Ausbreitung und Eindämmung von Epidemien

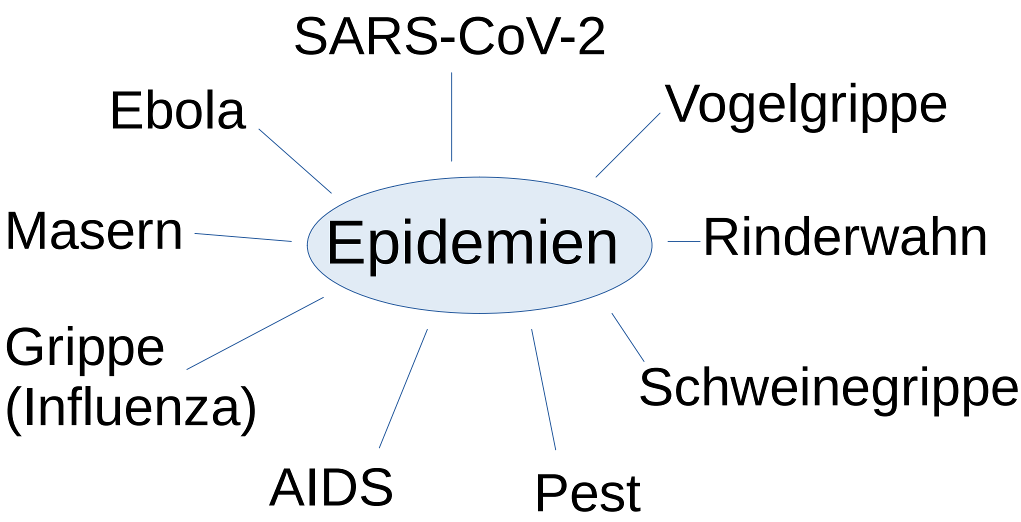
XLAB
Göttinger Experimentallabor
für junge Leute

Viola Schössow

Zeitplan

10:00 Uhr	Theorie I
11:30 Uhr	Pause (15min)
11:45 Uhr	Praxisblock I Theorie II Praxisblock II
13:15 Uhr	Pause (45min)
14:00 Uhr	Freies Arbeiten Diskussion
15:20 Uhr	Umfrage/ Evaluation

Motivation



Was ist eine Epidemie?

Aus dem griechischen: epi= mitten unter, in; demos= Volk → epidemia nosos= im Volk verbreitete Krankheit

Zeitlich und räumlich begrenzte Ausbreitung einer Krankheit, die einen Schwellenwert überschritten hat

Bei Tieren spricht man von Epizootie

Übertragen von Bakterien, Viren, Pilzen oder Parasiten

Verschiedene Schäden durch Epidemien:

Behandlungskosten Masern 520€, 1 Promill lebensbedrohlicher Verlauf, Impfung 30€

Verlust Grippe 20.000 Tote 2012/13 in Deutschland

Wirtschaft Grippe 2,2 Milliarden€ (2015), Corona 250 Milliarden€

Euterentzündung (Mastitis) 225Mio€ pro Jahr

<u>SARS- CoV-2 in Deutschland</u>
(Stand: 31.8.21)

bestätigte
Fälle:
ca. 4 Mio.

bestätigte
Todesfälle:
ca. 90000

<u>Ziel:</u> Erkennen und Eindämmen von Epidemien

Bild: Statista

<u>Aktuelle Lage:</u>
Deutschland: Fälle 4,14 Mio, Tote 92.928
Weltweit: Fälle 219 Mio, Tote 2,55 Mio.

