XLAB Science Camp 16.-20.10.2023

Übung

Physik realer Systeme: Von Differenzialgleichungen zum Experiment

Aufgabe 1 (Elektromagnetische Schwingungen und Wellen)
Elektromagnetische Felder gehorchen den sogenannten Maxwell-Gleichungen, die wir hier für den 3D-Fall angeben wollen. In dieser Aufgabe wollen wir diese relativ komplizierten Gleichung auf eine einfachere *skalare* Wellengleichung überführen.
Sei

$$\vec{B}(x,y,z,t) = (B_x(x,y,z,t), B_y(x,y,z,t), B_z(x,y,z,t))$$

die magnetische Flussdichte (Einheit $[B] = 1T$) und

$$\vec{E}(x,y,z,t) = (E_x(x,y,z,t), E_y(x,y,z,t), E_z(x,y,z,t))$$

die elektrische Feldstärke (Einheit $[E] = 1V/m$).

- Änderung der magnetischen Flussdichte führen zu einem Wirbelfeld:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(x,y,z,t) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y}(x,y,z,t) - \frac{\partial E_y}{\partial z}(x,y,z,t) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z}(x,y,z,t) - \frac{\partial E_z}{\partial x}(x,y,z,t) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x}(x,y,z,t) - \frac{\partial E_x}{\partial y}(x,y,z,t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Elektrische Ströme – d.h. externe Ströme und Änderungen der elektrischen Feldstärke – führen zu einem magnetischen Wirbelfeld:

$$\mu\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y}(x,y,z,t) - \frac{\partial B_y}{\partial z}(x,y,z,t) \\ \frac{\partial B_x}{\partial z}(x,y,z,t) - \frac{\partial B_z}{\partial x}(x,y,z,t) \\ \frac{\partial B_y}{\partial x}(x,y,z,t) - \frac{\partial B_x}{\partial y}(x,y,z,t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

- Hierbei ist
  - $\vec{j}$ der Vektor der elektrischen Stromdichte (im folgenden 0)
  - $\mu = \mu_0\mu_r$ die Permittivität (μ_r, relative Permittivität, ein Materialparameter)

– $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ (ε_r, relative Dielektrizitätszahl, ein Materialparameter)

– $\mu\varepsilon = \frac{1}{c^2}$ wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Material ist.
Für $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2}$ ist c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

(a) Wir nehmen an, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unabhängig von der z-Koordinate sind, die magnetische Flussdichte in der x-y-Ebene liegt und das elektrische Feld in z-Richtung zeigt, d.h.

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} B_x(x,y,t) \\ B_y(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{E}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(x,y,t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Leiten Sie hieraus eine skalare Wellengleichung für $E_z(x,y,t)$ her.
Hinweis:

- Setzen Sie (3) in (1) und (2) ein und leiten sie (2) nach t ab.
- Es gilt
$$\frac{\partial \frac{\partial E_z(x,y,t)}{\partial x}}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E_z(x,y,t)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial \frac{\partial E_z(x,y,t)}{\partial t}}{\partial x}$$

(b) Wir betrachten die skalare Wellengleichung (in 2D)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) \tag{4}$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle (z.B. Lichtgeschwindigkeit oder Schallgeschwindigkeit) ist. Wenn sich Randbedingungen und Quellen (z.B. $\vec{j}$) in der Zeit nicht ändern, so kann die Lösung zerlegt werden in folgende Anteile:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(c_n \sin(2\pi n t) + d_n \cos(2\pi n t))}_{\phi_n(t)} \cdot \hat{u}_n(x,y)$$

Wenn Wellen nur für eine spezielle Frequenz angeregt werden, so sind fast alle Koeffizienten d_n und c_n gleich Null und es verbleibt lediglich

$$u(x,y,t) = \underbrace{(c_n \sin(\omega t) + d_n \cos(\omega t))}_{\phi_n(t)} \cdot \hat{u}_n(x,y), \quad \omega = 2\pi n.$$

Wir definieren zusätzlich die Wellenzahl $k = \omega/c$ (Einheit $[k] = 1/m$). Setzen Sie diesen Ansatz in (4) ein. Welcher Differentialgleichung gehorcht $\hat{u}_n(x,y)$?

(c) Es sollen die Wellengleichungen für Mikrowellen der Wellenlänge $28mm$ berechnet werden. Da die Wellenlänge bekannt ist, kann der obige Ansatz verwendet werden. Welchen Wert erhalten Sie in diesem Fall für k?

Aufgabe 2 (Vorbereitung: Mikrowellen)
Wir betrachten nun 1D Mikrowellen. Am Ort $x = 0$ sei ein Mikrowellensender angebracht, der eine Welle der Modulation $u(0,t) = \cos(\omega t)$ von links nach rechts aussendet. Im Interval $[0,a]$ liegt ein Material vor in dem die Lichtgeschwindigkeit c_1 ist, während im Interval $[a,b]$ ein Material mit Lichtgeschwindigkeit c_2 vorliegt. Wir wollen nun die Funktion $u(x,t)$ rekonstruieren, die die Wellengleichung unter diesen Bedingungen löst. Dazu wagen wir folgenden Ansatz:

$$u(x,t) = \begin{cases} \cos(\omega t - k_1 x + \varphi_1) & \text{wenn } x \leq a, \\ \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2) & \text{sonst,} \end{cases} \tag{5}$$

wobei $k_1 = \omega/c_1$ und $k_2 = \omega/c_2$. Diesem Ansatz liegt die Annahme zugrunde, dass es sich nur um eine von links nach rechts laufende Welle handelt, d.h. es gibt keine Reflexion.

(a) Zeigen Sie dass $u(x,t)$ aus (5) der Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ gehorcht.

(b) Bestimmen Sie nun die Koeffizienten φ_1, φ_2, sodass $u(x,t)$ die folgenden zusätzlichen Bedingungen erfüllt:

- Die Welle am Eingang entspricht der eingeprägten Modulation:

$$u(0,t) = \cos(\omega t)$$

- Die Welle ist stetig am Übergang, d.h.:

$$\cos(\omega t - k_1 a + \varphi_1) = \cos(\omega t - k_2 a + \varphi_2)$$

(c) Zeichnen Sie die Lösung für $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$ für zwei Fälle:

- $a = 2\pi$, $b = 4\pi$, $c_1 = c_2 = \omega = 1$
- $a = 2\pi$, $b = 4\pi$, $c_1 = \omega = 1$, aber $c_2 = \frac{2}{3}$.

(d) Zeigen Sie, dass die beiden letzten Fälle sich bei $b = 4\pi$ auslöschen.