Homologiegruppen von Einheitengruppen von Ordnungen

Sebastian Schönnenbeck

Masterarbeit im Fach Mathematik

RWTH Aachen
Lehrstuhl D für Mathematik
Prof. Dr. Gabriele Nebe

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Homologietheorie für Gruppen entstand in den vierziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts als Analogon zur bereits rund 50 Jahre zuvor entwickelten Homologietheorie für topologische Räume. Die zugrunde liegende Idee ist dabei, eine gegebene Gruppe G anhand einer Reihe von Funktoren von der Kategorie der G-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen zu untersuchen. Auf diese Art und Weise können dann gewisse Isomorphieinvarianten der Gruppe, beispielsweise ihre Kommutatorfaktorgruppe G/G', gewonnen werden.

Für endliche Gruppen ist die Homologietheorie algorithmisch gut handhabbar und es existieren seit einigen Jahren implementierte Algorithmen, welche die gewünschten Invarianten in diesem Fall bestimmen können. Für Gruppen von unendlicher Ordnung stellt sich die Situation ungleich komplizierter dar und es gibt zum heutigen Tag keine allgemein anwendbaren Algorithmen, die dieses Problem lösen.

Das Ziel dieser Arbeit ist nun für eine gewisse Klasse von unendlichen Gruppen, namentlich die Einheitengruppen von Maximalordnungen in einfachen rationalen Algebren, einen Algorithmus zur Bestimmung der Homologiegruppen anzugeben und diesen an einigen rechnerisch zugänglichen Beispielen anzuwenden. Das Vorgehen basiert dabei auf der Herkunft der Homologietheorie aus der Topologie und besteht daher zu einem großen Teil in der Konstruktion eines topologischen Raums, auf dem die betrachtete Gruppe in geeigneter Weise operiert.

Die ersten drei Kapitel der Arbeit widmen sich zunächst den nötigen Grundlagen der Kategorientheorie, homologischen Algebra und algebraischen Topologie. Die beiden darauf folgenden Kapitel beschäftigen sich dann mit der Konstruktion des bereits erwähnten geeigneten topologischen Raums sowie dessen geometrischer und kombinatorischer Struktur. Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Formulierung des gewünschten Algorithmus. Der sich anschließende Abschnitt greift dann diesen Algorithmus auf und wir bestimmen mit seiner Hilfe Homologiegruppen von Einheitengruppen von Ordnungen über imaginärquadratischen Zahlkörpern und Divisionsalgebren vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$. Die Arbeit endet mit einigen Erläuterungen zur Implementierung des Algorithmus.

Mein besonderer Dank gilt meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. Gabriele Nebe, welche die Bearbeitung dieses Themas anregte und während der Anfertigung der Arbeit stets für Fragen offen war. Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Mathieu Dutour Sikirić bedanken, welcher einige hilfreiche Anstöße zur Implementierung lieferte.

2. Kategorientheorie

In diesem Kapitel wollen wir einen kurzen Überblick über die kategorientheoretischen Konzepte und Notationen vermitteln, welche im Folgenden benötigt werden. Wir folgen zu diesem Zweck dem Vorgehen des zweiten Kapitels aus [23].

2.1. Kategorien

Definition 2.1.1 *Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ besteht aus den folgenden Bestandteilen:*

1. *Einer Klasse* $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *von Objekten.*

2. *Zu jedem Paar* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *von Objekten einer Menge* $\mathfrak{C}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ *von Morphismen von A nach B.*

3. *Einer Verknüpfung* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, C)$.

Wir betrachten $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ als verallgemeinerte Abbildung und schreiben daher auch $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$. Dabei heißt A der Definitionsbereich von f und B der Zielbereich von f.

Die Bestandteile von $\mathfrak{C}$ müssen nun die folgenden Axiome erfüllen:

1. $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A_1, B_1) \cap \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A_2, B_2) = \varnothing$, *falls nicht $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$.*

2. *Die Verknüpfung ist assoziativ, also $g(hf) = (gh)f$ für alle $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, D), h \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B, C), f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$.*

3. *Zu jedem Objekt A existiert ein Morphismus $\mathbb{1}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, A)$, sodass für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, A)$ stets $\mathbb{1}_A g = g$ und $f \mathbb{1}_A = f$ gilt.*

Beispiel 2.1.2 *Die Klasse aller Mengen zusammen mit den Abbildungen und der üblichen Komposition von Abbildungen bildet eine Kategorie, die wir auch mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen.*

Definition 2.1.3

1. *Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt invertierbar, falls $g : B \to A$ existiert mit $fg = \mathbb{1}_B$ und $gf = \mathbb{1}_A$. Offensichtlich ist g durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt und wir schreiben auch $g = f^{-1}$.*

2. *Zwei Objekte A und B heißen isomorph, falls ein invertierbarer Morphismus $f : A \to B$ existiert.*

3. *Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt Monomorphismus, falls für alle Objekte C und alle Morphismen $g, h : C \to A$ gilt: $fg = fh \Rightarrow g = h$.*

4. *Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt Epimorphismus, falls für alle Objekte C und alle Morphismen $g, h : B \to C$ gilt: $gf = hf \Rightarrow g = h$.*

Bemerkung 2.1.4

1. *Ist $f : A \to B$ invertierbar, so auch f^{-1} mit $(f^{-1})^{-1}$ und die Verknüpfung invertierbarer Morphismen ist erneut invertierbar.*

2. *Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf den Objekten.*

Definition 2.1.5 *Wir legen für den Rest dieser Arbeit die folgenden Bezeichnungen für Kategorien fest:*

1. *$\mathfrak{S}$ die Kategorie der Mengen und Abbildungen.*

2. *$\mathfrak{G}$ die Kategorie der Gruppen und Homomorphismen.*

3. *$\mathfrak{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen und Homomorphismen.*

4. *$\mathfrak{R}_1$ die Kategorie der Ringe mit Eins und Ringhomomorphismen.*

5. *$\mathfrak{M}^l_\Lambda$ zu einem Objekt Λ von $\mathfrak{R}_1$ die Kategorie der Λ-Linksmoduln und Λ- Homomorphismen.*

6. *$\mathfrak{M}^r_\Lambda$ zu einem Objekt Λ von $\mathfrak{R}_1$ die Kategorie der Λ-Rechtsmoduln und Λ- Homomorphismen.*

Beispiel 2.1.6 *In der Kategorie $\mathfrak{R}_1$ ist die natürliche Einbettung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus, aber nicht invertierbar.*

Bemerkung und Definition 2.1.7 *Es sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie.*

1. *Ein Objekt* $0 \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *heißt Nullobjekt, falls für jedes Objekt* $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *die Mengen* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,0)$ *und* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(0,A)$ *genau einelementig sind.*

2. *Nullobjekte sind bis auf Isomorphie eindeutig.*

3. *Existiert in* $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *ein Nullobjekt, so heißt* $\mathfrak{C}$ *auch Kategorie mit Nullobjekt.*

4. *Ist* $\mathfrak{C}$ *eine Kategorie mit Nullobjekt, so existiert zu* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *ein eindeutig bestimmter Morphismus* $A \to 0 \to B$*, der sogenannte Nullmorphismus.*

Beispiel 2.1.8 *In der Kategorie* $\mathfrak{G}$ *der Gruppen und Homomorphismen ist jede einelementige Gruppe ein Nullobjekt.*

Definition 2.1.9 *Es sei* $\mathfrak{C}$ *eine Kategorie. Eine Teilkategorie* $\mathfrak{C}_0$ *von* $\mathfrak{C}$ *ist eine Kategorie, deren Objekte ebenfalls Objekte von* $\mathfrak{C}$ *und deren Morphismen ebenfalls Morphismen in* $\mathfrak{C}$ *sind, sodass die Verknüpfung von Morphismen der in* $\mathfrak{C}$ *entspricht und der Identitätsmorphismus jedes Objekts von* $\mathfrak{C}_0$ *dem in* $\mathfrak{C}$ *entspricht.*

$\mathfrak{C}_0$ *heißt volle Teilkategorie von* $\mathfrak{C}$*, falls für alle* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}_0)$ *stets* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}_0}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ *gilt.*

Beispiel 2.1.10 *Die Kategorie der abelschen Gruppen,* $\mathfrak{Ab}$*, ist eine volle Teilkategorie von* $\mathfrak{G}$*.*

2.2. Funktoren

Wir kommen nun zum Begriff des Funktors, welcher die möglichen Transformationen zwischen Kategorien beschreibt.

Definition 2.2.1 *Es seien* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *Kategorien. Ein (kovarianter) Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *ist eine Vorschrift, die jedem Objekt* $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *ein Objekt* $FA \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{D})$ *und jedem Morphismus* $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ *einen Morphismus* $Ff \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(FA, FB)$ *zuordnet, sodass die folgenden Forderungen erfüllt sind:*

1. *Für* $f : A \to B$ *und* $g : B \to C$ *ist* $F(gf) = (Fg)(Ff)$*.*

2. *Für* $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *ist* $F\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{FA}$*.*

Beispiel 2.2.2 1. *Ist* $\mathfrak{C}$ *eine Kategorie und* $\mathfrak{C}_0$ *eine Teilkategorie, so ist die natürliche Einbettung* $\mathfrak{C}_0 \hookrightarrow \mathfrak{C}$ *ein Funktor.*

2. *Jedem Objekt $G \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{G})$ können wir kanonisch ein Objekt $G^{ab} := G/G'$ zuordnen und jeder Gruppenhomomorphismus $G \to H$ liefert einen Gruppenhomomorphismus $G^{ab} \to H^{ab}$. Auf diese Art und Weise bekommen wir einen Funktor $^{ab} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ab}$, den sogenannten Abelianisierungsfunktor.*

Definition 2.2.3 *Es sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie. Wir definieren $\mathfrak{C}^{opp}$ als die Kategorie, deren Objekte gerade die Objekte von $\mathfrak{C}$ sind und für deren Morphismenmengen $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}^{opp}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B, A)$ gilt, wobei wir die Verknüpfung in $\mathfrak{C}^{opp}$ auf natürliche Art und Weise aus der in $\mathfrak{C}$ gewinnen. Diese Kategorie heißt auch die duale Kategorie zu $\mathfrak{C}$.*

Bemerkung 2.2.4 1. *Die Identitätsmorphismen in $\mathfrak{C}^{opp}$ sind gerade die Identitätsmorphismen aus $\mathfrak{C}$.*

2. *Ist $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt, so auch $\mathfrak{C}^{opp}$ und die Nullobjekte von $\mathfrak{C}^{opp}$ sind gerade die von $\mathfrak{C}$.*

Definition 2.2.5 *Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ Kategorien. Ein kontravarianter Funktor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ist ein kovarianter Funktor $\mathfrak{C}^{opp} \to \mathfrak{D}$.*

Bemerkung 2.2.6 *Ein kontravarianter Funktor F lässt sich auffassen als eine Vorschrift, die jedem Objekt von $\mathfrak{C}$ ein Objekt von $\mathfrak{D}$ und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ einen Morphismus $Ff \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(FB, FA)$ zuordnet, sodass für Morphismen f und g in $\mathfrak{C}$ stets $F(fg) = (Fg)(Ff)$ gilt.*

Beispiel 2.2.7 *Es bezeichne $\mathfrak{V}_K$ die Kategorie der Vektorräume und Homomorphismen über dem Körper K. Die Abbildung $^* : V \mapsto V^*$, die einem Vektorraum seinen Dualraum zuordnet liefert einen kontravarianten Funktor $\mathfrak{V}_K \to \mathfrak{V}_K$.*

Definition 2.2.8 *Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ Kategorien. Ein Funktor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ heißt voll, falls die induzierten Abbildungen $F : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(FA, FB)$ für alle $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ Surjektionen sind. F heißt treu, falls diese Abbildungen injektiv sind.*

Der Funktor F heißt volle Einbettung, wenn F voll und treu ist sowie $FA = FB \Leftrightarrow A = B$ für alle $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ gilt.

Proposition 2.2.9 *Es sei R ein Ring $A \in \mathfrak{M}^l_R$ ein R-Linksmodul und $B \in \mathfrak{M}^r_R$ ein R-Rechtsmodul. Ist nun M ein weiterer R-Linksmodul, so sind $\mathrm{Hom}_R(M, A)$ und $B \otimes_R M$ abelsche Gruppen und für jeden Modulhomomorphismus $f : M \to N$ erhalten wir einen Homomorphismen abelscher Gruppen*

$$f_\otimes : B \otimes M \to B \otimes N, b \otimes m \mapsto b \otimes f(m)$$

und

$$f_{\text{Hom}} : \operatorname{Hom}_R(N, A) \to \operatorname{Hom}_R(M, A), \phi \mapsto \phi \circ f.$$

Auf diese Art und Weise wird $B \otimes_R -$ *zu einem kovarianten und* $\operatorname{Hom}_R(-, A)$ *zu einem kontravarianten Funktor.*

2.2.1. Natürliche Transformationen

Definition 2.2.10 *Es seien* $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *Kategorien und* $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *(kovariante) Funktoren. Eine natürliche Transformation zwischen* F *und* G *ist eine Vorschrift* τ*, die jedem Objekt* $A \in \operatorname{Obj}(\mathfrak{C})$ *einen Morphismus* $\tau_A : FA \to GA, \tau_A \in \operatorname{Mor}_{\mathfrak{D}}(FA, GA)$ *zuordnet, sodass für jeden Morphismus* $f : A \to B$ *das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\tau_A"] & FB \arrow[d, "\tau_B"] \\ GA \arrow[r, "Gf"] & GB \end{tikzcd}$$

Beispiel 2.2.11 *Zur Kategorie* $\mathfrak{AR}_1$ *der kommutativen Ringe mit Eins betrachten wir die beiden Funktoren* $F, G : \mathfrak{AR}_1 \to \mathfrak{G}$ *definiert durch* $GA := A^*$ *und* $FA := \operatorname{GL}_n(A)$*. Dies sind tatsächlich Funktoren, da Ringhomomorphismen die Einheitengruppe eines Rings in die Einheitengruppe des Ziels abbilden und zu Ringhomomorphismen auf den Matixringen fortsetzen.*

Zu einem kommutativen Ring A *setzen wir nun* $\tau_A : FA \to GA, m \mapsto \det(m)$*. Dann ist* τ *eine natürliche Transformation zwischen* F *und* G*.*

Bemerkung und Definition 2.2.12 *Es seien* $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *Kategorien,* $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *Funktoren und* τ *eine natürliche Transformation von* F *zu* G*.*

1. *Ist* τ_A *invertierbar für jedes* $A \in \operatorname{Obj}(\mathfrak{C})$*, so heißt* τ *auch natürliche Äquivalenz von* F *und* G *und wir schreiben* $F \simeq G$*.*

2. *Natürliche Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Funktoren von* $\mathfrak{C}$ *nach* $\mathfrak{D}$*.*

3. *Ist* $H : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ *ein weiterer Funktor, sodass* $FH \simeq \mathbb{1} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ *und* $HF \simeq \mathbb{1} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$*, wobei* $\mathbb{1}$ *den Identitätsfunktor der jeweiligen Kategorie bezeichne, dann heißen* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *auch äquivalente Kategorien.*

2.3. Produkte und Koprodukte

Definition 2.3.1 *Es sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie und $\{A_i\}$, $i \in I$ eine Familie von Objekten. Ein Produkt (A, p_i) der Objekte A_i ist ein Objekt A zusammen mit Morphismen $p_i : A \to A_i$, sodass für jedes Objekt B und Morphismen $f_i : B \to A_i$ ein eindeutiger Morphismus $f : B \to A$ existiert mit $f_i = p_i f$.*

Den Morphismus f bezeichnen wir auch mit $\{f_i\}$.

Im Allgemeinen ist in einer beliebigen Kategorie nicht davon auszugehen, dass jede Familie von Objekten ein Produkt besitzt.

Beispiel 2.3.2 *Ist R ein Ring mit 1, so hat in der Kategorie $\mathfrak{M}_R^l$ der R-Linksmoduln jede Familie von Objekten ein Produkt, namentlich das direkte Produkt der entsprechenden Moduln.*

Bemerkung 2.3.3 *Man rechnet leicht nach, dass ein Produkt einer gegebenen Familie von Objekten, so es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.*

Das duale Konzept zum Produkt erhalten wir durch Umdrehen aller Pfeile in der Definition.

Definition 2.3.4 *Es sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie und $\{A_i\}$ $i \in I$ eine Familie von Objekten. Ein Koprodukt (A, e_i) der Objekte A_i ist ein Objekt A zusammen mit Morphismen $e_i : A_i \to A$, sodass für jedes Objekt B und Morphismen $f_i : A_i \to B$ ein eindeutiger Morphismus $f : A \to B$ existiert mit $f_i = f e_i$.*

Den Morphismus f bezeichnen wir in diesem Fall auch mit $\langle f_i \rangle$.

Analog zum obigen Beispiel sieht man leicht ein, dass in der Kategorie der R-Moduln die direkte Summe ein Koprodukt darstellt.

2.4. Abelsche Kategorien

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun mit einer wichtigen Klasse von Kategorien beschäftigen, die in den folgenden Kapiteln eine große Rolle spielen werden, den sogenannten abelschen Kategorien. Bei diesen handelt es sich im Wesentlichen um eine Verallgemeinerung von Modulkategorien (tatsächlich gibt es einen bekannten Satz, welcher aussagt, dass sich jede kleine abelsche Kategorie voll in eine Modulkategorie einbetten lässt).

Definition 2.4.1 *Eine Kategorie* $\mathfrak{C}$ *mit Nullobjekt heißt additiv, falls je zwei Objekte von* $\mathfrak{C}$ *ein Produkt haben und die Morphismenmengen* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ *für* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ *abelsche Gruppen bilden, sodass die Verknüpfung* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,C)$ *bilinear ist.*

Beispiel 2.4.2

1. *Sei* R *ein Ring mit Eins. Die Kategorie* $\mathfrak{M}^l_R$ *ist additiv.*

2. $\mathfrak{G}$ *ist nicht additiv, da die Menge der Gruppenhomomorphismen zwischen zwei Gruppen* G *und* H *im Allgemeinen nicht die Struktur einer abelschen Gruppe besitzt.*

Bemerkung 2.4.3 *Es sei* $\mathfrak{C}$ *eine additive Kategorie. Der Nullmorphismus* $0 : A \to B$ *ist das neutrale Element der abelschen Gruppe* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$*; es besteht also keine Verwechslungsgefahr.*

Im Folgenden sei $\mathfrak{C}$ eine additive Kategorie und wir schreiben das Produkt von $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ als $A \oplus B$.

Zunächst wollen wir festhalten, dass in einer additiven Kategorie nicht nur Produkte, sondern auch Koprodukte von zwei Objekten existieren und diese mit den Produkten übereinstimmen.

Lemma 2.4.4 *Es seien* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$*. Wir setzen* $e_1 = \{\mathbb{1}, 0\} : A \to A \oplus B$ *und* $e_2 = \{0, \mathbb{1}\} : B \to A \oplus B$*. Dann gilt:*

1. $e_1 p_1 + e_2 p_2 = \mathbb{1} : A \oplus B \to A \oplus B$*.*

2. $(A \oplus B, e_1, e_2)$ *ist ein Koprodukt von* A *und* B*.*

Beweis:

1. Es gilt $p_1(e_1 p_1 + e_2 p_2) = p_1 e_1 p_1 + p_1 e_2 p_2 = p_1$, da $p_1 e_1 = \mathbb{1}$ und $p_1 e_2 = 0$. Analog $p_2(e_1 p_1 + e_2 p_2) = p_2$. Die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeitseigenschaft des Produkts.

2. Seien nun $\phi_1 : A \to C$ und $\phi_2 : B \to C$ zwei Morphismen. Setze $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle := \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 : A \oplus B \to C$. Dann gilt $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle e_1 = (\phi_1 p_1 + \phi_2 p_2) e_1 = \phi_1 p_1 e_1 = \phi_1$ (und analog für ϕ_2).

Für die Eindeutigkeit verwenden wir Teil (1): Sei η gegeben mit $\eta e_i = \phi_i$. Dann gilt:

$$\eta = \eta \mathbb{1} = \eta(e_1 p_1 + e_2 p_2) = \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$$

$\square$

Das Koprodukt zweier Objekte in einer additiven Kategorie werden wir im Folgenden auch als Summe bezeichnen.

Lemma 2.4.5 *Es sei $\mathfrak{D}$ eine weitere additive Kategorie und $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ein Funktor. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Der Funktor F respektiert Summen von zwei Objekten.*

2. *Der Funktor F respektiert Produkte von zwei Objekten.*

3. *Für $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ ist $F : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(FA, FB)$ ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Obwohl wir bereits wissen, dass Koprodukte und Produkte als Objekte übereinstimmen, ist dies nicht trivial, da wir nachweisen müssen, dass $F\langle \mathbb{1}, 0\rangle = \langle \mathbb{1}, 0\rangle$ und $F\langle 0, \mathbb{1}\rangle = \langle 0, \mathbb{1}\rangle$. Dazu reicht es aber sicher zu zeigen, dass Nullobjekte unter F wieder auf Nullobjekte gehen. Sei also 0 ein Nullobjekt in $\mathfrak{C}$ und $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ beliebig. Dann ist A eine Summe von A und 0 mit den kanonischen Injektionen $\mathbb{1}$ und 0. Nun ist nach (1) FA eine Summe von FA und $B := F0$ mit Injektionen $\mathbb{1}_{FA}$ und $F0$. Wir betrachten die Morphismen $0 : FA \to B$ und $\mathbb{1} : B \to B$. Dann existiert ein eindeutiger Morphismus $\eta : FA \to B$ mit $\eta F0 = \mathbb{1}_B$ und $\eta \mathbb{1}_{FA} = 0$. Folglich ist $0 = \mathbb{1}_B$ und B ist ein Nullobjekt. (2) $\Rightarrow$ (1) folgt aus Dualitätsgründen.

(1/2) $\Rightarrow$ (3): Seien $\phi_1, \phi_2 : A \to B$. Dann ist $(\phi_1 + \phi_2) = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \{\mathbb{1}, \mathbb{1}\}$ und es ist $F(\phi_1 + \phi_2) = \langle F\phi_1, F\phi_2 \rangle \{\mathbb{1}, \mathbb{1}\} = F\phi_1 + F\phi_2$, da F Summen und Produkte respektiert.

(3) $\Rightarrow$ (2): Wir müssen zeigen, dass $\{Fp_1, Fp_2\} : F(A \oplus B) \to FA \oplus FB$ ein Isomorphismus ist. Dazu rechnen wir nach, dass $F(e_1)p_1 + F(e_2)p_2$ der inverse Morphismus

ist.

$$\begin{aligned}\{Fp_1, Fp_2\}(F(e_1)p_1 + F(e_2)p_2) &= \{Fp_1, Fp_2\}F(e_1)p_1 + \{Fp_1, Fp_2\}F(e_2)p_2\\ &= \{F(p_1e_1), F(p_2e_1)\}p_1 + \{F(p_1e_2), F(p_2e_2)\}p_2\\ &= \{\mathbb{1}, 0\}p_1 + \{0, \mathbb{1}\}p_2 \text{ da } F(0) = 0\\ &= e_1p_1 + e_2p_2\\ &= \mathbb{1}\end{aligned}$$

Und analog:

$$\begin{aligned}(F(e_1)p_1 + F(e_2)p_2)\{Fp_1, Fp_2\} &= F(e_1)p_1\{Fp_1, Fp_2\} + F(e_2)p_2\{Fp_1, Fp_2\}\\ &= F(e_1)F(p_1) + F(e_2)F(p_2)\\ &= F(e_1p_1 + e_2p_2) \text{ nach (3)}\\ &= F\mathbb{1}\\ &= \mathbb{1}\end{aligned}$$

□

Definition 2.4.6 *Ein Funktor, der eine der Bedingungen aus dem vorangehenden Lemma erfüllt, heißt additiv.*

Beispiel 2.4.7 *Es sei R ein Ring, A ein R-Linksmodul und B ein R-Rechtsmodul. Dann sind die Funktoren $B \otimes_R -$ und $\mathrm{Hom}_R(-, A)$ aus Proposition 2.2.9 additiv.*

Definition 2.4.8 *Es sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt und $f : A \to B$ ein Morphismus.*

1. *Ein Kern von f ist ein Morphismus $\kappa : K \to A$ (für ein geeignetes Objekt K) mit $f\kappa = 0$, sodass für jeden Morphismus $g : C \to A$ mit $fg = 0$ ein Morphismus $g' : C \to K$ mit $g = \kappa g'$ existiert.*

2. *Ein Kokern von f ist das duale Objekt zum Kern.*

Beispiel 2.4.9 *Es sei R ein Ring mit Eins. In der Kategorie der R-Moduln bildet die Einbettung des (üblichen) Kerns in den Definitionsbereich eines Homomorphismus einen Kern und der kanonische Epimorphismus vom Zielbereich eines Homomorphismus auf den (üblichen) Kokern einen Kokern.*

Definition 2.4.10 *Eine additive Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt abelsch, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Jeder Morphismus hat einen Kern und einen Kokern.*

2. *Jeder Monomorphismus ist der Kern seines Kokerns und jeder Epimorphismus ist der der Kokern seines Kerns.*

3. *Jeder Morphismus ist die Verknüpfung eines Monomorphismus und eines Epimorphismus.*

Beispiel 2.4.11 1. *Die Kategorie $\mathfrak{M}^l_R$ für einen beliebigen Ring R ist abelsch.*

2. *Die Kategorie der freien $\mathbb{Z}$-Moduln ist additiv, aber nicht abelsch. Beispielsweise hat der Morphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, 1 \mapsto 2$ keinen Kokern.*

Definition 2.4.12 *Es seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ abelsche Kategorien, $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ein additiver Funktor (insbesondere $F(0) = 0$) und $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine exakte Sequenz von Objekten aus $\mathfrak{C}$. Dann nennen wir*

1. *F linksexakt, falls $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ exakt ist.*

2. *F rechtsexakt, falls $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ exakt ist.*

3. *F exakt, falls $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ exakt ist.*

3. Homologische Algebra

In diesem Kapitel werden wir die für den Hauptteil der Arbeit nötigen Grundbegriffe aus der homologischen Algebra einführen und einige ihrer Eigenschaften studieren. Insbesondere möchten wir einen Einstieg in die Theorie derivierter Funktoren geben und betrachten dazu zunächst Kettenkomplexe und Auflösungen. Mit Ausnahme des letzten Unterabschnitts folgen wir dabei in großen Teilen dem Vorgehen von [23].

3.1. Kettenkomplexe

Für den gesamten Abschnitt sei R stets ein Ring mit Eins.

Definition 3.1.1 *1. Ein ($\mathbb{Z}$)-graduierter R-Modul ist eine Familie $\{M_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ von R-Moduln.*

2. Sind M und N graduierte R-Moduln, so ist ein Morphismus $\phi : M \to N$ vom Grad k eine Familie $\{\phi_n : M_n \to N_{n+k} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ von R-Modulhomomorphismen.

3. Die Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten R-Moduln bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathfrak{M}_R^{\mathbb{Z}}$.