Ziel der Gesellschaft, als Reaktion auf Epidemien
→ Erkennen und Eindämmen

Gut durch Modelle möglich

SIR-Modell

William Ogilvy
Kermack

Anderson Gray
McKendrick

1927: *A contribution to the mathematical theory of epidemics I*

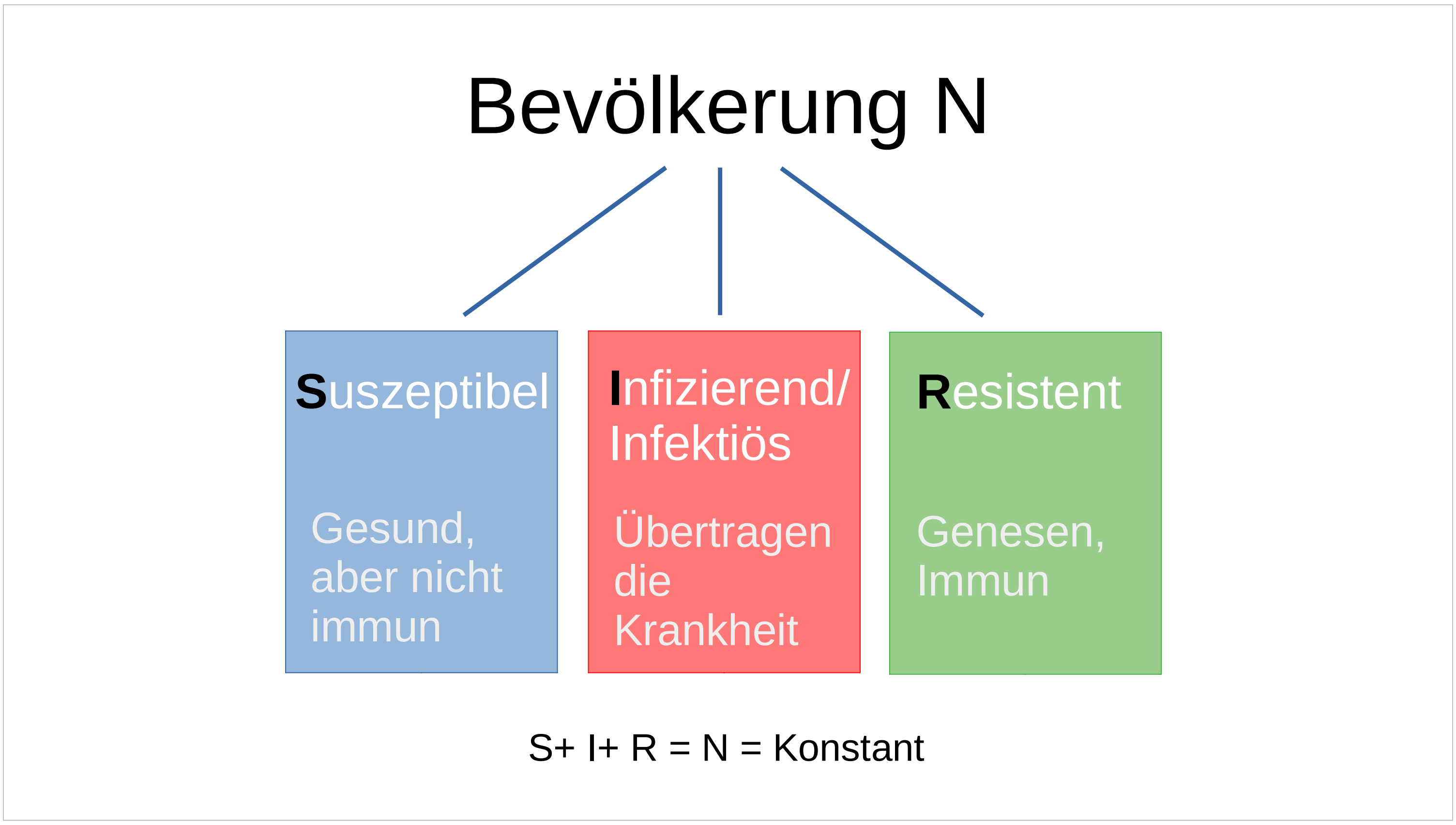
Bild: Link.Springer

Insbesondere das Modell von diesen Herren von 1927, das noch heute in der Epidemiologie verwendet wird.

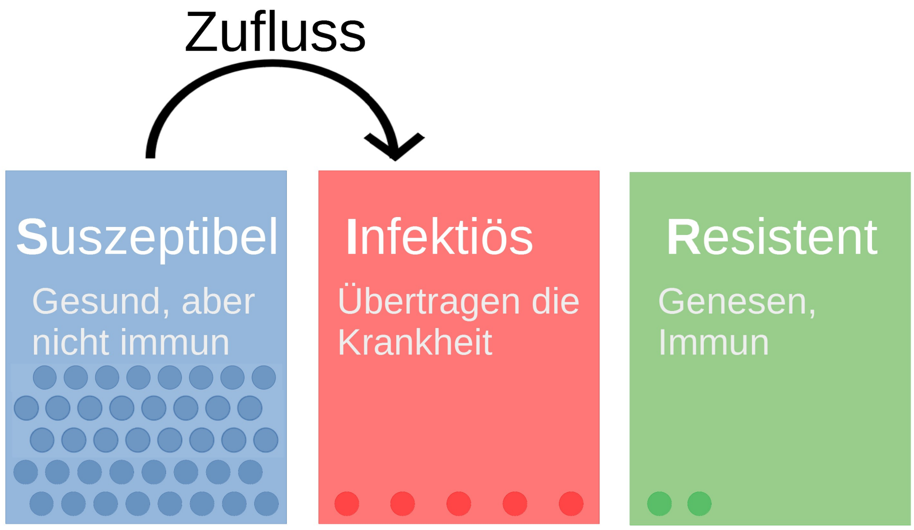
McKendrick, Kermack: *A contribution to the mathematical theory of epidemics I.* In: *Proc.Roy.Soc. A*, Band 115, 1927, S. 700–721,
Teil 2, Band 138, 1932, S. 55–83,
Teil 3, Band 141, 1933, S. S. 94–122,

