Lista 2 - Mecânica de Sistemas Inteligentes - COM783

Matheus Schueler de Carvalho

Setembro, 2025

Questão 1)

Considera-se regime isotérmico, pequenas deformações e magnetostática (sem correntes livres e sem histerese macroscópica). Os pares conjugados são $(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ e $(\mathbf{H}, \dot{\mathbf{B}})$. A desigualdade local de Clausius–Duhem, na ausência de fluxo de calor, fica

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \ + \ \mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} \ - \ \dot{\psi} \ \geq 0. \tag{1}$$

Adota-se a energia livre de Helmholtz por volume $\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B})$. Em processos reversíveis, exige-se $\mathcal{D} \equiv 0$ em (1), o que impõe as identidades termodinâmicas

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}. \tag{2}$$

Modelo linear:

No entorno de um ponto de operação, toma-se a forma quadrática com acoplamento magnetoelástico:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B}) = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{B} - \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{e} \cdot \mathbf{B}, \tag{3}$$

onde $\mathbb{C}$ é o tensor de rigidez elástica (quarta ordem), $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu}^{-1}$ é a relutividade magnética (segunda ordem) e $\mathbf{e}$ é o tensor de acoplamento magnetoelástico (terceira ordem).

A partir de (2)–(3), obtém-se as erelações constitutivas lineares:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{B}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{e}^T : \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{4}$$

Com as seguintes formas invertidas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\left(\mathbb{C}^{-1} + \mathbb{C}^{-1}\mathbf{e}\,\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{e}^T\mathbb{C}^{-1}\right)}_{\mathbb{S}} : \boldsymbol{\sigma} \ - \ \underbrace{\mathbb{C}^{-1}\mathbf{e}\,\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{H}, \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \underbrace{\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{e}^T\mathbb{C}^{-1}}_{\mathbf{d}^T} : \boldsymbol{\sigma} \ + \ \underbrace{\left(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}^T\mathbb{C}^{-1}\mathbf{e}\right)^{-1}}_{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{H}. \tag{6}$$

Aqui, $\mathbb{S}$ é o *compliance* a $\mathbf{H}$ fixo, $\mathbf{d}$ é o coeficiente piezomagnético (”strain por campo”) e $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}^T\mathbb{C}^{-1}\mathbf{e})^{-1}$ é a permeabilidade efetiva a $\boldsymbol{\sigma}$ constante.

A hessiana de ψ em $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B})$ é

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & -\mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T & \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix}.$$

Requer-se que $\mathbb{H} > 0$. Uma condição suficiente é $\mathbb{C} > 0$, $\boldsymbol{\nu} > 0$ e acoplamento moderado tal que $\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}^T\mathbb{C}^{-1}\mathbf{e} > 0$, garantindo também $\boldsymbol{\mu} > 0$.

Redução para a forma uniaxial:

Para um caso uniaxial com $C > 0$, $\nu > 0$ e $e \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\varepsilon, B) = \tfrac{1}{2}C\,\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\nu\,B^2 - e\,\varepsilon B \;\Rightarrow\; \begin{cases} \sigma = C\,\varepsilon - e\,B, \\ H = \nu\,B - e\,\varepsilon. \end{cases} \tag{7}$$

Invertendo,

$$\varepsilon = \big(C^{-1} + C^{-1}e\,\mu\,e\,C^{-1}\big)\,\sigma - C^{-1}e\,\mu\,H, \qquad B = \mu\,e\,C^{-1}\sigma + \mu\,H, \quad \mu = (\nu - e\,C^{-1}e)^{-1} > 0.$$

Questão 2)

Seguindo Brinson (1993), em 1D usa-se a forma incremental $\dot\sigma = \mathcal{C}\,\dot\varepsilon + \gamma\,\dot\beta + \Theta\,\dot T$, que, para funções materiais constantes por trechos, integra para:

$$\sigma - \sigma_0 = \mathcal{C}\,(\varepsilon - \varepsilon_0) + \gamma\,(\beta - \beta_0) + \Theta\,(T - T_0), \tag{8}$$

onde β é a fração de martensita e Θ é o coeficiente termoelástico (MPa/°C). Brinson redefine a variável interna separando martensita em duas partes:

$$\beta = \beta_T + \beta_S, \tag{9}$$

sendo β_T a martensita induzida por temperatura (maclada) e β_S a martensita induzida por tensão (não-maclada/demaclada). [**?**, **?**]

Adota-se mistura linear para o módulo:

$$E(\beta) = E_a + \beta\,(E_m - E_a), \qquad (E_a, E_m > 0), \tag{10}$$

e toma-se $\gamma_S\,\beta = -\,E(\beta)\,\varepsilon_R$, $\gamma_T = 0$, o que reflete que apenas β_S produz deformação de transformação uniaxial (demaclagem). Substituindo (10) em (8) e isolando ε obtemos a lei constitutiva (1D):

$$\sigma = E(\beta)\,\big[\varepsilon - \varepsilon_R\,\beta_S\big] + \Theta\,(T - T_0)\,. \tag{11}$$

Esta é a forma 1D do modelo de Brinson com variável interna re-definida.

A evolução β_S, β_T é dada por leis de cossenos por trechos, com superfícies críticas lineares em T:

- **A→M$^+$** (carregamento, $T > M_s$): $\sigma_s^{\text{fwd}}(T) = \sigma_s^{cr} + C_M\,(T - M_s)$, $\sigma_f^{\text{fwd}}(T) = \sigma_f^{cr} + C_M\,(T - M_s)$. Para $\sigma \in [\sigma_s^{\text{fwd}}, \sigma_f^{\text{fwd}}]$,

  $$\beta_S(\sigma) = \beta_{S0} + \frac{1 - \beta_{S0}}{2}\left[1 - \cos\!\Big(\pi\,\frac{\sigma - \sigma_s^{\text{fwd}}}{\sigma_f^{\text{fwd}} - \sigma_s^{\text{fwd}}}\Big)\right].$$

  Abaixo de σ_s^{fwd}, $\beta_S = \beta_{S0}$; acima de σ_f^{fwd}, $\beta_S = 1$.

