

FMC III - Trabalho 4

Alexandre Ribeiro, José Ivo e Marina Medeiros

Setembro 2025

1. Mostre que uma partição de um conjunto é pelo menos tão fina quanto outra sse a relação de equivalência associada com a primeira é uma sub-relação da relação de equivalência associada com a última.

Demonstração. Seja A um conjunto e sejam $\{P_i\}_{i \in I}$ e $\{Q_j\}_{j \in J}$ duas partições de A . Sejam R_P e R_Q as relações de equivalência associadas a $\{P_i\}_{i \in I}$ e $\{Q_j\}_{j \in J}$, respectivamente.

Queremos mostrar que:

$$\{P_i\}_{i \in I} \text{ é pelo menos tão fina quanto } \{Q_j\}_{j \in J} \iff R_P \subseteq R_Q.$$

(\Rightarrow) Suponha que $\{P_i\}_{i \in I}$ seja pelo menos tão fina quanto $\{Q_j\}_{j \in J}$. Isso significa que $\forall i \in I, \exists j \in J; P_i \subseteq Q_j$. Com isso, teremos que:

$$\begin{aligned} \exists i \in I; a, b \in P_i &\Leftrightarrow (a, b) \in R_P && \text{(Def. relação de eq. associada a partição)} \\ &\Rightarrow (a, b) \in R_P \wedge a, b \in Q_j && (P_i \subseteq Q_j) \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in R_P \wedge (a, b) \in R_Q && \text{(Def. relação de eq. associada a partição)} \\ &\Rightarrow R_P \subseteq R_Q && \text{(Def. } \subseteq \text{)} \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Suponha que $R_P \subseteq R_Q$.

$$\begin{aligned}
(a, b) \in R_P &\Rightarrow \exists i \in I, a, b \in P_i && \text{(Def. relação de eq. associada a partição)} \\
&\Rightarrow \exists i \in I, a, b \in P_i \wedge (a, b) \in R_Q && \text{(Def. } \subseteq \text{)} \\
&\Rightarrow \exists i \in I, a, b \in P_i \wedge \exists j \in J, a, b \in Q_j && \text{(Def. rel. de eq. associada a partição)} \\
&\Rightarrow \forall i \in I, \exists j \in J; P_i \subseteq Q_j && \text{(Def. } \subseteq \text{)}
\end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\{P_i\}_{i \in I} \text{ é pelo menos tão fina quanto } \{Q_j\}_{j \in J} \iff R_P \subseteq R_Q.$$

□

2. A intersecção dos fechos transitivos de duas relações é sempre igual ao fecho transitivo da sua intersecção? Se for verdadeiro, prove, se for falso, de um exemplo onde não vale.

Demonstração. Falso. Tome como contra-exemplo as relações:

$$R = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

$$S = \{(1, 3)\}$$

Em um conjunto $A = 1, 2, 3$

$$t(R) \cap t(S) :$$

$$\begin{aligned}
t(R) \cap t(S) &= \\
t(\{(1, 2), (2, 3)\}) \cap t(\{(1, 3)\}) &= (\text{Def. de R e S}) \\
\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \cap \{(1, 3)\} &= (\text{Def. Fecho Transitivo}) \\
&\{(1, 3)\}
\end{aligned}$$

$$T(R \cap S) :$$

$$\begin{aligned}
t(R \cap S) &= \\
t(\{(1, 2), (2, 3)\} \cap \{(1, 3)\}) &= (\text{Def. de R e S}) \\
t(\emptyset) &= (\text{Def. } \cap) \\
&\emptyset \text{ (Def. Fecho transitivo)}
\end{aligned}$$

Logo, a intersecção dos fechos transitivos de duas relações não é sempre igual ao fecho transitivo de sua intersecção. □

3. Prove que se R é uma relação binária sobre A , então $tsr(R)$ é a menor relação de equivalência que contém R .

Demonstração. Seja R uma relação. Vamos demonstrar que $tsr(R)$ contém R .

$$\begin{aligned}
tsr(R) &\iff t(s(r(R))) && (1) \\
&\iff t((s(R \cup R^0))) && (\text{Corolário: } r(R) = R \cup R^0) \\
&\iff t((R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^{-1}) && (\text{Corolário: } s(R) = R \cup R^{-1}) \\
&\iff t(R \cup R^0 \cup R^{-1} \cup (R^0)^{-1}) && (\text{Corolário: } (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}) \\
&\iff t(R \cup R^0 \cup R^{-1} \cup R^0) && ((R^0)^{-1} = R^0) \\
&\iff t(R \cup R^0 \cup R^{-1}) && (\text{Idempotência}) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup R^0)^n && (\text{Definição de fecho transitivo})
\end{aligned}$$

Assim. Sabemos que $R \subset R$ pois todo conjunto contém a si mesmo.

$$\begin{aligned}
R \subset R &\implies R \subset R \cup R^{-1} \cup R^0 && (\text{Idempotência}) \\
&\implies R \subset (R \cup R^{-1} \cup R^0)^1 && (2) \\
&\implies R \subset tsr(R) && (3)
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $tsr(R)$ contém R .

Além disso, pela própria definição de fecho, sabemos que $tsr(R)$ é uma relação de equivalência, visto que aplica as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

Agora, demonstraremos que $tsr(R)$ é a menor relação de equivalência que contém R .

Suponha uma relação de equivalência S qualquer tal que $R \subset S$

$$\begin{aligned}
R \subset S &\implies r(R) \subset S && (S \text{ já é reflexiva}) \\
&\implies sr(R) \subset S && (S \text{ já é simétrica}) \\
&\implies tsr(R) \subset S && (S \text{ já é transitiva})
\end{aligned}$$

Concluindo, $\text{tsr}(\mathbf{R})$ sempre estará contida em uma relação de equivalência que contém \mathbf{R} , ou seja, é a menor possível.

□