Тестові задачі ШНМО 2022

1 лютого 2022 р.

Відповіді на задачі мають бути в одному **.pdf** файлі. Написання може бути як від руки, так і друкованим (код для задач другого блоку бажано надрукувати). Номери задач та блоки мають бути позначені. Порядок розв'язку не важливий, задачі можна пропускати. Останній блок не є обов'язковим для успішної роботи. Щасти!

Математика

1. Знайти границю послідовності $a_n = \frac{2n^3+n^2+5n+1}{3n^3+5n^2+3}$ при n $\to\infty$
2. Знайти всі розв'язки системи

$$(x+y)^2 = z,$$

$$(x+z)^2 = y,$$

$$(y+z)^2 = x;$$

3. Доведіть, що

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2$$

Для всіх $n \in \mathbb{N}$.

4. Як алгебраїчно в прямокутній системі координат задати множину точок всередині кола радіусом π та центром у точці $\left(0; \sqrt[3]{5}\right)$?
5. Чи ділиться число $10^{2022} - 1$ на 9?
6. Скільки нулів у кінці числа 30! ?

Програмування

Першим рядком у коді вашого рішення має бути коментар з назвою мови програмування та, бажано, версією. Вхід і вихід стандартні. Ефективність способу виконання впливає на оцінку. Дозволяються мови: Python, C, C++, C#, Julia, Java.

1. **Шахова дошка**

Дано число $n \in \mathbb{N}$. Написати код, що виводить шахову дошку $m \times m$, де кожна біла клітинка - це чотири одиниці (2×2), а чорна - чотири нулі. Ліва верхня клітинка завжди чорна. Нічого окрім одиниць, нулів та переносу рядків виводити не слід (жодних пробілів і т.п.)

Приклад:

Вхід (число m):

```
4
```

Вихід:

```
00110011
00110011
11001100
11001100
00110011
00110011
11001100
11001100
```

2. **2D масив**

Задано число $n \in \mathbb{N}$ та квадратний масив T розміру $n \times n$. Дано індекс $1 \leq i \leq n$ в цьому масиві (індексація математична, починається з 1). Обчислити середнє по всіх елементах цього масива, що містять в індексі i. Округліть до одиниць.

Приклад:

Вхід (число n та число i через пробіл):

```
3 2
0 1 2
4 3 5
6 7 8
```

Вихід:

```
4
```

Пояснення:

З матриці (таблиці) беремо елементи $1, 3, 7, 4, 5$ (адже вони мають в індексі i, тобто 2). Наприклад, 1 це $T[1, 2]$ (або $T_{1,2}$ чи $T[1][2]$), бо ми берем елемент першого рядка та другого стовпчика. Аналогічно 3 це $T[2, 2]$ (або $T_{2,2}$ чи $T[2][2]$) в нашому масиві. Отримаєм середнє 4.0, що округлюється до 4.

3. **Екстремуми**

Є дійсна неперервна функція $f(x)$. Дано число m та набори чисел $x_1...x_m$ та $y_1...y_m$ такі, що $f(x_i) = y_i$, будь яка точка x_i - або локальний максимум, або локальний мінімум f (тобто можна вибрати якийсь інтервал, не відрізок, (a;b), що на ньому x_i відповідно максимум чи мінімум функції f), а також що $x_i < x_{i+1}$, тобто "ікси" задано в порядку зростання. Відомо тако ж, що інших максимумів та мінімумів функція не має (тобто дано всі можливі). За даною інформацією програмно визначити, чи може для інших двох даних чисел x та y виконуватись що $y = f(x)$.

Приклад:

Вхід (число m, m пар чисел x_i y_i через пробіл, далі два числа x y, які треба перевірити на одному рядку через пробіл):

```
3
-2 -2.1
0 0
10 -5
-1 100
```

Вихід (0 - якщо неможливо, 1 - якщо можливо):

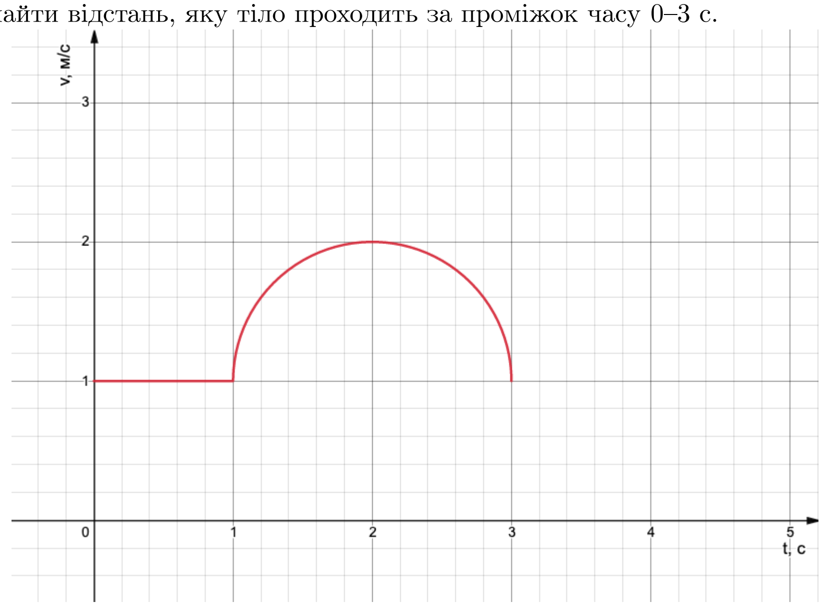
```
0
```

Пояснення:

Треба перевірити, чи може бути, що $f(-1) = 100$, знаючи всі локальні максимуми та мінімуми. Якщо $f(-1) = 100$, то на інтервалі $(-2; 0)$, якому належить -1 існує інший (не вказаний) максимум, бо 100 більше за -2.1 та 0, а функція неперервна. За умовою ж, усі максимуми та мінімуми нам дані. Отже, $f(-1) \neq 100$. Виводимо 0 (неможливо).

Фізика

1. Знизу наведено графік швидкості v (м/с) руху тіла від часу t (с). Знайти відстань, яку тіло проходить за проміжок часу 0–3 с.



2. Пружинний маятник утримують таким чином, що пружина при цьому не деформована (положення 1). Пружина у нерозтягнутому стані має довжину 4см. Після цього маятник відпускають, і пружина починає розтягуватися під дією ваги грузика, поки не досягає максимальної довжини 6см (положення 2). Через великий час коливання затихають через силу тертя, й пружина стає нерухомою (положення 3). Яку довжину має пружина у положенні 3? Пружина є легкою та ідеальною. Сили тертя дуже слабкі.