- **M$^+$→A** (descarregamento, $T > A_s$): $\sigma_s^{\text{rev}}(T) = C_A\,(T - A_s)$, $\sigma_f^{\text{rev}}(T) = C_A\,(T - A_f)$. Para $\sigma \in [\sigma_f^{\text{rev}}, \sigma_s^{\text{rev}}]$,

  $$\beta_S(\sigma) = \frac{\beta_S^\star}{2}\left[1 + \cos\!\Big(\pi\,\frac{\sigma_s^{\text{rev}} - \sigma}{\sigma_s^{\text{rev}} - \sigma_f^{\text{rev}}}\Big)\right],$$

  onde $\beta_S^\star$ é o valor de β_S no início da reversão (quando σ atinge σ_s^{rev}).

- **A→M (maclada)** no resfriamento a $\sigma = 0$: para $T \in [M_s, M_f]$,

$$\beta_T(T) = \tfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\pi \frac{M_s - T}{M_s - M_f}\right)\right],$$

  de modo que $\beta_T = 0$ em $T = M_s$ e $\beta_T = 1$ em $T = M_f$.

- **M$^+$→A** no aquecimento a $\sigma = 0$: para $T \in [A_s, A_f]$,

$$\beta_S(T) = \frac{\beta_{S0}}{2}\left[1 + \cos\left(\pi \frac{T - A_s}{A_f - A_s}\right)\right],$$

  levando β_S de β_{S0} (em A_s) até 0 (em A_f).

Considerando os parâmetros numéricos fornecidos:

$$E_a = 67 \times 10^3 \text{ MPa}, \quad E_m = 26.3 \times 10^3 \text{ MPa}, \quad \varepsilon_R = 0.067, \quad \Theta = 0.55 \text{ MPa/°C},$$
$$M_f = 9\text{°C}, \; M_s = 18.4\text{°C}, \; A_s = 34.5\text{°C}, \; A_f = 49\text{°C},$$
$$C_M = 8 \text{ MPa/°C}, \; C_A = 13.8 \text{ MPa/°C}, \; \sigma_s^{cr} = 100 \text{ MPa}, \; \sigma_f^{cr} = 170 \text{ MPa}.$$

Os cenários solicitados são mostrados abaixo.

Cenário (i): Pseudoelasticidade (PE) ($T = 60°$C, $T > A_f$)

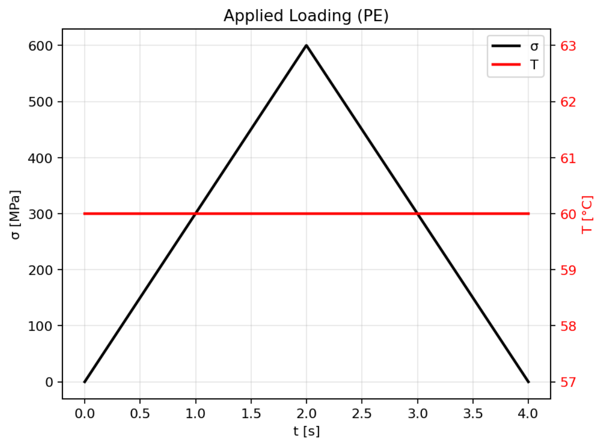

Figure 1: Carregamento aplicado (PE): $\sigma(t)$ e $T(t)$.

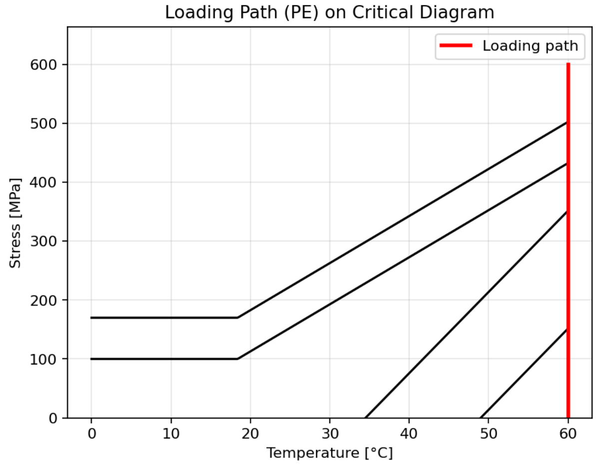

Figure 2: Caminho do carregamento no diagrama σ crítico × T crítico (PE).

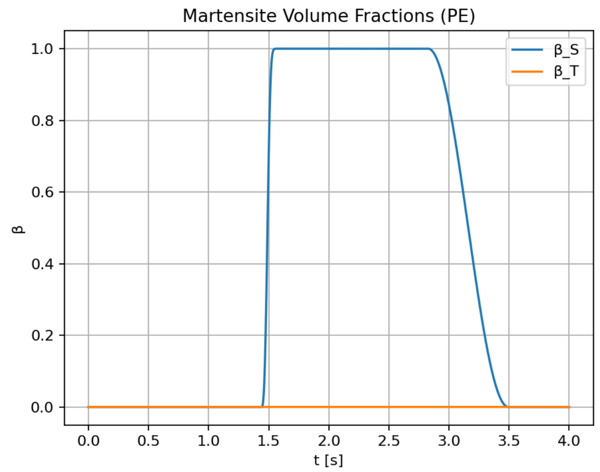

Figure 3: Fração de martensita ao longo do tempo (PE): $\beta_S(t)$ e $\beta_T(t)$.

