

Při řešení příkladu dbejte na to, abyste správně zapsali všechny potřebné jevy a váš zápis řešení dával smysl i pro nezávislého pozorovatele.

Příklad

Tři myslivci vystřelí na medvěda. Pravděpodobnosti zásahu jsou 0,4 pro prvního myslivce, 0,55 pro druhého a 0,7 pro třetího. Určete pravděpodobnost, že medvěda někdo z nich trefí.

$$\begin{array}{l} \text{1. myslivec} \dots 0,4 \\ \text{2. myslivec} \dots 0,55 \\ \text{3. myslivec} \dots 0,7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{1. myslivec} \dots 0,4 \\ \text{2. myslivec} \dots 0,55 \\ \text{3. myslivec} \dots 0,7 \end{array}} \right\} \Sigma \xrightarrow{\quad} P(A) = \frac{0,4 + 0,55 + 0,7}{3} = \frac{1,65}{3} = \underline{\underline{0,55}}$$

$A \dots$ aspoň jedna kulka zasáhne medvěda

celkem vystřelených kulek $\dots 3$

lsf

permutace - fixní pořadí (uspořádání věcí)

IPT

variance (v) uspořádaný výjev \leq prvky z množiny

kombinace (v) - výběr \leq prvky ze zadané množiny

Cvičení 1

variance s opakováním (v) - \leq , přičemž je povoleno opakování

kombinace s opakováním (v) - \leq , přičemž je povoleno opakování

Příklad 1

Turnaje se účastní 6 družstev. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

6! při 6 prvcích

variance bez opakování $V(6) = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

6 · 5 · 4 = 120 top 3 ✓

Příklad 2

Sázkař si chce vsadit na sportovní utkání. U každého zápasu lze zvolit 3 možnosti (0, 1, 2). Kolika způsoby může vyplnit sázenku obsahující 10 utkání?

usp. opak. \rightarrow variance s opak.

$V_{10}^1(3) = 3^{10} = 59049$

10 ← utkání (výběr) ✓
3 ← možnosti (0, 1, 2)

Příklad 3

V komunálních volbách kandiduje 5 politických stran. Vypočítejte, kolika možnými způsoby mohou výsledky voleb dopadnout, pokud žádné dvě strany nezískají stejný počet hlasů.

usp. neprvk. \rightarrow permutace

$P(5) = 5! = 120$ ✓

Příklad 4

posloupnost, zadaná variací.
 \Rightarrow 1 pozice : 1 slůvko

Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 šedé, 3 modré a 4 černé kostky.

usp. opak. \rightarrow permutace

$P(9) = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$

Příklad 5

Ve třídě je 10 žáků. Kolika způsoby lze vybrat 4 na vyzkoušení?

neusp. neopak - kombinace

$C_4^{10} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$

Příklad 6

V restauračním zařízení čepují 5 různých druhů piva. Pepa má velkou žízeň. Kolika způsoby si může dát 8 piv?

neusp. opakování - komb. s opak.

$C_8^{12} = \binom{12}{8} = 495$

Příklad 7

Házíme kostkou, dokud nepadne číslo 6. Určete Ω . Vypište elementární jevy tvořící jev „pokus skončí při a) druhém, b) třetím hodu.“

$\Omega = \{[6], [1,6], [2,6], \dots, [5,6], [1,1,6], [1,2,6], [1,3,6], \dots\}$

a) $\Omega = \{[6], [1,6], [2,6], [3,6], [4,6], [5,6]\}$

b) $\Omega = \{[1,1,6], [1,2,6], [1,3,6], [1,4,6], [1,5,6], [2,1,6], \dots\}$

Příklad 8

Dřevěnou krychli o straně 4 cm natřeme na červenou. Pak ji rozřežeme na krychličky o délce strany 1 cm. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička a) má právě 2 červené stěny, b) nemá žádnou červenou stěnu?

$4 \times 4 \times 4 = 64$ malých krychliček

A) právě 2 červené stěny $P(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

B) nemá červenou stěnu: 8 vnějších krychliček

$P(B) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

Příklad 9

Z karetní hry o 32 kartách náhodně vybereme (bez vrácení) 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna z nich je eso?

A... alespoň 1 eso $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} = 0,437$

\bar{A} ... žádné eso

záhada že $\binom{28+4}{4} = \binom{32}{4}$ a
 $\binom{4+0}{4} = \binom{4}{4}$

uspořádané?

opakující?

pravděpodobnosti

A)



Příklad 10

Pepa z přechozího příkladu se chystá z restaurace odjet na kole (přestože by ve svém stavu neměl). Kolo si samozřejmě zamknul zámkem, který má na společné ose 5 kotoučů. Na každém kotouči je 6 číslic. Zámek lze otevřít pouze zadáním správné kombinace číslic (pomineme klesť, pilku, autogen). Po množství zkonsumovaného alkoholu si však Pepa nemůže vybavit správnou kombinaci. Bude ji tedy volit náhodně. Je natolik unaven, že pokud se mu to nepovede napoprvé, tak své snažení vzdá a půjde domů pěšky. Jaká je pravděpodobnost, že Pepa otevře zámek?

$$P(A) = \frac{1}{6^5} = 0,0001286 \dots \text{ pepa jde pěšky}$$

Příklad 11

Hodíme 2x kostkou. S jakou pravděpodobností bude součet na obou kostkách větší než 9?

