3. cvičení - nahrazení

(1. – 5.)

posunutí:

$x[n] = [3, 2, 1, -1]$

$N = 4$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_n	0	0	0	0	3	2	1	-1	0	0
$x[n-2]$					0	0	3	2	1	-1
$x[n+3]$	0	3	2	1	-1	0	0			
$x[-n]$	0	-1	1	2	3	0				
$x[-n-1]$	-1	1	2	3	0	0	0			
$x[-n+3]$			0	0	-1	1	2	3	0	0
$y[n] = n-2$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3

Kruhové posunutí:

(6. – 7.)

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
okno → $R_4[n]$					1	1	1	1		
$y[n] = x[\mathrm{mod}_4(n-2)]$		-1	3	2	1	-1	3	2	1	-1
$R_4[n] \cdot y[n]$			0	0	1	-1	3	2	0	0
					vykousnutí podle okna					
$y[n] = x[\mathrm{mod}_4(n+3)]$		3	2	1	-1	3	2	1	-1	3
$R_4[n] \cdot y[n]$					-1	3	2	1		

xschul06 Roland Schulz

3. Cvičení - nalivazení

Konvoluce

$N = 8$ $\quad x[n] = [1, 1, 1, 0, 0, 0.5, 0.5, 0]$ $\quad y[n] = x[n] * h[n]$

$h[n] = [1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ $\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

8

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x[n]			1	1	1	0	0	0.5	0.5	0		
h[n]			1	-1								
y[n]			1	0	0	-1	0	0.5	0	-0.5		
					↑ h[2-k]	↑ h[3-k]	↑ h[4-k]	...				

$$y[0] = x[0] * h[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[-k] = \underbrace{x[-2] \cdot h[2]}_{} + \underbrace{x[-1] \cdot h[1]}_{} + x[0] \cdot h[0] + \underbrace{x[1] \cdot h[-1]}_{} +$$

$$\underbrace{x[2] \cdot h[-2]}_{} + \underbrace{x[3] \cdot h[-3]}_{} + \underbrace{x[4] \cdot h[-4]}_{} + \underbrace{x[5] \cdot h[-5]}_{} +$$

$$\underbrace{x[6] \cdot h[-6]}_{} + \underbrace{x[7] \cdot h[-7]}_{} + \underbrace{x[8] \cdot h[-8]}_{} + \underbrace{x[9] \cdot h[-9]}_{}$$