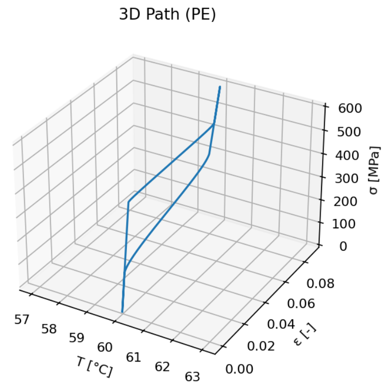

Figure 4: Caminho 3D $[T, \sigma, \varepsilon]$ (PE).

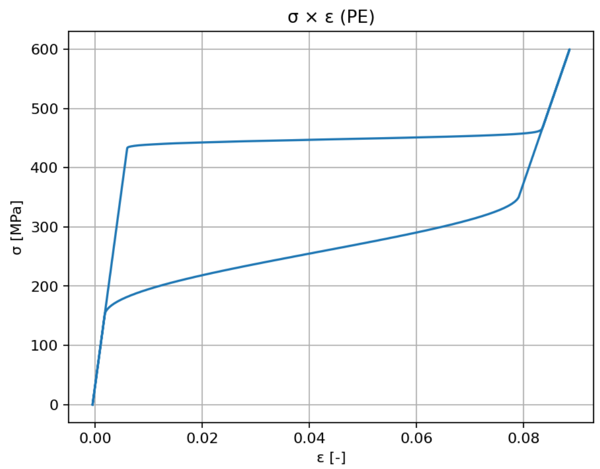

Figure 5: Laço $\sigma \times \varepsilon$ (PE).

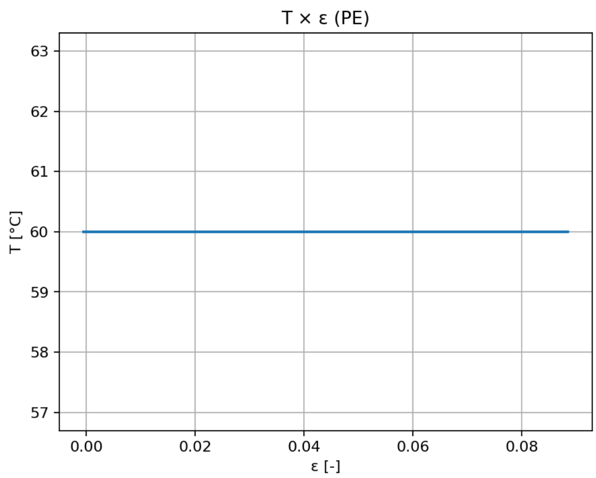

Figure 6: $T \times \varepsilon$ (PE).

Cenário (ii): Efeito Memória de Forma ($\sigma = 0$, estado inicial M^+ não-maclada)

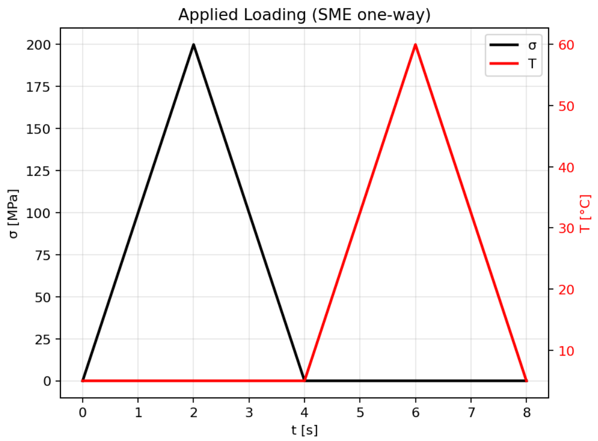

Figure 7: Carregamento aplicado (SME one-way).

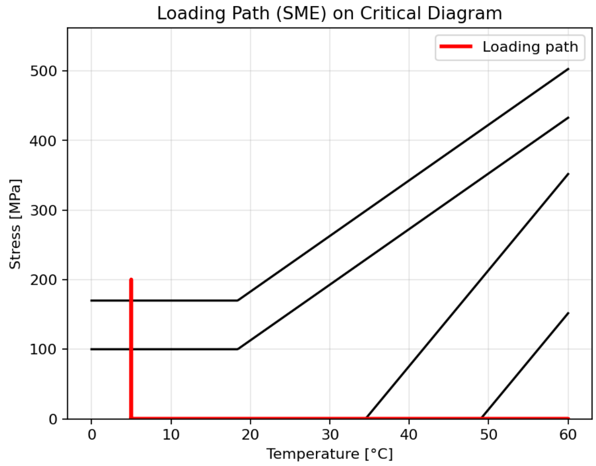

Figure 8: Caminho do carregamento no diagrama σ crítico $\times$ T crítico (SME one-way).

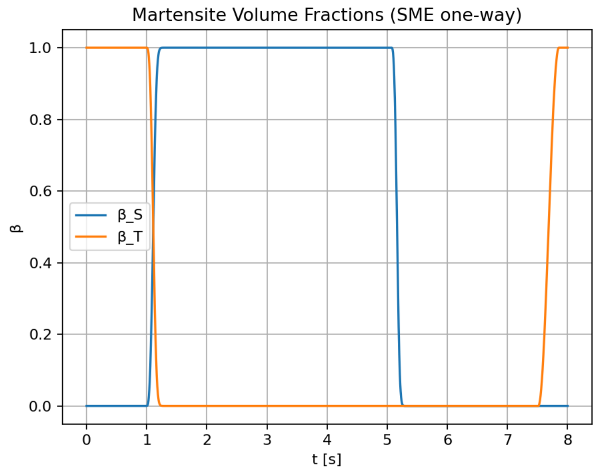

Figure 9: Fração de martensita ao longo do tempo (SME): $\beta_S(t)$ e $\beta_T(t)$.

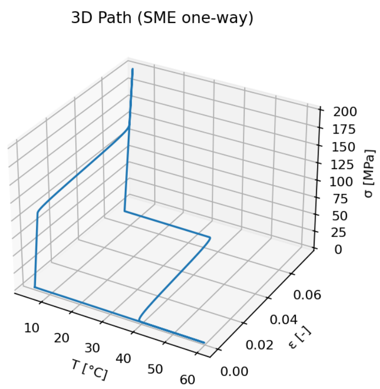

Figure 10: Caminho 3D $[T, \sigma, \varepsilon]$ (SME one-way).