Definition 3.1.2 *1. Ein Kettenkomplex $C = \{C_n, \partial_n | n \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Objekt aus $\mathfrak{M}_R^{\mathbb{Z}}$ zusammen mit einem Endomorphismus ∂ vom Grad -1, welcher darüber hinaus $\partial\partial = 0$ erfüllt. Mit anderen Worten besteht C aus einer Familie $\{C_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ von R-Moduln und einer Familie $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ von R-Modulhomomorphismen mit der Eigenschaft $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Der Morphismus ∂ (und auch seine einzelnen Komponenten ∂_n) werden als Differenzial oder Randoperator bezeichnet.

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

2. *Das duale Objekt zu einem Kettenkomplex heißt Kokettenkomplex und besteht ebenfalls aus einem Objekt aus $\mathfrak{M}_R^{\mathbb{Z}}$, in diesem Fall zusammen mit einem Morphismus δ vom Grad $+1$, welcher $\delta\delta = 0$ erfüllt.*

$$\ldots \xleftarrow{\delta^{n+1}} D^{n+1} \xleftarrow{\delta^n} D^n \xleftarrow{\delta^{n-1}} D^{n-1} \xleftarrow{\delta_{n-2}} \ldots$$

3. *Es seien C und D Kettenkomplexe mit Randoperatoren ∂ beziehungsweise $\tilde{\partial}$. Ein Morphismus von Kettenkomplexen (auch Kettenabbildung) ist ein Morphismus ϕ vom Grad 0 der zugehörigen graduierten Moduln, sodass $\phi\partial = \tilde{\partial}\phi$. Mit anderen Worten: Ein Morphismus ist eine Familie von R-Modulhomomorphismen $\{\phi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, sodass für jedes n das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\tilde{\partial}_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

4. *Analog definieren wir einen Morphismus von Kokettenkomplexen.*

Sofern keine Verwechselungsgefahr besteht, werden wir im Folgenden den Index des Randoperators nicht mitführen und auch jede Komponente von ∂ wieder mit ∂ bezeichnen. Darüber hinaus ist es üblich, nicht zwischen den Randoperatoren verschiedener Kettenkomplexe zu unterscheiden und somit auch diese alle ∂ zu nennen. Analog gehen wir mit den Randabbildungen von Kokettenkomplexen um.

Bemerkung 3.1.3 1. *Die Menge der (Ko-)Kettenkomplexe (über R) zusammen mit den Morphismen von (Ko-)Kettenkomplexen bildet eine abelsche Kategorie.*

2. *Ist R' ein weiterer Ring, $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_{R'}$ ein additiver (kovarianter) Funktor und $\{C_n, \partial_n\}$ ein (Ko-)Kettenkomplex über R, so ist $\{FC_n, F\partial_n\}$ ein (Ko-)Kettenkomplex über R'. F induziert also einen (kovarianten) Funktor auf den Kategorien der (Ko-)Kettenkomplexe über R beziehungsweise R'.*

3. *Ist R' ein weiterer Ring, $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_{R'}$ ein additiver kontravarianter Funktor und $\{C_n, \partial_n\}$ ein Kettenkomplex, so ist $\{FC_n, F\partial_n\}$ ein Kokettenkomplex über R'. Auf diese Art und Weise definiert F einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe über R in die Kategorie der Kokettenkomplexe über R' (und natürlich analog von den Kokettenkomplexen zu den Kettenkomplexen).*

Man beachte, dass der Unterschied zwischen den Begriffen Kettenkomplex und Kokettenkomplex rein technischer Natur ist. Ersetzt man in einem Kettenkomplex jeden Index durch sein Negatives, so erhält man offensichtlich einen Kokettenkomplex und umgekehrt. Auf diese Art und Weise hat jede Strukturaussage über Kettenkomplexe ein geeignetes Analogon auf der Seite der Kokettenkomplexe und wir werden im Folgenden immer nur eines der beiden Resultate beweisen.

Wir kommen nun zu dem für diese Arbeit entscheidenden Begriff der Homologie. Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Bedingung $\partial\partial = 0$ für den Randoperator eines Kettenkomplexes $\operatorname{Bild}(\partial_n) \subset \operatorname{Kern}(\partial_{n-1})$ impliziert. Diese Beobachtung führt zur nächsten Definition:

Definition 3.1.4 *Es sei $C = \{C_n, \partial_n\}$ ein Kettenkomplex und $D = \{D_n, \delta_n\}$ ein Kokettenkomplex über R.*

1. $\mathrm{H}(C) := \{\mathrm{H}_n(C)\}$, *wobei* $\mathrm{H}_n(C) := \operatorname{Kern}(\partial_n)/\operatorname{Bild}(\partial_{n+1})$.
2. $\mathrm{H}(C)$ *heißt der Homologiemodul,* $\mathrm{H}_n(C)$ *der n-te Homologiemodul von C.*
3. *Ist $R = \mathbb{Z}$, so heißt* $\mathrm{H}_n(C)$ *auch die n-te Homologiegruppe von C.*
4. $\mathrm{H}(D) := \{\mathrm{H}^n(D)\}$, *wobei* $\mathrm{H}^n(D) := \operatorname{Kern}(\delta^n)/\operatorname{Bild}(\delta^{n-1})$.
5. $\mathrm{H}(D)$ *heißt der Kohomologiemodul,* $\mathrm{H}^n(D)$ *der n-te Kohomologiemodul von D.*
6. *Ist $R = \mathbb{Z}$, so heißt* $\mathrm{H}^n(D)$ *auch die n-te Kohomologiegruppe von D.*

Proposition 3.1.5 *Es seien C und D Kettenkomplexe über R und $\phi : C \to D$ ein Morphismus von Kettenkomplexen. ϕ definiert einen Morphismus $\mathrm{H}(\phi) : \mathrm{H}(C) \to \mathrm{H}(D)$ vom Grad 0 zwischen den graduierten R-Moduln $\mathrm{H}(C)$ und $\mathrm{H}(D)$. Auf diese Art und Weise wird $\mathrm{H}(-)$ zu einem Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der graduierten R-Moduln. Darüber hinaus wird jedes $\mathrm{H}_n(-)$ zu einem Funktor in die Kategorie $\mathfrak{M}_R$ der R-Moduln. Eine analoge Aussage gilt für Kokettenkomplexe.*

Beweis: Wir zeigen nur die Wohldefiniertheit von $\mathrm{H}_n(\phi)$. Sei dazu zunächst $x \in \operatorname{Kern}(\partial_n)$. Dann ist $\tilde{\partial}_n\phi(x) = \phi\partial_n(x) = \phi(0) = 0$ also $\phi(x) \in \operatorname{Kern}(\tilde{\partial}_n)$. Sei weiter $y = \partial_{n+1}(y) \in \operatorname{Bild}(\partial_{n+1})$. Dann ist $\phi(y) = \phi(\partial_{n+1}(z)) = \tilde{\partial}_{n+1}(\phi(z)) \in \operatorname{Bild}(\tilde{\partial}_{n+1})$. Folglich liefert ϕ in natürlicher Art und Weise einen Homomorphismus zwischen $\mathrm{H}_n(C)$ und $\mathrm{H}_n(D)$. $\square$

Definition 3.1.6 *Der Funktor $\mathrm{H}(-)$ aus der vorhergehenden Proposition heißt der Homologiefunktor, sein Analogon für Kokettenkomplexe Kohomologiefunktor.*

Wir führen nun den Begriff der Homotopie ein, welcher eine partielle Antwort auf die Frage liefert, wann zwei Kettenabbildungen den gleichen Morphismus auf den Homologiemoduln induzieren.

Definition 3.1.7 *Es seien C, D zwei Kettenkomplexe über R und $\phi, \psi : C \to D$ zwei Kettenabbildungen. Eine Homotopie zwischen ϕ und ψ ist ein Morphismus $\Sigma : C \to D$ der zugehörigen graduierten Moduln vom Grad $+1$, sodass*

$$\phi - \psi = \Sigma\partial + \partial\Sigma.$$

Wir sagen ϕ und ψ sind homotop($\phi \simeq \psi$), falls eine Homotopie existiert.

Lemma 3.1.8 *Es seien C, D, ϕ, ψ wie oben. Gilt $\phi \simeq \psi$, so ist* $\mathrm{H}(\phi) = \mathrm{H}(\psi) : \mathrm{H}(C) \to \mathrm{H}(D)$

Beweis: Es sei $x \in \mathrm{Kern}(\partial_n)$ beliebig. Dann gilt:

$$(\phi - \psi)(x) = \Sigma\partial(x) + \partial\Sigma(x) = \partial\Sigma(x).$$

Insbesondere liegt $(\phi - \psi)(x)$ also im Bild von ∂ (in D) und ist somit 0 in $\mathrm{H}_n(D)$. □

Lemma 3.1.9 *Die Homotopierelation "$\simeq$" ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich; wir zeigen also nur die Transitivität. Sei dazu $\phi \simeq \psi$ vermöge Σ und $\psi \simeq \chi$ vermöge T. Dann gilt:

$$(\phi - \chi) = \phi - \psi + (\psi - \chi) = \Sigma\partial + \partial\Sigma + T\partial + \partial T = (\Sigma + T)\partial + \partial(\Sigma + T).$$

Also ist $\phi \simeq \chi$ vermöge $\Sigma + T$. □

Lemma 3.1.10 *Es seien C, D, E Kettenkomplexe über R sowie $\phi, \psi : C \to D$, $\phi', \psi' : D \to E$ Kettenabbildungen mit $\phi \simeq \psi$ und $\phi' \simeq \psi'$. Dann gilt auch $\phi'\phi \simeq \psi'\psi$ als Kettenabbildungen von C nach E.*

Beweis: Es sei $\psi - \phi = \partial\Sigma + \Sigma\partial$. Dann ist

$$\phi'(\psi - \phi) = \phi'\partial\Sigma + \phi'\Sigma\partial = \partial(\phi'\Sigma) + (\phi'\Sigma)\partial.$$

Weiter sei $\psi' - \phi' = \partial T + T\partial$. Dann folgt analog: $\psi'\psi - \phi'\psi = \partial(T\psi) + (T\psi)\partial$. Es gilt also $\phi'\phi \simeq \phi'\psi$ und $\phi'\psi \simeq \psi'\psi$. Die Behauptung folgt damit aus der Transitivität von "$\simeq$". □

Lemma 3.1.11 *Es seien R' ein weiterer Ring, $F : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_{R'}$ ein additiver Funktor, C, D Kettenkomplexe über R und $\phi, \psi : C \to D$ Morphismen von Kettenkomplexen. Gilt nun $\phi \simeq \psi$, so auch $F\phi \simeq F\psi$.*

Beweis: Ist $\phi - \psi = \partial\Sigma + \Sigma\partial$, so ist $F\phi - F\psi = F\partial F\Sigma + F\Sigma F\partial$. Also gilt $F\phi \simeq F\psi$ vermöge $F\Sigma$. □

Definition 3.1.12

1. *Die Homotopiekategorie ist die Kategorie, welche wir aus der Kategorie der Kettenkomplexe enthalten, indem wir homotope Morphismen identifizieren.*

2. *Zwei Kettenkomplexe C, D heißen vom gleichen Homotopietyp (homotop), falls sie in der Homotopiekategorie isomorph sind. Also genau dann, wenn Morphismen $\phi : C \to D$ und $\psi : D \to C$ existieren, sodass $\phi\psi \simeq \mathbb{1}_D$ und $\psi\phi \simeq \mathbb{1}_C$. Die Abbildung ϕ (oder ψ) heißt dann eine Homotopieäquivalenz.*

Bemerkung 3.1.13 *Die vorangehenden Lemmata implizieren, dass jeder additive Funktor zwischen Modulkategorien einen Funktor der zugehörigen Homotopiekategorien induziert und dass der Homologiefunktor über die Homotopiekategorie faktorisiert.*

3.2. Auflösungen

In diesem Abschnitt sei R stets ein Ring mit Eins und C ein positiver Kettenkomplex über R, das heißt C ist von der Form

$$C: \ \ldots \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0,$$

wobei $C_n = 0$, falls $n < 0$.

Definition 3.2.1

1. *Der Kettenkomplex C heißt frei (projektiv), falls C_n frei (projektiv) ist für alle $n \geq 0$.*

2. *Der Kettenkomplex C heißt azyklisch, falls $\mathrm{H}_n(C) = 0$ für alle $n \geq 1$.*

Bemerkung 3.2.2 *Der Kettenkomplex C ist genau dann azyklisch, wenn*

$$\ldots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow \mathrm{H}_0(C) \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln ist.

Definition 3.2.3 *Es sei A ein R-Modul. Ein freier (projektiver) und azyklischer Kettenkomplex*

$$P:\ \ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

zusammen mit einem Isomorphismus $\mathrm{H}_0(P) \to A$ heißt freie (projektive) Auflösung von A. Im Folgenden werden wir für eine gegebene Auflösung A und $\mathrm{H}_0(P)$ vermöge des gegebenen Isomorphismus identifizieren.

Satz 3.2.4 *Es sei D ein weiterer positiver und darüber hinaus azyklischer Kettenkomplex und C projektiv. Dann existiert zu jedem Homomorphismus $\phi' : \mathrm{H}_0(C) \to \mathrm{H}_0(D)$ eine Kettenabbildung $\phi : C \to D$, die ϕ' induziert. Darüber hinaus sind je zwei solche Kettenabbildungen homotop.*

Beweis: Wir konstruieren zunächst ein geeignetes ϕ rekursiv: Da D azyklisch ist, ist die natürliche Projektion $D_0 \to \mathrm{H}_0(D)$ surjektiv. Nun ist C_0 projektiv, also existiert nach der definierenden Eigenschaft projektiver Moduln ein $\phi_0 : C_0 \to D_0$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi_0"] & \mathrm{H}_0(C) \arrow[d, "\phi'"] \\ D_0 \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}_0(D) \end{tikzcd}$$

Sei nun $n \geq 1$ und $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ schon konstruiert. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "\phi_{n-2}"] \\ D_n \arrow[r] & D_{n-1} \arrow[r] & D_{n-2} \end{tikzcd}$$

Dabei setzen $C_{-1} := \mathrm{H}_0(C)$ und $D_{-1} := \mathrm{H}_0(D)$ für $n = 1$. Nun ist $\partial\phi_{n-1}\partial = \phi_{n-2}\partial\partial = 0$ also ist $\mathrm{Bild}(\phi_{n-1}\partial) \subset \mathrm{Kern}(\partial : D_{n-1} \to D_{n-2})$. Da D azyklisch ist, ist letzteres aber gerade Bild$(\partial : D_n \to D_{n-1})$ und die Projektivität von C_n liefert uns ein ϕ_n, sodass das obige Diagramm kommutiert, $\partial\phi_n = \phi_{n-1}\partial$. Induktiv folgt somit die Existenz des gewünschten ϕ.

Seien nun $\phi = \{\phi_n\}$ und $\psi = \{\psi_n\}$ zwei Kettenabbildungen, die ϕ' induzieren. Wir konstruieren auch die gesuchte Homotopie rekursiv. Zunächst betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\phi_1"'] \arrow[d, shift left, "\psi_1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\Sigma_0"'] \arrow[d, shift right, "\phi_0"'] \arrow[d, shift left, "\psi_0"] & \mathrm{H}_0(C) \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & 0 \\
D_1 \arrow[r] & D_0 \arrow[r] & \mathrm{H}_0(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nun induzieren sowohl ϕ_0 als auch ψ_0 die Abbildung ϕ' und folglich ist Bild$(\phi_0 - \psi_0) \subset$ Kern$(D_0 \to \mathrm{H}_0(D))$ = Bild$(\partial : D_1 \to D_0)$ aufgrund der Azyklizität von D. Aus der Projektivität von C_0 erhalten wir das gesuchte $\Sigma_0 : C_0 \to D_1$ mit $\phi_0 - \psi_0 = \partial\Sigma_0$. Sei nun $n \geq 1$ und $\Sigma_0, ..., \Sigma_{n-1}$ bereits definiert mit $\phi_r - \psi_r = \partial\Sigma_r + \Sigma_{r-1}\partial$ für $r \leq n-1$ (dabei setzen wir $\Sigma_{-1}\partial := 0$). Wir sind also in folgender Situation:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\phi_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n+1}"] & C_n \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "\Sigma_n"] \arrow[d, shift right, "\phi_n"'] \arrow[d, shift left, "\psi_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, dotted, "\Sigma_{n-1}"] \arrow[d, shift right, "\phi_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\psi_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r] & D_n \arrow[r] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\partial(\phi_n - \psi_n - \Sigma_{n-1}\partial) &= \phi_{n-1}\partial - \psi_{n-1}\partial - \partial\Sigma_{n-1}\partial \\
&= (\phi_{n-1} - \psi_{n-1} - \partial\Sigma_{n-1})\partial \\
&= (\Sigma_{n-2}\partial)\partial \\
&= 0
\end{aligned}$$

Folglich ist Bild$(\phi_n - \psi_n - \Sigma_{n-1}\partial) \subset$ Kern$(\partial : D_n \to D_{n-1})$ = Bild$(\partial : D_{n+1} \to D_n$ und die Existenz von Σ_{n+1} folgt wie zuvor aus der Projektivität von C_n. Dies schließt aber den Rekursionsschritt ab und die Behauptung folgt. $\square$

Lemma 3.2.5 *Jeder R-Modul A hat eine freie (also insbesondere auch eine projektive) Auflösung.*

Beweis: Man beginne mit einer freien Präsentation $K_1 \hookrightarrow F_0 \twoheadrightarrow A$ von A, fahre fort mit einer freien Präsentation $K_2 \hookrightarrow F_1 \twoheadrightarrow K_1$ von K_1 und präsentiere nun sukzessive immer wieder den Kern. Der Kettenkomplex $F := \{F_n, \partial | n \in \mathbb{N}_0\}$ wobei ∂ durch die Verkettung $F_n \twoheadrightarrow K_n \hookrightarrow F_{n-1}$ definiert ist, ist offensichtlich azyklisch und frei und erfüllt nach Konstruktion $\mathrm{H}_0(F) \cong A$. $\square$

Man beachte, dass aufgrund der Azyklizität in einer Auflösung jede Auflösung bereits auf diesem Wege entsteht.

Proposition 3.2.6 *Ist A ein R-Modul so sind je zwei projektive Auflösungen von A homotop.*

Beweis: Seien C und D zwei projektive und azyklische Kettenkomplexe mit $\mathrm{H}_0(C) = \mathrm{H}_0(D) = A$. Nach Satz 3.2.4 existieren Kettenabbildungen $\phi : C \to D$ und $\psi : D \to C$, die jeweils die Identität in A induzieren. Nun induzieren auch $\mathbb{1}_C$ und $\mathbb{1}_D$ die Identität in A, also gilt nach der Homotopieeindeutigkeit in Satz 3.2.4 $\phi\psi \simeq \mathbb{1}_D$ sowie $\psi\phi \simeq \mathbb{1}_C$. Dies ist aber gerade die Definition von Isomorphie in der Homotopiekategorie. $\square$

3.3. Derivierte Funktoren

In diesem Abschnitt sei R ein Ring, $T : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{Ab}$ ein additiver (kovarianter) Funktor und $S : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{Ab}$ ein additiver kontravarianter Funktor. Wir wollen nun zu T (S) eine Folge $L_nT : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{Ab}$ (R^nS) von Funktoren, die sogenannten linksderivierten (rechtsderivierten) Funktoren zu T (S) einführen. Wir beginnen mit der folgenden Definition:

Definition 3.3.1 *Sei A ein R-Modul und P eine projektive Auflösung von A. Wir betrachten den Kettenkomplex $TP = \{TP_n, T\partial | n \in \mathbb{N}\}$ und setzen $L_n^PT(A) := \mathrm{H}_n(TP)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Analog setzen wir $R_P^nS(A) := \mathrm{H}^n(SP)$.*

Es wird sich zeigen, dass $L_n^PT(A)$ tatsächlich nicht von der Wahl von P abhängt und dass zu einem Modulhomomorphismus $A \to B$ stets eine induzierte Abbildung $L_n^PT(A) \to L_n^{P'}T(B)$ gehört, wodurch L_n^PT tatsächlich zu einem Funktor wird.

Bemerkung 3.3.2 1. *Es seien A, A' R-Moduln mit projektiven Auflösungen P und P' sowie $\alpha : A \to A'$ ein Modulhomomorphismus. Nach Satz 3.2.4 erhalten wir eine Kettenabbildung $\tilde{\alpha}$, welche α induziert und bis auf Homotopie eindeutig ist. Weiter induziert $\tilde{\alpha}$ einen Homomorphismus $\alpha(P, P') : L_n^PT(A) \to L_n^{P'}T(A')$, welcher nicht von der Wahl von $\tilde{\alpha}$ abhängt.*

2. *Seien nun A, A', A'' R-Moduln mit Auflösungen P, P', P'' und Modulhomomorphismen $\alpha : A \to A'$ sowie $\alpha' : A' \to A''$. Dann induziert die Hintereinanderausführung $\alpha'\alpha : A \to A''$ nach (1) eine Abbildung $\alpha'\alpha(P, P'') : L_n^P T(A) \to L_n^{P''} T(A'')$, welche man aus einer Kettenabbildung $P \to P''$, die $\alpha'\alpha$ induziert, konstruieren kann. Diese kann aber offensichtlich als die Verkettung der Abbildungen $\tilde{\alpha} : P \to P'$ und $\tilde{\alpha'} : P' \to P''$ gewählt werden ($\tilde{\alpha}$ wie oben). Folglich ist $(\alpha'\alpha)(P, P'') = \alpha'(P', P'') \circ \alpha(P, P')$. Darüber hinaus liefert $\mathbb{1}_A : A \to A$ sicherlich $\mathbb{1}_A(P, P) = \mathbb{1}_{L_n^P T(A)}$.*

Proposition 3.3.3 *Es sei A ein R-Modul und P und Q zwei projektive Auflösungen von A. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $\eta = \eta_{p,q} : L_n^P T(A) \to L_n^Q T(A)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis: Sei $\tilde{\eta} : P \to Q$ eine $\mathbb{1}_A$ induzierende Kettenabbildung. Dann ist $\tilde{\eta}$ bis auf Homotopie eindeutig bestimmt und wie im Beweis von Proposition 3.2.6 ist $\tilde{\eta}$ eine Homotopieäquivalenz. Wir erhalten also auf kanonische Art und Weise einen Isomorphismus $\eta = \mathbb{1}_A(P, Q) : L_n^P T(A) \to L_n^Q T(A)$, welchen wir aus jeder Kettenabbildung konstruieren können, die $\mathbb{1}_A$ induziert. □

Nach der Bemerkung 3.3.2 gilt für drei Auflösungen P, Q, R eines R-Moduls A $\eta_{Q,R}\eta_{P,Q} = \eta_{P,R}$ und $\eta_{P,P} = \mathbb{1}$. Es steht uns also frei die Gruppen $L_n^P T(A)$ und $L_n^Q T(A)$ vermöge des gegebenen Isomorphismus zu identifizieren. Aus diesem Grund werden wir in Zukunft keine Auflösung mehr auszeichnen und schreiben $L_n T(A)$ anstelle von $L_n^P T(A)$.

Zu einem Modulhomomorphismus $\alpha : A \to A'$ definieren wir darüber hinaus den induzierten Homomorphismus $\alpha_n : L_n T(A) \to L_n T(A')$ durch $\alpha_n = \alpha(P, P') : L_n T(A) \to L_n T(A')$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige projektive Auflösungen von A und A'.

Proposition 3.3.4 *Die vorangehende Definition von α_n ist verträglich mit der Identifikation unter η.*

Beweis: Seien P, Q Auflösungen von A und P', Q' Auflösungen von A'. Dann gilt

$$\begin{aligned} \eta' \circ \alpha(P, P') &= \mathbb{1}_{A'}(P', Q') \circ \alpha(P, P') \\ &= \alpha(P, Q') = \alpha(Q, Q') \circ \mathbb{1}_A(P, Q) \\ &= \alpha(Q, Q') \circ \eta \end{aligned}$$

□

Diese abschließende Proposition erlaubt uns nun die Definition der linksderivierten Funktoren.

Definition 3.3.5 *Es sei $T : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{Ab}$ ein additiver kovarianter Funktor. $L_nT : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{Ab}$ heißt der n-te linksderivierte Funktor zu T. Dabei ist der Wert von L_nT auf einem R-Modul A gegeben durch $\mathrm{H}_n(TP)$, wobei P eine beliebige projektive Auflösung von A ist. Der Wert von L_nT auf einem Homomorphismus $\alpha : A \to A'$ ist $L_nT(\alpha) = \alpha(P, P')$ wie in Bemerkung 3.3.2, wobei P und P' beliebige projektive Auflösungen von A und A' sind.*

Bemerkung 3.3.6 *Da alle Aussagen dieses Kapitels ein einfaches Analogon über Kokettenkomplexe und kontravariante Funktoren haben, können wir analog zur letzten Definition auch rechtsderivierte Funktoren einführen. Dabei bestimmen wir für einen kontravarianten Funktor S den Wert R^nS an einem Modul A, indem wir eine projektive Auflösung von A bilden, S anwenden und dann die n-te Kohomologiegruppe des entstehenden Kokettenkomplexes ausrechnen.*

Es folgen einige erste Eigenschaften von derivierten Funktoren.

Proposition 3.3.7 *Ist $T : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{Ab}$ rechtsexakt, so sind T und L_0T natürlich äquivalent. Ist T exakt, so ist $L_nT = 0$ für alle $n > 0$.*

Beweis: Es sei P eine projektive Auflösung von A, dann ist $P_1 \to P_0 \to A \to 0$ und somit auch $TP_1 \to TP_0 \to TA \to 0$ exakt aufgrund der Exaktheit von T. Folglich ist $\mathrm{H}_0(TP) \cong TA$ und dieser Isomorphismus ist natürlich. Die Aussage über exakte Funktoren folgt aus der Tatsache, dass TP eine (bis auf die letzte Stelle) exakte Folge bildet und demnach alle Homologiegruppen trivial sind. □

Proposition 3.3.8 *Ist P ein projektiver R-Modul, so ist $L_nT(P) = 0$ für $n \geq 1$ und $L_0T(P) = TP$.*

Beweis: Man betrachte die Auflösung $... \to 0 \to ... \to 0 \to P \to 0$. □

Proposition 3.3.9 *Die linksderivierten Funktoren zu T sind additiv.*

Beweis: Ist P eine projektive Auflösung von A und Q eine projektive Auflösung von B, so ist $P \oplus Q = \{P_n \oplus Q_n, \partial_P \oplus \partial_Q\}$ eine projektive Auflösung von $A \oplus B$. Die Behauptung folgt dann aus der Additivität von T. □

Bemerkung 3.3.10 *Auch diese Aussagen haben allesamt ein Analogon für rechtsderivierte Funktoren.*

Definition 3.3.11 *Es sei A ein R-Rechtsmodul und B ein R-Linksmodul. Dann sind nach Beispiel 2.4.7 die Funktoren $A \otimes_R -$ und $\mathrm{Hom}_R(-, A)$ additiv. Wir definieren $\mathrm{Tor}_n^R(A, -) := L_n(A \otimes_R -)$ und $\mathrm{Ext}_R^n(-, B) := R^n(\mathrm{Hom}_R(-, B))$.*

Bemerkung 3.3.12 *Sind A ein R-Rechtsmodul und B, C R-Linksmoduln, so ist $\mathrm{Tor}_0^R(A, B) \cong A \otimes_R B$ in $\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{Ab}$ und $\mathrm{Ext}_R^n(B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(B, C)$ ebenfalls in $\mathfrak{Ab}$.*

3.4. Gruppenhomologie

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Homologie- und Kohomologietheorie von Gruppen zuwenden. Wir betrachten also statt eines allgemeinen Rings R wie in den vorangehenden Abschnitten den Spezialfall $R = \mathbb{Z}G$, den Gruppenring einer beliebigen Gruppe G über den ganzen Zahlen. Im Folgenden werden $A, A', A'', ...$ stets G-Linksmoduln und $B, B', B'', ...$ stets G-Rechtsmoduln bezeichnen. Darüber hinaus verwenden wir die Notation $\mathrm{Hom}_G(-, -)$ anstelle von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, -)$ und $-\otimes_G-$ anstelle von $-\otimes_{\mathbb{Z}G}-$. Weiter ist $\mathrm{Aug}(G) := \mathrm{Kern}(\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}, \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g)$ wie üblich das Augmentationsideal von $\mathbb{Z}G$.

