

Fundamentalmatrix

Definiert für Bilinearformen
über endlich dimensionalen Vektorräumen

Sei $U := LH(b_1, b_2)$

Für β Bilinearform mit V n -dim. \mathbb{K} -VR:

$$FM_B(\beta) := M_{B^*, B}(\beta^V) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$$FM_B(\beta)|_{U \times U} = \begin{pmatrix} \beta(b_1, b_1) & \beta(b_1, b_2) & \beta(b_1, b_3) & \dots \\ \beta(b_2, b_1) & \beta(b_2, b_2) & \beta(b_2, b_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\beta(v, w) = \beta^V(w)(v) = (v)_B^T \cdot FM_B(\beta) \cdot (w)_B$$

Zeilenumformung

$$S^T \cdot A \cdot S$$

Spaltenumformung

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Gauss "Addiere das M -fache der i -ten Spalte zur j -ten Spalte"

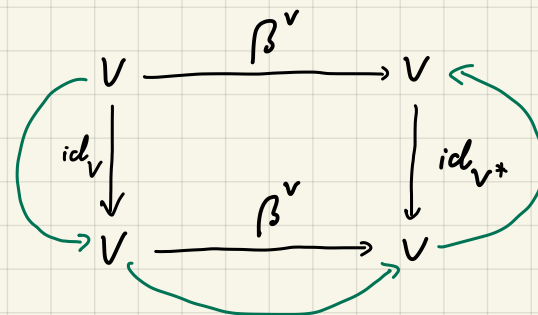
Für eine Bilinearform β ist

$$\beta^V: \begin{pmatrix} V \rightarrow V^* \\ w \mapsto \beta(\cdot, w) \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $\beta \mapsto \beta^V$
ist ein Isomorphismus

Für geordnete Basen B, C von V gilt:

$$FM_C(\beta) = (M_{B, C}(\text{id}))^T \cdot FM_B(\beta) \cdot M_{B, C}(\text{id})$$



Vergleich Endomorphismen $\varphi \in \text{End}(V)$

$$A = M_{B, B}(\varphi)$$

$$\tilde{A} = M_{C, C}(\varphi)$$

$$\Rightarrow S = M_{B, C}(\text{id}) \quad (\Rightarrow S^{-1} = M_{C, B}(\text{id}))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{A} &= S^{-1} \cdot A \cdot S \\ &= M_{C, B}(\text{id}) \cdot M_{B, B}(\varphi) \cdot M_{B, C}(\text{id}) \end{aligned}$$