Operace v FP a iterační algoritmy

INP 2019

FIT VUT v Brně

Př. Latence instrukcí (mikroarchitektura Intel Haswell, 2013)

Instrukce	Latence
MOV r,r	1
MOV m,r	3
ADD r,r	1
MUL r32	4
DIV r32	22 – 29
ROR, ROL	1
FADD	3
FMUL	5
FDIV	10 – 24
FSQRT	10 – 23
FSIN	47 – 106
FPTAN	130

Jsou uvedeny minimální hodnoty latence jako počet hod. taktů jádra.
www.agner.org/optimize/instruction_tables.pdf

Operace FP

- Číslo X s pohyblivou řádovou čárkou $X = M_X.B^{Ex}$ zapíšeme jako dvojici (M_X, E_X), kde **mantisa** $\boldsymbol{M_X}$ je ve dvojkovém doplňkovém kódu, nebo v přímém kódu se znaménkem na n_M bitech, **exponent** $\boldsymbol{E_X}$ je v kódu s posunutím na n_E bitech. Třetím definičním údajem je hodnota **základu B.**
- Základní aritmetické operace pro dvojici čísel X, Y s plovoucí čárkou jsou:

$$X + Y = (M_X . 2^{Ex - Ey} + M_Y).2^{Ey}, \text{ kde } E_X \leq E_Y$$

$$X - Y = (M_X . 2^{Ex - Ey} - M_Y).2^{Ey}, \text{ kde } E_X \leq E_Y$$

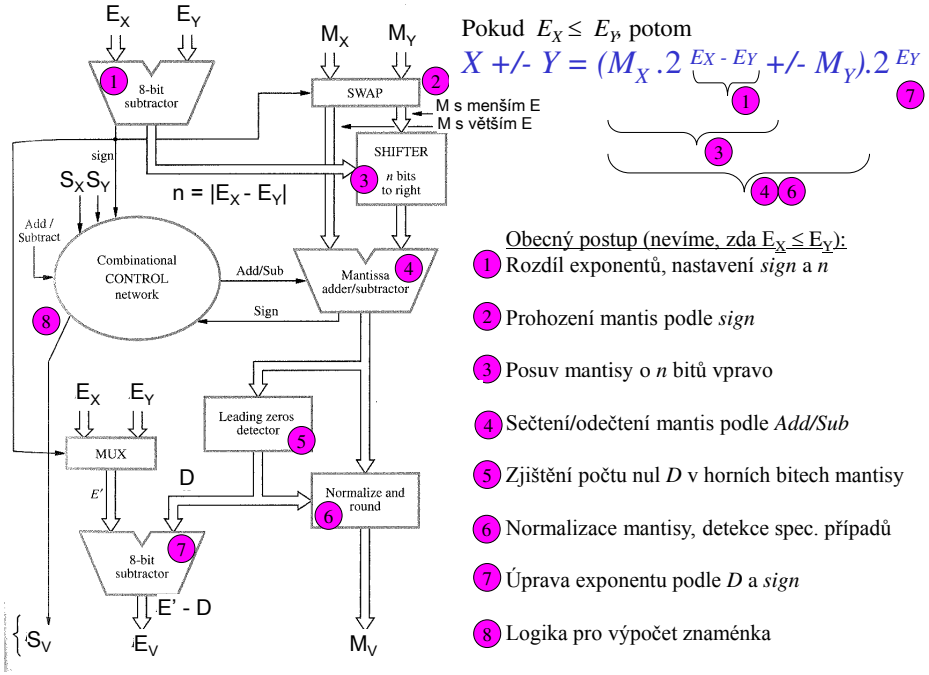
$$X * Y = (M_X . M_Y).2^{Ex + Ey}$$

$$X : Y = (M_X : M_Y).2^{Ex - Ey}$$

Požadované operace

- Pro sčítání a odčítání:
  - 1. Vypočte se v pevné čárce rozdíl $E_X - E_Y$
  - 2. Posune se M_X o $E_X - E_Y$ bitů (tj. doprava, pokud je $E_X \leq E_Y$)
  - 3. Vypočte se v pevné čárce $M_X . 2^{Ex - Ey} +/- M_Y$
- Dále je zapotřebí provést **normalizaci a zaokrouhlení výsledku** (viz přednáška Reprezentace dat). Nechť $V = (M_V, E_V)$ označuje výsledek. Normalizovat výsledek znamená posouvat mantisu vlevo (vpravo) a podle toho zmenšovat (zvětšovat) exponent E_V tak dlouho, až se do sledovaného bitu (v_0 nebo v_1) dostane 1.
- **Sčítání exponentů** se provádí v binární sčítačce s korekcí, nebo ve speciální sčítačce pro posunutý kód.
- **Sčítání mantis** se provádí v binární sčítačce se šířkou $n_M + 2$ bitů s doplněným záchytným klopným obvodem S.
- V případě násobení (dělení) v FP se využije pro násobení (dělení) mantis dedikovaná násobička (dělička) mantis pracující v FX.

Princip obvodové realizace sčítačky/odčítačky FP



