Vektoren

- Betrag

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\text{Skalarprodukt}}}$$

- Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

- Skalarmultiplikation

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

- Kollineare Vektoren

$\vec{b} = s \cdot \vec{a}$ → kollinear / linear abhängig $\quad s \in \mathbb{R}$

$\vec{b} \neq s \cdot \vec{a}$ → linear unabhängig

- Differenzvektor

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

- Gegenvektor

$-\vec{a}$ ist Gegenvektor von $\vec{a}$

- Nullvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Linearkombination / Vektorzug

$$\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

Vektoren

- **Skalarprodukt**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$$

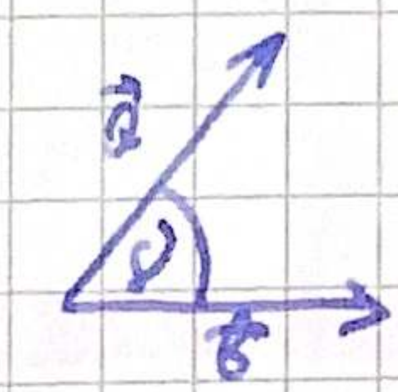
$\rightarrow \in \mathbb{R}$

→ Kommutativ, → Assoziativ, → Distributiv – Gesetze

- **Winkel zwischen Vektoren**

$$\boxed{\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

„Skalarprodukt durch Betragsprodukt"



- **Orthogonale Vektoren**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$$

- **Kollineare Vektoren mit gleicher Richtung**

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Winkel zwischen Zeug

Gerade – Gerade [Richtungsvektor – Richtungsvektor]

Ebene – Ebene [Normalenvektor – Normalenvektor]

Gerade – Ebene [Richtungsvektor – Normalenvektor]

Lineare Abhängigkeit

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig, wenn ich einen von den als Linearkombination der beiden anderen schreiben kann. ~~ohne dass~~ → $\boxed{\vec{a} = r\vec{b} + s\vec{c}}$

Oder: wenn: $\boxed{r, s, t \neq 0}$ u. $\boxed{\vec{0} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}}$

Spiegelung im Raum

2D

x-Achse	$(x\|y)$	$(x\|-y)$
y-Achse	$(x\|y)$	$(-x\|y)$
Ursprung	$(x\|y)$	$(-x\|-y)$
Winkelhalbierende erster Quadrant	$(x\|y)$	$(y\|x)$

3D

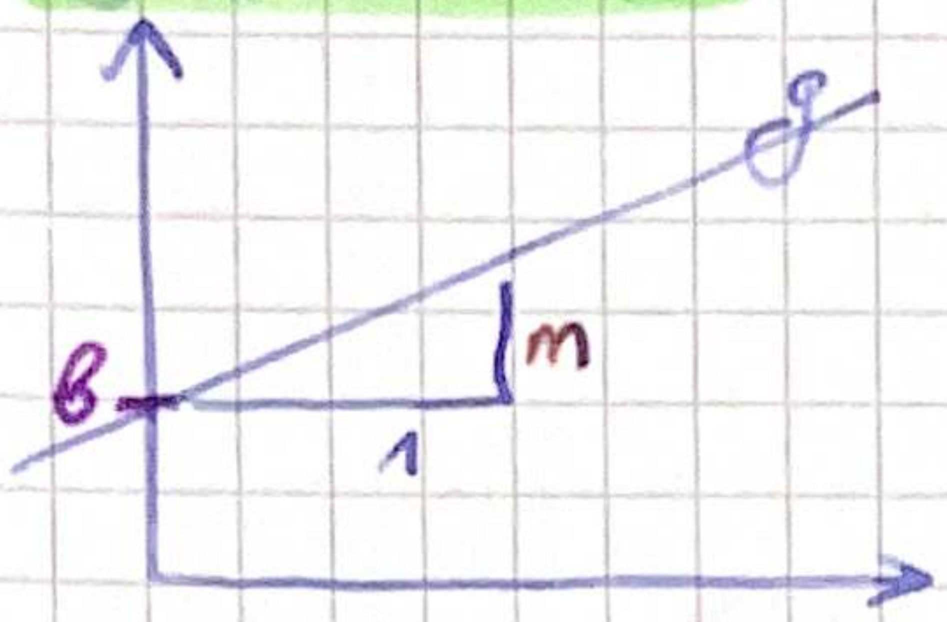
x-Achse	$(x\|y\|z)$	$(x\|-y\|-z)$
y-Achse	$(x\|y\|z)$	$(-x\|y\|-z)$
z-Achse	$(x\|y\|z)$	$(-x\|-y\|z)$
Ursprung	$(x\|y\|z)$	$(-x\|-y\|-z)$
xy-Ebene	$(x\|y\|z)$	$(x\|y\|-z)$
xz-Ebene	$(x\|y\|z)$	$(x\|-y\|z)$
yz-Ebene	$(x\|y\|z)$	$(-x\|y\|z)$

