Násobení

INP 2019

FIT VUT v Brně

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Násobení a násobičky

- Při násobení čísel v dvojkové soustavě můžeme násobit absolutní hodnoty čísel a pak doplnit do výsledku znaménko, anebo raději násobit přímo čísla se znaménkem.
- Vlastní násobení může být prováděno sekvenčně (postupně), anebo kombinačně (v jednom kroku). Rozlišujeme proto
  - sekvenční násobičky
  - kombinační násobičky
- Podle typu operandu rozlišujeme násobičky pracující v
  - pevné řádové čárce a
  - plovoucí řádové čárce
- Cílem implementace je získat součin co nejrychleji, za co nejnižší cenu (počet hradel, plocha čipu), popř. s co nejnižším příkonem.
- Pro pevnou řádovou čárku si ukážeme:
  - Princip násobení
  - Sekvenční násobičky
  - Kombinační násobičky
  - Princip urychlení – Boothovo překódování, Wallaceův strom
  - Násobení bez násobiček

Princip násobení (bez znaménka)

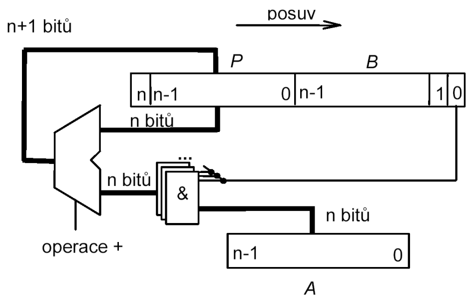
Mějme dvě čísla: N-bitový násobitel $x_{N-1}x_{N-2} \ldots x_0$ a M-bitový násobenec $y_{M-1}y_{M-2} \ldots y_0$. Součin P potom bude:

$$P = \left(\sum_{j=0}^{M-1} y_j 2^j\right)\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^i\right) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} x_i y_j 2^{i+j}$$

						y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0	Násobenec (multiplicand)
						x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	Násobitel (multiplier)
						x_0y_5	x_0y_4	x_0y_3	x_0y_2	x_0y_1	x_0y_0	částečné součiny (partial products)
					x_1y_5	x_1y_4	x_1y_3	x_1y_2	x_1y_1	x_1y_0		
				x_2y_5	x_2y_4	x_2y_3	x_2y_2	x_2y_1	x_2y_0			
			x_3y_5	x_3y_4	x_3y_3	x_3y_2	x_3y_1	x_3y_0				
		x_4y_5	x_4y_4	x_4y_3	x_4y_2	x_4y_1	x_4y_0					
	x_5y_5	x_5y_4	x_5y_3	x_5y_2	x_5y_1	x_5y_0						
p_{11}	p_{10}	p_9	p_8	p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0	Součin (product)

Výsledek je na 12 bitech, obecně na M+N bitech.

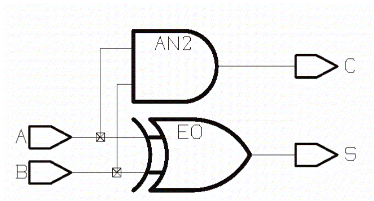
Sekvenční násobička

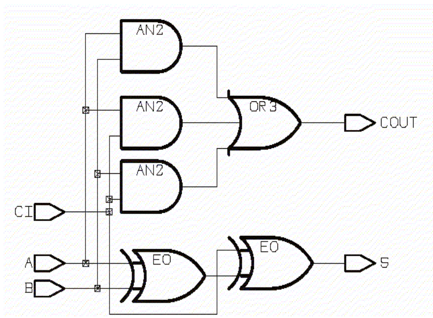



```
Př. n=4, 1111 x 1011 = 10100101
(=> označuje posun vpravo)
Inicializace:
 A: 1111
PB: 00000 1011

Krok 1:                 Krok 3:
PB: 00000 1011          PB: 01011 0110
     +1111                   +0000
PB: 01111 1011          PB: 01011 0110
=>  00111 1101          =>  00101 1011

Krok 2:                 Krok 4:
PB: 00111 1101          PB: 00101 1011
     +1111                   +1111
PB: 10110 1101          PB: 10100 1011
=>  01011 0110          =>  01010 0101
```

- U sekvenčního násobení čísel A x B se do dolní poloviny spojených registrů PB připraví násobitel B, do horní poloviny nuly, násobenec do registru A. Postup násobení je následující:
- (1) Nejnižším bitem registru PB se vynásobí násobenec A a přičte se k horní části registru PB, kde se udržuje průběžný součet dílčích součinů.
- (2) Obsah registrů PB se posune o jeden bit vpravo.
- Kroky 1, 2 provedeme celkem n-krát.
- Výhoda: nízký počet hradel. Nevýhoda: nízká rychlost, n taktů pro násobení

