पाठ-10

दृढ़ पिण्डो की घूर्णन गति
Rotatory motion of rigid body.

दृढ़ पिण्ड (rigid body) :- ऐसे पिण्ड जिन पर बाह्य बल लगाने से उनके रूप आकृति मे कोई परिवर्तन नही होता है, दृढ़ पिण्ड कहलाते है। प्रकृति मे कोई भी पिण्ड पूर्णतः दृढ़ पिण्ड नही है।

दृढ़ पिण्डो की गति :- दृढ़ पिण्डो की दो प्रकार की गति पायी जाती है।

1- स्थानान्तरित गति (translational motion): जब कोई पिण्ड अपने अक्ष के चारो ओर गति करे साथ - ही - साथ स्थान भी बदले, तो इस गति को स्थानान्तरित गति कहते है। जैसे :- सड़क पर चलते हुए वाहन

2- rotational motion (घूर्णन गति): जब कोई पिण्ड अपने अक्ष के चारो ओर इस प्रकार गति करे कि स्थान न बदले तो इस गति

को घूर्णन गति कहते है।
जैसे- छत मे लगा पंखे की गति

कोणीय त्वरण (Angular acceleration)

घूर्णन गति करता हुआ कण मे समय के साथ कोणीय वेग मे होने वाला परिवर्तन, कोणीय त्वरण कहलाता है। इसे α से प्रदर्शित करते है।

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}} \quad \boxed{\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

α = कोणीय त्वरण
$\Delta\omega$ = कोणीय वेग
Δt = समयान्तराल

इसका मात्रक रेडियन/से^{2} है।

ω = अंतिम कोणीय वेग
ω_0 = प्रारम्भिक कोणीय वेग
t = समय
α = कोणीय त्वरण

रेखीय त्वरण तथा कोणीय त्वरण मे सम्बन्ध

$$\boxed{a = r\alpha}$$

a = रेखीय त्वरण
r = त्रिज्या
α = कोणीय त्वरण

घूर्णन गति के समीकरण : घूर्णन गति के तीन समीकरण है।

i — $\omega = \omega_0 + \alpha t$

ii — $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

iii — $\omega^2 = (\omega_0)^2 + 2\alpha\theta$

$\theta =$ कोणीय विस्थापन

$\omega =$ अंतिम कोणीय वेग

$\omega_0 =$ प्रारम्भिक कोणीय वेग

$t =$ समय

$\alpha =$ कोणीय त्वरण

Q-1 आटोमोबाइल इंजन का पहिया 16 सेकंड में 1200 चक्कर/min से 3120 चक्कर/मी हो जाता है

$\alpha = ?$ $t = ?$

$n = 1200$ चक्कर/मिनट

$= \frac{1200}{60} = 20$

$\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \times 20 = 40\pi$

$n = 3120$ चक्कर/मिनट

$= \frac{3120}{60} = 52$

$\omega = 2\pi n = 2\pi \times 52 = 104\pi$ rad/s

$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$

$= \frac{104\pi - 40\pi}{16}$

$\alpha = \frac{64\pi}{16} = 4\pi$ rad/s^2

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$= 40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16 \times 16$

$\theta = 640\pi + 512\pi$

$\theta = 1152\pi$

$\because 2\pi = 1$ चक्कर

$= \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$ चक्कर

होता है जिससे अधिकतम बल आघूर्ण लगता है और चक्की को घुमाने मे कम बल लगता है।

बल-युग्म →

जब किसी वस्तु पर दो बल बराबर किन्तु विपरित समान्तर बल कार्य करते है तो यह व्यवस्था बल-युग्म कहलाता है

बल-युग्म का आघूर्ण →

किसी बल-युग्म का आघूर्ण एक बल के परिमाण तथा दूसरे बल के परिमाण के गुणनफल के बराबर होता है।

