Ausbreitung und Eindämmung von Epidemien

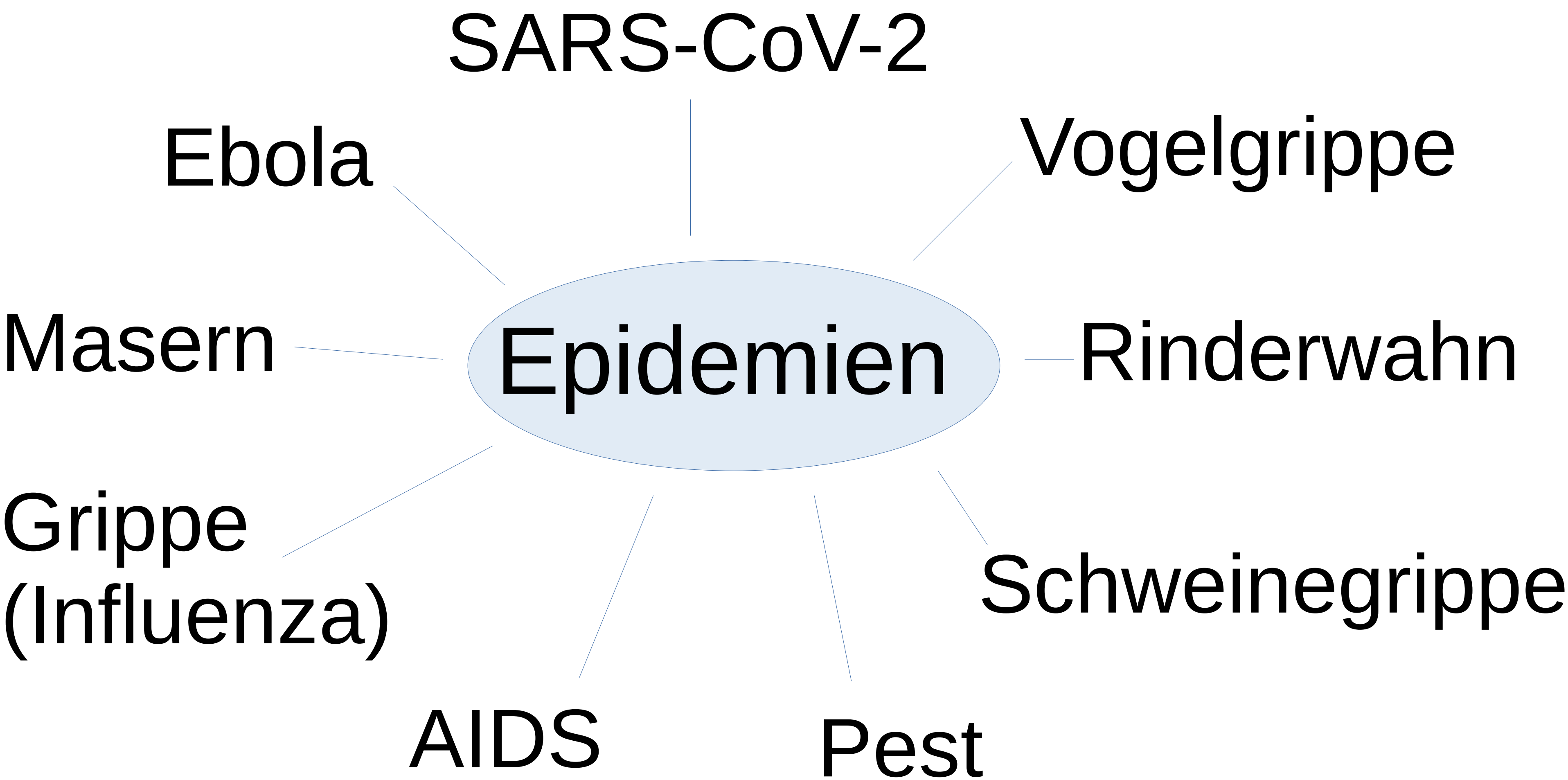
XLAB
Göttinger Experimentallabor
für junge Leute

Viola Schössow

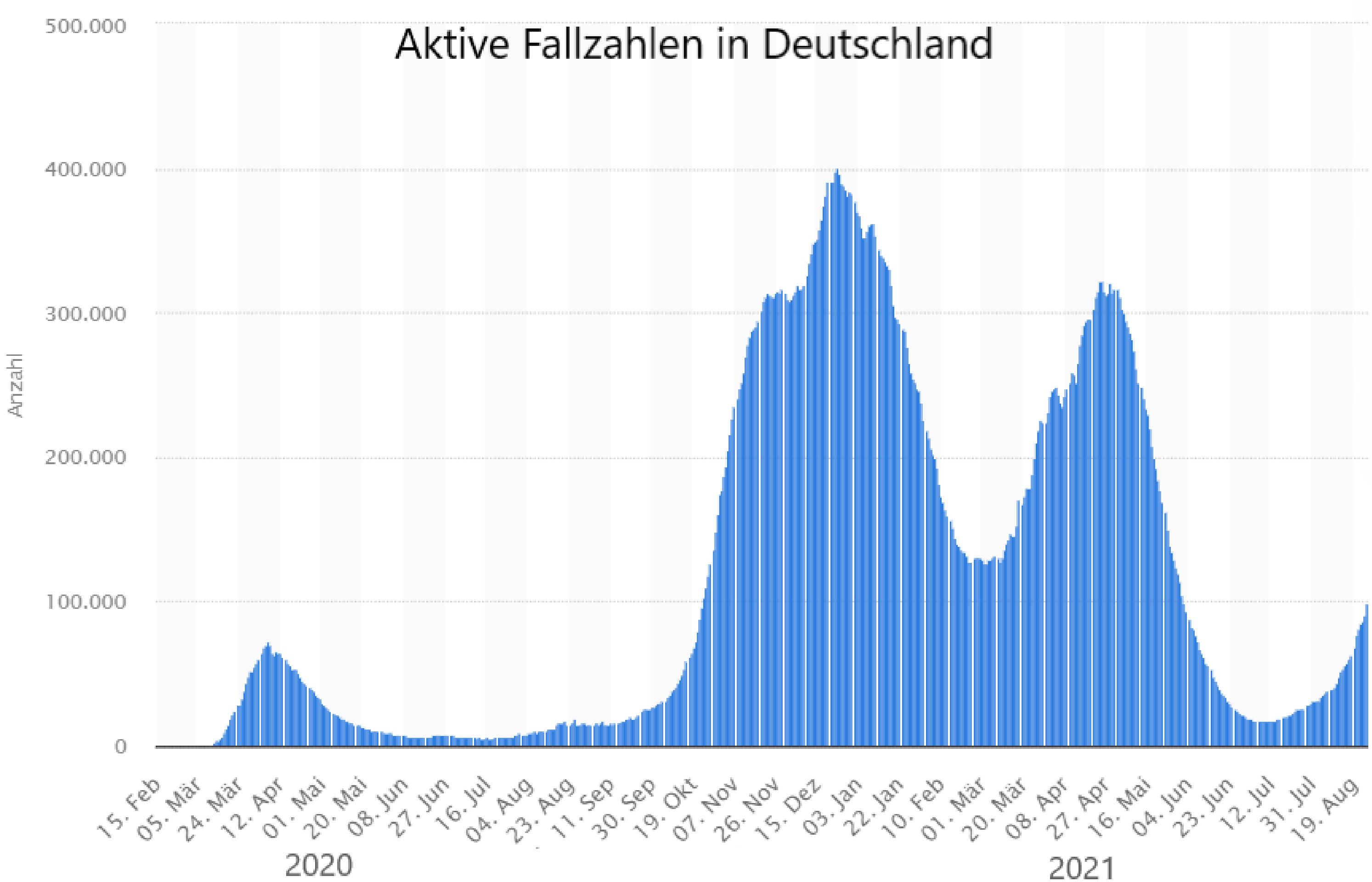
Zeitplan

10:00 Uhr	Theorie I
11:30 Uhr	Pause (15min)
11:45 Uhr	Praxisblock I Theorie II Praxisblock II
13:15 Uhr	Pause (45min)
14:00 Uhr	Freies Arbeiten Diskussion
15:20 Uhr	Umfrage/ Evaluation

Motivation


SARS-CoV-2
Ebola
Vogelgrippe
Masern
Epidemien
Rinderwahn
Grippe
(Influenza)
Schweinegrippe
AIDS
Pest

SARS- CoV-2 in Deutschland
(Stand: 31.8.21)



bestätigte Fälle:
ca. 4 Mio.

