IPT cvičko 1. 29.9.2020 Roland Schulz (xschul06)

Při řešení příkladu dbejte na to, abyste správně zapsali všechny potřebné jevy a váš zápis řešení dával smysl i pro nezávislého pozorovatele.

Příklad

Tři myslivci vystřelí na medvěda. Pravděpodobnosti zásahu jsou 0,4 pro prvního myslivce, 0,55 pro druhého a 0,7 pro třetího. Určete pravděpodobnost, že medvěda někdo z nich trefí.

	P
1. myslivec ...	0,4
2. myslivec ...	0,55
3. myslivec ...	0,7

Σ

A ... aspoň jedna kulka zasáhne medvěda

$$P(A) = \frac{0,4 + 0,55 + 0,7}{3} = \frac{1,65}{3} = \underline{\underline{0.55}}$$

celkem vystřelených kulek ... 3

permutace(n) – fixní pořadí! (uspořádání všech) – možnost s opakováním

kombinace(k) – výběr k prvků ze zadané množiny

kombinace s opakováním(k) – –, přičemž je povoleno opakování

IPT

variace(k) uspořádaný výběr k prvků z množiny

variace s opakováním(k) – –, přičemž je povoleno opakování

Cvičení 1

Příklad 1

Turnaje se účastní 6 družstev. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

6! při 6 pozicích

uspořádané? opakující?

variace bez opakování $V_3(6) = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$ | $6 \cdot 5 \cdot 4$ … top 3 ✓

Příklad 2

Sázkař si chce vsadit na sportovní utkání. U každého zápasu lze zvolit 3 možnosti (0, 1, 2). Kolika způsoby může vyplnit sázenku obsahující 10 utkání?

usp. opak. → variace s opak. $V'_{10}(3) = 3^{10} = 59049$

10 ← utkání (výběr) ✓

3 tipy (0, 1, 2)

Příklad 3

V komunálních volbách kandiduje 5 politických stran. Vypočítejte, kolika možnými způsoby mohou výsledky voleb dopadnout, pokud žádné dvě strany nezískají stejný počet hlasů.

usp. neopak. → permutace $P(5) = 5! = 120$ ✓

posloupnost, žádná remíza → 1 pozice : 1 strana

Příklad 4

Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 šedé, 3 modré a 4 černé kostky.

usp. opak. → permutace $P'_{2,3,4}(9) = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$

Příklad 5

Ve třídě je 10 žáků. Kolika způsoby lze vybrat 4 na vyzkoušení?

neusp. neopak. – kombinace $C_4(10) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$

Příklad 6

V restauračním zařízení čepují 5 různých druhů piva. Pepa má velkou žízeň. Kolika způsoby si může dát 8 piv?

neusp. opakující – komb. s opak. $C'_8(5) = \binom{12}{8} = 495$

pravděpodobnost

Příklad 7

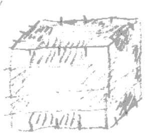
Házíme kostkou, dokud nepadne číslo 6. Určete Ω. Vypište elementární jevy tvořící jev „pokus skončí při a) druhém, b) třetím hodu."

$\Omega = \{[6], [1,6], [2,6], \ldots [5,6], [1,1,6], [1,2,6], [1,3,6], \ldots\}$

a) A = {[1,6], [2,6], … [5,6]}

b) B = {[1,1,6], [1,2,6], … [5,5,6]}

A)



Příklad 8

Dřevěnou krychli o straně 4 cm natřeme na červeno. Pak ji rozřežeme na krychličky o délce strany 1 cm. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička a) má právě 2 červené stěny, b) nemá žádnou červenou stěnu?

$4 \times 4 \times 4 = 64$ malých krychliček

A) právě 2 červené stěny $P(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

B) nemá červenou stěnu: 8 vnitřních krychliček $P(B) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

Příklad 9

Z karetní hry o 32 kartách náhodně vybereme (bez vracení) 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna z nich je eso?

A… alespoň 1 eso $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}\binom{4}{0}}{\binom{32}{4}} = 0{,}431$

$\bar{A}$… žádné eso

zásada že $(28+4) = (32)$ a $(4+0) = (4)$

Příklad 10

Pepa z přechozího příkladu se chystá z restaurace odjet na kole (přestože by ve svém stavu neměl). Kolo si samozřejmé zamknul zámkem, který má na společné ose 5 kotoučů. Na každém kotouči je 6 číslic. Zámek lze otevřít pouze zadáním správné kombinace číslic (pomineme kleště, pilku, autogen). Po množství zkonzumovaného alkoholu si však Pepa nemůže vybavit správnou kombinaci. Bude ji tedy volit náhodně. Je natolik unaven, že pokud se mu to nepovede napoprvé, tak své snažení vzdá a půjde domů pěšky. Jaká je pravděpodobnost, že Pepa otevře zámek? A... zámek se otevře.

u dobrých zámků je jen 1 kombinace

$$P(A) = \frac{1}{6^5} = 0{,}0001286$$ ... pepa jde pěšky

variace s opak. →

Příklad 11

Hodíme 2x kostkou. S jakou pravděpodobností bude součet na obou kostkách větší než 9?

A.. součet > 9

$\Omega = \{[1,1], \dots, [6,6]\}$

$A = \{[5,5], [6,4], [4,6], [5,6], [6,5], [6,6]\}$ ← rozlišitelné kostky!

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

⇓ ... pravděpodobnost!

Příklad 12

Píšeme za sebe náhodně vybrané tři číslice desítkové soustavy (0, 1, 2,..., 9). Jaká je pravděpodobnost, že

a) napsané číslice budou různé, A

b) právě dvě z číslic budou stejné, B

c) všechny tři číslice budou stejné? C

$$P(A) = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{10^3} = \frac{72}{100} = 0{,}72$$ ← různé číslice

$$P(C) = \frac{10\cdot 1\cdot 1}{10^3} = 0{,}01$$

$$P(B) = \frac{10\cdot 9\cdot 1\cdot 3 \binom{3}{2}}{10^3} = 0{,}27$$

Příklad 13

V osudí máme 5 bílých koulí a 7 černých koulí. Určete pravděpodobnost jevu:

a) Jev A značí, že náhodně vytažená koule je bílá.

b) Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev B značí, že obě koule jsou bílé.

c) Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev C značí, že obě koule jsou černé.

d) Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev D značí, že obě koule mají stejnou barvu.

e) Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev E značí, že každá koule má jinou barvu.

f) Náhodně vybereme 4 koule. Jev F značí, že všechny koule jsou černé.

př. 13)

$P(A) = \frac{5}{12}$

$P(B) = \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} = \frac{25}{144}$

$P(C) = \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

$P(D) = \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} + \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12} = \frac{37}{72}$

bílé ↗ černé ↗

$P(E) = \frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11} + \frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11} = \frac{35}{66}$

bč ↗ čb ↗

$P(F) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{7}{99}$

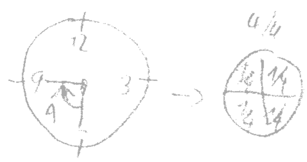
↗ kombinační čísla

Příklad 14

Hodiny, které nebyly včas nataženy, se po určité době zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví

a) mezi 6 a 9?

b) přesně na 6?



A ... mezi 6 a 9 Ω ... úhel, který opíše ručička

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

B ... na 6

$$P(B) = \frac{0}{2\pi} = 0$$ ... slovo nikdy

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1$$ ... slovo jistě

• → AND → násobení (posloupnost v jedné situaci)

+ → OR → součet (posloupnost nezávislých situací)

Příklad 10

Pepa z přechozího příkladu se chystá z restaurace odjet na kole (přestože by ve svém stavu neměl). Kolo si samozřejmé zamknul zámkem, který má na společné ose 5 kotoučů. Na každém kotouči je 6 číslic. Zámek lze otevřít pouze zadáním správné kombinace číslic (pomineme kleště, pilku, autogen). Po množství zkonzumovaného alkoholu si však Pepa nemůže vybavit správnou kombinaci. Bude ji tedy volit náhodně. Je natolik unaven, že pokud se mu to nepovede napoprvé, tak své snažení vzdá a půjde domů pěšky. Jaká je pravděpodobnost, že Pepa otevře zámek? A… zámek se otevře.

" u dobrých zámků je jen 1 kombinace

$P(A) = \frac{1}{6^5} \doteq 0{,}0001286$ … pepa jde pěšky

variace s opak. → 6^5

Příklad 11

Hodíme 2x kostkou. S jakou pravděpodobností bude součet na obou kostkách větší než 9?

A… součet > 9 — rozlišitelné kostky!

$\Omega = \{[1,1], \dots [6,6]\}$

$A = \{[5,5], [6,4], [4,6], [5,6], [6,5], [6,6]\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ klasická pravděpodobnost

Příklad 12

Píšeme za sebe náhodně vybrané tři číslice desítkové soustavy (0, 1, 2,…, 9). Jaká je pravděpodobnost, že

a) napsané číslice budou různé, A

b) právě dvě z číslic budou stejné, B

c) všechny tři číslice budou stejné? C

$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = \frac{72}{100} = 0{,}72$ ← různé číslice

$P(C) = \frac{10 \cdot 1 \cdot 1}{10^3} = 0{,}01$

$P(B) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 \binom{3}{2}}{10^3} = 0{,}27$

Příklad 13

V osudí máme 5 bílých koulí a 7 černých koulí. Určete pravděpodobnost jevu:

a) Jev A značí, že náhodně vytažená koule je bílá.

b) Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev B značí, že obě koule jsou bílé.

c) Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev C značí, že obě koule jsou černé.

d) Vytáhneme kouli, vrátíme ji zpátky a opět vytáhneme kouli. Jev D značí, že obě koule mají stejnou barvu.

e) Vytáhneme kouli, odložíme ji stranou a vytáhneme další kouli. Jev E značí, že každá koule má jinou barvu.

f) Náhodně vybereme 4 koule. Jev F značí, že všechny koule jsou černé.

př. 13:

$P(A) = \frac{5}{12}$

$P(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$

$P(C) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

$P(D) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{37}{72}$

bílá ↗ černá ↗

$P(E) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{66}$

bč → čb ↗

$P(F) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{7}{99}$

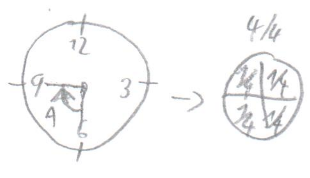
↑ kombinační čísla

Příklad 14

Hodiny, které nebyly včas nataženy, se po určité době zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví

a) mezi 6 a 9?

b) přesně na 6?



A… mezi 6 a 9   Ω… úhel, který oběhne ručička

$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}$

B… na 6 $P(B) = \frac{0}{2\pi} = 0$ … skoro nikdy

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1$ … skoro jistě

• → AND → násobení (posloupnost v jedné situaci)

\+ → OR → součet (posloupnost nezávislých situací) permutace(k) - fixní pořadí! (uspořádání všech!) - možnost s opakováním

IPT

variace(k) uspořádaný výběr k prvků z množiny

kombinace(k) - výběr k prvků ze zadané množiny

variace s opakováním(k) -//- , přičemž je povoleno opakování!

kombinace s opakováním(k) -//- , přičemž je povoleno opakování prvků

Cvičení 1

Příklad 1

Turnaje se účastní 6 družstev. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

uspořádané ?

6! při 6 pozicích

variace bez opakování $V_3(6) = \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!} = 6\cdot5\cdot4$ | $6\cdot5\cdot4$ při Top 3

Příklad 2

opakující ?

Sázkař si chce vsadit na sportovní utkání. U každého zápasu lze zvolit 3 možnosti (0, 1, 2). Kolika způsoby může vyplnit sázenku obsahující 10 utkání?

usp. opak. -> variace s opak $V'_{10}(3) = 3^{10} = 59049$

3^{10} ← 10 utkání (výběrů)

3 stavy (0,1,2)

Příklad 3

V komunálních volbách kandiduje 5 politických stran. Vypočítejte, kolika možnými způsoby mohou výsledky voleb dopadnout, pokud žádné dvě strany nezískají stejný počet hlasů.

usp. neopak. -> permutace $P(5) = 5! = 120$

posloupnost, žádná remíza => 1 pozice : 1 strana

Příklad 4

Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 šedé, 3 modré a 4 černé kostky. ↑ Sám

usp. opak. -> permutace $P'_{2,3,4}(9) = \frac{9!}{2!\cdot3!\cdot4!} = 1260$

Příklad 5

Ve třídě je 10 žáků. Kolika způsoby lze vybrat 4 na vyzkoušení?

neusp. neopak - kombinace $C_4(10) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot6!} = 210$

Příklad 6

V restauračním zařízení čepují 5 různých druhů piva. Pepa má velkou žízeň. Kolika způsoby si může dát 8 piv?

neusp. opakující. - komb. s opak $C'_8(5) = \binom{12}{8} = 495$

pravděpodobnosti:

Příklad 7

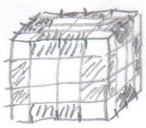
Házíme kostkou, dokud nepadne číslo 6. Určete Ω. Vypište elementární jevy tvořící jev „pokus skončí při a) druhém, b) třetím hodu."

$\Omega = \{[6], [1,6], [2,6], \dots [5,6], [1,1,6], [1,2,6], [1,3,6] \dots\}$

a) $a = \{[1,6], [2,6], [3,6], [4,6], [5,6]\}$

b) $b = \{[1,2,6], [1,1,6], \dots, [5,5,6]\}$

A)



Příklad 8

Dřevěnou krychli o straně 4 cm natřeme na červeno. Pak ji rozřežeme na krychličky o délce strany 1 cm. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička a) má právě 2 červené stěny, b) nemá žádnou červenou stěnu?

$4\times4\times4 = 64$ malých krychliček

A) právě 2 červené stěny $P(A) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

B) nemá červenou stěnu: 8 vnitřních krychliček $P(B) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

Příklad 9

Z karetní hry o 32 kartách náhodně vybereme (bez vracení) 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna z nich je eso?

A... alespoň 1 eso $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}\binom{4}{0}}{\binom{32}{4}} = 0{,}431$

$\bar{A}$... žádné eso

žádá že $(28 + 4) = (32)$ a $(4 + 0) = (4)$