Definition 3.4.1 *Es sei A ein G-Linksmodul und B ein G-Rechtsmodul.*

1. *$H_n(G, B) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(B, \mathbb{Z})$ heißt die n-te Homologiegruppe von G mit Werten in B.*

2. *$H^n(G, A) := \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, A)$ heißt die n-te Kohomologiegruppe von G mit Werten in A.*

Dabei fassen wir $\mathbb{Z}$ in beiden Fällen als trivialen G-Linksmodul auf.

Nach den Ergebnissen des Abschnitts über allgemeine derivierte Funktoren sind $H_n(G, -)$ und $H^n(G, -)$ offensichtlich kovariante Funktoren. Das Vorgehen zum Bestimmen von $H_n(G, B)$ beziehungsweise $H^n(G, A)$ sieht also wie folgt aus:

Bestimme zunächste eine projektive Auflösung $P : ... \to P_n \to ... \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ des trivialen G-Linksmoduls $\mathbb{Z}$. Wende dann den Funktor $B \otimes_G -$ beziehungsweise $\mathrm{Hom}_G(-, A)$ auf die Auflösung an und bestimme die Homologie von $B \otimes_G P$ beziehungsweise die Kohomologie von $\mathrm{Hom}_G(P, A)$.

Proposition 3.4.2 *Es sei A ein G-Linksmodul und B ein G-Rechtsmodul. Dann gilt:*

1. $\mathrm{H}^0(G,A) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},A) = A^G := \{a \in A \mid ga = a \ \forall\ g \in G\}$.

2. $\mathrm{H}_0(G,B) = B \otimes_G \mathbb{Z} \cong B/(B\mathrm{Aug}(G))$.

Beweis:

1. Die erste Gleichheit ist klar. Sei nun $\phi : \mathbb{Z} \to A$ in $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},A)$, dann ist ϕ eindeutig bestimmt durch $\phi(1)$ und es gilt $g\phi(1) = \phi(g1) = \phi(1)$ also $\phi(1) \in A^G$. Umgekehrt liefert jedes Element von A^G einen wohldefinierten Homomorphismus.

2. Die Abbildung $B \to B \otimes_G \mathbb{Z}, b \mapsto b \otimes 1$ ist $\mathbb{Z}$-linear, surjektiv und ihr Kern ist erzeugt von den Elementen der Form $b - bg, g \in G, b \in B$. Also ist der Kern gerade $B\mathrm{Aug}(G)$.

□

Wir geben an dieser Stelle noch ohne Beweis das universelle Koeffiziententheorem für Gruppenkohomologie an, welches einen Zusammenhang zwischen den Homologie- und den Kohomologiegruppen herstellt.

Satz 3.4.3 *[23, Theorem (3.3)] Es sei M eine abelsche Gruppe, die wir als trivialen G-Modul auffassen. Dann gilt:*

$$\mathrm{H}^p(G,M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}_p(G,\mathbb{Z}),M) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{H}_{p-1}(G,\mathbb{Z}),M).$$

Ist in der Situation des obigen Satzes $M = \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_p(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{r_p} \oplus T_p$ und $\mathrm{H}_{p-1}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{r_{p-1}} \oplus T_{p-1}$ mit ganzen Zahlen r_p, r_{p-1} und endlichen Grupen T_p, T_{p-1}, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^p(G,\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{r_p} \oplus T_p, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{r_{p-1}} \oplus T_{p-1}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{r_p}, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(T_{p-1}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}^{r_p} \oplus T_{p-1}.\end{aligned}$$

Man erhält also die n-te Kohomologiegruppe von G mit Werten in $\mathbb{Z}$ als direkte Summe des freien Anteils der n-ten Homologiegruppe und des Torsionsanteils der $n-1$-ten Homologiegruppe.

3.4.1. Ganzzahlige Gruppen(ko)homologie

Wir wollen uns nun dem Speziallfall der Gruppen(ko)homologie mit Werten im trivialen G-Modul zuwenden. Wir benötigen zunächst das folgende Lemma:

Lemma 3.4.4 (Schlangenlemma) *Es sei*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\mu'"] & B' \arrow[r, "\epsilon'"] & C' & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in der Kategorie $\mathfrak{M}_R$ für einen beliebigen Ring R mit exakten Zeilen. Dann existiert ein verbindender Homomorphismus ω : $\mathrm{Kern}\gamma \to \mathrm{Kokern}\,\alpha$, sodass die Sequenz

$$\mathrm{Kern}(\alpha) \xrightarrow{\mu*} \mathrm{Kern}(\beta) \xrightarrow{\epsilon*} \mathrm{Kern}(\gamma) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Kokern}(\alpha) \xrightarrow{\mu'*} \mathrm{Kokern}(\beta) \xrightarrow{\epsilon'*} \mathrm{Kokern}(\gamma)$$

exakt ist. Ist μ Monomorphismus, so auch $\mu*$; ist ϵ' Epimorphismus, so auch $\epsilon'*$.

Beweis: Die Aussage über die Fortsetzung von Eigenschaften von μ beziehungsweise ϵ ist klar. Darüber hinaus rechnet man leicht nach, dass es sich bei $\mathrm{Kern}\alpha \to \mathrm{Kern}\beta \to \mathrm{Kern}\gamma$ und $\mathrm{Kokern}\,\alpha \to \mathrm{Kokern}\,\beta \to \mathrm{Kokern}\,\gamma$ bereits um exakte Sequenzen handelt. Zu beweisen bleibt also lediglich die Existenz eines verbindenden Homomorphismus. Wir konstruieren $\omega : \mathrm{Kern}(\gamma) \to \mathrm{Kokern}(\alpha)$ wie folgt: Sei $c \in \mathrm{Kern}(\gamma)$. Wir wählen $b \in B$ mit $\epsilon b = c$. Dann ist $\epsilon'\beta b = \gamma\epsilon b = \gamma c = 0$ also ist $\beta b \in \mathrm{Kern}(\epsilon')$ und es existiert $a' \in A'$ mit $\mu' a' = \beta b$. Wir setzen $\omega(c) := [a']$, die Restklasse von a' in $\mathrm{Kokern}(\alpha)$.

Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von ω, also die Unabhängigkeit von der Wahl von b. Sei dazu $\bar{b} \in B$ mit $\epsilon\bar{b} = c$. Dann ist $\bar{b} = b + \mu a$ für ein $a \in A$ und es gilt $\beta(b+\mu a) = \beta b + \mu'\alpha a$. Also ist $\bar{a'} = a' + \alpha a$ und die Restklassen stimmen somit überein. Offensichtlich ist ω Homomorphismus.

Zur Exaktheit in $\mathrm{Kern}(\gamma)$: Sei zunächst $c \in \mathrm{Kern}(\gamma)$ mit $c = \epsilon b$ für ein $b \in \mathrm{Kern}(\beta)$. Dann ist $\mu'(0) = 0 = \beta(b)$ und somit $\omega(c) = [0]$. Sei nun andersherum $c \in \mathrm{Kern}(\gamma)$ mit $\omega(c) = [0]$. Dann ist $c = \epsilon b$ und $\beta b = \mu' a'$ mit $[a'] = [0]$. Also existiert ein $a \in A$ mit

$\alpha a = a'$ und somit gilt $\epsilon(b - \mu a) = \epsilon b - \epsilon\mu a = c$ sowie $\beta(b - \mu a) = \beta b - \mu'\alpha a = 0$ und $b - \mu a$ ist folglich unser gesuchtes Urbild.

Zur Exaktheit in Kokern(α): Es sei $\omega(c) = [a'] \in \mathrm{Kokern}(\alpha)$, also $c = \epsilon b$ mit $\beta b = \mu' a$. Demnach gilt $(\mu' *)([a']) = [\mu' a'] = [\beta b] = [0] \in \mathrm{Kokern}(\beta)$. Ist auf der anderen Seite $[a'] \in \mathrm{Kern}(\mu' *)$, dann ist $\mu' a' = \beta b$ für ein $b \in B$ und $c = \epsilon b \in \mathrm{Kern}(\gamma)$. Also ist $[a'] = \omega(c)$. Dies schließt den Beweis. □

Lemma 3.4.5 *Es sei R ein Ring und $K_q \overset{\mu}{\hookrightarrow} P_{q-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow A$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, wobei $P_0, ..., P_q$ projektiv sind. Ist T rechtsexakt und $q \geq 1$, so ist $0 \to L_q TA \to TK_q \to TP_{q-1}$ exakt.*

Beweis: Es sei $\cdots \to P_{q+1} \to P_q \to K_q \to 0$ eine exakte Sequenz und $P_q, P_{q+1}, ...$ projektiv. Dann ist der Komplex $P : \cdots \to P_{q+1} \to P_q \to P_{q-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$, wobei $P_q \to P_{q-1}$ durch $P_q \to K_q \hookrightarrow P_{q-1}$ gegeben ist, eine projektive Auflösung von A. Nun war T rechtsexakt, also hat das folgende Diagramm exakte Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
 & TP_{q+1} \arrow[r, "T\partial"] \arrow[d] & TP_q \arrow[r] \arrow[d, "T\partial"'] & TK_q \arrow[r] \arrow[d, "\mu*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TP_{q-1} \arrow[r, "\sim"] & TP_{q-1} &
\end{tikzcd}$$

Die Kern-Kokern-Folge aus Lemma 3.4.4 liefert uns die exakte Sequenz $TP_{q+1} \overset{T\partial_{q+1}}{\to} \mathrm{Kern}(T\partial_q) \to \mathrm{Kern}(\mu*) \to 0$. Nun ist $L_q T(A) = \mathrm{H}_q(TP) = \mathrm{Kern}(T\partial_q)/\,\mathrm{Bild}(T\partial_{q-1}) \cong \mathrm{Kern}(\mu*)$ und somit $L_q T(A) \cong \mu*$, was die Behauptung impliziert. □

Lemma 3.4.6 *Es gilt $\mathbb{Z} \otimes_G \mathrm{Aug}(G) \cong \mathrm{Aug}(G)/\mathrm{Aug}(G)^2 \cong G_{ab} := G/G'$.*

Beweis: Die erste Gleichheit ist aus Proposition 3.4.2 bereits bekannt. Es bleibt also $\mathrm{Aug}(G)/\mathrm{Aug}(G)^2 \cong G_{\mathrm{ab}}$ zu zeigen. Als $\mathbb{Z}$-Modul ist $\mathrm{Aug}(G)$ frei auf $S := \{g - 1 \mid 1 \neq g \in G\}$, also setzt die Abbildung $\psi : S \to G/G', g - 1 \mapsto gG'$ zu einem eindeutigen Morphismus $\psi' : \mathrm{Aug}(G) \to G/G'$ fort. Nun gilt $(g-1)(h-1) = (gh-1)-(g-1)-(h-1)$ also ist $\mathrm{Aug}(G)^2 \subset \mathrm{Kern}(\psi')$ und ψ' faktorisiert über $\psi'' : \mathrm{Aug}(G)/\mathrm{Aug}(G)^2 \to G/G'$. Mit der gleichen Begründung ist aber auch $\phi : G \to \mathrm{Aug}(G)/\mathrm{Aug}(G)^2, g \mapsto g - 1 + \mathrm{Aug}(G)^2$ ein wohldefinierter Homomorphismus, der vermöge ϕ' über G/G' faktorisiert (da $\mathrm{Bild}(\phi)$ abelsch). Offensichtlich sind ϕ' und ψ'' invers zueinander und die Behauptung folgt. □

Satz 3.4.7 $\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) \cong G_{ab}$.

Beweis: Wir betrachten die natürliche Präsentation des trivialen G-Moduls $\mathrm{Aug}(G) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. Aus Lemma 3.4.5 erhalten wir die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_G \mathrm{Aug}(G) \xrightarrow{\iota^*} \mathbb{Z} \otimes_G \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathrm{H}_0(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Also ist $\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) = \mathrm{Kern}(\iota^* : \mathbb{Z}\otimes_G \to \mathbb{Z})$, wobei $\iota^*(z\otimes(g-1)) = zg-z = 0$ für $g \in G$ und $z \in \mathbb{Z}$ ist. Folglich ist ι^* der Nullhomomorphismus und $\mathrm{H}_1(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\otimes_G\mathrm{Aug}(G) \cong G/G'$ nach dem vorangehenden Lemma. □

Satz 3.4.8 $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(G_{ab},\mathbb{Z})$

Beweis: Analog zum Beweis des letzten Satzes betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Aug}(G),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Insbesondere ist $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z})$ also $\mathrm{Kokern}(\iota^* : \mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Aug}(G),\mathbb{Z}))$, wobei $\iota^*(a)(g-1) = ga - a = 0$ für $a \in \mathbb{Z}$ und $g \in G$ ist. Also ist $\iota^* \equiv 0$ und $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Aug}(G),\mathbb{Z})$. Nun ist ein $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\phi : \mathrm{Aug}(G) \to \mathbb{Z}$ genau dann G-verträglich, wenn für alle $x,y \in G$ gilt: $\phi(x(y-1)) = x\phi(y-1) = \phi(y-1) \Leftrightarrow \phi((x-1)(y-1)) = 0$. Folglich ist

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Aug}(G),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Aug}(G)/\mathrm{Aug}(G)^2,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{\mathrm{ab}},\mathbb{Z})$$

nach Lemma 3.4.6. □

Korollar 3.4.9 *Ist* $[G : G'] < \infty$, *so ist* $\mathrm{H}^1(G,\mathbb{Z}) = \{0\}$.

Lemma 3.4.10 *Sei G endlich, dann ist* $\mathrm{H}_n(G,\mathbb{Z})$ *endlich erzeugt für alle n.*

Beweis: Konstruieren wir eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$, indem wir mit der Augmentation beginnen und dann in jedem Schritt den Kern der zuvor konstruierten Randabbildung präsentieren, so können wir induktiv davon ausgehen, dass jeder auftretende freie Modul endlichen Rang hat, da der Kern bereits als $\mathbb{Z}$-Modul endlich erzeugt ist. Dann ist aber auch der $\mathbb{Z}$-Rang nach Tensorieren endlich und der Kern im tensorierten Kettenkomplex ist als Untermodul eines endlich erzeugten freien $\mathbb{Z}$-Moduls endlich erzeugt. □

Lemma 3.4.11 *Ist G endlich, $n > 0$, und $\exp(\mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z}))$ der Exponent von $\mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z})$, so gilt $\exp(\mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z})) \mid |G|$.*

Beweis: Es sei F_* eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ und F_n von endlichem Rang für alle n. Wir bezeichnen die natürliche Abbildung $F_n \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_n$ mit ϵ und betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
F_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\epsilon"] & F_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\epsilon"] & F_{n-1} \arrow[d, "\epsilon"] \\
\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_n \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Sei nun $x \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} F_n$ mit $\partial(x) = 0$. Wir müssen zeigen, dass $|G|x \in \mathrm{Bild}(\partial)$. Sei dazu $y \in F_n$ mit $\epsilon(y) = x$. Dann ist $\epsilon\partial(y) = \partial\epsilon(y) = \partial(x) = 0$. Also ist $\partial(y) \in \mathrm{Kern}(\epsilon) = \mathrm{Aug}(G)F_{n-1}$. Setze nun $a := \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}G$. Dann ist $\epsilon(ay) = |G|x$ und $\partial(ay) = a\partial(y) \in a\mathrm{Aug}(G)F_{n-1} = \{0\}$.

Nun war F_* azyklisch, also existiert $z \in F_{n+1}$ mit $\partial(z) = ay$ und somit $|G|x = \epsilon\partial(z) = \partial\epsilon(z) \in \mathrm{Bild}(\partial)$. Dies war aber gerade die Behauptung. $\square$

3.5. Perturbationstheorie

Es sei wie im letzten Abschnitt G eine Gruppe. Für explizite Berechnungen in der Gruppenhomologie ist es offensichtlich von großem Nutzen eine freie $\mathbb{Z}G$-Auflösung von $\mathbb{Z}$ vorliegen zu haben. Für endliche Gruppen gibt es zu diesem Zweck implementierte Algorithmen (beispielsweise in “HAP” [11]), welche unter anderem den Ideen aus [10, 12, 24] folgen. Für unendliche Gruppen ist dies ungleich schwieriger.

Wir beschreiben im Folgenden eine Methode zur Bestimmung einer solchen Auflösung, welche in [12] aufbauend auf einem Resultat aus [24] entwickelt und unter anderem in [9] erfolgreich angewendet wurde. Wir präsentieren und beweisen hier die allgemeine Version aus [9].

Zunächst benötigen wir das folgende einfache Lemma.

Lemma 3.5.1 *Es sei R ein Ring und P ein projektiver R-Modul. Wir betrachten das Diagramm*

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dl, "\theta"'] \\
C & B \arrow[l, "\beta"] & A. \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}
$$

Dabei sei die untere Zeile exakt und $\beta\theta = 0$. Dann existiert $\psi : P \to A$ mit $\alpha\psi = \theta$.

Beweis: $\beta\theta = 0$ impliziert, dass θ ein $\theta' : P \to \mathrm{Kern}(\beta)$ induziert. Nach Exaktheit ist aber $\alpha' : A \to \mathrm{Kern}(\beta)$ surjektiv und ψ existiert aufgrund der Projektivität von P. $\square$

Satz 3.5.2 *[9, Lemma 4] Es seien $\{A_{p,q} \mid p, q \geq 0\}$ eine bigraduierte Familie freier $\mathbb{Z}G$-Moduln und weiter $d_0 : A_{p,q} \to A_{p,q-1}$ $\mathbb{Z}G$-Modulhomomorphismen, sodass $(A_{p,*}, d_0)$ für jedes p ein azyklischer Kettenkomplex ist. Wir setzen $C_p := \mathrm{H}_0(A_{p,*})$ und nehmen darüber hinaus an, dass $\mathbb{Z}G$-Modulhomomorphismen $\partial : C_p \to C_{p-1}$ existieren, sodass (C_*, ∂) ein $\mathbb{Z}G$-Kettenkomplex ist. Dann gilt:*

1. *Es existieren $\mathbb{Z}G$-Modulhomomorphismen $d_k : A_{p,q} \to A_{p-k,q+k-1}$ für $k \geq 1, p > k$ mit der folgenden Eigenschaft:*

$$d = d_0 + d_1 + d_2 + ... : R_n := \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q} \to R_{n-1} = \bigoplus_{p+q=n-1} A_{p,q}$$

   ist die Randabbildung eines Kettenkomplexes R_* freier $\mathbb{Z}G$-Moduln.Der Morphismus d heißt dann auch eine Perturbation.

2. *Die kanonischen Kettenabbildungen $\phi_p : A_{p,*} \to \mathrm{H}_0(A_{p,*})$ liefern eine Kettenabbildung $\phi_* : R_* \to C_*$, welche einen Isomorphismus auf den Homologiegruppen induziert.*

3. *Angenommen es existieren $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen $h_0 : A_{p,q} \to A_{p,q+1}$, sodass $d_0h_0d_0(x) = d_0(x)$ für alle $x \in A_{p,q+1}$ (eine sogenannte Kontraktionshomotopie). Dann kann d_k konstruiert werden, indem man zunächst ∂ zu $d_1 : A_{p,0} \to A_{p-1,0}$ liftet und dann für die freien Erzeuger von $A_{p,q}$ rekursiv $d_k = -h_0(\sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i})$ setzt.*

Beweis:

1. Der erste Teil des Beweises folgt dem Vorgehen aus [24, Lemma 2]. ϵ_p sei der natürliche Homomorphismus $A_{p,0} \to \mathrm{H}_0(A_{p,*}) = C_p$. Wir müssen $d_1, d_2, ...$ so konstruieren, dass $\sum_{i=0}^{k} d_i d_{k-i} = 0$. Dazu konstruieren wir zunächst $d_1 : A_{p,0} \to A_{p-1,0}$

so, dass $\epsilon_{p-1} d_1 = \partial \epsilon_p : A_{p,0} \to C_{p-1}$. Zu diesem Zweck beachte man, dass $A_{p,0}$ frei, also projektiv, und $\epsilon_{p-1} : A_{p-1} \to C_{p-1}$ ein Epimorphismus ist. Folglich können wir d_1 mit der gewünschten Eigenschaft konstruieren.

Nun zeigen wir die Existenz von $d_1 : A_{p,q} \to A_{p-1,q}$ mit $d_1 d_0 = -d_0 d_1$ durch Induktion nach q. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A_{p,q} \arrow[r, dashed, "d_1"] \arrow[dr, "-d_1 d_0"] & A_{p-1,q} \arrow[d, "d_0"] \\
A_{p,q-1} \arrow[r, "d_1"] & A_{p-1,q-1} \arrow[d, "d_0"] \\
 & A_{p-1,q-2}
\end{tikzcd}$$

Dieses erfüllt die Voraussetzungen aus dem vorangehenden Lemma, da $d_0(-d_1 d_0) = d_1 d_0^2 = 0$ und wir erhalten $d_1 : A_{p,q} \to A_{p-1,q}$ mit der gewünschten Eigenschaft. (Für $q = 1$ setzen wir kanonisch $A_{p-1,q-2} = A_{p-1,-1} := C_{p-1}$.)

Jetzt können wir d_k mit der oben geforderten Eigenschaft per Induktion nach k konstruieren. Nehmen wir also an, dass wir $d_i, i < k$ bereits konstruiert haben, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{k-i} \right) d_0 &= - \sum_{i=1}^{k-1} d_i \left(\sum_{j=1}^{k-i} d_{k-i-j} d_j \right) \\
&= - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{k-j} d_i d_{k-i-j} \right) d_j \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} d_0 d_{k-j} d_j \\
&= d_0 \left(\sum_{j=1}^{k-1} d_{k-j} d_j \right),
\end{aligned}$$

wobei wir die Induktionsvoraussetzung einmal für $k-i$ und einmal für $k-j$ benutzt haben. Wir fahren fort mit Induktion nach q. Für $q = 0$ haben wir $d_0 A_{p,0} = 0$ also liefert auch der obige Ausdruck ausgewertet an $A_{p,0}$ bereits 0 (für $k = 2$ verwenden wir statt dieser Tatsache, dass $\epsilon_{p-2} d_1^2 = \partial^2 \epsilon_p = 0$). Nach unserem Lemma können wir also die Abbildung

$$-\sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{k-i} : A_{p,0} \to A_{p+k,k-2}$$

in $d_0 d_k$ faktorisieren und es ist $d_0 d_k = d_0 d_k + d_k d_0$ (auf $A_{p,0}$). Für $q = 0$ können wir also d_k wie gewünscht konstruieren.

Sei nun $q > 0$. Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung für $q - 1$ und erhalten:

$$d_0 \left(\sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{k-i} \right) = \left(\sum_{j=1}^{k-1} d_j d_{k-j} \right) d_0 = -(d_0 d_k + d_k d_0) d_0 = -d_0 d_k d_0.$$

Wir wenden erneut das vorangehende Lemma an und faktorisieren $-\sum_{i=0}^{k-1} d_i d_{k-i}$ als $d_k d_0$. Dies schließt den Induktionsschritt in q und damit den in k.

Setzen wir nun $R_n := \bigoplus_{p+q=n} A_{p,q}$ und $d := \sum d_k$, so erhalten wir also per Konstruktion einen Kettenkomplex (R_*, d). Man beachte, dass auf jedem $A_{p,q}$ jeweils nur endlich viele der d_k nicht 0 sind.

2. Wir betrachten die Kettenabbildung $\phi : R_* \to C_*$, wobei wir $\phi_n(A_{p,q}) = 0$ für $p + q = n, p \neq n$ und $\phi_n | A_{n,0} = \epsilon_n$ setzen. Nach Konstruktion wissen wir, dass $\epsilon d_1 = \partial \epsilon$ und ϕ ist somit in der Tat eine Kettenabbildung.

   Wir zeigen nun, dass ϕ einen Isomorphismus auf den Homologiegruppen induziert, wobei wir bereits wissen, dass ϕ auf kanonische Art und Weise einen Homomorphismus festlegt. Wir wollen mit $\pi_{p,q} : R_{p+q} \to A_{p,q}$ die natürliche Projektion bezeichnen.

   Zunächst zur Injektivität: Sei also $x \in R_n$ mit $d(x) = 0$ und $\phi(x) \in \mathrm{Bild}(\partial)$. Wir müssen zeigen, dass $z \in R_{n+1}$ existiert mit $d(z) = x$. Dazu verschaffen wir uns induktiv $x_{n+1-k,k} \in A_{n+1-k,k}$, sodass stets $\pi_{n-j,j}(x) = d_0(x_{n-j,j+1}) + ... + d_{j+1}(x_{n+1,0})$ für alle $j \leq k - 1$ gilt.

