen von Fundamentalbereichen von Γ ;

cand \leftarrow Schnitt über Halbräume Wortänge 1;

while *vol(cand)* $>$ *vol* **do**

 | *cand* \leftarrow Schnitt über Halbräume Wortänge +1;

end

Algorithm 4.6: Berechnung einer Dirichletzelle

Data: eine kristallographische Gruppe $\langle X \rangle = \Gamma \leq E(n)$ und
 $u \in \mathbb{R}^n$, in allgemeiner Lage.

Result: Ein Fundamentalbereich.

vol \leftarrow Volumen von Fundamentalbereichen von Γ ;

cand \leftarrow Schnitt über Halbräume Wortänge 1;

while *vol(cand)* $>$ *vol* **do**

 | *cand* \leftarrow Schnitt über Halbräume Wortänge +1;

end

return *cand*;

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
●oooooooooooo

Bisher: zwei-dimensional.

Erweiterung

Alle Aussagen gelten für $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir Zugang zu den 230 drei-dimensionalen kristallographischen Gruppen.

Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
o●oooooooooooo

Vorgehen

- (i) Generiere Fundamentalbereich einer kristallographischen Gruppe
- (ii) Deformiere diesen Fundamentalbereich
- (iii) Prüfe ob topologisches Interlocking vorliegt

Motivation
oooooo

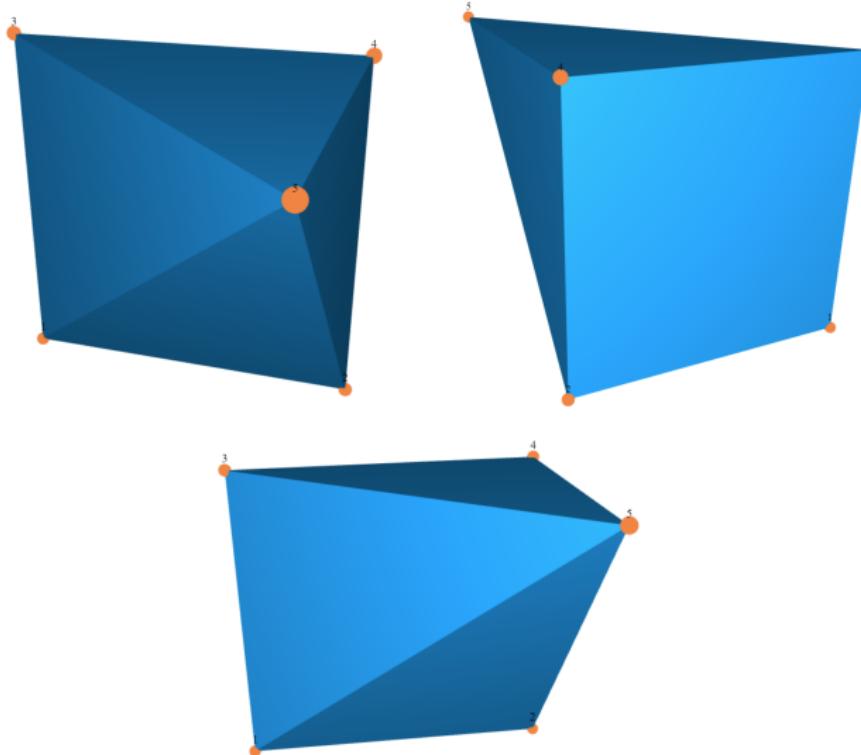
Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oo●oooooooooooo

Fundamentalbereich der Gruppe 146



Motivation
oooooo

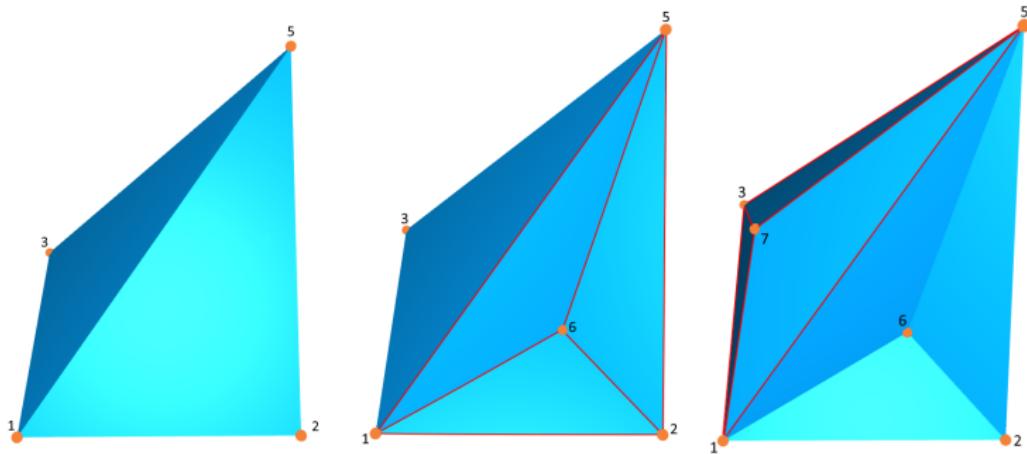
Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooo●oooooooooooo