Obvodová realizace násobení je založena na sčítačkách





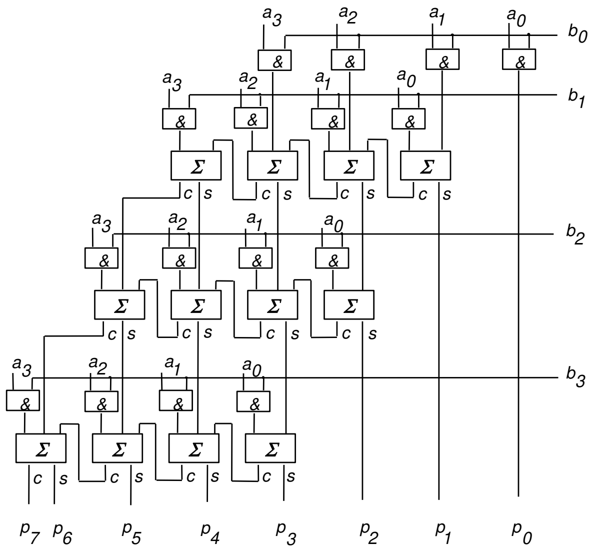
Poloviční sčítačka:

Zpoždění: 1 logický člen

Úplná sčítačka:

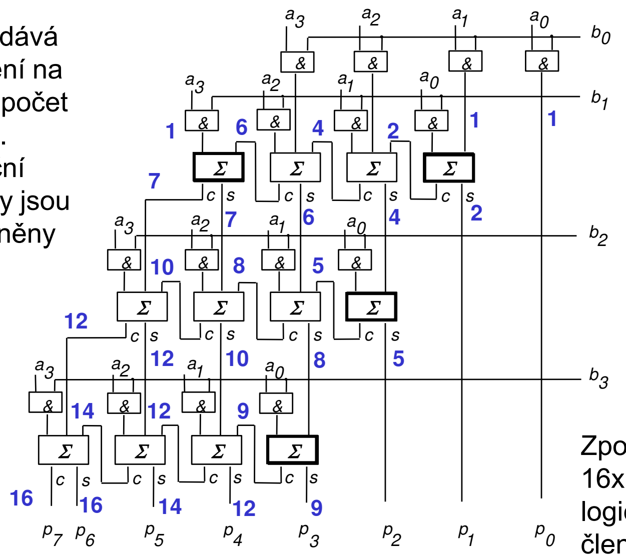
Zpoždění: 2 logické členy

Kombinační násobička (v jednom kroku)



Kombinační násobička – odvození zpoždění

Číslo udává zpoždění na vodiči (počet hradel). Poloviční sčítačky jsou znázorněny tučně.



Zpoždění: 16x zpoždění logického členu.

Popis ke kombinační násobičce

Jednotlivé dílčí součiny, tedy 1- a 0-násobky násobence, se tvoří řadou hradel a sčítají se na čtyřbitových sčítačkách s postupným přenosem.
Celkový **počet hradel** pro násobičku *nxn* bitů je O(n^2), celkový **počet jednobitových sčítaček** je $(n-1)x\ n$.

Zpoždění sčítačky určíme nalezením nejdelší cesty v kombinační síti. Je-li přenosové zpoždění hradla *T* a sčítačky 2*T*, má **nejdelší cesta přenosové zpoždění 16*T* *(nebo 8Δ, Δ = 2T)*.**

Toto zpoždění se s rostoucí délkou operandů dále zvětšuje. Je proto snaha nalézt uspořádání násobičky s rychlejší funkcí. Nejdříve se však zaměřme na násobení čísel se znaménkem.

Násobení čísel se znaménkem v doplňkovém kódu

$$P = (-y_{M-1}2^{M-1} + \sum_{j=0}^{M-2} y_j 2^j).(-x_{N-1}2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i)$$

Příklad pro M=N=6

	p_{11}	p_{10}	p_9	p_8	p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0
							y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0
							x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
$P = \sum_{i=0}^{N-2}\sum_{j=0}^{M-2} x_i y_j 2^{i+j}$								x_0y_4	x_0y_3	x_0y_2	x_0y_1	x_0y_0
							x_1y_4	x_1y_3	x_1y_2	x_1y_1	x_1y_0	
						x_2y_4	x_2y_3	x_2y_2	x_2y_1	x_2y_0		
					x_3y_4	x_3y_3	x_3y_2	x_3y_1	x_3y_0			
+				x_4y_4	x_4y_3	x_4y_2	x_4y_1	x_4y_0				
$x_{N-1}y_{M-1}2^{M+N-2}$		x_5y_5										
+ $-\sum_{i=0}^{N-2} x_i y_{M-1} 2^{i+M-1}$	1	1	$\overline{x_4y_5}$	$\overline{x_3y_5}$	$\overline{x_2y_5}$	$\overline{x_1y_5}$	$\overline{x_0y_5}$	1	1	1	1	1
												1
+ $-\sum_{j=0}^{M-2} x_{N-1} y_j 2^{j+N-1}$	1	1	$\overline{x_5y_4}$	$\overline{x_5y_3}$	$\overline{x_5y_2}$	$\overline{x_5y_1}$	$\overline{x_5y_0}$	1	1	1	1	1
												1

Záporný člen: negace, přičtení 1

Výsledek je na 12 bitech, obecně na M+N bitech.

