Aufgabe 2

a) .

ε	**Näherung von** $\Phi(1)$	**Fehler**	**Auswertungen von** φ
2^{-10}	0.841872145243	0.000527399174928	8,193
2^{-11}	0.841608445731	0.000263699662581	16,385
2^{-12}	0.841476595919	0.000131849850067	32,769
2^{-13}	0.841410670998	$6.59249297345\cdot 10^{-5}$	65,537
2^{-14}	0.841377708535	$3.2962466027\cdot 10^{-5}$	131,073
2^{-15}	0.841361227302	$1.64812333044\cdot 10^{-5}$	262,145
2^{-16}	0.841352986685	$8.24061673221\cdot 10^{-6}$	524,289
2^{-17}	0.841348866377	$4.12030840213\cdot 10^{-6}$	1,048,577
2^{-18}	0.841346806223	$2.06015417292\cdot 10^{-6}$	2,097,153
2^{-19}	0.841345776146	$1.03007711127\cdot 10^{-6}$	4,194,305
2^{-20}	0.841345261107	$5.15038520166\cdot 10^{-7}$	8,388,609
2^{-21}	0.841345003588	$2.57519345293\cdot 10^{-7}$	16,777,217
2^{-22}	0.841344874828	$1.287596193\cdot 10^{-7}$	33,554,433
2^{-23}	0.841344810448	$6.43797478661\cdot 10^{-8}$	67,108,865
2^{-24}	0.841344778258	$3.21899319422\cdot 10^{-8}$	134,217,729
2^{-25}	0.841344762163	$1.60949265027\cdot 10^{-8}$	268,435,457
2^{-26}	0.841344738021	$8.04746325135\cdot 10^{-9}$	536,870,913
2^{-27}	0.841344742044	$4.02373162568\cdot 10^{-9}$	1,073,741,825
2^{-28}	0.841344744056	$2.01186581284\cdot 10^{-9}$	2,147,483,649
2^{-29}	0.841344745062	$1.00593290642\cdot 10^{-9}$	4,294,967,298
2^{-30}	0.841344745565	$5.02966453209\cdot 10^{-10}$	8,589,934,595

Aufgabe 4

a)

$P_{p_o(0)}(S_2 \leq 0) = P_{p_o(0)}(S_2 = 0) = \beta$

$\Leftrightarrow \binom{2}{0} \cdot p_o(0)^0 \cdot (1 - p_o(0))^2 = \beta$

$\Leftrightarrow (1 - p_o(0))^2 - \beta = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2p_o(0) + p_o(0)^2 - \beta = 0$

$\Leftrightarrow p_o(0)^2 - 2p_o(0) + 1 - \beta$

das kann man in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (1 - \beta)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4\beta}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{\beta}}{2} = 1 \pm \sqrt{\beta}$$

Da $1 + \sqrt{\beta}$ nicht geht (P wäre dann größer als 1), bleibt nur $1 - \sqrt{\beta}$ übrig.

$P_{p_o(1)}(S_2 \leq 1) = \beta$

$P_{p_o(1)}(S_2 = 0) + P_{p_o(1)}(S_2 = 1) = \beta$

$(1 - p_o(1))^2 + \binom{2}{1} \cdot p_o(1) \cdot (1 - p_o(1)) = \beta$

$-p_o(1)^2 - 2p_o(1) + 1 + 2 \cdot p_o(1) - 2 \cdot p_o(1)^2 = \beta$

$-p_o(1)^2 + 1 - \beta = 0$

Wieder mit der Mitternachtsformel:

$$\frac{0 \pm \sqrt{-4 \cdot (-1) \cdot (1 - \beta)}}{-2} = \frac{\pm\sqrt{4 - 4\beta}}{-2}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{4(1 - \beta)}}{-2} = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{1 - \beta}}{-2} = \pm\sqrt{1 - \beta}$$

Weil $-\sqrt{1 - \beta}$ keinen Sinn ergibt (P < 0) $\rightarrow \sqrt{1 - \beta}$ bleibt übrig.

$Pp_u(1)(S_2 < 1) = 1 - \beta$

$Pp_u(1)(S_2 \leq 0) = 1 - \beta$

$(1 - Pp_u(1))^2 = 1 - \beta$

$p_u(1)^2 - 2p_u(1) + \beta = 0$

Wieder mit Mitternachtsformel:

$\Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{(14 - 4*1*\beta)}}{2}$

$\Rightarrow 1 \pm \sqrt{1 - \beta}$

Ergebnis (Darf nicht größer 1 sein): $1 - \sqrt{1 - \beta}$

$Pp_u(2)(S_2 < 2) = 1 - \beta$

$Pp_u(2)(S_2 \leq 1) = 1 - \beta$

$-p_u(2)^2 + \beta = 0$

Wieder mit Mitternachtsformel:

$\Rightarrow \frac{\pm \sqrt{(-4(-1)(\beta)}}{-2}$

$\Rightarrow \pm \sqrt{\beta}$

Ergebnis: $+\sqrt{\beta}$
Nur ein Ergebnis, da das Ergebnis nicht negativ sein darf.

b)

Für $\beta = \frac{1}{5}$ und $\alpha = \frac{2}{5}$

Intervall aus a):

$[1 - \sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}] = [0.11, 0.89]$

Intervall mit Tschebyscheff:

$[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{16}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{16}}] = [-0.06, 1.05]$

Für $\beta = \frac{1}{4}$ und $\alpha = \frac{1}{2}$

Intervall aus a):

$[1 - \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}] = [0.13, 0.87]$

Intervall mit Tschebyscheff:

$[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}] = [0, 1]$

Für $\beta = \frac{1}{3}$ und $\alpha = \frac{2}{3}$

Intervall aus a):

$[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}] = [0.18, 0.82]$

Intervall mit Tschebyscheff:

$[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{16}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{16}}] = [0.07, 0.93]$

Interpretation der Ergebnisse:
Für größeres β werden alle Intervalle kleiner also genauer.
Offensichtlich sind jedoch die Grenzen aus a) um einiges genauer (Intervalle sind kleiner) als die sich aus der Tschebyscheff-Ungleichung ergebenden Grenzen. (Für $\beta = \frac{1}{5}$ sind diese sogar kleiner als 0 und größer als 1)