Deformationen kompatibel mit Gruppe



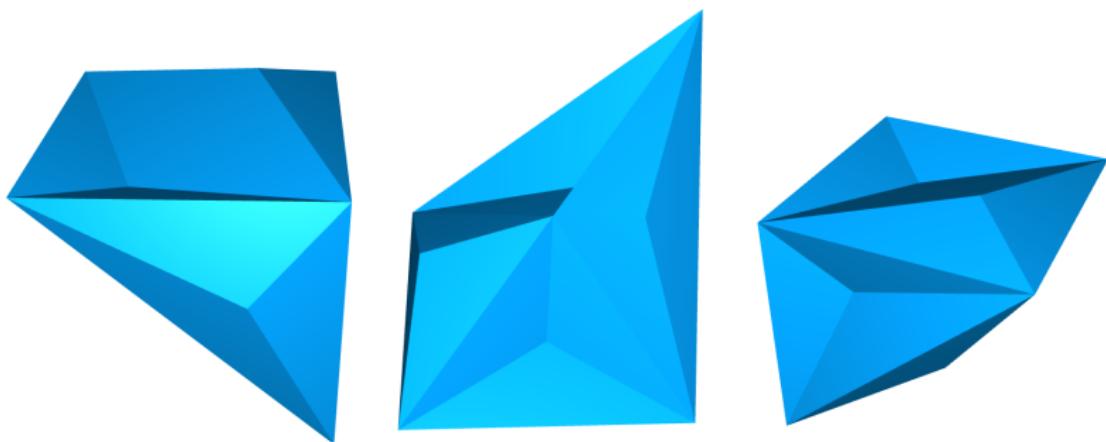
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooo●oooooooooooo



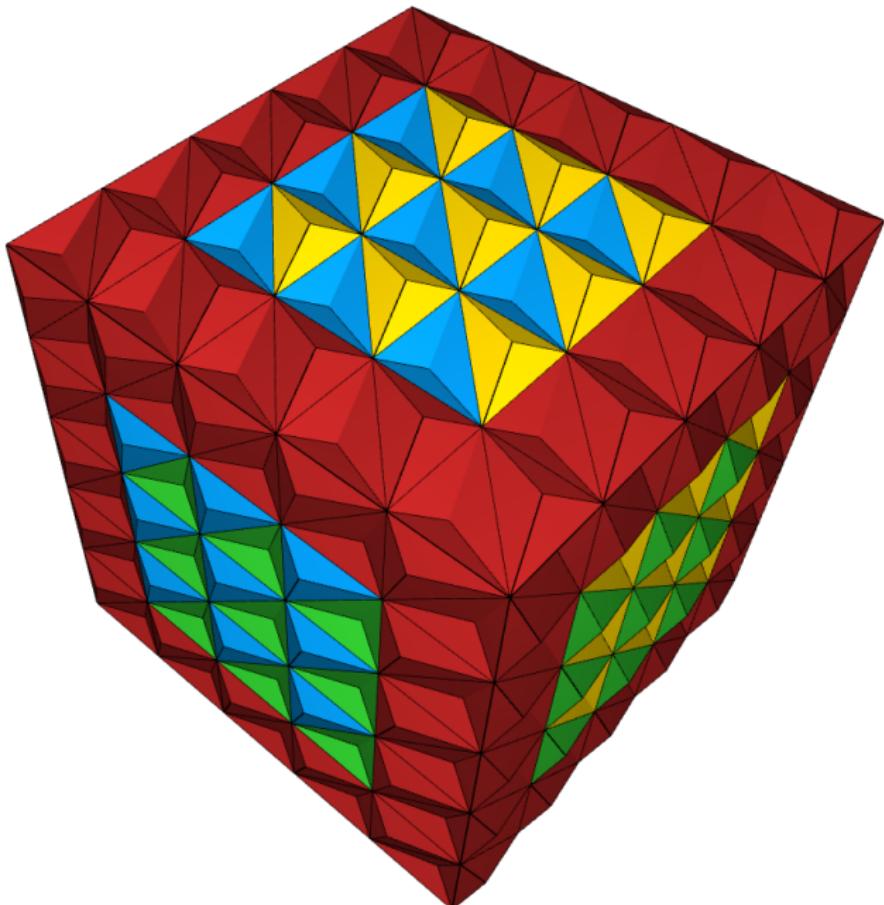
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooo●ooooooo



