# $\pi$-$\lambda$ 定理と単調族定理

@schrott512

## 1 $\pi$-系, $\lambda$-系, 単調族

以下, 全集合を $\Omega$ で表す.

**Definition 1.1: $\pi$-系**

$\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{P}$ が $\pi$-系であるとは, 次の条件 1),2) を満たすときをいう:

1) $\Omega \in \mathcal{P}$,
2) $A, B \in \mathcal{P}$ ならば, $A \cap B \in \mathcal{P}$.

**Definition 1.2: $\lambda$-系; ディンキン族, Dynkin class**

$\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{L}$ が次の 1)-3) を満たすとき, $\mathcal{L}$ をディンキン族または $\lambda$-系であるという:

1) $\Omega \in \mathcal{L}$,
2) $A, B \in \mathcal{L},\ A \subset B$ ならば, $B \setminus A \in \mathcal{L}$,
3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{L},\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ならば, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.

**Definition 1.3: 単調族**

$\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{M}$ が次の 1),2) を満たすとき, $\mathcal{M}$ を単調族であるという:

1) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ならば, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$,
2) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ならば, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

## 2 $\pi$-$\lambda$ 定理

**Lemma 2.1**

$\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{U}$ に対し, $\mathcal{U}$ を含む最小の $\lambda$-系 $\mathcal{L}_0$ がただ 1 つ存在する. すなわち, $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}$ であるような任意の $\lambda$-系 $\mathcal{L}$ に対し, $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ を満たす $\lambda$-系 $\mathcal{L}_0$ がただ 1 つ存在する.

*Proof.* 主張を満たす $\lambda$-系を $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_0'$ とする. このとき, どちらもお互いを含むので, すなわち, $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0'$ かつ $\mathcal{L}_0' \subset \mathcal{L}_0$ なので, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0'$ である.

次に,

$$\mathcal{L}_0 = \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \subset \mathcal{L} \\ \mathcal{L}\text{ は }\lambda\text{-系}}} \mathcal{L}$$

とおくと, $\mathcal{L}_0$ は最小の $\lambda$-系である. □

以後, $\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{U}$ に対し, Lemma 2.1 で定まる最小の $\lambda$-系を $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ で表す.

**Lemma 2.2**

$\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ をそれぞれ $\pi$-系, $\lambda$-系とする. このとき, 次の (1),(2) が成り立つ.

(1) $\mathcal{G}_1 := \{A \subset \Omega \mid A \cap B \in \mathcal{L}, \forall B \in \mathcal{P}\}$ は $\lambda$-系である.

(2) $\mathcal{G}_2 := \{A \subset \Omega \mid A \cap B \in \mathcal{L}, \forall B \in \mathcal{L}\}$ は $\lambda$-系である.

*Proof.* (1) まず, 任意の $B \in \mathcal{P}$ に対して, $\Omega \cap B = B \in \mathcal{P}$. ゆえに $\Omega \in \mathcal{G}_1$ である.

次に $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_1$, $A_1 \subset A_2$ とすると, 任意の $B \in \mathcal{P}$ に対して, $A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \mathcal{L}$, $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B$ であり, $\mathcal{L}$ は $\lambda$-系だから, $(A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \mathcal{L}$ である. したがって, $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{G}_1$ を得る.

最後に $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}_1$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ とすると, 任意の $B \in \mathcal{P}$ に対して, $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots \in \mathcal{L}$ であり, かつ $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B \subset \cdots$ である. $\mathcal{L}$ は $\lambda$-系でだから, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \mathcal{L}$ である. よって, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}_1$ である. 以上より, $\mathcal{G}_1$ は $\lambda$-系である.

(2) も (1) と同様にして分かる. □

**Lemma 2.3**

集合族 $\mathcal{P}$ を $\pi$-系とする. このとき, $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ は $\pi$-系である.

*Proof.* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ とおく.

$\Omega \in \mathcal{P}$ かつ $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ より $\Omega \in \mathcal{L}$ である.