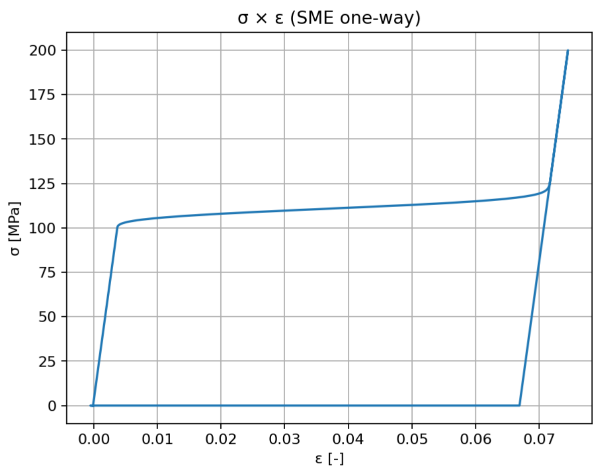

Figure 11: $\sigma \times \varepsilon$ (SME one-way).

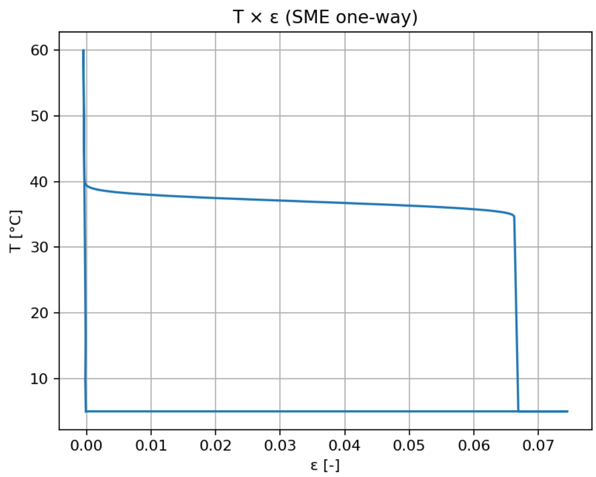

Figure 12: $T \times \varepsilon$ (SME one-way).

Questão 3)

As equações eletromecânicas do coletor linear são:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x - \vartheta v = A\sin(\omega t), \qquad C_p\dot{v} + \frac{v}{R} + \vartheta\dot{x} = 0. \tag{12}$$

Para o coletor biestável, a restituição é não linear:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 - \vartheta v = A\sin(\omega t), \qquad C_p\dot{v} + \frac{v}{R} + \vartheta\dot{x} = 0. \tag{13}$$

No modelo não-suave com batente::

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x - \vartheta v = A\sin(\omega t), \qquad x(t) < g, \tag{14}$$

$$\ddot{x} + 2(\zeta\omega_n + \zeta_b\omega_b)\dot{x} + \omega_n^2 x + \omega_b^2(x-g) - \vartheta v = A\sin(\omega t), \qquad x(t) \geq g, \tag{15}$$

$$C_p\dot{v} + \frac{v}{R} + \vartheta\dot{x} = 0. \tag{16}$$

No regime permanente, a potência média dissipada na carga (e colhida) é:

$$P_m = \frac{1}{t_f - t_0}\int_{t_0}^{t_f} \frac{v(t)^2}{R}\,dt = \frac{v_{\mathrm{RMS}}^2}{R}. \tag{17}$$

Parâmetros de referência:

Foram utilizados os valores: $\zeta = 0.025$, $\omega_n = 25$ rad/s, $\vartheta = 4.5 \times 10^{-3}$ N/V, $C_p = 4.2 \times 10^{-8}$ F, $R = 100$ kΩ; biestável: $\alpha = 1$, $\beta = 10^4$; batente: $\zeta_b = 0.025$, $\omega_b = 1500$ rad/s (reduzido de 5000 rad/s para integração estável com passo fixo) e $g \in \{0.002, 0.005, 0.01\}$ m. As varreduras para realizar as comparações consideram $A \in \{2.5, 5, 9.81\}$ m/s^2 e $\omega \in [5, 45]$ rad/s.

As EDOs são integradas por RK4 de passo fixo; o transiente é descartado e v_{RMS} é calculado a partir da janela estacionária. O código Python encontra-se em anexo.

Resultados das comparações

Influência da amplitude da excitação A.

Fig. 13, Fig. 14 e Fig. 15 mostram $P_m \times \omega$ para $A = 2.5$ m/s^2, $A = 5$ m/s^2 e $A = 9.81$ m/s^2, respectivamente.

