

## FMC III - Trabalho 6

Alexandre Ribeiro      José Ivo      Marina Leite

1 de outubro de 2025

### Questão 1

Dadas as fórmulas:

i)  $Q \wedge \neg P \rightarrow P$

ii)  $(P \vee Q) \wedge R$

(a) Use equivalências para transformá-las em FNC.

i.

$$\begin{aligned}(Q \wedge \neg P) \rightarrow P &\Leftrightarrow \neg(Q \wedge \neg P) \vee P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg\neg P) \vee P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \vee P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \vee P)\end{aligned}$$

ii.

$$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$$

(b) Use equivalências para transformá-las em uma FNC.

i.

$$\begin{aligned}(Q \wedge \neg P) \rightarrow P \\ \Leftrightarrow \neg(Q \wedge \neg P) \vee P \\ \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg(\neg P) \vee P \\ \Leftrightarrow \neg Q \wedge P \vee P \\ \Leftrightarrow \neg Q \wedge P\end{aligned}$$

ii.

A fbf  $(P \vee Q) \wedge R$  já é uma FNC, pois é a conjunção de uma disjunção de literais e um literal.

(c) Transforme as fbfs em uma FND completa, se possível

i.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

$Q$	$P$	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$
$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$

Portanto, a FND completa é:

$$(Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge \neg P)$$

ii.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

$P$	$Q$	$R$	$(R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$
$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$

Portanto, a FND completa é:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

(d) Transforme as fbfs em uma FNC completa, se possível

i.

A fbf  $\neg Q \wedge P$  já é uma FNC completa, pois é a conjunção de dois literais. Segue a prova por tabela verdade:

$Q$	$P$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$
$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$

ii.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

$P$	$Q$	$R$	$(P \vee Q) \wedge R$
$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$

Portanto, a FNC completa é:

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

## Questão 2

Para cada função, escreva as representações da FND completa e da FNC completa.

a)  $f(P, Q) = \text{Verdadeiro}$  sse  $Q$  for Verdadeiro

Primeiro, a tabela-verdade:

$P$	$Q$	$f(P, Q)$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

Note que a função é equivalente a  $Q$ .

### FNC completa

$$\begin{aligned}
 Q &\Leftrightarrow Q \vee \text{Falso} \\
 &\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge \neg P) \\
 &\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)
 \end{aligned}$$

### FND completa

$$\begin{aligned}
 Q &\Leftrightarrow Q \wedge \text{Verdadeiro} \\
 &\Leftrightarrow Q \wedge (P \vee \neg P) \\
 &\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)
 \end{aligned}$$

b)  $f(P, Q, R) = \text{Verdadeiro}$  sse  $P$  for Verdadeiro ou  $Q$  for Falso

Tabela-verdade:

$P$	$Q$	$R$	$f(P, Q)$	$P \vee \neg Q$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$

Observe que a função é equivalente a  $P \vee \neg Q$ .

### FND completa

$$\begin{aligned}P \vee \neg Q &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg \neg Q) \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge \text{Verdadeiro} \\&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \\&\Leftrightarrow [(\neg P \wedge Q) \wedge R] \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge \neg R] \\&\Leftrightarrow [\neg P \wedge Q \wedge R] \vee [\neg P \wedge Q \wedge \neg R]\end{aligned}$$

### FNC completa

$$\begin{aligned}P \vee \neg Q &\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \vee \text{Falso} \\&\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \vee (R \wedge \neg R) \\&\Leftrightarrow [(P \vee \neg Q) \vee R] \wedge [(P \vee \neg Q) \vee \neg R] \\&\Leftrightarrow [P \vee \neg Q \vee R] \wedge [P \vee \neg Q \vee \neg R]\end{aligned}$$

## Questão 3

Dê uma prova formal, nas duas notações (tabelas e árvores), para cada uma das tautologias a seguir usando a regra CP.