Př. Násobení čísel se znaménkem - prakticky

(-4) x (-14) na 5 bitech v doplňkovém kódu. Protože je výsledek na 10 bitech, musíme důsledně rozšiřovat znaménko na 10 bitů – týká se záporných čísel.

```
        S               S
        1111111100 x 1111110010
-----------------------------------------------------
                         00000
                    1111111100
                       00000
                      00000
                 1111111100
-----------------------------------------------------
                1111111100
               1111111100
              1111111100
             1111111100
            1111111100
-----------------------------------------------------
                    0000111000
                    S
```


Násobení čísel se znaménkem - praxe

Co s tím? Důsledná práce se znaménkem:

- Výsledek násobení dvou čísel na *n* bitech bude na 2*n* bitech
- Tedy i vstupní operandy musí být správně zakódovány na 2*n* bitech
- Princip šíření hodnoty znaménkového bitu doleva - z toho vyplývají dva problémy:
  - **U dílčích součinů se objeví levostranné jedničky**
  - **Objeví se další dílčí součiny**
- Počet částečných součinů a šíření znaménkového bitu (1) lze redukovat pomocí Boothova algoritmu.
- Počet úrovní nutných pro sečtení částečných součinů lze redukovat pomocí Wallaceova stromu.

Princip Boothova překódování

Překódováním násobitele potenciálně velmi usnadníme násobení, protože zredukujeme počet částečných součinů a zbavíme se levostranných jedniček.

```
A*31      A     = A*32-A         A  násobenec
     11111               10000-1  násobitel
----------------------------------------------
          A                     -A
         A               A
        A
       A
      A
----------------------------------------------
 4 součty                          1 součet

Konvenční přístup              Boothova metoda
```

Boothovo překódování s radixem 2

Základem Boothova algoritmu je překódování násobitele do soustavy relativních číslic. Máme-li násobit číslem 31, tedy 00011111, dostaneme stejný výsledek, vynásobíme-li číslem (32 - 1), což zapíšeme v soustavě relativních číslic, která používá číslice 0, +1, -1, jako:

0 0 0 1 1 1 1 1
0 0 1 0 0 0 0-1

Tento princip aplikujeme na dvojkové číslo opakovaně pro všechny skupiny jedniček, přičemž za skupinu jedniček považujeme i jedinou jedničku.
Příklad:

0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1
1 0-1 0 0 1-1 1 0-1 1 0 0 0-1 1 0 0 0-1

Odtud můžeme sestavit překódovací tabulku. Kromě překódovaného bitu se řídíme ještě hodnotou sousedního bitu vpravo. Dostáváme tak základní Boothovo překódování, zvané též překódování s radixem 2.

Boothovo překódování s radixem 2

Překódovaná číslice	Sousední bit vpravo	Boothův kód
0	0	0
0	1	1
1	0	-1
1	1	0

Všimneme si překódování záporného násobitele, např. -6 na 5 bitech včetně znaménka. Toto číslo 11010 se překóduje na 0-11-10.

Rozšíříme-li zobrazení čísla -6 na 10 bitů, tedy na **11111**11010, pak v Boothově překódování se to projeví přidáním pěti levostranných nul, tedy dostaneme 000000-11-10.

Potom vznikají nulové částečné součiny, které usnadňují výsledné sčítání.

Příklad

13 x (-6) na 5 bitech vč. znaménka. Překódování násobitele ponecháme pouze na 5 bitech, protože levostranné nuly vyvolají vznik nulových a tedy bezvýznamných dílčích součinů.

13: 01101 6: 0 0 1 1 0
-13: 10011 -6: 1 1 0 1 0
Překódování násobitele 0-1 1-1 0

```
 0 x 13  0000000000
-1 x 13  111110011
 1 x 13  00001101
-1 x 13  1110011
 0 x 13  000000
-----------------------------------
         1110110010
         S
        -0001001110      tj. -78
```


Boothovo překódování s radixem 4

Je tedy odstraněn nepříznivý efekt záporného násobitele, zůstává však nutnost šíření znaménka u záporných dílčích součinů. Dalším požadavkem pro urychlení násobení je snížení počtu dílčích součinů. Oba tyto požadavky se řeší dalšími modifikacemi Boothova násobení.

