

2018~2019 学年第一学期

## 《数理统计》期末考试试卷

课程代码: 1563163 试卷编号: 1-A 命题日期: 2018 年 11 月 15 日

答题时限: 120 分钟 考试形式: 闭卷

得分统计表

大题号	一	二	三	四
总分				

一、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

1. 设  $x_1, x_2, x_3, x_4$  是服从正态总体  $N(0, 1)$  的样本, 则统计量  $Y = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}$  服从的分布为 \_\_\_\_\_.
2. 设样本  $x_1, \dots, x_n$  取自两点分布  $b(1, p)$ , 考虑参数  $p$  的最大似然估计, 则似然函数取为  $L(p) =$  \_\_\_\_\_.
3. 请描述统计推断中的“充分性原则”: \_\_\_\_\_.
4. 设样本  $x_1, \dots, x_n$  取自两点分布  $b(1, p)$ , 现要求  $p$  的  $1 - \alpha$  大样本置信区间, 利用中心极限定理, 可取枢轴量为  $u =$  \_\_\_\_\_.
5. 设  $x_1, \dots, x_n$  是来自密度为  $p(x; \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$  的样本, 对检验问题  $H_0: \theta \in \Theta_0$  vs  $H_0: \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ , 似然比检验所使用的检验统计量为 \_\_\_\_\_.

二、选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

得分	
----	--

1. 设样本  $x_1, \dots, x_n$  取自总体  $x$ , 则偏差平方和  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  的自由度是 ( )
- A.  $n - 1$                       B.  $n$                       C.  $n + 1$                       D. 1
2. 设随机变量  $X \sim t(n)$ ,  $n > 1$ , 令  $Y = X^2$ , 则 ( )
- A.  $Y \sim \chi^2(n)$               B.  $Y \sim \chi^2(n - 1)$       C.  $Y \sim F(n, 1)$               D.  $Y \sim F(1, n)$
3. 设总体方差为  $Var(X) = \sigma^2$ , 则样本标准差  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$  是  $\sigma$  的 ( )
- A. 无偏估计                      B. 有效估计
- C. 相合估计                      D. 以上都不对
4. 在一次假设检验中, 下列说法正确的是 ( )
- A. 既可能犯第一类错误, 也可能犯第二类错误.
- B. 如果备择假设是正确的, 但拒绝了备择假设, 则犯了第一类错误.
- C. 增大样本容量, 则犯两类错误的概率都不变.
- D. 如果原假设是错误的, 但接受了原假设, 则犯了第二类错误.
5. 在假设检验中, 如果所计算的  $p$  值越小, 说明 ( )
- A. 原假设越真实;                      B. 备择假设越不真实;
- C. 否定原假设证据越不充分;              D. 否定原假设证据越充分.

三、计算题 (每题 10 分，共 40 分)

得分	
----	--

1. 设样本  $x_1, \dots, x_n$  取自均匀分布  $U(\theta, \theta + 1)$ , 求  $\theta$  的矩估计和最大似然估计.

2. 设一页书上的错别字个数  $X$  服从泊松分布  $p(\lambda)$ ,  $\lambda$  有两个可能取值 1.5 和 1.8, 先验分布为

$$P(\lambda = 1.5) = 0.45, \quad P(\lambda = 1.8) = 0.55,$$

现检查了一页, 发现 3 个错别字, 试求  $\lambda$  的后验分布.

3. 假定某种元件的寿命为指数分布, 现取 5 个元件投入试验, 观测到如下失效时间 (小时):

395   4094   119   11572   6133,

经计算, 样本均值  $\bar{x} = 4462.6$ . 能否认为该元件的平价寿命不小于 6000 小时?

(取  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi_{0.05}^2(10) = 3.94$ )

4. 研究某种传统中药对疟疾的治疗效果，获得了如下数据：

	痊愈数	未痊愈数	合计
对照组	114	36	150
中药组	132	18	150
合计	246	54	300

试问该中药对治疗疟疾是否有显著效果？(取显著水平  $\alpha = 0.05$ )

四、证明题 (每题 10 分, 共 20 分)

得分	
----	--

1. 设  $x_1, \dots, x_n$  是取自总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本,
  - 1). 设  $T$  是  $g(\mu) = \mu^2$  的任一无偏估计, 证明  $\mathbf{Var}(T)$  的 C-R 下界为  $4\mu^2/n$ ;
  - 2). 求  $\mu^2$  的 UMVUE, 并证明此 UMVUE 达不到 C-R 下界, 即它不是有效估计.(注: 设  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则有  $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^2(\mu^2 + \sigma^2)$ .)

2. 设  $x_1, \cdots, x_n$  是来自泊松分布  $P(\lambda)$  的样本, 证明当样本量  $n$  较大时,  $\lambda$  的  $1 - \alpha$  近似置信区间为  $[\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\bar{x}/n}, \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\bar{x}/n}]$ .