Verwendung in epidemilogischer Arbeit

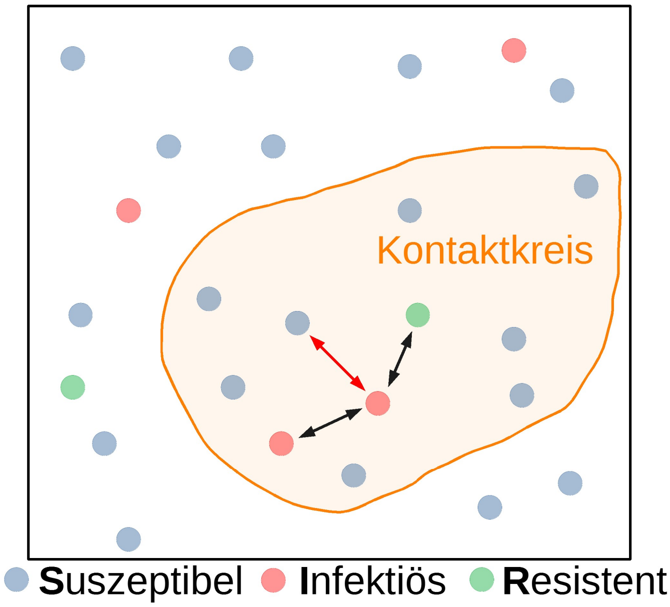
Denn Verlauf von Epidemien sind gut modellierbar, aber auch der Einfluss von Maßnahmen und vielem mehr


Bevölkerung N
Suszeptibel
Gesund, aber nicht immun
Infizierend/ Infektiös
Übertragen die Krankheit
Resistent
Genesen, Immun
S+ I+ R = N = Konstant

Übergänge

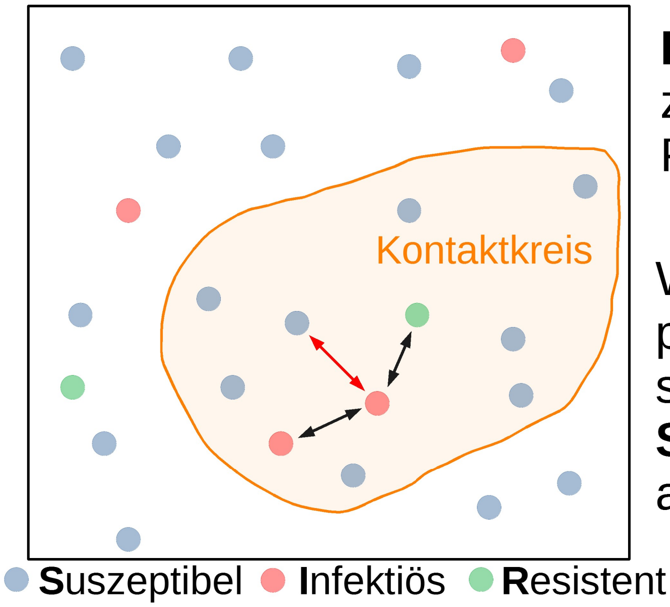

Zufluss
Suszeptibel
Gesund, aber nicht immun
Infektiös
Übertragen die Krankheit
Resistent
Genesen, Immun

Der Zufluss



<u>Annahme:</u>
Perfekt gemischter Kontaktkreis, Verhältnis von S,I,R wie in Bevölkerung

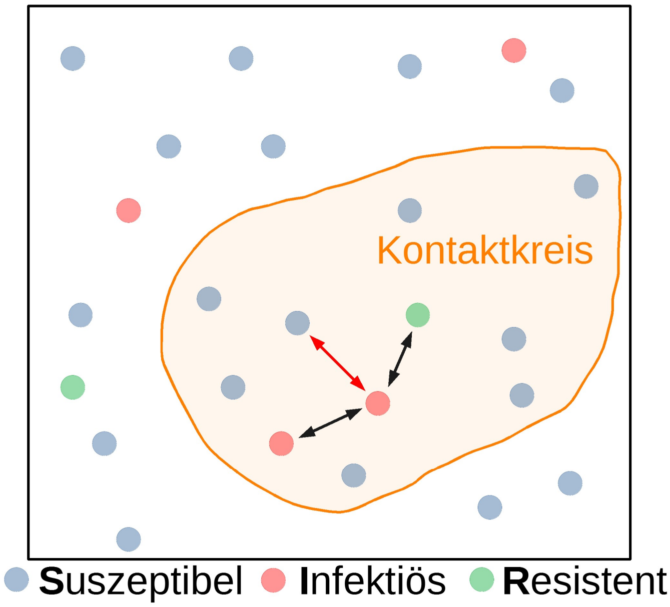
Der Zufluss



Infektiöser trifft
z.B. M= 3
Personen pro Tag

Was muss passieren, damit sich ein **S**uszeptibler ansteckt?