Geraden im Raum

In der Ebene

Punkt-Steigungsform

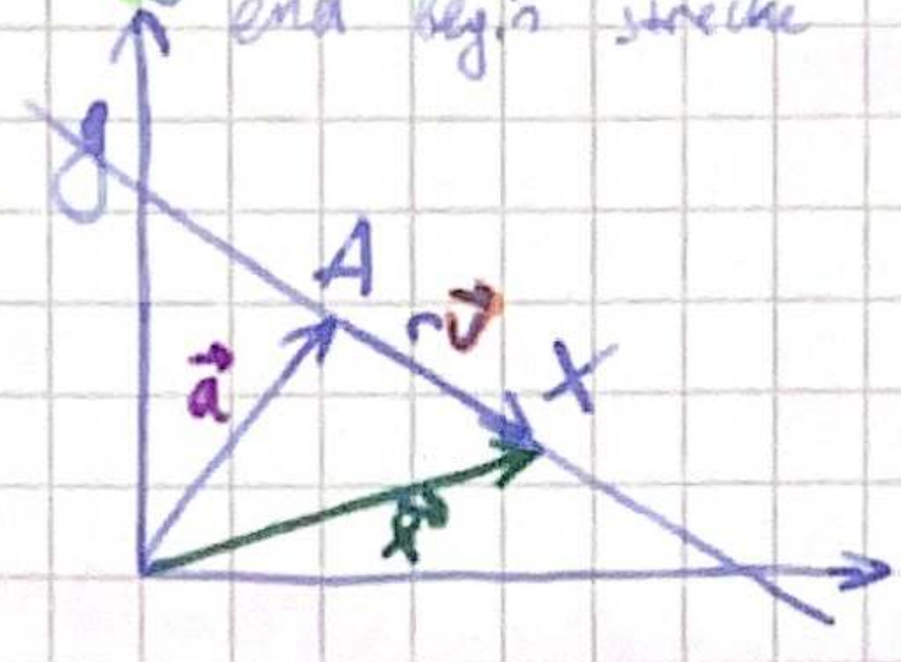
$$g: y = mx + b$$



Punkt-Richtungsform

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}$$

end begin strecke



Im Raum

Punkt-Richtungsform

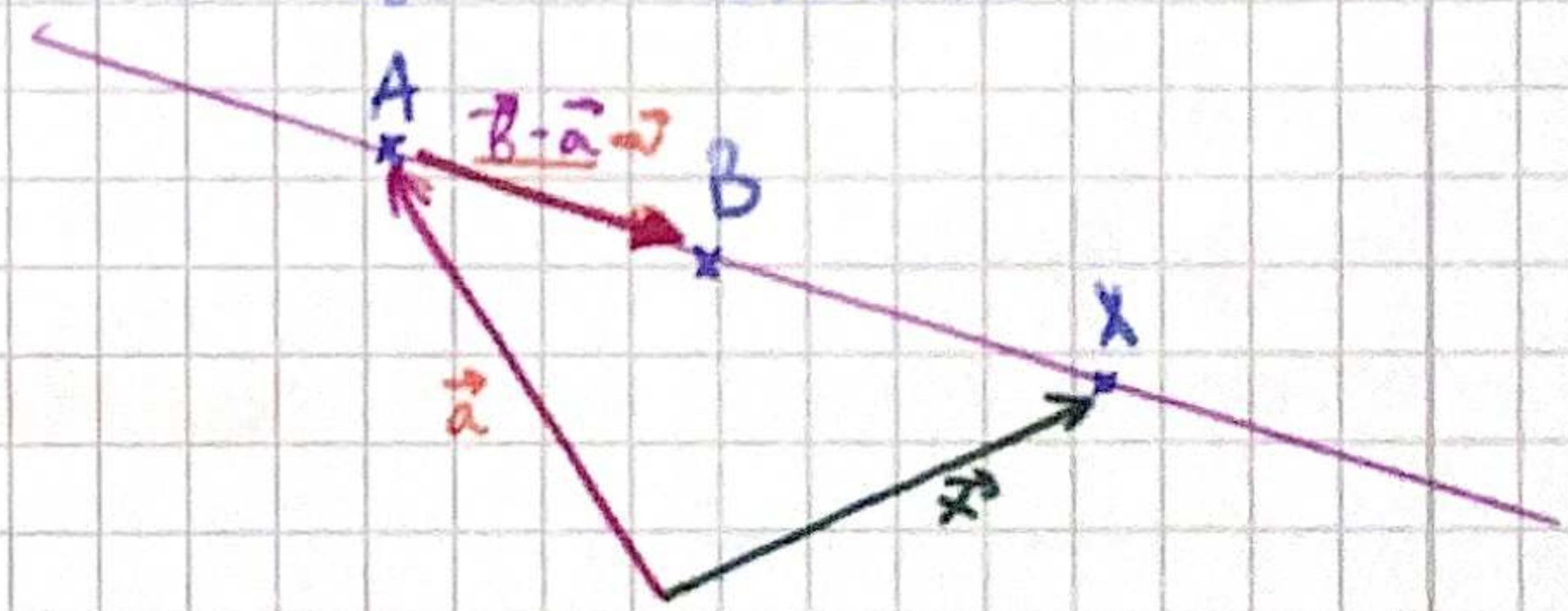
$$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}$$

(gleich wie i.d. Ebene)

Zwei-Punkte-Form durch A u. B

$$g: \vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}), \quad r \in \mathbb{R}$$

end begin $\vec{v}$ aus zwei Punkten



Strecke

$$\vec{x} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a})$$

$\overline{AB}$, wo $A(2|3) \wedge B(6|1) \Rightarrow \overline{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}$, wo $0 \le r \le 1$

Spurpunkte – Punkte auf der Geraden, da wo sie eine Ebene schneidet (eine der Koordinaten $= 0$)

Lagebeziehungen zweier Geraden im Raum

für $\boxed{g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} \quad u. \quad h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}}$

1) Richtungsvektoren $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ kollinear

→ identisch: jeder P auf g ist auch auf h

→ parallel: kein P auf g ist auch auf h

2) Richtungsvektoren $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ nicht kollinear

→ schneiden sich: Schnittpunktsatz $\boxed{\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + s\vec{v}}$ erfüllt

→ windschief: SP-Satz nicht erfüllt

→ Bestimmung des SPs

→ überbestimmtes Gleichungssystem < 3 Gleichungen, 2 Vars

Gauß-Algorithmus → $\boxed{\text{rref}([\vdots\vdots])}$

→ Diagonalform der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = -1$
$s = 2$
→ wahre Aussage → $\boxed{\text{SP existiert}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r + 2s = 0$ → r,s abhängig
→ falsche Aussage → $\boxed{\text{keine Lösung!}}$
→ wahre Aussage → windschief

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r - 0{,}5s = -1$ → r,s abhängig
→ wahre Aussage
→ wahre Aussage
} $\boxed{\text{unendlich viele Lösungen}}$ → identisch

Ebenen im Raum

Parameterform

$$\boxed{E: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}} = \boxed{\vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})}$$

$\vec{a}$ – Stützvektor; $\vec{u}$, $\vec{v}$ – Richtungsvektoren

für Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

(Punkt-Richtungsform) (Drei-Punkte-Form)

wichtig: $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ dürfen nicht kollinear sein!

