Fundamentalmatrix

Definiert für Bilinearformen über endlich dimensionalen Vektorräumen

Sei $U := LH(b_1, b_2)$

Für β Bilinearform mit V n-dim. $\mathbb{K}$-VR:

$$FM_B(\beta) := M_{B^*,B}(\beta^\vee) \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

$$FM_B(\beta|_{U\times U}) = \boxed{\begin{matrix}\beta(b_1,b_1) & \beta(b_1,b_2)\\ \beta(b_2,b_1) & \beta(b_2,b_2)\end{matrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta(b_1,b_1) & \beta(b_1,b_2) & \beta(b_1,b_3) & \cdots \\ \beta(b_2,b_1) & \beta(b_2,b_2) & \beta(b_2,b_3) & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \beta(b_n,b_n) \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\beta(v,w) = \beta^\vee(w)(v) = (v)_B^T \cdot FM_B(\beta) \cdot (w)_B$$

$$A \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & j \\ & & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \mu \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i \end{array}$$

Gauss „Addiere das μ-fache der i-ten Spalte zur j-ten Spalte"

Für eine Bilinearform β ist

$$\beta^\vee : \begin{pmatrix} V \longrightarrow V^* \\ w \longmapsto \beta(\cdot, w) \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $\beta \mapsto \beta^\vee$ ist ein Isomorphismus

Für geordnete Basen B, C von V gilt:

$$FM_C(\beta) = (M_{B,C}(id))^T \cdot FM_B(\beta) \cdot M_{B,C}(id)$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\beta^\vee"] \arrow[d, "id_V"] \arrow[d, bend right=60] & V \arrow[d, "id_{V^*}"] \\ V \arrow[r, "\beta^\vee"] \arrow[r, bend right=40] & V \arrow[u, bend right=60] \end{tikzcd}$$

Vergleich Endomorphismen $\varphi \in End(V)$

$$A = M_{B,B}(\varphi)$$
$$\tilde{A} = M_{C,C}(\varphi)$$

$$\Rightarrow S = M_{B,C}(id) \qquad (\Rightarrow S^{-1} = M_{C,B}(id))$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$$
$$= M_{C,B}(id) \cdot M_{B,B}(\varphi) \cdot M_{B,C}(id)$$