IMA1 Dú 7. Roland Schulz xschul06

Najděte lokální extrémy, inflexní body a asymptoty zadané funkcef(x) a nakreslete graf včetně asymptot a vyznačených lokálních extrémů a inflexních bodů.

6. (příjmení P–Si) $f(x) = \frac{x^3}{(x+3)^2}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$; $H(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{(x+3)^2}\right)' = \frac{3x^2(x+3)^2 - x^3\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{3x^2(x+3) - 2x^3}{(x+3)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 + 9x^2 - 2x^3}{(x+3)^3} = \boxed{\frac{x^3+9x}{(x+3)^3}} = \frac{x(x^2+9)}{(x+3)^3}$$

$+\nearrow$, $-\searrow$, $+\nearrow$, $+\nearrow$; -9, -3, 0

$$f(-9) = \frac{-9}{(-9+3)^2} = \frac{-729 : 9}{36 : 9} = \frac{-81}{4}$$

$\boxed{<0 : \text{lok. max v } x = -9}$

$$f''(x) = \left(\frac{x^3+9x}{(x+3)^3}\right)' =$$

$$= \frac{(3x^2+18x)\cdot(x+3)^3 - (x^3+9x^2)\cdot 3\cdot(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{3x^3 + 9x^2 + 18x^2 + 54x - 3x^3 - 27x^2}{(x+3)^4} =$$

$x2 \Rightarrow x^2$

$$= \boxed{\frac{54x}{(x+3)^4}} \rightarrow$$

$-\frown$, $-\frown$, $+\smile$; -3, 0

$\rightarrow$ na souřadnicích $[0, 0]$ je inflexní bod (x, y)

svislé asymptoty:

- $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^3}{(x+3)^2} = \boxed{-\infty}$ ($\downarrow -27$, $\downarrow + 0$)
- $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x^3}{(x+3)^2} = \boxed{-\infty}$ ($\uparrow -27$, $\downarrow + 0$)

šikmé asymptoty: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x\cdot(x+3)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$:x^2$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+0+0) = 1$

$\boxed{y = 1x - 6}$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x+3)^2} - \frac{x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 - 6x^2 - 9x}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6-\frac{9}{x}}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{-6}{1} = \boxed{-6}$$

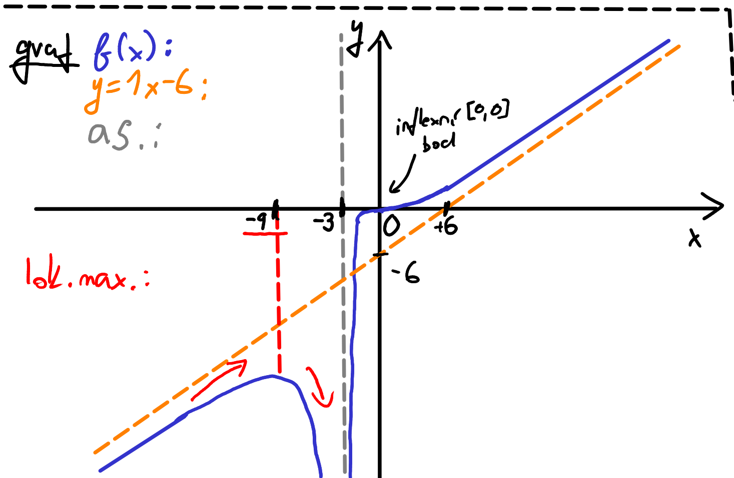
$:x^2$

$\frac{x}{1}\cdot\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(-6-0) = -6$

$\hookrightarrow 1$

graf $f(x)$:
$y = 1x - 6$;
as.:
lok. max.:



Roland Schulz