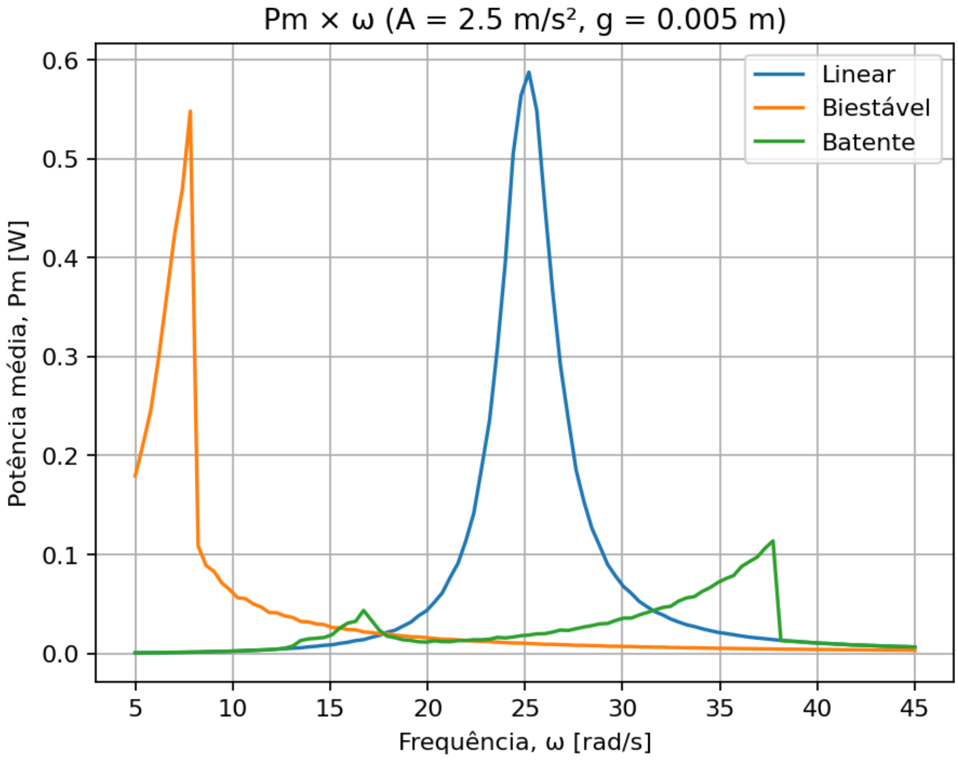

Figure 13: $P_m \times \omega$ para $A = 2.5$ m/s^2.

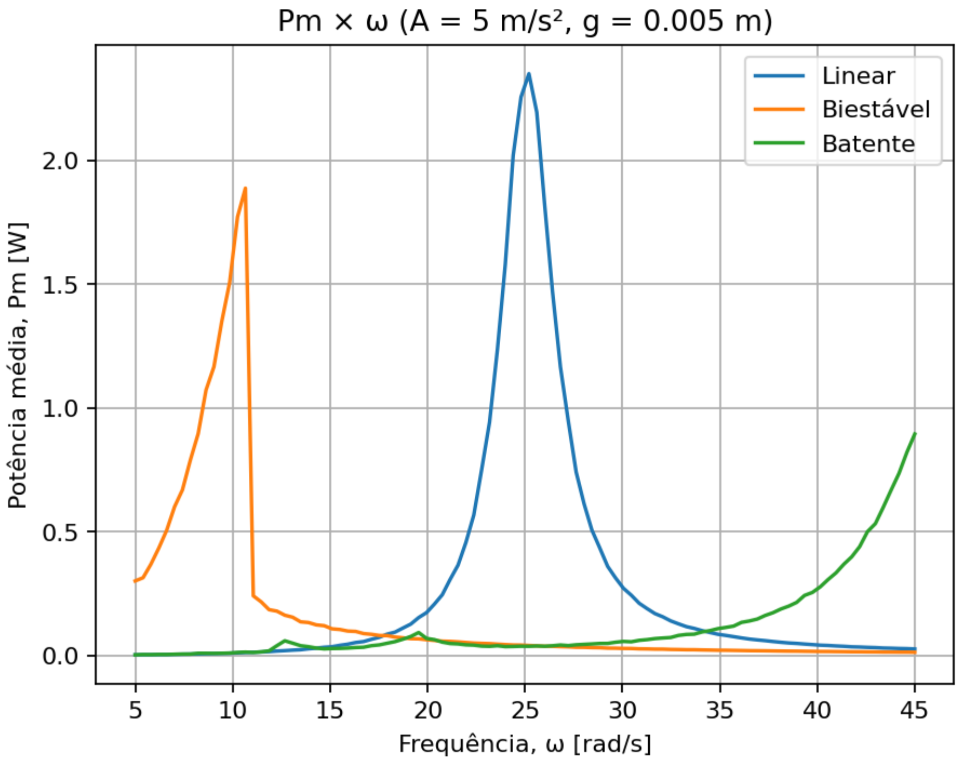

Figure 14: $P_m \times \omega$ para $A = 5$ m/s^2.

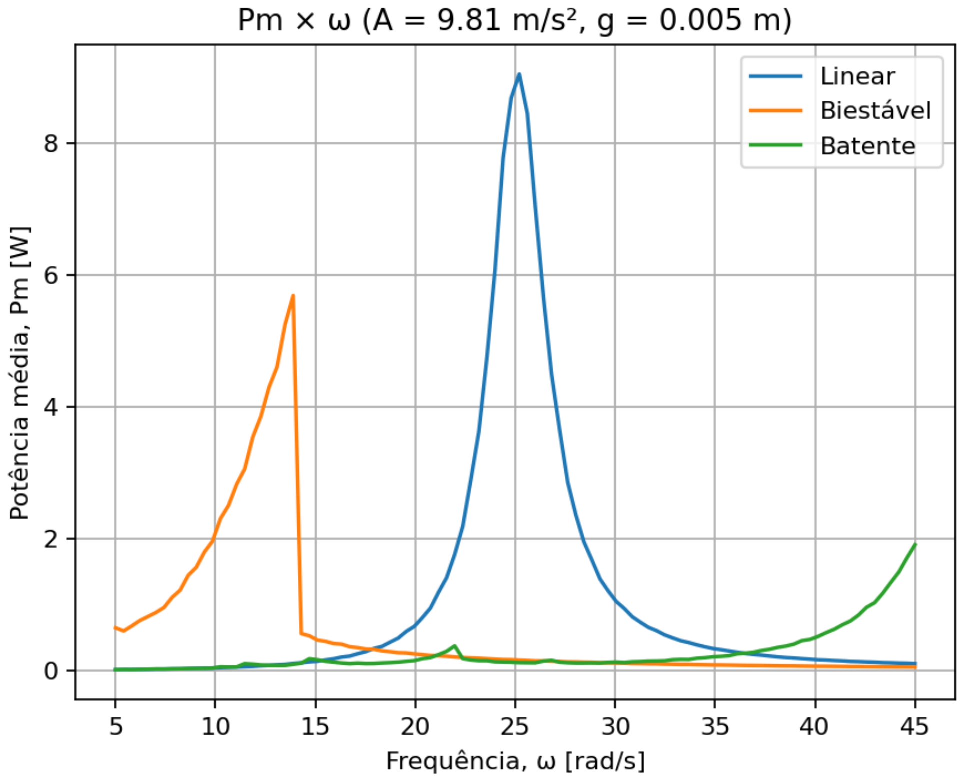

Figure 15: $P_m \times \omega$ para $A = 9.81$ m/s^2.