bestätigte Todesfälle:
ca. 90000

Ziel: Erkennen und Eindämmen von Epidemien

Bild: Statista

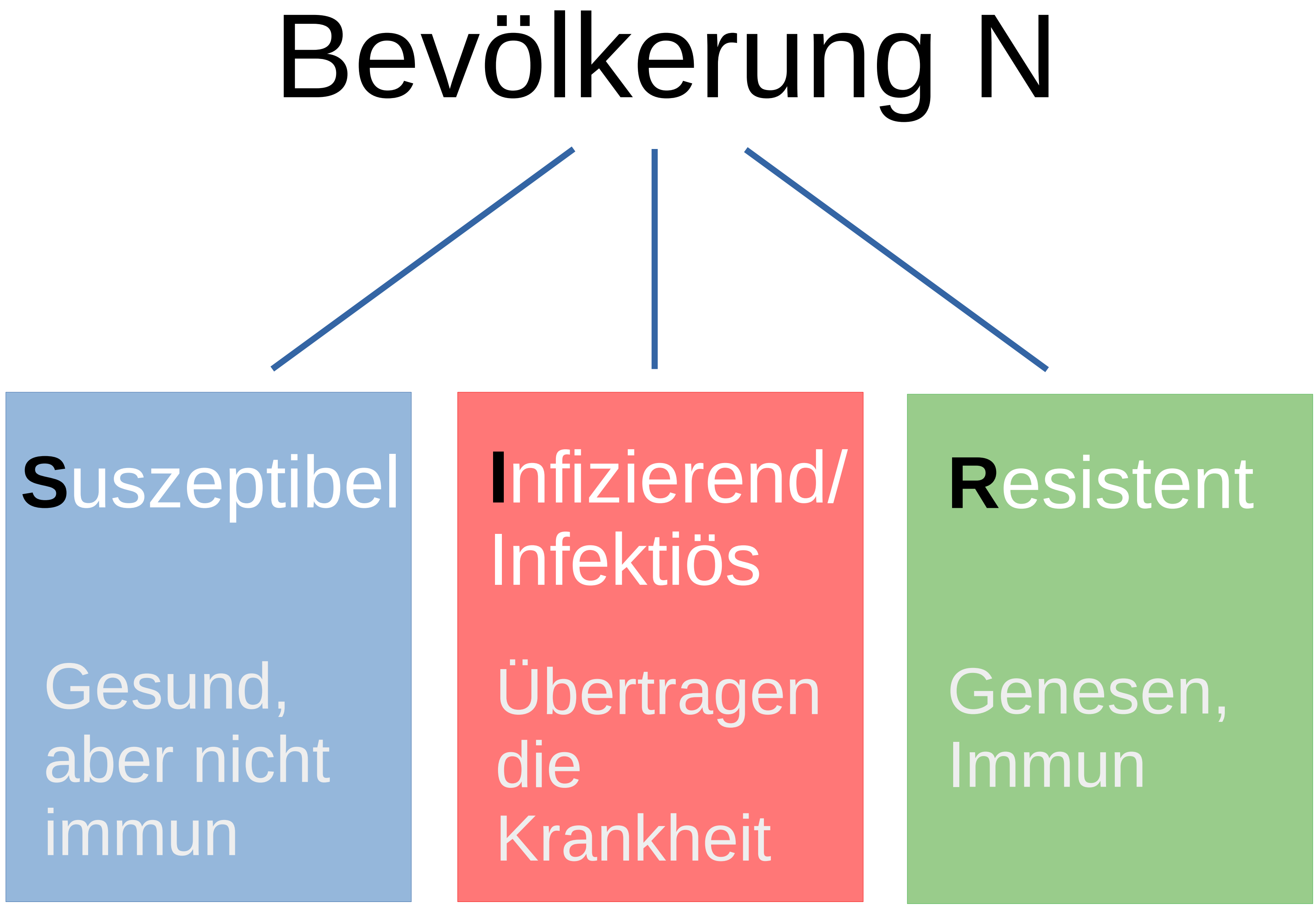
SIR-Modell

William Ogilvy
Kermack

Anderson Gray
McKendrick

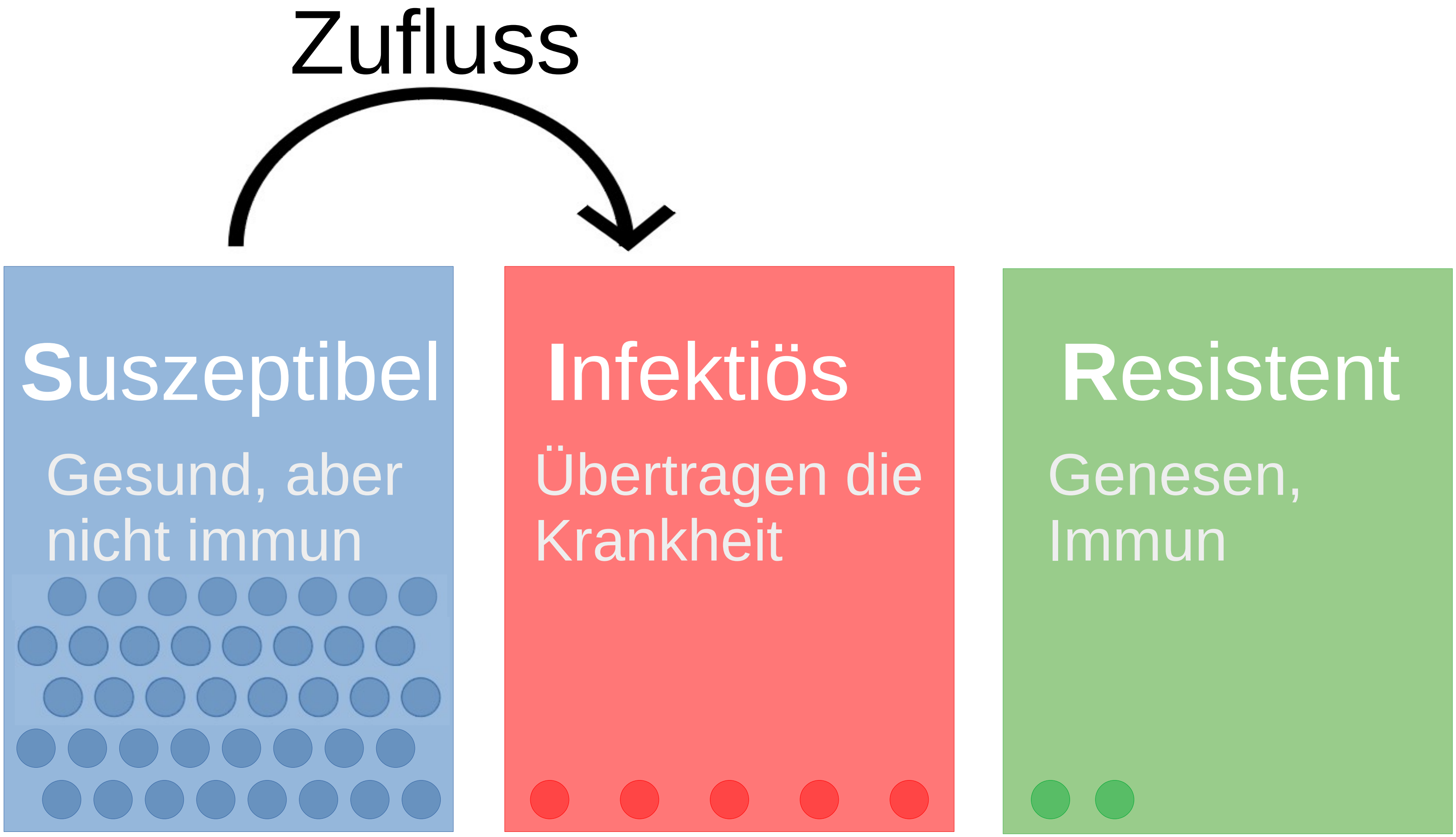
1927: *A contribution to the mathematical theory of epidemics I*