Der Zufluss



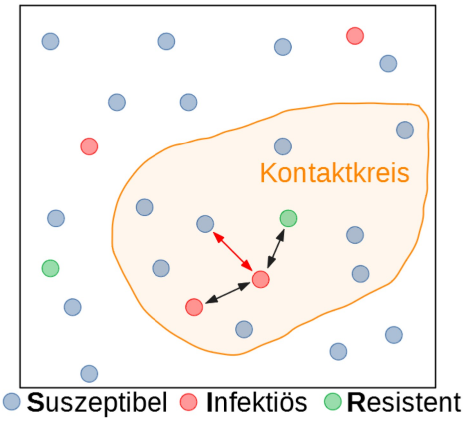
Der Zufluss

Was muss passieren, damit sich ein **S** ansteckt?

- Treffen zwischen **I** & **S**
  → *Wahrscheinlichkeit*

$$M \cdot \frac{S}{N}$$

- Kontakt muss ansteckend sein
  → *Wahrscheinlichkeit* x

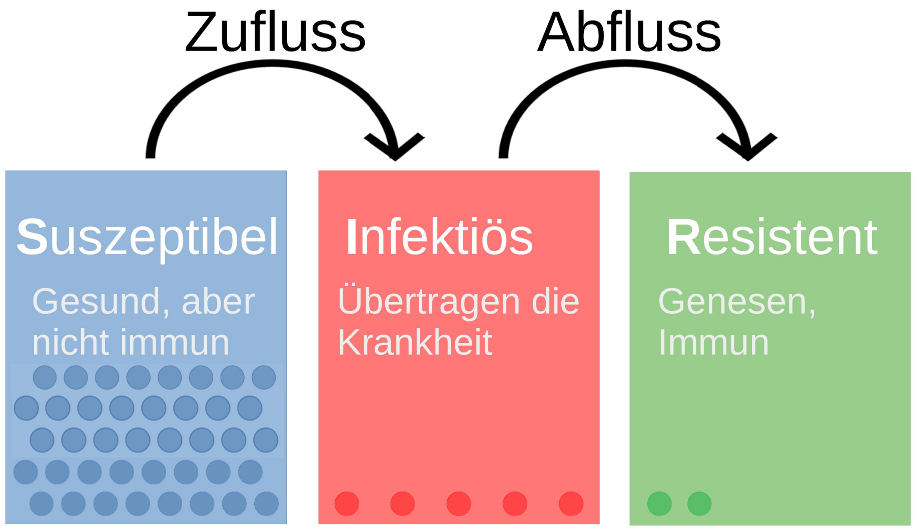


An die Tafel den zusammengestellten Zufluss M*x*S/N*I

Beispiel eine Klasse aus 21 Schüler*innen, 2 Personen sind krank → I=3, N=21, S= 19
Jeder trifft im Schnitt 4 Personen, die Krankheit überträgt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 27% → x=0.27= 27/100 & M=4
Wie viele sind nach einem Tag neuinfiziert?
= 1.954 ≈ 2

Umgang mit Dezimalzahlen: wir betrachten Durchschnitte für die Gesamtbevölkerung, die sehr groß ist, sodass der Durchschnitt passend ist (Gesetz der großen Zahlen)
Für alle Infizierten kann dann der Zufluss gemittelt werden und Prognosen zur Ausbreitung angestellt

Übergänge


Zufluss
Abfluss
Suszeptibel
Gesund, aber nicht immun
Infektiös
Übertragen die Krankheit
Resistent
Genesen, Immun

Der Abfluss

I → R

Was muss passieren, damit ein Infizierter nicht mehr infektiös ist?

Vergleich zu Würfeln:
-Wkeit soll zeitlich konstant sein (Annahme)
-Wie beim radioaktiven Zerfall können wir annehmen, dass die Zahl der Infizierten mit Rate gamma abnimmt.
-Dann ist der Erwartungswert für die mittlere Dauer 1/ gamma=tau (→ Viele Verläufe gemittelt)

Abfluss ist als gamma *I= 1/ tau *I

Bsp für die Klasse? Tau= 8Tage
Wir betrachten den Fall
I= 8 dann wird wahrscheinlich 1 gesund
Für viele Betrachtung wird der Verlauf repräsentativ
Auch hier sind wieder Dezimalzahlen möglich, es sind dann im Durchschnitt so viele genesen
→ jeder Verlauf ist anders, wir können nur mitteln

Der Abfluss

I → R

Was muss passieren, damit ein Infizierter nicht mehr infektiös ist?

