Contents

1 Spieltheorie

In der Spieltheorie gibt es im Unterschied zur Entscheidungstheorie eine **Bimatrix** statt der Auszahlungsmatrix. In dieser sind die Einträge bereits *Nutzengrößen*. Die Unsicherheit existiert nun nicht mehr im Hinblick auf Umweltzustände, sondern im Hinblick auf die Strategie eines weiteren Spielers. Da man nun die Auszahlungen für beide Spieler angeben muss, benötigt man zwei Matrizen *oder* eine mit doppelten Einträgen, also eine "Bimatrix".

S	s_2^1	s_2^2	s_2^3
s_1^1	$(u_1(s_{1,s_2}^{1\ 1}), u_2(s_1^1, s_2^1))$	$(u_1(s_{1,s_2}^{1\ 2}), u_2(s_1^1, s_2^2))$	$(u_1(s_{1,s_2}^{1\ 3}), u_2(s_1^1, s_2^3))$
s_1^2	$(u_1(s_{1,s_2}^{2\ 1}), u_2(s_1^2, s_2^1))$	$(u_1(s_{1,s_2}^{2\ 2}), u_2(s_1^2, s_2^2))$	$(u_1(s_{1,s_2}^{2\ 3}), u_2(s_1^2, s_2^3))$
s_1^3	$(u_1(s_{1,s_2}^{3\ 1}), u_2(s_1^3, s_2^1))$	$(u_1(s_{1,s_2}^{3\ 2}), u_2(s_1^3, s_2^2))$	$(u_1(s_{1,s_2}^{3\ 3}), u_2(s_1^3, s_2^3))$

Die Nummer der Strategie ist nun im Gegensatz zu Kapitel 1 hochgestellt, unten steht die Nummer des Spielers.

1.1 Beispiele

1.1.1 Hirschjagd

Jäger 1/Jäger 2	Hirsch	Hase
Hirsch	(5,5)	(0,4)
Hase	(4,0)	(4,4)

1.1.2 Kopf oder Zahl

Jeder Spieler legt unbeobachtbar für den anderen Spieler eine Münze, stimmen die Bilder überein erhält Spieler 1 die Münzen, unterscheiden sie sich so erhält Spieler 2 die Münzen.

Spieler 1/Spieler 2	Kopf	Zahl
Kopf	(1,-1)	(-1,1)
Zahl	(-1,1)	(1,-1)

Ist ein Nullsummenspiel da $E(\pi) = 0$

1.1.3 Kampf der Geschlechter

Sie/Er	Theater	Fußball
Theater	(4,3)	(2,2)
Fußball	(1,1)	(3,4)

1.1.4 Chicken/Hasenfuss-Spiel

Fahrer 1/Fahrer 2	geradeaus	ausweichen
geradeaus	(0,0)	(4,2)
ausweichen	(2,4)	(3,3)

1.1.5 Gefangenendilemma

Spieler 1/Spieler 2	schweigen	gestehen
schweigen	(4,4)	(0,5)
gestehen	(5,0)	(1,1)

Ein Spiel in strategischer Form ist ein Tripel: $\Gamma = (I, (S_i)_{i\epsilon I}, (u_i)_{i\epsilon I})$
I = endliche, nichtleere Menge der Spieler zB: {Unternehmen 1, Unternehmen 2}
$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1$ x S_2 x ... x S_i ist die Menge der Strategiekombinationen
S_i = die Strategiemenge jedes Spielers zB:
S_1={s_1^1, s_1^2}={Regenschirm, Sonnenschrim}
S_2={s_2^1, s_2^2}={Sonnenschirm, Regenschirm}
→ somit ist $S = S_1 * S_2 = (R, S), (R, R), (S, S), (S, R)$
u_i = die Auszahlungsfunktion eines jeden Spielers in Abhängigkeit von S zB für Spieler 1 von der Schirmproduktion:

$$\begin{array}{ll} u_1(R, S) = 10 & u_1(R, R) = 9 \\ u_1(S, S) = 8 & u_1(S, R) = 11 \end{array}$$

und für Spieler 2:

$$u_2(R,S) = 5 \quad u_2(R,R) = 1$$
$$u_2(S,S) = 4 \quad u_2(S,R) = 2$$

1.2 Beste Antworten

Sei S_i eine Menge von Strategien aller anderen Spieler außer Spieler i. Dann liefert die Beste-Antwort-Korrespondenz B_i die Menge aller Strategien von Spieler i, die potenziell beste Antworten sein könnten. Eine beste Antwort auf eine Strategie ist die Menge aller optimalen Reaktionen. Wenn es mehrere mögl. gegnerische Strategien gibt, dann gibt es dementsprechend auch mehrere mögliche beste Antworten.