Bild: Link.Springer



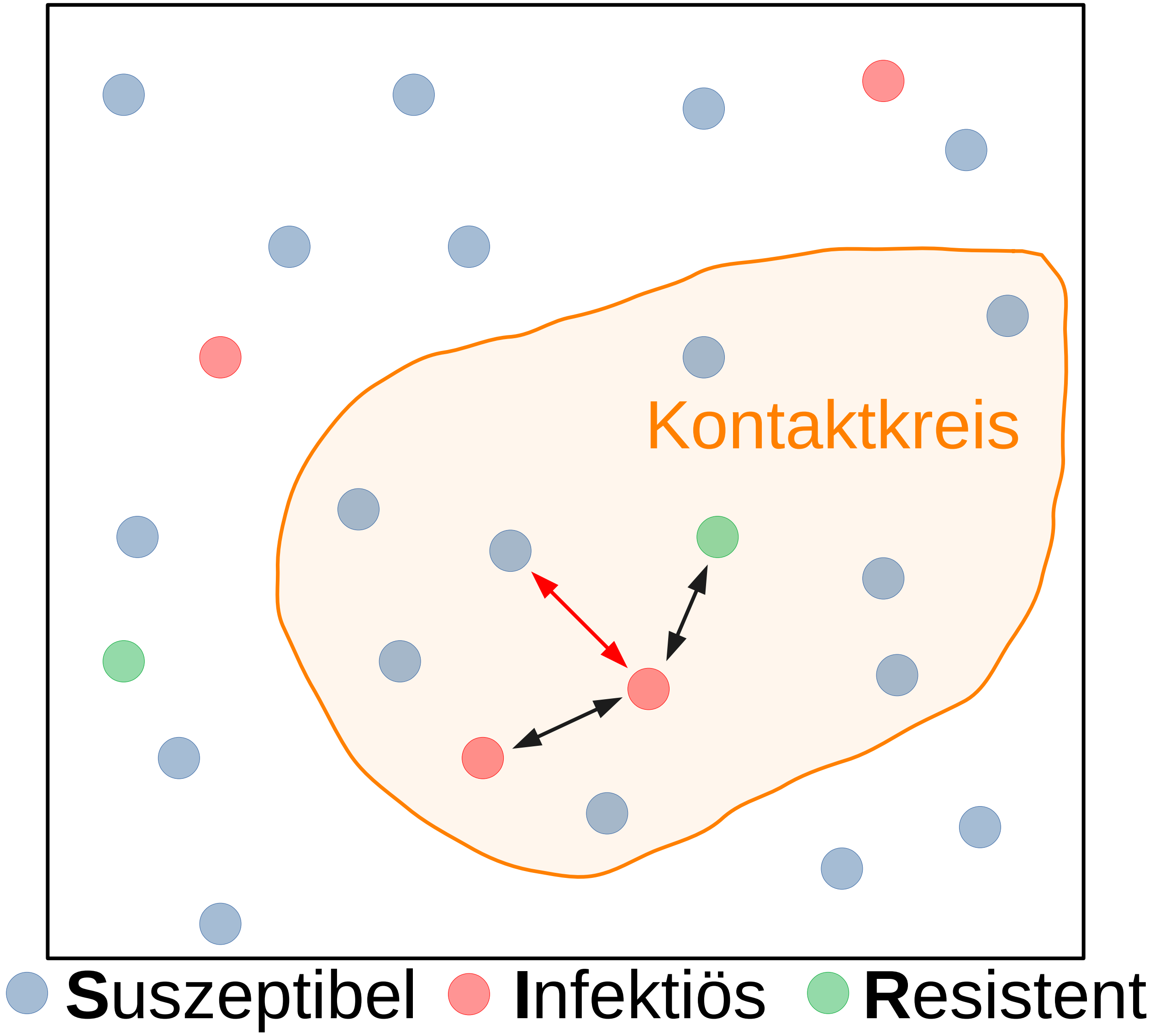
$S + I + R = N = \text{Konstant}$

Übergänge



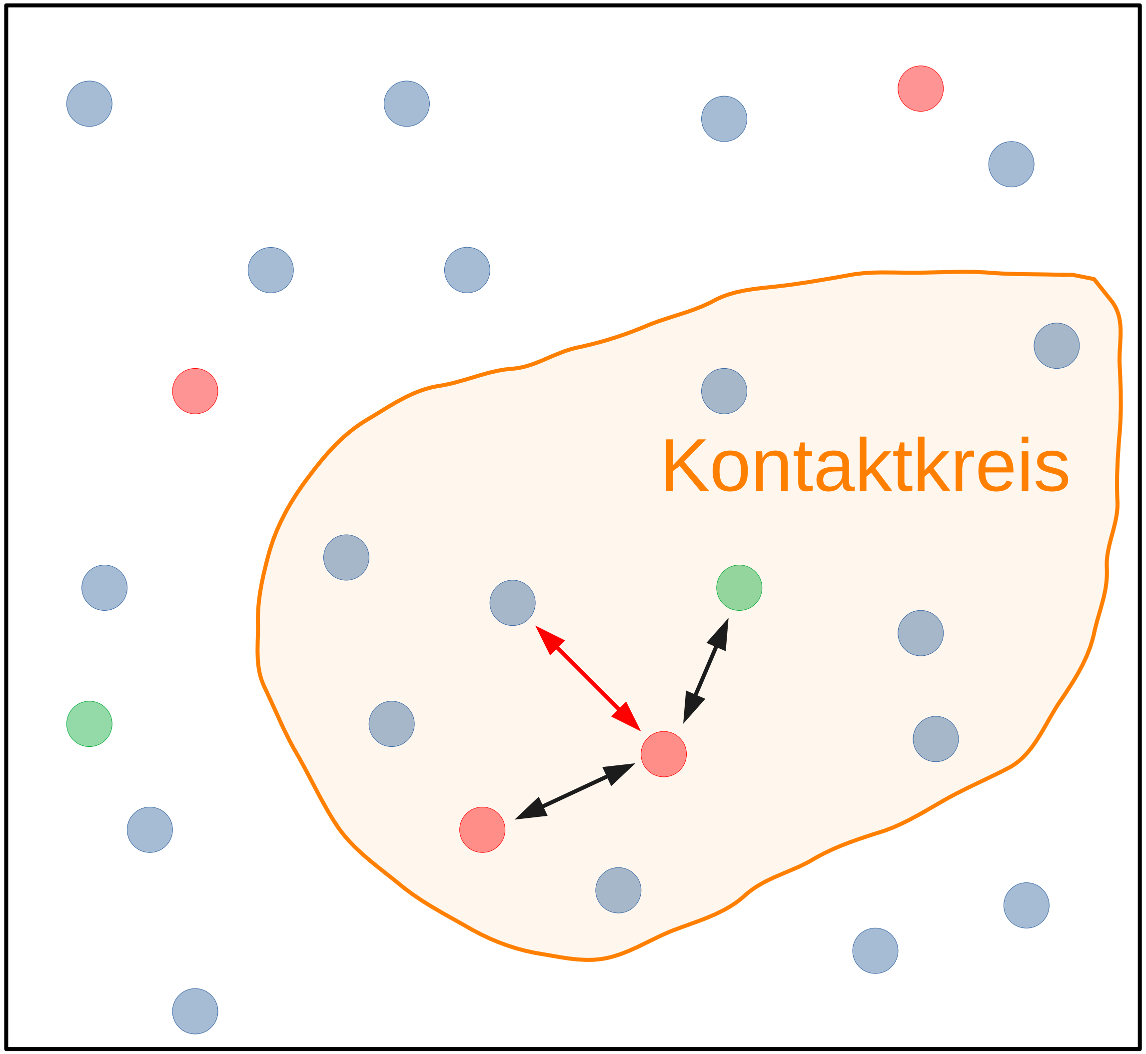
Zufluss
Suszeptibel
Gesund, aber nicht immun
Infektiös
Übertragen die Krankheit
Resistent
Genesen, Immun

Der Zufluss



Annahme:
Perfekt gemischter Kontaktkreis, Verhältnis von S,I,R wie in Bevölkerung

Der Zufluss



Suszeptibel **I**nfektiös **R**esistent

Infektiöser trifft
z.B. M= 3
Personen pro Tag

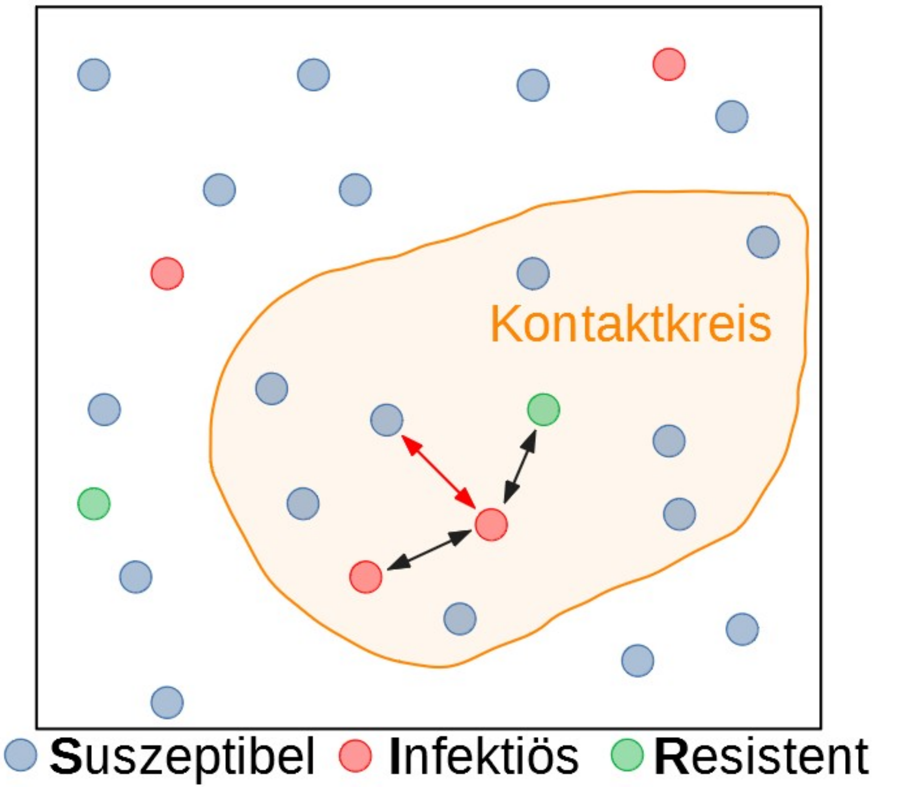
Was muss passieren, damit sich ein **S**uszeptibler ansteckt?