Z jednoduchého Boothova překódování je odvozeno překódování "*2 bity najednou*", neboli *Boothovo překódování s radixem 4*.

1 1	0 1	0 1	1 0	0 1	původní číslo rozdělené do dvojic
2 1	2 1	2 1	2 1	2 1	váhy
0-1	1-1	1 0	-1 0	1-1	Boothovo překódování po jednom bitu
-1	1	2	-2	1	překódování "2 bity najednou"

Boothovo překódování – obecný počet bitů

Boothovo překódování lze definovat pro skupiny bitů libovolné velikosti. Obecný postup je takový: V každé skupině zopakujeme nejvyšší bit, a přičteme k nejnižšímu bitu nejvyšší bit ze skupiny vpravo. Výsledné číslo pak považujeme za relativní číslici v doplňkovém kódu.
Příklad pro radix 4 (tj. 2 bity najednou):

00	00	11	01	11	10	01	00	10	10	původní číslo
000	000	111	001	111	110	001	000	110	110	rozšíření znam. bitu
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	přičtení bitu zprava
000	001	111	010	000	110	001	001	111	110	doplňkový. kód rel. číslice
0	+1	-1	2	0	-2	+1	1	-1	-2	překódování s radixem 4

Z tohoto příkladu můžeme odvodit tabulku pro Boothovo překódování s radixem 4.

Boothovo překódování s radixem 4

Překódovaná skupina	Bit vpravo	Relativní číslice
00	0	0
00	1	+1
01	0	+1
01	1	+2
10	0	-2
10	1	-1
11	0	-1
11	1	0

Příklad – Boothovo překódování s radixem 4

13 x (-6):

13	01101	6: 00110	
-13	10011	-6: 11010	potřebujeme sudý počet bitů, rozšíříme znaménko na 111010
Boothovo překódování		0-11-10	po jednom bitu
		0-1 -2	po dvou bitech

S

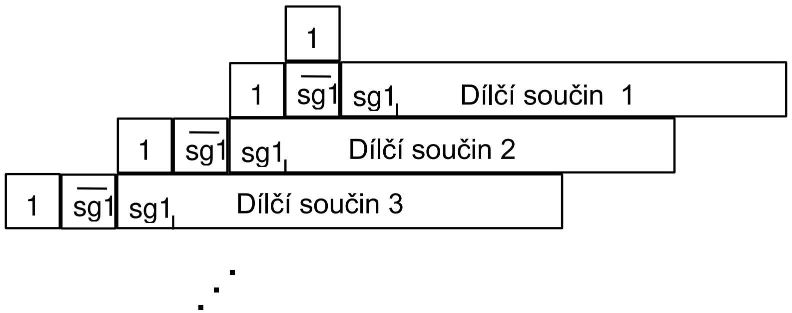
-2x13	1111100110	tj. -13 posunutá vlevo o 1 bit s krokem 2 bity
-1x13	11110011	
0x13	000000	

1110110010 **-78**
S

Komentář k příkladu 13 x (-6)

V prvním dílčím součinu se nám posunulo znaménko o jeden bit doleva. Tomu musíme přizpůsobit všechny ostatní dílčí součiny, tedy zapisovat je na 6 bitech. Znaménko výsledku očekáváme ovšem v 10. bitu.

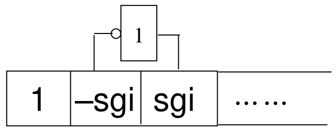
Šíření znaménka vlevo odstraňuje **metoda vroubení**. Místo šíření znaménka se ke každému dílčímu součinu připíše zleva negace znaménkového bitu a jednička, a nad znaménkový bit prvního dílčího součinu se napíše též jednička.



Př. 13 x (-6) s vroubením znaménka, 2 bity najednou

```
           001101
            0 -1 -2
----------------------
          1
         10100110
       10110011
     11000000
----------------------
     111110110010
       S
```

Obvodová realizace vroubení znaménka:



Boothovo překódování s radixem 8 (po 3 bitech)

Tabulka odvozena stejným způsobem jako pro radix 4.

Používá 9 relativních číslic.

Překódovat	Rel. číslice
000 0	0
000 1	+1
001 0	+1
001 1	+2
010 0	+2
010 1	+3
011 0	+3
011 1	+4
100 0	-4
100 1	-3
101 0	-3
101 1	-2
110 0	-2
110 1	-1
111 0	-1
111 1	0

Jak urychlit kombinační násobičku?