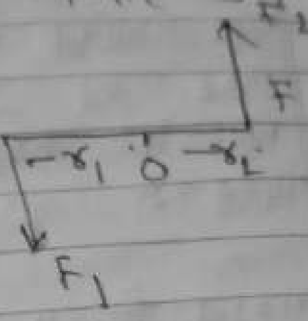
और बल युग्म के आघूर्ण का मान बलो के तल मे सभी बिन्दुओ के परित: एक समान रूप से कार्य करता है।

आघूर्णो का सिद्धान्त →

यदि कोई पिण्ड अपने भिन्न-भिन्न बिन्दु पर लगे बहुत से बलो के कारण संतुलन की स्थिति के हो और अपने अक्ष के परित: घुमने के लिए स्वतंत्र हो पिण्ड पर आरोपित सभी बलो के घुर्णन

बाधा के परितः बल आघूर्णों का बीजगणितीय योग 0 होता है। इस नियम को आघूर्णों का सिद्धान्त कहते है।

$$\boxed{F_1 r_1 = F_2 r_2}$$



गुरुत्व केन्द्र → किसी वस्तु पर स्थित वह बिन्दु जिस पर दृढ़ वस्तु संतुलन की स्थिति में होती है तो वस्तु को गुरुत्व केन्द्र कहते हैं।

Moment of Inertia

जड़त्व आघूर्ण → किसी दृढ़ पिण्ड का उसके अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण उसके द्रव्यमान तथा घूर्णन अक्ष से उसके दूरीयो के वर्गों के गुणनफल के बराबर होता है। इसे I द्वारा दर्शाते है। इसका मात्रक किग्रा मी² है।

$$\boxed{I = \Sigma m r^2}$$

I = जड़त्व आघूर्ण

Σm = कणो के द्रव्यमानों का योगफल

r = क्रिया रेखा से इनकी दूरीयां

विमा → $\boxed{[ML^2]}$

जड़त्व आघूर्ण को प्रभावित करने वाले कारक →

जड़त्व आघूर्ण निम्नलिखित कारको से प्रभावित होता है।

पिण्ड का द्रव्यमान

i- पिण्ड मे कणो के द्रव्यमानो का वितरण

ii- पिण्ड मे घूर्णन अक्ष की स्थिति

घूर्णन त्रिज्या →

किसी अक्ष के परित घूर्णन त्रिज्या वह लम्बवत् दूरी है जिसके वर्ग के साथ पिण्ड के द्रव्यमान का गुणनफल उसके जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है। इसे K से प्रदर्शित करते है।

$$I = mK^2$$

$$K^2 = \frac{I}{m}$$

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{I}{m}}}$$

अर्थात् किसी पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण और उसके द्रव्यमान के अनुपात का वर्गमूल घूर्णन त्रिज्या कहलाता है।

PAGE NO.:
DATE: / /

Torque
बल आघूर्ण → बल आघूर्ण वह भौतिक राशि है जो किसी वस्तु को उसके घूर्णन अक्ष के परित घुमा सकती है। किसी अक्ष के घूर्णन बल लगाये बल के परिणाम तथा क्रिया रेखा के लम्बवत दूरी के गुणनफल के बराबर होता है। इसे τ से प्रदर्शित करते हैं

$\boxed{\tau = F \cdot r}$

τ = बल आघूर्ण

F =

r

इसका मात्रक न्यूटन-मी² है तथा इसकी विमा $[ML^2T^{-2}]$ होता है

बल आघूर्ण के उपयोग। –

1- दरवाजो में हत्था कब्जे से दूर लगाये जाते है। जिससे क्रिया रेखा से लम्बवत दूरी बढ़ जाती है। जिससे बल आघूर्ण का मान बढ़ जाता है, जिससे दरवाजा आसानी से खुल जाता है।

2- आटा चक्की में घुमाने के लिए हत्था किलों से दूर लगाया गया

PAGE NO.:
DATE:

1. 0.1 Kg द्रव्यमान पिण्ड को 2m व्यास के वृत्ताकार पथ पर 31.4 sec मे 10 चक्कर की दर से घुमाया जाता है तो ज्ञात कीजिए। इसका जड़त्व आघूर्ण और घूर्णन त्रिज्या

$m = 0.1 kg \quad r = \frac{2}{2} = 1 mt$

$I = mr^2$
$= .1 \times 1 = .1 kg m^2$

(1) $K = \sqrt{\frac{I}{m}}$

$K = \sqrt{\frac{.1}{.1}} = \sqrt{1} = 1 mt$

जड़त्व आघूर्ण सम्बन्धित प्रमेय →

जड़त्व आघूर्ण सम्बन्धित दो प्रमेय है।

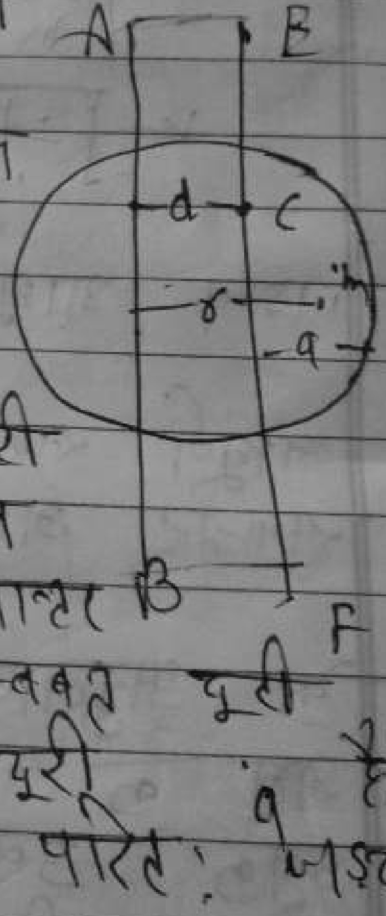
1. समान्तर अक्षों का प्रमेय → इस प्रमेय के अनुसार किसी पिण्ड का उसके अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण उसके द्रव्यमान केन्द्र से होकर जाने वाली समान्तर अक्ष के परितः तथा पिण्ड जड़त्व आघूर्ण I_{cm}

के द्रव्यमान व दोनो समान्तर अक्षो के बीच की लम्बवत दूरी के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

$$\boxed{I = I_{cm} + Md^2}$$

इस प्रमेय को सामान्तर अक्षो का प्रमेय कहते है जहाँ I जड़त्व आघूर्ण I_{cm} अक्षा के परित: जड़त्व आघूर्ण M कण का द्रव्यमान और d सामान्तर अक्षो के बीच लम्बवत दूरी

उपपत्ति



मान लिया किसी सम पटल के भीतर स्थित m द्रव्यमान के किसी कण का दिये गये अक्ष AB से दूरी r है तथा द्रव्यमान केन्द्र C से समान्तर अक्ष AB से लम्बवत दूरी d है EF की दूरी a है तो अक्ष AB के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = \Sigma m r^2 + \cancel{\Sigma m (a+d)}^2$$

$\because r = a + d$

$I = \Sigma m (a+d)^2$

$I = \Sigma m (a^2 + d^2 + 2ad)$

$I = \Sigma m a^2 + \Sigma m d^2 + \Sigma m 2ad$

$\because$ किसी कण पर लगने वाले सभी बल आघूर्णों का बीजगणित योग 0 होता है। इसलिए $\Sigma ma = 0$