Efeito do batente (gap g).
A Fig. 16 mostra $P_m \times \omega$ para o sistema com batente e $g = 0.001$, $g = 0.002$, 0.005 e 0.010 m.

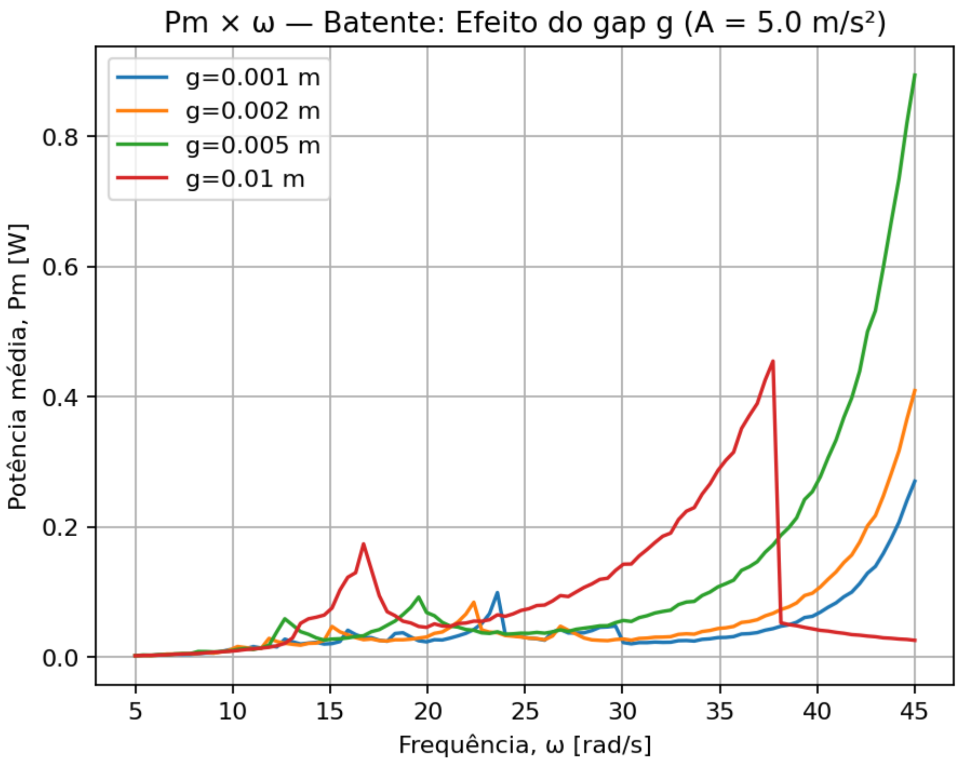

Figure 16: Batente: $P_m \times \omega$ para diferentes g's (A = 5.0 m/s^2).

Tabela-resumo (picos e largura de banda).
A Tab. 1 resume $P_{\max}$, frequência de pico e largura de banda de 50%.

Caso	Sistema	$P_{\max}$ [W]	ω_{pico} [rad/s]	Largura 50% [rad/s]
A=2.5	Linear	0.587	25.202	2.828
A=2.5	Biestável	0.548	7.828	1.616
A=2.5	Batente	0.114	37.727	4.040
A=5	Linear	2.350	25.202	2.828
A=5	Biestável	1.887	10.657	2.020
A=5	Batente	0.894	45.000	2.424
A=9.81	Linear	9.046	25.202	2.828
A=9.81	Biestável	5.684	13.889	2.424
A=9.81	Batente	1.901	45.000	2.424

Table 1: Pico de potência e largura de banda.

Discussão. (i) O **linear** concentra a potência em torno de ω_n, como esperado. (ii) O **biestável** pode gerar potência útil já em baixas frequências (região de "oscilações entre poços") e, com A mais alto, exibe *alargamento* de banda. (iii) O **batente** desloca o pico para frequências maiores e, conforme g diminui, tende a aumentar a potência em faixas específicas, podendo também alargar a banda de operação.

Questão 4)

Partimos da energia livre fenomenológica (1D) do modelo de Falk:

$$\rho\psi(\varepsilon, T) = \frac{a}{2}\big(T - T_m\big)\varepsilon^2 - \frac{b}{4}\,\varepsilon^4 + \frac{b^2}{24\,a\,(T_A - T_m)}\,\varepsilon^6,$$

da qual resulta a tensão $\sigma(\varepsilon, T) = \partial(\rho\psi)/\partial\varepsilon = a(T - T_m)\varepsilon - b\varepsilon^3 + \dfrac{b^2}{4a(T_A - T_m)}\varepsilon^5$. Esse potencial explica a existência de fases A e $\mathrm{M}^{\pm}$ com transição do tipo primeira ordem e histerese.

O oscilador unitário com restituição do tipo Falk é dado por

$$\ddot{x} + 2\zeta\,\dot{x} + a\,(T - T_m)\,x - b\,x^3 + \frac{b^2}{24\,a\,(T_A - T_m)}\,x^5 = A\sin(\omega t), \tag{18}$$

com os parâmetros de referência indicados.