$\mathcal{G} = \{A \in \Omega \mid A \cap B \in \mathcal{L}, \forall B \in \mathcal{P}\}$ とおく. $A \in \mathcal{P}$ とすると, 任意の $B \in \mathcal{P}$ に対し $A \cap B \in \mathcal{L}$ である. よって, $A \in \mathcal{G}$, すなわち $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ である. Lemma 2.2 (1) より $\mathcal{G}$ は $\lambda$-系だから, $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ を得る.

$\mathcal{G}' = \{A \in \Omega \mid A \cap B \in \mathcal{L}, \forall B \in \mathcal{L}\}$ とおく. $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{L}$ とする. $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ より, $A \cap B \in \mathcal{L}$ である. よって, $A \in \mathcal{G}'$ であり, したがって $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}'$ を得る. Lemma 2.2 (2) より $\mathcal{G}'$ は $\lambda$-系だから, $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}'$ である. したがって, $A, B \in \mathcal{L}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{L}$ であり, 結論を得る. □

**Theorem 2.4: Dynkin の $\pi$-$\lambda$ 定理**

$\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{P}$ を $\Omega$ の部分集合の族とするとき, 次の (1)-(3) が成り立つ.

(1) $\mathcal{A}$ が $\pi$-系かつ $\lambda$-系ならば, $\mathcal{A}$ は $\sigma$-加法族である.

(2) $\mathcal{P}, \mathcal{L}$ をそれぞれ $\pi$-系, $\lambda$-系とする. このとき, $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ ならば $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ である.

(3) $\mathcal{P}$ を $\pi$-系とする. このとき, $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ である.

ここで, $\sigma(\mathcal{P})$ は $\mathcal{P}$ を含む最小の $\sigma$-加法族を表す.

*Proof.* (1) $\mathcal{A}$ は $\pi$-系より, $\Omega \in \mathcal{A}$ である.

$A \in \mathcal{A}$ とする. $\Omega \in \mathcal{A}$ であり, $\mathcal{A}$ は $\lambda$-系なので, $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ が分かる.

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ とする. $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ $(n = 1, 2, \dots)$ とおくと, 各 $A_n^c \in \mathcal{A}$ であり $\mathcal{A}$ は $\pi$-系なので, 各 $B_n = (\bigcap_{j=1}^n A_j^c)^c$ なので $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ である. また $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ である. $\mathcal{A}$ は $\lambda$-系だから $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{A}$ を得る.

したがって, $\mathcal{A}$ は $\sigma$-加法族である.

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ は $\lambda$-系であり, Lemma 2.3 より $\pi$-系でもある. よって (1) より $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ は $\sigma$-加法族である. $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ より, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ であり, また $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ なので結論を得る.

(3) (2) より $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ は明らか. また, $\sigma$-加法族は $\lambda$-系でもあるので, $\mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{P})$ より $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \sigma(\mathcal{P})$ を得る. □

## 3 単調族定理

Lemma 2.1 と同様にして次が得られる.

**Lemma 3.1**

$\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{U}$ に対し, $\mathcal{U}$ を含む最小の単調族 $\mathcal{M}_0$ がただ 1 つ存在する. すなわち, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ であるような任意の単調族 $\mathcal{M}$ に対し, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ を満たす単調族 $\mathcal{M}_0$ がただ 1 つ存在する.

以後, $\Omega$ の部分集合の族 $\mathcal{U}$ に対し, Lemma 3.1 で定まる最小の単調族を $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ で表す.

**Lemma 3.2**

$\mathcal{M}, \mathcal{F}$ をそれぞれ $\Omega$ の単調族, 有限加法族とする. このとき次の (1)-(3) が成り立つ.

(1) $\mathcal{M}_1 := \{A \in \Omega \mid A^c \in \mathcal{M}\}$ は単調族である.
(2) $\mathcal{M}_2 := \{A \in \Omega \mid A \cup B \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{F}\}$ は単調族である.
(3) $\mathcal{M}_2 := \{A \in \Omega \mid A \cup B \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{M}\}$ は単調族である.

*Proof.* (1) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_1$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ とする. よって $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, $A_1^c \supset A_2^c \supset \cdots$ であり, $\mathcal{M}$ は単調族なので, $(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)^c = \bigcap_{n=1}^\infty A_n^c \in \mathcal{M}$ である. したがって $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}_1$ である.