Pokud $E_X \leq E_Y$, potom

$$X +/- Y = (M_X . 2^{E_X - E_Y} +/- M_Y).2^{E_Y}$$

(1), (3), (4 6), (7)

Obecný postup (nevíme, zda $E_X \leq E_Y$):

1. Rozdíl exponentů, nastavení *sign* a *n*
2. Prohození mantis podle *sign*
3. Posuv mantisy o *n* bitů vpravo
4. Sečtení/odečtení mantis podle *Add/Sub*
5. Zjištění počtu nul *D* v horních bitech mantisy
6. Normalizace mantisy, detekce spec. případů
7. Úprava exponentu podle *D* a *sign*
8. Logika pro výpočet znaménka

Obvodová realizace operací v FP

- Pro operace s pohyblivou čárkou prováděné v rámci uvedených algoritmů by bylo možno teoreticky použít sčítačku a násobičku ALU s pevnou čárkou. V praxi se to však takto neděje. Obvody aritmetiky s pohyblivou čárkou jsou konstruovány jako zcela nezávislá jednotka s vlastním řadičem.
- Dělení čísel s pohyblivou čárkou a celou řadu dalších operací (sinus, kosinus atd.) je možné v HW provádět iteračními algoritmy.

Newtonův iterační algoritmus

Na základě odhadu x_i hledáme přesnější odhad x_{i+1} v bodě průsečíku tečny funkce f s osou x. Rovnice přímky procházející bodem $f(x_i)$ je

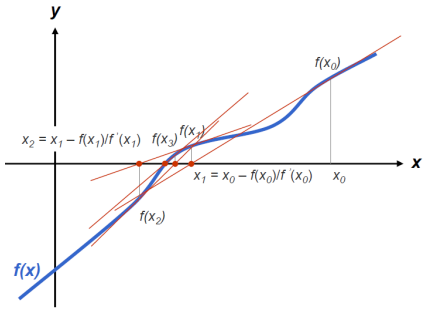
$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i).$$

Pokládáme-li přímku za aproximaci funkce $f(x)$, můžeme psát

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

V průsečíku tečny s osou x je $f(x_{i+1}) = 0$, takže odtud dostáváme iterační vzorec

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Newtonův algoritmus - dělení

Iterační vzorec

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

použijeme pro případ dělení. Máme-li dělit číslem b, zvolíme $f(x) = 1/x - b$, a hledáme bod průchodu této funkce osou x, tedy bod x, kde $f(x) = 0$, takže pak platí $1/x = b$, resp. $x = 1/b$. Operaci dělení číslem b nahradíme násobením číslem $1/b$.

Derivace $f'(x) = -1/x^2$, odtud

$$x_{i+1} = x_i - (1/x_i - b)/(-1/x_i^2) =$$
$$= x_i + x_i - bx_i^2 = x_i (2 - bx_i)$$

Rychlost konvergence závisí na volbě x_0 a je typicky kvadratická.