Para comparar respostas e evidenciar atenuação de vibrações, varremos ω e computamos o valor em regime

$$x_{\text{RMS}}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} x(t)^2\,dt}.$$

Integramos (18) pelo método de RK4 (passo fixo com 300 passos por período; 50 períodos por frequência; descarte de 2/3 do transiente). Em paralelo, usamos o modelo linearizado (b=0) para obter analiticamente

$$x_{\text{RMS}}^{(\text{lin})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{A}{\sqrt{\big(a(T-T_m) - \omega^2\big)^2 + (2\zeta\,\omega)^2}}.$$

Parâmetros. Adotamos os valores de referência: ζ=0,025, a=15 N/(K · m · kg), b=60 × 10^4 N/(m^3 · kg), T_A=313 K, T_m=287 K, com amplitudes A = 2.5, 5.0, 9.81 m/s^2 e $\omega \in [5, 60]$ rad/s.

Resultados

Energia livre e $\sigma(\varepsilon, T)$. As Figs. 17 e 18 mostram a evolução do potencial e das curvas tensão–deformação com a temperatura: poço duplo (região martensítica), três mínimos na transição e poço único (austenita).

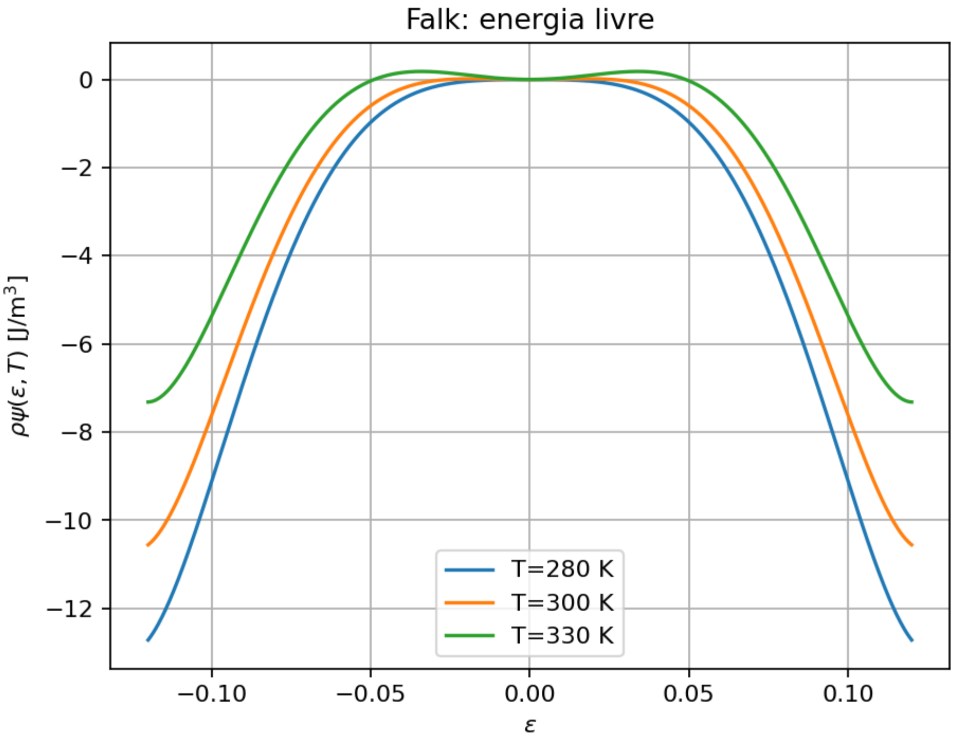

Figure 17: Energia livre $\rho\psi$ para $T = \{280, 300, 330\}$ K.

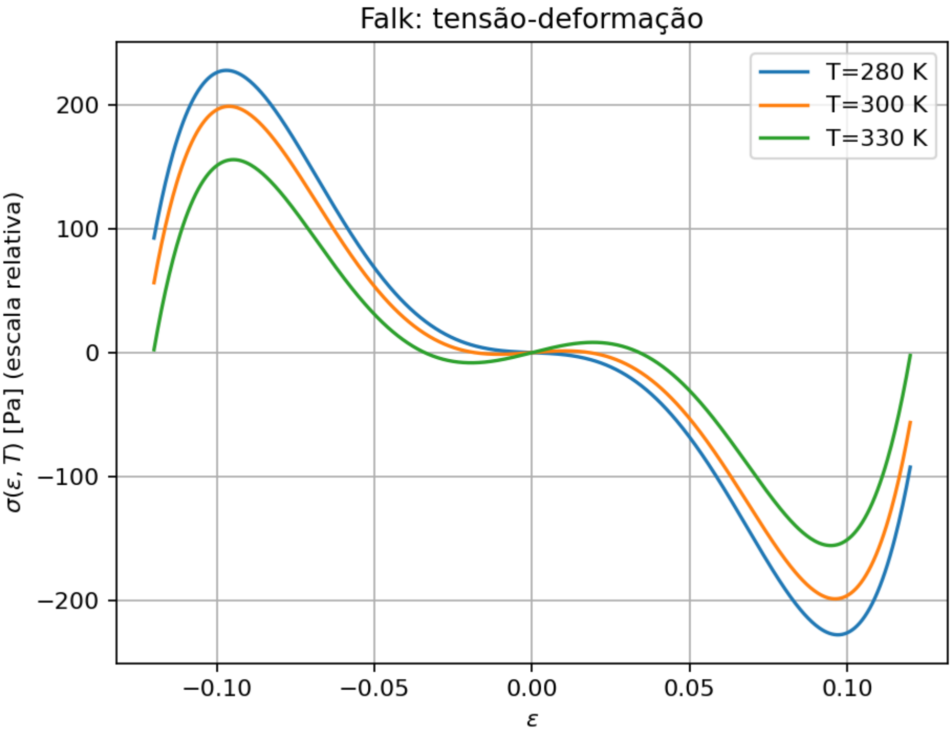

Figure 18: Tensão–deformação $\sigma(\varepsilon, T)$ para $T = \{280, 300, 330\}$ K.