Urychlit sečtení částečných součinů zavedením „<u>uchování přenosů</u>“

Příklad: Sečtěte 6 + 7 + 12 + 8

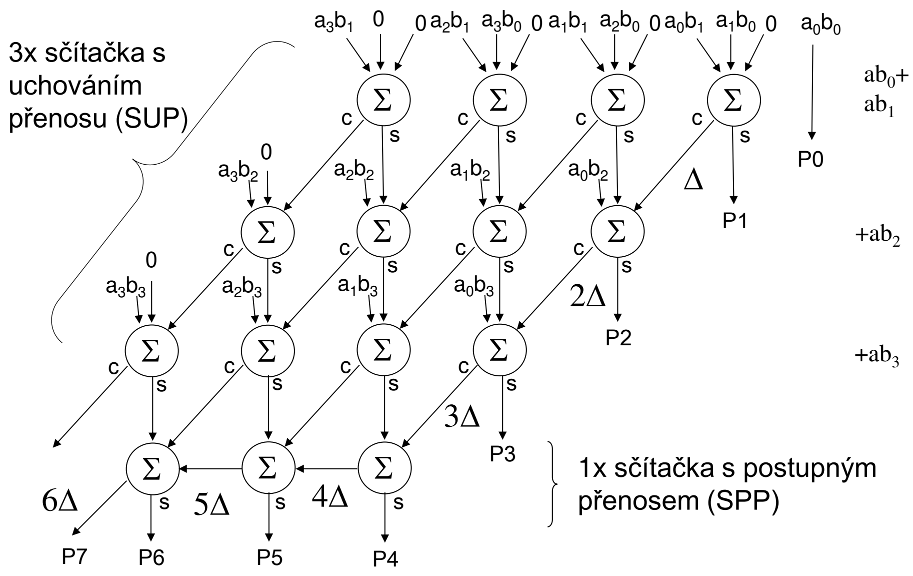
```
     110   (6)
     111   (7)
    ----
    1101   (13)
+   1100   (12)
   -----
   11001   (25)
+  01000   (8)
  ------
  100001   (33)
```

Konvenční sčítání:
Sečtou se první dva operandy, potom se k průběžnému výsledku přičítají další operandy. V rámci sčítání dvou operandů se použije sčítačka s <u>postupným přenosem</u> složená z úplných sčítaček.

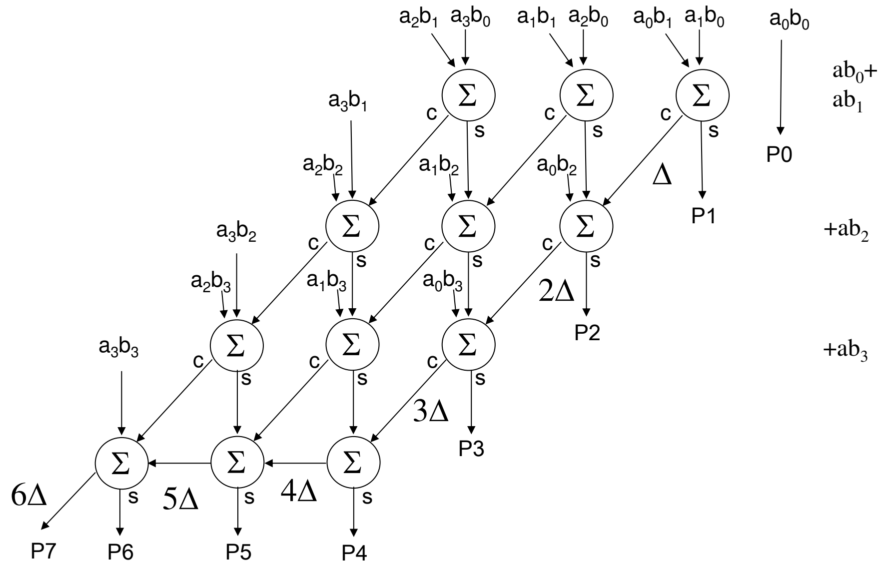
```
     110   (6)
     111   (7)
    ----
     001   součet bez přenosů (S1)
    110    uchování přenosu (C1)
+   1100   (12)
    ----
    0001   S1+C1+12 bez přenosů (S2)
   1100    uchování přenosu (C2)
+  01000   (8)
  ------
  100001   součet S2+C2+8 s přenosem
```

Sčítání s uchováním přenosu:
Sčítá se <u>bez uvážení přenosů</u> (tj. rychle). Avšak přenosy se uchovávají v registru a přičítají (pomocí úplných sčítaček) k průběžnému součtu a dalšímu operandu v následujícím kroku (opět bez přenosu). Přičtení posledního operandu se provede pomocí sčítačky s postupným přenosem.