- Er muss genesen oder isoliert werden
- → Wahrscheinlichkeit resistent zu werden liegt bei $1/\tau$

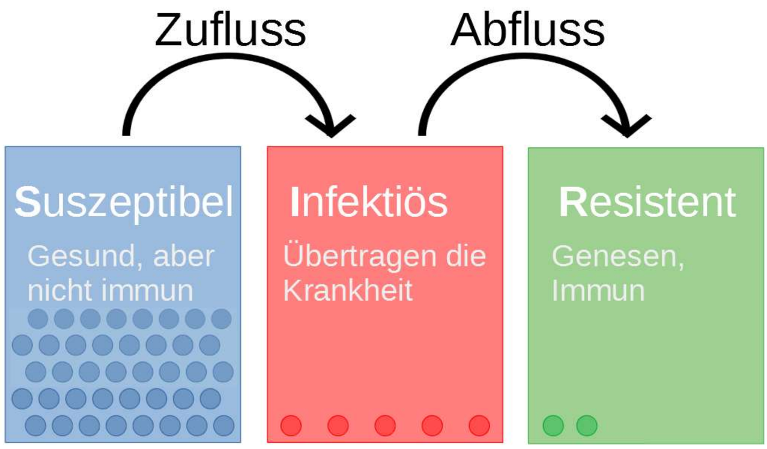
  → im Durchschnitt ist dann jeder τ krank

Vergleich zu Würfeln:
-Wkeit soll zeitlich konstant sein (Annahme)
-Wie beim radioaktiven Zerfall können wir annehmen, dass die Zahl der Infizierten mit Rate gamma abnimmt.
-Dann ist der Erwartungswert für die mittlere Dauer 1/ gamma=tau   (→ Viele Verläufe gemittelt)

Abfluss ist als gamma *I= 1/ tau *I

Bsp für die Klasse? Tau= 8Tage
Wir betrachten den Fall
I= 8 dann wird wahrscheinlich 1 gesund
Für viele Betrachtung wird der Verlauf repräsentativ
Auch hier sind wieder Dezimalzahlen möglich, es sind dann im Durchschnitt so viele genesen
→ jeder Verlauf ist anders, wir können nur mitteln

Vollständiges SIR-Modell



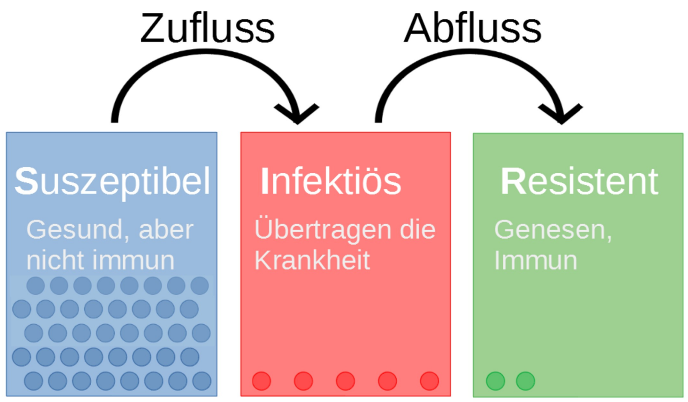
S(t+ 1)= S(t) – Zufluss
I(t+ 1)= I(t) + Zufluss – Abfluss
R(t+ 1)= R(t) + Abfluss

Natürlich sind die Personen die von S gehen, die die zu I gehen, d.h. Zufluss einmal mit + einmal -

Analog I und R

N also die Gesamtzahl der Bevölkerung soll konstant sein.

Vollständiges SIR-Modell



$$S(t+1) = S(t) - \beta \cdot \frac{S(t)}{N} \cdot I(t)$$

$$I(t+1) = I(t) + \beta \cdot \frac{S(t)}{N} \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t)$$