Resposta em frequência e atenuação. As Figs. 19 e 20 ilustram a resposta para $A \in \{2.5,\ 5.0,\ 9.81\}$ m/s^2 e $T \in \{280,\ 300,\ 330\}$ K.

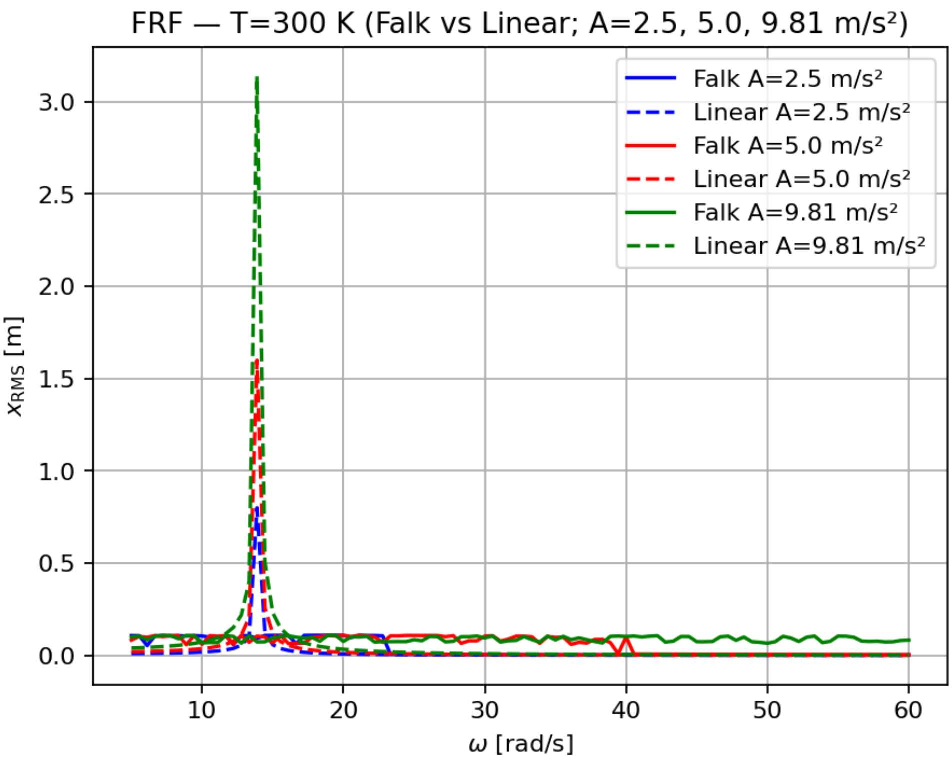

Figure 19: FRF $x_{\mathrm{RMS}} \times \omega$ em $T = 300\,\mathrm{K}$: Falk vs. linear para $A = 2.5,\ 5.0,\ 9.81$ m/s^2.

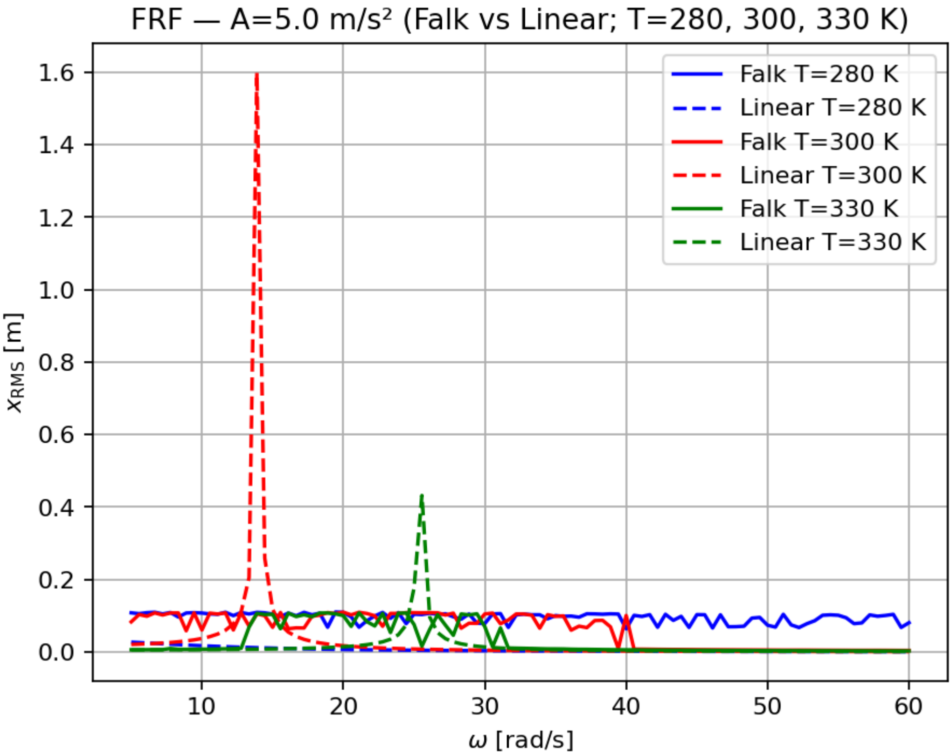

Figure 20: FRF $x_{\mathrm{RMS}} \times \omega$ em $A = 5.0\,\mathrm{m/s^2}$: Falk vs. linear para $T = 280,\ 300,\ 330\,\mathrm{K}$.

Discussão — atenuação de vibrações. (i) Sintonização térmica: ao elevar T (p.ex., para 330 K), o termo linear $a(T-T_m)$ aumenta e o potencial torna-se de poço único mais "rígido", reduzindo a amplitude na faixa de ressonância. (ii) Endurecimento não linear: os termos x^3 e x^5 crescem com a amplitude, o que limita $x(t)$ em regime e gera atenuação. (iii) Região de transição (T300 K): há multiestabilidade e resposta rica em saltos, o que pode ser explorado como mecanismo passivo de limitação.