   Für den Induktionsanfang sei $k = 0$. Nun ist $\phi(x) = \partial(y)$ für ein $y \in C_{n+1}$ und es existiert $x_{n+1,0} \in A_{n+1,0}$ mit $\epsilon(x_{n+1,0}) = y$. Dann gilt:

$$\epsilon \pi_{n,0}(x) = \phi(x) = \partial(y) = \partial \epsilon(x_{n+1,0}) = \epsilon d_1(x_{n+1,0}).$$

   Folglich ist $d_1(x_{n+1,0}) - \pi_{n,0}(x) \in \mathrm{Kern}(\epsilon) = \mathrm{Bild}(d_0)$ und es existiert ein $x_{n,1} \in A_{n,1}$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Sei nun $k > 0$ und $x_{n+1,0}, ..., x_{n+1-k,k}$ bereits wie gewünscht konstruiert. Wir möchten nun also die Existenz von $x_{n-k,k+1} \in A_{n-k,k+1}$ zeigen mit

$$\pi_{n-k,k}(x) - d_{k+1}(x_{n+1,0}) - ... - d_1(x_{n+1-k,k}) = d_0(x_{n-k,k+1}).$$

Da $(A_{n-k,*}, d_0)$ azyklisch ist, genügt es zu zeigen, dass

$$d_0(\pi_{n-k,k}(x) - d_{k+1}(x_{n+1,0}) - ... - d_1(x_{n+1-k,k})) = 0.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&d_0(\pi_{n-k,k}(x) - d_{k+1}(x_{n+1,0}) - ... - d_1(x_{n+1-k,k})) \\
&= d_0\pi_{n-k,k}(x) - d_0 d_{k+1}(x_{n+1,0}) - ... - d_0 d_1(x_{n+1-k,k}) \\
&= d_0\pi_{n-k,k}(x) + \left(\sum_{i=1}^{k+1} d_i d_{k+1-i}\right)(x_{n+1,0}) + ... + d_1 d_0(x_{n+1-k,k+}) \\
&= d_0\pi_{n-k,k}(x) + d_1\left(\sum_{i=0}^{k} d_i(x_{n+1-k+i,k-i})\right) + ... + d_{k+1}d_0(x_{n+1,0}) \\
&= d_0\pi_{n-k,k}(x) + d_1\left(\sum_{i=0}^{k} d_i(x_{n+1-k+i,k-i})\right) + ... + d_k(d_1(x_{n+1,0}) + d_0(x_{n,1})) \\
&= d_0\pi_{n-k,k}(x) + d_1\pi_{n+1-k,k-1}(x) + ... + d_k\pi_{n,0}(x) \\
&= \pi_{n-k,k-1}(d(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies schließt die Induktion (man beachte, dass wir nach endlich vielen Schritten, namentlich bei $x_{0,k+1}$, fertig sind) und die durch ϕ induzierte Abbildung auf den Homologiegruppen ist folglich injektiv.

Zur Surjektivität: Sei also $y \in C_n$ mit $\partial(y) = 0$. Wir müssen die Existenz von $x \in R_n$ mit $\phi(x) = y$ und $d(x) = 0$ zeigen. Für $n = 0$ ist hier nichts zu tun, sei also sofort $n \geq 1$. Wir gehen analog zum Beweis für die Injektivität vor und konstruieren uns sukzessive $x_{n-k,k}$, sodass stets $\pi_{n-j,j-1}d(x_{n-j,j} + ... + x_{n,0}) = d_0(x_{n-j,j}) + ... + d_j(x_{n,0}) = 0$ sowie $\phi(x_{n-j,j} + ... + x_{n,0}) = \epsilon(x_{n,0}) = y$ gilt.

Sei zunächst $k = 0$. $\epsilon : A_{n,0} \to C_n$ ist surjektiv, also existiert ein $x_{n,0} \in A_{n,0}$ mit $\epsilon(x_{n,0}) = y$. Nun gilt

$$0 = \partial(y) = \partial\epsilon(x_{n,0}) = \epsilon d_1(x_{n,0})$$

und somit ist $d_1(x_{n,0}) \in \text{Kern}(\epsilon) = \text{Bild}(d_0)$ und wir finden das gesuchte $x_{n-1,1}$.

Sei nun $k \geq 1$ und $x_{n,0}, ..., x_{n-k,k}$ bereits konstruiert. Wir suchen also $x_{n-k-1,k+1}$ mit

$$d_0(x_{n-k-1,k+1}) = d_{k+1}(x_{n,0}) + ... + d_1(x_{n-k,k}).$$

Aufgrund der Azyklizität von $A_{n-k-1,*}$ genügt es also auch hier wieder zu zeigen, dass

$$d_0(d_{k+1}(x_{n,0}) + ... + d_1(x_{n-k,k})) = 0.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&d_0(d_{k+1}(x_{n,0}) + ... + d_1(x_{n-k,k})) \\
&= d_0 d_{k+1}(x_{n,0}) + ... + d_0 d_1(x_{n-k,k}) \\
&= -\left(\sum_{i=1}^{k+1} d_i d_{k+1-i}(x_{n,0}) + ... + d_1 d_0(x_{n-k,k})\right) \\
&= -\left(d_1 \sum_{i=0}^{k} d_i(x_{n-k+i,k-i}) + ... + d_k(d_1(x_{n,0}) + d_0(x_{n-1,1})) + d_{k+1} d_0(x_{n,0})\right) \\
&= -\left(d_1 \sum_{i=0}^{k} d_i(x_{n-k+i,k-i}) + ... + d_k(d_1(x_{n,0}) + d_0(x_{n-1,1}))\right) \\
&= -\left(d_1 \pi_{n-k,k-1}(d(x_{n,0} + ... + x_{n-k,k})) + ... + d_k \pi_{n-1,0}(d(x_{n,0} + x_{n-1,1}))\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies schließt die Induktion (auch hier wieder nach endlich vielen Schritten).

Insgesamt induziert ϕ also tatsächlich Isomorphismen zwischen den Homologiegruppen von (R_*, d) und (C_*, ∂).

3. Wir gehen rekursiv in k vor und zeigen durch Induktion nach q, dass die nötige Funktionalgleichung an die d_i erfüllt ist. Den Induktionsanfang liefert uns die Konstruktion von d_1. Seien also nun $d_1, ..., d_{k-1}$ bereits vollständig konstruiert und d_k konstruiert auf $A_{p,l}$ mit $l < q$. Dann setzen wir jetzt $d_k : A_{p,q} \to A_{p-k,q+k-1}$ mit $d_k(x) = -h_0\left(\sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i}\right)(x)$ auf den freien Erzeugern x von $A_{p,q}$. Wir müssen nun zeigen, dass

$$d_0 d_k + ... + d_k d_0 = 0.$$

Nun gilt auf den freien Erzeugern

$$\begin{aligned} d_0 d_k + ... + d_k d_0 &= -d_0 h_0 \sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i} + \sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i} \\ &= (\mathbb{1} - d_0 h_0) \sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i} \end{aligned}$$

und wir wissen bereits, dass $(\mathbb{1} - d_0 h_0) d_0 = 0$. Es genügt also zu zeigen, dass für die freien Erzeuger bereits $\sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i}(x) \in \mathrm{Bild}(d_0)$ ist, was aufgrund der Azyklizität von $A_{p,*}$ der Aussage $d_0 \sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i}(x) = 0$ entspricht.

Dazu:

$$\begin{aligned} d_0 \sum_{i=1}^{k} d_i d_{k-i} &= d_0 \left(d_k d_0 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{k-i} \right) \\ &= d_0 d_k d_0 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{k-i} d_0 \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} d_i d_{k-i} \right)}_{=0} d_0 \end{aligned}$$

Dabei gilt die vorletzte Gleichheit aufgrund der Rechnung aus dem Beweis des ersten Teils und die Summe im letzten Term ist 0 nach Induktionsvoraussetzung. Wir können also die d_k auf diese Art und Weise aus der Kontraktionshomotopie gewinnen.

□

Lemma 3.5.3 *Die Abbildung h_0 aus Satz 3.5.2 (2) existiert in der Situation des Satzes stets.*

Beweis: In der Situation des Satzes ist $A_{p,q}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul für alle $p, q \geq 0$. Dann ist aber auch $d_0(A_{p,q}) \cong A_{p,q}/\mathrm{Kern}(d_0)$ frei und wir können schreiben: $A_{p,q} = \mathrm{Kern}(d_0) \oplus M$ als $\mathbb{Z}$-Modul für einen freien $\mathbb{Z}$-Modul M. Nun ist aber $A_{p,*}$ azyklisch und damit insbesondere $\mathrm{Kern}(d_0) = \mathrm{Bild}(d_0)$. Folglich können wir jedes $x \in A_{p,q}$ eindeutig zerlegen als $x = d_0(a) + m$ mit $a \in A_{p,q+1}$ und $m \in M$ und dann $h_0(x) := a$ setzen, um h_0 mit den geforderten Eigenschaften zu konstruieren. □

Bemerkung 3.5.4 *Ist in der Situation des vorangehenden Satzes jedes der C_n eine direkte Summe getwisteter Permutationsmoduln, also von der Gestalt*

$$C_n \cong \bigoplus_{i=1}^{k_n} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S_{n,i}} \mathbb{Z}^{\chi_{n,i}},$$

wobei $S_{n,i} \leq G$ auf $\mathbb{Z}$ vermöge des linearen Charakters $\chi_{n,i}$ operiert, so kann die nötige Auflösung von C_n wie folgt gewonnen werden:

Man verschaffe sich zu $\mathbb{Z}$ eine freie $\mathbb{Z}S_{n,i}-$Auflösung $R_*^{n,i}$, tensoriere diese mit $\mathbb{Z}^{\chi_{n,i}}$, um eine freie $\mathbb{Z}S_{n,i}-$Auflösung $T_*^{n,i} := \mathbb{Z}^{\chi_{n,i}} \otimes_{\mathbb{Z}} R_*^{n,i}$ von $\mathbb{Z}^{\chi_{n,i}}$ zu erhalten und setze schließlich $A_{n,*} := \bigoplus_{i=1}^{k_n} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S_{n,i}} T_*^{n,i}$.

Ist also jedes $S_{n,i}$ eine echte Untergruppe von G, so erhält man auf diese Weise eine Rekursion, um eine Auflösung von G zu bestimmen.

Ist in der Situation der vorherigen Bemerkung jeder Stabilisator endlich, so können die implementierten Algorithmen aus "HAP" ([11]) verwendet werden. Diese bestimmen neben einer freien $\mathbb{Z}S$-Auflösung von $\mathbb{Z}$ auch stets eine Kontraktionshomotopie für eben diese.

Bemerkung 3.5.5 *Der in Satz 3.5.2 angedeutete Algorithmus ist für die Situation aus der obigen Bemerkung in "HAP" ([11]) implementiert. Die benötigten Informationen sind dabei die Randabbildung in C_*, die Stabilisatoren in jeder Dimension sowie die Orientierungscharaktere.*

4. Algebraische Topologie

In diesem kurzen Kapitel wollen wir einige Grundlagen der algebraischen Topologie vorstellen, die für den Hauptteil der Arbeit von Relevanz sind. Ob der Komplexität des Themas und der Tatsache, dass nur einige wenige Resultate im Weiteren benötigt werden, werden wir die meisten Resultate hier ohne Beweis angeben.

4.1. Grundlegende Definitionen

Definition 4.1.1 *Es sei X ein topologischer Raum und A ein Teilraum.*

1. *Der Teilraum A heißt Retrakt von X, falls die Einbettung $A \hookrightarrow X$ eine stetige Linksinverse F hat.*

2. *Der Teilraum A heißt Deformationsretrakt, falls eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to X$ existiert mit:*

   a) $F(x, 0) = x \;\forall\; x \in X$.

   b) $F(x, 1) \in A \;\forall\; x \in X$.

   c) $F(a, 1) = a \;\forall\; a \in A$.

3. *Der Teilraum A heißt starker Deformationsretrakt, falls eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to X$ existiert mit:*

   a) $F(x, 0) = x \;\forall\; x \in X$.

   b) $F(x, 1) \in A \;\forall\; x \in X$.

   c) $F(a, \lambda) = a \;\forall\; a \in A, \lambda \in [0,1]$.

Die Abbildung F heißt dann auch (eine) Retraktion von X auf A.

Definition 4.1.2 *Ein topologischer Raum X heißt kontrahierbar, falls eine Deformationsretraktion von X auf einen einzelnen Punkt in X existiert.*

Lemma 4.1.3 *Kontrahierbarkeit vererbt sich auf Retrakte; i.e. ist A ein Retrakt von X und X kontrahierbar, so ist auch A kontrahierbar.*

Beweis: Es sei $F_x : X \times [0,1] \to X$ die Deformationsretraktion von X auf den Punkt x und $F_A : X \to A$ die Retraktion von X auf A. Dann ist $F_A \circ F_x|_{A\times[0,1]}$ eine Deformationsretraktion von A auf $F_A(x)$ und A ist demnach kontrahierbar. □

4.2. CW-Komplexe

In diesem Abschnitt soll es um eine wichtige Klasse topologischer Räume, die sogenannten CW-Komplexe, gehen. Obwohl wir uns in der angedachten Anwendung dieser Theorie in einem deutlich übersichtlicheren Fall (nämlich in der Klasse der polytopalen Komplexe) befinden werden, geben wir hier zunächst die allgemeine Definition an. Die Details zu dieser Theorie finden sich beispielsweise in [15].

Definition 4.2.1 *Ein CW-Komplex ist ein topologischer Raum X, der auf dem folgenden Weg konstruiert wird:*

1. *Man starte mit einer diskreten Menge X^0 von Punkten, dem sogenannten 0-Skelett von X*

2. *Erhalte das n-Skelett X^n von X durch "Anheften" von n-Zellen e^n_α an X^{n-1} entlang Abbildungen $\phi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. Das heißt X^n ist der Quotientenraum von $X^{n-1} \cup \bigcup_\alpha D^n_\alpha$ vermöge der Identifikation $a = \phi_\alpha(a)$ für a im Rand von D^n_α. Anschaulich entsteht X^n also durch Hinzufügen von n-dimensionalen Kugeln zu X^{n-1} wobei wir den Rand jeder dieser Kugeln mit bereits Bekanntem identifizieren.*

3. *$X = \bigcup_n X^n$ und $A \subset X$ ist genau dann offen, wenn $A \cap X^n$ offen in X^n ist für alle n.*

Definition 4.2.2 *Es sei X ein CW-Komplex.*

1. *Der zelluläre Kettenkomplex zu X ist der Komplex:*

$$\cdots \to \mathrm{H}_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to \mathrm{H}_n(X_n, X_{n-1}) \to \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \to \cdots$$

Dabei ist $\mathrm{H}_n(X_n, X_{n-1})$ *eine freie abelsche Gruppe, deren Erzeuger mit den* n*-Zellen von* X *identiziert werden können. Zur Definition des Randoperators sei* e^n_α *eine* n*-Zelle von* X *und* $\chi^n_\alpha : \partial e^n_\alpha \cong S^{n-1} \to X^{n-1}$ *die anheftende Abbildung. Definiere nun zu jeder* $n-1$*-Zelle* e^{n-1}_β *die Abbildung* $\chi^n_{\alpha\beta} : S^{n-1} \to X^{n-1} \to X^{n-1}/(X^{n-1} - e^{n-1}_\beta)$*. Die zweite Abbildung in dieser Verknüpfung identifiziert dabei alle Punkte aus* $X^{n-1} - e^{n-1}_\beta$*. Der Randoperator ist dann gegeben durch*

$$d_n : \mathrm{H}_n(X_n, X_{n-1}) \to \mathrm{H}_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}), e^n_\alpha \mapsto \sum_\beta \deg(\chi^n_{\alpha\beta}) e^{n-1}_\beta.$$

Dabei ist deg *der topologische Grad einer Abbildung für dessen Definition wir auf [15] verweisen.*

2. *Wir definieren* $\mathrm{H}_n(X)$ *als die* n*-te Homologiegruppe des zellulären Kettenkomplexes zu* X*.*

Wir geben ohne Beweis das folgende Lemma an (vergleiche [15] Kapitel 2, Lemma (2.34)).

Lemma 4.2.3 *Der zelluläre Kettenkomplex ist tatsächlich ein Kettenkomplex von* $\mathbb{Z}$*-Moduln. Insbesondere ist* $d_{n-1}d_n = 0$ *für alle* n*.*

Bei den im weiteren Verlauf der Arbeit auftauchenden CW-Komplexen wird es sich stets um polytopale Komplexe in einem reellen Vektorraum handeln. Das heißt der gesamte CW-Komplex ist in den $\mathbb{R}^n$ eingebettet für ein $n \in \mathbb{N}$, jede Zelle ist ein (beschränktes) Polytop - also die konvexe Hülle endlich vieler Punkte - und der Schnitt je zweier Zellen ist wieder eine Zelle. In diesem Fall vereinfacht sich auch die Randabbildung deutlich; das Bild einer n-Zelle ist eine gewichtete Summe der $(n-1)$-Zellen im Rand, wobei jedes Gewicht 1 oder -1 ist.

Lemma 4.2.4 *Ist* X *ein kontrahierbarer CW-Komplex, so erhält man im zellulären Kettenkomplex* $\mathrm{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}$ *und* $\mathrm{H}_n(X) = \{0\}$*.*

Einen Beweis findet man beispielsweise in [17] Aussage (2.2).

5. Duale Kegel

In diesem Kapitel präsentieren wir einige Ergebnisse zur Theorie dualer Kegel aus [18]. Die Resultate möchten wir anschließend auf den Kegel der positiv definiten Formen übertragen. Aus diesem Grund werden wir hier nur die Aussagen beweisen, die für die anschließenden Kapitel relevant sind.

5.1. Perfekte Punkte

Definition 5.1.1 *Seien $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ reelle Vektorräume der Dimension n und $\sigma : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathbb{R}$ linear und nicht ausgeartet in beiden Komponenten. Zwei Menge $\mathcal{V}_1^{>0}$ und $\mathcal{V}_2^{>0}$ heißen duale Kegel (bezüglich σ), falls sie die folgenden Axiome erfüllen:*

1. *Die Menge $\mathcal{V}_i^{>0}$ ist offen und nichtleer in $\mathcal{V}_i$ für $i = 1, 2$.*

2. *Für $x_i \in \mathcal{V}_i^{>0},\ i = 1, 2$ gilt stets $\sigma(x_1, x_2) > 0$.*

3. *Für jedes $x_1 \in \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_1^{>0}$ existiert ein $x_2 \in \mathcal{V}_2^{\geq 0}$ mit $\sigma(x_1, x_2) \leq 0$ und umgekehrt. Dabei bezeichne $\mathcal{V}_i^{\geq 0}$ den Abschluss von $\mathcal{V}_i^{>0}$ in $\mathcal{V}_i$.*

Man beachte das diese Definition symmetrisch in $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ ist. Für den Rest dieses Abschnitts seien nun $\mathcal{V}_1^{>0}$ und $\mathcal{V}_2^{>0}$ zwei duale Kegel (bezüglich σ) und wir bezeichnen mit $\partial\mathcal{V}_i^{>0}$ den Rand von $\mathcal{V}_i^{\geq 0}$ für $i = 1, 2$.

Lemma 5.1.2 *[18, Lemma 1.1]*

1. *Seien $x, y \in \mathcal{V}_1^{>0}$ und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist auch $ax + by \in \mathcal{V}_1^{>0}$.*

2. *Sei $0 \neq x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ und $y \in \mathcal{V}_2^{>0}$, dann ist $\sigma(x, y) > 0$.*

3. *Zu $x \in \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ existiert $y \in \mathcal{V}_2^{>0}$ mit $\sigma(x, y) < 0$.*

4. *Zu* $0 \neq x \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$ *existiert* $0 \neq y \in \partial\mathcal{V}_2^{>0}$ *mit* $\sigma(x,y) = 0$.

5. *Ist* $x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$ *und* $-x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$*, so ist bereits* $x = 0$.

6. *Sei* Φ_2 *ein (positiv definites) Skalarprodukt auf* $\mathcal{V}_2$ *und setze* $|y|_2 := \sqrt{\Phi_2(y,y)}$*. Ist nun* $A \subset \mathcal{V}_1^{>0}$ *kompakt, so existiert* $0 < \rho(A) \in \mathbb{R}$ *mit* $\sigma(a,y) \geq \rho(A)|y|_2$ *für alle* $a \in A$ *und* $y \in \mathcal{V}_2^{\geq 0}$.

Definition 5.1.3 *Sei* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ *diskret in* $\mathcal{V}_2$ *und* $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$.

1. *Die Zahl* $\min_{\mathcal{Z}}(x) := \min\{\sigma(x,z) \mid z \in \mathcal{Z}\}$ *heißt das* $\mathcal{Z}$*-Minimum von* x.

2. *Die Elemente von* $S_{\mathcal{Z}}(x) := \{z \in \mathcal{Z} \mid \min_{\mathcal{Z}}(x) = \sigma(x,z)\}$ *heißen die* $\mathcal{Z}$*-kürzesten Vektoren von* x.

3. *Der Kegel* $V_{\mathcal{Z}}(x) := \{\sum_{z \in S_{\mathcal{Z}}(x)} a_z z \mid a_z \in \mathbb{R}_{>0}\}$ *heißt der* $\mathcal{Z}$*-Voronoibereich des Punktes* x.

4. *Der Punkt* x *heißt* $\mathcal{Z}$*-perfekt, wenn* $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}(x)$ *nichtleeres Inneres hat.*

5. *Die Menge der* $\mathcal{Z}$*-perfekte Vektoren mit Minimum* 1 *bezeichnen wir mit* $P_{\mathcal{Z}}$.

Bemerkung 5.1.4 *Mit den Bezeichnungen aus der vorangehenden Definition gilt:*

1. *Die Menge* $S_{\mathcal{Z}}(x)$ *ist endlich.*

2. *Der Punkt* x *ist genau dann perfekt, wenn* $S_{\mathcal{Z}}(x)$ *eine Basis von* $\mathcal{V}_2$ *enthält.*

Lemma 5.1.5 *[18, Lemma 1.3] Es sei* $\mathcal{Z} \subset \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ *diskret in* $\mathcal{V}_2$.

1. *Zu* $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$ *existiert eine Umgebung* $U \subset \mathcal{V}_1^{>0}$ *von* x *mit* $S_{\mathcal{Z}}(u) \subset S_{\mathcal{Z}}(x)$ *für alle* $u \in U$.

2. *Die Funktion* $\min_{\mathcal{Z}}$ *ist stetig.*

Beweis: Es sei $B := B_r(x)$ ein kompakter Ball vom Radius r um x, welcher vollständig in $\mathcal{V}_1^{>0}$ enthalten ist. Nach Lemma 5.1.2 existiert $\rho(B) > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\sigma(b,z) \geq \rho(B)|z|_2$ für beliebige $b \in B$ und $z \in \mathcal{Z}$.

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Die Menge $M := \{z \in \mathcal{Z} \mid \sigma(b,z) \leq \min_{\mathcal{Z}}(x) + \epsilon$ für ein $b \in B\}$ ist endlich, da $\mathcal{Z}$ diskret ist und es ist sicherlich $S_{\mathcal{Z}}(x) \subset M$. Wir setzen $M' := M - S_{\mathcal{Z}}(x)$.

Sei nun $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $0 < \kappa < \min(\{\epsilon\} \cup \{\sigma(x,z) - \min_{\mathcal{Z}}(x) \mid z \in M'\})$. Wir wählen $0 < \delta < r$, sodass $|\sigma(y,z)| < \frac{\kappa}{2}$ für jedes $z \in \mathcal{Z}$ und $y \in B_\delta(0)$. Dann gilt $x + y \in B$ für $y \in B_\delta(0)$ und folglich gilt:

$$\sigma(x+y,z) = \sigma(x,z) + \sigma(y,z) \begin{cases} < \min_{\mathcal{Z}}(x) + \kappa/2 & z \in S_D(x) \\ > \min_{\mathcal{Z}}(x) + \kappa/2 & z \in M' \\ > \min_{\mathcal{Z}}(x) + \kappa/2 & z \in D - M \end{cases}$$

Also ist $\sigma(x+y,z) > \min_{\mathcal{Z}}(x) + \epsilon > \min_{\mathcal{Z}}(x) + \kappa/2$ für $z \in \mathcal{Z} - M$ und $x + y \in B$. Dann ist aber $S_{\mathcal{Z}}(x+y) \subset S_{\mathcal{Z}}(x)$ für alle $y \in B_\delta(0)$ und Behauptung (1) folgt.

Teil (2) folgt ebenfalls, da κ beliebig war und $|\min_{\mathcal{Z}}(x) - \min_{\mathcal{Z}}(x+y)| \leq \kappa/2$ für alle $y \in B_\delta(0)$ gilt. □

Definition 5.1.6 *Eine diskrete Menge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ heißt zulässig, falls für jede Folge $(x_i)_i \subset \mathcal{V}_1^{>0}$, die gegen einen Punkt $x \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$ konvergiert, die Folge $(\min_{\mathcal{Z}}(x_i))_i$ gegen 0 konvergiert.*

Lemma 5.1.7 *[18, Lemma 1.5] Eine diskrete Menge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{V}_2^{\geq 0} - \{0\}$ ist genau dann zulässig, wenn zu jedem $x \in \partial\mathcal{V}_1^{>0}$ und $\epsilon > 0$ ein $z \in \mathcal{Z}$ existiert mit $\sigma(x,z) \leq \epsilon$.*

Lemma 5.1.8 *[18, Lemma 1.6] Es sei $\mathcal{Z} \subset \mathcal{V}_2^{\geq 0}$ diskret und zulässig. Dann ist $P_{\mathcal{Z}}$ diskret.*

Beweis: Es sei $(x_i)_i \subset P_{\mathcal{Z}}$ konvergent gegen $x \in \mathcal{V}_1^{\geq 0}$. Dann ist $x \notin \partial\mathcal{V}_1^{>0}$, da sonst $(\mu(x_i)) \to 0$ gilt, aber $\min_{\mathcal{Z}}(x_i) = 1$ für alle i. Also ist $x \in \mathcal{V}_1^{>0}$.

Nun existiert eine Umgebung U von x mit $S_D(u) \subset S_{\mathcal{Z}}(x)$ für alle $u \in U$ nach Lemma 5.1.5. Insbesondere existiert also auch ein $i_0 \in \mathbb{N}$, sodass $S_{\mathcal{Z}}(x_i) \subset S_{\mathcal{Z}}(x)$ für alle $i > i_0$. Sei nun $i > i_0$. Da x_i perfekt ist, existieren linear unabhängige $z_1, ..., z_n \in S_{\mathcal{Z}}(x_i) \subset S_{\mathcal{Z}}(x)$ und für diese Vektoren gilt $\sigma(x_i - x/\min_{\mathcal{Z}}(x), z_j) = 0,\ 1 \leq j \leq n$. σ war aber nach Wahl nicht ausgeartet und folglich impliziert dies bereits $x_i - x/\min_{\mathcal{Z}}(x) = 0$ für alle $i > i_0$ und damit die Behauptung. □

Korollar 5.1.9 *[18, Corollary 1.7] Es seien $x, y \in \mathcal{V}_1^{>0}$ zwei $\mathcal{Z}$-perfekte Formen, sodass $S_{\mathcal{Z}}(y) \cap S_{\mathcal{Z}}(x)$ eine Basis von $\mathcal{V}_2$ enthält. Dann existiert $\lambda > 0$ mit $x = \lambda y$.*

6. Quadratische Formen und der Well-Rounded-Komplex

Wir beginnen nun mit der Untersuchung des topologischen Raums, welcher uns schlussendlich Auflösungen für die Einheitengruppen gewisser Ordnungen liefern wird. Die ursprüngliche Idee, diesen Raum zu betrachten, entstammt dem Artikel [2] von Avner Ash und wurde kürzlich von Renaud Coulangeon und Gabriele Nebe in [7] wieder aufgegriffen zwecks Bestimmung der maximal endlichen Untergruppen solcher Einheitengruppen. Wir werden uns in diesem Abschnitt zunächst an dem Vorgehen aus [7] orientieren und darüber hinaus Ausschnitte von [2] präsentieren; in diesem Fall arbeiten wir anstelle von Gittern mit quadratischen Formen und übertragen die Ergebnisse entsprechend.