$$R(t+1) = R(t) + \gamma \cdot I(t)$$

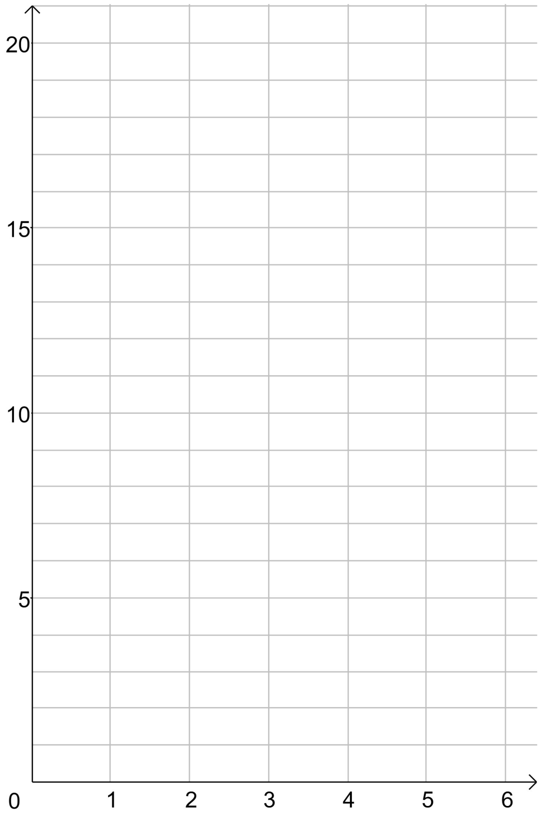
Natürlich sind die Personen die von S gehen, die die zu I gehen, d.h. Zufluss einmal mit + einmal -

Analog I und R

N also die Gesamtzahl der Bevölkerung soll konstant sein.

Vergleich

Zeitlicher Verlauf
der Infizierten



Besprechung der Lösung

Normiertes SIR-Modell

Notation:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N} \qquad i(t) = \frac{I(t)}{N} \qquad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Normierung über Division mit N:

Zufluss: $z = \frac{Z}{N}$

Abfluss: $a = \frac{A}{N}$

Normiertes SIR-Modell

Notation:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N} \qquad i(t) = \frac{I(t)}{N} \qquad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Normierung über Division mit N:

Zufluss: $z = \frac{Z}{N} = -\beta \cdot \frac{S}{N} \cdot \frac{I}{N} = -\beta \cdot s \cdot i$

Abfluss: $a = \frac{A}{N} = \gamma \cdot \frac{I}{N} = \gamma \cdot i$

Normiertes SIR-Modell

$$s(t+1) = s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$$

$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$

$$r(t+1) = r(t) + \gamma \cdot i(t)$$

Begründe:

$$r(t+1) = 1 - s(t+1) - i(t+1) \quad \checkmark$$

Beweis für Richtigkeit

Setzen wir einfach mal ein:

$r(t+1)$

$= 1 - s(t+1) - i(t+1)$

$= 1 - [s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)] - [i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)]$

$= 1 - s(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - i(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t) + \gamma \cdot i(t)$

Beweis für Richtigkeit

Setzen wir einfach mal ein:

$r(t+1)$

$= 1 - s(t+1) - i(t+1)$

$= 1 - [s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)] - [i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)]$

$= 1 - s(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - i(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t) + \gamma \cdot i(t)$

$= 1 - s(t) - i(t) + \gamma \cdot i(t)$

$= r(t) + \gamma \cdot i(t)$

$S+I+R = N$
$s + i + r = 1$

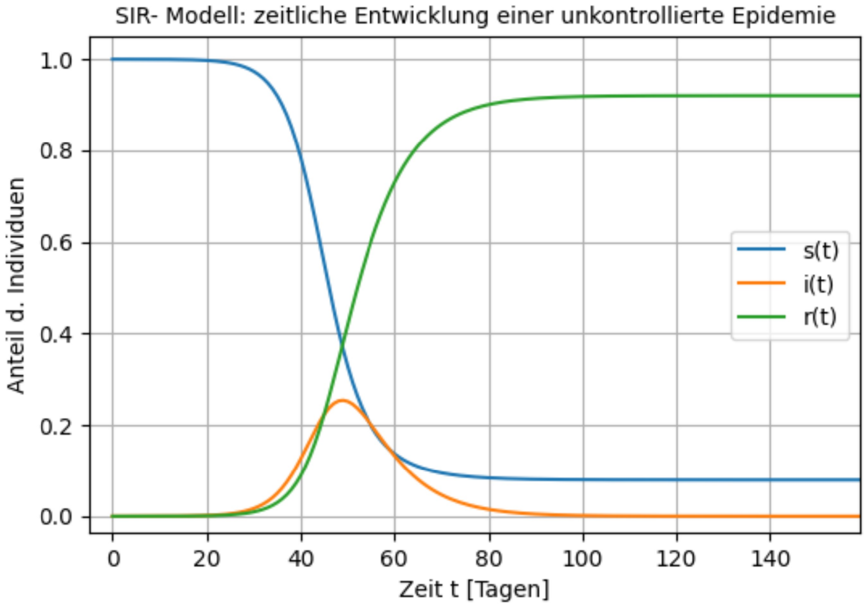
Wichtige Größen

- Gesamtanteil aller Erkrankten ν_i :
  - Alle Infizierten aufsummiert und mit γ multipliziert (keine Mehrfachzählung)
- 7-Tage-Inzidenz :
  - Alle Infizierten, die sich in einer Woche pro 100.000 Personen neu infiziert haben
  - Zufluss aus einer Woche pro 100.000

