Isometrie-Normalform

$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \vee \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Allgemeiner Algorithmus:

Ges.: V als n-dim. $\mathbb{K}$-VR mit Skalarprodukt
$\varphi: V \to V$ linear
B ONB von V, $A = M_{B,B}(\varphi)$

① Prüfe ob φ Isometrie ist:
φ ist Isometrie $\Leftrightarrow A^* A = \mathbb{1}$ $\quad (A^T A = \mathbb{1}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R})$
$\Leftrightarrow$ Die Spalten von A bilden ONB von $\mathbb{K}$ mit Standardskp.
$\Leftrightarrow$ " Zeilen "

② Berechne $p_A = p_\varphi$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

③ Spalte p_A in Linearfaktoren
$\Rightarrow p_A = (X-\lambda_1)^{k_1}(X-\lambda_2)^{k_2}\ldots$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{k_1 \quad k_2}$$

EW alle Betrag 1

④ Bestimme Basen von $E_{\lambda_1}(A), E_{\lambda_2}(A), \ldots$

⑤ Wende Gram-Schmidt an, um ONB von $E_{\lambda_1}(A), E_{\lambda_2}(A), \ldots$ zu bestimmen

⑥ Diese nacheinander bildet Spalten von S

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

③ Spalte p_A in Faktoren der Form $(X \pm 1)$ oder
$(X^2 - 2cX + 1) = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$
mit $c \in (-1,1)$ und $\lambda = c + s\cdot i$,
und $1 = |\lambda|^2 = c^2 + s^2 \Rightarrow s = \sqrt{1-c^2}$

④ Bestimme Basen von $E_1(A)$, $E_{-1}(A)$, $E_\lambda(A)$, aber nicht $E_{\bar{\lambda}}(A)$

⑤ Wende Gram-Schmidt an, um ONBs der Eigenräume zu bestimmen

⑥ Schreibe ONB von $E_1(A)$, $E_{-1}(A)$ hintereinander, dann für die komplexen jeweils $\frac{\mathrm{Im}(b_j)}{\|\mathrm{Im}(b_j)\|}$, $\frac{\mathrm{Re}(b_j)}{\|\mathrm{Re}(b_j)\|}$

in die Spalten von S

Wenn eine Matrix orthogonal oder unitär ist, stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein

A orthogonal $\Longrightarrow$ A unitär

$\Updownarrow$

$A \in O(n)$

$\Updownarrow$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ & $A^T A = \mathbb{1}_n$

$\Updownarrow$

$\exists S \in O(n)$:

$$S^T A S = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & \square \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \square \end{pmatrix}$$

$$\square = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in (0, \pi)$

A unitär

$\Updownarrow$

$A \in U(n) \Leftrightarrow A^* A = \mathbb{1}_n$

$\Updownarrow$

A komplex unitär diagbar und alle EW haben Betrag 1.

$\Updownarrow$

$\exists S \in U(n)$: $S^* A S = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_n| = 1$

Alternativer Algorithmus für die reelle Isometrie-Normalform

LOHNT SICH NUR FALLS $A^T + A$ EINFACH

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Da gilt $\mathbb{R}^n \cap \left(E_\lambda(A) \oplus E_{\bar\lambda}(A) \right)$ ist die Summe aus Drehebenen zum Winkel α, falls $\alpha = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$

$$\ker\left((A - \lambda \mathbb{1})(A - \bar\lambda \mathbb{1}) \right)$$
$$= \ker\left(A^2 - 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot A + \mathbb{1} \right)$$
$$= \ker\left(A^T (A^2 - 2\cos(\alpha) \cdot A + \mathbb{1} \right)$$
$$= \ker\left(A - 2\cos(\alpha) \cdot \mathbb{1} + A^T \right)$$
$$= \ker\left((A + A^T) - 2\cos(\alpha) \cdot \mathbb{1} \right) = E_{2\cos(\alpha)}(A + A^T)$$

1. Ist φ Isometrie
2. Bestimme p_{A+A^T}, forme in Linearfaktoren
3. Bestimme Basis von $E_2(A + A^T) \; (= E_1(A))$
   $E_{-2}(A + A^T) \; (= E_{-1}(A))$
4. Wende Gram-Schmidt an, um ONB zu finden
5. Für $\cos(\alpha) \in (-1, 1)$ bestimme ONB von $E_{2\cos(\alpha)}(A + A^T)$
   Wähle $v_1 \in E_{2\cos(\alpha)}(A + A^T) \setminus \{0\}$ beliebig
   ↳ $v_2 = A \cdot v_1$
   Gram-Schmidt für v_1 und v_2
   Wähle $v_3 \in E_{2\cos(\alpha)}(A + A^T) \setminus \{LH(v_1, w_2)\}$
   Gram-Schmidt mit den vorherigen Vektoren
   ↳ $v_4 = A \cdot w_3$, wende Gram-Schmidt an
   Wdh.
6. Schreibe die Vektoren hintereinander als Spalten in S