$I = \Sigma ma^2 + \Sigma md^2 + 2\Sigma mad$

$\because \Sigma ma = 0$

$I = \Sigma ma^2 + \Sigma md^2$

$\because \Sigma ma^2 = I_{cm}$

$\Sigma m = M$

$$\boxed{I = I_{cm} + Ma^2}$$

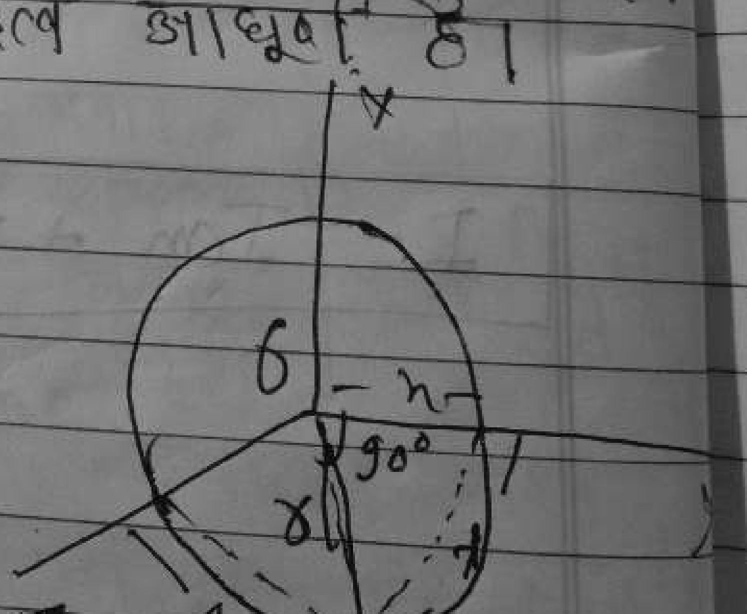
लम्बवत अक्षों का प्रमेय → किसी समपटल का उसके तल में स्थित दो परस्पर लम्बवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्णों का योगफल इन अक्षों के कटान बिन्दु से होकर जाने वाली तथा पटल के तल के लम्बवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है। यह प्रमेय लम्बवत अक्षों का प्रमेय कहलाता है।

$$I_z = I_x + I_y$$

I_x, I_y क्रमशः समान्तर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है

I_z = लम्बवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

उपपत्ति →



माना लिया एक सम पटल x, y तल मे स्थित है जिसके परित जड़त्व आघूर्ण क्रमश I_x व I_y है। इसके लम्बवत तल के z परित जड़त्व आघूर्ण I_z है।
माना लिया कण की केन्द्र O से z अक्ष पर दूरी r है।

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_z = \Sigma m r^2$$

$$= \Sigma m (x^2 + y^2)$$

$$I_z = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2$$

$$\left\{ \because \begin{array}{l} \Sigma m x^2 = I_x \\ \Sigma m y^2 = I_y \end{array} \right.$$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

कुछ नियमित आकृतियों के जड़त्व आघूर्ण
1- पतली छड़

$$\boxed{I \rightarrow \frac{ml^2}{12}}$$

M = छड़ का द्रव्यमान
l = छड़ की लम्बाई

3. आयताकार पटल →

$$I = M\left(\frac{l^2+b^2}{12}\right)$$

M = पटल का Mass
l = length of obje
b = breth of obje

(4) वृत्ताकार छल्ला (वलय) :-

$$\boxed{I = MR^2}$$

M = वलय का द्रव्यमान
R = त्रिज्या

5- वृत्ताकार चकती का जड़त्व आघूर्ण

$$\boxed{I = \frac{1}{2}mR^2}$$

m = चकती का द्रव्यमान
R = त्रिज्या

6. खोखला बेलन का जड़त्व आघूर्ण
खोखले बेलन का जड़त्व आघूर्ण

$$I = m\left(\frac{l^2}{12}+\frac{r^2}{2}\right)$$

l = बेलन की लंबाई
r = बेलन की त्रिज्या
m = बेलन का द्रव्यमान

आंशिक खोखले बेलन का जड़त्व
7. आघूर्ण →

$$I = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r_1^2 + r_2^2}{4}\right)$$

r_1 व r_2 = बेलन की बाहरी और भीतरी त्रिज्याएं है

8. ठोस बेलन का जड़त्व आघूर्ण

$$I = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right)$$

9. गोली कोश का जड़त्व आघूर्ण →

$$\boxed{I = \frac{2}{3} mR^2}$$

m = गोले का द्रव्यमान
R = गोले की त्रिज्या

10. आंशिक गोले का जड़त्व आघूर्ण →

$$I = \frac{2}{5} m\left(\frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}\right)$$