Der Zufluss

Was muss passieren, damit sich ein **S** ansteckt?

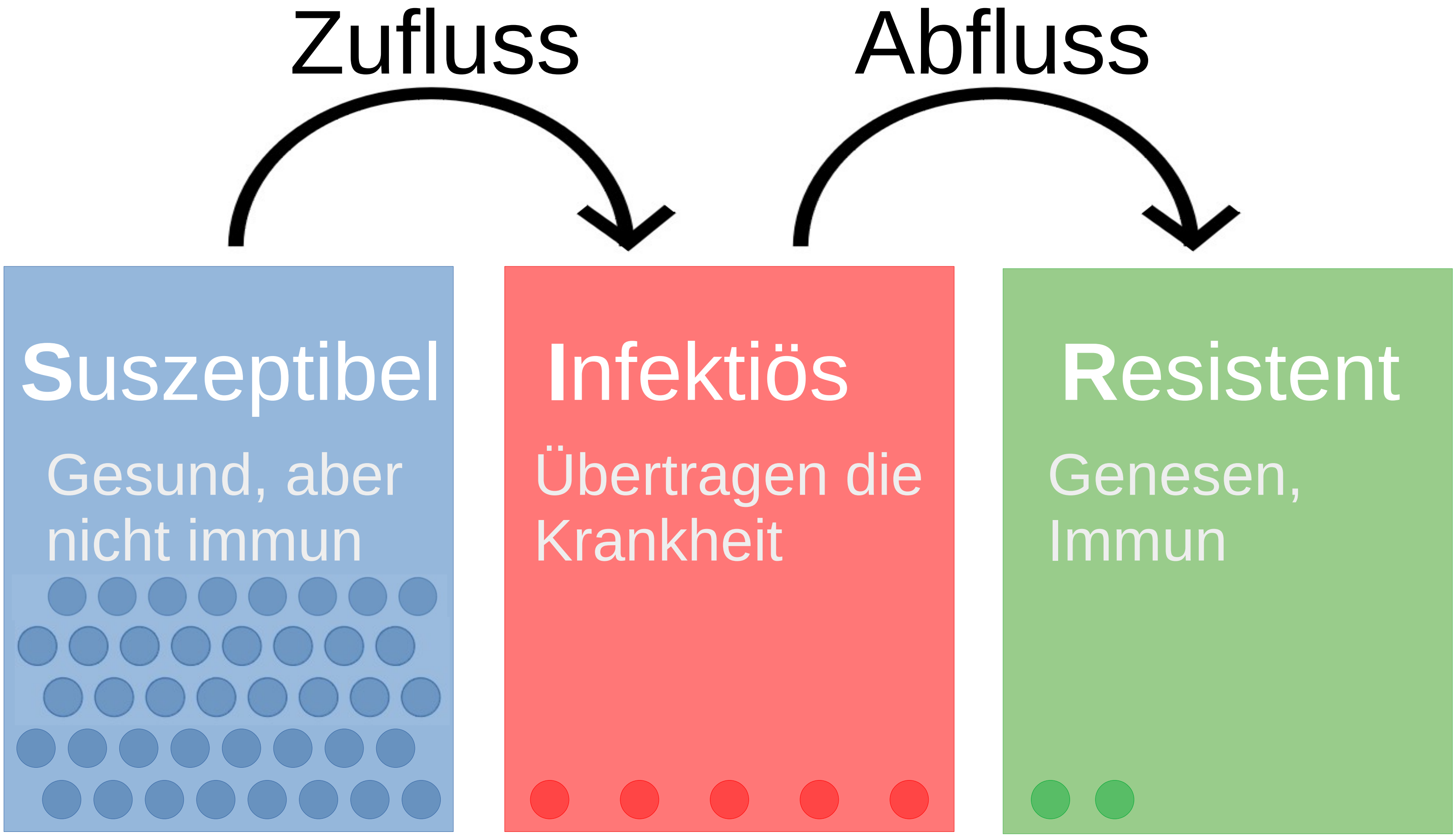
- Treffen zwischen **I** & **S**
  → *Wahrscheinlichkeit*

$$M \cdot \frac{S}{N}$$

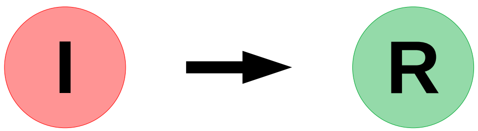


- Kontakt muss ansteckend sein
  → *Wahrscheinlichkeit* x

Übergänge

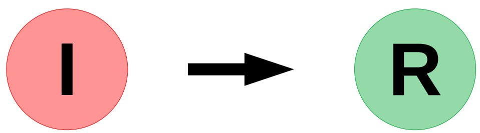

Zufluss
Abfluss
Suszeptibel
Gesund, aber nicht immun
Infektiös
Übertragen die Krankheit
Resistent
Genesen, Immun

Der Abfluss



Was muss passieren, damit ein Infizierter nicht mehr infektiös ist?