Punktprobe: Ebenengleichung gleich dem Punkt setzen, Gleichungssystem für x, y, z lösen

Normalenform

$$\boxed{E: \vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{q} = 0} \qquad \boxed{E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{q}} \qquad \boxed{E: \vec{n} \cdot \vec{x} = d}$$

$\vec{n}$ – Normalenvektor; $\vec{x}$ – variables Argument, s.o. $\vec{x}$; $\vec{q}$ – Punkt $\vec{q}$ irgendwo auf der Ebene

Spurpunkte sind Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. Wenn man die verbindet, erhält man die Spurgeraden

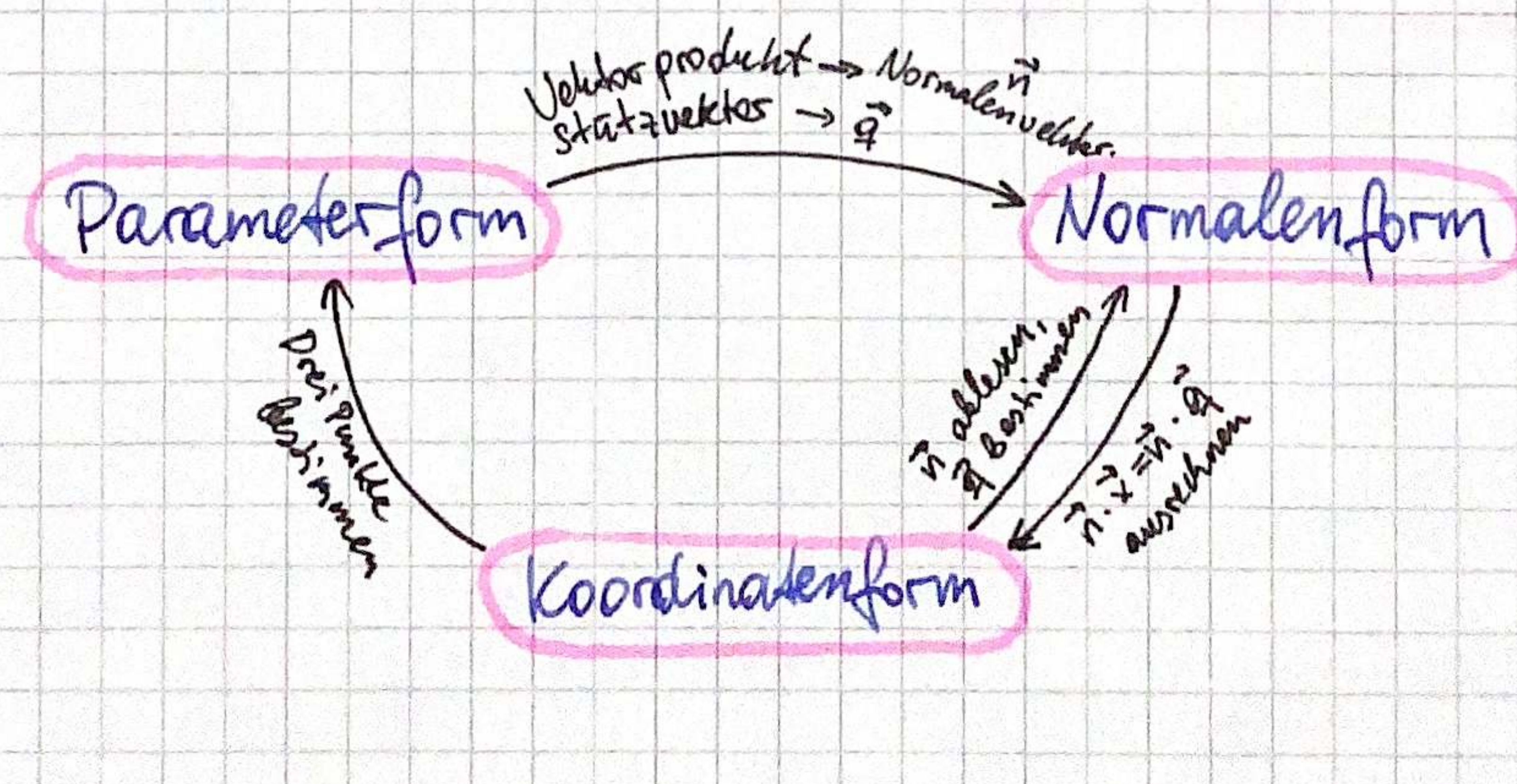
Normalenvektor: orthogonal zur Ebene,

$$\boxed{\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \ \wedge \ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0}$$