4b kombinační násobička s uchováním přenosu



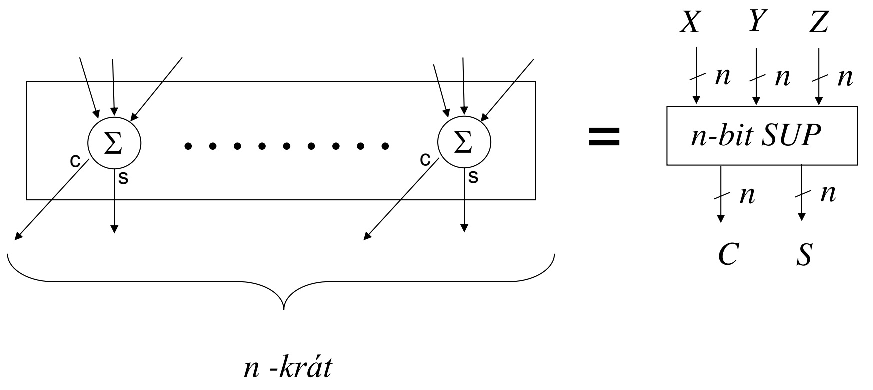
Optimalizovaná 4b kombinační násobička s uchováním přenosu



Komentář k násobičce s uchováním přenosů

Ze tří řad sčítacího stromu jsme odstranili sčítačky s postupným přenosem. Sčítačky v jedné řadě se označují jako **sčítačka s uchováním přenosu** (SUP, angl. CSA - Carry-Save Adder). V každém stupni se sčítačka v nejvyšším řádu redukovala na hradlo. Museli jsme však nakonec jednu řadu sčítaček s postupným přenosem (SPP) přidat. Nicméně toto uspořádání činnost násobičky obecně zrychluje.

Základem n-bitové násobičky s uchováním přenosu je n-bitová SUP:



Zobecněné využití sčítačky

Sčítačka s uchováním přenosu dovoluje chápat sčítání poněkud odlišným způsobem. Víme, že jednobitová sčítačka má tři vstupy a dva výstupy. Vzhledem k tomu, že vstupy pro přenos všech jednobitových sčítaček v prvním stupni jsou nevyužité, může se na ně přivést třetí dílčí součin.

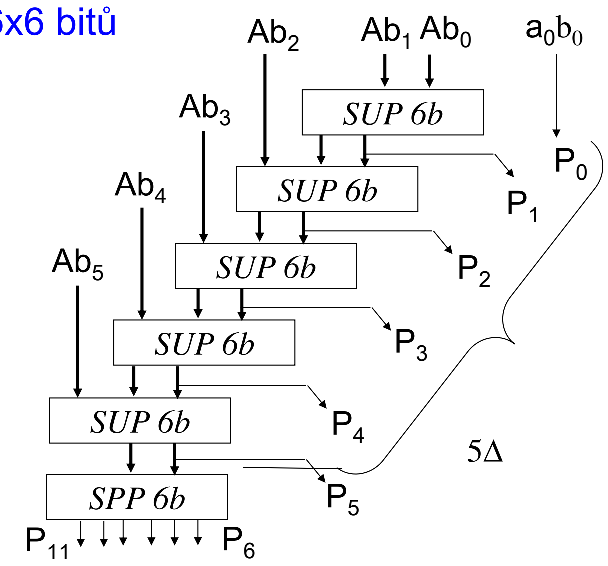
Na vstupech má tedy sčítačka tři binární vektory délky *n*, ovšem vzájemně posunuté do správné polohy. To se projeví tak, že v každém stupni je plný počet sčítaček (*n*). Součet tří dílčích součinů je dán výstupním vektorem součtu a výstupním vektorem přenosů. Poloha vektoru součtu je vzhledem ke konečnému výsledku správná, vektor přenosů se posouvá o jeden bit do vyššího řádu.

Takováto zobecněná **optimalizovaná sčítačka** je známá též pod označením **pseudosčítačka**, protože nedává ještě definitivní součet vstupních vektorů.

