DÚ č. 1

Roland Schulz
xschul06

6. (příjmení P – Ši)

a) $f(x) = \sqrt{7-2x}$; $f^{-1}(x) = ?$

$$7 - 2x \geq 0$$
$$-2x \geq -7 \quad / \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$-x \geq -3{,}5 \quad / \cdot (-1)$$
$$x < 3{,}5$$

$D(f) = \langle 3{,}5 \,; +\infty)$

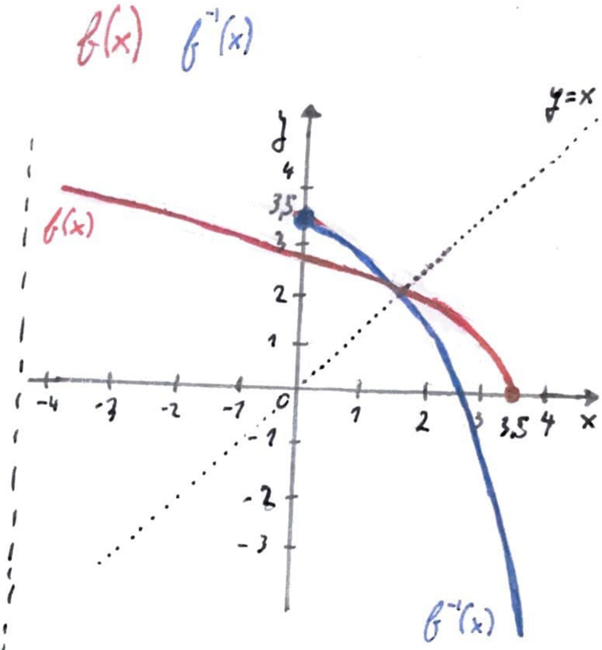
$H(f) = \langle 0 \,; +\infty)$

$x \leftrightarrow y$: $\sqrt{7-2y} = x \quad | \, (\ )^2$

$$7 - 2y = x^2 \quad \backslash -7$$
$$-2y = x^2 - 7 \quad \backslash \cdot (-\tfrac{1}{2})$$
$$y = -\frac{x^2-7}{2}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{x^2-7}{2}$$

omezeno na $D(f^{-1}) = \langle 0 ; +\infty)$
$H(f^{-1}) = (-\infty, 3{,}5\rangle$



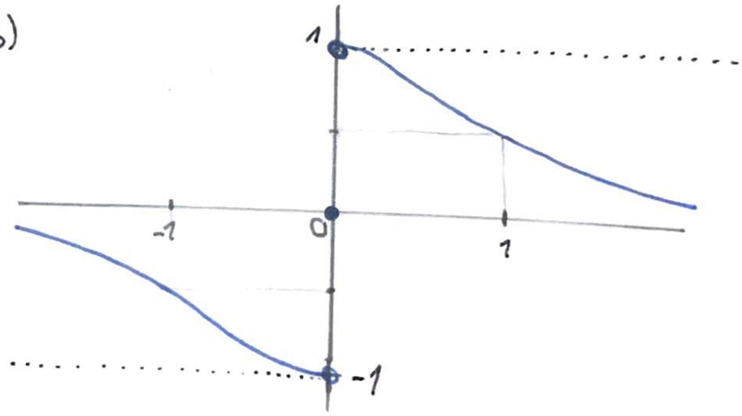
b) Pokud je fce $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohraničená, tak není prostá

ohraničenost: $\exists c, d \in \mathbb{R} \ \forall x \in D(g): d \leq g(x) \leq c$

prostost: $\forall a, b \in D(g): a \neq b \Rightarrow g(a) \neq g(b)$

Protipříklad:

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2+1} & x \in (-\infty ; 0) \\ 0 & x = 0 \\ +\dfrac{1}{x^2+1} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$



- platí že je fce g ohraničená: $\forall x \in D(g): -1 < g(x) < c$

a zároveň platí prostost: $\pm \dfrac{1}{x^2+1} \neq 0$ pro $\forall x \in D(g)$

$\wedge$ $-\dfrac{1}{x^2+1}$ je prostá na $x \in (-\infty, 0)$

$\wedge$ $+\dfrac{1}{x^2+1}$ je prostá na $x \in (0 ; +\infty)$

$\wedge$ funkce g je lichá

PS: bylo potřeba omezit $H(g)$ na $g: \mathbb{R} \to (-1, 1)$ kvůli ohraničení