6.1. Maximalordnungen

In diesem Abschnitt wollen wir zum Einen einen Teil der nötigen Notation einführen und zum Anderen einige relevante Resultate aus der Theorie der halbeinfachen Algebren und Maximalordnungen wiederholen. Für tieferliegende Resultate und die meisten Beweise sei auf [8, 22] verwiesen.

Im Folgenden sei A eine einfache $\mathbb{Q}$-Algebra von endlicher Dimension über $\mathbb{Q}$. Dann ist $A \cong D^{n\times n}$ für eine Divisionsalgebra D mit Zentrum $K := \mathrm{Z}(D)$ (man beachte, dass wir $D = K$ explizit zulassen). Weiter sei $R := \mathrm{Int}_{\mathbb{Z}}(K)$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in K, also die eindeutig bestimmte $\mathbb{Z}$-Maximalordnung in K, und $\mathcal{O}$ eine beliebige R-Maximalordnung in D.

Definition 6.1.1 *Ein $\mathcal{O}$-Gitter vom Rang n ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$-Teilmodul des D-Rechtsmoduls $V := D^n$, der eine D-Basis von V enthält.*

Bemerkung und Definition 6.1.2 *1. Sei L ein $\mathcal{O}$-Gitter vom Rang n. Nach dem Satz von Steinitz (siehe [22, Theorem 4.13, Corollary 35.11]) existieren $\mathcal{O}$-Rechtsideale $\mathfrak{c}_1, ..., \mathfrak{c}_n$ und eine D-Basis $e_1, ..., e_n$ von V, sodass $L = e_1\mathfrak{c}_1 \oplus ... \oplus e_n\mathfrak{c}_n$.*

Die Familie $(\mathfrak{c}_i, e_i)_{1\leq i\leq n}$ *heißt auch eine Pseudobasis von* L *und wir definieren die Steinitzinvariante* $\mathrm{St}(L) := [\mathfrak{c}_1] + ... + [\mathfrak{c}_n]$ *als Element von* $\mathrm{Cl}(\mathcal{O})$*, der Gruppe der stabilen Isomorphieklassen von* $\mathcal{O}$*-Rechtsidealen.*

2. *Ist* $n \geq 2$*, so sind zwei Gitter* L_1, L_2 *vom Rang* n *genau dann isomorph, wenn* $\mathrm{St}(L_1) = \mathrm{St}(L_2)$*. Insbesondere gilt für ein Gitter* L *vom Rang* n*: Ist* $\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{c}]$*, so ist* $L \cong L(\mathfrak{c}) := e_1\mathcal{O} \oplus ... \oplus e_{n-1}\mathcal{O} \oplus e_n\mathfrak{c}$*.*

3. *Der Endomorphismenring* $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(L) = \{X \in D^{n\times n} \mid XL \subset L\}$ *ist eine Maximalordnung in* $\mathrm{End}_D(V) \cong A$ *und jede Maximalordnung entsteht auf diese Weise (vergleiche [22, Corollary 27.6]). Ist* $\mathrm{St}(L) = [\mathfrak{c}]$*, so ist* $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(L)$ *als Teilmenge von* $D^{n\times n}$ *in* $\mathrm{GL}_n(D)$ *konjugiert zu*

$$\Lambda(\mathfrak{c}) := \mathrm{End}_O(L(\mathfrak{c})) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \mathfrak{c}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} & \mathfrak{c}^{-1} \\ \mathfrak{c} & \cdots & \mathfrak{c} & \mathcal{O}' \end{pmatrix},$$

wobei $O' = \{x \in D \mid x\mathfrak{c} \subset \mathfrak{c}\}$ *die zu* $\mathfrak{c}$ *gehörige Linksordnung ist.*

6.2. Positiv definite Elemente

Wie im vergangenen Abschnitt sei D eine $\mathbb{Q}$-Divisionsalgebra von endlicher Dimension, $K := Z(D)$ und $A := D^{n\times n}$. Dann ist $A_{\mathbb{R}} := A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ eine halbeinfache $\mathbb{R}$-Algebra und folglich eine direkte Summe von Matrixringen über $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Wir bedienen uns der Notation aus [7] und setzen $d^2 := \dim_K(D)$. Weiter seien

$\iota_1, ..., \iota_s$ die in D verzweigten reellen Stellen von K,
$\sigma_1, ..., \sigma_r$ die in D unverzweigten reellen Stellen von K,
$\tau_1, ..., \tau$ die komplexen Stellen von K.

Dann gilt:

$$D_{\mathbb{R}} := D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{H}^{d/2\times d/2} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}^{d\times d} \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{C}^{d\times d}.$$

Wir definieren auf $D_{\mathbb{R}}$ die Involution * komponentenweise wie folgt: Auf den Matrixringen über $\mathbb{R}$ sei * das Transponieren einer Matrix, auf den Matrixringen über $\mathbb{C}$ beziehungsweise $\mathbb{H}$ sei * Transponieren und eintragsweises Anwenden der komplexen beziehungsweise quaternionische Konjugation. Dies definiert auch eine Abbildung $^\dagger : D_{\mathbb{R}}^{m\times n} \to$

$D_{\mathbb{R}}^{n\times m}$ durch Transponieren und Anwenden von * auf jedem Eintrag. Insbesondere erhalten wir eine Involution † auf $A_{\mathbb{R}} = D_{\mathbb{R}}^{n\times n}$.

Definition 6.2.1 *1.* $\Sigma := \{F \in A_{\mathbb{R}} \mid F^\dagger = F\} \leq A_{\mathbb{R}}$ *sei der* $\mathbb{R}$*-Teilraum der symmetrischen Elemente von* $A_{\mathbb{R}}$*. Auf diesem können wir die positiv definite Bilinearform*

$$\langle F_1, F_2\rangle := \mathrm{Spur}(F_1F_2)$$

definieren, wobei Spur *in diesem Fall die reduzierte Spur auf der halbeinfachen* $\mathbb{R}$*-Algebra* $A_{\mathbb{R}}$ *bezeichne.*

2. Mit $\mathcal{P}$ *bezeichnen wir den Kegel der positiv definiten Elemente in* Σ*:*

$$\mathcal{P} := \{(q_1, ..., q_s, f_1, ..., f_r, h_1, ..., h_t) \in \Sigma \mid q_i, f_j, h_k \textit{ positiv definit}\}.$$

Bemerkung 6.2.2 *Es sei* $V = D^n$ *der einfache* A*-Linksmodul. Dann ist* $V_{\mathbb{R}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = D_{\mathbb{R}}^n$ *und zu jedem* $x \in V_{\mathbb{R}}$ *erhalten wir mit* $xx^\dagger$ *ein Element in* Σ*.*

Lemma 6.2.3 *Sei* $F \in \Sigma$*. Dann liefert* F *eine quadratische Form auf* $V_{\mathbb{R}}$ *vermöge*

$$F[x] := \langle F, xx^\dagger\rangle \quad \forall\, x \in V_{\mathbb{R}}.$$

Diese ist genau dann positiv definit, wenn $F \in \mathcal{P}$*.*

Im Sinne dieses Lemmas werden wir im Folgenden die Elemente von Σ auch als Formen bezeichnen.

Lemma 6.2.4 *1. Der Kegel* $\mathcal{P}$ *ist offen in* Σ*.*

2. Für $F_1, F_2 \in \mathcal{P}$ *ist* $\langle F_1, F_2\rangle > 0$*.*

3. Zu jedem $F_1 \in \Sigma - \mathcal{P}$ *existiert ein* $0 \neq F_2 \in \overline{\mathcal{P}}$ *mit* $\langle F_1, F_2\rangle \leq 0$*, wobei* $\overline{\mathcal{P}}$ *den topologischen Abschluss von* $\mathcal{P}$ *bezeichne.*

Beweis:

1. Wir wählen eine beliebige Norm auf $V_{\mathbb{R}}$ und setzen $B \subset V_{\mathbb{R}}$ auf die Einheitskugel bezüglich dieser Norm. Dann ist $\mathcal{P} = \{F \in \Sigma \mid \min_{x\in B} F[x] > 0\}$ und damit Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung und somit selbst offen.

2. Offensichtlich genügt es, dies komponentenweise nachzurechnen. Es bleibt also zu zeigen, dass die reduzierte Spur des Produkts zweier positiv definiter Matrizen A und B positiv ist. Sind A und B symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ beziehungsweise hermitesche Matritzen über $\mathbb{C}$, so folgt die Behauptung aus dem reellen beziehungsweise komplexen Spektralsatz (man nehme ohne Einschränkung an, dass A in Diagonalgestalt mit positiven Diagonaleinträgen ist). Seien also nun A und B positiv definite hermitesche Matrizen über $\mathbb{H}$. Nun ist die reduzierte Spur invariant unter Konjugation und der Spektralsatz für quaternionische Matrizen [13, Theorem(3.3)] liefert uns analog zum kommutativen Fall die Behauptung.

3. Sei $F \in \Sigma - \mathcal{P}$, dann ist F nicht positiv definit, also existiert ein $0 \neq x \in V_{\mathbb{R}}$ mit $\langle F, xx^\dagger \rangle \leq 0$. $xx^\dagger$ ist aber positiv semidefinit und liegt somit im Abschluss von $\mathcal{P}$ wie gefordert.

Korollar 6.2.5 *Die Menge $\mathcal{P} \subset \Sigma$ ist ein selbstdualer Kegel im Sinne von Definition 5.1.1.*

Beweis: Das vorangehende Lemma impliziert, dass unter der Wahl $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \Sigma$ und $\mathcal{V}_1^{>0} = \mathcal{V}_2^{>0} = \mathcal{P}$ die Axiome für duale Kegel erfüllt sind. □

6.3. Kürzeste Vektoren und minimale Klassen

Wir wiederholen der Übersichtlichkeit halber kurz die Notation: Es sei $A = D^{n\times n}$ für eine Divisionsalgebra D mit Zentrum K, $\mathcal{O}$ eine Maximalordnung in D und L ein $\mathcal{O}$-Gitter in $V = D^n$. $\Lambda := \mathrm{End}_O(L)$ ist seinerseits eine Maximalordnung in A mit Einheitengruppe $\Lambda^* := \mathrm{GL}(L) = \{a \in A \mid aL = L\}$.

Lemma 6.3.1 *Die Menge $M_L := \{ll^\dagger \mid l \in L - \{0\}\}$ ist diskret in $A_{\mathbb{R}}$ und zulässig im Sinne von Definition 5.1.6.*

Beweis: Das Gitter L ist diskret, also auch M_L. Sei nun $F \in \Sigma$ eine positiv semidefinite Form. Wir müssen zeigen, dass eine Folge von Gittervektoren $(l_i)_i \subset L - \{0\}$ existiert, sodass $F[l_i] \to 0$ gilt. Schreibe dazu $V_{\mathbb{R}} = \mathrm{Rad}(F) \oplus U$, wobei $\{0\} \neq \mathrm{Rad}(F)$ das Radikal von F ist und $U \leq V_{\mathbb{R}}$ ein beliebiges Komplement. Insbesondere ist dann $F_{|U}$ positiv definit.

Wir bezeichnen mit U_ϵ die offene Kugel mit Radius ϵ in U bezüglich der durch F induzierten Norm. Dann ist $\mathrm{Rad}(F) \oplus U_\epsilon$ zentralsymmetrisch, konvex und hat unendliches Volumen. Nach Minkowskis Gitterpunktsatz erhalten wir also für jedes ϵ ein

$l_\epsilon \in L \cap (\mathrm{Rad}(F) \oplus U_\epsilon)$ und es gilt $F[l_\epsilon] < \epsilon$. Wir können also die gewünschte Folge konstruieren und die Behauptung folgt. □

Definition 6.3.2 *1. Ein Gewicht φ auf L ist eine $\mathrm{GL}(L)$-invariante Abbildung vom projektiven Raum $\mathbf{P}(D^n)$ in die positiven reellen Zahlen mit Maximum 1. Also $\max_{x \in \mathbf{P}(D^n)} \varphi(x) = 1$.*

2. φ_0 sei das triviale Gewicht, i.e. $\varphi_0(x) = 1$ für alle x.

Im Folgenden werden wir nicht zwischen einem Gewicht als Abbildung $\mathbf{P}(D^n) \to \mathbb{R}_{>0}$ und der induzierten Abbildung $L \to \mathbb{R}_{>0} : l \mapsto \varphi(lD)$ unterscheiden.

Definition 6.3.3 *Es sei $L = e_1\mathfrak{c}_1 \oplus ... \oplus e_1\mathfrak{c}_n$ ein Gitter. Wir ordnen $0 \neq l = \sum_{i=1}^n e_i l_i \in L$ das ganze $\mathcal{O}$-Linksideal $\mathfrak{a}_l := \sum_{i=1}^n \mathfrak{c}_i^{-1} l_i$ und dessen ganzzahlige Norm $\mathrm{N}(\mathfrak{a}_l) := |\mathcal{O}/\mathfrak{a}_l| = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathrm{nr}(\mathfrak{a}_l)^d)$ zu.*

Lemma 6.3.4 *[7, Lemma 4.3] Es gilt:*

1. $\mathrm{N}(\mathfrak{a}_l) \geq 1$ *für alle* $l \in L - \{0\}$.
2. *Für* $\lambda \in D^*$ *und* $l \in L - \{0\}$ *ist* $\mathfrak{a}_{l\lambda} = \mathfrak{a}_l \lambda$.
3. *Für* $g \in \mathrm{GL}(L)$ *und* $l \in L - \{0\}$ *ist* $\mathfrak{a}_{gl} = \mathfrak{a}_l$.

Beweis: Es sei $l = \sum_{i=1}^n e_i l_i \in L - \{0\}$.

1. Es ist $l_i \in \mathfrak{c}_i$ für alle i und somit $\mathfrak{c}_i^{-1} l_i \subset \mathcal{O}$. Also ist $\mathfrak{a}_l$ ein ganzes $\mathcal{O}$-Linksideal und hat daher Norm größer-gleich 1.
2. Dies ist offensichtlich.
3. Zunächst sei $ge_i = \sum_{j=1}^n e_j g_{ji}$. Nach Voraussetzung ist $gL \subset L$, also gilt für $c_i \in \mathfrak{c}_i$ und $j \in \{1, ..., n\}$ $g_{ji} c_i \in \mathfrak{c}_j$ oder äquivalent $g_{ji} \in \mathfrak{c}_j \mathfrak{c}_i^{-1}$. Nun ist $gl = \sum_{j=1}^n e_j \left(\sum_{i=1}^n g_{ji} l_i\right)$ und daher $\mathfrak{a}_{gl} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{c}_j^{-1} \left(\sum_{i=1}^n g_{ji} l_i\right) \subset \sum_{i,j=1}^n \mathfrak{c}_j^{-1} \mathfrak{c}_j \mathfrak{c}_i l_i \subset \mathfrak{a}_l$. Für die umgekehrte Inklusion wende man diese Argumentation auf g^{-1} an.

□

Definition 6.3.5 *1. Es sei $x \in D^n$. Wir definieren:*

$$N_x := \mathrm{N}([\mathrm{nr}(\mathfrak{a}_{x\lambda})]) = \min_{I \subset \mathcal{O},\ [\mathrm{nr}(I)] = [\mathrm{nr}(\mathfrak{a}_{x\lambda})]} \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathrm{nr}(I)^d),$$

wobei $\lambda \in D-\{0\}$ ein beliebiges mit $x\lambda \in L$ ist. Dies ist wohldefiniert (insbesondere unabhängig von der Wahl von λ) nach Teil (1) des vorangehenden Lemmas.

2. *Für $x \in D^n$ setzen wir $\varphi_1(x) := N_x^{-2/[K:\mathbb{Q}]}$.*

Proposition 6.3.6 *Die Funktion $\varphi_1 : \mathbf{P}(D^n) \to \mathbb{R},\ [x] \mapsto \varphi_1(x)$ ist ein Gewicht.*

Beweis: Die folgt sofort aus Lemma 6.3.4. □

Lemma 6.3.7 *Der Raum der Gewichte ist homöomorph zu $\mathbb{R}^{h-1}$,wobei h die endliche Kardinalität der Restklassenmenge $\mathrm{GL}(L)\backslash\mathbf{P}(D^n)$ bezeichne. Ist D ein Körper, so ist $h = h_D$ die Klassenzahl von D.*

Beweis: Jedes Gewicht faktorisiert ob seiner $\mathrm{GL}(L)$-Invarianz über $\mathrm{GL}(L)\backslash\mathbf{P}(D^n)$. Dabei gilt $|\,\mathrm{GL}(L)\backslash\mathbf{P}(D^n)| < \infty$ aufgrund allgemeiner Aussagen über arithmetische Gruppen (vergleiche beispielsweise [20, Theorem 4.15]). Folglich ist der Raum der Gewichte homöomorph zu $(0,\infty)^h/(0,\infty)$ aufgrund der Normierungsforderung. Da $(0,\infty)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, folgt die Behauptung.

Dass im kommutativen Fall die Anzahl der Bahnen mit der Klassenzahl übereinstimmt findet sich beispielsweise in [20, Proposition 8.1]. □

Definition 6.3.8 1. *Für $F \in \mathcal{P}$ definieren wir das L-Minimum von F bezüglich des Gewichts φ als*

$$\min_L(F) := \min_{0 \neq l \in L} \varphi(l) F\,[l]\,.$$

2. *Die Menge der kürzesten Vektoren von $F \in \mathcal{P}$ ist*

$$\mathrm{S}_L(F) := \{0 \neq l \in L \mid \varphi(l) F\,[l] = \min_L(F)\}.$$

Bemerkung 6.3.9 *Für $F \in \mathcal{P}$ ist $\mathrm{S}_L(F)$ endlich, da*

$$\mathrm{S}_L(F) \subset \left\{ 0 \neq l \in L \mid F\,[l] \leq \frac{\min_L(F)}{\min_{0 \neq y \in L} \varphi(y)} \right\}$$

Letzteres ist aber eine Menge kurzer Vektoren in einem $\mathbb{Z}$-Gitter und daher insbesondere endlich. Die angegebene Menge ist wohldefiniert, da φ nur endlich viele Werte annimmt.

Definition 6.3.10 *Gegeben sei ein festes Gewicht φ.*

1. *Zwei Formen $F_1, F_2 \in \mathcal{P}$ heißen minimal äquivalent, falls $\mathrm{S}_L(F_1) = \mathrm{S}_L(F_2)$.*

2. *Sei $F \in \mathcal{P}$. $\mathrm{Cl}_L(F) := \{H \in \mathcal{P} \mid \mathrm{S}_L(H) = \mathrm{S}_L(F)\}$ heißt die minimale Klasse von F.*

3. *Ist $C = \mathrm{Cl}_L(F)$ eine minimale Klasse, so setzen wir $\mathrm{S}_L(C) := \mathrm{S}_L(F)$.*

4. *Eine minimale Klasse C heißt well-rounded, falls $\mathrm{S}_L(C)$ eine D-Basis von V enthält.*

5. *Eine Form $F \in \mathcal{P}$ heißt perfekt (bezüglich L), falls $\mathrm{Cl}_L(F) = \{aF \mid a \in \mathbb{R}_{>0}\}$.*

Man beachte, dass alle diese Definitionen sowohl vom Gitter L als auch vom Gewicht φ abhängen.

Im Folgenden sei L stets ein festes Gitter und φ ein festes Gewicht. Alle auftretenden Minima, Klassen, etc. werden (so nicht anders festgehalten) bezüglich des Gewichts φ betrachtet.

Bemerkung 6.3.11 $\mathrm{GL}(L)$ *operiert auf Σ vermöge $gF := g^\dagger F g$ und diese Operation respektiert minimale Klassen.*

Definition 6.3.12

1. *Zwei Formen heißen L-isometrisch, falls sie in der gleichen Bahn unter der Operation von $\mathrm{GL}(L)$ liegen.*

2. *Für $F \in \mathcal{P}$ heißt $\mathrm{Aut}_L(F) := \{g \in \mathrm{GL}(L) \mid g^\dagger F g\}$ die Automorphismengruppe von F.*

3. *Zwei minimale Klassen heißen äquivalent, wenn sie in der gleichen Bahn unter der Operation von $\mathrm{GL}(L)$ liegen.*

4. *Für eine minimale Klasse C heißt $\mathrm{Aut}_L(C) := \{g \in \mathrm{GL}(L) \mid g\mathrm{S}_L(C) = \mathrm{S}_L(C)\}$ die Automorphismengruppe von C.*

5. *Für eine well-rounded minimale Klasse C heißt $T_C := \sum_{x \in \mathrm{S}_L(C)} xx^\dagger$ die kanonische Form zu C.*

Lemma 6.3.13 *[7, Lemma 5.3] Es sei C eine well-rounded minimale Klasse. Dann ist T_C positiv definit und $\mathrm{Aut}_L(C) = \mathrm{Aut}_L(T_C^{-1})$. Darüber hinaus sind zwei well-rounded minimale Klassen C, C' genau dann äquivalent, wenn T_C^{-1} und $T_{C'}^{-1}$ isometrisch sind.*

Beweis: Die Abbildung $(\ ,\ ) : V \times V \to D_{\mathbb{R}}, (x,y) = x^\dagger y$ ist hermitesch und nicht ausgeartet. Sei nun $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathrm{S}_L(C)$ eine D-Basis von V, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^\dagger v = \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i, v) = 0 \Leftrightarrow v \in V^\perp = \{0\}$$

Also ist der Kern der positiv semidefiniten Matrix $\sum_{i=1}^n x_i x_i^\dagger$ bereits $\{0\}$ und somit ist T_C invertierbar also in $\mathcal{P}$.

Offensichtlich $\mathrm{Aut}_L(C) \subset \mathrm{Aut}_L(T_C^{-1})$. Für die umgekehrte Inklusion setzen wir $s := |\mathrm{S}_L(C)|$ und $S \in D^{n \times s}$ die Matrix deren Spalten gerade aus den Elementen von $\mathrm{S}_L(C)$ besteht. Insbesondere ist dann $T_C = SS^\dagger$. Sei nun $g \in \mathrm{Aut}(T_C^{-1}) = \{g \in \mathrm{GL}(L) \mid gT_C g^\dagger\}$ beliebig und setze $S' := gS$. Dann gilt $S'(S')^\dagger = T_C = SS^\dagger$ und für $F \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\sum_{y \in \mathrm{Spalten}(S')} F[y] = \mathrm{Spur}((S')^\dagger F S') = \langle S'(S')^\dagger, F\rangle = \langle SS^\dagger, F\rangle = \sum_{x \in \mathrm{S}_L(C)} F[x]\,. \qquad (\diamond)$$

Ist nun x eine Spalte von S und $y = gx$, so gilt $\varphi(x) = \varphi(y)$ und $\varphi(y)F[y] \geq \varphi(x)F[x]$ also $F[y] \geq F[x]$ mit Gleichheit genau dann, wenn $y \in \mathrm{S}_L(C)$. Folglich haben wir in $(\diamond)$ nur dann Gleichheit, wenn die Spalten von S' ebenfalls den Elementen von $\mathrm{S}_L(C)$ entsprechen, was der Aussage $g \in \mathrm{Aut}_L(C)$ entspricht. $\square$

Korollar 6.3.14 *Ist C eine well-rounded minimale Klasse, so ist* $\mathrm{Aut}(C)$ *endlich.*

6.4. Der Well-Rounded-Komplex

Im Folgenden wollen wir einige geometrische und topologische Eigenschaften des Raums der well-rounded quadratischen Formen erarbeiten. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem vorangehenden Kapitel. Es sei also $A = D^{n \times n}$ für eine Divisionsalgebra D mit Zentrum K, $\mathcal{O}$ eine Maximalordnung in D und L ein $\mathcal{O}$-Gitter in $V = D^n$. $\Lambda := \mathrm{End}_O(L)$ ist seinerseits eine Maximalordnung in A mit Einheitengruppe $\Lambda^* := \mathrm{GL}(L) = \{a \in A \mid aL = L\}$. Darüber hinaus sei φ ein Gewicht auf L. Es sei darauf hingewiesen, dass der im Folgenden untersuchte Raum sowohl von der Wahl des Gitters L als auch vom Gewicht φ abhängt.

Definition 6.4.1

1. *$\Sigma^{\mathrm{wr}} := \{F \in \mathcal{P} \mid F$ well-rounded$\}$ sei der Raum der well-rounded quadratischen Formen.*

2. *$\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1} := \{F \in \Sigma^{\mathrm{wr}} \mid \min_L(F) = 1\}$ bezeichne die Menge der well-rounded quadratischen Formen mit fixiertem Minimum* 1.

Wir benötigen zunächst den folgenden Satz von Avner Ash über die Operation der $\mathrm{GL}(L)$ auf $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$.

Satz 6.4.2 *[2, Theorem (ii)] Die Menge $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}/\,\mathrm{GL}(L)$ ist kompakt.*

Korollar 6.4.3 *Bis auf die Operation von $\mathbb{R}_+$ und $\mathrm{GL}(L)$ existieren nur endlich viele perfekte Formen.*

Beweis: Die Menge der perfekten Formen ist hier definiert bezüglich der zulässigen Menge M_L aus Lemma 6.3.1. Nach Lemma 5.1.8 ist die Menge der perfekten Formen dann aber diskret. Nun war $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}/\,\mathrm{GL}(L)$ kompakt und die Behauptung folgt. □

Einen ersten Eindruck von der Zerlegung des Raums der well-rounded Formen in minimale Klassen liefert das folgende Lemma.

Lemma 6.4.4 *Es sei $C \subset \Sigma^{\mathrm{wr}}$ eine minimale Klasse. Dann sind sowohl C als auch $C \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ konvex.*

Beweis: Es seien $F_0, F_1 \in C$ und $m_i := \min_L(F_i),\ i = 0,1$. Sicherlich gilt dann auch $\alpha F_i \in C$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}, i = 0,1$ und $\min_L(\alpha F_i) = \alpha m_i$. Für $\lambda \in [0,1]$ setzen wir $F_\lambda := (1-\lambda)F_0 + \lambda F_1$. Dann gilt für $l \in L$:

$$\varphi(l)F_\lambda\,[l] = (1-\lambda)\varphi(l)F_0\,[l] + \lambda\varphi(l)F_1\,[l] \geq (1-\lambda)m_0 + \lambda m_1$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $l \in \mathrm{S}_L(F_0) = \mathrm{S}_L(F_1)$. Insbesondere ist also $\min_L(F_\lambda) = (1-\lambda)m_0 + \lambda m_1$ und $\mathrm{S}_L(F_\lambda) = \mathrm{S}_L(F_0) = \mathrm{S}_L(F_1)$.