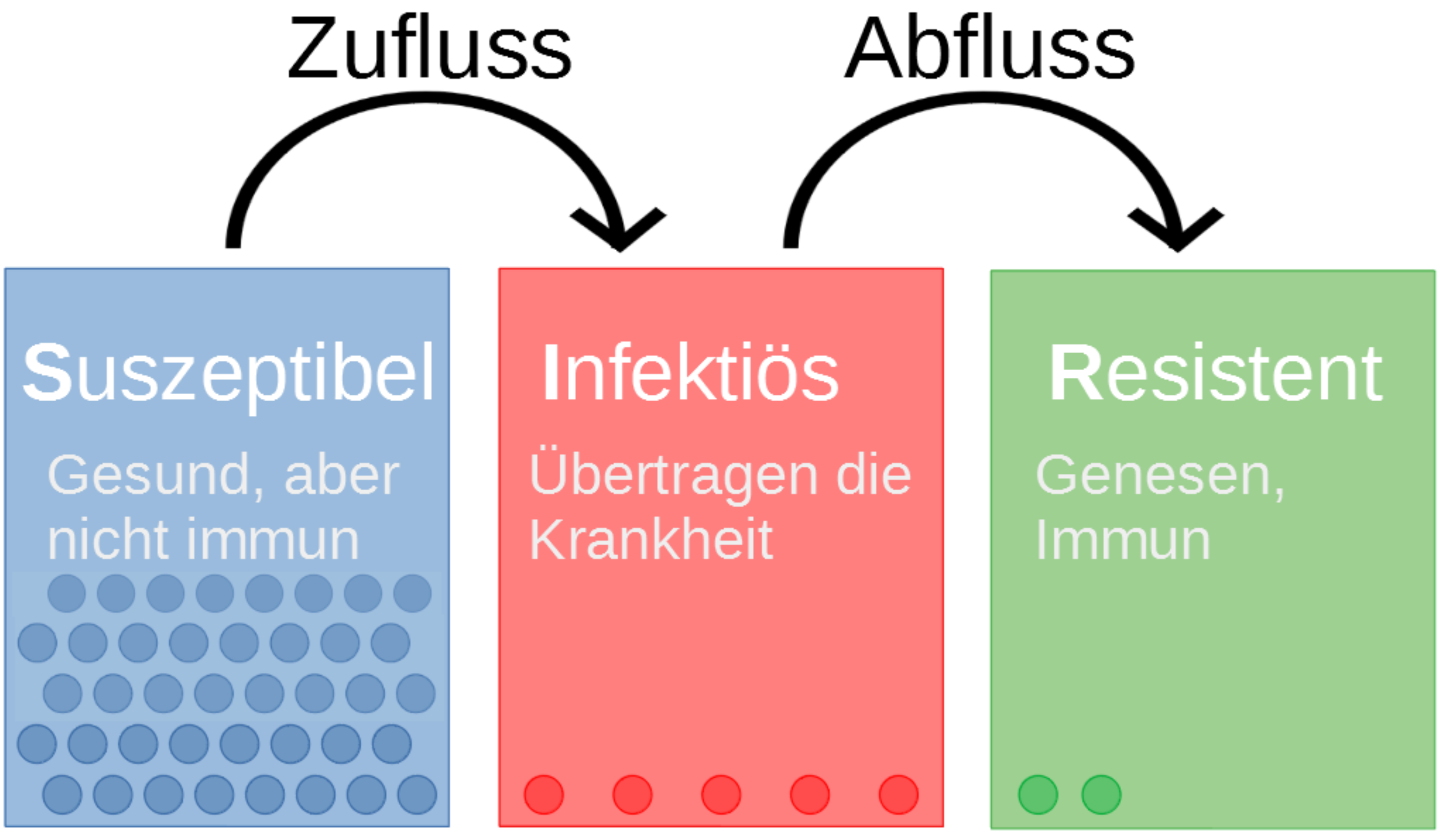
Der Abfluss



Was muss passieren, damit ein Infizierter nicht mehr infektiös ist?

- Er muss genesen oder isoliert werden
  - → Wahrscheinlichkeit, resistent zu werden, liegt bei $\gamma=1/\tau$
  - → im Durchschnitt ist dann jeder τ Tage krank

Vollständiges SIR-Modell

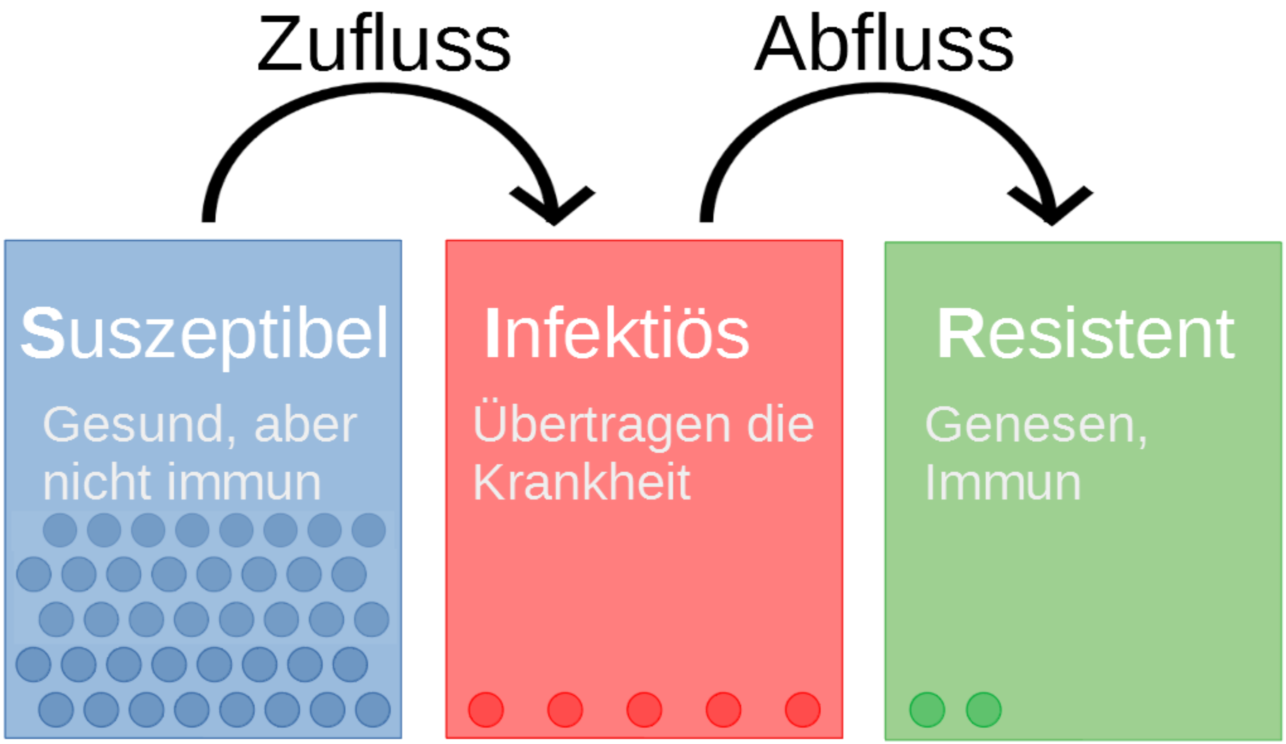


S(t+ 1)= S(t) – Zufluss

I(t+ 1)= I(t) + Zufluss – Abfluss

R(t+ 1)= R(t) + Abfluss

Vollständiges SIR-Modell



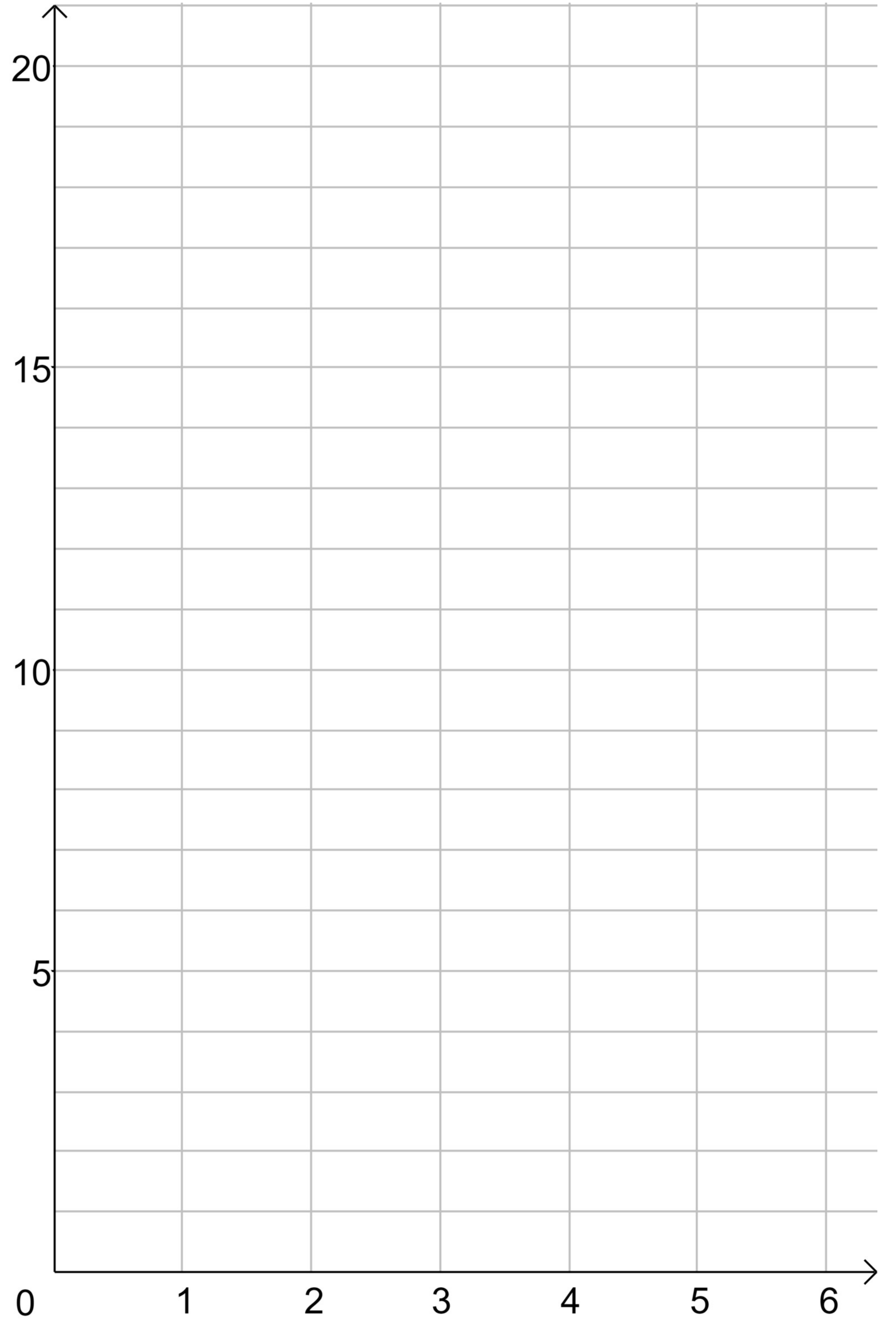
$$S(t+1) = S(t) - \beta \cdot \frac{S(t)}{N} \cdot I(t)$$

$$I(t+1) = I(t) + \beta \cdot \frac{S(t)}{N} \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t)$$

$$R(t+1) = R(t) + \gamma \cdot I(t)$$

Vergleich

Zeitlicher Verlauf
der Infizierten



Normiertes SIR-Modell

Notation:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N} \qquad i(t) = \frac{I(t)}{N} \qquad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Normierung über Division mit N:

Zufluss: $z = \frac{Z}{N}$

Abfluss: $a = \frac{A}{N}$

Normiertes SIR-Modell

Notation:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N} \qquad i(t) = \frac{I(t)}{N} \qquad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Normierung über Division mit N:

Zufluss: $$z = \frac{Z}{N} = -\beta \cdot \frac{S}{N} \cdot \frac{I}{N} = -\beta \cdot s \cdot i$$

Abfluss: $$a = \frac{A}{N} = \gamma \cdot \frac{I}{N} = \gamma \cdot i$$

Normiertes SIR-Modell

$$s(t+1) = s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)$$
$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$
$$r(t+1) = r(t) + \gamma \cdot i(t)$$

Begründe:

$$r(t+1) = 1 - s(t+1) - i(t+1) \quad \checkmark$$

Beweis für Richtigkeit

Setzen wir einfach mal ein:

$r(t+1)$

$= 1 – s(t+1) – i(t+1)$

$= 1 – [s(t) – \beta\cdot s(t)\cdot i(t)] – [i(t) + \beta\cdot s(t)\cdot i(t) - \gamma\cdot i(t)]$

$= 1 – s(t) + \beta\cdot s(t)\cdot i(t) – i(t) – \beta\cdot s(t)\cdot i(t) + \gamma\cdot i(t)$

Beweis für Richtigkeit

Setzen wir einfach mal ein:

$r(t+1)$

$= 1 - s(t+1) - i(t+1)$

$= 1 - [s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t)] - [i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) \ - \gamma \cdot i(t)]$

$= 1 - s(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) \ - i(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t) + \ \gamma \cdot i(t)$

$= 1 - s(t) - i(t) + \gamma \cdot i(t)$

$= r(t) + \gamma \cdot i(t)$

$S+I+R = N$

$s + i + r = 1$

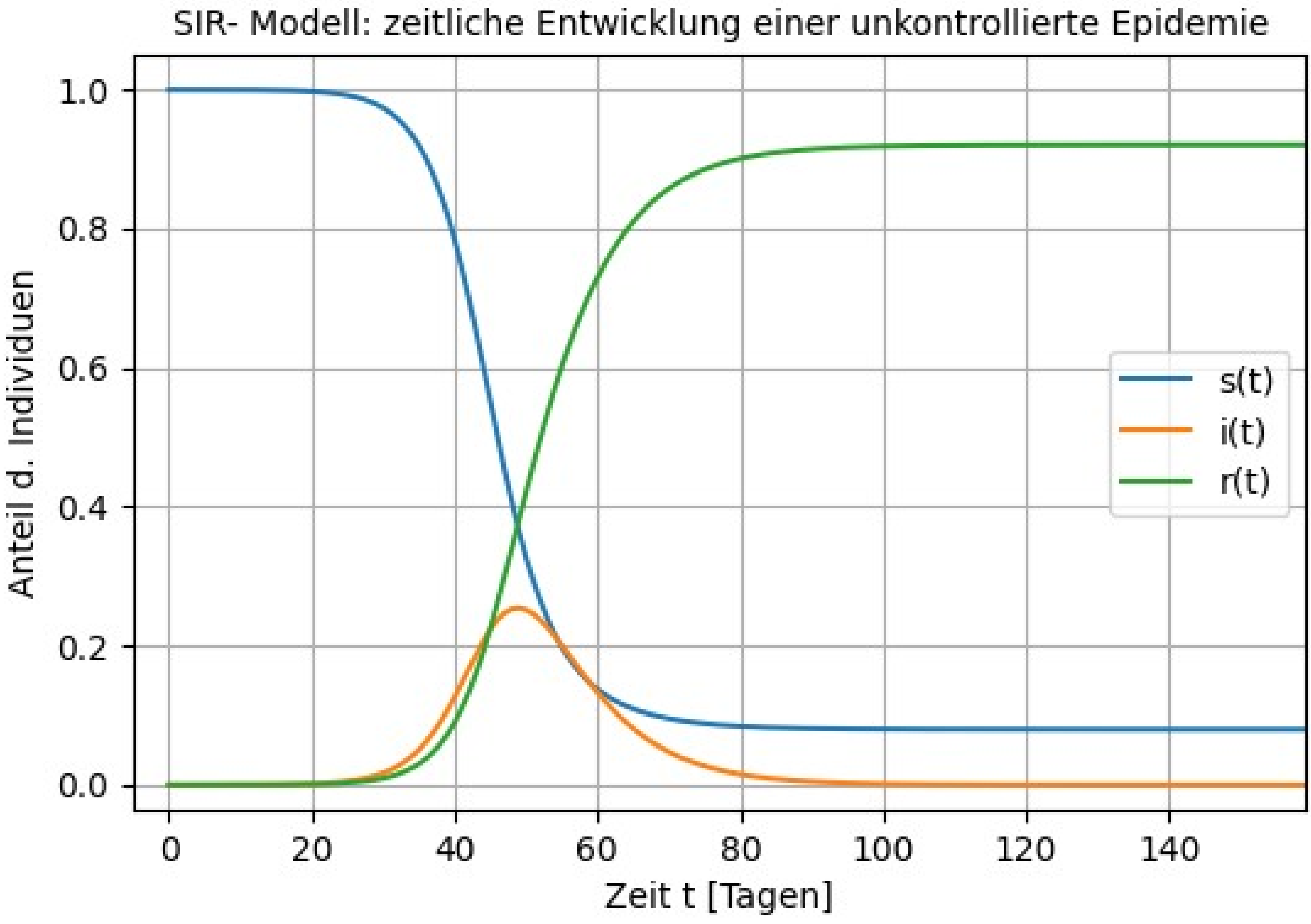
Wichtige Größen

- Gesamtanteil aller Erkrankten ν_i :
  - Alle Infizierten aufsummiert und mit γ multipliziert (keine Mehrfachzählung)
- 7-Tage-Inzidenz :
  - Alle Infizierten, die sich in einer Woche pro 100.000 Personen neu infiziert haben
  - Zufluss aus einer Woche pro 100.000