Motivation



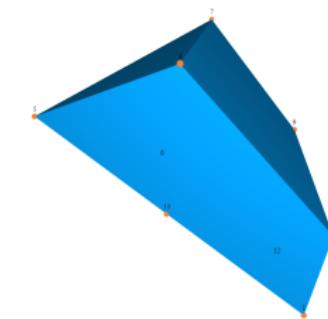
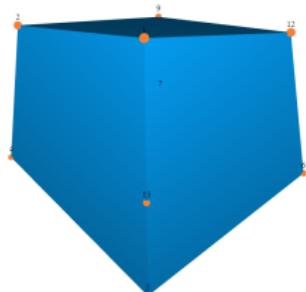
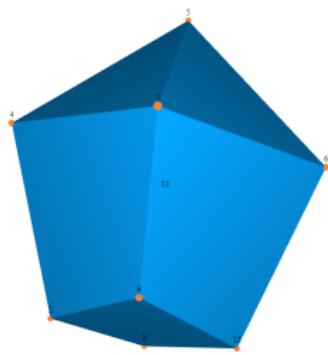
Kristallographische Gruppen

Dirichletzellen ooo

Wortlänge
oooooooo

Ergebnisse

Fundamentalbereich der Gruppe 195



Motivation
oooooo

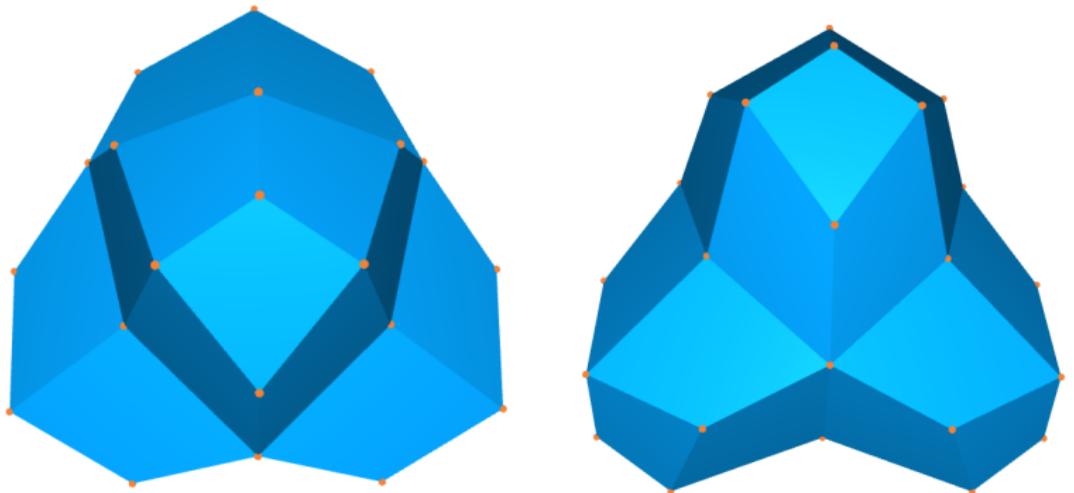
Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooo●oooooooo

Translationszelle



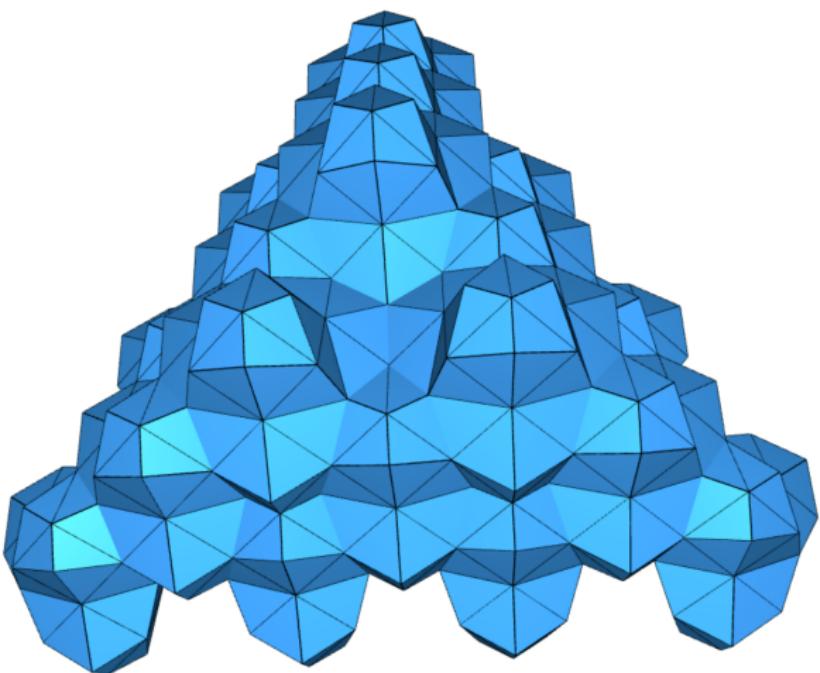
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooo●oooo