Die Aussage über die Formen mit fixiertem Minimum folgt sofort. □

Definition 6.4.5 *Auf den minimalen Klassen definieren wir die folgende partielle Ordnung:*

$$C \preceq C' :\Leftrightarrow \mathrm{S}_L(C) \subset \mathrm{S}_L(C').$$

Das folgende Lemma zeigt, wie sich diese partielle Ordnung im Raum der quadratischen Formen wiederfindet.

Lemma 6.4.6 *Es sei C eine well-rounded minimale Klasse und $\overline{C}$ der topologische Abschluss von C. Dann gilt:*

$$\overline{C} = \bigcup_{C' \succeq C} C' \cup \{0\}$$

Beweis: Sei $F \in C$ und $F' \in \bigcup_{C' \succeq C} C' \cup \{0\}$. Ist $F' = 0$, so ist $(\frac{1}{k}F)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen F' konvergiert. Sei nun $F' \neq 0$ und setze für $\lambda \in [0,1]$ $F_\lambda := (1-\lambda)F + \lambda F'$. Es reicht zu zeigen, dass $F_\lambda \in C$ für $0 \leq \lambda < 1$. Dazu $m := \min_L(F)$, $m' := \min_\mathrm{L}(F')$. Dann gilt für $l \in L$:

$$\varphi(l)F_\lambda\,[l] = (1-\lambda)\underbrace{\varphi(l)F\,[l]}_{\geq m} + \lambda\underbrace{\varphi(l)F'\,[l]}_{\geq m'} \geq (1-\lambda)m + \lambda m'$$

und für $0 \leq \lambda < 1$ gilt Gleichheit genau für $l \in \mathrm{S}_L(F) \subset \mathrm{S}_L(F')$, also ist auch $F_\lambda \in C$ für $0 \leq \lambda < 1$. Wir haben also gezeigt: $\overline{C} \supset \bigcup_{C' \succeq C} C' \cup \{0\}$.

Wir zeigen nun noch, dass $\bigcup_{C' \succeq C} C' \cup \{0\} =: M$ abgeschlossen ist. Sei dazu $(F_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in M mit Grenzwert F. Dann ist F positiv semidefinit. Sei nun $v \in L$ mit $\varphi(v)F\,[v] = \min_L(F)$. Dann gilt für $l \in \mathrm{S}_L(C) \subset \mathrm{S}_L(F_i)\ \forall\ i$: $\varphi(v)F_i\,[v] \geq \varphi(l)F_i\,[l]$ für alle i und damit auch $\varphi(v)F\,[v] \geq \varphi(l)F\,[l]$. Insbesondere ist $\mathrm{S}_L(C) \subset \mathrm{S}_L(F)$, falls $F \in \mathcal{P}$ und $F\,[l] = 0$ für alle $l \in \mathrm{S}_L(C)$, also $F = 0$ (da $\mathrm{S}_L(C)$ eine Basis von V enthält), falls $F \notin \mathcal{P}$. M ist also abgeschlossen. $\square$

Für die Formen mit fixiertem Minimum erhält man leicht das folgende Analogon:

Korollar 6.4.7 *Es sei C eine well-rounded minimale Klasse, dann gilt:*

$$\overline{C \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}} = \bigcup_{C' \succeq C} (C' \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}).$$

Bemerkung 6.4.8 *Das vorangehende Korollar gilt auch, falls die Klasse nicht well-rounded ist, da wir im Fall fixierter Minima die well-rounded-Bedingung nicht brauchen, um zu folgern, dass der Grenzwert positiv definit ist.*

Definition 6.4.9 *Es sei C eine minimale Klasse und N die $\mathbb{R}$-Dimension von Σ, also* $N := \dim_\mathbb{R}(\Sigma) = s \cdot \left(2\left(\frac{nd}{2}\right)^2 - \frac{nd}{2}\right) + r \cdot \binom{nd+1}{2} + t \cdot (nd)^2$.

1. *Die Dimension $\dim_\mathbb{R}(\langle xx^\dagger \mid x \in \mathrm{S}_L(C)\rangle)$ bezeichnen wir als den Perfektionsrang von C.*

2. *Die Zahl $N - \dim_\mathbb{R}(\langle xx^\dagger \mid x \in \mathrm{S}_L(C)\rangle)$, die Kodimension in Σ, bezeichnen wir auch als Perfektionskorang von C.*

3. *Das affine Erzeugnis von $C \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ in Σ bezeichnen wir mit $\mathrm{Aff}(C)$.*

Lemma 6.4.10 *Es ist $\mathrm{Aff}(C) = \{F \in \Sigma \mid \varphi(l)F\,[l] = 1\ \forall\ l \in \mathrm{S}_L(C)\}$. Insbesondere ist die Dimension von $\mathrm{Aff}(C)$ gerade der Perfektionskorang von C.*

Beweis: Wir setzen $M := \{F \in \Sigma \mid \varphi(l)F[l] = 1 \;\forall\, l \in \mathrm{S}_L(C)\}$. Nun ist $\varphi(l)\langle F, ll^\dagger\rangle = 1$ eine lineare Bedingung an F und die Dimension von M ist tatsächlich der Perfektionskorang von C. Darüber hinaus ist sicherlich $\mathrm{Aff}(C) \subset M$. Für die andere Inklusion sei $F \in C$ und $m_1, ..., m_r$ eine Basis des Translationsraums von M. $\mathcal{P}$ ist ein offener Kegel maximaler Dimension in Σ, also können $m_1, ..., m_r$ so reskaliert werden, dass $F + m_i \in \mathcal{P}$ für alle i. Dann ist aber $F + m_i \in \overline{C} \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ für alle i. Ist $F + m_i \notin C$ so können wir m_i durch $\frac{1}{2}m_i$ ersetzen und erhalten $F + m_i \in C$ wie im Beweis von Lemma 6.4.6. Also erzeugt $C \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ den affinen Raum M wie behauptet. □

Der folgende Satz, welcher eine leichte Verallgemeinerung von [16, Theorem 9.1.9] darstellt, beschreibt den Zusammenhang zwischen Perfektionsrang und der zuvor definierten Ordnung.

Satz 6.4.11

1. *Der Perfektionsrang ist streng monoton wachsend auf der Menge der minimalen Klassen mit der Ordnung "$\preceq$".*
2. *Die maximalen Elemente bezüglich "$\preceq$" sind gerade die Klassen perfekter Formen.*
3. *Ist C eine minimale Klasse, so existiert eine perfekte Form F, sodass $C \preceq \mathrm{Cl}_L(F)$.*
4. *Sind C, C' minimale Klassen mit $C \preceq C'$, so existiert eine Folge $C = C_0 \preceq C_1 \preceq ... \preceq C_r = C'$ von minimalen Klassen, sodass in jedem Schritt der Perfektionsrang um genau* 1 *anwächst.*

Beweis: Wir zeigen hier nur die erste Behauptung. Die Aussagen über perfekte Formen und das Anwachsen des Perfektionsrangs folgen aus der Theorie von Voronoi über perfekte Formen, wie sie beispielsweise in [4, 16, 18] präsentiert wird. Diese ist hier nach Lemma 6.2.4 anwendbar.

Wir zeigen die Behauptung für Klassen mit fixiertem Minimum 1. Dann ist der Perfektionskorang von C die Dimension von $\mathrm{Aff}(C)$ wie zuvor gezeigt. Ist nun $C \preceq C', C \neq C'$, also $\mathrm{S}_L(C) \subsetneq \mathrm{S}_L(C')$, so ist $\mathrm{Aff}(C) \supsetneq \mathrm{Aff}(C')$. Insbesondere hat C also größeren Perfektionskorang und damit kleineren Perfektionsrang als C'. □

Lemma 6.4.12 *Der Abschluss einer well-rounded minimalen Klasse mit fixiertem Minimum enthält nur endlich viele perfekte Formen.*

Beweis: Es sei C die betrachtete Klasse. Nach Korollar 6.4.3 existieren bis auf Operation von $\mathrm{GL}(L)$ und Reskalieren nur endlich viele perfekte Formen. Es genügt also zu zeigen, dass es für eine perfekte Form F nur endlich viele $g \in \mathrm{GL}(L)$ gibt mit $g^\dagger F g \in \overline{C}$. Nun gilt:

$$g^\dagger F g \in \overline{C} \Leftrightarrow \mathrm{S}_L(g^\dagger F g) \supset \mathrm{S}_L(C) \Leftrightarrow g^{-1}\mathrm{S}_L(F) \supset \mathrm{S}_L(C) \Leftrightarrow g\mathrm{S}_L(C) \subset \mathrm{S}_L(F).$$

$\mathrm{S}_L(C)$ enthält aber eine Basis B von V und $\mathrm{S}_L(F)$ ist endlich. Folglich existieren nur endlich viele Abbildungen $B \to \mathrm{S}_L(F)$ und damit insbesondere endlich viele $g \in \mathrm{GL}(L)$ mit $g\mathrm{S}_L(C) \subset \mathrm{S}_L(F)$. □

Lemma 6.4.13 *Es sei C eine well-rounded minimale Klasse. Dann ist $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ offen in* $\mathrm{Aff}(C)$.

Beweis: Nach Lemma 5.1.5 existiert zu $F \in C$ eine Umgebung U in $\mathcal{P}$, sodass $\mathrm{S}_L(F') \subset \mathrm{S}_L(F)$ für alle $F' \in U$. Dies impliziert aber bereits die Behauptung. □

Lemma 6.4.14 *Ist C eine minimale Klasse, so ist $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ beschränkt.*

Beweis: Angenommen $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ ist nicht beschränkt, dann existiert ein $F \in C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ und $0 \neq v$ im Translationsraum von $\mathrm{Aff}(C)$, sodass $F + \rho v \in C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ für alle $\rho \geq 0$, da $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ konvex ist. Also ist v positiv semidefinit (sonst liegt $F + \rho v$ für großes ρ nicht in $\mathcal{P}$) und $\langle v, ll^\dagger \rangle = 0$ für alle $l \in \mathrm{S}_L(C)$.

Wähle nun $l, l' \in \mathrm{S}_L(C)$ so, dass $\langle v, (l + l')(l + l')^\dagger \rangle = x \neq 0$. Solche existieren, da $\mathrm{S}_L(C)$ eine Basis von V enthält und daher die gegenteilige Annahme $v = 0$ impliziert. Dann ist aber $\langle v, (l - l')(l - l')^\dagger \rangle = -x$ und daher v nicht positiv semidefinit im Widerspruch zum bereits Bewiesenen. □

Satz 6.4.15 *Der Abschluss einer well-rounded minimalen Klasse C ist die konvexe Hülle der enthaltenen perfekten Formen.*

Beweis: Wir zeigen dies erneut nur für fixiertes Minimum und beweisen die Behauptung durch Induktion nach dem Perfektionskorang. Ist C die Klasse einer perfekten Form, so ist nichts zu zeigen.

Ansonsten sei $F \in C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ und F' eine perfekte Form im Abschluss von $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$. Nun ist $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ beschränkt nach Lemma 6.4.14, also existiert ein $\rho > 0$, sodass $F'' := F + \rho(F - F')$ im Rand von $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ in $\mathrm{Aff}(C)$ liegt. Weiter ist $C \cap \Sigma_{=1}^{\mathrm{wr}}$ nach Lemma 6.4.13 offen in $\mathrm{Aff}(C)$ und folglich ist $\mathrm{Cl}(F'') \supsetneq C$. Nach Induktionsvoraussetzung sind F' und F'' Konvexkombinationen perfekter Formen, deren Menge von kürzesten Vektoren die von F' beziehungsweise F'' (und damit auch die von F) enthält. F ist seinerseits Konvexkombination von F' und F'' und die Behauptung folgt. □

Korollar 6.4.16 *Bis auf Operation von* $\mathrm{GL}(L)$ *existieren nur endlich viele minimale Klassen.*

Korollar 6.4.17 *Ist* C *eine well-rounded minimale Klasse, so enthält* $\overline{C}$ *nur endlich viele minimale Klassen.*

Korollar 6.4.18 *Ist* C *eine well-rounded minimale Klasse, so ist* $C \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ *ein beschränktes Polytop, dessen Seitenflächen gerade die* $C' \cap \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ *mit* $C' \supsetneq C$ *sind.*

6.5. Der Well-Rounded-Retrakt

Wir wollen nun die topologischen Eigenschaften von $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ besser verstehen und zeigen, dass sich die Menge der well-rounded Formen tatsächlich eignet, um eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}(L)$-Modul zu gewinnen.

Definition 6.5.1 *Es sei* $F \in \mathcal{P}$. *Dann setzen wir*

$$b_F : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} : b_F(v,w) = F\,[v+w] - F\,[v] - F\,[w]$$

die zugehörige Bilinearform. Sei weiter $W \leq V_{\mathbb{R}}$. *Wir definieren*

$$W^{\perp,F} := \{x \in V_{\mathbb{R}} \mid b_F(x,V) = \{0\}\},$$

den Orthogonalraum von W *bezüglich* F.

Lemma 6.5.2 *Ist* $W \leq_{D_{\mathbb{R}}} V_{\mathbb{R}}$, *so ist* $V_{\mathbb{R}} = W \oplus_{D_{\mathbb{R}}} W^{\perp,F}$.

Beweis: Offensichtlich ist $V_{\mathbb{R}} = W \oplus_{\mathbb{R}} W^{\perp,F}$. Es bleibt also nur die D-Modulstruktur von $W^{\perp,F}$ zu zeigen. Sei nun $w \in W$, $x \in W^{\perp,F}$ und $d \in D_{\mathbb{R}}$, dann gilt $b_F(xd,w) = b_F(x,wd^*) = 0$, da W ein $D_{\mathbb{R}}$-Untermodul von $V_{\mathbb{R}}$ ist. □

Bemerkung und Definition 6.5.3 *Es sei* $F \in \mathcal{P}$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Wir setzen* $T := \langle \mathrm{S}_L(F)\rangle_{D_{\mathbb{R}}}$, $k := \dim_D(T)$ *und* $U := T^{\perp,F}$. *Dann ist* $V_{\mathbb{R}} = T \oplus U$ *und die Abbildung* $t + u \mapsto \exp((n-k)\lambda)t + \exp(-k\lambda)u$ *(in dieser Zerlegung) ist* $D_{\mathbb{R}}$*-linear. Insbesondere existiert eine Matrix* $\phi_{\lambda,F} \in D_{\mathbb{R}}^{n\times n}$ *mit* $\phi_{\lambda,F}(t+u) = \exp((n-k)\lambda)t + \exp(-k\lambda)u$ *(wieder in obiger Zerlegung).*

Satz 6.5.4 *Die Menge* $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ *ist ein* $\mathrm{GL}(L)$*-invarianter starker Deformationsretrakt von* $\mathcal{P}$.

Beweis: Wir folgen im Wesentlichen dem Beweis aus [19]. Wir führen den Beweis nur für das triviale Gewicht. Der allgemeine Fall funktioniert vollkommen analog und ist lediglich etwas unübersichtlicher. Wir setzen zunächst für $j \geq 1$ $\mathcal{P}_j := \{F \in \mathcal{P} \mid \dim_D(\langle \mathrm{S}_L(F)\rangle_D) \geq j\}$ und $\mathcal{P}_{n+1} := \Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$. Dann ist $\mathcal{P}_n = \Sigma^{\mathrm{wr}}$ und es genügt sicherlich zu zeigen, dass wir für $1 \leq j \leq n$ eine $\mathrm{GL}(L)$-invariante Deformationsretraktion von $\mathcal{P}_j$ nach $\mathcal{P}_{j+1}$ haben. Für $\mathcal{P}_n$ ist die Retraktion durch einfaches Reskalieren der Form gegeben. Sei also nun $j < n$. Wir suchen also eine Abbildung $r_t(F), r \in [0,1]$ mit $r_0(F) = F$, $r_1(F) \in \mathcal{P}_{j+1}$ und $r_t(F') = F'$ für alle $t \in [0,1], F \in \mathcal{P}_j, F' \in \mathcal{P}_{j+1}$.

Sei nun $F \in \mathcal{P}_k$ und setze $T := \langle \mathrm{S}_L(F)\rangle, U := T^{\perp,F}$. Nach Lemma 6.5.2 ist dann $V = U \oplus T$. Sei nun $B \subset T$ die offene Kugel vom Radius $\min_L(F)$ in T bezüglich der von F induzierten Norm. Dann ist $B \oplus U$ konvex, zentralsymmetrisch und hat unendliches Volumen. Nach Minkowskis Gitterpunktsatz existiert also ein Vektor $0 \neq x \in L \cap (B \oplus U)$. Insbesondere existiert ein $0 < \lambda$, sodass

$$\begin{aligned} \phi^{\dagger}_{\lambda,F} F \phi_{\lambda,F}[x] &= \exp(2(n-k)\lambda)F[x_T] + \exp(-2k\lambda)F[x_U] \\ &= \exp(2(n-k)\lambda)\min_L(F), \end{aligned}$$

wobei $x = x_U + x_T$ mit $x_U \in U$ und $x_T \in T$.

Dieser Beobachtung folgend betrachten wir $\mu(F) \geq 0$ maximal mit der Eigenschaft $\phi^{\dagger}_{\lambda,F} F \phi_{\lambda,F} \in \mathcal{P}_{k+1} - \mathcal{P}_k$ für $\lambda \in [0, \mu(F))$. Dann ist $\mu(F) = 0$ für alle $F \in \mathcal{P}_{k+1}$.

Wir setzen nun

$$r : [0,1] \times \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_k, r_t(F) := \phi^{\dagger}_{t\mu(F),F} F \phi_{t\mu(F),F}.$$

Dann ist $r_0(F) = F$, $r_1(F) \in \mathcal{P}_{k+1}$ und $r_\lambda(F') = F'$ für alle $F \in \mathcal{P}_k$, $F' \in \mathcal{P}_{k+1}$ und $\lambda \in [0,1]$. Weiter ist r sicherlich stetig in t. Darüber hinaus ist μ stetig in F und daher erhalten wir auch die Stetigkeit von r in F.

Dann ist r aber die gewünschte Deformationsretraktion und die Behauptung folgt. □

Korollar 6.5.5 *Der Raum $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ ist kontrahierbar.*

Beweis: Nach Lemma 4.1.3 vererbt sich Kontrahierbarkeit auf Retrakte. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{P}$ kontrahierbar ist. Dies ist aber offensichtlich der Fall, da $\mathcal{P}$ konvex ist. □

Korollar 6.5.6 *In der Zerlegung von $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ in minimale Klassen ist der zelluläre Kettenkomplex azyklisch mit $\mathrm{H}_0 \cong \mathbb{Z}$ und $\mathrm{GL}(L)$ operiert zellverträglich.*

Beweis: Dass $\mathrm{GL}(L)$ zellverträglich operiert, ist offensichtlich. Die Aussage über den zellulären Kettenkomplex folgt aus Lemma 4.2.4. $\square$

6.6. Der Algorithmus

Insgesamt haben wir im letzten Abschnitt Folgendes gezeigt: Der Raum $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ der well-rounded Formen mit konstantem Minimum besitzt eine $\mathrm{GL}(L)$-invariante Zellzerlegung, in der der Abschluss einer jeden Zelle ein Polytop ist und in der der Schnitt des Abschlusses zweier Zellen - so er nicht leer ist - stets wieder der Abschluss einer Zelle ist.

Die Dimension einer Zelle entspricht gerade dem Perfektionskorang und in jeder Dimension existieren nur endlich viele Bahnen von Zellen, wobei jeder Stabilisator einer Zelle endlich ist. Die $\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}(L)$-Moduln im zellulären Kettenkomplex C_* von $\Sigma^{\mathrm{wr}}_{=1}$ haben also die Gestalt

$$C_n \cong \bigoplus_{M_k} \mathbb{Z}G \otimes_{S_{n,k}} \mathbb{Z}^{\chi_{n,k}},$$

wobei die Summe über ein Vertretersystem $(M_k)_k$ der Zellen in Dimension n läuft, $S_{n,k}$ der Stabilisator von M_k in $\mathrm{GL}(L)$ ist und $\chi_{n,k} : S_{n,k} \to \{\pm 1\}$ beschreibt, wie ein Element aus $S_{n,k}$ auf der Orientierung von M_k operiert.

Diese Beobachtung legt den folgenden Algorithmus zur Bestimmung der Homologie- und Kohomologiegruppen von $\mathrm{GL}(L)$ nahe:

Algorithmus 6.6.1 *Eingabe: Informationen, die das Gitter L bis auf Isomorphie eindeutig festlegen (beispielsweise die Steinitzklasse und die Dimension).*

Ausgabe: Die Homologie- beziehungsweise Kohomologiegruppen von $\mathrm{GL}(L)$ *mit ganzzahligen Koeffizienten.*

1. *Bestimme ein Vertretersystem der well-rounded minimalen Klassen mit fixiertem Minimum.*

2. *Bestimme die kombinatorische Struktur des well-rounded Retrakts, insbesondere also die Stabilisatoren der einzelnen Zellen, die Orientierungscharaktere und für die Vertreter die Randabbildung im zellulären Kettenkomplex.*

3. *Konstruiere aus diesen Informationen mit dem Algorithmus aus Satz 3.5.2 eine freie* $\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}(L)$*-Auflösung von* $\mathbb{Z}$.

4. *Wende die Funktoren* $\mathbb{Z} \otimes_{\mathrm{GL}(L)} -$ *beziehungsweise* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(L)}(-, \mathbb{Z})$ *auf die Auflösung an.*

5. *Berechne im entstehenden Kettenkomplex beziehungsweise Kokettenkomplex die Homologie- beziehungsweise Kohomologiegruppen (dies ist eine simple Anwendung des Smithnormalformalgorithmus).*

7. Rechnerische Ergebnisse

In diesem Kapitel möchten wir einige Ergebnisse präsentieren, die mit Hilfe des Algorithmus aus dem vorangehenden Kapitel gewonnen wurden.

7.1. Imaginärquadratische Zahlkörper

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Homologie- und Kohomologiegruppen von Gruppen der Form $\mathrm{GL}(L)$ für ein Gitter L über dem Ganzheitsring eines imaginärquadratischen Zahlkörpers. Wir arbeiten dabei mit dem Gewicht φ_1, welches in Definition 6.3.5 eingeführt wurde.

Für diesen Spezialfall hat Oliver Braun in "Magma" ([3]) einen Algorithmus implementiert, welcher ein Vertretersystem der well-rounded minimalen Klassen unter der Operation von $\mathrm{GL}(L)$ bestimmt. Dieser wurde benutzt, um Algorithmus 6.6.1 anwenden zu können.

7.1.1. $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$

Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, seinen Ganzheitsring $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ sowie die beiden Gitter $L_0 := \mathbb{Z}_K \oplus \mathbb{Z}_K$ und $L_1 := \mathbb{Z}_K \oplus \wp$ mit $\wp^2 = (2)$. Wir setzen $G_0 := \mathrm{GL}(L_0)$ und $G_1 := \mathrm{GL}(L_1)$.

n	$\mathrm{H}_n(G_0,\mathbb{Z})$	$\mathrm{H}_n(G_1,\mathbb{Z})$	$\mathrm{H}^n(G_0,\mathbb{Z})$	$\mathrm{H}^n(G_1,\mathbb{Z})$
1	C_2^5	C_2^3	$\{0\}$	$\{0\}$
2	$C_4^2 \times C_{12} \times \mathbb{Z}$	$C_2^2 \times C_{12} \times \mathbb{Z}$	$C_2^5 \times \mathbb{Z}$	$C_2^3 \times \mathbb{Z}$
3	$C_2^8 \times C_{24}$	$C_2^8 \times C_{24}$	$C_4^2 \times C_{12}$	$C_2^2 \times C_{12}$
4	C_2^7	C_2^7	$C_2^8 \times C_{24}$	$C_2^8 \times C_{24}$
5	C_2^{14}	C_2^{12}	C_2^7	C_2^7
6	$C_2^8 \times C_4^2 \times C_{12}$	$C_2^{10} \times C_{12}$	C_2^{14}	C_2^{12}
7	$C_2^{16} \times C_{24}$	$C_2^{16} \times C_{24}$	$C_2^8 \times C_4^2 \times C_{12}$	$C_2^{10} \times C_{12}$
8	C_2^{15}	C_2^{15}	$C_2^{16} \times C_{24}$	$C_2^{16} \times C_{24}$
9	C_2^{22}	C_2^{20}	C_2^{15}	C_2^{15}
10	$C_2^{16} \times C_4^2 \times C_{12}$	$C_2^{18} \times C_{12}$	C_2^{22}	C_2^{20}

Insbesondere können wir der Tabelle entnehmen, dass $G_0 \ncong G_1$.

7.1.2. $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$

Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$, seinen Ganzheitsring $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ sowie die beiden Gitter $L_0 := \mathbb{Z}_K \oplus \mathbb{Z}_K$ und $L_1 := \mathbb{Z}_K \oplus \wp$ mit $\wp^2 = (2)$. Wir setzen $G_0 := \mathrm{GL}(L_0)$ und $G_1 := \mathrm{GL}(L_1)$.

n	$\mathrm{H}_n(G_0,\mathbb{Z})$	$\mathrm{H}_n(G_1,\mathbb{Z})$	$\mathrm{H}^n(G_0,\mathbb{Z})$	$\mathrm{H}^n(G_1,\mathbb{Z})$
1	C_2^4	C_2^4	$\{0\}$	$\{0\}$
2	$C_4^2 \times C_{12} \times \mathbb{Z}$	$C_2^2 \times C_{12} \times \mathbb{Z}$	$C_2^4 \times \mathbb{Z}$	$C_2^4 \times \mathbb{Z}$
3	$C_2^9 \times C_{24}$	$C_2^8 \times C_{24}$	$C_4^2 \times C_{12}$	$C_2^2 \times C_{12}$
4	C_2^7	$C_2^6 \times C_4$	$C_2^9 \times C_{24}$	$C_2^8 \times C_{24}$
5	C_2^{13}	C_2^{13}	C_2^7	$C_2^6 \times C_4$
6	$C_2^8 \times C_4^2 \times C_{12}$	$C_2^{10} \times C_{12}$	C_2^{13}	C_2^{13}
7	$C_2^{17} \times C_{24}$	$C_2^{16} \times C_{24}$	$C_2^8 \times C_4^2 \times C_{12}$	$C_2^{10} \times C_{12}$
8	C_2^{15}	$C_2^{14} \times C_4$	$C_2^{17} \times C_{24}$	$C_2^{16} \times C_{24}$
9	C_2^{21}	C_2^{21}	C_2^{15}	$C_2^{14} \times C_4$
10	$C_2^{16} \times C_4^2 \times C_{24}$	$C_2^{18} \times C_{12}$	C_2^{21}	C_2^{21}

Insbesondere können wir der Tabelle entnehmen, dass $G_0 \ncong G_1$.

7.1.3. $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}),\ d \leq 26$

Neben den beiden zuvor angegebenen Beispielen stehen unter

`www.math.rwth-aachen.de/~Sebastian.Schoennenbeck/`

die Daten der Well-Rounded-Retrakte aller Gruppen vom Typ $\mathrm{GL}(L)$ für Rang-2-Gitter über den Ganzheitsringen der imaginärquadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}),\ d \leq 26$ in HAP-kompatiblem Format zur Verfügung.