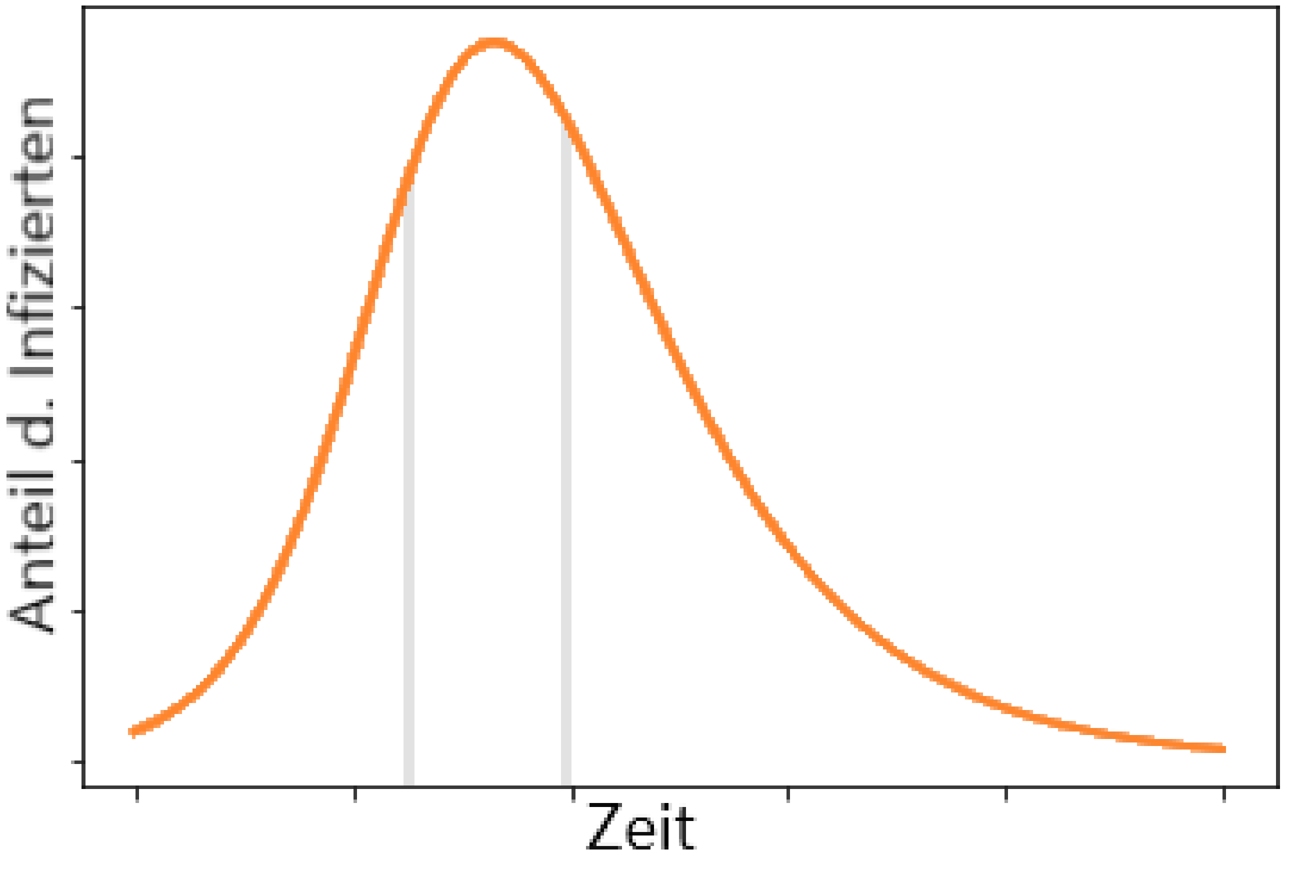
Praktikumsblock I

- Logt euch im Computer ein.
  Passwort: startstart
- Bearbeitet Blatt 6
- Hinweise zum Öffnen & Verwenden der Programme siehe Anleitung
- Zeit:

Epidemischer Verlauf



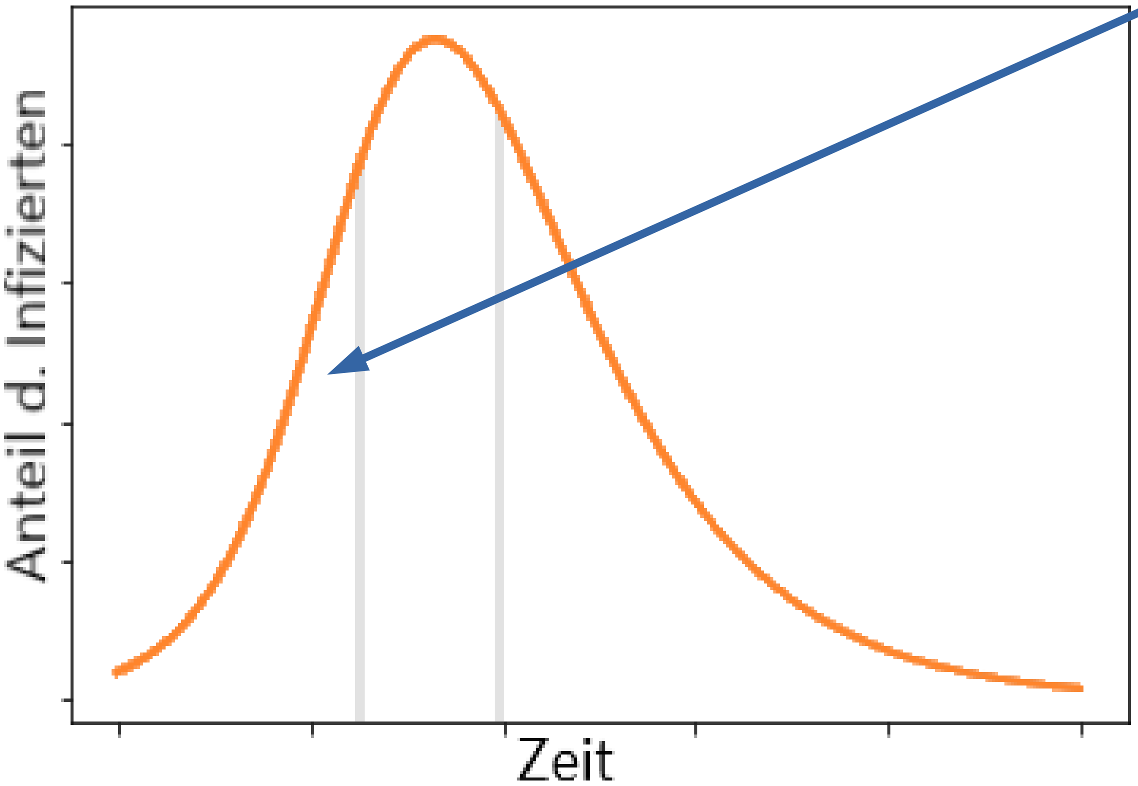
Wieso hat I ein Maximum?



Erkläre mit Hilfe der Gleichung:

$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$

Wieso hat I ein Maximum?

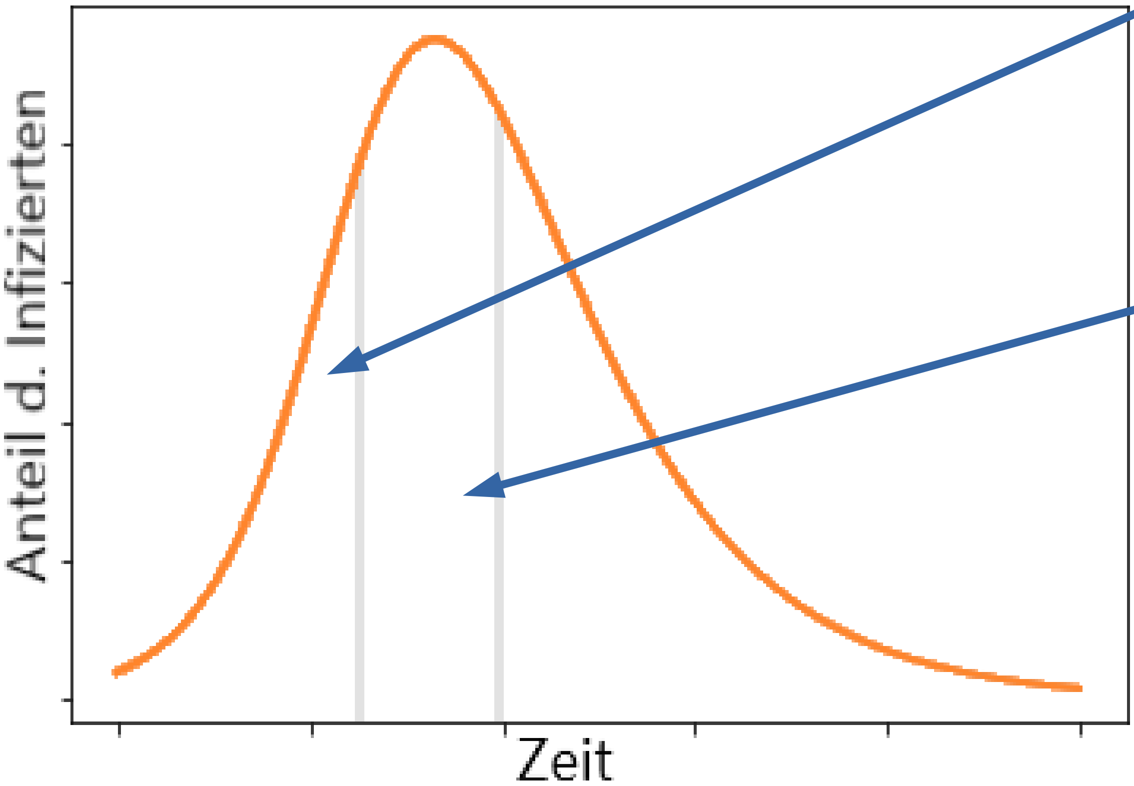


Exponentielles Wachstum

- Viele S infizieren sich
- Wenig I genesen

$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$

Wieso hat I ein Maximum?