Koordinatenform

$$\boxed{ax + by + cz = d}, \quad \text{wobei } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n}$$

JM



Geraden im Raum – Weiteres

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$\begin{pmatrix} 23-32 \\ 31-13 \\ 12-21 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

→ Ergebnis Vektor, der orthogonal zu $\vec{a}$ u. $\vec{b}$

„a kreuz b"

Lagebeziehung Gerade – Ebene

1) Ebene in Koordinatenform oder Normalenform

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{u.} \quad E: ax + by + cz = d$$

Einsetzen, r Bestimmen

$$a(p_1 + rv_1) + b(p_2 + rv_2) + c(p_3 + rv_3) = d$$

- Eine Lösung → Schnittpunkt (r einsetzen)
- Keine Lösung → parallel
- ∞ Lösungen → Gerade in Ebene

2) Ebene in Parameterform

$$g: \vec{x} = a + t\vec{u} \quad \text{u.} \quad E: \vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$$

Gleichsetzen

$$a + t\vec{u} = b + r\vec{v} + s\vec{w}$$

→ lineares Gleichungssystem
→ 3 Gleichungen, 3 Variablen

Eine, Keine oder ∞ Lösungen (s.o.)

Lagebeziehung Ebene - Ebene

1) Koordinatenform – Parameterform

$$E: ax+by+cz=d \quad u. \quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Einsetzen, r und s bestimmen

$$a(p_1 + ru_1 + sv_1) + b(p_2 + ru_2 + sv_2) + c(p_3 + ru_3 + sv_3) = d$$

- Abhängigkeit → Schnittgerade → (r u. s einsetzen)
- keine Lösung → parallel
- ∞ Lösungen, keine Abhängigkeit → identisch

2) Koordinatenform – Koordinatenform

$$E: a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad u. \quad F: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

→ lineares Gleichungssystem (LGS

solve(...=... and ...=..., x, y)

→ unterbestimmt (zwei Gleichungen, drei Variablen)
→ eine Variable frei gewählt
→ Abhängigkeit, keine, ∞ Lösungen → (s. o.)

3) Parameterform – Parameterform

$$E: \vec{x} = \vec{b}_1 + r_1\vec{u}_1 + s_1\vec{v}_1 \quad u. \quad F: \vec{x} = \vec{b}_2 + r_2\vec{u}_2 + s_2\vec{v}_2$$

Gleichsetzen

$$\vec{b}_1 + r_1\vec{u}_1 + s_1\vec{v}_1 = \vec{b}_2 + r_2\vec{u}_2 + s_2\vec{v}_2$$

→ lineares Gleichungssystem
→ unterbestimmt (drei Gleichungen, vier Variablen)

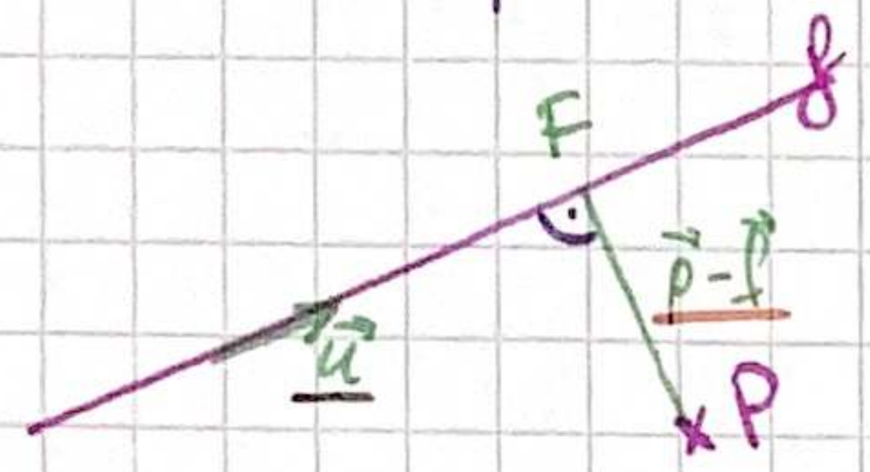
- keine Lösung → parallel
- ∞ Lösungen, in Diagonalform in jeder Zeile Einträge → Schnittgerade
- ∞ Lösungen, in Diagonalform eine Zeile aus Nullen → identisch