R_1 व R_2 = गोले की बाहरी और भीतरी त्रिज्याएं है।
m = पिण्ड का द्रव्यमान

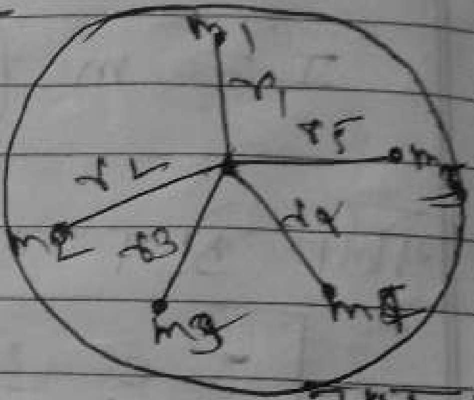
10. ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण

$$\boxed{I = \frac{2}{5} mR^2}$$

R = गोले की त्रिज्या
m = द्रव्यमान

बल आघूर्ण व जड़त्व आघूर्ण मे सम्बन्ध →

मान लिया कोई पिण्ड कई कणो से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमशः



m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 तथा घूर्णन अक्ष से उनकी दूरियां r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 है। इनका कोणीय त्वरण α है तथा इनके त्वरण क्रमशः a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 है

तो पहले कण पर लगने वाला त्वरण = $\boxed{a_1 = r_1 \alpha}$ तो पहले कण पर लगने वाला बल

$$F = ma$$

$$\boxed{F_1 = m_1 a_1}$$

$$\boxed{F_1 = m_1 r_1 \alpha}$$

पहले कण का बल आघूर्ण

$$\tau = F r$$

$$\tau_1 = m_1 r_1 \alpha \cdot r$$

$$\boxed{\tau_1 = m r_1^2 \alpha}$$

कुल बल आघूर्ण

$$\tau = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + m_3 r_3^2 \cdot \alpha + m_4 r_4^2 \alpha + m_5 r_5^2 \cdot \alpha$$

$$\tau = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2)\alpha$$

$$\tau = \Sigma m r^2 \cdot \alpha$$

$$\tau = \Sigma m r^2 \alpha \quad \because \Sigma m r^2 = I$$

$$\cancel{\tau = I \cdot \alpha}$$

$$\boxed{\tau = I \cdot \alpha}$$

I = जड़त्व आघूर्ण

बल आघूर्ण

τ = कोणीय त्वरण

यदि किसी पिण्ड के घूर्णन अक्ष के

यदि: कोणीय त्वरण इकाई हो

तो उसका जड़त्व आघूर्ण बल आघूर्ण के बराबर होता है।

(Rotational Kinetic Energy)
घूर्णन गतिज ऊर्जा >

जब कोई पिण्ड अपने घूर्णन अक्ष के चारों ओर गति करता है तो उसके इस गति के कारण उसमें रहने वाली ऊर्जा घूर्णन गतिज ऊर्जा कहलाती है। इसे K से प्रदर्शित करते हैं और इसका मात्रक जूल है।

घूर्णन गतिज ऊर्जा और जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध >

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\because v^2 = r^2\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$$\because mr^2 = I$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

K = गतिज ऊर्जा
I = जड़त्व आघूर्ण
ω^2 = कोणीय वेग

$I\omega^2 = 2K$

यदि $\omega = 1$

$\boxed{I = 2K}$

अर्थात किसी पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण उसी अक्ष के परितः एकांक कोणीय वेग से घूमते हुए कण की गतिज ऊर्जा के दो गुने के बराबर होता है।

