Drehmatrix

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} g_1 h_1 & g_1 h_2 \\ g_2 h_1 & g_2 h_2 \end{pmatrix} \qquad S_1(g_1, g_2) \quad S_2(h_1, h_2)$$

x: $D_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\quad$ y: $D_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

z: $D_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Drehmatrixprobe: · Orthonormal - Vektoren paarweise orthogonal + normiert $\Rightarrow A^{-1} = A^t$
· Det $= +1$

Drehachsenrichtung: $A - A^t = \sin\alpha (S - S^T)$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ Drehvektor (d_1, d_2, d_3) Drehwinkel α

Verschiedene Systeme:

Polar: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\phi \\ \rho \sin\phi \end{pmatrix}$ $\quad$ Zylinder: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$ $\quad$ Kugel: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\phi \sin\vartheta \\ \rho \sin\phi \sin\vartheta \\ \rho \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$[0, 2\pi]$ Grundwinkel (ϕ), $[0, \pi]$ Polhöhe (ϑ)

Definitheit: Eigenwerte λ_i

$\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0 \rightarrow$ positiv definit
alle $\lambda_i < 0 \rightarrow$ negativ definit
$>$ bei $\geq / \leq 0$ semi-Definit, bei + und - : indefinit

Choleskyzerlegung: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Lösbar? $\rightarrow$ positiv Definit
für $-A$ lösbar? $\rightarrow$ negativ Definit

$$(\Rightarrow \det A = \det B \cdot \det B' = (b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} \cdot \ldots)^2)$$

$x^2 + y^2 = R^2$ Kreis

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ellipse

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Hyperbel

$ax^2 + y = 0$ Parabel

<u>Hauptachsentransf.</u>: · Matrix aufstellen $\rightarrow$ Eigenwerte + Vektoren (normiert)
· Anordnung: Det der Eigenvektoren $= 1$

$$\lambda_1 \varepsilon^2 + \lambda_2 \eta^2 + (x\text{-Wert} \quad y\text{-Wert}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon - 2\eta \\ 2\varepsilon + \eta \end{pmatrix}}_{\text{Eigenvektoren}} + c = 0$$

$\Rightarrow$ evtl. quadr. Ergänzung $ax^2 + bx = a\left(x + \boxed{\frac{b}{2a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$

Verschiebungsvektor x/y - Wert

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Ellipsoid	1-fache NS λ	$e^{\lambda t}$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	Elliptisches Paraboloid	m-fache NS λ	$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Kegel	1-fache $\mathbb{C}$ NS λ	$e^{(\alpha t \pm i\beta) t} \begin{cases} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{cases}$
$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=z$	Hyperbolisches Paraboloid	m-fache $\mathbb{C}$ NS λ	$e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t), t\cdot e^{\alpha t}\cos(\beta t), t\cdot e^{\alpha t}\sin(\beta t), \ldots$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Zweischaliges Hyperboloid		
—— " —— $=1$	Einschalig —"—		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Elliptischer Zylinder		

Lineare DGL

$y''' - 5y'' + 15y' - 13y = 0$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 15\lambda - 13 = 0$

$\Rightarrow y = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}\cos(3t) + c_3 e^{2t}\sin(3t)$

Vektor DGL

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Eigenwerte λ + Eigenvektor $\vec{v}$ (muss nicht normiert sein wegen Vorfaktor C)

$\Rightarrow$ Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{v}_2$

! Doppelter Eigenwert: zweiter EV: $M \cdot \vec{u}_2 = \vec{v}_1$ $\Rightarrow$ Lösung: $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{v}_1 t$

Extremwertberechnung

$\nabla f \cdot dx = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \ldots$ = totales Differential; Punkt + Richtung $\rightarrow$ Richtungsableitung
Gradient Normiert !
↳ Zeigt in Richtung des höchsten Anstiegs

$\Rightarrow$ Hessematrix H für Hinreichende Bed.

$\rightarrow \underline{\det(H) > 0}$; in 2D: $f_{xx} < (>) 0$ Maximum (Minimum) ; $\det(H) < 0 \Rightarrow$ Sattel, $\det(H) = 0 \rightarrow$ keine Aussage

in nD: Maximum: H negativ definit Minimum: H pos. definit; Sattel: indefinit, semi-definit: keine Aussage

Mit Nebenbedingung g:

a) g auflösen, in f einsetzen
b) Lagrange-Multiplikator: $\nabla f + \lambda \cdot \nabla g = 0$

Integrale

Kartesisch → Polar / Kugel / ...