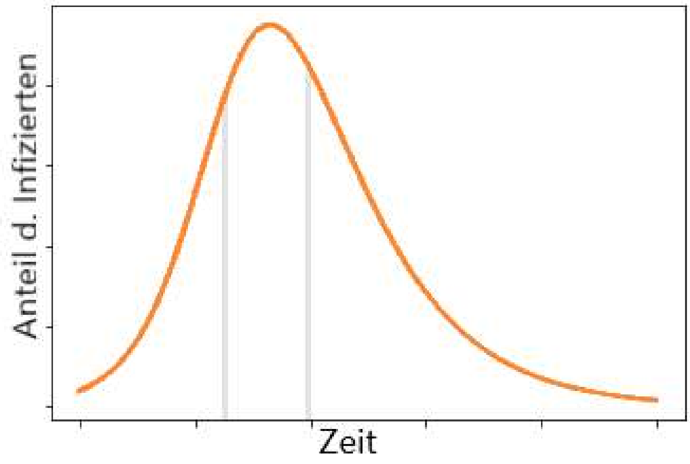
Praktikumsblock I

- Logt euch im Computer ein.
  Passwort: startstart
- Bearbeitet Blatt 6
- Hinweise zum Öffnen & Verwenden der Programme siehe Anleitung
- Zeit:

Epidemischer Verlauf



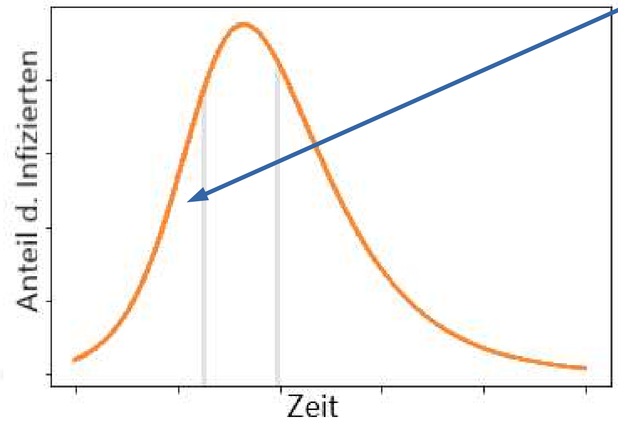
Wieso hat I ein Maximum?



Erkläre mit Hilfe der Gleichung:

$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$

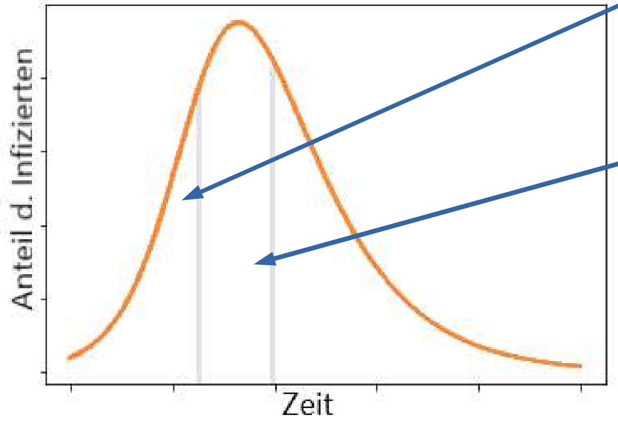
Wieso hat I ein Maximum?



Exponentielles Wachstum
- Viele S infizieren sich
- Wenig I genesen

$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$

Wieso hat I ein Maximum?

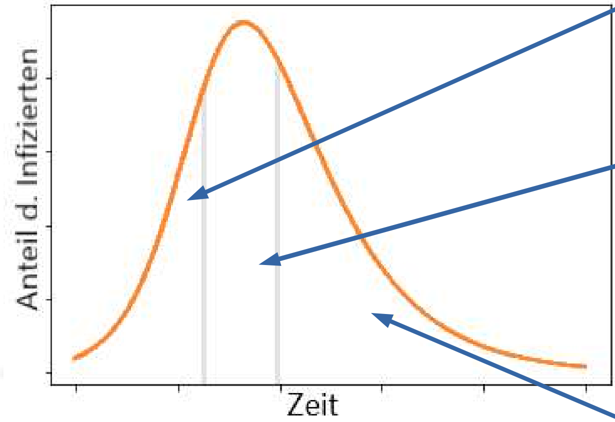


Exponentielles Wachstum
- Viele S infizieren sich
- Wenig I genesen

Maximum
- Immer weniger S, Wahrscheinlichkeit S zu treffen sinkt
- Gleichzeitig genesen I

$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$

Wieso hat I ein Maximum?