(a)  $(A \vee B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D \wedge E) \rightarrow (A \rightarrow D)$

### Tabela

1.	$A \vee B \rightarrow C$	[Premissa]
2.	$C \rightarrow D \wedge E$	[Premissa]
3.	$A$	[Premissa (para $A \rightarrow D$ )]
4.	$A \vee B$	[3, Ad]
5.	$C$	[4, MP]
6.	$D \wedge E$	[5, MP]
7.	$D$	[6, Simp]
8.	$A \rightarrow D$	[3–7, PC]
9.	QED	[1,2,8, PC]

ok

Árvore

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vee B \rightarrow C \text{ (Suposição)} \quad \frac{\overline{A}^1 \text{ (Suposição)}}{A \vee B \text{ (Adição)}}}{C \text{ (MP)}} \quad C \rightarrow D \wedge E \\
 \hline
 D \wedge E \text{ (MP)} \\
 \hline
 D \text{ (Simplificação)} \\
 \hline
 A \rightarrow D \text{ (PC1)} \\
 \hline
 (A \vee B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D \wedge E) \rightarrow (A \rightarrow D) \text{ (PC0)}
 \end{array}$$

(b)  $(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \vee C)$

Tabela

ok

1.	$A \rightarrow C$	[Premissa]
2.	$A$	[Premissa (para $A \rightarrow B \vee C$ )]
3.	$C$	[1,2 MP]
4.	$C \vee B$	[3, Ad]
5.	$B \vee C$	4, [Exercício de sala]
6.	$A \rightarrow (B \vee C)$	[2-5, PC]
7.	QED	[1,6, PC]

Árvore

Errado (0,0)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow C \quad A \text{ (Suposição)}}{C \text{ (MP)}} \quad B \text{ (Suposição)??} \\
 \hline
 B \vee C \text{ (Casos) Errado!!!} \\
 \hline
 A \rightarrow (B \vee C) \text{ (PC1)} \\
 \hline
 (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C)) \text{ (PC0)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow C \quad \overline{A}^1}{C} \\
 \hline
 \frac{B \vee C}{A \rightarrow B \vee C} \text{ Ad.} \\
 \hline
 \frac{A \rightarrow B \vee C}{(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \vee C)} \text{ PC 1: } A \text{ PC 0: } A \rightarrow C
 \end{array}$$

(c)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)$

(0,4)

### Tabela

1.	$A \rightarrow B$	[Premissa]
2.	$C \vee A$	[Premissa (para $C \vee A \rightarrow C \vee B$ )
3.	$A$	Premissa (para $A \rightarrow B \vee C$ )
4.	$B$	[1,3. MP]
5.	$B \vee C$	[4. Ad]
6.	$C$	Premissa para $C \rightarrow B \vee C$
7.	$C \vee B$	[6. Ad]
8.	$B \vee C$	[Exercício de sala]
9.	$C \vee A \rightarrow B \vee C$	[2-8. PC]
10.	$QED$	[1,9. PC]

### Árvore Errado! (0,0)

$C$ (Suposição)
$C \vee B$ (Adição)
$C \vee A \rightarrow C \vee B$ (PC1)
$A$ (Suposição)
$A \rightarrow B$
$B$ (MP)
$C \vee B$ (Adição)
$C \vee A \rightarrow C \vee B$ (PC1)
$A \rightarrow B$
$C \vee A$
$C \vee B$ (Casos)
$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$ (PC0)

1.  $A \rightarrow B$   
 2.  $C \vee A$   
 3.  $C$   
 4.  $C \vee B$   
 5.  $C \rightarrow C \vee B$   
 6.  $A$   
 7.  $B$   
 8.  $C \vee B$   
 9.  $A \rightarrow C \vee B$   
 10.  $C \vee B$   
 11.  $C \vee A \rightarrow C \vee B$   
 QED

P  
 P (Para  $C \vee A \rightarrow C \vee B$ )  
 P (Para  $C \rightarrow C \vee B$ )  
 3, Ad.  
 3, 4, PC  
 P (Para  $A \rightarrow C \vee B$ )  
 1, 6, MP  
 7, Ad.  
 6-8, PC  
 2, 5, 9, Casos  
 2, 5, 9, 10, PC  
 1, 11, PC

$\overline{C}^3$	$A \rightarrow B$	$\overline{A}^2$
$\overline{C \vee B}$ Ad.	$B$	$\overline{B}$ MP
$C \rightarrow C \vee B$ PC 3: C	$C \vee B$	$A \rightarrow C \vee B$ Ad
$\overline{C \vee A}^1$	$C \vee B$	$A$ PC 2: A
	$C \vee A \rightarrow C \vee B$	Casos
	$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)$	PC 1: $C \vee A$
		PC 0: $A \rightarrow B$