Blokové schéma násobičky s uchováním přenosu 6x6 bitů

$A = a_5a_4a_3a_2a_1a_0$

$B = b_5b_4b_3b_2b_1b_0$

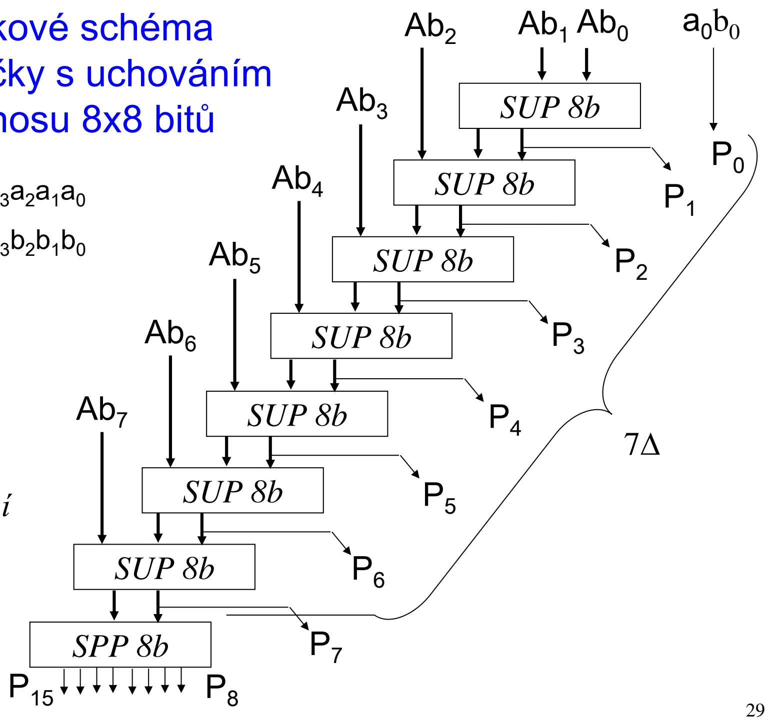


Blokové schéma násobičky s uchováním přenosu 8x8 bitů

$A = a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$

$B = b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$

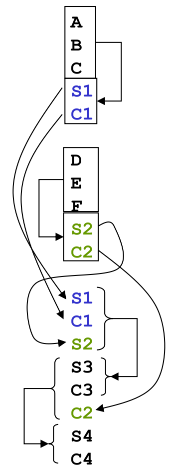
Nebylo by možné zredukovat počet sčítání a tím i zpoždění?



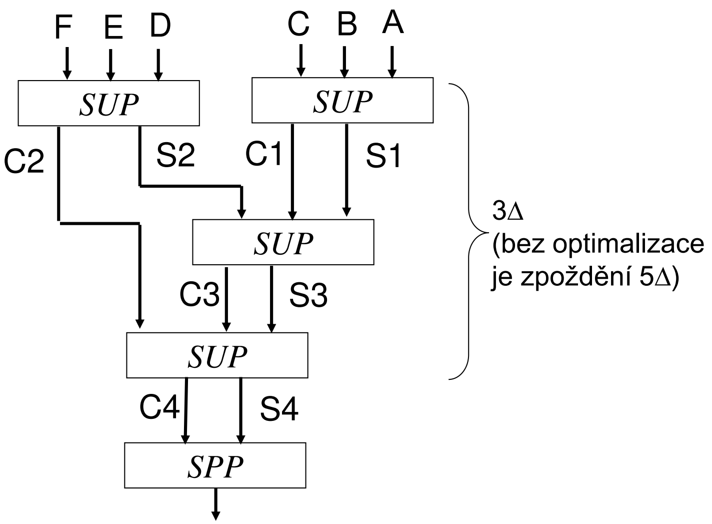
Zrychlené sčítání částečných součinů (A, B, C, D, E, F) při násobení s uchováním přenosu M x Q (6b x 6b)

Nejdříve jsou sečteny částečné součiny A, B a C, výsledek je v S1 a C1. Potom jsou sečteny částečné součiny D, E a F, výsledek je v S2 a C2. Následuje součet S1, C1 a S2, výsledek je v S3 a C3. Nakonec jsou sečteny S3, C3 a C2, výsledek je v S4 a C4. Sčítačkou s <u>postupným přenosem</u> jsou nakonec sečteny S4 a C4. Kromě posledního sčítání jsou všechna ostatní sčítání s uchováním přenosu.

```
             1 0 1 1 0 1   M
           x 1 1 1 1 1 1   Q
           -------------
             1 0 1 1 0 1
           1 0 1 1 0 1
         1 0 1 1 0 1
         ---------------
         1 1 0 0 0 0 1 1
       0 0 1 1 1 1 0 0

       1 0 1 1 0 1
     1 0 1 1 0 1
   1 0 1 1 0 1
   -----------
   1 1 0 0 0 0 1 1
 0 0 1 1 1 1 0 0

         1 1 0 0 0 0 1 1
       0 0 1 1 1 1 0 0
   1 1 0 0 0 0 1 1
   ---------------------
   1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1
 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
 0 0 1 1 1 1 0 0
 -----------------------
 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1
+0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0
 -----------------------
 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1   Součin
```

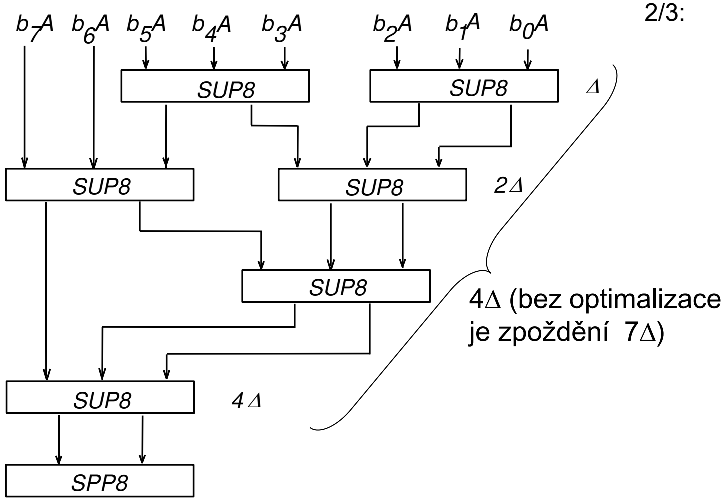


Zrychlené sčítání částečných součinů při násobení s uchováním přenosu 6x6 bitů – Wallaceův strom