$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$

Exponentielles Wachstum

- Viele S infizieren sich
- Wenig I genesen

Maximum

- Immer weniger S, Wahrscheinlichkeit S zu treffen sinkt
- Gleichzeitig genesen I

Abklingen der Epidemie

- Kaum S mehr da
- Zufluss immer kleiner
- Abfluss überwiegt

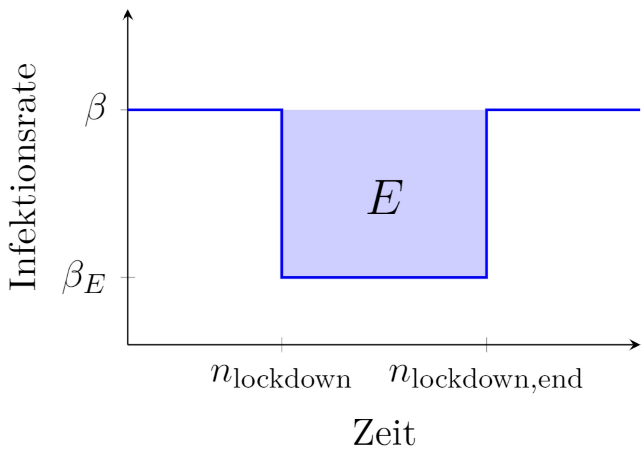
Welche Kontrollmaßnahmen zur Eindämmung kennt ihr?

Beginn nach circa 40/50 Minuten der zweiten Doppelstunde – 12:30

Masken, Desinfizieren, Abstand halten, Niesettikette, Lockdown, Beschränkung der Sozialkontakte, keine Feiern/Partys, Beschränkung der Personen pro Laden/Raum, Siechhäuser

Impfungen, Medikamente

Reduktion d. Infektionsrate



Zeitliche Begrenzung durch Einsatzmittel/ Ressourcen E

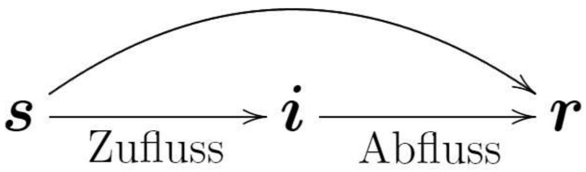
Infektionsrate wird abgesenkt auf

$$\beta_E = \text{reduce} \cdot \beta$$

Beginn der Maßnahme bei nlockdown.

Ende wird berechnet über: $n_{\text{lockdown, end}} = n_{\text{lockdown}} + \frac{E}{\beta - \beta_E}$

Übergang von S nach R



Jeden Tag wird ein Teil der **S**uszeptiblen immunisiert/ resistent.

Annahmen:
- Immunisierung wirkt sofort und zu 100%
- ist von Ressourcen **unabhängig**
- Übergangsrate zeitlich konstant

Ab dem Tag nvacc werden jeden Tag α Prozent der Suszeptiblen immunisiert

Aufstellen der zeitlichen Verläufe

Übergang von S nach R

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{s} \arrow[r, "\text{Zufluss}"'] \arrow[rr, bend left] & \boldsymbol{i} \arrow[r, "\text{Abfluss}"'] & \boldsymbol{r} \end{tikzcd}$$

Ab dem Tag nvacc werden jeden Tag α Prozent der Suszeptiblen immunisiert

$$s(t+1) = s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t) \boldsymbol{- \alpha \cdot s(t)}$$
$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$
$$r(t+1) = r(t) + \gamma \cdot i(t) \boldsymbol{+ \alpha \cdot s(t)}$$

Zeitpunkt des Immunsieren/Impfen
t=0 präventiv, vorbeugend
t>0 prophylaktisch, eingreifend

Nutzen

Um die Maßnahmen evaluieren zu können, definieren wir uns den Nutzen:

Die Anzahl/ der Anteil der Menschen, der sich durch die Maßnahme nicht mehr infizieren wird.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Nutzen} = \nu_i^0 - \nu_i^+}$

Gesamtanteil der Erkrankten ohne Eingriff ν_i^0

Gesamtanteil der Erkrankten mit Eingriff ν_i^+

Praktikumsblock II

- Ggf. Login über: startstart
- Bearbeitet Blatt 11 und 14
- Zeit:

Bild: Trueffelpix- Fotolia

Diskussion

2025

Forscher entdecken in Deutschland
neuen, höchst ansteckenden Erreger

Wie geht ihr vor?

Feste Ressource.

Schließung von bestimmen Einrichtungen?
Dauer?
Herstellung von Impfstoff, Produktion von
Hygieneartikel