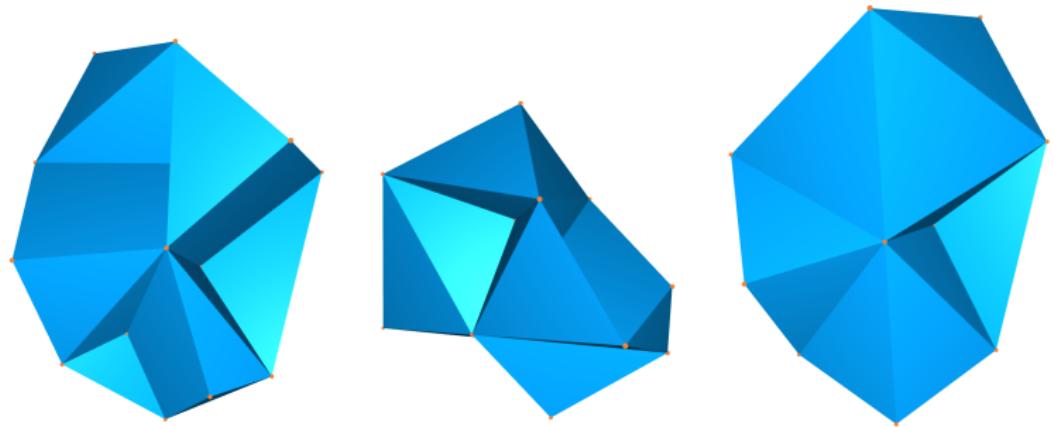
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo●ooo



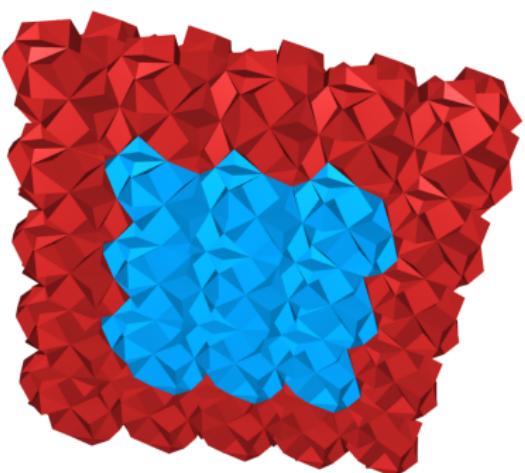
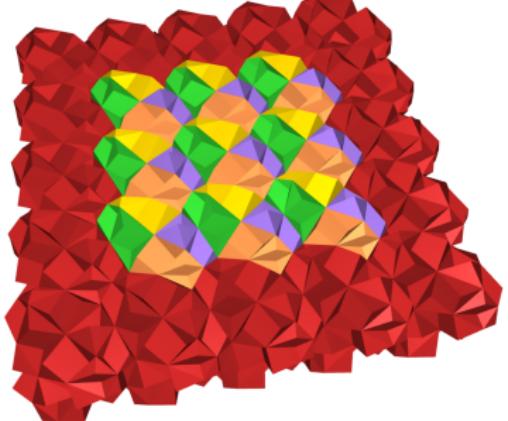
Motivation
oooooo

Kristallographische Gruppen
oooooooooooo

Dirichletzellen
ooo

Wortlänge
ooooooo

Ergebnisse
oooooooooooo●oo



Offene Themen

- Verbesserung/Nachweis der (optimimalität) der Schranken
- Allgemeine Verfügbarkeit in einer Software
- Charakterisierung wann topologische Interlockings entstehen
- Charakterisierung welche topologische Interlockings "gut" sind

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit
Gibt es Fragen?

Referenzen:

- [1] H Brown et al. *Crystallographic Groups of Four-dimensional Space*. John Wiley & Sons Inc, 1978. ISBN: 978-0471030959.
- [2] Tom Goertzen. “Construction of simplicial surfaces with given geometric constraints”. Dissertation. RWTH Aachen University, 2024. DOI: [10.18154/RWTH-2024-08038](https://doi.org/10.18154/RWTH-2024-08038).