jméno a příjmení	login

IMA1, zadání L

1	2	3	4	5	6	Σ

Písemku vypracujte na vlastní papíry. U každého příkladu přehledně napište postup řešení a jasně označte výsledek. Každý příklad je za 15 bodů. V případě, že 3 nebo více příkladů bude hodnoceno 0 body, bude celá písemka hodnocena 0 body bez ohledu na ostatní příklady.

Povolená pomůcka je jeden list papíru formátu A4 popsaný jakkoli a čímkoli (tento list neodevzdávejte). Jiné pomůcky (např. kalkulačka) nejsou povoleny.

1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{x + 2 - \sqrt{x^2 - 1}}$ a najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $f(x) > 0$.

2. Nakreslete grafy funkcí f a g, pro které platí:

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f je sudá, asymptota v ∞ má předpis $x - 3y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f(2) = -1$, $f'_-(2) = -\infty$, $f'_+(2) = 2$.

b) $\forall K > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon\ 0 < |x - 3| < \delta \implies g(x) > K$.

3. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = x\sqrt{14 - x^2}$ na intervalu $\langle -3, 1\rangle$.

4. Zderivujte následující funkce: $f(x) = \dfrac{x}{2}\big(2x - 3\cos 5x\big)^3$, $g(x) = \ln \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Derivaci $f'(x)$ nemusíte nijak upravovat, derivaci $g'(x)$ upravte na podíl dvou polynomů.

5. Určete obsah plochy $\left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon \dfrac{1}{x} - 1 \le y \le 3 \wedge 0 < x \le 3\right\}$.

6. a) Načrtněte funkci, pro kterou *neplatí* následující tvrzení:
Jestliže funkce f nabývá na intervalu $\langle a, b\rangle$ maximum v bodě c, potom $f'(c) = 0$, nebo $f'(c)$ neexistuje.

b) Napište, jakou vlastnost funkce g popisuje následující tvrzení, a tvrzení znegujte:
$\forall x, y \in D(g)\colon g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$.

c) Rozhodněte o pravdivosti následujícího tvrzení (v případě nepravdivého tvrzení udejte protipříklad, v případě pravdivého tvrzení uveďte stručné zdůvodnění):
Jestliže je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) \cdot f(b) > 0$, potom na intervalu $\langle a, b\rangle$ neexistuje řešení rovnice $f(x) = 0$.