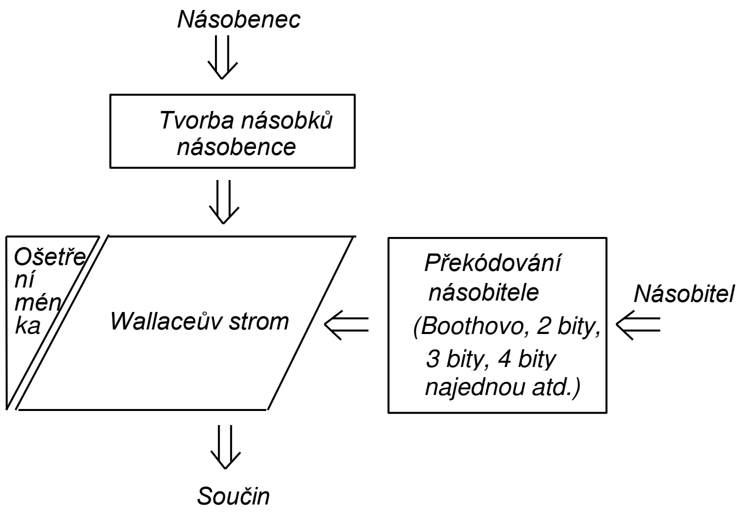


Wallaceův strom pro násobičku 8x8 bitů

V každém stupni (SUP) je redukován počet operandů na 2/3:

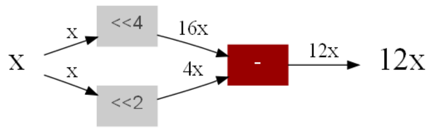


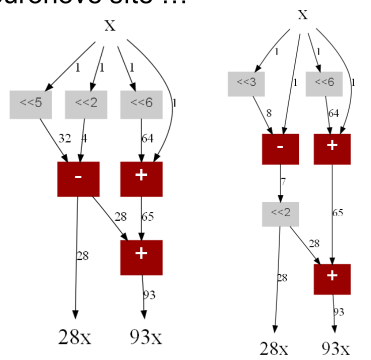
Shrnutí: Kombinační násobička čísel se znaménkem



Násobení konstantou

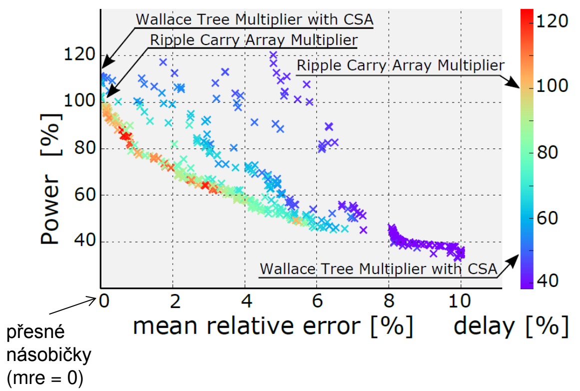
- Násobení **C** × **x**, kde C je konstanta, se často implementuje bez násobičky, pouze pomocí sčítání, odčítání a posuvů, což je úspornější. Posuv zde má nulovou cenu!
- Obdobně lze také implementovat násobení **x** × **y**, pokud víme, že y nabývá několika málo předem známých hodnot.
- Použití: zpracování signálů a obrazů, neuronové sítě …
- Příklady:
  - 12 × x
  - x × y, kde y ∈ {28, 93}





Aproximace aritmetických operací

- Pokud menší chyby ve výpočtu nemají významný dopad na kvalitu výstupu dané aplikace (např. zpracování obrazu, rozpoznávání pomocí neuronových sítí apod.), je užitečné aproximovat aritmetické operace a tím buď ušetřit energii nutnou pro výpočet nebo urychlit výpočet.
- Př. 8-bit násobičky bez znaménka (45 nm, 1V)



Použitá literatura

- Drábek, V.: Výstavba počítačů. Skriptum VUT, 1995
- Weste, N. H. E., Harris, D.: CMOS VLSI Design, 3. vydání, Addison Wesley, 2005
- Hamacher, C., Vranesic, Z., Zaky, S.: Computer Organization. McGraw-Hill, 2001