BRUNNEN

Abstandsprobleme

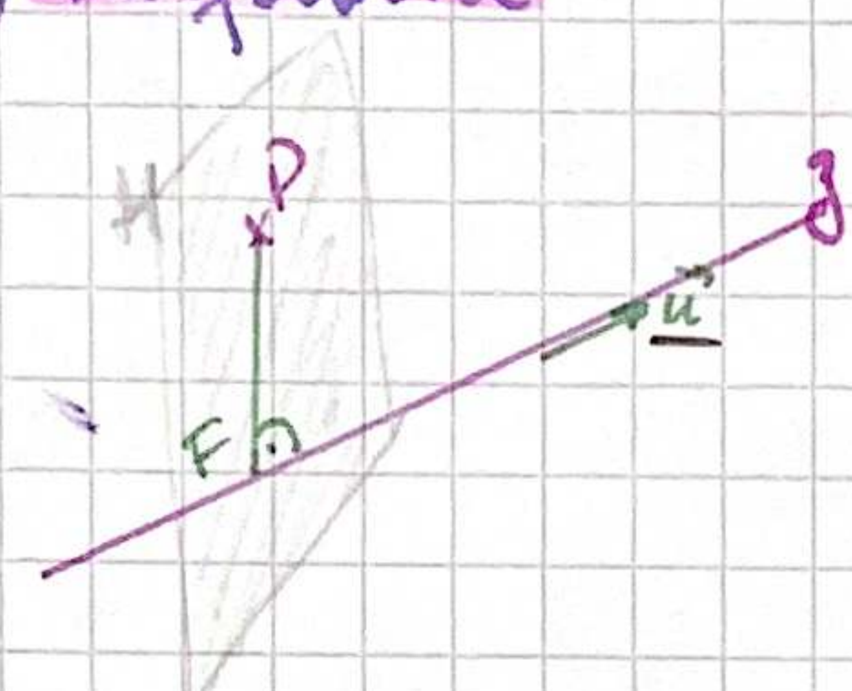
1) Punkt-Gerade

a) Skalarprodukt



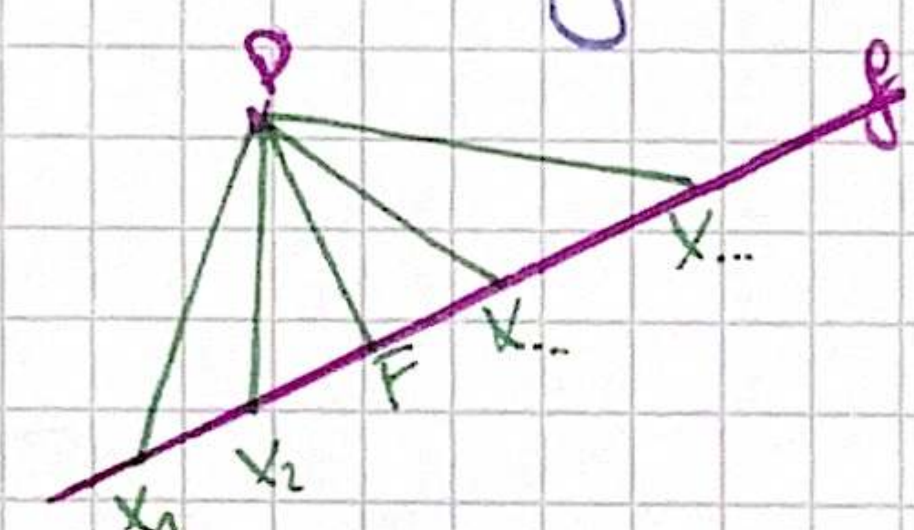
1) $(\vec{p}-\vec{f})\cdot\vec{u}=0$ (Rot → senkrecht)
   $\vec{f}$ kennen wir nicht
2) F bestimmen
3) $|\vec{p}-\vec{f}|$ ausrechnen