Newtonův algoritmus dělení - prakticky

Postup výpočtu *a / b* je následující:

1. Posune se b tak, aby padlo do intervalu <1, 2) a pomocí tabulky odhadů zvolíme první odhad x_0 .
2. Provedeme krok iteračního výpočtu $x_{i+1} = x_i\,(2 - bx_i)$. Krok 2 opakujeme tak dlouho, až se dosáhne požadované přesnosti na p bitů, kdy je relativní chyba $(x_i - 1/b)/(1/b) = 2^{-p}$. V následujícím kroku $i+1$ je relativní chyba
$$(x_{i+1} - 1/b)/(1/b) = 2^{-2p}$$
3. Výsledek n-té iterace x_n vynásobíme číslem a, výsledek $\boldsymbol{x_n.a}$ posuneme o odpovídající počet bitů podle kroku 1.

Newtonův algoritmus dělení - příklad

Spočtěte binárně $1/b$ pro $b = 20$. $(20)_{10} = (10100)_2$ $\quad x_{i+1} = x_i\,(2 - bx_i)$

- řádovou čárku posuneme tak, aby $b \in$ <1, 2), tedy:

  10100 → 1,0100 (o 4 bity doleva)

- zvolíme např. $x_0 = 1$, potom:

  $x_1 = x_0(2 - bx_0) = 1.(10 - 1{,}01) = 1.0{,}11 = 0{,}11$

  $x_2 = 0{,}11(10 - 1{,}01.0{,}11) = 0{,}11(10 - 0{,}1111) = 0{,}11.1{,}0001 = 0{,}110011$

  $x_3 = 0{,}110011(10 - 1{,}01.0{,}110011) = 0{,}110011(10 - 0{,}11111111) =$

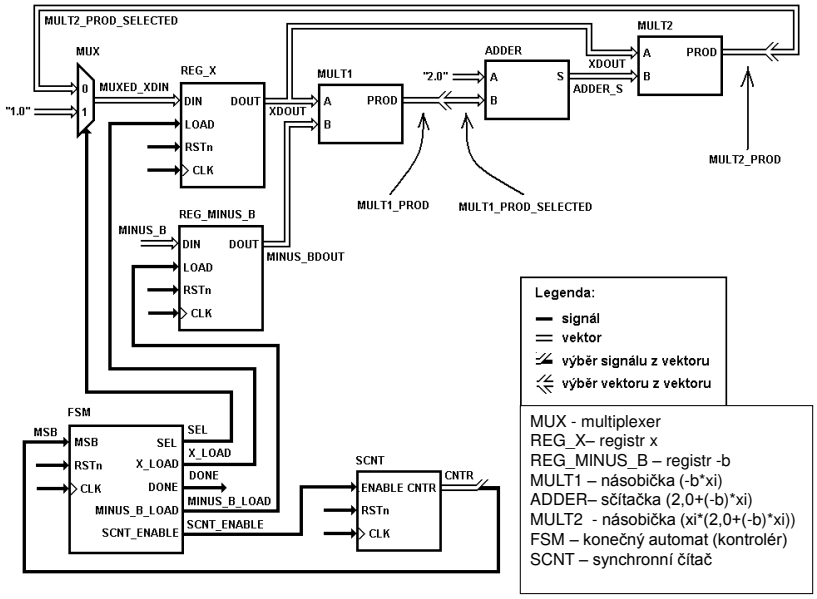
  $= 0{,}110011.1{,}00000001 = 0{,}11001100110011$

  atd.

- řádovou čárku posuneme o 4 bity doleva: 0,000011001100110011
  Ověření správnosti: 1/20 = 0,05 a
  $(0{,}000011001100110011)_2 = (0{,}051952362)_{10}$

Newtonův algoritmus dělení v HW

$x_{i+1} = x_i\,(2 - bx_i)$



Další funkce pomocí iteračních algoritmů

Zde platí, že postupy vhodné pro programovou implementaci, jako MacLaurinův rozvoj nebo Čebyševovy polynomy atd., nemusí být pro obvodovou realizaci iteračních výpočtů výhodné, a proto byla odvozena řada modifikovaných nebo nových algoritmů, např. Goldschmidtův algoritmus apod.