7.1.4. Allgemeine Ergebnisse

Es ist auffällig, dass in den obigen Tabellen ausschließlich die Primzahlen 2 und 3 auftauchen. Dieses Verhalten setzt sich für alle Ordnungen von dieser Gestalt fort.

Lemma 7.1.1 *[9, Abschnitt 5] Es sei D eine endlich-dimensionale $\mathbb{Q}$-Divisionsalgebra, $\mathcal{O}$ eine Maximalordnung in D und L ein $\mathcal{O}$-Gitter in D^n. Ist nun p eine Primzahl und*

$x \in \mathrm{H}_k(\mathrm{GL}(L), \mathbb{Z})$ von Ordnung p für ein k, so gilt bereits $p \mid |S|$, für einen Stabilisator S einer Zelle im well-rounded Retrakt.

Ist darüberhinaus l die größte Dimension einer Zelle im well-rounded Retrakt, so ist $\mathrm{H}_k(\mathrm{GL}(L), \mathbb{Z})$ endlich für alle $k > l$.

Lemma 7.1.2 *Ist K ein imaginärquadratischer Zahlkörper, $G \leq \mathrm{GL}_2(K)$ endlich und $p \mid |G|$, so ist $p \in \{2, 3\}$.*

Beweis: Es sei p eine Primzahl und $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ ein Element der Ordnung p. Dann gilt für das Minimalpolynom $\mu_g = \mu_K(\zeta_p)$. Für $p > 5$ ist aber $\deg(\mu_K(\zeta_p)) \geq \frac{p-1}{2} > 2$ und für $p = 5$ ist $\deg(\mu_K(\zeta_5)) = 4 > 2$, da der eindeutige quadratische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ total reell ist. Nun ist aber $\deg(\mu_g) \leq 2$ und daher $p \in \{2, 3\}$ wie behauptet. □

Darüber hinaus können wir Aussagen über Periodizität in der Kohomologie der betrachten Gruppen machen.

Satz 7.1.3 *[25, Theorem 14.1]*

Es sei D eine Divisionsalgebra endlicher Dimension über $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}$ eine Maximalordnung in D und $L \leq D^n$ ein $\mathcal{O}$-Gitter. Dann gilt:

1. *$\mathrm{GL}(L)$ hat genau dann p-periodische Kohomologie für eine Primzahl p (das heißt der p-Anteil in den Kohomologiegruppen ist periodisch), wenn jede endliche Untergruppe p-periodische Kohomologie hat.*

2. *$\mathrm{GL}(L)$ hat genau dann periodische Kohomologie, wenn jede endliche Untergruppe periodische Kohomologie hat.*

Für endliche Gruppen existiert nun folgendes einfaches Kriterium zur Periodizität der Kohomologie:

Satz 7.1.4 *[5, Theorem 9.7]*

1. *Eine endliche Gruppe G hat genau dann p-periodische Kohomologie, wenn G keine Untergruppen isomorph zu $C_p \times C_p$ enthält.*

2. *Eine endliche Gruppe hat genau dann periodische Kohomologie, wenn jede abelsche Untergruppe zyklisch ist.*

Für die Automorphismengruppen von Rang-2-Gittern über imaginärquadratischen Zahlkörpern erhalten wir also das folgende Resultat.

Korollar 7.1.5 *Es sei K ein imaginärquadratischer Zahlkörper und L ein $\mathbb{Z}_K$-Gitter vom Rang 2. Dann ist die Kohomologie von $\mathrm{GL}(L)$ nicht 2-periodisch und $\mathrm{GL}(L)$ hat genau dann 3-periodische Kohomologie, wenn $K \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.*

Beweis: Es sei $L = \mathbb{Z}_K \oplus \wp$ für ein ganzes Ideal $\wp$, dann enthält $\mathrm{GL}(L)$ die Gruppe $U := \langle \mathrm{diag}(-1,1), \mathrm{diag}(1,-1)\rangle \cong C_2 \times C_2$. Nach Satz 7.1.3 kann $\mathrm{GL}(L)$ somit keine 2-periodische Kohomologie haben. Da $\mathbb{Z}_K \oplus \wp$ ein Vertretersystem der $\mathbb{Z}_K$-Gitter vom Rang 2 enthält folgt die erste Behauptung.

Sei nun $K \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ und $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ von Ordnung 3. Dann sind die Elemente im Zentralisator von M in $\mathrm{GL}_2(K)$ von Ordnung 3 gerade M und M^2. Demnach kann keine Gruppe isomorph zu $C_3 \times C_3$ in $\mathrm{GL}_2(K)$ liegen. Insbesondere enthält also $\mathrm{GL}(L)$ keine solche Gruppe und $\mathrm{GL}(L)$ hat somit 3-periodische Kohomologie nach Satz 7.1.3. Auf der anderen Seite enthält $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$ die Untergruppe $U := \langle \zeta_3 I_2, \mathrm{diag}(\zeta_3, \zeta_3^2)\rangle \cong C_3 \times C_3$ und $U \leq \mathrm{GL}(\mathbb{Z}_K \oplus \wp)$ für jedes ganze Ideal $\wp$. Wie für die 2-Periodizität folgt auch hier die Behauptung. □

Angewendet auf die bereits betrachteten Fälle erhalten wir damit folgende Ergebnisse:

Korollar 7.1.6 *Es sei $d \in \{5,6\}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, L ein $\mathbb{Z}_K$-Gitter vom Rang 2 und $G := \mathrm{GL}(L)$, dann gilt*

$$\mathrm{H}^n(G,\mathbb{Z})_{(3)} = \begin{cases} C_3 & n > 0,\ n \equiv 0,3 \pmod 4 \\ \{0\} & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\mathrm{H}^n(G,\mathbb{Z})_{(3)}$ der 3-Anteil in der ganzzahligen Kohomologie von G bezeichne.

Wenden wir das universelle Koffiziententheorem 3.4.3 an, so erhalten wir analog für die Homologiegruppen:

Korollar 7.1.7 *Es sei $d \in \{5,6\}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, L ein $\mathbb{Z}_K$-Gitter vom Rang 2 und $G := \mathrm{GL}(L)$, dann gilt*

$$\mathrm{H}_n(G,\mathbb{Z})_{(3)} = \begin{cases} C_3 & n \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \{0\} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

7.2. Quaternionenalgebren

Der Algorithmus aus dem vorangehenden Kapitel lässt sich ebenfalls anwenden, um die Homologie- und Kohomologiegruppen von Einheitengruppen von Maximalordnungen in Quaternionenalgebren zu bestimmen.

7.2.1. Allgemeine Ergebnisse

Wie im Fall imaginärquadratischer Zahlkörper erhalten wir auch hier nur die Primzahlen 2 und 3. Dies folgt aus Lemma 7.1.1 und der folgenden Aussage.

Lemma 7.2.1 *Ist D eine Divisionsalgebra vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$, $G \leq D^*$ endlich und $p \mid |G|$, so ist $p \in \{2, 3\}$.*

Beweis: Es sei $g \in D^*$ ein Element von Ordnung p für eine Primzahl p. Dann ist $\mathbb{Q}(g) \cong \mathbb{Q}(\zeta_p)$ ein Teilkörper von D, insbesondere also vom Grad kleiner-gleich 2 über $\mathbb{Q}$ und damit $p \in \{2, 3\}$. □

Darüber hinaus können wir folgern, dass die betrachteten Einheitengruppen in diesem Fall stets perodische Kohomologie aufweisen.

Satz 7.2.2 *Es sei D eine endlich-dimensionale Divisionsalgebra über $\mathbb{Q}$ und $G \leq D^*$ endlich und abelsch. Dann ist G zyklisch.*

Beweis: Die von G erzeugte $\mathbb{Q}$-Teilalgebra von D ist kommutativ, also ein Körper. Endliche Untergruppen von Einheitengruppen von Körpern sind aber stets zyklisch und die Behauptung folgt. □

Korollar 7.2.3 *Es sei D eine endlich-dimensionale Divisionsalgebra über $\mathbb{Q}$ und $\mathcal{O} \subset D$ eine Maximalordnung in D. Dann hat $\mathcal{O}^*$ periodische Kohomologie.*

Beweis: Dies folgt sofort aus dem vorangehenden Satz zusammen mit Satz 7.1.3. □

7.2.2. $\left(\frac{2,3}{\mathbb{Q}}\right)$

Wir betrachten die Divisionsalgebra $\left(\frac{2,3}{\mathbb{Q}}\right)$, also die $\mathbb{Q}$-Algebra erzeugt von i und j mit $i^2 = 2, j^2 = 3$ und $ij = -ji =: k$. In dieser finden wir die $\mathbb{Z}$-Maximalordnung $\mathcal{O} := \langle 1, \frac{1}{2}(1+i+k), \frac{1}{2}(1-i+k), \frac{1}{2}(j+k)\rangle_{\mathbb{Z}}$. Wir bestimmen die Homologie- und Kohomologiegruppen von $\mathcal{O}^*$:

n	$\mathrm{H}_n(\mathcal{O}^*, \mathbb{Z})$	$\mathrm{H}^n(\mathcal{O}^*, \mathbb{Z})$
1	C_{24}	$\{0\}$
2	C_2	C_{24}
3	C_{24}	C_2
4	C_2	C_{24}
5	C_{24}	C_2
6	C_2	C_{24}
7	C_{24}	C_2
8	C_2	C_{24}
9	C_{24}	C_2
10	C_2	C_{24}

Korollar 7.2.4 *Es sei $\mathcal{O}$ weiterhin die obige Maximalordnung. Dann gilt für $n \geq 2$:*

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{O}^*, \mathbb{Z}) = \begin{cases} C_{24} & n \equiv 0 \pmod 2 \\ C_2 & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Korollar 7.2.5 *Mit dem universellen Koeffiziententheorem 3.4.3 erhalten wir dann für $n \geq 1$*

$$\mathrm{H}_n(\mathcal{O}^*, \mathbb{Z}) = \begin{cases} C_{24} & n \equiv 1 \pmod 2 \\ C_2 & n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

7.3. Weitere Gruppen

7.3.1. Untergruppen von endlichem Index

Die beschriebene Methode lässt sich nicht nur auf die volle $\mathrm{GL}(L)$ anwenden; auch jede Untergruppe von endlichem Index operiert mit endlich vielen Bahnen von Zellen in jeder Dimension und endlichen Stabilisatoren. Der Algorithmus lässt sich also auch in diesem Fall verwenden, sofern man ein Vertretersystem der Linksnebenklassen nach der gewünschten Untergruppe sowie einen Test auf Mitgliedschaft zur Verfügung hat.

Wir zeigen dies hier am Beispiel von $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right)$.

n	$\mathrm{H}_n\left(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right)\right)$	$\mathrm{H}^n\left(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right)\right)$
1	$C_2 \times C_6 \times \mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$
2	$C_2^2 \times C_{12} \times \mathbb{Z}$	$C_2 \times C_6 \times \mathbb{Z}$
3	$C_2^2 \times C_{24}$	$C_2^2 \times C_{12}$
4	$C_4 \times C_{12}$	$C_2^2 \times C_{24}$
5	$C_2^2 \times C_6$	$C_4 \times C_{12}$
6	$C_2^2 \times C_{12}$	$C_2^2 \times C_6$
7	$C_2^2 \times C_{24}$	$C_2^2 \times C_{12}$
8	$C_4 \times C_{12}$	$C_2^2 \times C_{24}$
9	$C_2^2 \times C_6$	$C_4 \times C_{12}$
10	$C_2^2 \times C_{12}$	$C_2^2 \times C_6$

Die auftretenden Stabilisatoren im well-rounded Retrakt der $\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right)$ sind isomorph zu C_2, C_4, C_6 und Q_8, insbesondere liegt also auch hier periodische Kohomologie vor. Wir folgern:

Korollar 7.3.1 *Für $n \geq 3$ gilt*

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right), \mathbb{Z}) = \begin{cases} C_2^2 \times C_{24} & n \equiv 0 \pmod 4 \\ C_4 \times C_{12} & n \equiv 1 \pmod 4 \\ C_2^2 \times C_6 & n \equiv 2 \pmod 4 \\ C_2^2 \times C_{12} & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Korollar 7.3.2 *Mit dem universellen Koeffiziententheorem 3.4.3 erhalten wir dann für $n \geq 3$*

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right), \mathbb{Z}) = \begin{cases} C_2^2 \times C_{24} & n \equiv 3 \pmod 4 \\ C_4 \times C_{12} & n \equiv 0 \pmod 4 \\ C_2^2 \times C_6 & n \equiv 1 \pmod 4 \\ C_2^2 \times C_{12} & n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

Darüber hinaus erhalten wir ein allgemeines Ergebnis für die speziellen linearen Gruppen.

Lemma 7.3.3 *Es sei K ein imaginärquadratischer Zahlkörper und L ein $\mathbb{Z}_K$-Gitter vom Rang* 2. *Dann hat* $\mathrm{SL}(L)$ *periodische Kohomologie.*

Beweis: Nach dem, was wir bereits über die endlichen Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(K)$ wissen, genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{SL}(L)$ keine Untergruppe isomorph zu $C_2 \times C_2$ enthält und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$ keine zu $C_3 \times C_3$ isomorphe Gruppe als Untergruppe hat. Jede zu $C_2 \times C_2$ isomorphe Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$ enthält aber ein Element mit Minimalpolynom $x^2 - 1$, also mit Determinante -1. Analog enthält der Zentralisator eines Elements M von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$ mit Ordnung 3 lediglich zwei Elemente mit Determinante 1 und Ordnung 3 (M und M^2). Jedes weitere M zentralisierende Element von Ordnung 3 hat Determinante ζ_3 oder ζ_3^2. Die Behauptung folgt. □

Auch für die Gruppen vom Typ $\mathrm{SL}(L)$ für Rang-2-Gitter L über den Ganzheitsringen von $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}),\ d \leq 26$ stehen unter

`www.math.rwth-aachen.de/~Sebastian.Schoennenbeck/`

die Daten der zugehörigen Well-Rounded-Komplexe zur Verfügung.

7.3.2. Projektive lineare Gruppen

Dual zu den Untergruppen von endlichem Index kann mit Hilfe des Algorithmus auch die (Ko-)Homologie von Faktorgruppen nach trivial operierenden Untergruppen bestimmt werden. Im Fall der imaginärquadratischen Zahlkörper ist es also insbesondere möglich die Gruppen vom Typ $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_K)$ zu untersuchen. Diese Gruppen sind unter dem Namen Bianchigruppen bekannt und spielen unter anderem in der Hecketheorie eine Rolle.

Wir betrachten hier die Gruppe $\mathrm{PSL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right)$.

n	$\mathrm{H}_n\left(\mathrm{PSL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right)\right)$	$\mathrm{H}^n\left(\mathrm{PSL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]\right)\right)$
1	$C_2 \times C_6 \times \mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$
2	$C_2 \times C_{12} \times \mathbb{Z}$	$C_2 \times C_6 \times \mathbb{Z}$
3	$C_2^2 \times C_6$	$C_2 \times C_{12}$
4	$C_2^3 \times C_6$	$C_2^2 \times C_6$
5	$C_2^4 \times C_6$	$C_2^3 \times C_6$
6	$C_2^5 \times C_6$	$C_2^4 \times C_6$
7	$C_2^6 \times C_6$	$C_2^5 \times C_6$
8	$C_2^7 \times C_6$	$C_2^6 \times C_6$
9	$C_2^8 \times C_6$	$C_2^7 \times C_6$
10	$C_2^9 \times C_6$	$C_2^8 \times C_6$

Diese Ergebnisse stimmen mit denen von Alexander Rahm und Mathias Fuchs aus [21] überein.

8. Details zur Implementierung

In diesem Kapitel möchten wir kurz die Funktionsweise der implementierten Algorithmen vorstellen.

8.1. Magma-Programme

Die Programme für das Computeralgebrasystem "Magma" ([3]) bestimmen in der Situation imaginärquadratischer Zahlkörper die kombinatorische Struktur des well-rounded Retrakts. Dabei kommt zunächst ein Algorithmus von Oliver Braun zum Einsatz, welcher ein Vertretersystem der minimalen Klassen berechnet. Man beachte, dass hier mit Zeilen statt mit Spalten gearbeitet wird.

Wir beschreiben zunächst die Funktion **"BoundaryEmbeddings"**. Diese übernimmt Vertreter F_0, F_1 zweier well-rounded minimaler Klassen C_0, C_1 sowie eine Funktion c und bestimmt ein Vertretersystem derjenigen $g \in \mathrm{GL}(L)$, sodass gC_1 im Rand von C_0 liegt. Die Funktion c ist dabei der Mitgliedschaftstest für die $\mathrm{GL}(L)$ (oder eine beliebige andere Untergruppe, damit die Funktion auch für Untergruppen von endlichem Index benutzbar bleibt). Die Grundüberlegung ist

$$\begin{aligned} gC_1 \subset \partial C_0 &\Leftrightarrow gC_1 \subset \overline{C_0} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{S}_L(gC_1) \supset \mathrm{S}_L(C_0) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{S}_L(C_1)g^{-1} \supset \mathrm{S}_L(C_0) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{S}_L(C_1) \supset \mathrm{S}_L(C_0)g. \end{aligned}$$

Wir bestimmen also alle kürzesten Vektoren von F_1 (der bereits implementierte Befehl "minvecs" gibt nur ein Vertretersystem bis auf Operation von K^* aus, daher müssen noch gewisse Vielfache aufgenommen werden) und wählen in $\mathrm{S}_L(C_0)$ eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ des zugrundeliegenden Vektorraums aus (dies ist möglich, da C_0 well-rounded ist). Anschließend konstruieren wir für jede Liste $(d_1, ..., d_n) \in \mathrm{S}_L(C_0)^n$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung g mit $b_i g = d_i$ und überprüfen mit c, ob diese in $\mathrm{GL}(L)$ liegt und tatsächlich $\mathrm{S}_L(C_0)g \subset \mathrm{S}_L(C_1)$ erfüllt. Die sich ergebende Menge wird anschließend noch von Duplikaten befreit, sodass $g_1^{-1}g_2 \in \mathrm{Aut}(C_1)$ bereits $g_1 = g_2$ impliziert.

Die Funktion **"OrientationSignByDeterminant"** übernimmt eine well-rounded minimale Klasse C (gegeben durch einen Vertreter F) sowie ein Element $g \in \mathrm{Aut}(C)$ und gibt ± 1 zurück, basierend auf der Operation von g auf der Orientierung von C. Zu diesem Zweck werden zunächst die Ecken von C bestimmt (also die perfekten Formen im Rand) und aus den Verbindungsvektoren eine Basis des Translationsraums von $\mathrm{Aff}(C)$ ausgewählt. g operiert auf $\mathrm{Aff}(C)$ und damit auch auf dem Translationsraum und es ist daher möglich die Basisdarstellung von g in dieser Operation bezüglich der gewählten Basis zu bestimmen. Der Rückgabewert der Funktion ist gerade das Vorzeichen der Determinante dieser Basisdarstellung.

Die Funktion **"DoEverythingLowIndex"** sammelt alle Informationen über den well-rounded Retrakt einer Untergruppe U der $\mathrm{GL}(L)$ von endlichem Index. Zu diesem Zweck benötigt die Funktion ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $\mathrm{GL}(L)$ nach U und eine Funktion, welche Mitgliedschaft in U entscheidet. Die Funktion verwendet das bekannte Vertretersystem der well-rounded minimalen Klassen unter der Operation der $\mathrm{GL}(L)$ und bestimmt zunächst ein Vertretersystem unter der Operation von U. Dazu genügt die folgende Beobachtung: Ist $\mathrm{GL}(L) : U = k$ und $\mathrm{Aut}(C) : \mathrm{Aut}_U(C) = r$ (wobei $\mathrm{Aut}_U(C)$ der Stabilisator von C in U ist), so zerfällt die $\mathrm{GL}(L)$-Bahn von C in genau $\frac{k}{r}$ U-Bahnen. Das Programm durchläuft also das Vertretersystem nach $\mathrm{GL}(L)$ bestimmt den Index $\mathrm{Aut}(C) : \mathrm{Aut}_U(C)$ und sucht dann unter den gC ein Vertretersystem der U-Bahnen, wobei g das Vertretersystem der Linksnebenklassen durchläuft.

Analog funktionieren die Funktionen, die Stabilisatoren in den Untergruppen von endlichem Index bestimmen.

8.2. GAP-Programme

Die Programme für das Computeralgebrasystem "GAP" ([14]) bestimmen ausgehend von den Daten aus "Magma" die Randabbildung im zellulären Kettenkomplex und setzen anschließend die Informationen geeignet zusammen, sodass die Algorithmen des Pakets "HAP" ([11]) benutzbar werden.

Wir beschreiben hier die Funktionsweise der Funktion **"boundary"** zur Bestimmung der Randabbildung im zellulären Kettenkomplex. Wir nutzen dabei die Tatsache aus, dass für die Randabbildung ∂ auf jedem Vertreter der Zellen in gegebener Dimension bereits $\partial^2 = 0$ gelten muss. Darüber hinaus hilft uns die Beobachtung, dass in einem k-dimensionalen Polytop jede Kodimension-2-Seitenfläche in genau 2 Kodimension-1-Seitenflächen enthalten ist (vergleiche [26, Theorem 2.7]). Dies liefert die folgende Idee zu einer Rekursion:

1. Wir legen in Dimension 1 beliebige Orientierungen fest; das heißt für eine Zelle in Dimension 1 legen wir fest, welcher der beiden Randpunkte in der Randabbildung positiv und welcher negativ auftaucht.

2. Sind bis Dimension k alle Randabbildungen bestimmt, so wählen wir zu einer Zelle C in Dimension $k+1$ eine beliebige k-dimensionale Zelle C' im Rand und legen für C diejenige Orientierung als positiv fest, welche die positive Orientierung auf C' induziert. Vermöge der Bedingung $\partial^2 = 0$ wissen wir nun für alle Zellen im Rand von C, die mit C' Schnitt von Dimension $k-1$ haben, mit welchem Vorzeichen sie in der Randabbildung auftauchen, da sich der Schnitt in Summe gerade wegheben muss. Da der Graph der k-dimensionalen Seitenflächen von C, mit Adjazenz gegeben durch $k-1$-dimensionalen Schnitt, zusammenhängend ist, können wir so bereits für alle Zellen im Rand das Vorzeichen festlegen und schließen so die Rekursion.

3. Um konsistent zu bleiben und Rechenzeit zu sparen, arbeitet das Programm darüber hinaus mit einer Lookup-Tabelle, sodass jede Randabbildung nur einmal bestimmt wird.

Die Funktion benötigt eine duplikatfreie Auflistung der (unorientierten) Zellen im Rand einer jeden Zelle sowie die Stabilisatoren der einzelnen Zellen und ihre Orientierungscharaktere, um Gleichheit von orientierten Zellen entscheiden zu können.