A... součet > 9

$$\Omega = \{[1,1], \dots, [6,6]\}$$

$$A = \{[5,5], [6,4], [4,6], [5,6], [6,5], [6,6]\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Příklad 12

Píšeme za sebe náhodně vybrané tři číslice desítkové soustavy (0, 1, 2, ..., 9). Jaká je pravděpodobnost, že

- napsané číslice budou různé, A
- právě dvě z číslic budou stejné, B
- všechny tři číslice budou stejné? C

$$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = \frac{72}{100} = 0,72$$

$$P(C) = \frac{10 \cdot 1 \cdot 1}{10^3} = 0,01$$

$$P(B) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}{10^3} = 0,27$$

Příklad 13

V osudí máme 5 bílých koulí a 7 černých koulí. Určete pravděpodobnost jevu:

- Jev A značí, že náhodně vytažená koule je bílá.
- Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev B značí, že obě koule jsou bílé.
- Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev C značí, že obě koule jsou černé.
- Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev D značí, že obě koule mají stejnou barvu.
- Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev E značí, že každá koule má jinou barvu.
- Náhodně vybereme 4 koule. Jev F značí, že všechny koule jsou černé.

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

$$P(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

$$P(C) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

$$P(D) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{72}$$

$$P(E) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{66}$$

$$P(F) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{7}{99}$$

Příklad 14

Hodiny, které nebyly včas nataženy, se po určité době zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví

- mezi 6 a 9?
- přesně na 6?

A... mezi 6 a 9

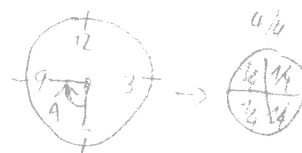
Ω ... úhel, který odměří ručička

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

B... na 6

$$P(B) = \frac{0}{2\pi} = 0 \dots \text{střeva nikdy}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 \dots \text{střeva jistě}$$



• → AND → násobení (postupnost v jedné situaci)

+ → OR → sečtení (postupnost nezávislých situací)

Příklad 10

Pepa z přechozího příkladu se chystá z restaurace odjet na kole (přestože by ve svém stavu neměl). Kolo si samozřejmě zamknul zámkem, který má na společné ose 5 kotoučů. Na každém kotouči je 6 číslic. Zámek lze otevřít pouze zadáním správné kombinace číslic (pomineme kleště, pilku, autogen). Po množství zkonsumovaného alkoholu si však Pepa nemůže vybavit správnou kombinaci. Bude ji tedy volit náhodně. Je natolik unaven, že pokud se mu to nepovede napoprvé, tak své snažení vzdá a půjde domů pěšky. Jaká je pravděpodobnost, že Pepa otevře zámek? *A... zámek se otevře.*

$$P(A) = \frac{1}{6^5} = 0,0001286 \dots \text{ pepa jde pěšky}$$

variace s opakováním

Příklad 11

Hodíme 2x kostkou. S jakou pravděpodobností bude součet na obou kostkách větší než 9?

A... součet > 9

$$\Omega = \{[1,1], \dots, [6,6]\}$$

$$A = \{[5,5], [6,4], [4,6], [5,6], [6,5], [6,6]\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

*velikostelné hodnoty!
klasická pravděpodobnost*

Příklad 12

Rišeme za sebe náhodně vybrané tři číslice desítkové soustavy (0, 1, 2, ..., 9). Jaká je pravděpodobnost, že

- napsané číslice budou různé, A
- právě dvě z číslic budou stejné, B
- všechny tři číslice budou stejné? C

$$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = \frac{72}{100} = 0,72$$

→ různé číslice

$$P(C) = \frac{10 \cdot 1 \cdot 1}{10^3} = 0,01$$

$$P(B) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}{10^3} = 0,27$$

(3) →

Příklad 13

V osudí máme 5 bílých koulí a 7 černých koulí. Určete pravděpodobnost jevu:

- Jev A značí, že náhodně vytažená koule je bílá.
- Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev B značí, že obě koule jsou bílé.
- Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev C značí, že obě koule jsou černé.
- Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev D značí, že obě koule mají stejnou barvu.
- Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev E značí, že každá koule má jinou barvu.
- Náhodně vybereme 4 koule. Jev F značí, že všechny koule jsou černé.

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

$$P(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

$$P(C) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

$$P(D) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{37}{72}$$

bílá → černá

Příklad 14

Hodiny, které nebyly včas nataženy, se po určité době zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví

- mezi 6 a 9?
- přesně na 6?

A... mezi 6 a 9

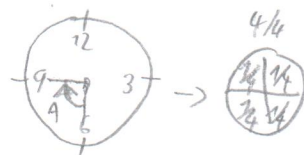
Ω... úhel, který oběhne ručička

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

B... na 6

$$P(B) = \frac{0}{2\pi} = 0 \dots \text{skoro nikdy}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 \dots \text{skoro jistě}$$



$$P(E) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{66}$$

bílá → černá

$$P(F) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{7}{99}$$

Kombinace čísel

- AND → násobení (poslednost v jedné situaci)
- + → OR → sečtení (poslednost nezávislých situací)