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_1$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ に対して $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}_1$ であることについても同様である.

(2) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_2$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ とし, $B \in \mathcal{F}$ を任意にとる. このとき $A_1 \cup B, A_2 \cup B, \dots \in \mathcal{M}$, $A_1 \cup B \subset A_2 \cup B \subset \cdots$ であり, $\mathcal{M}$ は単調族だから, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \cup B = \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \cup B) \in \mathcal{M}$ である. したがって $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}_2$ を得る.

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_2$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ に対して $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}_2$ であることについても同様である.

(3) (2) と同様である. □

**Lemma 3.3**

$\mathcal{F}$ を $\Omega$ の有限加法族とする．このとき, $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ は有限加法族である．

*Proof.* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ とおく．

$\Omega \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ より $\Omega \in \mathcal{M}$ である．

$\tilde{\mathcal{M}} = \{A \in \Omega \mid A^c \in \mathcal{M}\}$ とおく．$A \in \mathcal{F}$ とすると, $\mathcal{F}$ は有限加法族だから $A^c \in \mathcal{F}$ である．$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ より $A^c \in \mathcal{M}$ であり, したがって $A \in \tilde{\mathcal{M}}$, すなわち $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ である．Lemma 3.2 より, $\tilde{\mathcal{M}}$ は単調族なので, $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ を得る．しがたって, すべての $A \in \mathcal{M}$ に対して $A^c \in \mathcal{M}$ である．

$\tilde{\mathcal{M}}' = \{A \in \Omega \mid A \cup B \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{F}\}$ とおく．$A \in \mathcal{F}$ とすると, $\mathcal{F}$ は有限加法族だから任意の $B \in \mathcal{F}$ に対して $A \cup B \in \mathcal{F}$ である．よって $A \in \tilde{\mathcal{M}}'$ であり, すなわち $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{M}}'$ である．Lemma 3.2 より, $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}'$ を得る．したがって, すべての $A \in \mathcal{M}$ と $B \in \mathcal{F}$ に対し, $A \cup B \in \mathcal{M}$ である．

また, $\tilde{\mathcal{M}}'' = \{A \in \Omega \mid A \cup B \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{M}\}$ とおく．$A \in \mathcal{F}$ とすると先の議論により, 任意の $B \in \mathcal{M}$ に対し $A \cup B \in \mathcal{M}$ である．よって $A \in \tilde{\mathcal{M}}''$, すなわち $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{M}}''$ である．同じく Lemma 3.2 を用いて $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}''$ を得る．したがって, すべての $A, B \in \mathcal{M}$ に対して $A \cup B \in \mathcal{M}$ であることが得られる．

以上より, $\mathcal{M}$ が有限加法族であることが示された． $\square$

**Theorem 3.4: 単調族定理**

$\mathcal{M}, \mathcal{F}$ をそれぞれ $\Omega$ の部分集合の族とする．このとき, 次の (1)-(3) が成り立つ．

(1) $\mathcal{M}$ が単調族かつ有限加法族であるならば, $\mathcal{M}$ は $\sigma$-加法族である．

(2) $\mathcal{F}, \mathcal{M}$ をそれぞれ有限加法族, 単調族とする．このとき, $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ ならば $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$ である．

(3) $\mathcal{F}$ を有限加法族とする．このとき, $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ である．

*Proof.* (1) $\Omega \in \mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ が単調族, 有限加法族であることより明らか．また, $A \in \mathcal{M}$ に対し $A^c \in \mathcal{M}$ であることも同様に明らか．

$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ とし, $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ とおく．$\mathcal{M}$ は有限加法族だから各 $B_n \in \mathcal{M}$ である．$B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ で, $\mathcal{M}$ は単調族だから $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$ である．

以上より $\mathcal{M}$ は $\sigma$-加法族である．

(2) $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ とする．よって $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$ である．$\mathcal{M}(\mathcal{F})$ は単調族であり, Lemma 3.3 よりは有限加法族でもあるので, (1) より $\sigma$-加法族である．したがって, $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ なので結論を得る．

(3) (2) より $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ である．一方, $\sigma(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ を含む単調族でもあるので, $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$ である．したがって結論を得る． $\square$