A. Quellcode

A.1. Magma-Programme

Dies ist der Quellcode für die Magma-Programme, die die kombinatorische Struktur des well-rounded Retrakts bestimmen.

```
//One first needs to run "myall" with the desired input.

FormREPS:=Representatives;

// A procedure to produce all elements of given norm in an ideal P over the integers of a number field
ElementsOfNorm:=function(norm,P)
OK:=Integers(K);
Gram:=MatrixRing(Integers(),2)![[2,Trace(tau)],[Trace(tau),2*Norm(tau)]];//We will use the trace form and use the magma procedures for Z-lattices
L:=LatticeWithGram(Gram);
S:=ShortVectors(L,2*norm,2*norm);//This is not exactly the ideal way since we first compute all vectors in O_K and then intersect with P
output:=[s[1][1]+s[1][2]*tau: s in S];
output:=[x: x in output | x in P];
return output;
end function;

//Choose a Basis of a RowSpace out of a given List of RowVectors via simple linear algebra
ChooseBasis:=function(L,K)
Indices:=[];
T:=KMatrixSpace(K,#L,Dimension(Parent(L[1])))!L;
T:=Transpose(T);
T:=EchelonForm(T);
for i in [1..NumberOfRows(T)] do
```

```
        for j in [1..NumberOfColumns(T)] do
                if T[i][j] ne 0 then
                        Append(~Indices,j); break;
                end if;
        end for;
end for;
return [L[i]: i in Indices];
end function;

//Take a list of vectors and return all multiples of them which
    still lie in the lattice and have the same idealnorm
AllMinVecs:=function(F)
S:=minvecs(F);
output:={s: s in S};
for v in S do
        v10:=true;
        if v[1][1] ne 0 then
                X:=[w/v[1][1]: w in ElementsOfNorm(Norm(v[1][1]),p1)
                    ];// This is a list of elements of norm 1 which
                    might fulfill xv \in L.
                v10:=false;
        end if;
        if v10 then
                X:=[w/v[1][2]: w in ElementsOfNorm(Norm(v[1][2]),p2)
                    ];
        else
                X:=[x:x in X| x*v[1][2] in p2];
        end if;
        output:=output join {x*v: x in X};
end for;
output:=output join {-x : x in output}; // This is probably not
    necessary
return [v: v in output];
end function;

StabilizerOfMinClass:=function(F) //This will return the stabilizer
    of the minimal class correspondig to the form F
M:=minvecs(F);
T:=MatrixRing(K,n)!0;
for m in M do
        T:=T+HermitianTranspose(m)*m;
end for;
AUT:=aut(T^(-1));
```

```
AUT:=ConvertGroupToNumberField(AUT);
return AUT;
end function;

//A function to determine the stabilizer in a subgroup of GL which comes with a function CheckMembership (which does just that)
LowIndexStabilizer:=function(F,CheckMembership)
S:=StabilizerOfMinClass(F);
Elements:=[x: x in S | CheckMembership(x)];
order:=Order(MatrixGroup<n,K|Elements>);
Gens:=[Elements[1]];
H:=MatrixGroup<n,K|Elements>;
while Order(H) ne order do
        x:=Random(Elements);
        if not x in H then
                Append(~Gens,x);
                H:=MatrixGroup<n,K|Gens>;
        end if;
end while;
return H;
end function;

//Find Matrices in GL(L) such that gSmallFace is in the boundary of LargeFace
BoundaryEmbeddings:=function(LargeFace,SmallFace,CheckMembership) //Both LargeFace and SmallFace need to be given by a representative of the minimal class, CheckMembership will check wether a matrix is in GL(L), We want to construct g in GL(L) such that minvecs(LargeFace)g subset minvecs(SmallFace)
Target:=AllMinVecs(SmallFace);  //These are all possible images of minvecs(LargeFace)
M:=minvecs(LargeFace);
Source:=ChooseBasis(M,K);
n:=Dimension(Parent(Source[1]));
ImageSets:=Subsets({x: x in Target},n);
ImageSets:=[SetToIndexedSet(x): x in ImageSets];
Sn:=SymmetricGroup(n);
ImageLists:=[];
for g in Sn do
        for x in ImageSets do
                Append(~ImageLists,[x[i^g]: i in [1..n]]);
        end for;
end for;
```

```
Norms:=[idealnorm(v): v in Source];
ImageLists:=[x:x in ImageLists| Determinant(MatrixAlgebra(K,n)!x) ne 0]; // Now ImageList is a list of all possible tuples [w1,...,wn] such that v1g=w1,...,vng=wn possibly determines an element g in GL(L) which might fit the bill
ImageLists:=[x: x in ImageLists| [idealnorm(y): y in x] eq Norms]; // Since idealnorm(x)=idealnorm(xg) forall x and g in GL we need only consider lists which sequences of norms coincide with those of Source
Inv:=(MatrixAlgebra(K,n)!Source)^(-1);
PossibleElementsList:=[Inv*(MatrixAlgebra(K,n)!x): x in ImageLists]; // This is a list of all possible GroupElements such that gSmallFace might be in the boundary of LargeFace
PossibleElementsList:=[g: g in PossibleElementsList | CheckMembership(g)]; //Now only elements of GL(L) remain
PossibleElementsList:=[g: g in PossibleElementsList | {m*g: m in M} subset {v: v in Target}]; // Now only elements remain which really fulfill gSmallFace in the boundary of LargeFace
if #PossibleElementsList eq 0 then
        return [];
end if;
FinalOutput:=[PossibleElementsList[1]];
//Now we will make the list duplicate free
for g in PossibleElementsList do
        bool:=true;
        for h in FinalOutput do
                if h^(-1)*g in StabilizerOfMinClass(SmallFace) then
                        bool:=false;
                        break h;
                end if;
        end for;
        if bool then
                Append(~FinalOutput,g);
        end if;
end for;
return FinalOutput;
end function;

//The next function will compute the sign of the group element g acting on the extremal rays of the voronoi cone of F i.e. the sign of the permutation which g induces on {v^dagger*v | v in minvecs(F)}
PermSignOnExtRays:=function(F,g)
```

```
M:=minvecs(F);
Rays:={HermitianTranspose(v)*v : v in M};
Rays:=[x: x in Rays];
n:=#Rays;
Sn:=SymmetricGroup(n);
Perm:=[Position(Rays,HermitianTranspose(g)*x*g):x in Rays];
Perm:=Sn!Perm;
return Sign(Perm);
end function;

//This will give a list of all perfect forms in the boundary of a
    minimal class represented by F
Vertices:=function(F)
output:=[**];
for i in [1..#FormREPS[1]] do
        for x in BoundaryEmbeddings(F,FormREPS[1][i], IsInGL) do
                Append(~output,[*i,x*]);
        end for;
end for;
return output;
end function;

// The next function will check wether the minimal classes belonging
     to F and S have nontrivial intersection
HaveIntersection:=function(F,S)
for x in Vertices(F) do
        for y in Vertices(S) do //We will just check wether they
            have a vertex in common
                if x[1] eq y[1] and x[2]^(-1)*y[2] in
                    StabilizerOfMinClass(FormREPS[1][x[1]]) then
                        return true;
                end if;
        end for;
end for;
return false;
end function;

//This will order the vertices in the boundary of a cell such that
    two elements in succesion lie in the closure of the same dim 1
    cell (This will only work for dimension 1 and 2 and is not the
    most usefull function...)
OrderedVertices:=function(F)
V:=[x: x in Vertices(F)];
```

```
output:=[V[1]];
Remove(~V,1);
while #V ne 0 do
        u:=Random(V);
        w:=output[#output];
        M:=Seqset(AllMinVecs(u[2]*FormREPS[1][u[1]]*HermitianTranspose(u[2]))) meet Seqset(AllMinVecs(w[2]*FormREPS[1][w[1]]*HermitianTranspose(w[2])));
        Gens:=[HermitianTranspose(x)*x: x in M];
        Gens:=matbas3(Gens);
        Space:=sub<KMatrixSpace(Rationals(),2*n,2*n)|Gens>;
        if Dimension(Space) eq prank(FormREPS[1][1])-1 then
                Append(~output,u);
                Remove(~V,Position(V,u));
        end if;
end while;
return output;
end function;

// This will return the codim 1 cells in the boundary of F ordered in a way [b1,...,bk] such that bi and bi+1 have non-trivial intersection. This will only work if the cell corresponding to F has dimension 2.
OrderedBoundary:=function(F)
bnd:=[];
for i in [1..#FormREPS[2]] do
        for x in BoundaryEmbeddings(F,FormREPS[2][i],IsInGL) do
                bool:=true;
                for b in bnd do
                        if b[1] eq i and b[2]^(-1)*x in StabilizerOfMinClass(FormREPS[2][i]) then
                                bool:=false;
                        end if;
                end for;
                if bool then
                        Append(~bnd,[*i,x*]);
                end if;
        end for;
end for;
obnd:=[*bnd[1]*];
Remove(~bnd,1);
while #bnd ne 0 do
        x:=Random(bnd);
```

```
        y:=bnd[#bnd];
        if HaveIntersection(x[2]*FormREPS[2][x[1]]*HermitianTranspose(x[2]),y[2]*FormREPS[2][y[1]]*HermitianTranspose(y[2])) then
                Append(~obnd,x);
                Remove(~bnd,Position(bnd,x));
                print "tada", obnd;
        end if;
end while;
return obnd;
end function;

// This will compute the orientation action of g on the class represented by F via the ordered boundary if F has perfection corank 1 or 2
OrientationSignByOrderedBoundary:=function(F,g)
if pcorank(F) eq 0 then
        return 1;
end if;
V:=OrderedVertices(F); // This is really slow and therefore the whole function is really slow
V:=[y[2]*FormREPS[1][y[1]]*HermitianTranspose(y[2]): y in V];
if pcorank(F) eq 1 then
        if g*V[1]*HermitianTranspose(g) eq V[2] then
                return -1;
        end if;
        return 1;
end if;
if pcorank(F) eq 2 then
        gV:=[g*form*HermitianTranspose(g): form in V];
        i:=Position(gV,V[1]);
        if i eq 1 then
                j:=#V;
        else
                j:=i-1;
        end if;
        if V[2] eq gV[j] then
                return -1;
        end if;
        return 1;
end if;
end function;

```

```
// Same as above but via the use of determinants
OrientationSignByDeterminant:=function(F,g)
V:=Vertices(F);    //This is the time consuming part
V:=[y[2]*FormREPS[1][y[1]]*HermitianTranspose(y[2]): y in V];
GensOfTSpace:=[V[1]-V[i]: i in [1..#V]];
GensOfTSpaceRat:=[ElementToSequence(y): y in matbas3(GensOfTSpace)];
Indices:=[];           //Now we choose a (Q)-Basis for the Space of
    Translations of affine space generated by the given class
T:=KMatrixSpace(Rationals(),#GensOfTSpaceRat,4*n^2)!GensOfTSpaceRat;
T:=Transpose(T);
T:=EchelonForm(T);
for i in [1..NumberOfRows(T)] do
        for j in [1..NumberOfColumns(T)] do
                if T[i][j] ne 0 then
                        Append(~Indices,j); break;
                end if;
        end for;
end for;
Images:=[g*GensOfTSpace[i]*HermitianTranspose(g): i in Indices];
Images:=matbas3(Images);
Images:=[ElementToSequence(y): y in Images];
Space:=KSpaceWithBasis(KMatrixSpace(Rationals(),#Indices,4*n^2)![
    GensOfTSpaceRat[i]: i in Indices]);
MatrixRep:=[Coordinates(Space,Space!y):y in Images];    //We
    determine the basis representation of the images under g
return Sign(Determinant(MatrixRing(Rationals(),Dimension(Space))!
    MatrixRep));
end function;

//This will compute the orientation preserving subgroup of the
    stabilizer of a minimal class, this is a normal subgroup of index
     1 or 2
EvenStabilizerOfMinClass:=function(F)
Stab:=StabilizerOfMinClass(F);
index:=1;
n:=NumberOfRows(Stab.1);
for g in Generators(Stab) do              //Let us first determine
    whether the index is 1 or 2.
        if OrientationSignByDeterminant(F,g) eq -1 then
                index:=2;
                break;
        end if;
end for;
```

```
if index eq 1 then
        return Stab;
end if;
EvenGenerators:={};
Ordnung:=Order(Stab)/2;
while Order(MatrixGroup<n,K|[y : y in EvenGenerators]>) ne Ordnung do    //We add new elements until the order is large enough
        x:=Random(Stab);
        if OrientationSignByDeterminant(F,x) eq 1 then
                Include(~EvenGenerators,x);
        end if;
end while;
return MatrixGroup<n,K|[x: x in EvenGenerators]>;
end function;

//This will compute the orientation preserving subgroup of the stabilizer of a minimal class (in a subgroup of GL), this is a normal subgroup of index 1 or 2
LowIndexEvenStabilizer:=function(F,CheckMembership)
Stab:=LowIndexStabilizer(F,CheckMembership);
index:=1;
n:=NumberOfRows(Stab.1);
for g in Generators(Stab) do            //Let us first determine whether the index is 1 or 2.
        if OrientationSignByDeterminant(F,g) eq -1 then
                index:=2;
                break;
        end if;
end for;
if index eq 1 then
        return Stab;
end if;
EvenGenerators:={};
Ordnung:=Order(Stab)/2;
while Order(MatrixGroup<n,K|[y : y in EvenGenerators]>) ne Ordnung do    //We add new elements until the order is large enough since I have no better idea.
        x:=Random(Stab);
        if OrientationSignByDeterminant(F,x) eq 1 then
                Include(~EvenGenerators,x);
        end if;
end while;
return MatrixGroup<n,K|[x: x in EvenGenerators]>;
```

```
end function;

//A function to check wether something is in SL
IsInSL:=function(g)
return IsInGL(g) and Determinant(g) eq 1;
end function;

//The following functions will assemble the necessary data
AssembleDimensions:=function(Forms);
return [#Forms[i]:i in [1..#Forms]];
end function;

AssembleStabilizers:=function(Forms,gl,CheckMembership);
if gl then
        Stabs:=[[Generators(ConvertGroupToIntegers(StabilizerOfMinClass(Forms[i][j]))): j in [1..#Forms[i]]]: i in [1..#Forms]];
else
        Stabs:=[[Generators(ConvertGroupToIntegers(LowIndexStabilizer(Forms[i][j],CheckMembership))): j in [1..#Forms[i]]]: i in [1..#Forms]];
end if;
return Stabs;
end function;

AssembleEvenStabilizers:=function(Forms,gl,CheckMembership);
if gl then
        EvenStabs:=[[Generators(ConvertGroupToIntegers(EvenStabilizerOfMinClass(Forms[i][j]))): j in [1..#Forms[i]]]: i in [1..#Forms]];
else
        EvenStabs:=[[Generators(ConvertGroupToIntegers(LowIndexEvenStabilizer(Forms[i][j],CheckMembership))): j in [1..#Forms[i]]]: i in [1..#Forms]];
end if;
return EvenStabs;
end function;

AssembleBoundaryComponents:=function(Forms,CheckMembership)
BoundaryComponents:=[**];
for j in [2..#Forms] do
        tmpj:=[**];
        for k in [1..#Forms[j]] do
```

```
                tmpk:=[**];
                for i in [1..#Forms[j-1]] do
                        tmpi:=[**];
                        for g in BoundaryEmbeddings(Forms[j][k],
                            Forms[j-1][i],CheckMembership) do
                                Append(~tmpi, [*i,g*]);
                        end for;
                        if #tmpi ne 0 then
                                tmpk:=tmpk cat tmpi;
                        end if;
                end for;
                if #tmpk ne 0 then
                        Append(~tmpj,tmpk);
                end if;
        end for;
        if #tmpj ne 0 then
                Append(~BoundaryComponents,tmpj);
        end if;
end for;
return BoundaryComponents;
end function;

AssembleElements:=function(BoundaryComponents,Stabilizers)
B:=BoundaryComponents;
S:=Stabilizers;
n:=2;
elts:=[**];
for i in [1..#S] do
        for j in [1..#S[i]] do
                for x in MatrixGroup<2*n,Integers()|S[i][j]> do
                        if Position(elts,x) eq 0  then
                                Append(~elts,x);
                        end if;
                end for;
        end for;
end for;
for i in [1..#B] do
        for j in [1..#B[i]] do
                for k in [1..#B[i][j]] do
                        for x in Generators(ConvertGroupToIntegers(
                            MatrixGroup<n,K|B[i][j][k][2]>)) do
                                if Position(elts,x) eq 0 then
                                        Append(~elts,x);
```

```
                                        end if;
                                end for;
                        end for;
                end for;
end for;
l:=#elts;
for i in [1..l] do
        for j in [1..l] do
                if Position(elts,elts[i]*elts[j]) eq 0 then
                        Append(~elts,elts[i]*elts[j]);
                end if;
        end for;
end for;
return elts;
end function;

//Some functions to write stuff in gap readable format
WriteMatrixToGapFormat:=procedure(file,m) //file is a string
Write(file,"[");
for i in [1..NumberOfRows(m)] do
        if i ne 1 then
                Write(file,",");
        end if;
        Write(file,"[");
        for j in [1..NumberOfColumns(m)] do
                if j eq 1 then
                        Write(file,m[i][j]);
                else
                        Write(file,",");
                        Write(file,m[i][j]);
                end if;
        end for;
        Write(file,"]");
end for;
Write(file,"]");
end procedure;

WriteBoundaryComponentsToGapFormat:=procedure(file,B,elts)
B:=[*[*[*[B[i][j][k][1],Position(elts,matbas2([B[i][j][k][2]])[1])]:
    k in [1..#B[i][j]]*]:j in [1..#B[i]]*]:i in [1..#B]*];
Write(file,"BoundaryComponent:=[");
for i in [1..#B] do
        if i ne 1 then
```

```
			Write(file,",");
		end if;
		Write(file,"[");
		for j in [1..#B[i]] do
			if j ne 1 then
			Write(file,",");
			end if;
			Write(file,"[");
			for k in [1..#B[i][j]] do
				if k ne 1 then
					Write(file,",");
				end if;
				Write(file,"[");
				Write(file,B[i][j][k][1]);
				Write(file,",");
				Write(file,B[i][j][k][2]);
				Write(file,"]");
			end for;
			Write(file,"]");
		end for;
		Write(file,"]");
end for;
Write(file,"];");
end procedure;

WriteElementsToGapFormat:=procedure(file,elts)
Write(file,"elts:=[");
for i in [1..#elts] do
	if i ne 1 then
		Write(file,",");
	end if;
	WriteMatrixToGapFormat(file,elts[i]);
end for;
Write(file,"];");
end procedure;

WriteStabilizersToGapFormat:=procedure(file,Stabs,booleven);
if booleven then
	Write(file,"evenstabilizers:=[");
else
	Write(file,"stabilizers:=[");
end if;
for i in [1..#Stabs] do
```

```
        if i ne 1 then
                Write(file,",");
        end if;
        Write(file,"[");
        for j in [1..#Stabs[i]] do
                if j ne 1 then
                        Write(file,",");
                end if;
                Write(file,"[");
                z:=true;
                for x in Stabs[i][j] do
                        if not z then
                                Write(file,",");
                        end if;
                        WriteMatrixToGapFormat(file,x);
                        z:=false;
                end for;
                Write(file,"]");
        end for;
        Write(file,"]");
end for;
Write(file,"];");
end procedure;

WriteDimensionsToGapFormat:=procedure(file,DIMS)
Write(file,"DIMS:=[");
        for i in [1..#DIMS] do
                if i ne 1 then
                        Write(file,",");
                end if;
                Write(file,DIMS[i]);
        end for;
Write(file,"];");
end procedure;

WriteGeneratorsToGapFormat:=procedure(file,Gens)
Write(file,"Gens:=[");
for i in [1..#Gens] do
        if i ne 1 then
                Write(file,",");
        end if;
        WriteMatrixToGapFormat(file,Gens[i]);
end for;
```

```
Write(file,"];");
end procedure;

//These functions will assemble all available information about the well-rounded retract and write it to a file (in GAP-readable format)
DoEverythingGL:=procedure(file)
stabs:=AssembleStabilizers(FormREPS,true,IsInGL);
evenstabs:=AssembleEvenStabilizers(FormREPS,true,IsInGL);
BC:=AssembleBoundaryComponents(FormREPS,IsInGL);
DIMS:=AssembleDimensions(FormREPS);
elts:=AssembleElements(BC,stabs);
WriteDimensionsToGapFormat(file,DIMS);
WriteElementsToGapFormat(file,elts);
WriteStabilizersToGapFormat(file,stabs,false);
WriteStabilizersToGapFormat(file,evenstabs,true);
WriteBoundaryComponentsToGapFormat(file,BC,elts);
WriteGeneratorsToGapFormat(file,ZGENS);
end procedure;

DoEverythingLowIndex:=procedure(file,Reps,CheckMembership)
index:=#Reps;
Forms:=[[]:i in [1..#FormREPS]];
for i in [1..#FormREPS] do
        for j in [1..#FormREPS[i]] do
                S:=StabilizerOfMinClass(FormREPS[i][j]);
                LS:=LowIndexStabilizer(FormREPS[i][j],CheckMembership);
                r:=Order(S)/Order(LS);
                s:=index/r;
                z:=1;
                list:=[Reps[z]*FormREPS[i][j]*HermitianTranspose(Reps[z])];
                while #list ne s do
                        z:=z+1;
                        if {CheckMembership(Reps[y]*s*Reps[z]^(-1)): y in [1..z-1],s in S} eq {false} then
                                Append(~list,Reps[z]*FormREPS[i][j]*HermitianTranspose(Reps[z]));
                        end if;
                end while;
                Forms[i]:=Forms[i] cat list;
        end for;
```

```
end for;
stabs:=AssembleStabilizers(Forms,false,CheckMembership);
evenstabs:=AssembleEvenStabilizers(Forms,false,CheckMembership);
BC:=AssembleBoundaryComponents(Forms,CheckMembership);
DIMS:=AssembleDimensions(Forms);
elts:=AssembleElements(BC,stabs);
WriteDimensionsToGapFormat(file,DIMS);
WriteElementsToGapFormat(file,elts);
WriteStabilizersToGapFormat(file,stabs,false);
WriteStabilizersToGapFormat(file,evenstabs,true);
WriteBoundaryComponentsToGapFormat(file,BC,elts);
WriteGeneratorsToGapFormat(file,ZGENS);
end procedure;
```

A.2. GAP-Programme

Dies ist der Quellcode für die GAP-Programme, welche die Randabbildung im zellulären Kettenkomplex bestimmen.

```
#Initialise stabilizers, evenstabilizers (orientation preserving) and elts first

#This procedure will compare elements in permutationmodules with nontrivial stabilizers
IsEq:=function(k,v,w)
#k being the dimension, v and w two elements of the form [i,g] in the usual HAP-structure
local i;
if not AbsInt(v[1])=AbsInt(w[1])
      then return false; fi;
            #makes sure both elements are multiples of the same "free" generator
i:=AbsInt(v[1]);
if not elts[v[2]]^(-1)*elts[w[2]] in stabilizer(k,i)
      then return false; fi;
            #if ge_i neq he_i returns false
if v[1]=w[1] and elts[v[2]]^(-1)*elts[w[2]] in evenstabilizer(k,i)
      then return true; fi;
            #if both elements act the same way on the orientation and v and w are of the same orientation returns true
```

```
if v[1]=-w[1] and not elts[v[2]]^(-1)*elts[w[2]] in evenstabilizer(k
    ,i)
        then return true; fi;
                #if the group elements operate not in the same way
                    on the orientation and v[1]=-w[1] this returns
                    true
return false;
end;

#The next procedure will compute the boundary homomorphism. We will
    previously need a list BoundaryComponent which lists all k-1
    dimensional cells in the boundary of a k dimensional cell (
    duplicate free) as well as the list PseudoBoundary:=List([1..
    lngth],i->[1..Dimension(i)]); in which we will later save the
    images under the boundary
boundary:=function(k,mm)
        #k the dimension, mm corresponds to the abs(mm)-th "free"
            generator
local b,bndbnd,x,y,z,n,bnd,signedbnd,tmp,m,bool;
m:=AbsInt(mm);
if not IsInt(PseudoBoundary[k][m])
        then if mm>0
                then return PseudoBoundary[k][m];
                else return NegateWord(PseudoBoundary[k][m]);
        fi;
fi;
#This is the case if k or m is out of bounds or we have already
    computed the correct boundary and saved it in PB. This way we
    will later use a lookup-table rather than run through the entire
    recursion each time. It also asures consistency in case we have
    duplicates in elts
bnd:=StructuralCopy(BoundaryComponent[k][m]);
#Now we will insert the signs via recursion and the condition that
    boundary^2=0
if k=1
        then bnd[1][1]:=-bnd[1][1];
fi;
#Initialising the recursion by choosing some orientation on the 1-
    dim cells
if k>1
        then bndbnd:=[];
                #in bndbnd we will save all we know about boundary^2
                    so far
```

```
        bnd:=SSortedList(bnd);
        signedbnd:=[bnd[1]];
        RemoveSet(bnd,bnd[1]);
        x:=ShallowCopy(signedbnd[1]);
        b:=boundary(k-1,x[1]);
        b:=List(b,y->[y[1],Position(elts,elts[x[2]]*elts[y[2]])]);
                #This finds the correct elements in the boundary of x
        Append(bndbnd,b);
        while Length(bnd)>0
                do x:=Random(bnd); bool:=true;
                        #We are taking random elements because we can only work with elements that have non-trivial intersection with those we already looked at.
                b:=boundary(k-1,x[1]);
                b:=List(b,y->[y[1],Position(elts,elts[x[2]]*elts[y[2]])]);
                for y in bndbnd do
                        for z in b do
                                if bool and IsEq(k-2,y,z)
                                        then Append(signedbnd,[[-x[1],x[2]]]);
                                        Append(bndbnd,NegateWord(b));
                                        RemoveSet(bnd,x);
                                        bool:=false;
                                                #This is the case where an element in the boundary of x already exists in bndbd and we therefore need to take x negatively to assure that boundary^2 will be zero.
                                        else if bool and IsEq(k-2,[-y[1],y[2]],z)
                                        then Append(signedbnd,[[x[1],x[2]]]);
                                        Append(bndbnd,b);
```

```
                                    RemoveSet(bnd,x);
                                    bool:=false;
                                         #The dual case. The
                                           negative of an
                                           element in the
                                           boundary of x
                                           already appears
                                           in bndbnd and we
                                           have to take x
                                           positively to
                                           balance it out.
                                    fi;
                              fi;
                        od;
                  od;
            od;
            bnd:=signedbnd;
fi;
PseudoBoundary[k][m]:=bnd;
            #Write to our lookup table
return boundary(k,mm);
end;
```

Es folgt der Quelltext des Programms, das die von Magma und GAP gelieferten Informationen zusammensetzt.

```
ResolutionFromWellRoundedComplex:=function(file,length)
      Read(file);
      stabilizer:=function(k,j)
            return Group(stabilizers[k+1][AbsInt(j)]);
      end;
      evenstabilizer:=function(k,j)
            return Group(evenstabilizers[k+1][AbsInt(j)]);
      end;
      action:=function(k,j,g)
            local absj,id,r,u,H;
            absj:=AbsInt(j);
            H:=stabilizer(k,absj);
            id:=CanonicalRightCosetElement(H,Identity(H));
            r:=CanonicalRightCosetElement(H,elts[g]^-1);
            r:=id^-1*r;
            u:=r*elts[g];
            if u in evenstabilizer(k,absj) then
```

```
                        return 1;
                else
                        return -1;
                fi;
        end;
        dimension:=function(i)
                if 1<= i+1 and i+1 <=Length(DIMS) then
                        return DIMS[i+1];
                fi;
                return 0;
        end;
        PseudoBoundary:=List([1..Length(DIMS)],i->[1..dimension(i)]);
        Read("myprocs.gi"); #This delivers the boundary homomorphism
        return Objectify(HapNonFreeResolution,rec(dimension:=dimension,elts:=elts, group:=Group(Gens),stabilizer:=stabilizer,homotopy:=fail, action:=action, hasse:=fail, boundary:=boundary, properties:=[["type","resolution"],["length",length],["characteristic",0]]));

end;
```

B. Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Aachen, im September 2013

Literaturverzeichnis

[1] A. Ash. Cohomology of congruence subgroups of $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. *Mathematische Annalen*, 249, 1980.

[2] A. Ash. Small-dimensional classifying spaces for arithmetic subgroups of general linear groups. *Duke Mathematical Journal*, 51, 1984.

[3] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust. The Magma algebra system I: The user language. *Journal of Symbolic Computation*, 24, 1997.

[4] O. Braun and R. Coulangeon. Perfect lattices over imaginary quadratic number fields. *arXiv preprint arXiv:1304.0559*, 2013.

[5] K. S. Brown. *Cohomology of groups.* Number 87. Springer, 1982.

[6] H. P. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton University Press, 1999.

[7] R. Coulangeon and G. Nebe. Maximal finite subgroups and minimal classes. *arXiv preprint arXiv:1304.2597*, 2013.

[8] M. Deuring. *Algebren.* Springer, 1968.

[9] M. Dutour Sikirić, G. Ellis, and A. Schürmann. On the integral homology of $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{Z})$ and other arithmetic groups. *Journal of Number Theory*, 131(12), 2011.

[10] G. Ellis. Computing group resolutions. *Journal of Symbolic Computation*, 38, 2004.

[11] G. Ellis. HAP - Homological Algebra Programming, a package for the GAP computer algebra system, 2013. hamilton.nuigalway.ie/Hap/www/.

[12] G. Ellis, J. Harris, and E. Sköldberg. Polytopal resolutions for finite groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2006.

[13] D. R. Farenick and B. A. F. Pidkowich. The spectral theorem in quaternions. *Linear algebra and its applications*, 371, 2003.

[14] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.6.4*, 2013.

[15] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[16] J. Martinet. *Perfect lattices in Euclidean spaces*, volume 327. Springer, 2003.

[17] S. P. Novikov and V. A. Rokhlin. *Topology II: Homotopy and Homology. Classical Manifolds*, volume 2. Springer, 2004.

[18] J. Opgenorth. Dual cones and the voronoi algorithm. *Experimental Mathematics*, 10, 2001.

[19] A. Pettet and J. Souto. Minimality of the well-rounded retract. *Geometry & Topology*, 12:1543–1556, 2008.

[20] V. P. Platonov and A. S. Rapinchuk. Algebraic groups and number theory. *Russian Mathematical Surveys*, 47(2):133–161, 1992.

[21] A. D. Rahm and M. Fuchs. The integral homology of PSL_2 of imaginary quadratic integers with nontrivial class group. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215(6):1443–1472, 2011.

[22] I. Reiner. *Maximal orders*, volume 38. Academic press London, 1975.

[23] U. Stammbach and P. J. Hilton. *A course in homological algebra*, volume 4. 1971.

[24] C. T. C. Wall. Resolutions for extensions of groups. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 57. Cambridge Univ Press, 1961.

[25] C. T. C. Wall. *Homological group theory*, volume 36. Cambridge University Press, 1979.

[26] G. M. Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152. Springer, 1995.

Index