$$= x[0] \cdot h[0] = 1 \cdot 1 = \underline{1}$$

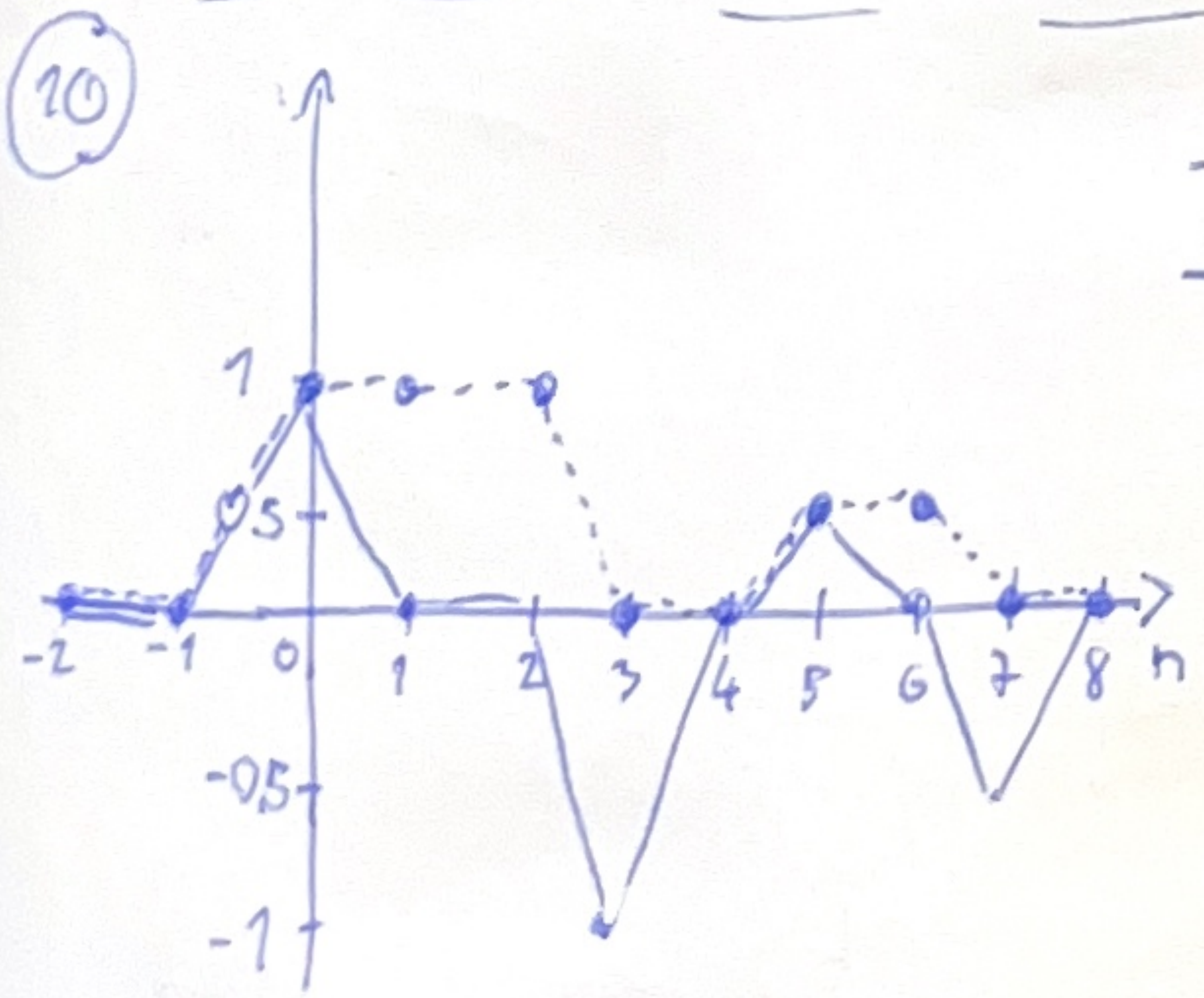
9

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x[n]			1	1	1	0	0	0.5	0.5	0	0	0
h[n]			1	-1								
x[-n]	1	1	1	0								
y[n]			1	0	0	-1	0	0.5	0	-0.5	0	0
						↑ x[3-k]						

$y = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$

$$y[0] = h[0] * x[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[-k] = h[0] \cdot x[0] + \underbrace{h[1] \cdot x[-1]}_{} = h[0] \cdot x[0] = 1 \cdot 1 = 1$$

10



=> ano, filtr funguje jako detektor hran

xschul06 Roland Schulz

3. cvičení - nahrazení

11-12

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \quad , N=8 \quad = \sum_{n=0}^{7} h[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{8} n}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	
$h[n]$	1	-1	0	0	0	0	0	0	$H[k]$
$e^{-j2\pi 0 \cdot n} = e^{0j}$	1	1	0	0	0	0	0	0	
$h[n] \cdot$ -//-	1	-1	-//-						0
$e^{-j\pi \frac{1}{4} n}$	1	$e^{-j\pi \frac{1}{4}}$	-//-						
$h[n] \cdot$ -//-	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$	-//-						$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$
$e^{-j\pi \frac{2}{4} n} = e^{-j\pi \frac{1}{2} n}$	1	$-j$	-//-						
$h[n] \cdot$ -//-	1	j	-//-						$1+j$
$e^{-j\pi \frac{3}{4} n}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$	-//-						
$h[n] \cdot$ -//-	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$	-//-						$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$
$e^{-j\pi n}$	1	-1	-//-						
$h[n] \cdot$ -//-	1	1	-//-						2

xschul06 Roland Schulz

3. cvičení - odnazení

(13)

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[k] \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \qquad N = 8$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y[n]	1	0	0	-1	0	0.5	0	-0.5	0
k	0	1	2	3	4	5	6	7	
Y[k]	0	$1+j\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1-j2$	$1+j\frac{1}{\sqrt{2}}$	2	$1-j\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1+j2$	$1-j\frac{1}{\sqrt{2}}$	

← np.fft.fft(y[0:8])

(14)

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k]$$

k	0	1	2	3	4
X[k]	4	1.35-0.85j	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}j$	0.65+0.15j	1
Y[k]	0	1+0.71j	1-2j	1+0,71j	2
H[k]	0	0,29+0.71j	1+j	1.71+1.71j	2
X[k]·H[k]	0	1+0,71j	1-2j	1+0,71j	2

(15) jak se situace změní pokud impulsní odezva h[n] = [1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0]

→ pokud N = 9, potom vše funguje

k	0	1	2	3	4
X[k]	4	1,22-1,02j	0,37-2,08j	0,25+0,43j	0,66+0,24j
H[k]	0	0,83+0,98j	1,94+0,34	1,5-0,87j	0.23-0,64j
Y[k]	0	2,02+0,36j	1,42-3,97j	0,75+0,43j	0,31-0,37j
X[k]·H[k]	0	2,02+0,36j	1,42-3,97j	0,75+0,43j	0,31-0,37j

xschul06 Roland Schulz

(15) pokračování

→ pokud $N=8$, potom ověření neplatí

k	0	1	2	3	4
$X[k]$	4	1.35 - 0.85j	-0,5-1,5j	0,65 + 0,15j	1
$H[k]$	0	1 + 1j	2	1 - 1j	0
$Y[k]$	0.5	2,71 + 0,5j	-0,5-3j	1,29 - 0,5j	0,5
$X[k]\cdot H[k]$	0	2,21 + 0,5j	-1-3j	0,79 - 0,5j	0

$\} Y[k] \neq X[k]\cdot H[k]$

→ pro $N=8$ je nutné použít kruhovou konvoluci

$y_c[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[\mathrm{mod}_8(n-k)]$, $\mathrm{mod}_8(x)$ vyjadřuje zbytek po dělení $\frac{x}{8}$

k	0	1	2	3	4
$Y_c[k]$	0	2,21 + 0,5j	-1-3j	0,79 - 0,5j	0
$X[k]\cdot H[k]$	0	2,21 + 0,5j	-1 -3j	0,79 - 0,5j	0

$\} Y_c[k] = X[k]\cdot H[k]$

xschul06 Roland Schulz