

FMC III - Trabalho 4

Alexandre Ribeiro, José Ivo e Marina Medeiros

Setembro 2025

1. Mostre que uma partição de um conjunto é pelo menos tão fina quanto outra sse a relação de equivalência associada com a primeira é uma sub-relação da relação de equivalência associada com a última.

Demonstração. Seja A um conjunto e sejam $\{P_i\}_{i \in I}$ e $\{Q_j\}_{j \in J}$ duas partições de A . Sejam R_P e R_Q as relações de equivalência associadas a $\{P_i\}_{i \in I}$ e $\{Q_j\}_{j \in J}$, respectivamente.

Queremos mostrar que:

$$\{P_i\}_{i \in I} \text{ é pelo menos tão fina quanto } \{Q_j\}_{j \in J} \iff R_P \subseteq R_Q.$$

(\Rightarrow) Suponha que $\{P_i\}_{i \in I}$ seja pelo menos tão fina quanto $\{Q_j\}_{j \in J}$. Isso significa que $\forall i \in I, \exists j \in J; P_i \subseteq Q_j$. Com isso, teremos que:

$$\begin{aligned} \exists i \in I; a, b \in P_i &\implies [(a, b) \in R_P] \wedge [\exists j \in J; P_i \subseteq Q_j] \\ &\implies [(a, b) \in R_P] \wedge [a, b \in Q_j] \\ &\implies [(a, b) \in R_P] \wedge [(a, b) \in R_Q] \\ &\implies R_P \subseteq R_Q \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Suponha que $R_P \subseteq R_Q$.

$$\begin{aligned} (a, b) \in R_P &\implies [\exists i \in I, a, b \in P_i] \wedge [(a, b) \in R_Q] \\ &\implies [\exists i \in I, a, b \in P_i] \wedge [\exists j \in J, a, b \in Q_j] \\ &\implies \forall i \in I, \exists j \in J; P_i \subseteq Q_j \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\{P_i\}_{i \in I} \text{ é pelo menos tão fina quanto } \{Q_j\}_{j \in J} \iff R_P \subseteq R_Q.$$

□