

Graphpartitionierung zur Berücksichtigung des Straßengraphen in der Gebietsplanung

Diplomarbeit
von

Andreas Wagner

An der Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik (ITI)

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Peter Sanders
Dr. rer. nat. Christian Schulz
Dr. rer. nat. Nitin Ahuja

20. Dezember 2013

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

Karlsruhe, 20.12.2013

.....
(Andreas Wagner)

Danksagungen

Ich bedanke mich bei Prof. Sanders und Dr. Christian Schulz, das spannende Thema dieser Diplomarbeit bearbeiten zu dürfen und auch dafür, dass sie mir den Programmcode ihres Graphpartitionierers als Ausgangspunkt für meine Arbeit zur Verfügung gestellt haben.

Der PTV Group danke ich für die Möglichkeit diese Arbeit zu schreiben, die in enger Kooperation mit dem KIT entstanden ist. Insbesondere bei den täglichen Kurzbesprechungen fühlte ich mich in das Team der PTV gut eingebunden und bekam auch von den Mitarbeitern wertvolle Rückmeldungen zu meiner Arbeit. Ganz besonders möchte ich meinem Betreuer von der PTV, Dr. Nitin Ahuja, für die sehr hilfreichen Anregungen danken, die er mir für meine Arbeit gegeben hat. Ich danke auch meinen Eltern sowie meinen Freunden für ihre Unterstützung während dieser Arbeit.

Zeitgleich mit der Durchführung meiner Diplomarbeit wurden auch zwei andere Ansätze zum Gebietsplanungsproblem umgesetzt. Die erste Implementierung stammt von Prof. Nickel und seinem Mitarbeiter Alex Butsch. Das andere Verfahren entwickelte Matthias Bender vom FZI. In der gesamten Entwicklungszeit fand ein reger Austausch sowie eine Art Wettbewerb zwischen uns statt, der uns anspornte, gemeinsam unsere Lösungsansätze zu verbessern.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Abstract	3
1 Einführung	5
2 Grundlagen	9
2.1 Gebietsplanung	9
2.2 Graphentheorie	12
3 Verwandte Arbeiten	19
3.1 Wahlgebietsplanung und Gerry-Mandering	20
3.2 Genetischer Algorithmus von Forman und Yue	20
3.3 Verkaufsgebietsplanung	23
3.4 Bewertungsmaße für Territorien	24
3.5 Geometric Recursive Partitioning	26
3.6 MIP-Ansatz	27
3.7 Graphpartitionierer	27
4 Kompaktheitsmaße	33
4.1 Summe der paarweisen Distanzen	34
4.2 Minimaler Spannbaum	36
4.3 TSP sowie TSP Samples	36
4.4 Bizarreness	37
4.5 Abkürzungen für die Evaluierungsfunktionen	37
5 Verfahren	39
5.1 Modellierung des Gebietsplanungsproblems	40
5.2 Straßennetzwerk-basierte Verfahren	41
5.3 distanzmatrixbasierte Verfahren	45
5.4 Parameter	46
5.5 Partitionierung des erzeugten Graphen	47

6 Testinstanzen	51
6.1 Straßengraph	51
6.2 Vereinfachung des Straßengraphen	53
6.3 Testinstanzen aus zufälligen Straßenknoten	55
6.4 Bundesländer-Realdatentests	58
7 Experimente	61
7.1 Vergleich der Kompaktheitsmaße	62
7.2 Wahl der Parameter des Verfahrens	64
7.3 Evaluation des graphbasierten Gebietsplaners	66
8 Fazit und Ausblick	73
Literaturverzeichnis	76

Zusammenfassung

Gebietsplanung ist ein wichtiges Themenfeld des Operation Research. Es kommt bei der Festlegung von Wahlkreisen, der Planung von Gebieten für den Vertrieb, der Optimierung von Zustellbezirken sowie der Abdeckung der Bevölkerung mit öffentlichen Versorgungseinrichtungen zur Anwendung. Diese Diplomarbeit verfolgt den Ansatz, durch Einsatz leistungsfähiger Graphpartitionierungsalgorithmen gute Lösungen für Gebietsplanungsprobleme zu finden. Eine graphentheoretische Modellierung erlaubt es, Informationen aus den Straßengraphen zu nutzen, um die durchschnittliche Fahrtzeit für Touren innerhalb der erzeugten Gebiete gering zu halten. Gebiete sollen außerdem möglichst balanciert, gleich groß, kompakt sowie zusammenhängend geformt sein, um bei der Wahlkreisplanung Manipulationen zu erschweren und in den anderen Anwendungsfällen eine Steigerung der Effizienz zu erreichen. In dieser Arbeit modellieren wir auf graphentheoretischer Ebene diese Eigenschaften, bewerten und vergleichen sie mit bereits existierenden Forschungsergebnissen. Dabei untersuchen wir zahlreiche mathematische Formalisierungen der Kompaktheit, die in der Literatur existieren, jeweils auf Vorteile und Nachteile sowie auf den Anwendungsbereich. Um das Gebietsplanungsproblem auf ein Graphpartitionierungsproblem zu reduzieren, probieren wir unterschiedliche Möglichkeiten der Grapherzeugung aus. Diese Grapherstellungsverfahren implementieren wir in C++ und partitionieren die erzeugten Graphen mithilfe einer angepassten Version des *Karlsruhe Fast Flow Partitioner Evolutionary (KaFFPaE)*. Aus der erzeugten Partitionierung leiten wir dann eine Gebietseinteilung ab. Wir erzeugen synthetische Testinstanzen, die wir zur Bestimmung geeigneter Werte für die Parameter des Verfahrens einsetzen. Abschließend erfolgt die Evaluierung des Verfahrens mit realen Testdaten auf Bundesländerebene, wobei wir die mit dem graphbasierten Ansatz erzielten Ergebnisse mit anderen aktuellen Gebietsplanungsalgorithmen vergleichen.

Abstract

This thesis deals with applications of graph partitioning algorithms in the field of territory optimization. Given a number of customers in a geographical area, the goal is to partition the area in a given number of territories, such that their borders follow natural barriers (mountains, rivers, etc.), and customers close to each other get allocated to the same territory. Furthermore, these territories should be balanced, compact and contiguous. These properties are defined later on. We use graph partitioning algorithms to obtain a desired number of territories. For this we create different underlying graphs based on the road network. We describe our process and discuss the advantages of creating such graphs. Graph creation algorithms are implemented in C++ and the resulting graphs are partitioned with the help of KaFFPaE. Synthetic test instances created specifically for this application are used to find good values for various parameters of both, the underlying graph creation algorithm and KaFFPaE. The whole method is tested and evaluated based on test instances from various German states. Finally, we compare our approach with a geometric territory design approach.

1. Einführung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Möglichkeit des Einsatzes von Graphpartitionierungsalgorithmen in der Gebietsplanung unter Einbeziehung des Straßennetzwerks. Dazu implementieren wir einen Algorithmus in C++, der Kundenstandorte, die mit Koordinaten sowie einem Aktivitätsmaß versehen sind, in Gebiete einteilt. Informationen aus dem Straßengraphen nutzen wir dabei, um eine Aufteilung zu finden, die vorteilhaft für eine anschließende Tourenplanung ist. Gebietsgrenzen sollen bevorzugt entlang von Hindernissen geplant werden. Gewässer ohne Querungsmöglichkeit sowie Gebirge mit schlecht ausgebauter Straßeninfrastruktur zählen zu solchen Hindernissen. Kleinräumig gesehen geht auch von Bahnstrecken eine Barrierewirkung aus, wenn es wenig Querungsmöglichkeiten gibt. Im Straßennetzwerk ist die Information über solche Hindernisse enthalten, was sich dadurch zeigt, dass der Straßengraph an diesen Stellen dünner ist. Um diese Eigenschaft für die Gebietsplanung zu nutzen überführen wir das Gebietsplanungsproblem in ein Graphpartitionierungsproblem. Die Lösung des Graphpartitionierungsproblems erfolgt mittels einer modifizierten Version des Graphpartitionierers KaFFPaE [SS12a]. Dazu passen im Rahmen dieser Diplomarbeit der Quellcode von KaFFPaE am, welchen Dr. Christian Schulz für seiner Dissertation [Sch13] entwickelt hat.

Eine optimierte Gebietseinteilung führt zu großen Einsparpotenzialen durch kürzere Touren sowie Treibstoff- und Arbeitszeitzersparnis. Bei einer Verkürzung der Touren kann die Flottengröße bei gleichbleibender Bedienungshäufigkeit der Kunden reduziert werden, was den positiven Effekt einer höheren Fahrzeugauslastung hat. Alternativ können mehr Kunden mit dem gleichen Fahrzeugpool bedient werden. Dies führt zu größerer Effizienz, verminderter CO₂-Ausstoß und optimaler Nutzung der Ressourcen Mensch und Fahrzeug. Das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren entlastet auch den Planer, der bislang die Gebietsplanung größtenteils manuell durchführen musste.

Den geometrischen Ansatz des Recursive-Partitioning [KNS09] vergleichen wir mit der Graphpartitionierung mithilfe von KaFFPa (Karlsruhe Fast Flow Partitioner) [SS11] und KaFFPaE(Karlsruhe Fast Flow Partitioner Evolutionary) [SS12a]. Zu diesen Algorithmen existieren bereits Implementierungen in C++, die wir im Rahmen dieser Diplomarbeit nutzen und gegebenenfalls anpassen. Wir präzisieren Bewertungskriterien für das Ergebnis der Partitionierung und werten sie aus. Gängige Forderungen sind Balance (ausgeglichene Gebiete bezüglich des Aktivitätsmaßes), Kompaktheit (schöne Gebiete, gute Zugänglichkeit) und Kontiguität (zusammenhängende, nicht überlappende Gebiete).

Die Frage, wie Gebiete im Idealfall aussehen sollen, ist nicht abschließend geklärt. Nach unserem derzeitigen Kenntnisstand ist es bislang noch nicht gelungen, die mathematische Beschreibung von Bewertungsmaßen mit der intuitiven Vorstellung über gute Gebiete in Einklang zu bringen. Wie schwierig es ist, allein die Kompaktheit mathematisch zu beschreiben, zeigt unter anderem Young in seiner Abhandlung über die Kompaktheit von Wahlbezirken [You88].

In dieser Diplomarbeit wollen wir zeigen, dass Graphpartitionierungsalgorithmen für die Gebietsplanung erfolgreich angewendet werden können. Die bisherige Forschung hat mehrere sehr effiziente Verfahren hervorgebracht, um Graphen so zu partitionieren, dass die Anzahl der geschnittenen Kanten minimiert wird. Der Ansatz ist nun, ein Gebietsplanungsproblem auf ein Graphpartitionierungsproblem geeignet zu reduzieren. Schnitte mit geringem Gewicht sollen dabei mit guten Gebietsgrenzen korrespondieren. Nahe beieinanderliegende Kunden (Cluster) sollten dem gleichen Gebiet zugeordnet werden. Gebietsgrenzen, die mitten durch Cluster verlaufen, müssen deshalb Schnitten entsprechen, die viele Kanten schneiden. Folgt eine Gebietsgrenze in ihrem Verlauf einem natürlichen Hindernis, wie z. B. einem Fluss oder Berggrücken, dann soll der entsprechende Schnitt im Graphen so klein wie möglich sein. Schnitte, die durch Gegenden mit geringer Kundendichte verlaufen, sollen ebenfalls einem Schnitt entsprechen, der wenige Kanten schneidet. Diese Arbeit untersucht verschiedene Verfahren zur Erzeugung eines Graphen, der diese Bedingungen erfüllt und bewertet die daraus resultierende Gebietsplanung.

Vier verschiedene Möglichkeiten der Grapherzeugung werden untersucht. Der erste Ansatz besteht darin, direkt den Straßengraphen für die Partitionierung zu verwenden. Bei diesem Verfahren wird zuerst eine Vorpartitionierung des Straßengraphen berechnet, aus der man einen Quotientengraphen erhält. Die Vorpartitionierung wird durch eine gleichzeitige Breitensuche von allen Basisgebieten aus erreicht. Jeder Straßenknoten wird somit einem Kundenknoten zugeordnet. Kundenknoten, deren Gebiete aneinander angrenzen, sind im Quotientengraphen mit Kanten verbunden.

Die anderen drei Verfahren haben die Gemeinsamkeit, dass als Knoten nur die Kundenstandorte (Basisgebiete) verwendet werden. Auf geeignete Art und Weise fügen wir dann künstliche Kanten hinzu. Das bedeutet, dass diese Kanten keinem physikalischen Objekt, wie zum Beispiel Straßen, entsprechen. Die Anzahl der Kunden ist in der Regel um Größenordnungen geringer als die Anzahl der Straßenkreuzungen im betrachteten Gebiet. Dadurch verringert sich die Größe des Graphen und die Laufzeit des Graphpartitionierers. Außerdem entfällt die Notwendigkeit, die Grenzen des betrachteten Straßengraphen festzulegen. Dies ist vorteilhaft, wenn die Basisgebiete nicht gleichmäßig über ein Land verteilt sind. Die kleinste Integrationseinheit des Straßennetzwerks, die uns für die Untersuchung zur Verfügung steht, ist die Länderebene. Probleme entstehen, wenn nur in einem kleinen Teil des Landes Kunden liegen, da in diesem Fall trotzdem das gesamte Straßennetz verwendet werden muss.

Die anderen drei Verfahren benötigen lediglich eine Distanzmatrix. Diese enthält entweder Reisezeiten oder Straßenentfernungen. Mit ihr kann man einen Relative-Neighborhood-Graphen erzeugen oder einen Graphen mit kurzen Kanten. Dieses Verfahren nimmt einen minimalen Spannbaum zur Grundlage, der mit dem Kruskal-Algorithmus berechnet wird. Zusätzlich werden auch kurze Kanten hinzugenommen, solange der Knotengrad eine vorgegebene Schranke nicht überschreitet und die Kanten nicht zu lang sind. Für dieses Verfahren führen wir Testreihen durch, um optimale Parameter zu ermitteln. Die verschiedenen Grapherzeugungsalgorithmen werden in Abschnitt 5.3 genauer beschrieben.

Die Arbeit untersucht verschiedene Bewertungsmaße und vergleicht sie. Wir untersuchen, welche Bewertungsmaße stark miteinander korrelieren und welche unterschiedliche Aspekte einer Partitionierung sie bewerten. Ziel der Untersuchungen ist es für den jeweiligen Fall das geeignetste Gebietsplanungsverfahren zu ermitteln. Des Weiteren untersuchen wir die Parameter der Verfahren und finden durch Testreihen eine gute Werteverteilung. Mit geeigneter Parametrisierung erzielen wir vielversprechende Ergebnisse. Die Gebiete sind in den meisten Fällen zusammenhängend. Bei längeren Laufzeiten werden sie kompakter. Der untersuchte Ansatz ist generell brauchbar, um eine gute Partitionierung in angemessener Zeit zu finden. Es müssen allerdings noch gewisse Probleme mit manchmal nicht zusammenhängenden Gebieten gelöst werden.

2. Grundlagen

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die für diese Arbeit benötigten Grundlagen. Zuerst motivieren wir dazu das Gebietsplanungsproblem und formalisieren die grundlegenden Begriffe *Basisgebiet* und *Territorium*. Für die Zielsetzung der Gebietsplanung, die je nach Einsatzgebiet unterschiedlich ist, existiert unseres Erachtens in der Literatur keine allgemein anerkannte mathematische Formalisierung. Wir vergleichen in Kapitel 3 verschiedene bestehende Ansätze zur Bewertung von Gebietseinteilungen.

Das Verständnis der in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren erfordert Grundlagenwissen über Graphentheorie sowie Graphalgorithmen. Deshalb enthält dieses Kapitel eine Einführung in die Graphentheorie und erläutert dabei das mathematische Konzept eines Graphen mit den Begriffen *Knoten* und *Kanten*. Des Weiteren definieren wir *Knotengewichte* sowie *Kantengewichte* und erklären den Unterschied zwischen *gerichteten* und *ungerichteten* Kanten. Wir definieren den *minimalen Spannbaum* und stellen den *Kruskal-Algorithmus* zur Berechnung eines solchen vor. Da diese Arbeit die Anwendung von Graphpartitionierungsalgorithmen in der Gebietsplanung untersucht, stellen wir die Begriffe *Partition* sowie *Schnitt* vor und definieren sie. Wir erklären auch, was *Zusammenhang* eines Graphen bedeutet.

2.1 Gebietsplanung

Grundlage für die Gebietsplanung bilden kleine geografische Integrationseinheiten, die fortan *Basisgebiete* genannt werden. Der Name lehnt sich an die englischsprachige Bezeichnung „basic area“ an, die Kalcsics, Nickel und Schröder in ihrer Arbeit zur Gebietsplanung verwenden [KNS09, S. 4]. Im Folgenden wird diese sehr allgemein gehaltene Definition der Gebietsplanung wiedergegeben:

Definition 1 (Gebietsplanungsproblem) Ein Gebietsplanungsproblem besteht aus einer Menge V an Basisgebieten. Basisgebiete sind punktförmige (z. B. geo-kodierte Adressen), linienförmige (z. B. Straßen) oder flächige Objekte (z. B. Postleitzahlen-Gebiete) in der Ebene. Im Falle nicht-punktförmiger Objekte wird ein Basisgebiet $i \in V$ durch einen zentralen Punkt b_i repräsentiert. Jedes Basisgebiet i ist mit einem Aktivitätsmaß $w_i \in \mathbb{R}_+$ versehen. Das Aktivitätsmaß kann die Arbeitsbelastung für Kundenbesuche, Absatzmöglichkeiten, oder die Anzahl der Einwohner modellieren.

Definition 2 (Aktivitätsmaß) Das Aktivitätsmaß w für eine Teilmenge $T \subset V$ ist definiert als:

$$w(T) = \sum_{i \in T} w_i \quad (2.1)$$

Definition 3 (Territorien) Ein Gebiet, das sich aus mehreren Basisgebieten zusammensetzt, wird in dieser Arbeit Territorium $T_i \subset V$ genannt. Die Anzahl der zu erstellenden Territorien ist fest vorgegeben und wird mit p bezeichnet

Definition 4 (Vollständige Zuweisung) Wir fordern, dass jedes Basisgebiet in genau einem Territorium enthalten ist, das heißt, die Territorien definieren eine Partition auf der Menge V der Basisgebiete. Wenn $T_j \subset V$ das j-te Territorium bezeichnet dann gilt $T_1 \cup \dots \cup T_p = V$ und $T_j \cap T_k = \emptyset, \forall j \neq k, 1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq p$.

Definition 5 (Balance) In allen Territorien darf die Summe der Aktivitätsmaße maximal um einen vorgegebenen Prozentsatz vom Durchschnitt abweichen. Dies soll dazu führen, dass die Arbeitsbelastung gleichmäßig aufgeteilt wird und es zu keinen Überlastungen oder Nicht-Auslastungen von Territorien kommt. Gegeben seien n Basisgebiete b_i mit Aktivitätsmaß w_i . Das Gesamtgewicht w_{ges} wird definiert als:

$$w_{ges} = \sum_{i=1}^n w_i \quad (2.2)$$

Für jedes Territorium i wird eine Entscheidungsvariable X_i definiert, die genau dann den Wert 1 hat, wenn Basisgebiet b_i in Territorium T_i liegt. Damit lässt sich das Gewicht eines Territoriums definieren als:

$$w(T_j) = \sum_{i=1}^n w_i X_j \quad (2.3)$$

Für das optimale Gewicht w_{opt} eines Territoriums bei perfekter Balance ergibt sich:

$$w_{opt} = \frac{w_{ges}}{p} \quad (2.4)$$

Die Abweichung vom Optimalwert, genannt *Unausgewogenheit* u , eines Territoriums berechnet sich durch:

$$u = \max_{1 \leq i \leq p} \left(\frac{w(T_i)}{w_{opt}} - 1 \right) \quad (2.5)$$

Zu dieser Definition ist anzumerken, dass stets $\epsilon \geq 0$ gilt, da zumindest ein Territorium ein Gewicht $w(T_i) \geq w_{opt}$ besitzen muss. Wäre dies nicht der Fall, so ließe sich durch die Annahme $w(T_i) < w_{opt}$ ein Widerspruch konstruieren:

$$w_{ges} = \sum_{i=1}^n w_i \stackrel{4}{=} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n w_i X_j = \sum_{j=1}^n w(T_j) < pw_{opt} \stackrel{2.4}{=} w_{ges} \quad (2.6)$$

Wir fassen die *Unausgewogenheit* bei allen durchgeföhrten Testreihen als Nebenbedingung auf, die eingehalten werden muss. Ebenfalls denkbar – aber hier nicht untersucht – ist eine Berücksichtigung der *Unausgewogenheit* in der Zielfunktion. Dabei könnte die *Unausgewogenheit* linear mit dem Kompaktheitsmaß sowie anderen Funktionen zu einer neuen Zielfunktion kombiniert werden. Die Betrachtung der Balance als Nebenbedingung hat den Vorteil, dass sich dadurch die Zielfunktion vereinfacht. Der Nachteil einer Zielfunktion aus mehreren Summanden ist jedoch, dass dann Gewichtungsfaktoren festgelegt werden müssen. Diese unterscheiden sich jedoch von Beispiel zu Beispiel. Die *maximal zulässige Unausgewogenheit* ϵ setzt eine obere Schranke für den größten Wert der *Unausgewogenheit*, die in einer Lösung noch zulässig ist.

$$u \leq \epsilon \quad (2.7)$$

Um unterschiedliche Vorgaben bezüglich der *maximal zulässige Unausgewogenheit* zu testen werden sowohl eine obere Schranke von 5% als auch von 10% für ϵ_{max} betrachtet. Bei der Wahl von ϵ_{max} ist zu beachten, dass sich bei zu restriktiver Wahl die Kompaktheit des Ergebnisses verringert.

Definition 6 (Zusammenhang) Der Zusammenhang der Gebiete lässt im Nachbarschaftsgraph berechnen. Sind die Basisgebiete Flächen, so ist der Nachbarschaftsgraph durch die gemeinsamen Grenzlinien festgelegt. Bei punktförmigen Basisgebieten definieren wir den Zusammenhang auf dem *Relative-Neighborhood-Graphen* (siehe Definition 20).

Definition 7 (Kompaktheit) Geografisch kompakte Territorien zeichnen sich dadurch aus, dass sie auf einen menschlichen Betrachter rund-geformt und unverzerrt wirken.

Definition 8 (Ziel) Das Ziel der Gebietsplanung ist es, alle Basisgebiete V in p Territorien aufzuteilen, so dass diese balanciert, zusammenhängend, kompakt sind und sich nicht überlappen.

2.2 Graphentheorie

Dieser Abschnitt behandelt die Grundlagen zur Graphentheorie, wobei der Schwerpunkt auf Themenbereichen liegt, die für diese Diplomarbeit relevant sind. Er orientiert sich dabei an dem deutschsprachigen Lehrbuch *Graphentheorie* [Die06] von Reinhard Diestel. Die Definitionen in der vorliegenden Diplomarbeit sind kurz und prägnant gehalten. Nach Möglichkeit vermeiden wir Redundanzen in den Definitionen. Stattdessen erörtern wir im Fließtext wichtige Schlussfolgerungen aus den Definitionen.

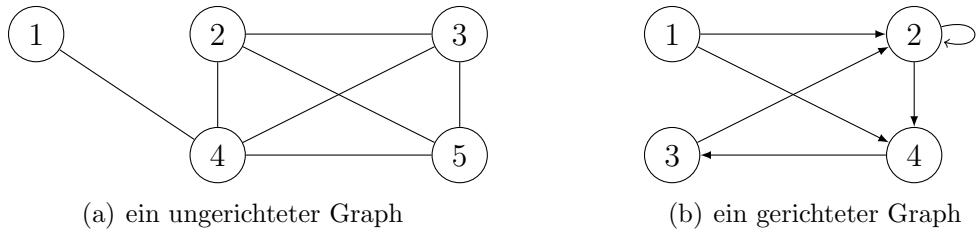
Grundwissen über Graphen

Die grundlegende Definition des mathematischen Konzepts eines Graphen ist in Definition 9 gegeben. Eine Kante $e \in E$ ist nach dieser Definition eine zweielementige Teilmenge der Knotenmenge V .

Definition 9 (Ungerichteter Graph) Ein Graph ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit einer Knotenmenge V , sowie einer Kantenmenge $E \subseteq [V]^2$. Die Mengen V und E sind disjunkt.

In Abbildung 2.2(a) ist eine visuelle Veranschaulichung eines Graphen zu sehen. Knoten sind dabei durch Kreise dargestellt, Kanten durch Linien zwischen den Knoten. Dazu ist anzumerken, dass dies nur eine Visualisierung des abstrakten mathematischen Konzepts eines Graphen ist. Die Position sowie die Form der gezeichneten Knoten und Kanten ist nicht Teil der mathematischen Definition. Das leichtere Erfassen der Struktur größerer Graphen wird durch eine gut gewählte Anordnung der Knoten und Kanten erleichtert. Zum automatischen Anordnen der Knoten und Kanten eines Graphen in der Ebene gibt es umfangreiche Forschungsergebnisse. Beispielhaft sei hier der Algorithmus von Kamada und Kawai zum Zeichnen von ungerichteten Graphen genannt [KK89].

Da eine Kante nach der Definition durch eine zweielementige Knotenmenge keine Richtung besitzt, wird solch eine Kante allgemein auch als *ungerichtet* bezeichnet. Ein *ungerichteter Graph*, ist ein Graph, der nur ungerichtete Kanten besitzt. Unter einem *Graphen* ohne weitere Zusatzbeschreibung wird in der Regel ein *ungerichteter Graph* verstanden [Vol91, S. 1]. Eine Definition einer Kante als Tupel, statt als Menge ermöglicht es eine Richtung festzulegen. Solche Kanten werden *gerichtet* genannt. In Definition 10 wird ein Graph definiert, der nur gerichtete Kanten enthält.

Abbildung 2.1: Beispiel-Graphen

Definition 10 (Gerichteter Graph) Ein Tupel $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$ wird als *gerichteter Graph* bezeichnet. V ist die Knotenmenge und E die Kantenmenge.

Gerichtete Kanten werden gewöhnlich durch Pfeile visualisiert, wie in Abbildung 2.2(b) zu sehen ist. Der gerichtete Graph in dieser Abbildung besitzt eine *Schlinge* (siehe Definition 11) an Knoten ②. Um Schlingen auch für ungerichtete Graphen zu erlauben, muss Definition der Kantenmenge E auf folgende Weise um einelementige Mengen erweitert werden: $E \subseteq V \cup [V]^2$.

Definition 11 (Schlinge) Eine Schlinge ist eine Kante $e = (v, v) \in E$, bei der Start- und Ziel-Knoten der selbe sind.

Die Modellierung von ungerichteten sowie gerichteten Graphen, wie in Definition 9 und 10 gegeben, schließt parallele Kanten den gleichen Endpunkten aus, da Kanten durch Mengen repräsentiert werden. Graphen, die mehrere parallele Kanten zwischen zwei Knoten zulassen, werden *Multigraphen* genannt. Eine Möglichkeit, dies zu modellieren ist es, jedem Tupel durch eine Funktion $f_k : V \times V \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine ganzzahlige Kardinalität zuzuordnen. Man kann jedoch auch Kanten durch eine Funktion $f_e : E \rightarrow [V]^2$ festlegen. Die Funktion f_e bestimmt dabei die Endknoten einer Kante.

Definition 12 (Multigraph) Ein *Multigraph* ist ein Tripel (V, E, f_e) , wobei V die Knotenmenge, E die Kantenmenge und $f_e : E \rightarrow [V]^2$ eine Funktion ist, die jeder Kante ihre Endknoten zuweist. Die Mengen E und V sind disjunkt.

Die Definitionen eines Multigraphen unterscheiden sich in der Literatur. Teilweise sind diese Definitionen äquivalent; es gibt aber auch Unterschiede. So definiert etwa Volkmann: „Ein Graph ohne Schlingen heißt *Multigraph*“. [Vol91, S.2], während hingegen Diestel schreibt, dass auch ein Multigraph Schlingen haben kann [Die06, S31]. Wir entscheiden uns in Definition 12 dafür, Schlingen nicht zuzulassen.

Für die Graphpartitionierung in dieser Arbeit setzen wir ungerichtete Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten ein. Solche Graphen werden auch als *schlichte Graphen* bezeichnet. Dieser Begriff wird in der Literatur verwendet, um sie

von Multigraphen abzugrenzen [Die06, S. 32]. Für die Eingabe der Partitionierung verwenden wir zur Speicherung eines Graphen das Metis Dateiformat [Kar13, S. 9].

Bei der Modellierung von Graphen sind Kantengewichtsfunktionen oft nützlich. So können Mehrfachkanten auch durch eine ganzzahlige Kantengewichtsfunktion repräsentiert werden. Knotengewichtsfunktionen mit ganzzahligen Werten werden bei der Kontraktion von mehreren Knoten verwendet. Dabei wird dem kontrahierten Knoten die Summe des Gewichts der Knoten, aus denen er entstanden ist, zugewiesen. In den Definitionen 13 und 14 wird als Wertebereich die Menge der reellen Zahlen verwendet. Ebenso sind jedoch auch andere Wertebereiche in den Definitionen denkbar, so zum Beispiel die natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

Definition 13 (Kantengewichtsfunktion) Eine Kantengewichtsfunktion ist eine Funktion $w_e(e) : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 14 (Knotengewichtsfunktion) Eine Knotengewichtsfunktion ist eine Funktion $w_v(v) : V \rightarrow \mathbb{R}$

Definition 15 (Pfad) Ein *Pfad* ist eine Sequenz von Knoten, bei der aufeinanderfolgende Knoten stets mit einer Kante verbunden sind. Ein *einfacher Pfad* enthält jeden Knoten maximal einmal.

Definition 16 (Zusammenhang) Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist zusammenhängend, wenn für alle Paare an Knoten $u, v \in V$ ein Pfad von u nach v im Graphen G existiert.

Minimale Spannbäume

Für die Definition eines Baums gibt es mehrere äquivalente Möglichkeiten. Eine davon zweigen wir in Definition 17. Diese Definition sowie alle restlichen in diesem Kapitel beziehen sich auf ungerichtete Graphen. Ein Baum mit n Knoten besitzt $n - 1$ Kanten. Zwischen zwei Ecken eines Baums existiert genau ein Weg. Knoten vom Grad eins in einem Baum werden als *Blätter* bezeichnet.

Definition 17 (Baum) Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph, bei dem zwischen je zwei Knoten genau ein Pfad existiert.

Definition 18 (Spannbaum) Ein Teilgraph $S = (V_s, E_s)$ von $G = (V, E)$, der ein Baum mit $|V_s| = |V|$ Kanten ist, wird als *Spannbaum* von G bezeichnet.

Definition 19 (Minimaler Spannbaum) Gegeben ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$ sowie eine Kantengewichtsfunktion f_e . Ein minimaler Spannbaum $G_{MST} = (V_{MST}, E_{MST})$ ist ein Spannbaum von G , bei dem $\sum_{e \in E_{MST}} f_e(e)$ minimal ist.

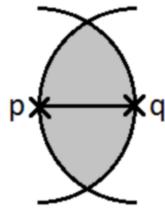
Ein spezieller Spannbaum ist der *minimale Spannbaum*, welcher als MST (Englisch: minimum spanning tree) abgekürzt wird. Der minimale Spannbaum ist nicht eindeutig. Zu seiner Berechnung existieren zwei bekannte Algorithmen: Der Algorithmus von Kruskal und der Jarnik-Prim-Algorithmus. Die Komplexität des Jarnik-Prim-Algorithmus beträgt bei Verwendung eines Fibonacci-Heaps als Datenstruktur $O(n + m \log(m))$. Der Kruskal-Algorithmus [Kru56] hat eine Zeit-Komplexität von $O(m \log(m) + m \log^*(m))$, wenn eine Union-Find-Datenstruktur mit Union-By-Size sowie Pfadkompression verwendet wird. Bei \log^* handelt es sich um den iterierten Logarithmus. Der iterierte Logarithmus wächst so langsam, dass er in der Praxis als konstant angesehen werden kann, da selbst $\log^*(2^{65536})$ nur den Wert 5 liefert. Der Kruskal-Algorithmus wird im Rahmen dieser Arbeit in C++ implementiert. Ausgehend von diesem Algorithmus beschreiben wir ein Verfahren, mit dem wir aus einer Distanz-Matrix einen speziellen Graphen für die Partitionierung berechnen.

Relative-Neighborhood-Graph

Godfried Toussaint definiert 1980 den sogenannten *Relative-Neighborhood-Graphen (RNG)*. Dieser Graph berechnet sich aus einer Punktmenge und soll die Struktur widerspiegeln, die ein menschlicher Betrachter in einer Punktmenge wahrnimmt. Der *Relative-Neighborhood-Graph* ist ein Teilgraph der Delaunay-Triangulierung und der minimale Spannbaum ist wiederum ein Teilgraph des *Relative-Neighborhood-Graphen* [Tou80].

Definition 20 (Relative-Neighborhood Graph) Gegeben sei eine Punktmenge V sowie eine Entfernungsmetrik $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0$ mit $p_1, p_2 \in V$. Der Relative-Neighborhood-Graph ist dann der ungerichtete Graph $G_{RNG} = (V, E)$. Eine Kante $e = \{x, y\}$ ist genau dann in E enthalten, wenn $\max(d(z, x), d(z, y)) < d(x, y)$ für alle $y, z \in V$ gilt.

Bei euklidischer Entfernung folgt aus Definition 20, dass sich in dem grau schraffierten Bereich in Abbildung 2.2 kein weiterer Knoten befinden darf. Die Definition lässt sich auch auf die Metrik der Straßenentfernung übertragen. Dazu wird eine Distanzmatrix mit allen paarweisen Entfernungen benötigt. Zwei Knoten p und q sind im Relative-Neighborhood-Graph genau dann verbunden, wenn es keinen Knoten r gibt, der sowohl näher an p als auch näher an q liegt. Als Entfernungsmaß zwischen zwei Punkten p und q dient die Summe der Straßenentfernung beziehungsweise Reisezeit in beide Richtungen. Der resultierende Graph entspricht in etwa dem, was man sich intuitiv unter einer Nachbarschaftsbeziehung vorstellt. Der Relative-Neighborhood-Graph hat auch den Vorteil, dass er nicht nur für die euklidische, sondern auch für die Metrik der Straßenentfernung und der Reisezeit definiert werden kann.

Abbildung 2.2: Knotenfreier Bereich um eine Kante beim RNG

Partition eines Graphen

Eine *Partition* ist eine Aufteilung eines Graphen $G = (V, E)$ in mehrere Teile. In Definition 23 wird dafür eine Aufteilung der Knotenmenge des Graphen durchgeführt. Für jedes Element $V_i \in P$ einer Partition lässt sich ein *knoteninduzierter Teilgraph* von G berechnen. Der *knoten-induzierte Teilgraph* enthält dabei genau die Kanten $\{u, v\}$, für die $u \in V_i$ und $v \in V_i$ gilt. Diese Teilgraphen werden als *Blöcke* bezeichnet.

Definition 21 (Schnitt) Sei $\{V_1, V_2\}$ eine Partition eines Graphen $G = (V, E)$. Dann ist der Schnitt definiert als die Menge S der Kanten, welche die Partition kreuzen. Formal ausgedrückt gilt: $S := \cup_{\{v_1, v_2\} \in E} \{v_1, v_2\}$ wobei $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Definition 22 (Minimaler s-t-Schnitt) Ein *s-t-Schnitt* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Schnitt, der einen Knoten $s \in V$ von einem Knoten $t \in V$ trennt. Der *minimale s-t-Schnitt* ist derjenige, bei dem die Summe der Kantengewichte der Schnittkanten minimal ist.

Definition 23 (Partition) Eine Menge $P = \{V_1, \dots, V_k\}$ ist eine Partition eines Graphen $G = (V, E)$, wobei $\dot{\cup} P := \dot{\cup}_{i=1}^k V_i = V$ eine disjunkte Vereinigung ist und $V_i \neq \emptyset$ für jedes i gilt.

Definition 24 (Block) Sei $P = \{V_1, \dots, V_k\}$ eine Partition eines Graphen G . Dann bezeichnen wir den durch $V_i \in P$ knoten-induzierten Teilgraphen von G als einen *Block*.

Ein Schnitt teilt einen Graphen in zwei Teile auf und legt damit eine Partition mit Kardinalität zwei fest. Umgekehrt entspricht auch eine Partition mit zwei Elementen einem Schnitt. Das Problem des minimalen s-t-Schnitts ist analog zu dem Problem einen maximalen Fluss zwischen den Knoten s und t zu finden. Diese Dualität wird als *Max-Flow-Min-Cut-Theorem* bezeichnet [FF54].

Handelsreisendenproblem

Die Aufgabe beim Handelsreisendenproblem (auf Englisch travelling salesman problem) besteht darin, eine Rundtour minimaler Länge über eine vorgegebene Menge an

Standorten zu planen, so dass jeder Standort genau einmal besucht wird. Bei der graphentheoretischen Beschreibung des Handelsreisendenproblems werden die Standorte als Knoten eines Graphen G modelliert. G ist ein ungerichteter, vollständiger Graph mit Kantengewichten. Die Kantengewichte geben die Entferungen zwischen den Standorten an. Die Kantengewichte sind dabei durch die paarweisen Entferungen zwischen den Standorten festgelegt. Als Metrik für die Berechnung der paarweisen Entferungen kommt die euklidische Metrik, oder eine Metrik auf Entfernungen im Straßennetzwerk zur Anwendung. Die Standorte für das Handelsreisendenproblem bei der Gebietsplanung sind die Basisgebiete. Bereits für euklidische Metrik ist das Handelsreisenden-Problem bewiesenermaßen NP-vollständig [Pap77].

Graphpartitionierungsproblem

Das sogenannte *Graphpartitionierungsproblem* ist ein zentraler Bestandteil dieser Diplomarbeit. Bei dem Graphpartitionierungsproblem ist die Zielsetzung, einen Graphen in mehrere annähernd gleich große Teile aufzuteilen. Aus der Menge der möglichen Lösungen soll diejenige gefunden werden, die eine gewisse Zielfunktion maximiert oder minimiert. Die formale Definition des *Graphpartitionierungsproblems* lautet wie folgt [BMS⁺14, S. 2]:

Definition 25 (Graphpartitionierungsproblem) Seien $k \in \mathbb{N}, k > 1$ und ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit *nicht-negativen* Kantengewichten $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sei gegeben. Beim *Graphpartitionierungsproblem* ist eine zulässige Lösung eine Partition des Graphen G , welche die *Balance-Bedingung* $\forall i \in \{i, \dots, k\} : |V_i| \leq L_{max} := (1 + \epsilon)$ erfüllt. Ziel ist es, aus dem Lösungsraum diejenige Partition zu ermitteln, die eine bestimmte *Zielfunktion* maximiert oder minimiert.

Wegen der Komplexität der Graphpartitionierungsprobleme werden zur Lösung Heuristiken eingesetzt. Bereits ohne eine Balance-Bedingung ist es NP-schwer, diejenige Partition in drei Teile zu finden, welche die Anzahl der geschnittenen Kanten minimiert [BJ92].

Die Ähnlichkeiten dieses Optimierungsproblems mit dem Gebietsplanungsproblem werden im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt. Der Ansatz ist dabei, ein Gebietsplanungsproblem in ein Graphpartitionierungsproblem zu überführen, um dann einen Graphpartitionierer darauf anzuwenden. Zunächst werden jedoch im nächsten Kapitel bestehende Forschungsarbeiten zur Gebietsplanung vorgestellt, um eine solide Grundlage für diese Diplomarbeit zu schaffen.

3. Verwandte Arbeiten

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die zur Gebietsplanung existierende Literatur. Wir weisen anhand verschiedener Quellen nach, dass die Planung von Wahlbezirken Einflüsse auf das Wahlergebnis hat. Dadurch ist es möglich bei der Wahlbezirksplanung einer bestimmten Partei einen unberechtigten Vorteil zu verschaffen. Der allgemein vertretene Ansatz zur Lösung dieses Problem besteht darin, kompakt geformte und gemäß der Einwohnerzahl ausgeglichene Wahlbezirke zu fordern, um den Spielraum für Manipulationen zu verringern. Verfahren zur automatisierten politischen Gebietsplanung, die diesen Ansatz umsetzen, werden in diesem Kapitel vorgestellt.

Bei der Verkaufsgebietsplanung bestehen in der Zielsetzung Parallelen zur politischen Gebietsplanung. Dies zeigen wir durch den Vergleich von Werken aus den beiden Bereichen. Bestehende wissenschaftliche Literatur, die diesen Zusammenhang herstellt, wird ebenfalls präsentiert. Untersuchungen zu den Einflüssen einer optimierten Neuplanung von Verkaufsgebieten weisen eine Reisezeitersparnis sowie erhöhte Effizienz nach. Diese Studien zeigen allerdings auch Schwierigkeiten auf, die sich durch die Neuplanung ergeben können. Wir erläutern die in den Studien ermittelten Rahmenbedingungen, unter denen sich eine Optimierung der Verkaufsgebiete wirtschaftlich rechnet.

Bei der Verkaufsgebietsplanung ergeben sich diese Vorteile durch eine verbesserte Kompaktheit sowie Balance der Gebiete. Kompaktheit, Balance und Konvexität sind Eigenschaften, die ebenso für die politische Gebietsplanung gefordert werden. Dieses Kapitel gibt einen Überblick über verschiedene Definitionen von Kompaktheitsmaßen aus der Literatur. Die Konvexität ist ein Bewertungsmaß, das ähnlich wie die Kompaktheit, dazu verwendet wird, die visuelle Qualität von Territorien zu beurteilen. Wissenschaftliche Veröffentlichungen dazu werden hier ebenfalls präsentiert und

analysiert. Einschätzungen aus der wissenschaftlichen Literatur zu den Vorteilen sowie Schwachstellen verschiedener Bewertungsfunktionen werden zusammengetragen. Dabei werfen wir einen genauen Blick darauf, welche Bewertungsfunktionen sich für die Auswertung des in dieser Diplomarbeit vorgestellten Verfahrens eignen.

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist der Graphpartitionierer KaFFPaE [SS12a], der in diesem Kapitel ausführlich beschrieben wird. Zum Einsatz dieses Graphpartitionierers in der Gebietsplanung nehmen wir verschiedene Modifikationen am Quellcode vor. Diese Modifikationen stellen wir in Kapitel 5 vor. Zunächst stellen wir jedoch die unmodifizierte Version von KaFFPaE vor, bei der das Ziel die Minimierung des Gewichts der Schnitte ist. Zum besseren Verständnis des Verfahrens veranschaulichen Beispielgraphen, welche wir im Rahmen dieser Arbeit erstellen, die verschiedene Verfahrensschritte von KaFFPaE.

3.1 Wahlgebietsplanung und Gerry-Mandering

Bei der Festlegung von Wahlgebieten mit Mehrheitswahlrecht spielt der Zuschnitt eine entscheidende Rolle. Wenn eine Partei viele Wahlkreise mit einer knappen Mehrheit gewinnt, ist sie überproportional repräsentiert. Dies kann die regierende Partei bei einem Neuzuschnitt der Wahlkreise ausnutzen, wenn bekannt ist, wo welche Tendenzen bei den Wahlpräferenzen vorherrschen. 1812 sorgte der Governor Elbridge Gerry bei einer Neueinteilung der Wahlkreise von Massachusetts für Aufsehen, da die Wahlkreise nicht kompakt waren. Aufgrund der Form eines Wahlkreises, der an einen Salamander erinnert, entstand daraufhin der Begriff des *Gerry-Mandering* [Gri07]. Obwohl dieses Vorgehen als Wahlmanipulation empfunden wird, lässt es sich schwer nachweisen, da es kein allgemein anerkanntes Bewertungsmaß für die Kompaktheit gibt. Auch heute gibt es in den USA noch längliche Wahlkreise, die eine sehr geringe Kompaktheit besitzen [Aza12].

3.2 Genetischer Algorithmus von Forman und Yue

Forman und Yue beschreiben einen genetischen Algorithmus zur Gebietsplanung, der eine Repräsentation der Gene mittels einer Permutation verwendet [FY03]. Zur Lösung des Handelsreisendenproblem, auf Englisch *travelling salesman problem (TSP)* genannt, verwenden unter anderem Mühlenbein et al. [MGSK88, S 71] diese naheliegende Kodierung. Um aus der Permutation eine Gebietseinteilung zu erhalten, summieren Forman und Yue in der Reihenfolge der Permutation die Einwohnerzahlen der Basisgebiete auf. Sobald die Zieleinwohnerzahl für ein Basisgebiets innerhalb einer kleinen Abweichung erreicht ist, wird mit der Zuweisung zu dem nächsten begonnen [FY03, S. 2075]. Die Zielfunktion ist dabei eine Linearkombination aus

dem Maß $Fitness_{pop}$ für die Balance der Einwohnerzahl und dem Kompaktheitsmaß $Fitness_{shape}$, das wie folgt definiert wird:

$$Fitness_{shape} = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \phi(pieces_i - 1)) \frac{(perimeter_i)^2}{area_i}}{n} \quad (3.1)$$

Der Umfang eines Territoriums wird in Formel 3.1 durch $perimeter_i$ beschrieben, die Fläche durch $area_i$. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten, aus denen ein Territorium i besteht, wird durch den Term $pieces_i$ beschrieben.

Zu dieser Definition ist anzumerken, dass sie durch das Quadrieren des Umfangs unabhängig von der Skalierung wird. Diese Eigenschaft ist gemäß Young für Kompaktheitsmaße essenziell, um Gebiete unterschiedlicher Einwohnerdichte gleich zu behandeln [You88]. Durch diese Anpassung wird Youngs Kritik an dem Kompaktheitsmaß des Umfangs geteilt durch die Fläche [Pap73] entkräftet. Der Vorfaktor $\phi(pieces_i - 1)$ ist ein Strafterm für nicht-zusammenhängende Territorien. Der Gewichtungsfaktor ϕ bestimmt dabei, wie sehr der Zusammenhang in das Bewertungsmaß $Fitness_{shape}$ eingeht.

Die Chromosomen der Startpopulation werden zufällig erzeugt. Dazu wird mit einem Basisgebiet am Rand begonnen. Der Reihe nach werden die restlichen Basisgebiete zufällig der Sequenz hinzugefügt, wobei jeweils bevorzugt ein benachbartes Basisgebiet gewählt wird. Forman und Yue verwenden drei verschiedene genetische Operatoren in ihren evolutionären Algorithmus [FY03, S. 2077]. Der verwendete Crossover-Operator ermöglicht die Kombination zweier Chromosomen zu einem neuen. Dazu wird aus dem ersten Chromosom ein zufälliger Ausschnitt ausgewählt. Dieser Ausschnitt wird im zweiten Chromosom an der Stelle des ersten Auftretens eines Elements des Ausschnitts eingefügt. Die Basisgebiete im Rest des zweiten Chromosoms, die bereits in diesem Ausschnitt vorhanden sind, werden gelöscht. Diese so erzeugte Permutation der Basisgebiete stellt das neue Chromosom dar. Des Weiteren setzen Forman und Yue einen Mutations-Operator ein. Dieser vertauscht zwei zufällige gleich lange Teilstücke des Chromosoms. Aus einem Chromosom wird somit durch Mutation ein abgeändertes erzeugt. Der dritte Operator sorgt dafür, dass verletzte Nachbarschaftsbeziehungen wieder hergestellt werden. Ist ein Territorium nicht zusammenhängend, wird ein Basisgebiet dieses Territoriums in der Sequenz des Chromosoms hinter das Ende eines benachbarten Territoriums verschoben. Bei sechs Territorien funktioniert dieses Verfahren zur Herstellung des Zusammenhangs der Territorien in allen Fällen, während es bei 13 Territorien nur noch in 8 bis 17 von 20 Testfällen gelingt [FY03, S. 2080]. Bei unserem Ansatz der Gebietsplanung mithilfe von KaFFPaE werden ebenfalls Individuen kombiniert, wie wir in Abschnitt genauer beschreiben. Jedoch handelt es sich dabei bei den Individuen um Partitionen eines

Graphen. Der Multilevel-Ansatz von KaFFPaE ermöglicht eine Kombination zweier Individuen auf höherer Abstraktionsebene, so dass für größere Gebietsplanungsprobleme eine zulässige Lösung gefunden werden kann. Zur Herstellung des Zusammenhangs innerhalb der Blöcke führen wir in KaFFPaE eine Methode ein, die ähnlich wie der Operator zur Wiederherstellung des Zusammenhangs bei Forman und Yue arbeitet. Jedoch ordnen wir dabei alle Basisgebiete der kleinsten Zusammenhangskomponente eines Blocks dem kleinsten benachbarten Blocks zu. Durch diese Methode verringert sich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um eins. Im Anschluss daran wird eine Balancierung durchgeführt, um die Balance wiederherzustellen, die durch das Verschieben von Basisgebieten zu einem anderen Territorium möglicherweise verletzt worden ist. Diese Methode zur Herstellung des Zusammenhangs kommt dann zur Anwendung, wenn die Blöcke bei den Individuen der Startpopulation nicht zusammenhängend sind. Im Verlauf des genetischen Algorithmus wird das Beibehalten des Zusammenhangs durch die Zielfunktion der Optimierung sichergestellt.

Aus der Tabelle aus Youngs Veröffentlichung [You88, S. 2080] lässt sich jedoch der Trend ablesen, dass sich mit steigender Anzahl der Distrikte die Balance verschlechtert. Young schlägt als Lösung hierzu lediglich vor, die Balance in der Zielfunktion höher zu gewichten, was jedoch zu Lasten der Kompaktheit und der Kontinuität gehen wird. Die Balance müsste durch eine Nachbearbeitung verbessert werden [You88, S. 2080]. Dieser Trend lässt sich dadurch erklären, dass sich bei einer großen Anzahl an Distrikten kleine Abweichungen summieren und so für den letzten Distrikt mit hoher Wahrscheinlichkeit zu wenig oder zu viel übrig bleibt. Durch die Evolution innerhalb des genetischen Algorithmus kann dieses Problem nicht effizient ausgeglichen werden, da bereits kleine Änderungen die nachfolgenden Grenzen innerhalb der Permutation verschieben. Ein möglicher Lösungsansatz ist folgende Modifikation der Kodierung: Für die Festlegung, wann bei der Zuteilung zum nächsten Distrikt übergegangen wird, berücksichtigt man auf deterministische Weise, ob sich eine Abweichung der insgesamt zugeteilten Bevölkerung zu der im Optimalfall erwarteten aufbaut. Dadurch kann die Wahrscheinlichkeit verringert werden, dass die Zuteilung für den letzten Distrikt nicht aufgeht.

Die durch den genetischen Algorithmus Youngs berechneten Gebietsplanungen für North Carolina, South Carolina und Iowas erscheinen bei visueller Inspektion – wie gewünscht – als kompakt. Trotz der Weiterentwicklung der Hardware in den zehn Jahren seit der Veröffentlichung des Papers ist der Ansatz von Forman und Yue wahrscheinlich jedoch nicht für die Gebietsplanung mit mehreren tausend Basisgebieten anwendbar. Dies liegt an den Problemen mit dem Zusammenhang der Territorien sowie der abnehmenden Balance bei steigender Anzahl an Basisgebieten.

3.3 Verkaufsgebietsplanung

Gebietsplanung ist ein wichtiger Schritt in der Logistik, der vor der Tourenplanung durchgeführt wird. Die Gebietsplanung geschieht heute noch in großen Teilen manuell. Es gibt daher die Möglichkeit, den Gebietsplanungsprozess zu beschleunigen, indem der Grad der Automatisierung erhöht wird. Die Gebietsplanung auf Grundlage von Graphen eignet sich dazu.

Gegeben ist eine Menge an Kundenstandorten in der Ebene. Die Kundenstandorte haben Geokoordinaten sowie ein Aktivitätsmaß. Das Aktivitätsmaß modelliert den Umfang der Arbeit, die für den entsprechenden Kunden notwendig ist. Dieses Maß wird benötigt, um ausgeglichene Gebiete zu erzeugen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, Gebiete zu erzeugen, bei denen die Arbeitsbelastung pro Gebiet in etwa gleich groß ist.

Bei bestehenden Verkaufsgebietseinteilungen besteht das Problem, dass mehr als 50% der Gebiete entweder zu groß oder zu klein sind, wie Zoltners und Lorimer in ihrer Studie zeigen [ZL00]. Die Arbeitsbelastung in einem Gebiet wird als zu groß oder zu klein bezeichnet, wenn sie um mehr als 15% vom Optimum abweicht. Als Verkaufspotenzial definieren Zoltners und Lorimer die Summe der abgeschlossenen Verkäufe in einem Gebiet inklusive derer der Konkurrenz. Um das Optimum der Auslastung zu bestimmen, vergleichen Zoltners und Lorimer die selbst abgeschlossenen Verkäufe mit dem Verkaufspotenzial. Anhand der Daten zu pharmazeutischen Verkaufsgebieten entscheiden sie sich, die Verkaufszahlen durch das Modell des beschränkten Wachstums zu modellieren [ZL00, S. 142]. Die Verkaufszahlen nehmen mit zunehmendem Verkaufspotenzial zu, allerdings nicht linear, da bei größeren Verkaufsgebieten nur noch kleinere Zuwächse möglich sind. Diesen Effekt deuten Zoltners und Lorimer als Überlastung eines Verkaufsgebiets.

Des Weiteren erwähnen sie ein Experiment, bei dem eine Firma nur für einen Teilbereich eine neue Gebietsneuplanung zur Verbesserung der Balance durchführte. In einem repräsentativ ausgewählten Teilbereich, den man neu plante, erhöhte sich im Testzeitraum das Wachstum von 1,0 auf 2,1 Prozent, während im Kontrollgebiet nur ein Anstieg von 0,9 auf 1,1 Prozent zu verzeichnen war. Trotz dieser Verbesserung sind solche Studien auch kritisch zu beurteilen, da die beteiligten Firmen primär an der Erhöhung des Gewinns und weniger an der Wissenschaftlichkeit solcher Versuchsreihen interessiert sind. Für die Neueinteilung wurde möglicherweise eine Verkaufs-Region ausgewählt, bei der man sich die größtmöglichen Verbesserungen erhoffte. Nach wissenschaftlichen Gesichtspunkten müsste die Auswahl jedoch zufällig erfolgen. Diesem Interessenkonflikt sind sich Zoltners und Lorimer bewusst und bezeichnen solche Studien daher als „not always scientifically ,pure“ [ZL00, S139].

Diese Studie betrachtete mehr als 4 800 Verkaufsgebiete aus 18 Firmen, die dem

Bereich der Konsumgüter, dem industriellen Vertrieb, der medizinischer Ausrüstung oder der Arzneimittel zuzuordnen sind. Alle an der Studie teilnehmenden Firmen gaben an, dass sie durch schlechte Gebietseinteilung zwischen zwei und sieben Prozent der Verkäufe verloren. Besondere Brisanz hat eine Neueinteilung in Fällen, in denen die Vertriebs-Mitarbeiter abhängig von Verkaufszahlen bezahlt werden. Zoltner und Lorimer beschreiben einen Fall, in dem dies dazu führt, dass die Mitarbeiter weniger nach ihrer Leistung, sondern mehr nach dem Verkaufspotenzial ihres Gebiets bezahlt würden, da die Gebiete nicht ausgeglichen seien [ZL00, S142]. Von den Profiteuren dieser Ungleichverteilung ist folglich Widerstand gegen eine Neuplanung der Verkaufsgebiete zu erwarten. Aus Sicht der Firma ist eine Balance der Gebiete bezüglich der Ertrags-Chancen jedoch wünschenswert, um die Chancengleichheit unter den Mitarbeitern herzustellen.

Einer internationalen Studie von Proudfoot Consulting zufolge beträgt der Anteil der Reisezeit bei Mitarbeitern im Vertrieb 15% ihrer Arbeitszeit [Pro09, S 13], wobei diese ihn selbst um 3% unterschätzen. Gleichzeitig belegt diese Studie, dass bei den Mitarbeitern der Wunsch besteht, den Anteil auf 8% zu reduzieren, um mehr Zeit für die Verkaufstätigkeiten zur Verfügung zu haben. Kompakte Verkaufsgebiete können neben einer optimierten Tourenplanung einen Beitrag dazu leisten, da dadurch die benötigten Fahrtstrecken verkürzt werden. Ein erhöhter Automatisierungsgrad bei der Gebiets- sowie der Tourenplanung verringert außerdem den Verwaltungsaufwand, der mit 31% den größten Prozentsatz der Arbeit beim Vertrieb ausmacht.

Zoltner und Lorimer berichten von einem industriellen Großhändler, der durch Optimierung der Gebietseinteilung die Fahrtzeiten der Vertriebs-Mitarbeiter um 13,7% verringern konnte [ZL00, S142]. Ihrer Studie zufolge könnten die Mitarbeiter im Vertrieb 2,7% mehr Zeit für Verkaufsgespräche nutzen. Es ergäben sich dabei eine Million Dollar Einsparungen an Reisekosten sowie drei Millionen Dollar zusätzlicher Gewinn durch gesteigerte Verkaufszahlen.

3.4 Bewertungsmaße für Territorien

Um die Form der Territorien objektiv bewerten zu können, benötigt man eine quantifizierbare Funktion, die jeder Gebietseinteilung einen numerischen Wert zuordnet. Eine solche Funktion wird fortan als *Bewertungsmaß* bezeichnet. Manche der in diesem Abschnitt vorgestellten Bewertungsmaße ermöglichen auch die Bewertung eines einzelnen Territoriums. In diesem Fall ist das Bewertungsmaß der gesamten Lösung wahlweise der Mittelwert oder das Maximum über alle Territorien. Im Folgenden stellen wir eine Vielzahl an Bewertungsmaßen vor, welche sich den Kategorien *Kompaktheit* und *Konvexität* zuordnen lassen.

Kompaktheit

Eine streng mathematische Formulierung der Kompaktheit, die der intuitiven Vorstellung entspricht, gibt es nicht [KNS09, S. 5]. Für jeden Versuch einer Definition der Kompaktheit lassen sich leicht Gegenbeispiele finden, bei denen das definierte Maß der Intuition widerspricht. So berichtet Young darüber, dass von acht betrachteten Kompaktheitsmaßen keines in allen Fällen befriedigende Ergebnisse liefert [You88]. Dies zeigt, dass es sich bei der naiven Vorstellung von Kompaktheit um ein in der Komplexität leicht zu unterschätzendes Thema handelt. Hinzu kommt, dass beim Vergleich der Kompaktheit zweier Territorien im Zweifelsfall auch subjektive Eindrücke eine Rolle spielen. Dennoch gibt es eine Reihe von Bewertungsmaßen, die bei der Betrachtung der Kompaktheit hilfreich sein können. Diese Maße stimmen in vielen Fällen mit der intuitiven Vorstellung überein – allerdings nicht immer.

Young sieht die Unmöglichkeit einer präzisen Formalisierbarkeit der Kompaktheit als eine ihr inhärente Eigenschaft an und folgert daraus, dass sie als Kriterium für eine faire Einteilung von Wahlbezirken ungeeignet sei [You88, S106]. Neben dem visuellen Test betrachtet Young dabei sieben andere Kompaktheitsmaße. Davon beziehen der *Schwartzberg-Test* [Sch66], der *Taylor-Test* [Tay73], der *Boyce-Clark-Test* [Boy64] sowie der *Umfang-Test* (Summe der Länge des Umfangs aller Territorien) den Rand in die Bewertung mit ein und lassen sich deshalb nicht auf den Fall von punktförmigen Basisgebieten anwenden.

Der Vorteil gegenüber der reinen Beurteilung durch den Menschen ist die mögliche Automatisierung sowie das Treffen einer Vorauswahl aus der dann das Ergebnis ausgewählt wird. Bei der Verwendung von mehreren Kompaktheitsmaßen kann solch eine Vorauswahl durch das Auswählen von pareto-optimalen Lösungen erreicht werden. Die Schwachstellen der verschiedenen Kompaktheitsmaße gleichen sich dadurch aus. Ebenfalls denkbar ist eine lineare Gewichtung verschiedener Maße. Die Frage, wie die Vorfaktoren gesetzt werden sollen, muss jedoch individuell entschieden werden. Kalcsics, Nickel und Schroeder verwenden ein Maß, das auf konvexen Hüllen aufbaut [KNS09, S. 5].

Konvexität

Konvexe Gebiete sind bei der Gebietsplanung erwünscht. Zur Betrachtung der Konvexität kann die konvexe Hülle betrachtet werden. Die konvexen Hüllen der Territorien sollten sich wenn möglich nicht schneiden. Diese Definition bezieht sich jedoch auf die euklidische Metrik und nicht auf eine Metrik der Straßenentfernungen oder Reisezeiten. Bei einem großen, mäandrierenden Fluss und einer Gebietsgrenze in Flussmitte ergeben sich Schnittflächen der konvexen Hüllen, die in diesem Fall jedoch keine schlechte Gebietsteilung bedeuten.

Als weitere Variante wird vorgeschlagen, die paarweisen Entfernung vor der Summation zu quadrieren [FH11]. Dabei werden Ausreißer stärker bestraft. Ein Vorteil bei Verwendung dieser Zielfunktion mit euklidischer Metrik ist, dass die Gebietsgrenzen der Territorien in der optimalen Lösung Geraden sind. Genauer formuliert nimmt die optimale Lösung die Form eines *Power-Diagramms* an, was Freyer und Holden in ihrer Arbeit beweisen [FH11]. Power-Diagramme sind eine Verallgemeinerung von Voronoi-Diagrammen und lassen sich in $O(\log n)$ berechnen [Aur87]. Die Schwierigkeit besteht dann noch darin, geeignete Startwerte für das Power-Diagramm zu finden. Mithilfe von Gradientenabstiegsverfahren und iterativer Neuzuweisung der Ausgangspunkte für das Power-Diagramm auf die Schwerpunkte der Territorien konnten Freyer und Holden gute lokale Optima finden.

Die so berechneten Werte verwenden sie daraufhin für die Definition eines skalunabhängigen Kompaktheitsmaßes, dem *Relative-Proximity-Index*. Für die Berechnung dieses Index wird zuerst die Summe über die quadrierten paarweisen Distanzen gebildet und dann über die Territorien aufsummiert. Das so berechnete Ergebnis wird daraufhin durch den Wert der optimalen Lösung geteilt. Auf diese Weise wird erreicht, dass sich der Wertebereich des *Relative-Proximity-Index* von 1 bis unendlich erstreckt [FH11, S7]. Da die Berechnung der optimalen Lösung NP-schwer ist, verwendet man in der Praxis für den Nenner eine approximative Lösung.

3.5 Geometric Recursive Partitioning

Recursive-Partitioning verfolgt den Ansatz Basisgebiete anhand ihrer geographischen Lage in Gebiete einzuteilen. Recursive-Partitioning erstellt Gebiete durch Einteilung der Ebene mittels gerader Linien. Gemäß dem Teile-und-Herrsche-Ansatz werden die Kundenknoten rekursiv immer wieder in zwei etwa gleich große Hälften aufgeteilt. Befinden sich in einem Gebiet Kunden für eine gerade Anzahl an Territorien, dann wird die Teilung genau in der Mitte durchgeführt. Ist die Anzahl ungerade, wird die Trennlinie so gewählt, dass eine Seite das Potenzial für ein Territorium mehr hat, als die andere Seite. Es wird bei diesem Verfahren eine vorgegebene Anzahl an Richtungen verwendet. Dies reduziert den Rechenaufwand, da für jede der Richtungen die Knoten in $O(n \log n)$ sortiert werden können, um ein Sweep-Verfahren durchzuführen. Dadurch werden kurze Laufzeiten erreicht.

Der Vorteil dieses Verfahrens ist die Konvexität der Gebiete bezüglich Luftliniendistanzen, da immer konvexe Gebiete entstehen. Allerdings kann es vorkommen, dass Gebiete sehr länglich werden. Eine auftretende Schwierigkeit ist, dass geographische Hindernisse dabei nicht berücksichtigt werden. Gerade Trennlinien können zum Beispiel so verlaufen, dass sie eine Flussbiegung abtrennen und der gegenüberliegenden Seite zuordnen, obwohl in diesem Bereich keine Brücke existiert. In diesem Fall

leidet die Kompaktheit der Gebiete darunter. Bei der im darauf folgenden Schritt durchgeführten Tourenplanung müssen weite Strecken gefahren werden, um zu den abgetrennten Bereichen eines Gebiets zu fahren. Dies verlängert die insgesamt zu fahrende Stecke.

Eine Verbesserung von Recursive-Partitioning beschreiben Alex Butsch et. al. in dem Working Paper [BKN13]. Eine sogenannte „Flex Zone“ erzielt Verbesserungen gegenüber der strikten Aufteilung durch gerade Linien. Basisgebiete in einem definierten Bereich um die Schnitte werden dabei flexibel der einen oder anderen Seite zugewiesen, um die Kompaktheit zu verbessern. Der ebenfalls implementierte „Grasp“-Ansatz wählt bei jedem Schritt der rekursiven Partitionierung nicht immer die beste Aufteilung aus, sondern eine zufällige unter den Besten. Durch die Randomisierung kann aus mehreren Programmläufen, das beste Ergebnis ausgewählt werden, was das Resultat der Gebietsplanung ebenfalls verbessert. In Kapitel 7 vergleichen wir unser Verfahren unter anderem mit dieser Implementierung von Alex Butsch.

3.6 MIP-Ansatz

Wir vergleichen unsere Ergebnisse auch mit dem von Matthias Bender vom FZI implementierten MIP-Ansatz, der auf Location-Allocation-Ansatz, welcher in [HOR72] beschrieben wird. Bei diesem Ansatz werden zunächst zufällige Basisgebiete als Startzentren ausgewählt. Dabei wird darauf geachtet, dass die Startzentren nicht zu nahe beieinander liegen. Der „Allocation“-Schritt ordnet nun mithilfe eines ganzzähligen Programms die Basisgebiete so den Gebietszentren zu. Im darauffolgenden „Location“-Schritt werden die Gebietszentren neu gewählt. Dabei wird in jedem Territorium dasjenige Basisgebiet als neues Gebietszentrum gewählt, das die Zielfunktion optimiert. „Allocation“- und „Location“-schritt wechseln sich so lange ab, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Der Abbruch des Algorithmus kann erfolgen, wenn eine vorgegebene Anzahl an Iterationen ausgeführt wurde, oder wenn keine weitere Verbesserung gefunden wird. Das „Multistart“-Verfahren wiederholt den gesamten Gebietsplanungs-Prozess mehrmals mit anders gewählten Startzentren. Es wird dann die beste der Lösungen gewählt.

3.7 Graphpartitionierer

Zur Graphpartitionierung existieren umfangreiche Forschungsarbeiten. Einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung bei der Graphpartitionierung gibt eine gemeinsame Veröffentlichung [BMS⁺14]. Diese Veröffentlichung kommt zu dem Schluss, dass für große Graphen die Heuristik des *Multilevel Graph Partitioning* am erfolgreichsten ist [BMS⁺14, S.16]. Der Graphpartitionierer KaFFPa, sowie der Karlsruhe Fast Flow Partitioner Evolutionary (KaFFPaE) [SS12a] verfolgen diesen Ansatz.

Diese beiden Graphpartitionierer verwenden das gleiche Format für das Einlesen von Graphen wie der Graphpartitionierer Metis [LK13]. Das Metis-Graph-Format ist in [Kar13] beschrieben. Der Schwerpunkt in dieser Arbeit wird auf KaFFPaE gelegt, da sein modifizierter Quellcode in dieser Arbeit für die Gebietsplanung genutzt wird.

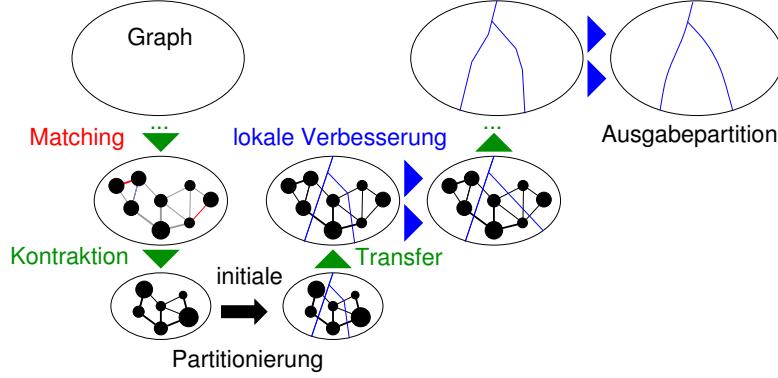
KaFFPa und KaFFPaE

Der Karlsruhe Fast Flow Partitioner (KaFFPa) ist ein Multilevel-Graphpartitionierer. Das Prinzip der Partitionierung, das KaFFPa zugrunde liegt ist in Abbildung 3.1 erläutert. KaFFPaE ist eine Weiterentwicklung von KaFFPa, welche für die Optimierung die natürliche Evolution nachbildet. Die Partitionen sind dabei die Individuen. Die aktuell verwendeten Partitionen bilden einen Individuen-Pool. Individuen aus diesem Pool können gekreuzt werden. Bei evolutionären Algorithmen muss darauf geachtet werden, dass der Individuen-Pool heterogen bleibt, da sonst zu schnell ein lokales Optimum erreicht wird. KaFFPaE ist ursprünglich auf die Optimierung der Schnittkanten ausgelegt. Allerdings beschreibt bereits die ursprüngliche Veröffentlichung ein Verfahren, bei dem die Zielfunktion das Kommunikationsvolumen ist. Das Kommunikationsvolumen wird zur Modellierung des Kommunikations-Aufwands bei verteiltem Rechnen verwendet. Die Zuweisung von Teilaufgaben eines rechenintensiven auf mehrere Rechner kann als Graphpartitionierungsproblem mit der Zielfunktion Kommunikationsvolumen aufgefasst werden.

Bereits bei Partitionierung auf Optimierung der Schnittkanten im Straßengraphen lassen sich passable Partitionierungen für die Gebietsplanung erreichen. Eine Anpassung der Zielfunktion führt zu einer Verbesserung der Kompaktheit der Gebiete. Bei alleiniger Optimierung auf geringe Schnitte können längliche Gebiete entstehen. Außerdem ist damit nicht sichergestellt, dass die Territorien dabei zusammenhängend sind. Bei der Gebietsplanung wird jedoch Wert auf zusammenhängende Gebiete gelegt, damit die Fahrtzeiten nicht zu groß werden.

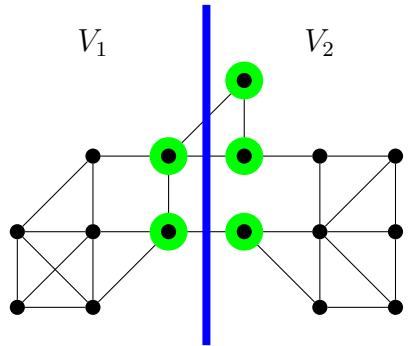
Durch einen genetischen Kombinationsoperator wird aus zwei Individuen ein neues erstellt. Die Eltern-Individuen sind dabei die Partitionen, die durch den blauen sowie den gelben Schnitt in Abbildung 3.3 dargestellt sind. Am Ende des Kombinations-schritts erhält man eine neue Partition, die durch einen grünen Schnitt dargestellt wird. In dem in Abbildung 3.3 dargestellte Beispiel ist die Anzahl der Blöcke pro Partition zwei. Das Verfahren lässt sich allerdings auch bei einer höheren Anzahl an Blöcken pro Partition anwenden. Das Gewicht des Schnitts ist bei der so ermittelten neuen Partition garantiert kleiner, als bei beiden Eltern-Individuen. Hinter diesem Verfahren steckt die Idee, dass nur ein kleiner kontrahierter Graph partitioniert werden muss. Gute Details der Schnitte der Eltern-Partitionen werden durch das Multi-Level-Verfahren mit wenig Rechenaufwand zu einer neuen Partition kombiniert.

Abbildung 3.1: Multilevel-Ansatz von KaFFPa. Durch Kontraktion von Kanten kann die Partitionierung auf einem kleineren Graphen durchgeführt werden. Die Kontraktion erfolgt durch zufällige Matchings. Die initiale Partitionierung erfolgt auf dem kontrahierten Graphen. Durch den Transfer wird die Kontraktion wieder rückgängig gemacht. Die lokale Verbesserung wird im Detail in Abbildung 3.2 erklärt.

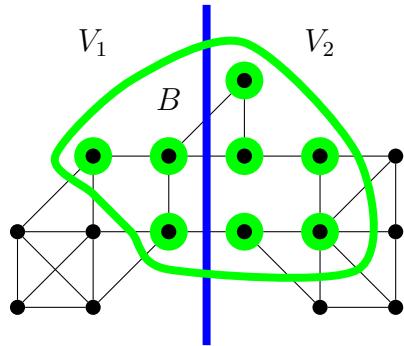


Eine lokale Verbesserungsmöglichkeit für den Schnitt zwischen zwei benachbarten Blöcken ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Dieses Verfahren garantiert, dass die Balance erhalten bleibt und sich gleichzeitig der Schnitt nicht verschlechtert. Bei diesem Beispiel hat ein optimal balancierter Block acht Knoten. Der Parameter ϵ für die zulässige Abweichung von der Balance sei 0,5. Das heißt, dass ein Block maximal 12 Knoten enthalten darf. In Abbildung 3.2(b) wurde die Breitensuche genau so lange durchgeführt, bis eine Knotenmenge B ermittelt wurde, welche die Balance erhält, selbst wenn alle Knoten aus B einer Seite zugeordnete werden. Der durch B knoteninduzierte Teilgraph wird mit Knoten s und t verbunden wie in Abbildung 3.2(c) gezeigt. Die Gewichte der von s ausgehenden Kanten entsprechen der Anzahl der Schnittkanten zwischen den kontrahierten Knoten und dem durch B induzierten Teilgraphen. Analoges gilt für die Kanten nach t . Die Gewichte für Kanten von s aus und nach t auf unendlich gesetzt. [SS11]

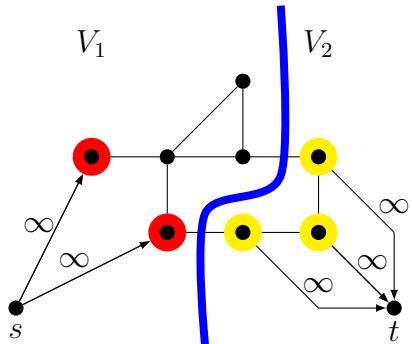
Bei einer nur kleinen erlaubten Abweichung von der Balance kann der Suchraum für dieses lokale Optimierungsverfahren zu klein sein. Aus diesem Grund ist in KaFFPa ein Verfahren implementiert, das den Suchraum B adaptiv vergrößert. Um dennoch die Einhaltung der Balance zu garantieren, werden nur solche Schnitte akzeptiert, die die Balance-Bedingung nicht verletzen. Für die Anpassung der Größe von B wird ein adaptives Verfahren eingesetzt. Ergibt sich keine zulässige Lösung, wird B verkleinert, ansonsten vergrößert. Verkleinert sich das Gewicht des Schnitts, kann das lokale Optimierungsverfahren auch neu gestartet werden, da sich dabei auch der Rand von V_1 und V_2 verändert hat und somit auch die Teilmenge B eine andere ist.



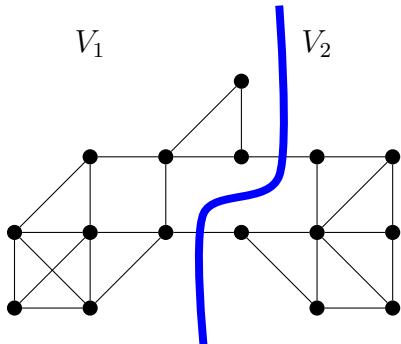
(a) Diese Abbildung zeigt einen Graphen G mit Partition $P = \{V_1, V_2\}$. Die Kanten im *Rand* von V_1 und V_2 sind grün markiert. Die blaue Linie stellt die Partition P dar.



(b) Vom Rand von V_1 und V_2 aus wurde eine Breitensuche gestartet. B ist eine Teilmenge der Knoten des Graphen G . Alle Schnitte, die innerhalb von B verlaufen, erhalten die Balance-Bedingung für der Blöcke aufrecht.

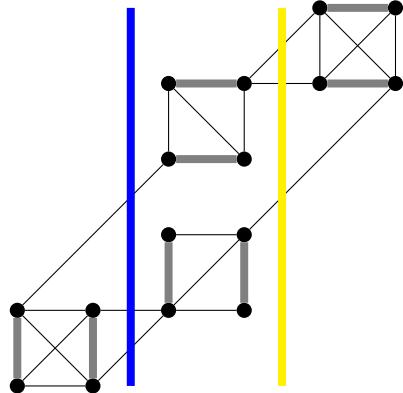


(c) Die Knoten in $V_1 \setminus B$ werden zu einem Knoten s kontrahiert, die Knoten in $V_2 \setminus B$ zu einem Knoten t . In dem resultierenden Graphen wird ein minimaler s-t-Schnitt berechnet.

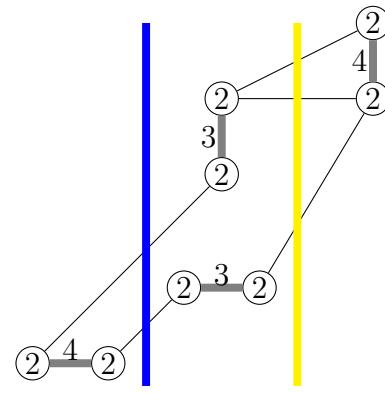


(d) Die Partition des kontrahierten Graphen entspricht einer Partition P' des ursprünglichen Graphen. Die Partition P' erfüllt genauso wie die Partition P die Balance-Bedingung. Das Gewicht des Schnitts, der durch die Partition P' definiert wird, ist kleiner des Gewichts des ursprünglichen Schnitts.

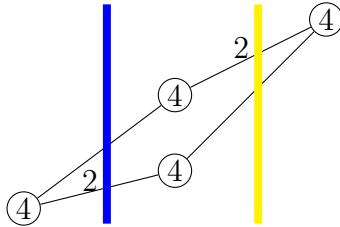
Abbildung 3.2: Max-Flow-Min-Cut für lokale Verbesserung



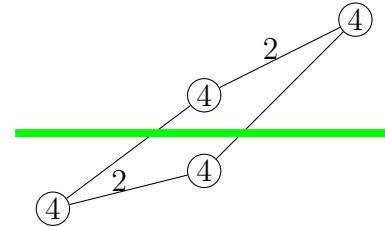
(a) Die blaue und die gelbe Linie stellen zwei verschiedene Schnitte dar. Aus diesen beiden Partitionen soll durch den Kombinationsoperator eine neue erstellt werden. Zuerst wird ein Matching der Knoten berechnet, das keinen der Schnitte kreuzt. Dieses Matching ist durch graue Kanten dargestellt.



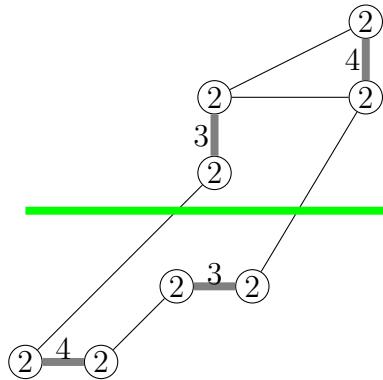
(b) Die grauen Matching-Kanten wurden kontrahiert. Die Anzahl der parallelen Kanten entspricht dabei dem Kantengewicht. Knoten, die zu einem Knoten kontrahiert wurden, bekommen als Knotengewicht die Summe der Knotengewichte der Knoten, aus denen sie entstanden sind, zugewiesen. Es wird erneut ein Matching berechnet, welches keinen der Schnitte kreuzt.



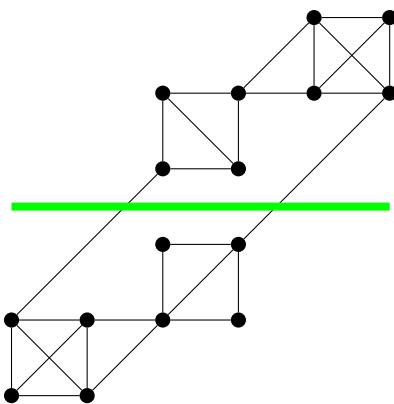
(c) Die Matching Kanten wurden erneut kontrahiert. Nun sind keine Kanten mehr für ein weiteres Matching übrig, welche die Schnitte nicht kreuzen. Deshalb wird nun eine lokale Verbesserung der Partitionierung vorgenommen. Der Vorteil davon ist, dass der Graph nun deutlich kleiner ist, was die Berechnung vereinfacht.



(d) Auf dem kontrahierten Graphen wird die Partition berechnet, die durch den grünen Schnitt dargestellt ist. Die Partition, die durch den Schnitt definiert wird, ist immer noch innerhalb der erlaubten Balance-Schranke. Die Kontraktionen werden nun wieder rückgängig gemacht.



(e) Es wird erneut die Kontraktion der Knoten rückgängig gemacht, um zum Ursprungsgraphen zurückzukehren. Der ermittelte Schnitt, der durch eine grüne Linie visualisiert wird, wird dabei beibehalten.



(f) Das neue Individuum ist die Partition, die durch die grüne Linie visualisiert wird. In diesem Fall ist das neue Individuum besser als beide Eltern-Individuen, da der Schnitt geringer ist.

Abbildung 3.3: Kombinationsoperator

4. Kompaktheitsmaße

In diesem Kapitel geben wir zuerst einen Überblick über die fünf von uns verwendeten Kompaktheitsmaße, die wir als Zielfunktion für die Gebietsplanung verwenden. Alle von uns betrachteten Kompaktheitsmaße nutzen als Berechnungsgrundlage eine Distanzmatrix mit den paarweisen Entferungen zwischen den Basisgebieten, sowie eine Partition der Basisgebiete. Zuerst legen wir fest, auf welche Weise wir Gebietsplanungslösungen mithilfe einer Bewertungsfunktion vergleichen.

Bei der Gebietsplanung gibt es oft einige Restriktionen zu beachten. Mögliche Restriktionen sind, dass zwei oder mehrere Kunden in dem gleichen Gebiet liegen müssen. Auch ist eine Anzahl an fest vorgegebenen Zuordnungen zu Gebieten denkbar. Bei den Planungen von Außendienstmitarbeitergebieten ist es im manchen Fällen notwendig, besondere Qualifikationen der Mitarbeiter zu berücksichtigen. In diesem Fall werden dem Gebietsplanungsproblem Restriktionen hinzugefügt, die nur gewisse Zuordnungen von Mitarbeitern zu Kunden erlauben. Auch die Zugehörigkeit eines Kunden zu einer gewissen Kundengruppe kann Einfluss auf die Gebietsplanung haben. In dieser Arbeit wird die Balance, welche in Definition 5 beschrieben wird, ebenfalls als Restriktion betrachtet. Das bedeutet, dass die Balance maximal um einen vorgegeben Wert von der optimalen Verteilung abweichen darf.

Die Distanzmatrix ist entweder eine *Reisezeitmatrix* oder eine *Straßenentfernungsma-
trix*. Bei der *Reisezeitmatrix* sind die Elemente die paarweisen Entferungen zwischen
zwei Basisgebieten in Sekunden. Für die Berechnung wird eine Routenplanungs-
Software der PTV eingesetzt. Die *Straßenentfernungsma-
trix* enthält die paarweisen
Entferungen in Metern im Straßennetz auf der schnellsten Route. Sowohl *Reisezeit-
matrix* als auch *Straßenentfernungsma-
trix* enthalten nur ganzzahlige, nicht-negative
Einträge.

Der Einfachheit wegen berücksichtigen wir nicht alle möglichen Restriktionen. Eine mögliche Forderung wäre, dass bestimmte Kundenstandorte ins gleiche Territorium eingeteilt werden. Es könnten auch vorgegebene Depotstandorte gegeben sein. Ebenfalls denkbar ist, dass die Gebietszentren Außendienstmitarbeitern entsprechen und es dadurch gewisse Einschränkungen gibt, welcher Mitarbeiter welche Kunden bedienen kann. Unterschiedliche Qualifikationen der Mitarbeiter können gewisse Zuordnungen geeigneter, weniger geeignet machen oder sogar ausschließen. Bereits in der einfachsten Form sind quasi alle Gebietsplanungsprobleme NP-vollständig. Deshalb sind approximative Lösungen notwendig.

Außer der Summe der paarweisen Distanzen untersuchen wir die *TSP-Evaluierungs-Funktion*, die *MST-Evaluierungs-Funktion* sowie die *TSP-Sample-Evaluierungs-Funktion* (siehe Abschnitt 4.3). Für die *TSP-Evaluierungs-Funktion* wird ein Handelsreisenden-Problem für jeden Block gelöst. Das Bewertungsmaß berechnet sich dann als Summe der Länge der TSP-Touren über alle Blöcke. Die *MST-Evaluierungs-Funktion* wird analog dazu berechnet, mit dem Unterschied, dass minimale Spannbäume berechnet werden. Bei der *TSP-Sample-Evaluierungs-Funktion* werden ebenfalls Handelsreisenden-Probleme gelöst, allerdings nur über Samples von jeweils zehn Knoten. Pro Block werden 1000 Samples der Größe zehn gelöst, so dass jeder Knoten im Mittel in zehn Touren enthalten ist. Dann wird über die Länge aller Samples aufsummiert, um die Bewertung zu erhalten. Zur Lösung der Handelsreisenden-Problems wird der *Concorde TSP Solver* [ABCC06] der University of Waterloo verwendet. In Abschnitt 4.5 definieren wir schließlich Abkürzungen für die Kompaktheitsmaße, welche in Kapitel 7 verwendet werden.

4.1 Summe der paarweisen Distanzen

Papayanopoulos schlägt die Summe der paarweisen Distanzen zwischen den Basisgebieten als eine einfach zu berechnende Bewertungsfunktion für die politische Gebietsplanung vor [Pap73, S. 186]. Die Gewichtung der Summanden erfolgt dabei anhand der Einwohnerzahlen. Da jedes Paar in der doppelten Summe zweimal vorkommt, wird die Distanz zwischen zwei Basisgebieten auf diese Weise proportional zu der Summe der Einwohnerzahlen gewichtet. Die Einwohnerzahlen lassen sich verallgemeinert als ein Aktivitätsmaß w (siehe Definition 2) ansehen, woraus sich dann Gleichung 4.1 ergibt. Zur Berechnung der gesamten Gebietsplanung wird über alle Territorien aufsummiert.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{b_j \in T_i} \sum_{b_l \in T_i} a(b_j) \cdot d(b_j, b_l) \quad (4.1)$$

Als Alternative ist denkbar, auf die Gewichtung der Distanzen mit dem Aktivitätsmaß zu verzichten. Dies bietet sich an, wenn das Aktivitätsmaß hauptsächlich den Aufwand bei einem Kunden pro Bedienung beschreibt und die Bedienungshäufigkeiten für alle Kunden auf einem ähnlichen Niveau liegen. Das Aktivitätsmaß wird in diesem Fall nur für das Kriterium der Balance herangezogen.

Statt der Aufsummierung über die Gebiete kann auch ein Mini-Max-Kriterium verwendet werden. Dabei gibt das Territorium mit der größten gewichteten Summe der Distanzen die Bewertung für den gesamten Plan an. Dies führt dazu, dass urbane und rurale Gebiete zusammengelegt werden, da sehr großflächige Territorien im ländlichen Raum ansonsten eine sehr schlechte Bewertung bekommen würden. Bei nicht-konstruktiven Verfahren kann das Mini-Max-Kriterium zu Schwierigkeiten führen, da Veränderungen, die nichts an dem schlechtesten Territorium verändern, die Bewertung konstant lassen.

Chambers und Miller führen als Nachteil eines Kompaktheitsmaßes auf Basis der paarweisen Summe der Distanzen an, dass diese Kompaktheitsmaße Gerrymandering im urbanen Bereich nicht verhindern, wenn gleichzeitig im ländlichen Bereich die Territorien kompakter werden [CM10, S. 8]. Sie verweisen dabei auf Young, der diese Kritik bereits für das Maß der Summe der Umfänge geäußert hat, die er an einem Beispiel veranschaulicht, das er „Embryonic Gerrymander“ nennt. [You88, figure 13]. Bei der Verkaufsgebietseinteilung ergibt sich das Problem nicht, da hier der Planer keine der Kompaktheit zuwiderlaufenden Ambitionen hat, wie es beim Gerrymandering der Fall ist.

Wenn die Fahrtzeit einen entscheidenden Anteil der Arbeitszeit ausmacht, ist die Kompaktheit von geographisch größeren Gebieten wichtiger, als bei kleineren. Sollte ein automatisiertes Verfahren, das auf die Summe der paarweisen Distanzen optimiert, bei Territorien mit sehr geringen räumlichen Ausmessungen unformige Gebietsgrenzen erzeugen, ist dies im Falle von stets kurzen Fahrzeiten weniger problematisch. Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeföhrten Tests sind jedoch auch die kleinen Territorien – trotz der Wahl der Summe der paarweisen Distanzen als Zielfunktion – kompakt geformt. Obwohl die kurzen Entferungen wenig zu der Gesamtsumme beitragen, ergibt sich doch bei lokaler Optimierung der Gebietsgrenzen eine gewisse Verbesserung der Kompaktheit.

In dieser Arbeit setzen wir die ungewichtete Summe der paarweisen Distanzen als primäre Zielfunktion für die Kompaktheit ein. Da die Zielsetzung in dieser Arbeit weniger auf die politische Gebietsplanung, sondern eher auf den Bereich des Operation Research gerichtet ist, erscheint die hierdurch größere Gewichtung ausgedehnter Gebiete angemessen. Ein weiterer Grund für diese Auswahl ist die einfache Berechenbarkeit, da das Ergebnis nur von den Entferungen sowie der Gebietszuord-

nung abhängt. Dies ermöglicht es, für die Entferungen mittels einer Distanzmatrix auch andere Metriken als die euklidische zu verwenden. Betrachtet werden hier die Reisezeit sowie die Entfernung im Straßennetz. Papayanopoulos beschreibt in seiner Veröffentlichung bereits 1973, dass als Entfernungsmaß Reisezeit verwendet werden könnte, um längere Reisezeiten – etwa durch Fährverbindungen – zu berücksichtigen [Pap73, S. 187]. Heutzutage stehen aktuelle und nahezu vollständige Daten über den Straßengraphen von diversen Anbietern zur Verfügung. Mithilfe von Routenplanung-Beschleunigungsverfahren können selbst große Distanzmatrizen in kurzer Zeit berechnet werden. Diese Verfahren, zu denen *Contraction Hierarchies* [GSSD08], *Transit Node Routing* [BFSS07] sowie *Arcflags* [MSS⁺07] gehören, ermöglichen eine Reduzierung der Rechenzeit um Größenordnungen im Vergleich zu dem Dijkstra-Algorithmus.

4.2 Minimaler Spannbaum

Der minimale Spannbaum enthält bei n Knoten $n - 1$ Kanten und ist der kürzeste aufspannende Baum (siehe Definition 19). Als Kantengewicht verwenden wir die Reisezeit zwischen zwei Knoten. Für jeden Block wird ein minimaler Spannbaum(MST) berechnet. Grundlage dafür ist der durch die Knotenmenge eines Blocks induzierte vollständige Teilgraph. Dann wird die Summe über diese Werte gebildet. Die MST-Bewertungsfunktion führt bei nicht-zusammenhängenden Gebieten zu größeren und somit schlechteren Werten. Beobachtungen, die im Rahmen dieser Diplomarbeit gemacht werden, zeigen dass beim Tunen der Parameter für möglichst gute MST-Bewertungsfunktionen, manche Territorien eine längliche Form annehmen. Dies ist dadurch zu erklären, dass sich diese Gebiete um Städte mit höherer Knotendichte herum schlängeln, um hohe Schnitte mit hohem Gewicht mitten durch dichte Bereiche des Graphen zu vermeiden. Im Gegensatz zur Kompaktheitsmetrik der Summe der paarweisen Distanzen kann auch bei einem länglichen Gebiet eine gute Bewertung erreicht werden, wenn jeder Knoten jeweils nahegelegene Nachbarn besitzt.

4.3 TSP sowie TSP Samples

Das Handelsreisenden-Problem (abgekürzt als TSP für Englisch travelling salesman problem) sucht nach der kürzesten Rundtour in einem Graphen. Das TSP ist eine gute Approximation für die Tourenplanung. In jedem Block werden zufällige Stichproben von Punkten ausgewählt und darüber eine Lösung des TSP berechnet. Parameter für diese Bewertungsfunktion sind die Größe und die Anzahl der gewählten Samples. In den Tests wählen wir die Anzahl der Samples so, dass im Mittel jeder Punkt in zehn Touren enthalten ist. Die Anzahl der Samples muss so groß sein, dass die statistischen Schwankungen durch die zufällige Auswahl kleiner sind, als die

Auswirkungen unterschiedlicher Partitionierungen. Zudem sollte das Problem in möglichst kurzer Zeit bewältigt werden. Alle hier auftretenden Handelsreisenden-Probleme werden mit dem TSP-Solver Concorde[ABCC06] gelöst. Dieser Solver kann selbst TSP der Größe 100 oft in kurzer Zeit exakt lösen.

4.4 Bizarreness

Chambers und Miller schlagen ein Maß der Konvexität vor, das sie „Bizarreness“ nennen und das auch bei unregelmäßig geformten Rändern des Betrachtungsraumes gut anwendbar ist. Dieses Maß gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Knoten eines Bezirks diesen nicht verlässt [CM10, S. 3]. Wenn man mit punktförmigen Basisgebieten arbeitet, kann man jedoch dieses Konvexitätsmaß nicht anwenden. Als Lösung für dieses Problem bietet es sich an, statt einer geraden Strecke zwischen zwei Punkten, den kürzesten Weg in einem nach Reisezeit gewichteten Relative-Neighborhood-Graphen zu berechnen. Nun wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass dieser Pfad innerhalb des Blocks bleibt, in der die zufällig gewählten Start- und Endpunkte liegen. Dieses Konvexitätsmaß hat ebenso wie die „Bizarreness“ von Chambers und Miller den Vorteil, dass der Wert stets zwischen 0 und 1 liegt. Somit lassen sich Probleme unterschiedlicher Größe miteinander vergleichen.

4.5 Abkürzungen für die Evaluierungsfunktionen

Die Abkürzungen der Evaluierungsfunktionen sind wie folgt aufgebaut: Die Bezeichnungen für die Kompaktheitsmaße beginnen mit dem Suffix *Comp* für das englische Wort Compactness. Daran schließt sich das Kürzel für das Kompaktheitsmaß an. Diese Kürzel sind wie folgt gegeben:

Pair Summe der paarweisen Distanzen innerhalb der Territorien berechnen und dann die Summe über alle Territorien (siehe Abschnitt 4.1)

MST Länge des minimalen Spannbaums über die Territorien berechnen und dann die Summe über alle Territorien (siehe Abschnitt 4.2)

TSP Handelsreisendenproblem-Evaluierungsfunktion jeweils über ein ganze Territorium und dann die Summe über alle Territorien(siehe Abschnitt 4.3)

10Node-TSPSample Handelsreisendenproblem-Evaluierungsfunktion jeweils über Samples von zehn zufälligen Knoten des gleichen Territoriums. Es werden so viele Samples berechnet, dass jedes Territorium im Schnitt in zehn Rundtouren vertreten ist. Dann wird die Summe über alle Territorien gebildet. (siehe Abschnitt 4.3)

Am Ende der Bezeichnung steht ein Unterstrich gefolgt von einem Kürzel für die verwendete Distanzmatrix. *TT* (kurz für Englisch travel time) repräsentiert die Reisezeitmatrix in Sekunden, *NET* die *Straßenentfernungsmatrix* mit den Netzwerk-entferungen im Straßennetzwerk in Metern. Wir verwenden für unsere Experimente in Kapitel 7 folgende Kompaktheitsmaße:

Pair_TT, MST_TT, TSP_TT, 10Node-TSPSample_TT, Pair_NET.

5. Verfahren

In diesem Kapitel beschreiben wir, wie eine Lösung für ein Gebietsplanungsproblem mithilfe von Graphpartitionierung gefunden werden kann. Unser Verfahren besteht aus zwei Schritten: Zuerst wird ein Graph für die Partitionierung erstellt. Dann wird dieser Graph mit einer von uns modifizierte Version von KaFFPaE partitioniert. Ziel dieser Modifikation ist es, den Zusammenhang und die Kompaktheit der Territorien durch die Zielfunktion von KaFFPaE zu optimieren. Blöcke im Graphen entsprechen dabei Territorien; eine Partition des Graphen entspricht einer Lösung des Gebietsplanungsproblems. Wie ein reales Gebietsplanungsproblem modelliert wird, erläutern wir in Abschnitt 5.1.

Die implementierten Verfahren lassen sich in die Kategorien straßengraphbasierte und distanzmatrixbasierte Verfahren einordnen. Abschnitt 5.2 beschreibt zunächst die Partitionierung aller Knoten des Straßengraphen, um damit das straßengraphbasierte Verfahren *Gesamt-Straßengraph-Planung* zu motivieren. In diesem Abschnitt beschreiben wir auch unser zweites straßengraphbasiertes Verfahren, welches wir *Quotientengraph-Planung* nennen.

Die distanzmatrixbasierten Verfahren erzeugen direkt aus der Distanzmatrix einen Graphen für die Partitionierung. Die Informationen aus dem Straßennetzwerk werden hierbei nur für das Berechnen der Distanzmatrix benötigt, nicht aber der Straßengraph selbst. In Abschnitt 5.3 beschreiben wir zunächst welche Eigenschaften der Graph haben sollte, der in einem distanzmatrixbasierten Verfahren erzeugt wird. Dann stellen wir die folgende distanzmatrixbasierten Verfahren vor: *RNG-Planung* und *Extra-Kanten-Graph-Planung*. Abschnitt 5.5 behandelt die Modifikationen, die wir an KaFFPaE durchführen.

5.1 Modellierung des Gebietsplanungsproblems

Als bekannt setzen wir den Besuchs-Rhythmus der Basisgebiete voraus. Die Gebiete sollen so eingeteilt werden, dass in allen Gebieten die Summe der Aktivitätsmaße in etwa gleich ist. An die Gebietsplanung schließt sich die Tourenplanung an. Dazu werden zuerst die Kunden den Wochentagen zugeordnet. Für jeden Wochentag werden dann Touren geplant. Falls sich in diesem Schritt Probleme ergeben, kehrt man zur Gebietsplanung zurück und erstellt einen neuen Plan. Bei der Tourenplanung ist auf eine hohe Auslastung zu achten, um die Effizienz zu erhöhen. Restriktionen in der Tourenplanung können dazu führen, dass keine gültige Lösung gefunden wird. Ein kritischer Punkt ist bei diesen Planungen, dass viele Versuche notwendig sind, um eine gute Lösung zu finden. Es gibt viele Parameter, bei denen nicht klar ist, wie sie optimaler Weise gewählt werden müssen. Oft ist auch noch viel manuelle Nachbearbeitung der per Computerprogramm gefundenen Lösungen notwendig. Bei diesem Schritt ist es wichtig, dass der Planer bestmöglich von dem Computerprogramm unterstützt wird. Je erfahrener der Anwender, desto schneller erzielt er gute Lösungen. Die Gebietsplanung wird jedoch in der Regel nicht allzu oft durchgeführt. Deshalb hat der Planer oft auch keine Routine in der Bearbeitung dieses Prozessschritts.

Aktivitätsmaß

Den Basisgebieten wird ein Aktivitätsmaß zugewiesen, das die Besuchshäufigkeit sowie den nötigen Zeitaufwand in einem Basisgebiet widerspiegelt. Das Aktivitätsmaß wird so gewählt, dass bei einer gleichmäßigen Aufteilung in jedem Territorium die Summe der Aktivitätsmaße gleich ist. In der vorliegenden Untersuchung wird das Aktivitätsmaß proportional zu der Bedienungshäufigkeit gewählt. Außerdem ist es proportional zu der Zeit, die pro Besuch notwendig ist. Dieser Ansatz vernachlässigt die Zeit, die für Fahrzeiten zwischen den Kunden benötigt wird.

Ein möglicher Ansatz für dieses Problem ist, die erwarteten Fahrzeiten den Kunden anteilig zuzuordnen. Kunden, die isolierter liegen, wird ein höherer Wert auf ihr Aktivitätsmaß aufgeschlagen, als zentraler gelegene Kunden. Da bei der Gebietsplanung die Touren noch nicht bekannt sind, können solche Versuche allerdings nur Approximationen liefern. Trotz sorgfältiger Wahl der Aktivitätsmaße, können sich bei der Tourenplanung unterschiedliche Auslastungen der Territorien ergeben. In diesem Fall müssen die Gebiete nachträglich angepasst werden.

$$w_i = \frac{\text{Besuchsdauer}}{\text{Besuchsrhythmus}} \quad (5.1)$$

5.2 Straßennetzwerk-basierte Verfahren

Wir partitionieren den Straßengraphen der Hauptinsel von Malta. Wegen seiner geringen Größe eignet sich diese Testinstanz gut für erste Versuche. Dieses Testbeispiel enthält 1310 Knoten und 2358 Kanten und ist damit nach der Vatikan-Stadt die zweitkleinste Integrationseinheit des Straßennetzwerks in Europa, die für die Versuche zur Verfügung steht. Im Gegensatz zur Vatikanstadt sind allerdings ausreichend befahrbare Straßen vorhanden um aussagekräftige Ergebnisse zu erzielen. Im Zentrum von Gibraltar gibt es einige Straßen, die für den öffentlichen Verkehr gesperrt sind. Diese Straßen besitzen im Straßengraphen keine ihnen entsprechenden Kanten. Der Straßengraph wird, wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, zusammenhängend sowie ungerichtet gemacht. Der so entstandene Graph ist in Abbildung 5.1(a) abgebildet.

Der Recursive-Partitioning-Ansatz [KNS09] führt eine Partitionierung mittels gerader Trennlinien durch. Die Visualisierung des Ergebnisses erfolgt mithilfe einer KML-Datei. Abbildung 5.1(b) zeigt die Visualisierung dieser KML-Datei in Google Earth. Dabei fällt auf, dass das dunkelgrüne Territorium mit der Nummer 9 zwar in der Hinsicht geografisch konvex ist, als dass die konvexe Hülle sich nicht mit der konvexen Hülle anderer Territorien schneidet. Jedoch ist das Gebiet im Straßennetzwerk nicht zusammenhängend, weil eine Klippe es in zwei Teile aufteilt. Um vom einen Teil in den anderen zu gelangen, muss man über andere Territorien einen Umweg fahren. Solche nicht-zusammenhängende Territorien sollten nach Möglichkeit vermieden werden, um die Fahrzeiten zu optimieren.

Als erster Versuch wird die Lösung von Recursive-Partitioning als Eingabe-Partitionierung von KaFFPa verwendet. Die Idee dahinter ist, dass durch den graphbasierten Ansatz das gerade beschriebene Problem behoben werden kann. Die Verwendung der Recursive-Partitioning-Lösung als Startlösung soll dazu führen, dass die Gebiete auch visuell kompakt sind. Es zeigt sich jedoch, dass auch nach der Partitionierung mit KaFFPa das Territorium noch nicht zusammenhängend ist. Offenbar haben sich die Gebietsgrenzen nur in kleinem Maße angepasst.

Das blaue Gebiet Nr. 1 sieht bei dem Partitionierungsergebnis von Recursive-Partitioning auf den ersten Blick sehr kompakt aus. Bei der Betrachtung des Straßengraphen zeigt sich jedoch, dass die vier Straßenknoten am südlichen Rand des Gebiets erhöht liegen und nur über einen Umweg durch andere Gebiete erreichbar sind. Da es sich hier nur um einen kleineren Teil des Gebiets handelt, der falsch platziert ist, wird dies von KaFFPa in einem Optimierungsschritt behoben. In Abbildung 5.1(c) kommt die Gebietsgrenze zwischen dunkelgrün und blau so zu liegen, dass der Schnitt minimiert wird.

Diejenigen Knoten des dunkelgrünen Gebiets, die direkt an der Küste im Osten liegen, sind nur durch eine Straße im Norden und im Süden vom restlichen Straßengraphen

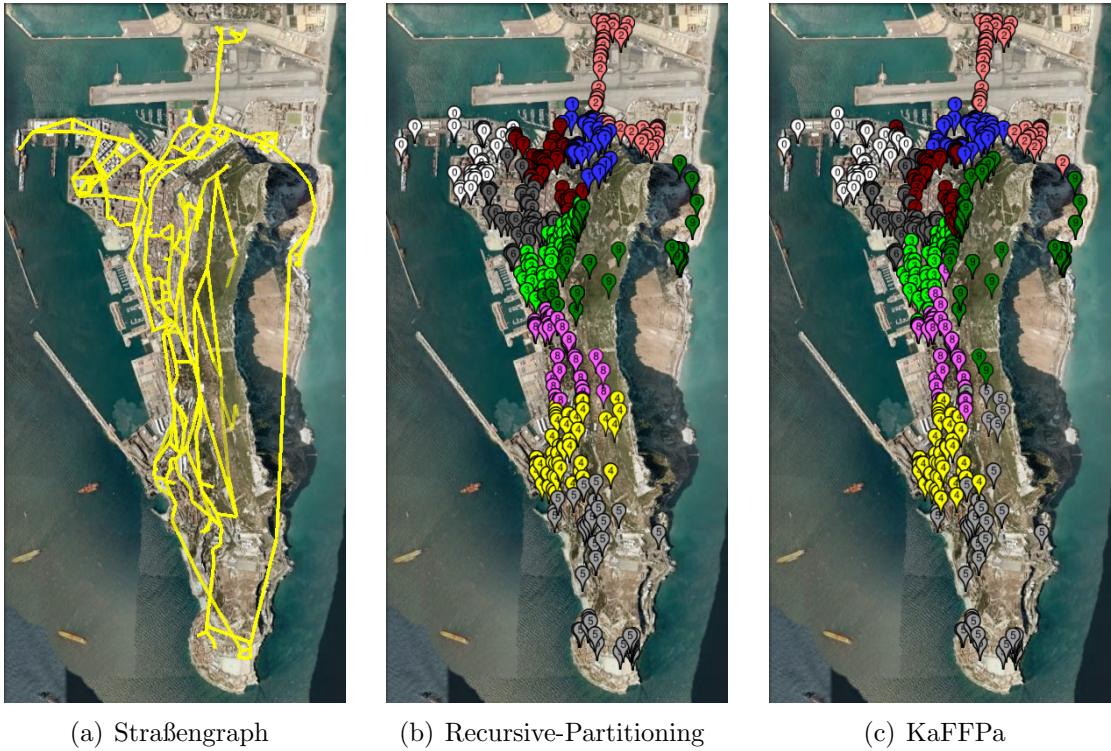


Abbildung 5.1: Partitionierung Gibraltar

getrennt. Zum Schnitt trägt dieses Teilgebiet folglich nur den Wert 2 bei. Bei Erweiterung des Gebiets im Norden oder Süden würde sich die Zahl der geschnittenen Kanten erhöhen. Unter diesen Umständen kann ein zusammenhängendes Gebiet mehr Schnittkanten enthalten als ein nicht-zusammenhängendes. Somit ist es denkbar, dass selbst die optimale Lösung bezüglich der Schnitte nicht-zusammenhängende Gebiete enthält. Ein weiterer Beleg dafür ist der einzelne Knoten des dunkelroten Gebiets 7 am nördlichen Rand des weißen Gebiets Nr. 0. Weil er in einer Sackgasse liegt, erhöht er die Gesamtanzahl der Schnitte nur um den Wert eins. Da solche vereinzelten Knoten nicht gewünscht sind, müssen Gegenmaßnahmen beim Partitionierungsalgorithmus vorgenommen werden.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass eine Optimierung der Gebietsgrenzen eine Zielfunktion benutzen muss, die den Zusammenhang der Gebiete in die Zielfunktion mit einbezieht. Die Untersuchung, wie diese Zielfunktion am besten auszusehen hat, ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit. Die Zielfunktion für die Optimierung, die Kompaktheit und Zusammenhang beschreibt, wird in Kapitel 4 behandelt. Diese Zielfunktion wird durch einen evolutionären Prozess mittels KaFFPaE optimiert, wie wir in Abschnitt 5.5 erklären.

Gesamt-Straßengraph-Planung

Der Straßengraph selbst stellt eine naheliegende Alternative als Grundlage für eine Partitionierung dar. Er ist ein gerichteter Graph, bei dem ein Knoten einer Kreuzung einer Auf- oder Abfahrt entspricht. Kanten beschreiben dabei die zulässigen Fahrtmöglichkeiten zwischen den Kreuzungen. Um Abbiegeverbote zu modellieren, werden an Kreuzungen oft Knoten dupliziert, um individuellen Kantenbeziehungen zwischen den Knoten herzustellen, die die Fahrtmöglichkeiten darstellen. In Definition 27 wird der Straßengraph formal beschrieben. Für die Partitionierung in Gebiete ist dieser Detaillierungsgrad im Gegensatz zur Routenplanung nicht notwendig. Graphpartitionierer arbeiten mit ungerichteten Graphen, da ein Schnitt in einem Graphen auch stets symmetrisch ist.

Als Vorverarbeitungsschritt werden in dem Straßengraphen Knoten mit gleicher Geo-Koordinate (siehe Definition 26) zu einem Knoten verschmolzen. Wir machen die Kanten ungerichtet und entfernen alle Doppelkanten. Außerdem verwenden wir von dem Straßengraphen nur die größte Zusammenhangskomponente. Bei diesem Schritt muss allerdings darauf geachtet werden, dass dabei kein wesentlicher Teil des Straßennetzwerks verloren geht. In den zugrunde gelegten Daten waren im Straßengraphen auch Fähr- und Autoverladungs-Verbindungen enthalten. Ohne diese Verbindungen wäre der Straßengraph nicht zusammenhängend, falls der betrachtete Bereich Inseln enthält.

Um vorgegebener Kundenstandorte zu partitionieren, ordnen wir jedem Kunden dem nächstgelegenen Straßenknoten zu. Diese Knoten erhalten ein Gewicht, das dem Aktivitätsmaß entspricht. Sollten zwei Kunden dem gleichen Straßengraphen zugeordnet werden, bieten sich mehrere Möglichkeiten an. In diesem Fall wird eine Zuordnung zu dem gleichen Gebiet erzwungen, indem man die Kunden zu einem Knoten zusammenlegt. Dieser Knoten erhält dann als Gewicht die Summe der Aktivitätsmaße der Kunden, die ihm zugeordnet sind. Bei der Ausgabe des Ergebnisses wird diese Zuordnung dann wieder aufgelöst. Eine Alternative zu diesem Vorgehen besteht darin, den entsprechenden Straßenknoten so oft zu duplizieren, wie ihm Kunden zugeordnet sind. Außerdem fügen wir zusätzliche Kanten ein, so dass die duplizierten Knoten mit den gleichen Knoten wie die ursprünglichen Straßenknoten verbunden sind.

Knoten, die keine Kundenknoten sind, erhalten ein Gewicht von 0. Somit beeinflussen sie die Balance nicht. Die Balance ist eine vorgegebene Einschränkung in der Partitionierung. An der genauen Zuordnung der Nicht-Kundenknoten zu den Gebieten besteht kein Interesse, da für die Verkaufsgebiete nur Kundenknoten von Bedeutung sind. Jedoch ermöglichen diese zusätzlichen Knoten dem Graphpartitionierer Schnitte von geringem Gewicht zwischen den Kundenknoten zu finden. Solche Schnitte befinden

sich tendenziell eher in ländlichen Gebieten, in denen nur wenige Verbindungsstraßen geschnitten werden müssen. Im städtischen Bereich sind Gebietsgrenzen somit für den Graphpartitionierer teurer, da eine höhere Straßendichte vorliegt. Dies entspricht auch der intuitiven Vorstellung, wie Gebiete optimal geformt sein sollen. In Fällen, in denen eine Stadt alleine schon zu groß für ein einzelnes Gebiet ist, werden jedoch auch innerhalb einer Stadt Gebietsgrenzen notwendig.

Ein Nachteil bei der Verwendung des Straßengraphen für die Partitionierung ist die Größe des Graphen, welche die Laufzeit negativ beeinflusst. Das gesamte Straßennetz von Deutschland besitzt in dem betrachteten Detaillierungsgrad bereits über 9 Millionen Knoten. Für eine Partitionierung mit dem evolutionären Graphpartitionierer KaFFPaE sind dabei schon mehrere Sekunden Laufzeit für einen einzigen Evolutionsschritt notwendig.

Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass bei gegebenen Kundendaten entschieden werden muss, wo die Grenzen des Betrachtungsraums des Straßennetzwerks liegen. Die zur Verfügung stehenden Straßengraphen waren für Europa auf Länderebene gruppiert. Eine Extraktion der Daten für zum Beispiel ein einzelnes Bundesland ist nicht ohne Weiteres möglich. Bei realen Daten für die Partitionierung wäre es auch denkbar, dass die Kundenstandorte nicht gleichmäßig über eine gewisse Verwaltungseinheit verteilt sind. In diesem Fall ist eine Möglichkeit eine Bounding Box mit einem gewissen Rand um die Kundendaten herum zu legen.

Quotientengraph aus Straßengraph

Um die Größe des Graphen zu reduzieren, bietet es sich an, für jeden Kunden nur einen Knoten zu erstellen und keine zusätzlichen für die restlichen Straßenknoten. Um dies zu erreichen, ordnen wir in einem Vorpartitionierungsschritt die Kundenknoten den Straßenknoten zu. Dazu führen wir ausgehend von allen Straßenknoten jeweils eine gleichzeitige Breitensuche durch. Dadurch ordnen wir jedem Kunden ein zusammenhängendes Gebiet an Straßenknoten zu. Denkbar ist es statt der Breitensuche auch den Dijkstra-Algorithmus zu verwenden. Der Dijkstra-Algorithmus zum Finden von kürzester Wege wird in [Dij59] beschrieben.

Aus dieser Vorpartitionierung des Straßengraphen berechnen wir nun den Quotientengraphen. Zwei Knoten im Quotientengraphen sind genau dann benachbart, wenn es zwei Knoten aus den beiden Blöcken gibt, die im ursprünglichen Graphen durch eine Kante verbunden sind. Der berechnete Quotientengraph hat maximal so viele Knoten, wie es Kunden gibt. Falls mehrere Kunden wegen sehr enger räumlicher Nähe für die Partitionierung zusammengelegt wurden, können es auch weniger sein. Der Knotengrad ist relativ klein, in etwa im Bereich von vier bis fünf, auf jeden Fall kann er als konstant angesehen werden, da der Straßengraph praktisch planar

ist und damit auch der daraus berechnete Quotientengraph. Das Kantengewicht im Quotientengraphen setzen wir bei unseren Versuchen auf den konstanten Wert eins. Kleine Verbesserungen ergeben sich durch eine Gewichtsfunktion, bei der längere Kanten mit einem geringeren Gewicht belegt werden. Der hierbei zugrunde gelegte Gedanke ist, dass es besser ist, Kunden durch eine Gebietsgrenze zu trennen, wenn sie weit auseinander liegen. Ist die Distanz zwischen ihnen jedoch gering, sollten sie dem gleichen Territorium zugeordnet werden.

5.3 distanzmatrixbasierte Verfahren

Bei den distanzmatrixbasierte Verfahren wird der zur Lösung des Gebietsplanungsproblems benötigte Graph nur aus einer Distanzmatrix berechnet. Die Knoten entsprechen bei dem zu erzeugenden Graphen den Basisgebieten. Für die Wahl der Kanten haben wir zwei verschiedene Möglichkeiten betrachtet. Zum einen haben wir als Kanten, die Kanten eines Relative-Neighborhood-Graphen (siehe Definition 2.2) verwendet. Die Gebietsplanung mit dieser Wahl nennen wir *RNG-Planung*. Die andere betrachtete Variante ist ein Graph, den wir *Extra-Kanten-Graph* nennen. Da das Ergebnis der Partitionierung kompakte, balancierte zusammenhängende Gebiete sein sollen, muss der verwendete Graph selbst zusammenhängend sein. Somit gibt es eine Korrespondenz zwischen zusammenhängenden Gebieten und dem Zusammenhang innerhalb des Graphen. Da Graphpartitionierer wie KaFFPaE auf die Minimierung der Schnitte zwischen den Gebieten angelegt sind, ist es sinnvoll den Graphen so zu erzeugen, dass Blöcke mit kleinen Schnitten auch visuell schön geformten kompakten Gebieten in der Realität entsprechen.

Kantengewichte können eingesetzt werden, um die Bewertungen für gute Schnitte zu verändern. Alternativ besteht die Möglichkeit, in Gegenden in denen eine Gebietsgrenze weniger vorteilhaft ist, den Knotengrad höher zu wählen. In KaFFPaE kann zwar eine Zielfunktion für die Bewertung vorgegeben werden, die Auswahl der Kandidaten und die Erzeugung neuer Individuen ist jedoch noch auf die Erstellung minimaler Schnitte ausgelegt. Deshalb ist es wichtig, dass Schnitte, die entlang geographischer Hindernisse verlaufen, ein geringeres Gewicht bekommen. Bei vorgegebenen Kundenstandorten sind Bereiche, in denen die Kundendichte gering ist, besser für Gebietsgrenzen geeignet als Kundencluster, die sich oft innerhalb von größeren Städten befinden.

Die Graphen, die als Grundlage verwendet werden, sind aus diesem Grund so aufgebaut, dass Schnitte mit kleinem Gewicht auch guten Partitionierungen entsprechen. Da dies nicht hundertprozentig erreichbar ist, passen wir die Zielfunktion des Graphpartitionierers KaFFPaE an. Die Zielfunktion optimiert ein Kompaktheitsmaß, die Summe der Distanzen innerhalb eines Gebiets. Es wird dann die Summe über alle

Gebiete gebildet. In Abschnitt 7.1 zeigen wir, dass die Summe der Distanzen sehr stark mit kurzen Travelling-Salesman-Problem-Samples korreliert.

Extra-Kanten-Graph-Planung

Dieser Ansatz verwendet, wie auch das Verfahren des Relative Neighborhood Graphen, für die Erstellung des Graphen lediglich eine Distanzmatrix mit den paarweisen Kundenentfernungen. Eine solche Distanzmatrix für die Reiseentfernung oder die Reisedauer für ein bestimmtes Fahrzeugprofil kann durch Beschleunigungstechniken wie Arc-Flags, Transit-Node-Routing und Contraction-Hierarchies effizient berechnet werden. Um einen zusammenhängenden Graphen zu erzeugen, wird zuerst ein Minimaler Spannbaum (MST) berechnet. Dies kann mit Kruskal in $O(n \log n)$ berechnet werden. Da der Spannbaum zu dünn für eine Grundlage der Partitionierung ist, werden zusätzliche Kanten hinzugefügt. Hierfür wird im Kruskal-Algorithmus eine Kante, die einen Kreis schließt, auch dann hinzugefügt, wenn der Knotengrad an beiden Enden der Kante noch kleiner als ein vorgegebenes Limit ist und zusätzlich die Kante kürzer als ein Maximalwert ist. Das Verfahren, das diese Art der Grapherzeugung nutzt, nennen wir *Extra-Kanten-Graph-Planung*.

K-Nächste-Nachbarn-Verfahren

Beim *K-Nächste-Nachbarn-Verfahren* wird jeder Knoten mit seinen k nächsten Nachbarn verbunden. Ein Problem bei diesem Ansatz ist, dass der so entstehende Graph eventuell nicht zusammenhängend ist. Das K-Nächste-Nachbarn-Verfahren wurde in dieser Arbeit nicht weiter untersucht, weil dieses Verfahren keinen zusammenhängenden Graphen garantiert. Insbesondere wenn isoliert gelegene Knotengruppen existieren, kann der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfallen. Dies ist für das Gebietsplanungsverfahren nicht wünschenswert, da der Graph in der modifizierten Version von KaFFPaE für den Zusammenhangstest der Blöcke verwendet werden soll. Ist bereits der gesamte Graph nicht zusammenhängend, wäre es oft nicht möglich, balancierte und zusammenhängende Territorien bei der Gebietsplanung zu erhalten.

5.4 Parameter

Die große Menge an Parametern des Verfahrens macht es unmöglich alle Kombinationen zu testen. Selbst wenn für jeden Parameter nur einige Wertebereiche getestet würden, potenziert sich die Laufzeit der Testreihe so stark, dass sie nicht mehr in annehmbarer Zeit ausgeführt werden kann. Deshalb erstellten wir mehrere Testreihen, die sich auf jeweils maximal zwei Parameter beschränken. Die anderen

Parameter werden in diesem Fall auf einen konstanten Wert gesetzt. Parameter sind unter anderem das verwendete Verfahren zur Grapherstellung, die Laufzeit des Graphpartitionierers und die Zielfunktion für die Graphpartitionierung.

Bei der Grapherstellung sind die Parameter der *maximale Knotengrad* und der *maximale Kantenlängenfaktor*. Der maximale Kantenlängenfaktor als Parameter bewirkt, dass keine zu langen Kanten eingefügt werden. Auch für die Auswertung existieren mehrere Parameter. Wir analysieren mehrere Bewertungsmaße für die Kompaktheit. Das Kompaktheitsmaß der paarweisen Summe der Distanzen ist einfach zu definieren und zu berechnen (siehe Abschnitt 4.1). Die Bewertungsfunktion mit zufälligen TSP-Touren ist nahe an die nachfolgende Gebietsplanung angelehnt. Ein gewisses Problem dieser Metrik ist, dass der Zufall auch eine Rolle spielt. Um diesen Einfluss zu verringern, sind viele Samples notwendig. Wir generieren so viele Samples, bis jedes Basisgebiet im Schnitt in zehn TSP-Touren enthalten ist.

Zusätzlich zu den Kanten des minimalen Spannbaums werden nur dann Kanten zu dem Graphen hinzugenommen, wenn sowohl beim Start- als auch beim Zielknoten der *maximale Knotengrad* noch nicht erreicht ist. Für die Kantenlänge, bis zu der Kanten zum Graphen hinzugefügt werden, wird eine Obergrenze festgesetzt. Bei der Testreihe für Deutschland könnte es bei der Grapherstellung zum Beispiel passieren, dass nur noch in Flensburg und in München Knoten übrig sind, die ihren Knotengrad noch nicht ausgereizt haben. Ohne eine Oberschranke für die Kantenlänge würde in diesem Fall eine unsinnige Kante eingefügt. Um eine Unabhängigkeit von der Verteilung der Knoten sowie der räumlichen Ausdehnung des Betrachtungsraumes zu erreichen, wird die Länge auf ein Vielfaches der durchschnittlichen Kantenlänge des minimalen Spannbaums festgelegt. Durch die Skalierung anhand der Länge der MST-Kanten ist das Verfahren skalenumabhängig. Die so erzeugten synthetischen Graphen besitzen jeweils 1000 Knoten und werden mittels KaFFPaE in zehn Blöcke eingeteilt. Jedes Basisgebiet des Gebietsplanungsproblems entspricht dabei einem Knoten im Graphen. Die Blöcke des Graphen entsprechen den Territorien des Gebietsplanungsproblems. Die Knoten besitzen also Geo-Koordinaten, die zufällig ausgewählten Straßenknoten entsprechen. Die daraus resultierenden Gebiete visualisieren wir in Google Earth. Dafür erstellen wir ein C++-Programm, welches eine KML-Datei ausgibt. Die Keyhole Markup Language (KML) ist ein Dateiformat, das von Google für die Darstellung von georeferenzierten Objekten in Google Earth verwendet wird.

5.5 Partitionierung des erzeugten Graphen

Nach dem Kenntnisstand des Verfassers dieser Diplomarbeit wurde die Graphpartitionierung bisher noch nicht in der Gebietsplanung eingesetzt. Zielsetzung dieser Arbeit ist es, die Erkenntnisse aus der Graphpartitionierung für die Gebietsplanung

nutzbar zu machen. Es bietet sich an, den Straßengraphen für die Partitionierung zu verwenden, da das Straßennetz die Struktur eines Graphen aufweist. Dabei werden Hindernisse im Gelände, die sich im Straßennetzwerk widerspiegeln, berücksichtigt. Es ist vorteilhaft, mit Reiseentfernungen statt mit geometrischen Entfernungen zu rechnen. Wenn ein Gebiet geometrisch gesehen kompakt ist, kann dies – zum Beispiel bei einer Flussschleife – trotzdem große Umwege bis zur nächsten Brücke bedeuten.

KaFFPaE

Um den Zusammenhang herzustellen, führen wir eine Modifikation der Zielfunktion von KaFFPaE durch. KaFFPaE führt die Partitionierung auf unterschiedlichen Ebenen durch. Damit können auch sehr große Graphen behandelt werden. In jedem Evolutionsschritt werden zwei Individuen miteinander verschmolzen, um eine neue Partitionierung zu erhalten. Dazu betrachten wir zuerst eine Überlagerung zweier Partitionierungen. Diese enthält alle Schnitte der beiden Partitionierungen. Die Anzahl der Komponenten ist dadurch höher als die Anzahl der gewünschten Blöcke. Knoten, die durch keine der zwei Partitionierungen getrennt werden, werden kontrahiert. Auf diesem kontrahierten Graphen werden wiederum Partitionierungsverfahren angewendet. Der Vorteil ist, dass gute Partitionierungsgrenzen von beiden Vorgängerindividuen verwendet werden können. Außerdem läuft die Partitionierung auf einer höheren Ebene ab, so dass größere Blöcke von Knoten auf einmal betrachtet werden können. Für die Optimierung auf minimale Schnitte hat sich dieser Ansatz, der Multi-Level-Partitioning genannt wird, als erfolgreich erwiesen [BMS⁺14].

Die Grapherzeugung sowie die Testreihen haben wir in C++ programmiert. Wir entscheiden uns für diese Programmiersprache, da KaFFPaE ebenfalls in dieser programmiert ist. Die angepasste Zielfunktion integrieren wir als neue Methode in KaFFPaE. Ebenfalls passen wir in KaFFPaE die Einleseoptionen an, um das Laden einer Distanz-Matrix zu ermöglichen. An KaFFPaE führen wir Anpassungen an der Zielfunktion durch. Dabei probieren wir viele verschiedene Parameter aus. Unter anderem implementieren wir verschiedene Funktionen zur Gewichtung der Graphkanten. Ein Kantengewicht, das sich invers zu der Entfernung zwischen den Endknoten verhält, sollte Trennkanten zwischen weit auseinander gelegenen Kunden begünstigen. Durch diese Anpassung ergibt sich jedoch keine signifikante Verbesserung, sondern eher eine leichte Verschlechterung. Das testweise Ändern der Zielfunktion auf quadrierte Distanzen oder ein Min-Max-Kriterium statt einer Summe über die Blöcke bringt ebenfalls keine messbaren Vorteile.

Ein Problem stellen teilweise zu lange Laufzeiten der umfangreichen Testreihen dar. Bei mehreren voneinander unabhängigen Parametern und Testfällen wächst die Anzahl der durchzuführenden Tests schnell an. Allerdings werden auch mehrere Tests

benötigt, um eine Mittelung durchführen zu können, die den Einfluss des Zufalls minimiert. Auf diese Weise lassen sich signifikante Trends nachweisen. Die zufällige Komponente liegt im Bereich von bis zu fünf bis zehn Prozent, wie in Abbildung 7.5 zu erkennen ist.

6. Testinstanzen

In diesem Kapitel erläutern wir zunächst in Abschnitt 6.1 unser Vorgehen bei der Erstellung eines Straßengraphen. Ein von uns erstelltes graphentheoretisches Modell definiert den Straßengraphen formal. Wir erklären auch die Semantik des Straßengraphen, das heißt wir zeigen beispielhaft, wie Eigenheiten des realen Straßennetzwerks mit Elementen des Straßengraphen korrespondieren. In Abschnitt 6.2 stellen wir ein Verfahren vor, mit dem wir aus dem Straßengraphen einen ungerichteten, schlichten Graphen erzeugen. Diesen resultierenden Graphen bezeichnen wir als *vereinfachten Straßengraphen* und definieren ihn formal. Der *vereinfachte Straßengraph* stellt die Grundlage für die Erzeugung zufälliger Gebietsplanungs-Testinstanzen dar. Im Abschnitt 6.3 stellen wir drei solcher Testinstanzen vor, die wir für das Tunen der Parameter unseres graphbasierten Gebietsplanungsverfahrens einsetzen. Real-Daten-Testinstanzen auf Bundesländerebene stellen wir in Abschnitt 6.4 vor.

6.1 Straßengraph

Ein C++-Programm der PTV Group extrahiert aus dem Datensatz des Straßennetzwerk Informationen und speichert sie in einem proprietären CSV-Format. Bei der Erstellung kann angegeben werden, bis zu welcher Kategorie hinab die Straßenkanten eingelesen werden sollen. Bei Level 6 werden alle befahrbaren Straßen eingelesen, bei Level 1 nur die Autobahnen. Die Einstellungen der Konfigurationsdatei zum Fahrzeugprofil werden auf dem Standardwert belassen. Eine gewisse aktivierte Option des Programms bewirkt, dass aufeinanderfolgende Straßen-Kanten, die ohne Abzweigung linear verbunden sind, zu einer einzigen Kante zusammengefasst werden. Dies verringert die Größe des Graphen. Auf Grundlage der in den erzeugten CSV-Dateien enthaltenen Informationen entwickeln wir in dieser Diplomarbeit ein mathematisches Modell, welches fortan *Straßengraph* genannt wird. Die Geo-Referenzierung der

Kreuzungen des Straßennetzwerks erfolgt durch *Geo-Koordinaten*, die wir wie folgt definieren:

Definition 26 (Geo-Koordinate) Eine *Geo-Koordinate* ist ein Tupel $K = (x, y)$ mit $-180 \leq x \leq 180$, $-90 \leq y \leq 90$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Semantisch entspricht dabei x dem Längengrad und y dem Breitengrad eines bestimmten Orts auf der Erde. Beide Koordinaten werden im Gradmaß angegeben.

Die Längengrade mit den Werten -180 und 180 sind gleichbedeutend. Sie sind beide zulässig, um einen symmetrischen Wertebereich zu erhalten. Mit dieser Definition können wir nun den *Straßengraphen* wie folgt definieren:

Definition 27 (Straßengraph) Ein *Straßengraph* $G_{SG} = (V, E, f_v, f_e)$ ist ein Tupel aus einer Knotenmenge V , einer Kantenmenge E , einer Knotenfunktion f_v , sowie einer Kantenfunktion f_e . Die Funktion $f_v : V \rightarrow K$ ordnet jedem Straßenknoten $v \in V$ eine *Geo-Koordinate* zu. Die Kantenmenge $E = E_g \cup E_u$ ist die disjunkte Vereinigung der gerichteten Kanten E_g sowie der ungerichteten Kanten E_u . Die ungerichteten Kanten stellen eine Multimenge über die Menge der 2-elementigen Teilmengen von V dar, also eine Funktion $E_u : [V]^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$. Die Multimenge der gerichteten Kanten wird durch die Funktion $E_g : V \times V \rightarrow \mathbb{N}_0$ über die Menge der Tupeln von Knoten dargestellt. Eine Funktion $f_e(e) = (d_s, d_t)$, $d_s \in \mathbb{N}_0$, $d_t \in \mathbb{N}_0$ weist jeder Kante $e \in E$ eine Fahrtstrecke d_s in Metern sowie eine Reisedauer d_t in Sekunden zu.

In Abbildung 6.1 ist ein kleiner Ausschnitt aus einem Straßennetzwerk dargestellt, der speziell konstruiert wurde, um gewisse Eigenheiten des Straßengraphen zu erklären. Die getrennten Fahrbahnen einer Straße werden hier exemplarisch durch eine Mittelmarkierung dargestellt. Die Einbahnstraße, die wieder zu ihrer Ausgangskreuzung zurückführt, ist eine selten auftretende Ausnahme, die aber trotzdem berücksichtigt werden muss. Wegen solcher Strukturen im Straßennetz sind im Straßengraphen auch reflexive Kanten zulässig. Bei dem in Abbildung 6.2 beispielhaft dargestellten Straßengraphen sieht man rechts oben solch eine reflexive Kante. Mehrfachkanten sind in diesem Beispiel nicht zu sehen. Sie können allerdings auftreten, wenn sich zwei Straßen an einer Kreuzung trennen und an der nächsten wieder treffen.

Bei dem extrahierten Straßengraphen ist festzustellen, dass größere Straßenkreuzungen mehrere Knoten mit denselben Geo-Koordinaten enthalten. Dies ermöglicht die Modellierung von erlaubten Abbiegebeziehungen. Für kleinere Straßen werden ungerichtete Kanten verwendet, wenn man die beiden Richtungen nicht separat modellieren will. Die genauen Entscheidungsgrundlagen dafür, wann ungerichtete Kanten verwendet werden, sind dem Verfasser dieser Arbeit nicht bekannt. Sicher ist

jedenfalls, dass für die Modellierung von Abbiege- oder Wende-Verboten gerichtete Kanten verwendet werden müssen. Die genaue Modellierung der Abbiegebeziehungen ist nicht Teil dieser Arbeit. Stattdessen werden Entfernungen zwischen zwei Geo-Koordinaten durch ein Tool der PTV Group berechnet, welches als Black Box betrachtet wird. Zur effizienten Berechnung setzt dieses Tool Contraction Hierarchies [GSSD08] ein. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Zusatzinformationen über erlaubte Fahrtrichtungen durch eine Graphbereinigung entfernt. Das Vorgehen bei der Graphbereinigung beschreibt der nächste Abschnitt.

6.2 Vereinfachung des Straßengraphen

Der erzeugte Straßengraph ist nicht immer zusammenhängend und kann des Weiteren Mehrfachkanten sowie Knoten ohne Kanten besitzen. An Kreuzungen gibt es oft mehrere Straßenknoten mit denselben Geo-Koordinaten, um Abbiegebeziehungen zu modellieren.

Definition 28 (vereinfachter Straßengraph) Ein *vereinfachter Straßengraph* $G_{vSG} = (V, E, f_v, f_e)$ ist ein Tupel aus einer Knotenmenge V , einer Kantenmenge E , einer Knotenfunktion f_v , sowie einer Kantenfunktion f_e . Die Funktion $f_v : V \rightarrow K$ ordnet jedem Knoten $v \in V$ eine eindeutige *Geo-Koordinate* zu. Für alle $u, v \in V, u \neq v$ gilt: $f_v(u) \neq f_v(v)$. Die Funktion f_v ist also injektiv. Die Kantenmenge $E \subseteq [V]^2$ ist eine Teilmenge der 2-elementigen Teilmengen von V . Eine Funktion $f_e(e) = (d_s, d_t), d_s \in \mathbb{N}_0, d_t \in \mathbb{N}_0$ weist jeder Kante $e \in E$ eine Fahrtstrecke d_s in Metern sowie eine Reisedauer d_t in Sekunden zu.

Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit ein Bereinigungsschritt implementiert, der einen ungerichteten, zusammenhängenden Graphen erzeugt. Diesen Graphen nennen wir *vereinfachten Straßengraph* (siehe Definition 28). Dazu werden zuerst Knoten mit gleichen Geo-Koordinaten verschmolzen, wodurch weitere Mehrfachkanten entstehen. Gerichtete Kanten des Graphen werden in ungerichtete umgewandelt. Gleichzeitig werden Mehrfach-Kanten zu einer einzelnen Kante zusammengefasst. Damit die Informationen der Entfernung und Reisezeit auf den Kanten nicht verloren gehen, erhält die zusammengefasste Kante den Mittelwert aller Mehrfachkanten zwischen den Knoten. Im darauffolgenden Schritt wird die größte Zusammenhangskomponente des vereinfachten Straßengraphen berechnet. Diese ist nun der zugrunde liegende Graph für die Versuche.

In diesem Vorverarbeitungsschritt gehen die Informationen über die Fahrtrichtung der Einbahnstraßen sowie erlaubten Abbiegebeziehungen verloren. Dies nehmen wir bewusst in Kauf, da Graphpartitionierer auf einem ungerichteten Graphen arbeiten.

Abbildung 6.1: Fiktiver Ausschnitt eines Straßennetzwerks. Pfeile symbolisieren Einbahnstraßen. Eine Besonderheit ist die Einbahnstraße, bei der Anfang und Ende an der gleichen Kreuzung liegen. Die dünnen Wege links unten sind für den KFZ-Verkehr gesperrt. Die große Straße hat getrennte Richtungsfahrbahnen.

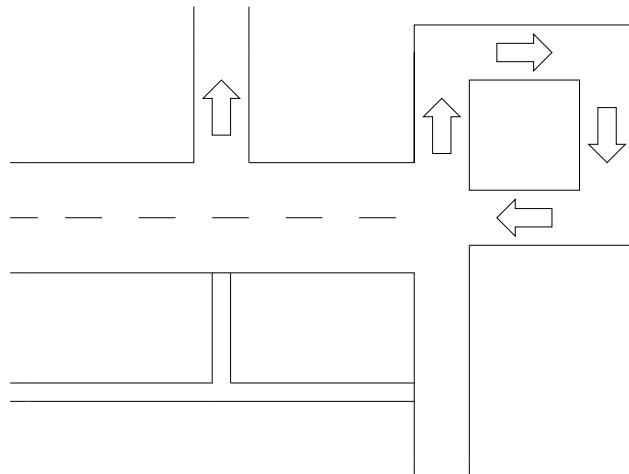


Abbildung 6.2: Straßengraph, der dem Straßenausschnitt entspricht. Der Graph modelliert auch Abbiegebeziehungen. Die beiden Knoten in der Mitte der großen Straße besitzen die selben Geo-Koordinaten. Nach dieser Modellierung ist nur ein Rechtsabbiegen in die linke Einbahnstraße erlaubt. Ein U-Turn ist hier ebenfalls verboten.

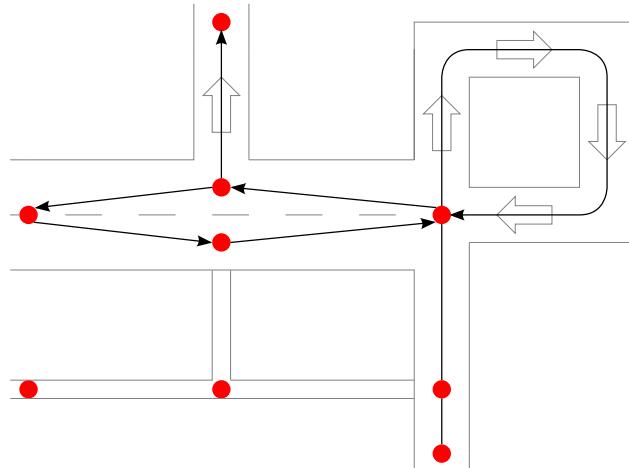
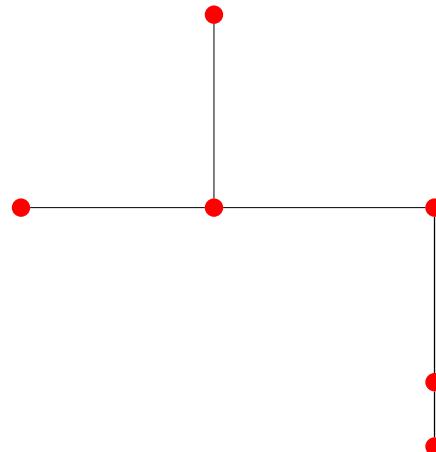


Abbildung 6.3: Bereinigter Straßengraph. Dieser Graph ist ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Mehrere Knoten an Kreuzungen werden zu einem verschmolzen. Das Bereinigungsverfahren entfernt außerdem Mehrfachkanten. Aus dem Straßengraphen wird lediglich die größte schwach zusammenhängende Komponente übernommen.



Im Gegensatz zu der Routenplanung, bei der die Fahrtzeit in die Gegenrichtung abweichen kann, ist das Festlegen einer Trennlinie für die Gebietsplanung eine symmetrische Operation. Die Distanzmatrizen mit den Reisezeit- sowie den Straßenentfernungen werden jedoch nicht auf dem vereinfachten Straßengraphen berechnet, sondern mit einer Tourenplanungssoftware ermittelt. Daher sind die Distanzmatrizen nicht symmetrisch. Es wäre jedoch denkbar, die Distanzmatrizen symmetrisch zu machen, indem über beide Richtungen gemittelt wird. Dies hätte eine Speicherersparnis um etwa die Hälfte zur Folge, ohne voraussichtlich nennenswerte Auswirkung auf das Partitionierungsergebnis.

Um eine Unabhängigkeit von der räumlichen Ausdehnung des Gebiets zu erreichen, betrachten wir drei unterschiedlich große Gebiete. Dabei handelt es sich um Malta, die Umgebung Hamburgs sowie als größten Test ganz Deutschland. Um Testinstanzen für das Tunen der Parameter zu erzeugen, werden zufällig jeweils 1 000 Knoten aus dem vereinfachten Straßengraphen ausgewählt. Für jeden der drei Graphen werden jeweils zehn Testinstanzen erzeugt, so dass sich in Summe 30 Testinstanzen als Grundlage für das Entwickeln des Verfahrens ergeben. Die Erzeugung mehrerer zufälliger Gebietsplanungsprobleme soll ein Über-Training der Testdaten verhindern und somit eine gute Generalisierungsfähigkeit sicherstellen. Des Weiteren lassen sich durch die Mittelung über zehn Instanzen bei Parameter-Testreihen Trends besser erkennen, da der Zufall bei der Erzeugung der Instanzen so eine geringere Rolle spielt. Die Gewichte der Basisgebiete werden alle auf den Wert eins gesetzt. Der Test mit den Realdaten (siehe Abschnitt 7.3) zeigt allerdings die problemlose Generalisierbarkeit des Algorithmus auf gewichtete Probleme.

6.3 Testinstanzen aus zufälligen Straßenknoten

Zur Entwicklung des Gebietsplanungsverfahrens werden Testreihen in drei verschiedenen Regionen durchgeführt. Dabei handelt es sich um Malta, Hamburg mit Umgebung von etwa 100 Kilometer sowie Deutschland. Des Weiteren wäre es interessant, Länder mit einem hohen Anteil an geografischen Hindernissen zu untersuchen, wie etwa die Schweiz oder Norwegen. Zu diesen beiden Ländern werden Tests zur Partitionierung des Straßengraphen durchgeführt, allerdings ohne Beachtung einer Distanzmatrix, sondern nur mit Optimierung auf minimale Schnitte. Die dabei erzeugten Gebiete sind zusammenhängend, die Kompaktheit lässt allerdings noch Raum für Verbesserungen. Die synthetisch erzeugten Testfälle für Malta, Hamburg und Deutschland verwenden wir dazu, geeignete Parameter für unser Verfahren zu ermitteln.

Deutschland: Große Testinstanz

Für diese Testreihe wird das gesamte Straßennetz Deutschlands verwendet, das in bereinigter Form bei unseren Tests aus 3 352 516 Knoten sowie 8 535 816 Kanten besteht. Dieser Graph kann trotz seiner Größe mit dem Graphpartitionierer Metis oder KaFFPa noch in wenigen Sekunden partitioniert werden. Für die evolutionäre Variante des Karlsruher Fast Flow Partitioner ergibt sich jedoch eine Laufzeit von vielen Minuten, bis zum Finden einer guten Lösung. Neben anderen Faktoren trägt die Auswertung der Kompaktheitsfunktion nach jedem Evolutionsschritt zu der großen Laufzeit bei.

Bei diesem Testgraphen wird ersichtlich, dass der Graph vor der eigentlichen Partitionierung vereinfacht werden muss, um kürzere Laufzeiten zu ermöglichen. Durch die Verkleinerung des Graphen kann der Individuen-Pool deutlich größer ausfallen. Auf diese Weise können in der selben Zeit mehr Generationsschritte ausgeführt werden. So können bessere Lösungen für das Gebietsplanungsproblem erzielt werden. Da die Anzahl der zufällig ausgewählten Kundenknoten hier wie bei den anderen beiden Testreihen ebenfalls 1 000 beträgt, das Straßennetz allerdings deutlich größer ist, ergibt sich für den Deutschland-Test das größte Einsparpotenzial durch die Vereinfachung des Graphen.

Bei der Deutschland-Testreihe spielt das Autobahnnetz als höchste Stufe in der Hierarchie des Straßennetzes eine bedeutende Rolle. Indem wir die Distanzmetrik der Reisezeit verwenden, erhalten wir eine präzisere Schätzung der Tourdauer innerhalb eines Territoriums. Da die Reisezeit auch für die Messung der Kompaktheit herangezogen wird, ist zu erwarten, dass kompakte Gebiete in der Richtung parallel zu Autobahnen eine größere Ausdehnung haben als orthogonal dazu. Um die Gebietsplanungsergebnisse darauf zu untersuchen, bietet sich der Südwesten Baden-Württembergs an. Dort verlaufen in Nord-Süd Richtung die A5 sowie die A81. In Ost-West Richtung hingegen gibt es südlich der A8 keine schnellen Verkehrswege aufgrund der nötigen Querung des Schwarzwalds. Das erwartete Ergebnis ist daher, dass die Territorien, die in der Rheinebene liegen in Nord-Süd Richtung die größte räumliche Ausdehnung besitzen. Diese Vermutung können wir in Kapitel 7 bestätigen.

Hamburg: Elbe als Hindernis

Dieser Testfall besteht aus Hamburg und Umgebung. Das betrachtete Gebiet erstreckt sich im Westen von Bremerhaven bis Schwerin im Osten. Die Gebietsgrenze im Norden ist die Grenze zu Dänemark. Im Süden wurde die Grenze so gewählt, dass sie keine größere Stadt schneidet. Der gewählte Breitengrad, der die südliche Grenze darstellt, verläuft etwa zwischen Bremen und Hannover. Die Nordfriesischen Inseln, die per Fähre erreicht werden können, befinden sich ebenfalls im Betrachtungsgebiet. Der

erzeugte Straßengraph ist zusammenhängend, da auch Fährverbindungen als Kanten berücksichtigt werden. Der Spezialfall der Autoüberladung per Zug auf Sylt konnte in die bei dieser Arbeit verwendete Datengrundlage aus technischen Gründen nicht integriert werden. Die verwendete Kartengrundlage enthält zwar diese Verbindung; allerdings wäre eine Spezialbehandlung dieses Falls notwendig geworden. Da dieser Fall in Deutschland nur einmalig auftritt, wird aus Zeitgründen darauf verzichtet. In der Schweiz gibt es allerdings mehrere Autoüberladungen. Diese sind insbesondere im Winter wichtig, wenn Passstraßen gesperrt sind. In der zufälligen Auswahl der Straßenknoten sind keine aus Sylt enthalten, da das dortige Straßennetz mangels Verbindung zum restlichen Graphen entfernt worden ist.

Diesen Ausschnitt wählen wir, da er die Elbe als natürliches Hindernis enthält. Der Elbtunnel in Hamburg ist von der Mündung gesehen die erste feste Querungsmöglichkeit. Zwischen Glückstadt und Wischhafen gibt es jedoch noch eine Fährverbindung über die Elbe. Wegen Wartezeiten und Fährgebühren sollen Territorien, die an dieser Stelle die Elbe überspannen, dennoch vermieden werden. Die Zielsetzung des in dieser Arbeit beschriebenen graphbasierten Ansatzes ist es, natürliche Hindernisse, wie in diesem Fall die Elbe, zu respektieren.

Um dabei auch Fährverbindungen mit einzubeziehen, verwenden wir die Distanzmetrik der Reisezeiten, wie es bereits Papayanopoulos 1973 in seiner Arbeit über Kompaktheitsmaße beschreibt [Pap73, S.187]. Territorien, die nur über Fährverbindungen zusammenhängen, erhalten dadurch eine schlechte Kompaktheitsbewertung. Die Intention ist, dass durch den evolutionären Algorithmus solche ungünstigen, weil wenig kompakte, Gebiete vermieden werden. Im Falle der nordfriesischen Insel Föhr lässt es sich hingegen nicht vermeiden, dass für Fahrtstrecken innerhalb eines Territoriums eine Fähre eingesetzt werden muss, da Föhr alleine viel zu klein für ein Territorium ist. Die Kompaktheit sowie die Kontiguität, die als Zielfunktion verwendet werden sollen, dennoch sicherstellen, dass die Inseln mit dem naheliegenden Festland bei der Gebietsplanung eingeteilt werden.

Mit 237 658 Knoten sowie 598 646 Kanten reiht sich der Graph für diese Testreihe zwischen denen von Malta und Deutschland ein. Er ist etwa 12-mal größer als Malta, allerdings 14-mal kleiner als Deutschland und damit von der Größenordnung her mit einem durchschnittlich großen Bundesland vergleichbar. Aus diesem Graphen werden ebenfalls 10 Testinstanzen mit jeweils 1000 zufällig ausgewählten Knoten erzeugt. Aus dieser Art der Erzeugung resultiert, dass in Gebieten mit höherer Straßendichte, das heißt in Städten, mehr Knoten erzeugt werden. Die so erzeugten Testdaten sind daher realitätsnah, da reale Gebietsplanungsprobleme ebenfalls diese Charakteristik zeigen.

Malta: Kleine Testinstanz

Als kleinstes betrachtetes Straßennetzwerk wird das der Insel Malta betrachtet. Aus der Datei, die das gesamte Straßennetz der Republik Malta enthält, werden diejenigen Straßenknoten herausgefiltert, die nicht zu der Hauptinsel Malta, sondern zu den Nebeninseln Gozo und Comino gehören. Um dies zu erreichen, existiert eine Trennlinie, die nördlich von Malta und südlich von Comino verläuft. Nur Straßenknoten südlich davon gehören damit zu dem Test-Set. Knoten nördlich davon werden samt ihrer Kanten verworfen. Dadurch erhält man ein Straßennetz, das sich nur auf eine Insel beschränkt und damit klar definierte Grenzen hat.

Die Insel Malta hat im Jahr 2010 etwa 367 000 Einwohner [Mal11]. Bezogen auf die Fläche entspricht das einer hohen Bevölkerungsdichte, wobei ein Großteil in Städten wohnt. Betrachtet man Luftbilder des Straßennetzwerks mittels Google Earth erkennt man, dass diese Städte klar begrenzt sind. Dazwischen liegen landwirtschaftlich genutzte Flächen mit niedrigerer Bevölkerungsdichte. Damit entspricht Malta der typischen Siedlungsstruktur für Europa. Die Erwartung an den zu entwickelnden graphbasierten Gebietsplanungsalgorithmus ist, dass die Gebietsgrenzen vorwiegend durch dünner besiedeltes Gebiet zwischen den Städten verlaufen.

Der vereinfachte Straßengraph enthält 19 072 Knoten und 53 756 Kanten, woraus sich ein durchschnittlicher Knotengrad von 2,82 ergibt. Dieser Wert ist etwas größer, als der entsprechende von 2,55 für Deutschland, liegt allerdings noch in der gleichen Größenordnung. Malta eignet sich deshalb gut für die Testreihe. Es ist groß genug, um ein hierarchisch aufgebautes Straßennetz zu besitzen und gleichzeitig gerade noch klein genug, um den gesamten Straßengraphen mithilfe von KML-Dateien in Google Earth zu visualisieren. Eine solche Visualisierung findet sich in Abbildung 7.8.

6.4 Bundesländer-Realdatentests

Um die Leistung des Verfahrens zu evaluieren, verwenden wir Realdaten-Tests auf Bundesländerebene. Dabei handelt es sich um Standorte von Einzelhandelsketten sowie um Depotstandorte. Pro Bundesland gibt es bis zu 20 Depotstandorte. Da das in dieser Arbeit vorgestellte graphbasierte Verfahren keine Gebietszentren berücksichtigt, wird nur die Anzahl, nicht aber die geografische Lage der Depots verwendet. Die Anzahl der zu erzeugenden Territorien wird dabei durch die Anzahl der Depots fest vorgegeben. Damit die so erzeugten Gebietsplanungsprobleme nicht trivial sind, werden nur diejenigen Bundesländer in den Test mit einbezogen, in denen minimal drei Depots in den Testdaten vorhanden sind. Dadurch ergeben sich 12 Testinstanzen, von denen Nordrhein-Westfalen mit 2440 Basisgebieten und 20 Territorien das größte und Sachsen-Anhalt mit 284 Basisgebieten und 3 Territorien das kleinste ist.

Tabelle 6.1: Übersicht über die Realdatentests

	#Basisgebiete	#Territorien	Fläche in km ²
Baden-Württemberg	11	1252	35,751.65
Bayern	18	2019	70,551.57
Berlin	3	427	891.57
Hessen	9	1038	21,114.79
Mecklenburg-Vorpommern	3	289	23,180.14
Niedersachsen	13	1265	47,624.20
Nordrhein-Westfalen	20	2440	34,085.29
Rheinland-Pfalz	6	514	19,853.36
Sachsen	5	493	18,415.51
Sachsen-Anhalt	3	284	20,446.31
Schleswig-Holstein	6	520	15,799.38
Thüringen	4	428	16,172.10

Eine Übersicht über alle 12 Bundesländer-Testinstanzen findet sich in Tabelle 6.1. Das Aktivitätsmaß w_i legen wir dabei, wie in Gleichung 5.1 beschrieben, fest. Die Besuchsdauer entspricht dem Arbeitsaufwand pro Besuch und der Besuchsrhythmus der Häufigkeit der Besuche pro Woche. Da für das Verfahren die absoluten Werte irrelevant sind und nur die relativen Unterschiede eine Rolle spielen, wird das Aktivitätsmaß so skaliert, dass sich für alle Basisgebiete i ein ganzzahliger Wert ergibt.

7. Experimente

In diesem Kapitel beschreiben wir die durchgeführten Versuche sowie die dabei erzielten Ergebnisse. Der erste Teil unserer Untersuchungen behandelt verschiedene Kompaktheitsmaße. Da die hier verwendeten Kompaktheitsmaße nicht skaleninvariantsind, müssen die Ergebnisse stets auf ein Ergebnis eines Planungsverfahrens skaliert werden, um Vergleiche durchführen zu können. Wir führen in Abschnitt 7.1 eine Testreihe durch, bei der wir den Parameter *maximaler Knotengrad* des Verfahrens *Extra-Kanten-Graph-Planung* variieren. Für die resultierenden Gebietsplanungen rechnen wir jeweils vier verschiedene Kompaktheitsmaße aus und untersuchen welche Auswirkungen der Parameter auf die Kompaktheit hat. Dabei inspizieren wir die berechneten Gebietsplanungen auch visuell.

Um gute Werte für die Parameter *maximaler Knotengrad* und *maximaler Kantenlängenfaktor* des Verfahrens *Extra-Kanten-Graph-Planung* zu finden, führen wir in Abschnitt 7.2 eine Testreihe durch, bei der sowohl der maximale Knotengrad als auch der maximale Kantenlängenfaktor variiert werden. Da die hier verwendeten Kompaktheitsmaße nicht skaleninvariantsind, müssen die Ergebnisse stets auf ein Ergebnis eines Planungsverfahrens skaliert werden, um Vergleiche durchführen zu können. Wir verwenden dazu die Testinstanzen aus zufälligen Straßenknoten, die in Abschnitt 6.3 beschrieben werden. Wir ermitteln eine Parameterbelegung, für die sowohl *CompMST_TT* und *CompPair_TT* gute Werte liefern. Des Weiteren führen wir einen Test durch, bei dem wir die Laufzeit von KaFFPaE variieren, um zu ermitteln, wie sehr sich die Kompaktheit bei längerer Laufzeit verändert.

Wir setzen nun den maximaler Knotengrad auf den Wert 20, den *maximaler Kantenlängenfaktor* auf fünf und die Laufzeit von KaFFPaE auf zehn Sekunden. Die Anzahl der verwendeten Threads setzen wir auf 8, um unsere Test-Maschine, einen Quad-Core mit 3 Ghz und Hyperthreading voll auszulasten. Mit diesen Wertefestlegungen führen

wir nun in Abschnitt 7.3 eine Bewertung unseres graphbasierten Gebietsplanungsverfahrens vor. Für diese Evaluation verwenden wir die Real-Daten-Testinstanzen auf Bundesländerebene. Wir untersuchen auf den Real-Test-Instanzen zuerst, welchen Einfluss die zulässige Unausgewogenheit der Territorien auf die Kompaktheit hat. Um statistisch signifikante Ergebnisse zu erhalten, wiederholen wir die Tests 20-mal mit unterschiedlichen Startwerten des Pseudozufallsgenerators für KaFFPaE. Dabei stellen wir fest, dass der Einfluss des Zufalls auf die Kompaktheit einen größeren Einfluss hat, als der Unterschied zwischen fünf und zehn Prozent zulässiger Unausgewogenheit. Wir vergleichen nun unsere Lösung der Real-Daten-Gebietsplanungsprobleme mit den Ergebnissen der Gebietsplanungsverfahren MIP und Recursive-Partitioning. Für das Kompaktheitsmaß *CompPairTT* und fünf Prozent Unausgewogenheit stellen wir einen Vergleich auf Bundesländerebene vor. Wir vergleichen den geometrischen Mittelwert der erzielten Kompaktheit bei verschiedenen Verfahren für zwei verschiedene Distanzmatrizen sowie zwei verschiedenen Werte für die Unausgewogenheit. Aus diesen Erkenntnissen folgern wir die Stärken und Schwächen der betrachteten Gebietsplanungsverfahren und ermitteln unter welchen Umständen welches der Verfahren die besten Ergebnisse liefert.

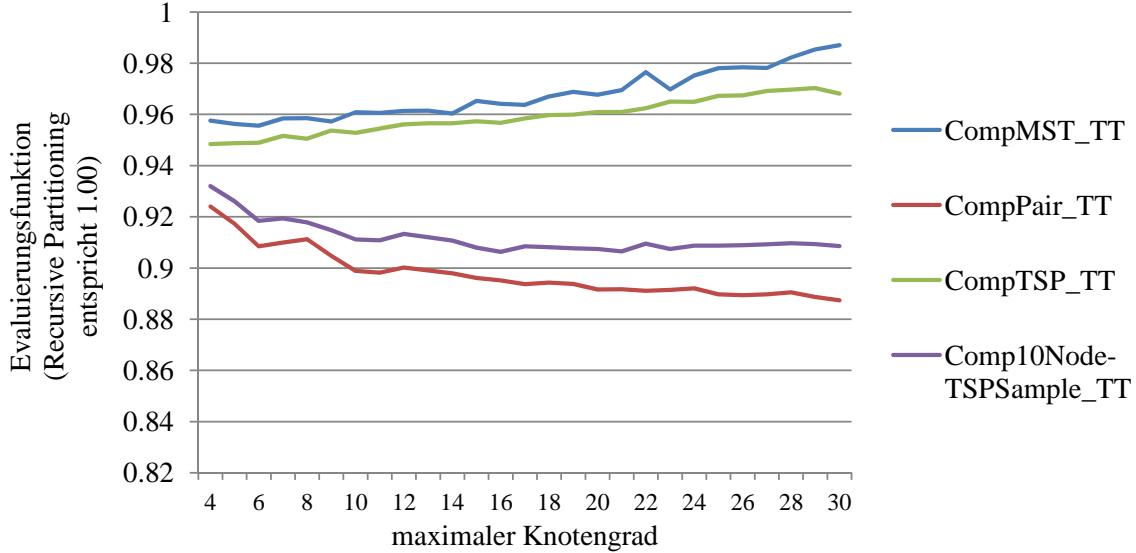
7.1 Vergleich der Kompaktheitsmaße

Die Partitionierungs-Ergebnisse, der Testreihen werden durch vier verschiedene Kompaktheits-Bewertungsmaße beurteilt. Dabei untersuchen wir, welche Bewertungsmaße einander ähneln. Dies lässt sich durch Korrelationskoeffizienten ermitteln. Der Verlauf der Bewertungsmaße bei Variation des *maximalen Knotengrads* ist in Abbildung 7.1 dargestellt. In Tabelle 7.1 sind die paarweisen Korrelationskoeffizienten angegeben.

In Abbildung 7.1 erkennt man, dass mit steigendem Knotengrad die *TSP-Evaluierungs-Funktion* und die *MST-Evaluierungs-Funktion* ansteigen, das heißt sich verschlechtern. Dies ist verständlich, da ein Knotengrad von 0 einer Partitionierung des minimalen Spannbaums entsprechen würde. Die Testreihe beginnt jedoch erst mit vier, da bei dünnen Graphen der Zusammenhang der Gebiete zu schwierig herzustellen ist. Zwischen diesen beiden Funktionen besteht eine starke Korrelation, was der Korrelationskoeffizienten von 0,95 zeigt. Dies ist verständlich, da Handelsreisenden-Probleme und minimale Spannbäume gewisse Ähnlichkeit besitzen. Dies zeigt sich auch dadurch, dass zur Konstruktion einer approximativen Lösung des Handelsreisenden-Problems ein minimaler Spannbaum eingesetzt wird.

Die Kompaktheitsmaße auf Grundlage des Handelsreisenden-Problems haben den größten Bezug zur Praxis, da dort auch Rundtouren geplant werden. Allerdings ist der benötigte Rechenaufwand nicht unerheblich. Insbesondere bei der Verwendung von zufälligen Samples müssen sehr viele Handelsreisenden-Probleme gelöst werden,

Abbildung 7.1: Vergleich der Kompaktheitsmaße. Es ist zu erkennen, dass sich die Kompaktheitsmaße CompPair_TT und Comp10Node-TSPSample_TT bei steigenden *maximalen Knotengrad* sich verbessern, während sich die Kompaktheitsmaße CompMST_TT und CompTSP_TT verschlechtern.



um den Einfluss des Zufalls zu minimieren. Hingegen haben die Samples den Vorteil, dass die Probleme kleiner sind. Mit dem TSP-Solver Concorde können auch TSP mit etwa 100 Knoten in wenigen Sekunden exakt gelöst werden; bei größeren Partitionen wird man aufgrund des exponentiellen Wachstums (unter der Annahme $N \neq NP$) der Komplexität schnell an die Grenzen kommen. Als Ausweg bietet es sich aufgrund der Erkenntnisse bezüglich der Korrelationskoeffizienten an, eine der anderen beiden Evaluierungsfunktionen zu verwenden. Werden bei der Planung eher kurze Touren erwartet, bietet sich die *Sum-Distance-Evaluierungs-Funktion* an. Dominieren Touren, die einen Großteil des Territoriums umfassen, ist die *MST-Evaluierungs-Funktion* die bessere Wahl. Da die Lösung desselben NP-schwer ist, bietet es sich an, der *MST-Evaluierungs-Funktion* den Vorzug zu geben, zumal eine hohe Korrelation zwischen den beiden Evaluierungs-Funktionen festgestellt werden konnte. Ein ebenfalls sehr hoher Korrelations-Koeffizient von 0,94 ergibt sich zwischen CompPair_TT und Comp10Node-TSPSample_TT (*TSP-Sample-Evaluierungs-Funktion*). Das lässt sich dadurch erklären, dass eine TSP-Sample-Evaluierungs-Funktion mit Samples der Größe zwei quasi einer randomisierten paarweisen Summe der Distanzen entspricht. Die Lösung eines Handelsreisenden-Problems der Größe zwei besteht nämlich stets aus dem Hin- und Rückweg zwischen zwei Knoten. Die Erhöhung der Sample-Größe auf zehn hat also offensichtlich bei der betrachteten Testreihe kaum eine Auswirkung. Bei noch weiterer Erhöhung der Sample-Größe nähert sich die Bewertungsfunktion der *TSP-Evaluierungs-Funktion* an, die keine Samples verwendet.

Tabelle 7.1: Paarweise Korrelationskoeffizienten für den Vergleich der Messreihen aus Abbildung 7.1. Das Präfix *Comp* sowie das Suffix *_TT* sind aus Platzgründen weggelassen, da es sich bei allen betrachteten Evaluationsfunktionen um Kompaktheitsmaße handelt.

	MST	Pair	TSP	10Node-TSPSample
Pair	1			
TSP	-0.78	1		
MST	0.95	-0.88	1	
10Node-TSPSample	-0.56	0.94	-0.69	1

7.2 Wahl der Parameter des Verfahrens

Wir führen Testreihen durch, die den Parameter des *maximalen Knotengrads* variieren. Um den Einfluss des Zufalls zu verringern und statistisch signifikantere Ergebnisse zu erhalten, erzeugen wir für jede Parameterfestlegung des *maximalen Knotengrads* für alle zehn Gebietsplanungs-Testinstanzen einen Graphen. Der so berechnete Graph wird daraufhin mit KaFFPaE partitioniert, wobei für KaFFPaE eine modifizierte Zielfunktion verwendet wird. Die Zielfunktion, auf die optimiert wird, ist dabei die Summe der paarweisen Distanzen (siehe Abschnitt 4.1) und wird um einen zusätzlichen Faktor zur Bestrafung Nicht-Zusammenhangs ergänzt. Dieser Faktor berechnet sich aus der Anzahl der Zusammenhangskomponenten summiert über alle Blöcke. Im Idealfall ist jeder Block zusammenhängend und der Faktor für diese Testreihe somit zehn.

Für die Testreihen zum Parameter des *maximalen Knotengrads* werden die synthetisch erzeugten Gebietsplanungsprobleme (siehe Abschnitt 6.3) herangezogen. Dabei handelt es sich um jeweils zehn Gebietsplanungsprobleme für Malta, Großraum Hamburg sowie Deutschland. Mit der Durchführung der Tests zum Parameter-Tuning auf drei verschiedenen Gebieten unterschiedlicher Größe soll eine Überanpassung der Parameter verhindert werden. Ziel ist es folglich, Parameter zu finden, die bei verschiedenen Gebietsplanungsproblemen gute Ergebnisse liefern. Deshalb bilden wir das geometrische Mittel über die 30 Testinstanzen, von denen jeweils zehn aus Malta, Hamburg und Deutschland sind.

Wir beginnen mit den kürzesten Kanten und fügen so lange Knoten hinzu, bis eine Kante die fünffache Länge des Durchschnitts der MST-Kanten besitzt. Den Faktor fünf ermitteln wir durch die Testreihe, die in Abschnitt 7.2 beschrieben wird.

Variation der maximalen Kantenlänge

Wir ermitteln den *maximalen Kantenlängen-Faktor* experimentell anhand Testreihen für Deutschland, Großraum Hamburg und Malta. Zusätzlich zu diesem *maximalen-*

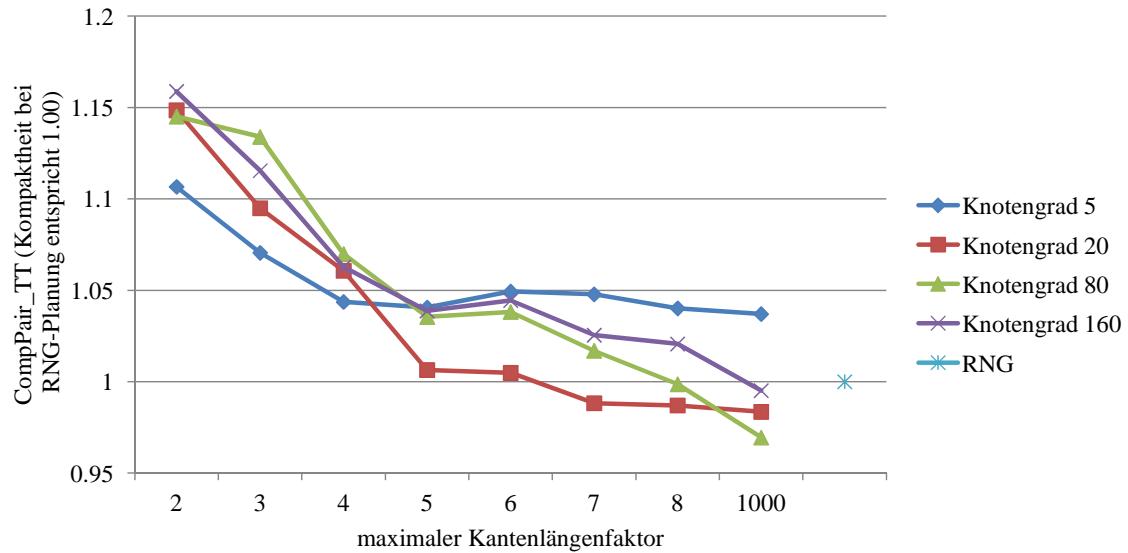
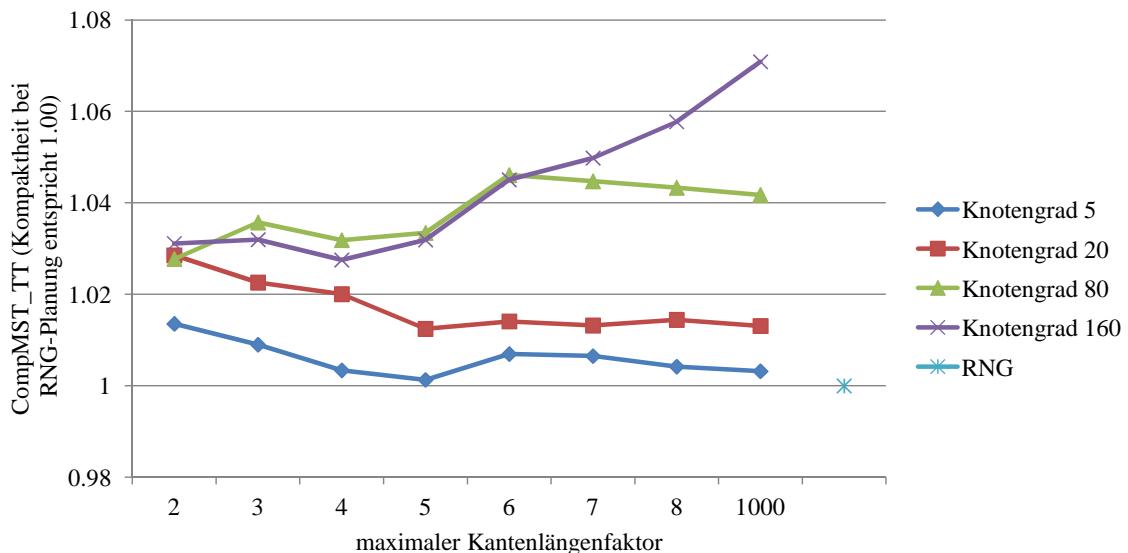
(a) Auswertung der Testreihen nach Kompaktheitsmaß *Summe der paarweisen Distanzen*(b) Auswertung der Testreihen nach Kompaktheitsmaß *Länge des minimalen Spannbaums*

Abbildung 7.2: Testreihe zur Festlegung der Parameter *maximaler Kantenlängenfaktor* und *Knotengrad*. Die Relative-Neighborhood-Planung benötigt diese Parameter nicht. Für das Ergebnis der RNG-Planung wird der Kompaktheitswert auf 1 festgelegt. Die anderen Ergebnisse werden darauf skaliert.

Kantenlänge-Faktor wird in der Testreihe ebenfalls der *maximale Knotengrad* variiert. Die sich dadurch ergebenden Kompaktheitsmaße sind in den Abbildung 7.2 dargestellt.

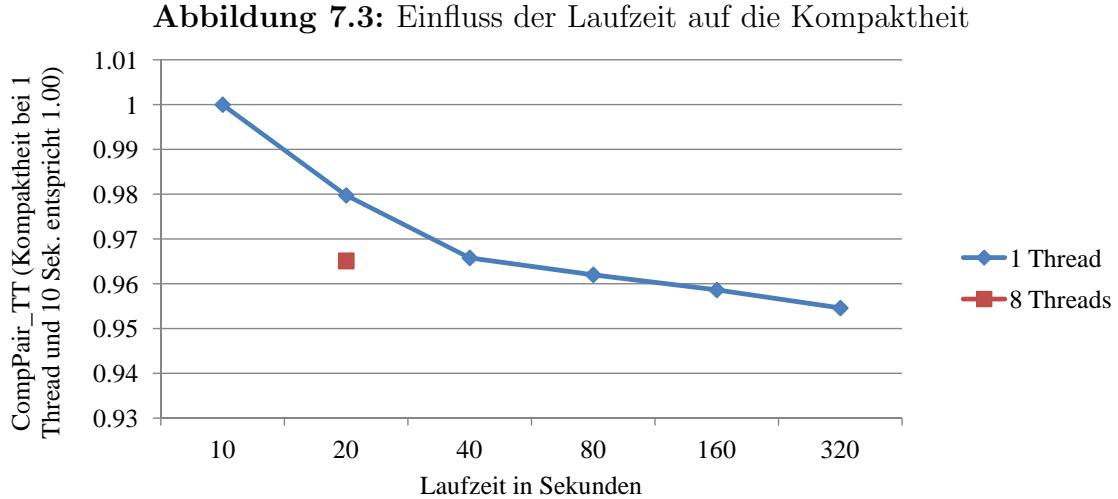
Aus den Diagrammen kann man ablesen, dass sich bei einem kleinen *maximalen-Kantenlängen-Faktor* die Kompaktheit mit zunehmendem Knotengrad verschlechtert. Bezuglich der *Sum-Distance-Evaluierungs-Funktion* scheint es, dass der *maximalen-Kantenlängen-Faktor* möglichst groß gewählt werden sollte. Abbildung 7.2(a) sowie Abbildung 7.2(b) zeigen jedoch, dass die Auswirkungen des *maximalen-Kantenlängen-Faktors* auf die beiden Bewertungsfunktionen völlig entgegengesetzt sind. Ebenfalls aufgeführt in diesen Diagrammen ist das Graph-Erstellungs-Verfahren mithilfe des Relative-Neighborhood-Graphen (RNG). Der Relative-Neighborhood-Graph besitzt keine zusätzlichen Parameter und wird in Abschnitt 2.2 genauer beschrieben. Der Relative-Neighborhood-Graph ist ebenfalls eine gute Möglichkeit für die Graph-Erstellung, wie die beiden Abbildungen verdeutlichen. Als Kompromiss, um bei beiden Kompaktheitsmaßen eine gute Bewertung zu erreichen, wird der Wert fünf für den *maximalen-Kantenlängen-Faktor* als Standard-Wert festgesetzt.

Untersuchung der Laufzeit

Um zu ermitteln, wie sich eine längere Laufzeit auf das Partitionierungsergebnis auswirkt, führen wir eine Testreihe mit den Deutschland-Testinstanzen und einer Laufzeit von 10 bis 320 Sekunden für KaFFPaE durch. In den Tests wird KaFF-PaE single-threaded ausgeführt. Wir führen jedoch zusätzlich eine Testreihe mit 20 Sekunden Laufzeit und acht Threads durch. Für den Test verwenden wir einen Quad-Core-Prozessor mit Hyperthreading und 3 Ghz. Als maximaler Knotengrad wird dabei zwanzig gewählt, der maximale Kantenlängenfaktor beträgt fünf. Die Tests werden mit zehn synthetisch erzeugten Gebietsplanungs-Problemen für ganz Deutschland durchgeführt. Die gemittelten Ergebnisse über jeweils zehn Deutschland-Gebietsplanungs-Instanzen sind in Abbildung 7.3 dargestellt. Man erkennt, dass sich die Kompaktheit anfangs stärker verbessert und dann abflacht. Jedoch ist selbst nach 320 Sekunden Laufzeit noch eine Verbesserung zu erkennen. Mit acht Threads lässt sich in 20 Sekunden in etwa die gleiche Kompaktheit erreichen, wie mit einem Thread in 40 Sekunden. Somit ist der Speedup in diesem Fall 2,0.

7.3 Evaluation des graphbasierten Gebietsplaners

Die Auswertung der Ergebnisse wird anhand der 12 Realdaten-Test durchgeführt, die in Abschnitt 6.4 beschrieben werden. In den Abbildungen 7.5 wird das Ergebnis für die Bundesländer mit anderen Gebietsplaner-Programmen verglichen. Bei den Verfahren, die zum Vergleich herangezogen werden, handelt es sich um *MIP*, das von Matthias Bender am FZI entwickelt wurde, sowie dem Verfahren *Recursive Partitioning*. *MIP*



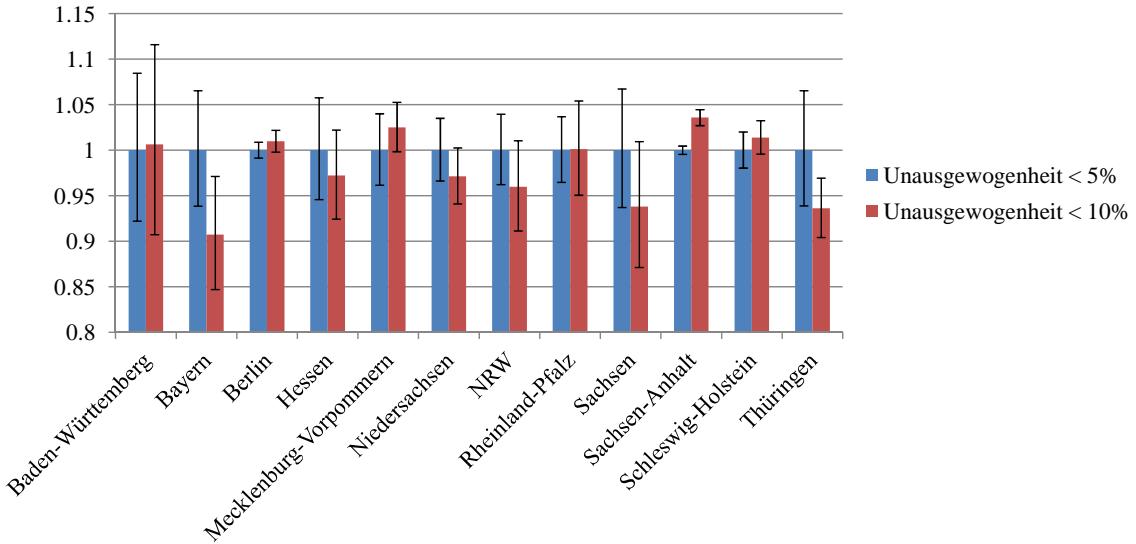
verwendet zur Lösung einen Integer-Linear-Program-Solver, *Recursive Partitioning* hingegen basiert auf rekursiver Aufteilung der Ebene durch gerade Schnitte. Als Bewertung wird die Summe der paarweisen Distanzen verwendet. Der Messwert der Metrik ist auf das jeweils beste Ergebnis skaliert.

Auf den Diagrammen erkennt man, dass unsere Verfahren *Extra-Kanten-Graph-Planung* in einigen Fällen eine bessere Lösung findet, als die anderen Verfahren, in manchen jedoch eine schlechtere. Wir führen eine systematische Untersuchung durch, um Ursachen für das unterschiedliche Verhalten von *MIP Multistart* und unserem graphbasierte Gebietsplanungsverfahren *Extra-Kanten-Graph-Planung* zu klären. Dazu berechnen wir für jedes betrachtete Bundesland zunächst die relative Änderung $\Delta\text{CompPair_TT}$ der Kompaktheit unseres Verfahrens im Vergleich zu MIP.

$$\Delta\text{CompPair_TT} = \frac{\text{CompPair_TT von MIP-Multistart-Lösung}}{\text{CompPair_TT von Extra-Kanten-Graph-Planung-Lösung}} \quad (7.1)$$

Wir berechnen nun Korrelationskoeffizienten auf der Bundesländer-Testreihe zwischen $\Delta\text{CompPair_TT}$ und Eigenschaften der Probleminstanzen, um mögliche lineare Zusammenhänge festzustellen. Die Korrelationskoeffizienten von $\Delta\text{CompPair_TT}$ zur Anzahl der Basisgebiete beträgt 0,13, zur Anzahl der Territorien ebenfalls 0,13 und zur Fläche in km^2 0,17. Die Änderung der Kompaktheit korreliert also nur sehr schwach mit der Problemgröße. Die Ursachen für die Unterschiede in der Kompaktheit müssen deshalb in der unterschiedlichen Form der Bundesländer oder der Struktur ihres Straßennetzwerks liegen.

Abbildung 7.4: CompPair_NET bei *Extra-Kanten-Graph-Planung* für maximal zulässige Unausgewogenheit von 5 und 10 Prozent. Die Ergebnisse sind jeweils auf den Wert der Kompaktheit bei 5% Unausgewogenheit skaliert. Fehlerindikatoren geben die geometrische Standardabweichung an. Die Werte sind über 20 Versuchsreihen mit unterschiedlichen Startwerten des Pseudo-Zufallsgenerators gemittelt.



Bei den Bundesländern Schleswig-Holstein, Niedersachsen und Mecklenburg-Vorpommern, die an der Küste liegen, erzeugt unser Verfahren *Extra-Kanten-Graph-Planung* eine kompaktere Lösung. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass unser graphbasierter Verfahren konvexe Stellen an der Küstenlinie für Gebietsgrenzen nutzt. Dadurch wird die Summe der paarweisen Distanzen verringert. Die größte Verschlechterung der Kompaktheit gegenüber MIP ergibt sich für das Bundesland Sachsen. Die Ursache liegt darin, dass für kompakte Gebiete gewisse großen Städte aufgeteilt werden müssten, hier im Speziellen Dresden. Da bei KaFFPaE die Auswahl der Kandidaten für die Partitionierung trotz veränderter Zielfunktion immer noch auf minimale Schnitte ausgelegt ist, werden die dichten Bereiche des Graphen um Dresden herum nicht für eine Gebietsgrenze in Erwägung gezogen. Auf diese Weise ergeben sich wenig kompakte Gebiete, die sich um die großen Städte Dresden, Chemnitz und Leipzig herumschlängeln. Im Osten von Sachsen tritt das Problem auf, dass das Territorium ohne Dresden zu klein und mit Dresden zu groß ist. Die Folge sind nicht-zusammenhängende Territorien trotz Bestrafungs-Term in der Zielfunktion. Bei 20 Wiederholungen treten diese Probleme bei der Partitionierung von Sachsen immer auf, unabhängig vom Startwert des Pseudo-Zufallsgenerators. Dies zeigt, dass der Ausreißer für Sachsen nicht durch den Zufall bedingt ist, sondern dass seine Ursache in dem verwendeten Verfahren begründet ist. Um dieses Problem zu lösen, müssen neue Verfahren für den Evolutionsschritt entwickelt werden, die mehr auf die Kompaktheit und weniger auf minimale Schnitte abgestimmt sind. Dies kann allerdings im Rahmen dieser Diplomarbeit aus Zeitgründen nicht durchgeführt werden.

Abbildung 7.5: Vergleich des Kompaktheitsmaßes CompPair_TT bei maximaler Unausgewogenheit von 5 Prozent für verschiedene Gebietsplanungsverfahren. Die Ergebnisse sind jeweils auf das Verfahren mit dem besten Ergebnis skaliert. Für unser Verfahren *Extra-Kanten-Graph-Planung* ist jeweils das beste Ergebnis aus 20 Versuchsreihen mit unterschiedlichen Startwerten des Pseudo-Zufallsgenerators abgebildet.

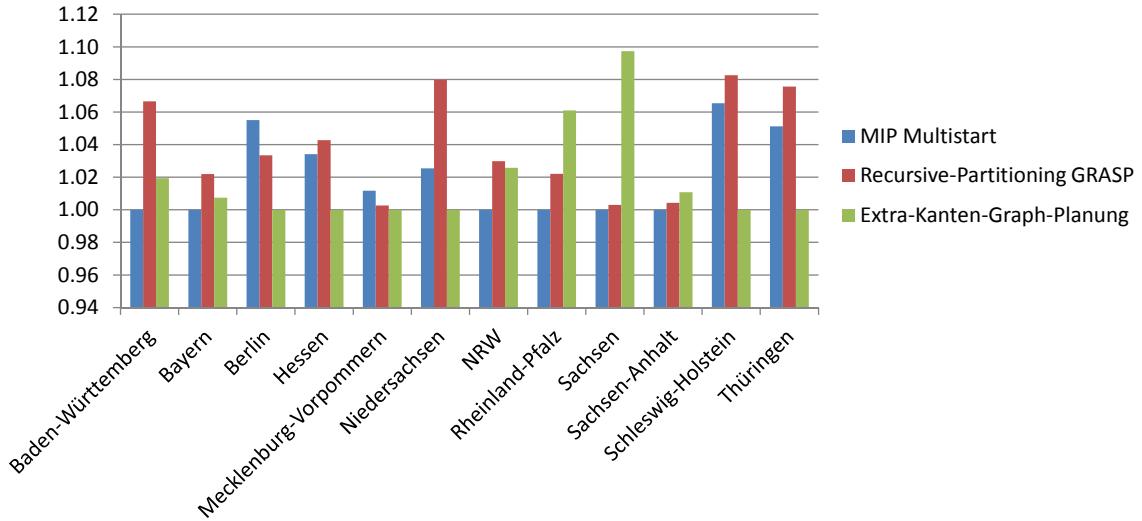
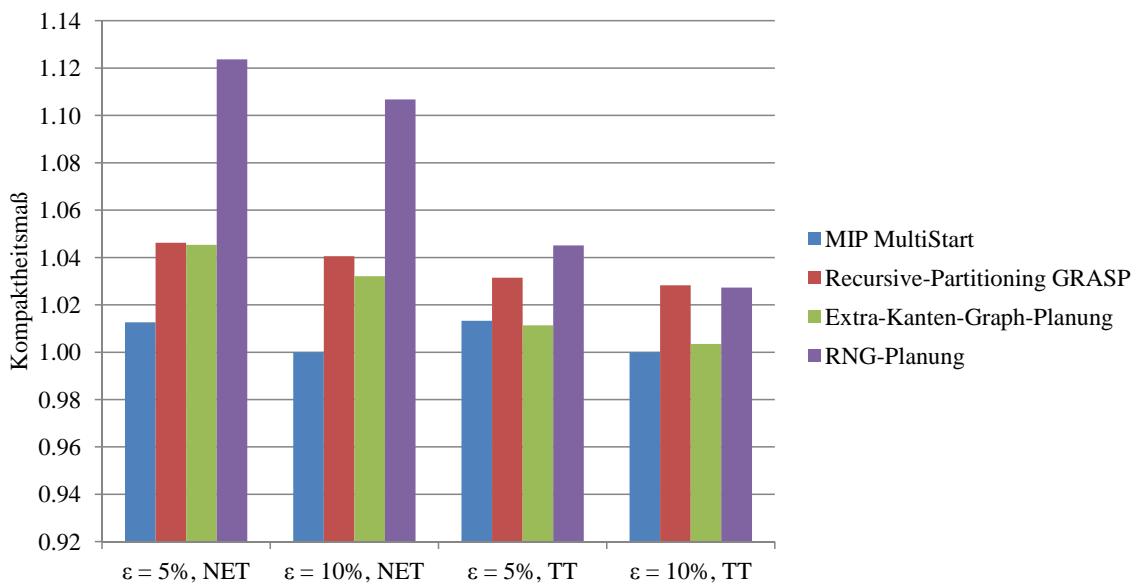


Abbildung 7.6: Vergleich der Kompaktheitsmaße CompPair_TT und CompPair_NET jeweils bei 5 und 10 Prozent Unausgewogenheit. Es wurde sowohl für NET als auch für TT auf den besten Wert skaliert. Dies ist in beiden Fällen MIP bei 10 Prozent Unausgewogenheit.



Visualisierung mittels Google Earth

Die Ergebnisse der Gebietsplanung werden mit Google Earth visualisiert. Dazu wird eine KML-Datei durch eine selbst implementierte Routine in C++ erzeugt. Die Visualisierung enthält sowohl die Partitionierung als auch den Graphen auf dem partitioniert wird. Farbige Icons visualisieren die verschiedenen Territorien. Für die beiden Partitionierungsergebnisse werden jeweils etwa 10 bis 20 Sekunden Rechenzeit auf einem Quad-Core mit 3 Ghz benötigt.

Abbildung 7.7 zeigt den Vergleich zwischen dem Verfahren mit Relative-Neighborhood-Graphen und der *Extra-Kanten-Graph-Planung*. Die Erstellung des Graphen mit der zweiten Methode wird in Abschnitt 5.3 beschrieben. Beim Vergleich fällt auf, dass der Relative-Neighborhood-Graph gleichmäßiger verteilte Kanten besitzt, während der Extra-Kanten-Graph größere Lücken aufweist. Im Rahmen dieser Arbeit kann nicht eindeutig geklärt werden, welches Verfahren besser ist. In der einfachen Form, in der die Erstellung des Relative-Neighborhood-Graph implementiert wurde, beträgt die Komplexität des Algorithmus $O(n^3)$. Es sind jedoch Möglichkeiten der Beschleunigung vorhanden. Im Fall mit euklidischer Metrik kann der Relative-Neighborhood-Graph in $O(n \log n)$ berechnet werden. [JK87]

Konfiguriert man die Parameter des Verfahrens so, dass die *MST-Evaluierungs-Funktion* optimiert wird, ergibt sich für Deutschland die Gebietseinteilung, die in Abbildung 7.8 links dargestellt ist. Bei einer Parameterkonfiguration, die die Summe der paarweisen Distanzen minimiert, erhält man die Partitionierung in der rechten Abbildung. Beim Vergleich fällt auf, dass die Territorien auf der linken Seite länglicher, dafür aber scharf abgegrenzt sind. Bei der rechten Gebietseinteilung sind die Gebiete hingegen eher rund geformt; In Bayern tritt allerdings eine unscharfe Trennung des gelben und des hellgrünen Gebiets auf. Da wir für den Zusammenhangstest den gleichen Graphen wie für die Partitionierung einsetzen, gelten die Blöcke für KaFFPaE dennoch als zusammenhängend und werden nicht optimiert. Solche unsauberen Gebietsgrenzen könnten durch eine Anpassung des Verfeinerungs-Schritts in KaFFPaE an die modifizierte Zielfunktion vermieden werden.

Abbildung 7.7: Vergleich Grapherstellungsverfahren
Relative-Neighborhood-Graph MST mit Zusatzkanten

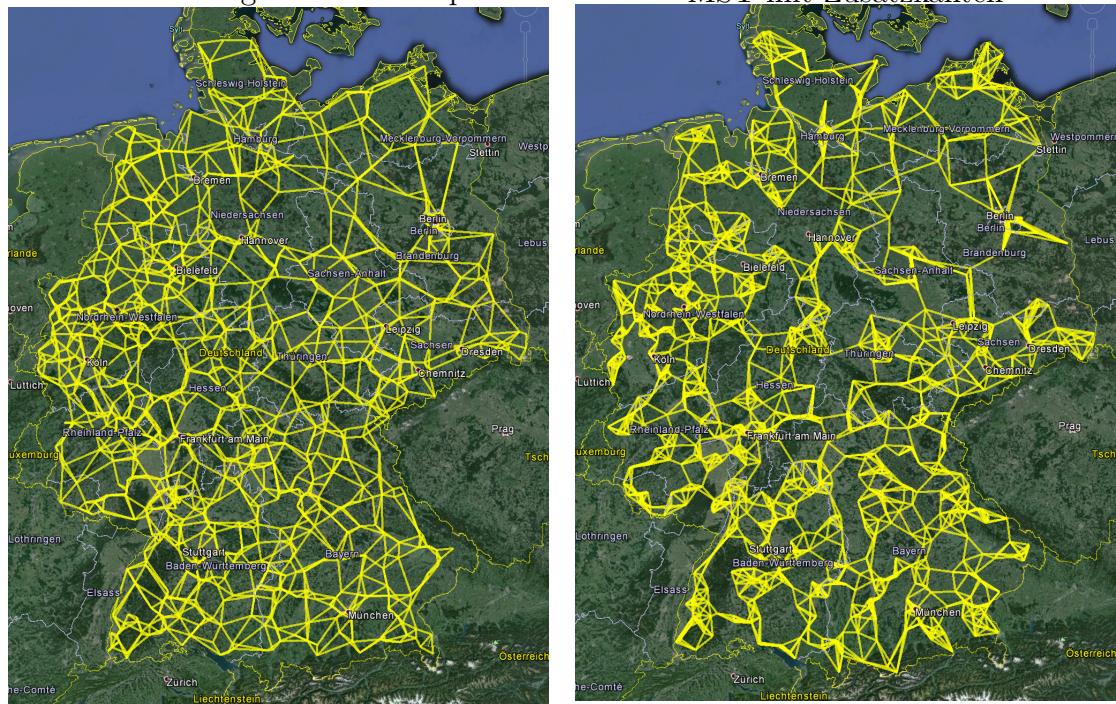
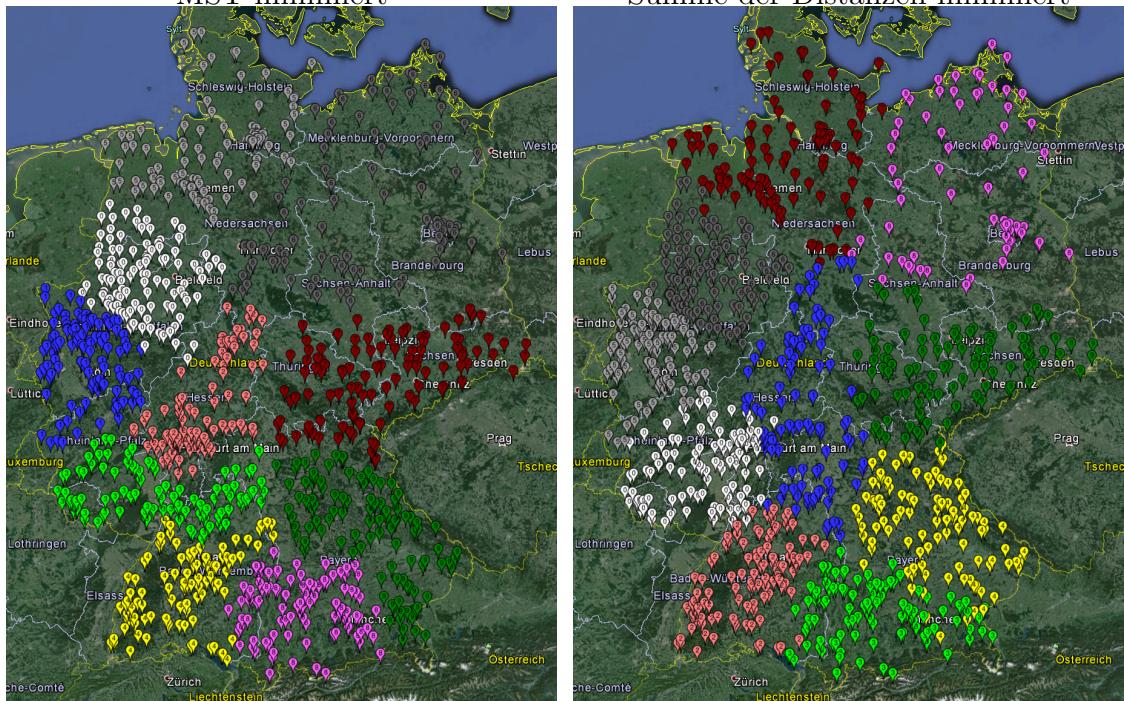


Abbildung 7.8: Vergleich Kompaktheitsmaße
MST minimiert Summe der Distanzen minimiert



8. Fazit und Ausblick

Unsere Untersuchungen zeigen, dass der Graphpartitionierer KaFFPaE erfolgreich zur Lösung von Gebietsplanungsproblemen eingesetzt werden kann. Wir haben verschiedene Verfahren zur Erstellung eines Graphen aus einem Gebietsplanungsproblem implementiert und untersucht. Für die Evaluation der Verfahren anhand der Bundesländer-Realdatentests haben wir uns jedoch entschieden, nur distanzmatrixbasierte Verfahren zu untersuchen. Bei dem straßengraphbasierten Ansatz ergibt sich nämlich das Problem, dass die Kundenstandorte dem nächstgelegenen Knoten im Straßengraphen zugeordnet werden müssen. Bei unseren Versuchen zu diesem Ansatz stellte sich jedoch heraus, dass mehrere Kundenstandorte dem gleichen Straßenknoten zugeordnet werden. Um eine Sonderbehandlung dieser Fälle zu vermeiden, haben wir auf die weitere Untersuchung verzichtet.

Es stellte sich heraus, dass die *Extra-Kanten-Graph-Planung* bessere Ergebnisse liefert als die Gebietsplanung mit dem Relative-Nighborhood-Graphen. Mithilfe umfangreicher Testreihen wurden gute Parameter für den *Extra-Kanten-Graphen* gefunden und diese erfolgreich für die Gebietsplanung der Bundesländer-Tests eingesetzt. Unter den drei Verfahren *Extra-Kanten-Graph-Planung*, MIP und Recursive-Partitioning ist keines eindeutig überlegen. Der Vorteil unseres Verfahrens ist die verhältnismäßig kurze Laufzeit bei großen Instanzen sowie das gute Abschneiden bei Verwendung der Reisezeit in der Distanzmatrix. Der MIP-Ansatz findet bei kleinen Problemstellungen schnell sehr gute Lösungen, benötigt jedoch bei der größten betrachteten Problem-Instanz bereits mehrere Minuten. Für viele tausend Knoten ist es jedoch nicht geeignet. Recursive-Partitioning findet für alle Testinstanzen innerhalb weniger Sekunden eine Lösung, so dass es gut geeignet ist, wenn wenig Zeit zur Verfügung steht.

Bei Verwendung der Reisezeit in der Distanzmatrix entspricht die erreichte Kompaktheit bei unserem Verfahren der *Extra-Kanten-Planung* in etwa dem Ergebnis von MIP. Die Laufzeit unseres Verfahrens wächst bei steigender Problemgröße jedoch nicht so stark an, wie beim MIP Ansatz. Wir haben für alle Bundesländer-Tests unabhängig von der Problemgröße die gleichen Zeitlimits für den Graphpartitionierer KaFFPaE gesetzt. Bei MIP hingegen variierte die Zeit von Sekunden bis hin zu mehreren Minuten. Die unterschiedliche zur Verfügung stehende Zeit erklärt jedoch nicht, warum teilweise das eine und teilweise das andere Verfahren besser ist. Unsere Beobachtung ist, dass die *Extra-Kanten-Planung* an Bundesländern an der Küste bessere Ergebnisse liefert. Konkave Bundesländer, also solche mit Einbuchtungen wie zum Beispiel Sachsen, bereiten dem Verfahren der *Extra-Kanten-Planung* jedoch Probleme. Da uns jedoch kein Maß für die Konvexität der Bundesländer zur Verfügung steht, können wir dies nicht quantitativ belegen. Untersuchungen für die Verwendung weiterer Zielfunktionen bei der evolutionären Optimierung müssen noch durchgeführt werden. Eine andere Zielfunktion ist zum Beispiel die Länge der TSP-Touren oder die Länge eines minimalen Spannbaums. Die genauen Auswirkungen von quadrierten Distanzen sowie einer Kompaktheitsmetrik, die auf Entfernung zu einem Gebietszentrum beruhen, bieten ebenfalls weitere Forschungsmöglichkeiten.

Bei Tests konnten wir den gesamten Straßengraphen von Deutschland in unter einer Minute mithilfe von KaFFPaE partitionieren. Bei Vergrößerung der Instanzen wächst der Speicherbedarf durch die Distanzmatrix quadratisch an. Abhilfe könnte in diesem Fall eine andere Zielfunktion schaffen, die keinen quadratischen Speicherbedarf hat. Mit der *Extra-Kanten-Graph-Planung* können, wie in den Tests zu erkennen ist, kompakte und zusammenhängende Gebiete erzeugt werden. Auch die Balance der Territorien wird innerhalb einer vorgegebenen Abweichung von wenigen Prozent eingehalten. Bei reiner Optimierung auf die Zielfunktion der paarweisen Summe der Distanzen treten teilweise nicht-zusammenhängende Territorien auf. Deshalb fügen wir der Zielfunktion von KaFFPaE einen Strafterm hinzu, der nicht zusammenhängende Territorien mit einem Faktor bestraft, der proportional zu der Anzahl der Zusammenhangskomponenten ist. Dadurch kann die Anzahl der nicht-zusammenhängenden Territorien deutlich reduziert werden. Um auch die letzten nicht-zusammenhängenden Territorien zu bereinigen, haben wir eine Methode in KaFFPaE implementiert, die nicht-zusammenhängende Teile eines Territoriums einem benachbarten Territorium zuweist. Daran schließt sich ein Verfahrensschritt zur Wiederherstellung der Balance an. Für die Anwendung in der Praxis sind diverse zusätzliche Restriktionen denkbar, die bisher nicht berücksichtigt werden. Solche Restriktionen können zum Beispiel sein, dass bestimmte Kunden im gleichen Gebiet liegen müssen. Denkbar ist es auch zu modellieren, dass gewisse Außendienstmitarbeiter aufgrund von unterschiedlichen Qualifikationen nicht alle Kunden bedienen können. Bei der Betrachtung der Ge-

bietsplanung mit vorgegebenen Basisgebieten heißt dies, dass ein Basisgebiet nur zu bestimmten Gebietszentren zugeordnet werden kann.

Unsere graphbasierte Verfahren behandeln die Grüne-Wiese-Planung und berücksichtigen deshalb noch keine vorgegebenen Gebietszentren. Falls diese frei festgelegt werden können, bietet es sich an, diese jeweils in der Mitte des Gebiets zu platzieren, um die Fahrtzeiten zu minimieren. Der Knoten, bei dem die Summe der Distanzen zu allen anderen Knoten am geringsten ist, ist eine gute Option für ein Gebietszentrum. Für den Fall, dass vorgegebene Gebietszentren bei einem Gebietsplanungsproblem vorhanden sind, können jedoch ebenfalls Graphpartitionierer zur Anwendung kommen. Dazu werden sowohl Basisgebiete als auch Gebietszentren als Knoten modelliert. Gebietszentren erhalten jedoch ein hohes Gewicht, zum Beispiel $4n/k$, wobei n die Anzahl der Knoten und k die Anzahl der Territorien ist. Dadurch wird erreicht, dass wegen der Balance-Bedingung keine zwei Knoten in den gleichen Block eingeteilt werden. Somit wird verhindert, dass zwei Gebietszentren dem gleichen Territorium zugeordnet werden. Bei unserer prototypischen Implementierung zeigte sich jedoch, dass mit diesem Vorgehen und der angepassten Version von KaFFPaE keine zusammenhängenden Lösungen gefunden werden. Bei Verwendung eines Strafterms für den Zusammenhang in der Zielfunktion kann die Balance oft nicht eingehalten werden, so dass mehrere Gebietszentren demselben Block zugeteilt werden. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass die Knotengewichte zu unterschiedlich sind. Die Information, dass genau ein Gebietszentrum pro Block vorhanden sein soll, ist nur implizit vorhanden. Deshalb werden einem Block, der kein Gebietszentrum besitzt, unter Umständen anstelle eines Gebietszentrums weitere Kundenknoten zugeordnet. Wenn eine Partition als Startlösung verwendet wird, die aus einer parallelen Breitensuche von den Gebietszentren hervorgegangen ist, gelingt es in einigen Fällen mit KaFFPaE zusammenhängende, balancierte Gebiete mit je einem Zentrum zu erzeugen. Es ist jedoch noch weitere Forschungsarbeit notwendig, um auch für Gebietsplanungsprobleme mit vorgegebenen Gebietszentren ein graphbasiertes Verfahren zu entwickeln, das genauso zuverlässig kompakte, zusammenhängende Territorien plant.

Literaturverzeichnis

- [ABCC06] David Applegate, Robert Bixby, Vasek Chvatal, and William Cook. Concorde TSP solver. *URL <http://www.tsp.gatech.edu/concorde>*, 2006.
- [Aur87] Franz Aurenhammer. Power Diagrams: Properties, Algorithms and Applications. *SIAM Journal on Computing*, 16(1):78–96, 1987.
- [Aza12] Azavea. Redrawing the Map on Redistricting. 2012.
- [BFSS07] Holger Bast, Stefan Funke, Peter Sanders, and Dominik Schultes. Fast Routing in Road Networks using Transit Nodes. *Science*, 316(5824):566, 2007.
- [BJ92] Thang Nguyen Bui and Curt Jones. Finding Good Approximate Vertex and Edge Partitions is NP-Hard. *Inf. Process. Lett.*, 42(3):153–159, May 1992.
- [BKN13] Alex Butsch, Jörg Kalcsics, and Stefan Nickel. Geometric Approaches to Districting Problems. 2013.
- [BMS⁺14] Aydin Buluç, Henning Meyerhenke, Ilya Safro, Peter Sanders, and Christian Schulz. Recent Advances in Graph Partitioning. In *Algorithm Engineering – Selected Topics*, to appear, 2014.
- [Boy64] Ronald R. Boyce. The Concept of Shape in Geography. *Geographical review : the journal of the American Geographical Society.*, 1964.
- [CM10] Christopher P. Chambers and Alan D. Miller. A Measure of Bizarreness. *Quarterly Journal of Political Science*, 5(1):27–44, 2010.
- [Die06] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer Verlag, 2006.
- [Dij59] Edsger W. Dijkstra. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [FF54] Lester R. Ford and Delbert R. Fulkerson. Maximal Flow through a Network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8:399–404, 1954.

- [FH11] Roland G. Fryer and Richard Holden. Measuring the Compactness of Political Districting Plans. *Journal of Law and Economics*, 54(3):493 – 535, 2011.
- [FY03] Sean L. Forman and Yading Yue. Congressional Districting Using a TSP-based Genetic Algorithm. In *Proceedings of the 2003 International Conference on Genetic and Evolutionary Computation: PartII*, GEC-CO'03, pages 2072–2083, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer-Verlag.
- [GH88] Oliver Goldschmidt and Dorit S. Hochbaum. A Polynomial Algorithm for the k-cut Problem. *29th annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 444–451, 1988.
- [Gri07] Elmer C. Griffith. *The Rise and Development of the Gerrymander*. Scott, Foresman and Company, 1907.
- [GSSD08] Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes, and Daniel Delling. Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks. In *Proceedings of the 7th International Conference on Experimental Algorithms*, WEA'08, pages 319–333, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer-Verlag.
- [HOR72] Robert E. Helbig, Patrick K. Orr, and Robert R. Roediger. Political redistricting by computer. *Commun. ACM*, 15(8):735–741, August 1972.
- [JK87] Jerzy W. Jaromczyk and Miroslaw Kowaluk. A Note on Relative Neighborhood Graphs. In *Proceedings of the Third Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '87, pages 233–241, New York, NY, USA, 1987. ACM.
- [Kar13] George Karypis. *Metis: A Software Package for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Orderings of Sparse Matrices, Version 5.1.0*, March 2013.
- [KK89] Tomihisa Kamada and Satoru Kawai. An Algorithm for Drawing General Undirected Graphs. *Inf. Process. Lett.*, 31(1):7–15, April 1989.
- [KNS05] Jörg Kalcsics, Stefan Nickel, and Michael Schröder. Towards a Unified Territorial Design Approach – Applications, Algorithms and GIS Integration. *TOP: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*, 13(1):1–56, 2005.
- [KNS09] Jörg Kalcsics, Stefan Nickel, and Michael Schröder. A Generic Geometric Approach to Territory Design and Districting. Technical Report 153, Fraunhofer (ITWM), 2009.

- [Kru56] Joseph B. Kruskal. On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7, 1956.
- [LK13] Dominique Lasalle and George Karypis. Multi-threaded Graph Partitioning. *Parallel and Distributed Processing Symposium, International*, 0:225–236, 2013.
- [Mal11] National Statistics Office Malta. Malta Census of Population and Housing. Preliminary Report, 2011.
- [MGSK88] Heinz Mühlenbein, Martina Gorges-Schleuter, and Ottmar Krämer. Evolution Algorithms in Combinatorial Optimization. *Parallel Computing*, 7(1):65 – 85, 1988.
- [MSS⁺07] Rolf H. Möhring, Heiko Schilling, Birk Schütz, Dorothea Wagner, and Thomas Willhalm. Partitioning Graphs to Speedup Dijkstra’s Algorithm. *J. Exp. Algorithmics*, 11, February 2007.
- [Pap73] Lee Papayanopoulos. Quantitative Principles Underlying Apportionment Methods. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 219(Democratic Representation and Apportionment: Quantitative Methods, Measures, and Criteria):181–191, 1973.
- [Pap77] Christos H. Papadimitriou. The Euclidean Travelling Salesman Problem is NP-Complete. *Theoretical Computer Science*, 4(3):237 – 244, 1977.
- [Pro09] Alexander Proudfoot. Sales Effectiveness. A Study of International Sales Force Performance, 2009.
- [Sch66] Joseph Schwartzberg. Reapportionment, Gerrymanders, and the Notion of Compactness. *Minnesota law Review*, 1966.
- [Sch13] Christian Schulz. *High Quality Graph Partitioning*. PhD thesis. epubli GmbH, 2013.
- [SS11] P. Sanders and C. Schulz. Engineering Multilevel Graph Partitioning Algorithms. 6942:469–480, 2011.
- [SS12a] Peter Sanders and Christian Schulz. Distributed Evolutionary Graph Partitioning. In *12th Workshop on Algorithm Engineering and Experimentation (ALENEX)*, pages 16–29, 2012.
- [SS12b] Peter Sanders and Christian Schulz. Think Locally, Act Globally: Perfectly Balanced Graph Partitioning. *CoRR*, abs/1210.0477, 2012.

- [SS13] P. Sanders and C. Schulz. Think Locally, Act Globally: Highly Balanced Graph Partitioning. In *12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA)*, LNCS. Springer, 2013.
- [Tay73] Peter J. Taylor. A New Shape Measure for Evaluating Electoral District Patterns. *The American Political Science Review*, 67(3):947–950, sep 1973.
- [Tou80] Godfried T. Toussaint. The Relative Neighbourhood Graph of a Finite Planar Set. *Pattern Recognition*, 12:261–268, 1980.
- [Vol91] Lutz Volkmann. Graphen und Digraphen, 1991. Eine Einführung in die Graphentheorie.
- [You88] H. P. Young. Measuring the Compactness of Legislative Districts. *Legislative Studies Quarterly*, 13(1):105–115, 1988.
- [ZL00] Andris A. Zoltners and Sally E. Lorimer. Sales Territory Alignment: An Overlooked Productivity Tool. *The Journal of Personal Selling and Sales management*, pages 947–950, summer 2000.