b) Hilfsebene



1) H hat $\vec{u}$ als Normalenvektor u. P als Punkt
2) SP von g u. H bestimmen
3) $|\vec{p}-\vec{f}|$ ausrechnen

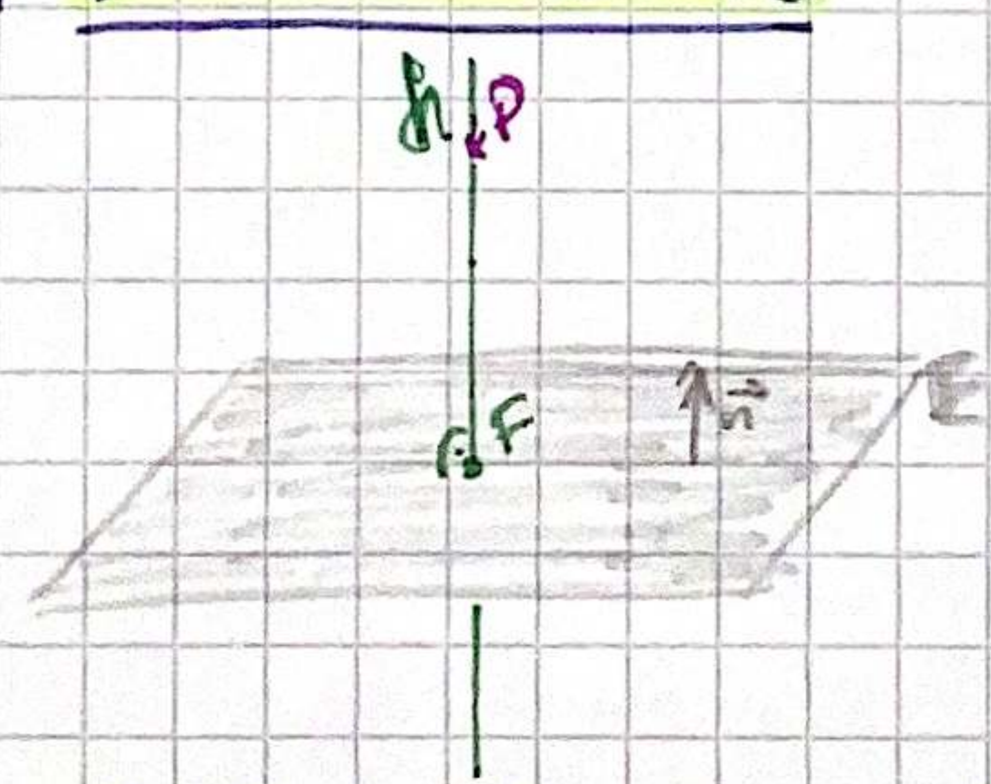
c) Minimierung



1) $|\vec{p}-\vec{x}|$ ist Entfernung zu einem beliebigen P. auf g
2) $f(t) = |\vec{p}-\vec{x}|$
3) Extremstelle/Minimum von $f(t)$ bestimmen → $f'(t)=0$

Parallele Geraden/Ebenen: wähle einen Punkt auf einer der Geraden/Ebenen und rechne mit ihm (s.2)

