FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

21 de outubro de 2025

1. Prove (usando argumentos de validade [interpretações e modelos/contramodelos]) que:

a. Uma fbf é válida se e somente se o seu fecho universal for válido
b. Uma fbf é insatisfatória se e somente se o seu fecho existencial for insatisfatório

2. Use equivalëncias para construir uma forma normal conjuntiva prenexa e uma forma disjuntiva prenexa para cada uma das seguintes fbfs.

a) $\forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$

$$
\begin{aligned}
\forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall x p(x) \vee \forall x q(x) &\equiv && \\
\forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \text{Renom.} \\
\neg\forall x(p(x) \vee q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \text{Rem. } \to \\
\exists x \neg(p(x) \vee q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \neg\forall \\
\exists x(\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \\
\exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z)) &\equiv && \\
\exists x \forall y((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee \forall z q(z)) &\equiv && \\
\exists x \forall y \forall z((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee q(z)) &\equiv &&
\end{aligned}
$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\exists x \forall y \forall z((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee q(z)) \equiv$$
$$\exists x \forall y \forall z(\neg p(x) \vee p(y) \vee q(z)) \wedge (\neg q(x) \vee p(y) \vee q(z))$$

b) $\exists x p(x) \wedge \exists x q(x) \to \exists x(p(x) \wedge q(x))$

$$\begin{array}{rr}
\exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \to \exists x(p(x) \wedge p(x)) \equiv & \\
\exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \to \exists z(p(z) \wedge p(z)) \equiv & \text{Renom.} \\
\neg(\exists p(x) \wedge \exists y q(y)) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) \equiv & \text{Rem. } \to \\
\neg \exists p(x) \vee \neg \exists y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) \equiv & \\
\forall x \neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) \equiv & \\
\forall x(\neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z))) \equiv & \\
\forall x(\neg p(x) \vee \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z))) \equiv & \\
\forall x \forall y \exists z(\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z))) &
\end{array}$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\forall x \forall y \exists z(\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z))) \equiv$$
$$\forall x \forall y \exists z((\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee p(z)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee q(z)))$$

c) $\forall x, \exists y, p(x, y) \to \exists y, \forall x, , p(x, y)$

$$\begin{array}{lr}
\forall x, \exists y, p(x, y) \to \exists y, \forall x, p(x, y) \equiv & \\
\forall x, \exists y, p(x, y) \to \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\text{Renom.}] \\
\neg \forall x, \exists y, p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\text{Remove } \to] \\
\exists x, \neg \exists y, p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [(\neg \forall x\ W) \equiv \exists x\ \neg W] \\
\exists x, \forall y, \neg p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\neg \exists y\ W \equiv \forall y\ \neg W] \\
\exists x, \forall y(\neg p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\text{Move } \forall y] \\
\exists x, \forall y, \exists w, \forall z(\neg p(x, y) \vee p(w, z)) & [\text{Move } \exists w \text{ e } \forall z]
\end{array}$$

A forma que encontramos está tanto na forma normal disjuntiva prenexa quanto na forma normal conjuntiva prenexa.