Exponentielles Wachstum

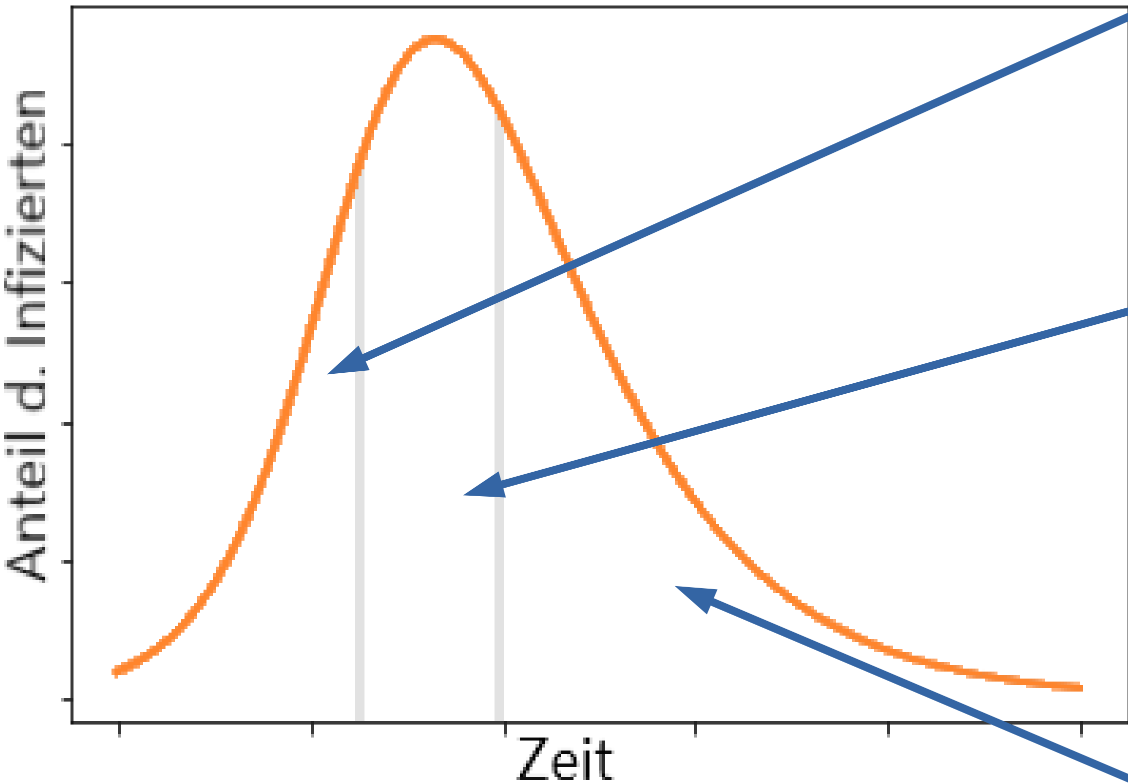
- Viele S infizieren sich
- Wenig I genesen

Maximum

- Immer weniger S, Wahrscheinlichkeit S zu treffen sinkt
- Gleichzeitig genesen I

$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$

Wieso hat I ein Maximum?



$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$

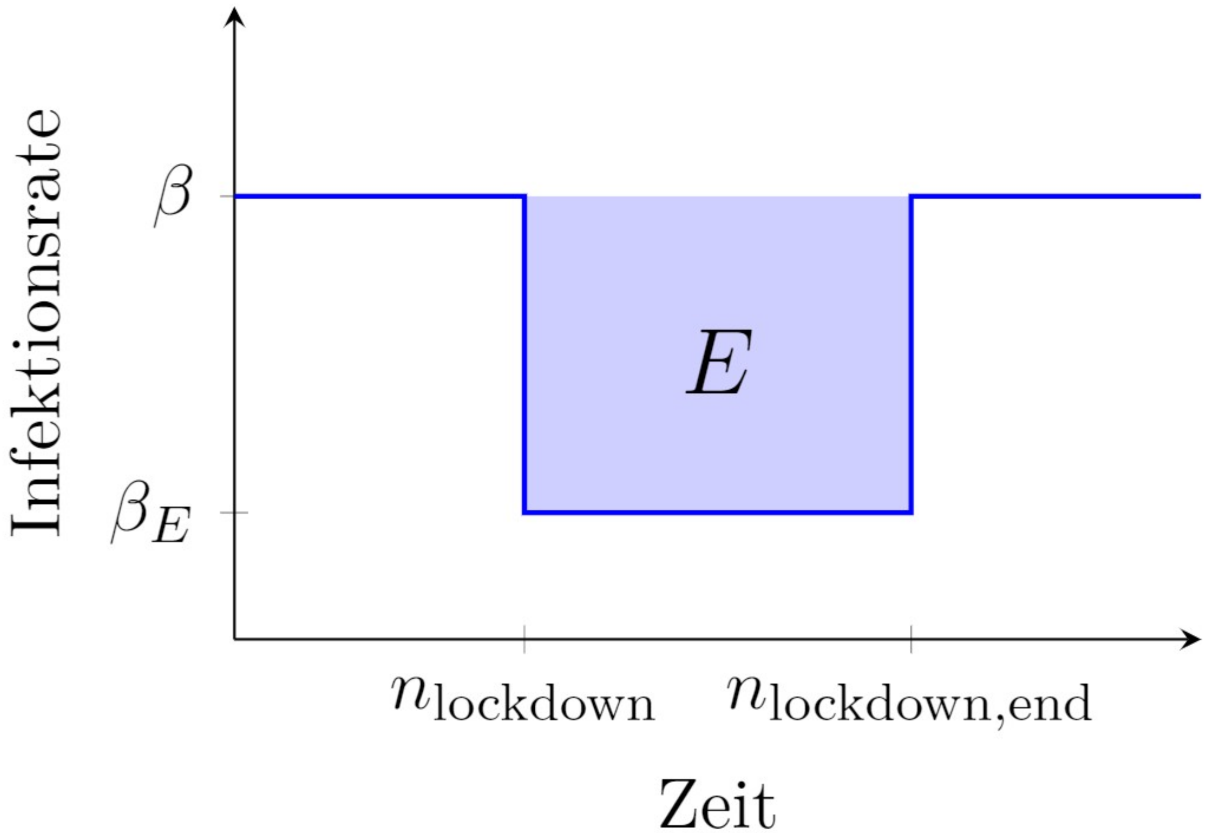
Exponentielles Wachstum
- Viele S infizieren sich
- Wenig I genesen

Maximum
- Immer weniger S, Wahrscheinlichkeit S zu treffen sinkt
- Gleichzeitig genesen I

Abklingen der Epidemie
- Kaum S mehr da
- Zufluss immer kleiner
- Abfluss überwiegt

Welche Kontrollmaßnahmen zur Eindämmung kennt ihr?

Reduktion d. Infektionsrate



Zeitliche Begrenzung durch Einsatzmittel/ Ressourcen E

Infektionsrate wird abgesenkt auf

$$\beta_E = \text{reduce} \cdot \beta$$

Beginn der Maßnahme bei nlockdown.

Ende wird berechnet über: $n_{\text{lockdown, end}} = n_{\text{lockdown}} + \frac{E}{\beta - \beta_E}$

Übergang von S nach R

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{s} \arrow[r, "\text{Zufluss}"'] \arrow[rr, bend left] & \boldsymbol{i} \arrow[r, "\text{Abfluss}"'] & \boldsymbol{r} \end{tikzcd}$$

Jeden Tag wird ein Teil der **S**uszeptiblen immunisiert/ resistent.

Annahmen:
- Immunisierung wirkt sofort und zu 100%
- ist von Ressourcen **unabhängig**
- Übergangsrate zeitlich konstant

Ab dem Tag nvacc werden jeden Tag α Prozent der Suszeptiblen immunisiert

Übergang von S nach R

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \boldsymbol{s} \arrow[r, "\text{Zufluss}"'] \arrow[rr, bend left] & \boldsymbol{i} \arrow[r, "\text{Abfluss}"'] & \boldsymbol{r} \end{tikzcd}$$

Ab dem Tag nvacc werden jeden Tag α Prozent der Suszeptiblen immunisiert

$$s(t+1) = s(t) - \beta \cdot s(t) \cdot i(t) \boldsymbol{- \alpha \cdot s(t)}$$

$$i(t+1) = i(t) + \beta \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t)$$

$$r(t+1) = r(t) + \gamma \cdot i(t) \boldsymbol{+ \alpha \cdot s(t)}$$

Nutzen

Um die Maßnahmen evaluieren zu können, definieren wir uns den Nutzen:

Die Anzahl/ der Anteil der Menschen, der sich durch die Maßnahme nicht mehr infizieren wird.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Nutzen} = \nu_i^0 - \nu_i^+}$$

Gesamtanteil der Erkrankten ohne Eingriff ν_i^0

Gesamtanteil der Erkrankten mit Eingriff ν_i^+

Praktikumsblock II

- Ggf. Login über: startstart
- Bearbeitet Blatt 11 und 14
- Zeit:

Bild: Trueffelpix- Fotolia

Diskussion

2025

Forscher entdecken in Deutschland neuen, höchst ansteckenden Erreger

Wie geht ihr vor?