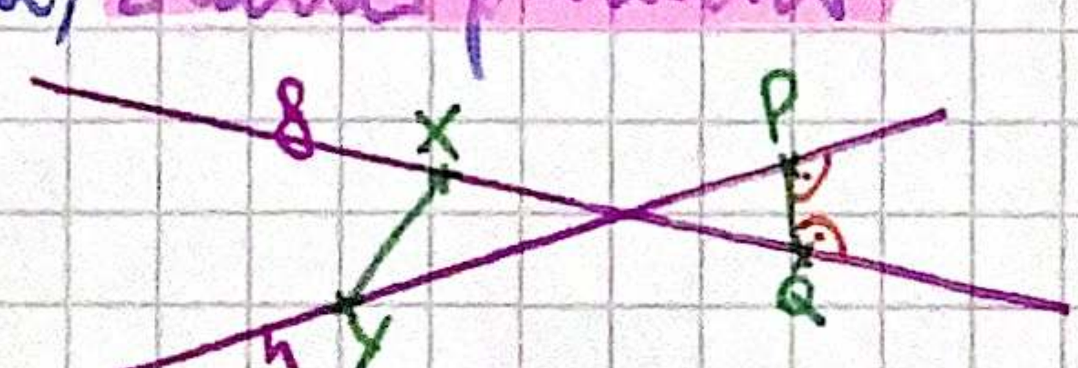
2) Punkt - Ebene



1) h aufstellen: $h=\vec{p}+t\cdot\vec{n}$
2) SP von h u. E bestimmen
3) $|\vec{p}-\vec{f}|$ ausrechnen

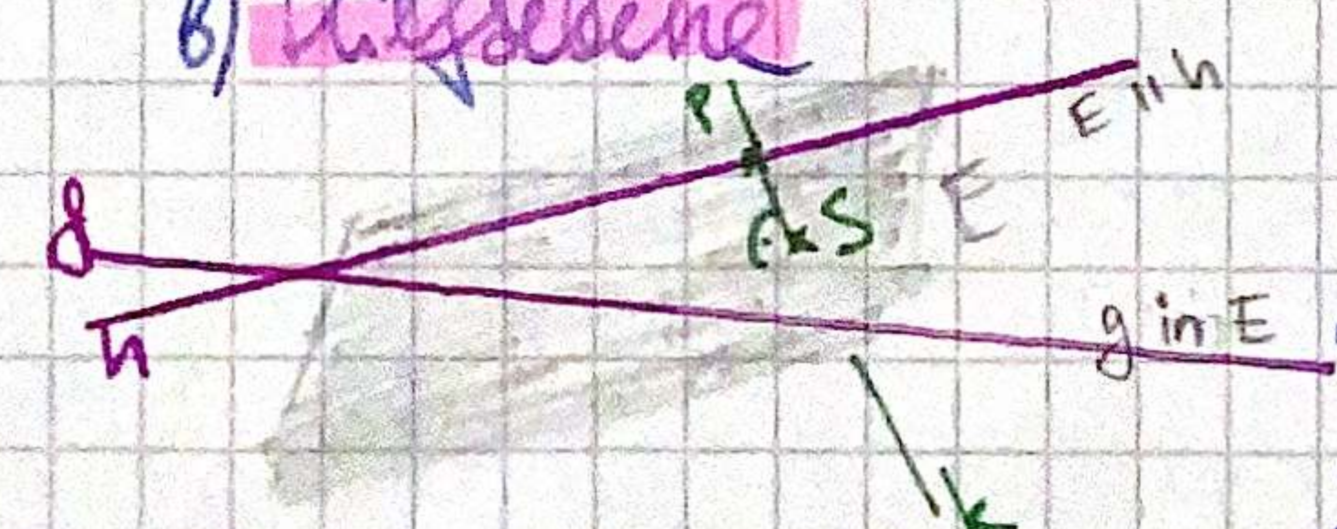
3) Windschiefe Geraden

a) Skalarprodukt



1) $\vec{XY}$ aufstellen (basierend auf g u. h)
2) $\vec{PQ}\perp\vec{v}$ u. $\vec{PQ}\perp\vec{u}$ (Skalarprodukt)
   → LGS aufstellen + lösen
   → P u. Q finden und $|\vec{PQ}|$ bestimmen

b) Hilfsebene



1) E aufstellen, was ∥ zu h u. enthält g
2) k durch P u. ⊥ zu E
3) S ist SP von k u. E. $|\vec{PS}|$ berechnen