Beispiel Hirschjagd: $B_1(Hirsch) = Hirsch$ und $B_1(Hase) = Hase$ das bedeutet die beste Antwort auf die gegnerische Strategie "Hirsch" ist für Spieler 1 Hirsch und auf Hase lautet die beste Antwort Hase.
$B_2(Hirsch) = Hirsch$ und $B_2(Hase) = Hase$ das bedeutet die beste Antwort auf die gegnerische Strategie "Hirsch" ist für Spieler 2 Hirsch und auf Hase lautet die beste Antwort Hase.
Alle Beste Antworten Spieler 1: $B_1(\{Hirsch, Hase\}) = \{Hirsch, Hase\}$
Alle Beste Antworten Spieler 2: $B_1(\{Hirsch, Hase\}) = \{Hirsch, Hase\}$

Beispiel Chicken

$$B_1(\{geradeaus, ausweichen\}) = \{ausweichen, geradeaus\}$$
$$B_2(\{geradeaus, ausweichen\}) = \{ausweichen, geradeaus\}$$

Beispiel Schirmproduktion

$$B_1(\{S,R\}) = \{R,S\}$$
$$B_2(\{S,R\}) = \{S,S\}$$

1.2.1 Dominanz

Eine Strategie s_i dominiert(schwach) eine andere Strategie s'_i falls s_i für **alle gegnerischen** Strategien einen **mindestens gleichhohen** Nutzen wie s'_i liefert, formal:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

für alle $s_{-i} \epsilon S_{-i}$ also alle gegnerischen Strategien. Von strenger Dominanz spricht man wenn statt $\geq$ ">" gilt.

Dominanz beim Gefangenendilemma

Spieler 1/Spieler 2	schweigen	gestehen
schweigen	(4,4)	(0,5)
gestehen	(5,0)	(1,1)

Für Spieler 2 wird "schweigen" dominiert, denn $5 > 4$ und $1 > 0$. Spieler 1 antizipiert, dass Spieler 2 keine dominierte Strategie (also nicht "schweigen"), sondern "gestehen" spielen wird. Somit muss sich Spieler 1 dann nur noch zwischen 0 und 1 entscheiden da s_2^1 wegfällt. Er wird gestehen wählen weil $1 > 0$.

1.2.2 Beste Antworten auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Angenommen die Gegenspieler haben gemischte Strategien. Dann liefert die Beste-Antwort-Korrespondenz B_i die Menge aller Beste-Antwort-Strategien. Es ändert sich eigentlich nichts, nur dass der Spieler i jetzt auf einen "unberechenbaren" Gegenspieler reagiert und die optimale Reaktion suchen muss. Es werden also die besten Antworten auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen gesucht:

Spieler 1/Spieler 2	Kopf(σ_2)	Zahl(1-σ_2)
Kopf(σ_1)	(1,-1)	(-1,1)
Zahl(1-σ_1)	(-1,1)	(1,-1)

Erwarteter Nutzen Spieler 1:

$$u_i(\sigma_1, \sigma_2) = 1 * \sigma_1 * \sigma_2 + (-1) * \sigma_1 * (1 - \sigma_2) + (-1) * (1 - \sigma_1) * \sigma_2 + 1 * (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)$$

Um herauszufinden wie Spieler 1 seinen Nutzen maximieren kann, muss diese Funktion partiel nach σ_1 abgeleitet werden:

$$f'_{\sigma_1} = 4\sigma_2 - 2$$

wenn $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ ist, dann ist $f'_{sigma_1} = 0 \rightarrow$ beste Antwort ist unbestimmt: $\sigma_1 \epsilon$ [0,1]
wenn $\sigma_2 > \frac{1}{2}$ ist, dann ist $f'_{sigma_1} > 0 \rightarrow$ beste Antwort ist $\sigma_1 = 100\%$ also ist BA die Wahl von Strategie s_1^1 wenn $\sigma_2 < \frac{1}{2}$ ist, dann ist $f'_{sigma_1} < 0 \rightarrow$ beste Antwort is $\sigma_1 = 0\%$ also ist BA die Wahl von Strategie s_1^2

Beste Antwort von Spieler 1 auf Spieler σ_1 in Abhängigkeit von σ_2 sieht wie folgt aus: