FMC III - Trabalho 6

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

1 de outubro de 2025

Questão 1

Dadas as fórmulas:

i) $Q \land \neg P \to P$

ii) $(P \lor Q) \land R$

(a) Use equivalências para transformá-las em FNC.

i.

$$\begin{aligned}(Q \land \neg P) \to P &\Leftrightarrow \neg(Q \land \neg P) \lor P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \lor \neg\neg P) \lor P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \lor P) \lor P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \lor P)\end{aligned}$$

ii.

$$(P \lor Q) \land R \Leftrightarrow (R \land P) \lor (R \land Q)$$

(b) Use equivalências para transformá-las em uma FNC.

i.

$$
\begin{aligned}
&(Q \wedge \neg P) \to P \\
&\qquad \Leftrightarrow \neg(Q \wedge \neg P) \vee P \\
&\qquad \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg(\neg P) \wedge P \\
&\qquad \Leftrightarrow \neg Q \wedge P \wedge P \\
&\qquad \Leftrightarrow \neg Q \wedge P
\end{aligned}
$$

ii.

A fbf $(P \vee Q) \wedge R$ já é uma FNC, pois é a conjunção de uma disjunção de literais e um literal.

(c) Transforme as fbfs em uma FND completa, se possível

i.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

Q	P	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Portanto, a FND completa é:
$(Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge \neg P)$

ii.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

P	Q	R	$(R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	F	F
F	F	F	F

Portanto, a FND completa é:
$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

(d) Transforme as fbfs em uma FNC completa, se possível

i.

A fbf $\neg Q \wedge P$ já é uma FNC completa, pois é a conjunção de dois literais. Segue a prova por tabela verdade:

Q	P	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$
V	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	F

ii.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge R$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	F	F
F	F	F	F

Portanto, a FNC completa é:
$(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

Questão 2

Para cada função, escreva as representações da FND completa e da FNC completa.

a) $f(P, Q) =$ Verdadeiro sse Q for Verdadeiro

Primeiro, a tabela-verdade:

P	Q	$f(P,Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Note que a função é equivalente a Q.

FNC completa

$$\begin{aligned} Q &\Leftrightarrow Q \vee \text{Falso} \\ &\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P) \end{aligned}$$

FND completa

$$\begin{aligned} Q &\Leftrightarrow Q \wedge \text{Verdadeiro} \\ &\Leftrightarrow Q \wedge (P \vee \neg P) \\ &\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \end{aligned}$$

b) $f(P,Q,R) =$ Verdadeiro sse P for Verdadeiro ou Q for Falso

Tabela-verdade:

P	Q	R	$f(P,Q)$	$P \vee \neg Q$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Observe que a função é equivalente a $P \vee \neg Q$.

FND completa

$$
\begin{aligned}
P \vee \neg Q &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg\neg Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge \text{Verdadeiro} \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \\
&\Leftrightarrow [(\neg P \wedge Q) \wedge R] \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge \neg R] \\
&\Leftrightarrow [\neg P \wedge Q \wedge R] \vee [\neg P \wedge Q \wedge \neg R]
\end{aligned}
$$

FNC completa

$$
\begin{aligned}
P \vee \neg Q &\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \vee \text{Falso} \\
&\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \vee (R \wedge \neg R) \\
&\Leftrightarrow [(P \vee \neg Q) \vee R] \wedge [(P \vee \neg Q) \vee \neg R] \\
&\Leftrightarrow [P \vee \neg Q \vee R] \wedge [P \vee \neg Q \vee \neg R]
\end{aligned}
$$

Questão 3

Dê uma prova formal, nas duas notações (tabelas e árvores), para cada uma das tautologias a seguir usando a regra CP.
(a) $(A \vee B \to C) \wedge (C \to D \wedge E) \to (A \to D)$

Tabela

1.	$A \vee B \to C$	[Premissa]
2.	$C \to D \wedge E$	[Premissa]
3.	$\quad A$	[Premissa (para $A \to D$)]
4.	$\quad A \vee B$	[3, Ad]
5.	$\quad C$	[1,4 MP]
6.	$\quad D \wedge E$	[2,5 MP]
7.	$\quad D$	[6, Simp]
8.	$A \to D$	[3–7, PC]
9.	QED	[1,2,8, PC]

Árvore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\lor B\to C\ \text{(Suposição)} \qquad \dfrac{A\ \text{(Suposição)}}{A\lor B\ \text{(Adição)}}}{C\ \text{(MP)}} \qquad C\to D\land E}{D\land E\ \text{(MP)}}}{D\ \text{(Simplificação)}}}{A\to D\ \text{(PC1)}}}{(A\lor B\to C)\land(C\to D\land E)\to(A\to D)\ \text{(PC0)}}$$

(b) $(A\to C)\to(A\to B\ \lor C)$

Tabela

1.	$A\to C$	[Premissa]
2.	$\quad A$	[Premissa (para $A\to B\lor C$)]
3.	$\quad C$	[1,2 MP]
4.	$\quad C\lor B$	[3, Ad]
5.	$\quad B\lor C$	[Exercício de sala]
6.	$A\to(B\lor C)$	[2–5, PC]
7.	QED	[1,6, PC]

Árvore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to C \qquad A\ \text{(Suposição)}}{C\ \text{(MP)}} \qquad B\ \text{(Suposição)}}{B\lor C\ \text{(Casos)}}}{A\to(B\lor C)\ \text{(PC1)}}}{(A\to C)\to(A\to(B\lor C))\ \text{(PC0)}}$$

(c) $(A\to B)\to(C\lor A\to C\lor B)$

Tabela

1.	$A \to B$	[Premissa]
2.	$\quad C \vee A$	[Premissa (para $C \vee A \to C \vee B$]
3.	$\qquad A$	Premissa (para $A \to B \vee C$)
4.	$\qquad B$	[1,3. MP]
5.	$\quad B \vee C$	[4. Ad]
6.	$\qquad C$	
7.	$\qquad C \vee B$	[6. Ad]
8.	$\quad B \vee C$	[Exercício de sala]
9.	$C \vee A \to B \vee C$	[2-8. PC]
10.	QED	[1,9. PC]

Árvore

$$\dfrac{\dfrac{C \text{ (Suposição)}}{C \vee B \text{ (Adição)}}}{C \vee A \to C \vee B \text{ (PC1)}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \text{ (Suposição)} \qquad A \to B}{B \text{ (MP)}}}{C \vee B \text{ (Adição)}}}{C \vee A \to C \vee B \text{ (PC1)}}$$

$$\dfrac{\dfrac{A \to B \qquad C \vee A}{C \vee B \text{ (Casos)}}}{(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B)) \text{ (PC0)}}$$