कोणीय संवेग :- किसी गतिमान कण के रेखीय संवेग का घूर्णन अक्ष के परितः आघूर्ण उस कण का उस अक्ष के परितः कोणीय संवेग कहते हैं। इसे J से प्रदर्शित करता है

$J = MVr$

$\because V = r\omega$

J = कोणीय संवेग

M = कण का द्रव्यमान

V = कण का वेग

r = घूर्णन अक्ष की त्रिज्या

$J = Mr\omega r$

$J = Mr^2\omega$

$\because Mr^2 = I$

$\boxed{J = I\omega}$

अर्थात् किसी कण का घूर्णन अक्ष के परितः कोणीय संवेग उसके जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय वेग के गुणनफल के बराबर होता है।

कोणीय संवेग परिवर्तन की दर तथा बल आघूर्ण से सम्बन्ध :-

$$J = I\omega$$

$$\Delta J = I\Delta\omega$$

Δt से भाग देने पर

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\because \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \alpha$$

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = I\alpha$$

$$\because I\alpha = \tau$$

$$\boxed{\frac{\Delta J}{\Delta t} = \tau}$$

कोणीय संवेग संरक्षण सिद्धान्त :- यदि किसी पिण्ड पर कार्यरत बाह्य बल आघूर्णो का योग 0 हो तो उसका कोणीय संवेग नियत रहता है। इस नियम को कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त कहते हैं।

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \tau$$

$$\because \tau = 0$$

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = 0$$

$$\boxed{\Delta J = 0}$$

$$\boxed{J = Constant}$$

कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धान्त के उपयोग :-

1- यदि कोई व्यक्ति किसी घुमने वाली मेज पर दोनो बाहो को फैलाकर वृत्तिय पथ घुम रहा हो तो बाहो को मोड़ लेने से उसका कोणीय वेग बढ़ जाता है।

$$J_1 = I_1 \omega_1$$

$$J_2 = I_2 \omega_2$$

$$\boxed{I_1\omega_1 = I_2\omega_2}$$

2. जब कुम्हार गीली मिट्टी को चाक पर रखता है तो उसका कोणीय वेग घट जाता है।
3. जब तैराक जल मे कूदता है तो वायु मे अपने शरिर को मोड़ लेता है जिसके कारण उसका कोणीय बढ़ जाता है तो कलेषा लेता है। जबकि तल मे घुसते ही अपने शरिर को सीधा कर लेता है जिससे उसका कोणीय वेग बढ़ जाता है।

Q - बिना लुढ़कने वाले पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा :-

जब कोई पिण्ड किसी तल पर फिसलता या लुढ़कता है तो उसका द्रव्यमान केन्द्र भी बदलता रहता है किंतु जब पिण्ड किसी तल पर बिना लुढ़के या सरके गति करता है तो इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा -

$K_{कुल} = K_{rot} + K_{trans}$

K_{rot} = घूर्णन गतिज ऊर्जा

K_{trans} = स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा

$$\begin{cases} K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \\ K_{trans} = \frac{1}{2} m v^2 \end{cases}$$

$$K_{कुल} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[I \omega^2 + m v^2 \right]$$

Q-1. एक वृत्ताकार डिस्क तथा एक वलय का द्रव्यमान समान है (10 kg) है तथा त्रिज्या भी समान है (1m) है तो दोनो के तल के लम्बवत् घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो

$m_1 = m_2 = 10\ kg$

$r_1 = r_2 = 1\ m$

डिस्क का जड़त्व आघूर्ण

$$= \frac{1}{2} m r^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 1 \times 1$$

$$= 5\ Kg\ m^2$$

वलय का जड़त्व आघूर्ण :-

$$I = m r^2$$

$$= 10 \times 1 \times 1$$

$$= 10\ kg\ m^2$$