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} d\rho\, d\phi = \rho\, d\rho\, d\phi \quad \text{(Funktionaldeterminante)}$$

Kugelkoord.: $r^2 \sin \vartheta$

Kurvenintegral

$$W = \oint_C F(r)\,dr = \int_{\mu_1}^{\mu_2} F(r(\mu)) \cdot r'(\mu)\, d\mu$$

→ Wegunabhängig wenn F rotationsfrei / konservativ

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Länge einer Kurve: $F = 1 \Rightarrow \oint_C dr = \int_{\mu_1}^{\mu_2} |r'(\mu)|\, d\mu$

Gaußscher Integralsatz für Flächen

$$\iint_A dA = \oint_C (-F_2, F_1) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_C (F_1 dy - F_2 dx) \qquad \text{mit } \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Numerik

$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \qquad \text{1. Grad}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_a}{\Delta x_a} + \frac{\Delta y_b}{\Delta x_b}\right) \qquad \text{2. Grad}$$

$$\Delta x_a = \Delta x_b \Rightarrow \frac{1}{2\Delta x}(y_{k+1} - y_{k-1})$$

$$\left[\text{2. Ableitung } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta x^2}\right]$$

Flächenberechnung

Trapez: $$\frac{1}{2n} \cdot \left[f(a) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ f\left(a + \frac{i}{n} \cdot (b-a)\right) \right\} + f(b)\right] \cdot (b-a)$$

Simpson: $$\frac{1}{6n} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ f\left(\frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})\right) \right\} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + f(b)\right] \cdot (b-a)$$

$$a_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

$$\int y'(x)\,dx = \int f(y(x), x)\,dx$$

Euler-Verfahren

$$h = \frac{I}{n} = \frac{b-a}{n}$$

$$x_{k-1} = x_0 + h\cdot(k-1) = x_{k-2} + h$$

$$y_k = y_{k-1} + h\cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})$$

Verbessertes Euler

x_k bleibt gleich

$$y_{k-\frac{1}{2}} = y_{k-1} + \frac{h}{2} f(y_{k-1}, x_{k-1})$$

$$y_k = y_{k-1} + h\cdot f(y_{k-\frac{1}{2}}, x_{k-1} + \tfrac{h}{2})$$

Runge-Kutta

x bleibt gleich

$$K_1 = h\cdot f(y_{k-1}, x_{k-1})$$

$$K_2 = h\cdot f(y_{k-1} + \tfrac{K_1}{2}, x_{k-1} + \tfrac{h}{2})$$

$$K_3 = h\cdot f(y_{k-1} + \tfrac{K_2}{2}, x_{k-1} + \tfrac{h}{2})$$

$$K_4 = h\cdot f(y_{k-1} + K_3, x_{k-1} + h)$$

$$y_k = y_{k-1} + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Lagrange:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Lambda_i(x)$$

$$\Lambda_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_n)} \quad (\text{ohne } x_n = x_i)$$

Nullstellen:

Bisektion

$$\underbrace{f(a), \overbrace{f(b), f(\tfrac{1}{2}(a+b))}}_{}$$

eine von beiden als neue a, b

Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{mit } f'(x_k) \neq 0$$

$$\text{und } \left|\frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leq 1$$

Regula Falsi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-m}}{\underbrace{f(x_k) - f(x_{k-m})}_{\text{unterschiedliche Vorzeichen}}} \cdot f(x_k)$$

Polynominterpolation:

Newton:

$$\Delta^0(x_0) = y_0$$

$$\Delta^0(x_1) = y_1$$

$$\Delta^0(x_2) = y_2$$

$$\Delta^1(x_0, x_1) = \frac{\Delta^0(x_1) - \Delta^0(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Delta^1(x_1, x_2) = \frac{\Delta^0(x_2) - \Delta^0(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta^2(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta^1(x_1, x_2) - \Delta^1(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$P(x) = y_0 + \Delta^1(x_0, x_1)\cdot(x - x_0)$$
$$+ \Delta^2(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \dots$$

Allg. Differenzengleichung

$$y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k}, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-m})$$

Anfangswerte -> Numerisch

allgemeine Lösungsfunktion -> analytisch

Differenzengleichung aus Differentialgleichungen

$$y'(x) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}$$

$$y''(x) \approx \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{(\Delta x)^2}$$

Schrittweite

$$y'''(x) \approx \frac{y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}}{(\Delta x)^3} \quad \Rightarrow \text{in Gleichung: } \Delta x = C \Rightarrow \text{Mal } C^{\text{höchste Abl.}}$$

=> Homogene Lösungsfunktion (linear)

$$y_n = -a \cdot y_{n-1}$$

$$L(k) = (-a)^k \cdot C$$

=> inhomogen (linear)

$$y_n = -a \cdot y_{n-1} + b$$

$$L_{a \neq -1}(k) = (-a)^k \cdot C + \frac{b}{1+a}$$

$$L_{a=-1}(k) = (-a)^k \cdot C + k \cdot b$$

Fundamentalsystem / charakteristische Gleichung

$$y_k = \lambda^k \quad \Rightarrow \quad \lambda^n + a\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -a$$

Fixpunkte

$p = f(p)$ -> bleibt konstant

linear inhomogen: $p = -a \cdot p + b$ / $p = \frac{b}{1+a}$ $a \neq -1$

$|a| < 1$ -> stabil

$a = -1$ -> kein Fixpunkt

$|a| \geq 1$ -> instabil