Všeobecná zásada je najít co nejrychlejší algoritmy, založené pouze na operacích sčítání (odčítání), posuvů a případně i násobení.

CORDIC

Algoritmus CORDIC (Coordinate Rotational Digital Computer) publikoval J. E. Volder v r. 1959. Následně byl zobecněn pro další typy výpočtů.

Myšlenka: Využitím jednoho algoritmu můžeme počítat řadu matematických funkcí pouhým vyčíslováním funkce ve tvaru

$$a \pm b.2^{-i}$$

tedy pomocí součtů, rozdílů a bitových posunů (tzn. rychlá a levná HW implementace).

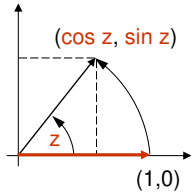
Použití: CORDIC je používán typicky ve vestavěných zařízeních s jednoduchým procesorem (kapesní kalkulačky, jednočipové mikrokontrolery, apod.), čímž umožňuje efektivně počítat mnoho funkcí. Používá se také např. v koprocesorech Intel počínaje I 8087, pro číslicovou Fourierovu transformaci, číslicovou filtraci signálů apod.

CORDIC – rotační režim

Algoritmus lze provozovat ve dvou režimech – rotačním a vektorovém. Každý režim umožňuje vypočítat jiné funkce.

Rotační režim

Princip: rotací vektoru (1,0) o úhel z získáváme hodnotu cos z a sin z.



Rotaci provádíme postupným přičítáním nebo odčítáním vhodně zvolených úhlů (postupně se zmenšující hodnoty) tak, aby získaná hodnota konvergovala k požadované hodnotě z.

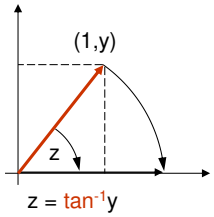
1. počátek v (1,0),
2. rotace tak, aby úhel byl z,
3. x = cos z a y = sin z

CORDIC – vektorový režim

Algoritmus lze provozovat ve dvou režimech – rotačním a vektorovém. Každý režim umožňuje vypočítat jiné funkce.

Vektorový režim

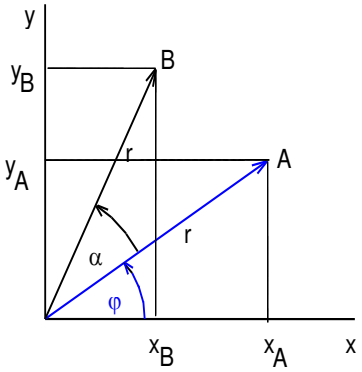
Princip: rotací vektoru (1,y) o úhel z tak, aby výsledný vektor byl rovnoběžný s osou X, získáváme hodnotu arctan y.



Nulování hodnoty y provádíme postupným přičítáním nebo odčítáním vhodně zvolených hodnot tak, aby získaná hodnota postupně konvergovala k 0.

1. počátek v (1,y),
2. rotace o z tak, aby y bylo 0,
3. z odpovídá tan-1 y

Rotace vektoru



Přechod od bodu A k bodu B lze obecně vyjádřit jako:

$$x_B = r.\cos(\varphi + \alpha) = r.\cos\varphi.\cos\alpha - r.\sin\varphi.\sin\alpha \quad (1)$$

$$y_B = r.\sin(\varphi + \alpha) = r.\sin\varphi.\cos\alpha + r.\cos\varphi.\sin\alpha \quad (2)$$

$$x_A = r.\cos\varphi$$

$$y_A = r.\sin\varphi$$

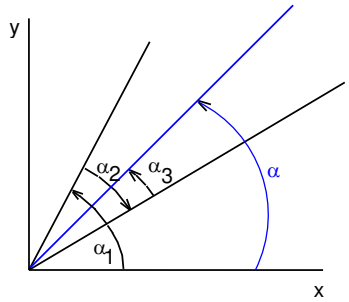
Dosadíme-li za r do (1) $r = x_A/\cos\varphi$, $r = y_A/\sin\varphi$ pořadě, a do (2) v opačném pořadí, dostaneme výrazy

$$x_B = \cos\alpha\,(x_A - y_A.tg\,\alpha)$$

$$y_B = \cos\alpha\,(y_A + x_A.tg\,\alpha)$$

Rotace vektoru

Požadovaný úhel natočení α můžeme složit z n úhlů s kladným i záporným znaménkem (viz obrázek), tedy z orientovaných úhlů α_i'.



Příklad:
rotace vektoru orientovaného do osy x o úhel α dosažená pomocí tří iterací s postupně se snižujícími absolutními hodnotami úhlů α_i

CORDIC – rotace vektoru

Výsledný úhel natočení $\alpha = \alpha_0' + \alpha_1' + \ldots \alpha_{n-1}'$

Postup iteračního výpočtu je pak následující:

Položíme $x_0 = x_A$, $y_0 = y_A$ a určíme x_{i+1}, y_{i+1} postupně pro $i = 0, 1 \ldots n-1$.

Dostáváme pak iterační vzorce

$$x_{i+1} = \cos \alpha_i' . (x_i - y_i . \operatorname{tg} \alpha_i') \qquad (3)$$

$$y_{i+1} = \cos \alpha_i' . (y_i + x_i . \operatorname{tg} \alpha_i') \qquad (4)$$

Problém: uvedený vztah vyžaduje implementovat obecné násobičky:

- každý krok obsahuje násobení odlišným koeficientem tg α_i'
- každý krok obsahuje násobení odlišným koeficientem cos α_i'

Řešení:

- vhodná volba úhlů α_i' tak, aby hodnota tg α_i' byla mocninou dvou
- zavedení pevného počtu iterací a odložení násobení koeficienty cos α_i'

CORDIC – rotace vektoru

Vhodná volba úhlů α_i'

Ve dvojkové soustavě volíme takové úhly α_i', že platí $\operatorname{tg} \alpha_i' = \pm 2^{-i}$.

Tato volba nemá vliv na konvergenci, neboť je-li tg α_i' klesající posloupnost, pak také α_i' je klesající posloupnost (viz tabulka dále).

Tím se v rovnicích (3), (4) nahradí násobení posuvem o i bitů (vpravo).

Odložení násobení

Další zjednodušení provedeme odložením násobení hodnotami cos α_i' nakonec výpočtu, kdy výsledek vynásobíme hodnotou (agregační konstanta)

$$K_{n-1} = \cos \alpha_0 . \cos \alpha_1 \ldots \cos \alpha_{n-1} = 0{,}60725\ldots$$

kde $\alpha_i = |\alpha_i'|$, protože platí $\cos \alpha_i' = \cos |\alpha_i'|$.

Hodnota agregační konstanty závisí pouze na počtu kroků, který je fixní a je volen na základě požadované přesnosti.

Tabulka úhlů CORDIC

Pro $i = 0, 1, \ldots$ sestavíme tabulku hodnot α_i, pro něž platí $\alpha_i = \operatorname{arctg} 2^{-i}$

i	α [°]	tg α	cos α	K
0	45,000	1	0,707107	0,707107
1	26,565	0,5	0,894427	0,632456
2	14,036	0,25	0,970143	0,613572
3	7,125	0,125	0,992278	0,608834
4	3,576	0,0625	0,998053	0,607648
5	1,790	0,03125	0,999512	0,607352
6	0,895	0,015625	0,999878	0,607278
7	0,448	0,0078125	0,999969	0,607259
…	…	…	…	…

Agregační konstanta K konverguje se zvětšujícím se počtem iterací k hodnotě 0,60725293.

CORDIC - finální podoba

Dosazením dostaneme konečný tvar iteračních vzorců

$$x_{i+1} = x_i - (+)\, y_i\, 2^{-i}$$
$$y_{i+1} = y_i + (-)\, x_i\, 2^{-i}$$
$$z_{i+1} = z_i + (-)\, \alpha_i$$

Rotační režim: vyjdeme-li z vektoru $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, přičemž $z_0 = \alpha$, pak aplikací iteračních vzorců tak, aby $z_n \to 0$ (tzn. natočili jsme vektor o úhel α), dostáváme po n iteracích hodnoty

$$x_n = \cos \alpha / K_{n-1}\,,\ y_n = \sin \alpha / K_{n-1}.$$

Abychom získali požadované hodnoty kosinu a sinu, musíme obě složky násobit agregační konstantou K_{n-1}.

Optimalizace: Položíme-li $x_0 = K_{n-1}$, $y_0 = 0$, vyhneme se závěrečnému násobení a výsledek je přímo roven

$$x_n = \cos \alpha\,,\ y_n = \sin \alpha\,.$$

Poznámka: Pro úhly větší než 90° využíváme symetrie a opakování grafu goniometrických funkcí.

Výpočet sin a cos pomocí CORDIC v jazyce Python

```
def cordic(alpha, n=16): #úhel alpha, počet iterací

    alphatab = [math.atan(2**(-i)) for i in range(n)]

    K = reduce(lambda x,y: x*y, [math.cos(a) for a in alphatab])
    x, y, z = K, 0.0, alpha

    for i in range(n):
        if z < 0:
            xn = x + y * 2**(-i)
            yn = y - x * 2**(-i)
            z += alphatab[i]
        else:
            xn = x - y * 2**(-i)
            yn = y + x * 2**(-i)
            z -= alphatab[i]
        x,y = xn,yn

    return (x, y) # cos(aplha), sin(aplha)
```

Tabulka úhlů

Výpočet agregační konstanty

Na základě hodnoty znaménka přičítáme nebo odčítáme úhel z tabulky úhlů.

Po n iteracích získáváme v x a y hodnoty cos(alpha) a sin(alpha)

Př. S využitím sedmi iterací algoritmu CORDIC vypočtěte sin(28.027°) a cos(28.027°)

Rotujeme vektor (1,0) o úhel 28.027°, průběžný úhel označme z.
$X_0 = 1 \quad Y_0 = 0 \quad z_0 = 28.027°$

Odečti úhel $\alpha_0 = 45° \to z_1 = z_0 - \alpha_0 = 28.027 - 45 = -16.973°$
Průběžný úhel je kladný, úhel α_0 odečítáme

$X_1 = X_0 - Y_0 / 1$	$= 1 - 0 / 1$	$= 1$
$Y_1 = Y_0 + X_0 / 1$	$= 0 + 1 / 1$	$= 1$

Přičti úhel $\alpha_1 = 26.565° \to z_2 = z_1 + \alpha_1 = -16.973 + 26.565 = 9.592°$
Průběžný úhel byl záporný, přičítáme a měníme znaménka

$X_2 = X_1 + Y_1 / 2$	$= 1 + 1 / 2$	$= 1.5$
$Y_2 = Y_1 - X_1 / 2$	$= 1 - 1 / 2$	$= 0.5$

Odečti úhel $\alpha_2 = 14.036° \to z_3 = z_2 - \alpha_2 = 9.592 - 14.036 = -4.444°$

$X_3 = X_2 - Y_2 / 4$	$= 1.5 - 0.5 / 4$	$= 1.375$
$Y_3 = Y_2 + X_2 / 4$	$= 0.5 + 1.5 / 4$	$= 0.875$

Přičti úhel $\alpha_3 = 7.125° \to z_4 = z_3 + \alpha_3 = -4.444 + 7.125 = 2.680°$

$X_4 = X_3 + Y_3 / 8$	$= 1.375 + 0.875 / 8$	$= 1.484375$
$Y_4 = Y_3 - X_3 / 8$	$= 0.875 - 1.375 / 8$	$= 0.703125$

Odečti úhel $\alpha_4 = 3.576° \to z_5 = z_4 - \alpha_4 = 2.680 - 3.576 = -0.895°$

$X_5 = X_4 - Y_4 / 16$	$= 1.484375 - 0.703125 / 16$	$= 1.440429$
$Y_5 = Y_4 + X_4 / 16$	$= 0.703125 + 1.484375 / 16$	$= 0.795898$

Přičti úhel $\alpha_5 = 1.790° \to z_6 = z_5 + \alpha_5 = -0.895 + 1.790 = 0.894°$

$X_6 = X_5 + Y_5 / 32$	$= 1.440429 + 0.795898 / 32$	$= 1.465300$
$Y_6 = Y_5 - X_5 / 32$	$= 0.795898 - 1.440429 / 32$	$= 0.750884$

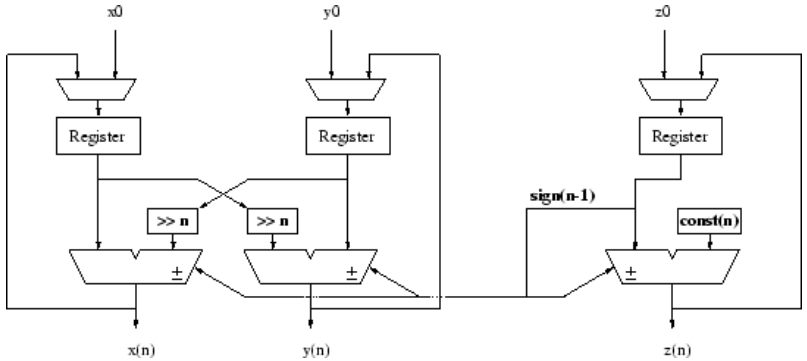
Odečti úhel z $\alpha_6 = 0.895° \to z_7 = z_6 - \alpha_6 = 0.894 - 0.895 = -0.0007°$

$X_7 = X_6 - Y_6 / 64$	$= 1.465300 - 0.750884 / 64$	$= 1.453567$
$Y_7 = Y_6 + X_6 / 64$	$= 0.750884 + 1.465300 / 64$	$= 0.773779$

Následuje násobení agregační konstantou odpovídající použitému počtu iterací, tzn. $K_6 = 0.607278$ a získání požadovaných hodnot:

$$\sin(28.027°) = 0.607278 * Y_7 = 0.46990$$
$$\cos(28.027°) = 0.607278 * X_7 = 0.88272$$

CORDIC – v HW (základní implementace)



úhel v kroku i

d_i je znaménko úhlu

$x_{i+1} = x_i + y_i.d_i.2^{-i}$

$y_{i+1} = y_i - x_i.d_i.2^{-i}$

$z_{i+1} = z_i - d_i.\text{arctanTab[i]}$

d_i = -1 pokud z_i<0, jinak +1

Zobecněný CORDIC

$$x_{i+1} = x_i - \mu\, d_i\, y_i\, 2^{-i}$$
$$y_{i+1} = y_i + d_i\, x_i\, 2^{-i}$$
$$z_{i+1} = z_i + d_i\, \alpha_i$$

- μ = 1 kruhové rotace (sin,cos) $\alpha_i = \tan^{-1} 2^{-i}$
- μ = 0 lineární rotace $\alpha_i = 2^{-i}$
- μ = -1 hyperbolické rotace $\alpha_i = \tanh^{-1} 2^{-i}$

- Přímý výpočet funkcí:
  sin, cos, $\tan^{-1}$, sinh, cosh, $\tanh^{-1}$, $\tan^{-1}(y/x)$, y + xz, $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, e^z, násobení, dělení

- Nepřímý výpočet funkcí:
  tan, tanh, ln, log, a^b, $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\cosh^{-1}$, $\sinh^{-1}$, $\sqrt{a}$

Násobení a dělení pomocí algoritmu CORDIC (lineární rotace)

```
def cordicdiv (a,b, n=16):
    x, y, z = b, a, 0.0

    for i in range(n):
        if y < 0:
            y += x * 2**-i
            z -= 2**-i
        else:
            y -= x * 2**-i
            z += 2**-i

    return z # a/b
```

Využíváme vektorový režim

```
def cordicmul (a,b, n=16):
    x, y, z = a, 0.0, b

    for i in range(n):
        if z >= 0:
            y += x * 2**-i
            z -= 2**-i
        else:
            y -= x * 2**-i
            z += 2**-i

    return y # a*b
```

Využíváme rotační režim

Konec kapitoly o implementaci aritmetických operací v HW