FMC III - Trabalho 5

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

26 de setembro de 2025

1. Mostre que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial

Mostraremos que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A tem as seguintes propriedades: reflexividade, transitividade e antissimetria.

Para facilitar a organização, considere que **"TFQ"** significa "é pelo menos tão fina quanto".

(i) Reflexividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$ uma partição de A.

$$\begin{aligned} P_i \subseteq P_i &\Longrightarrow \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq P_j && (j = i) \\ &\Longrightarrow \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i\in I} \end{aligned}$$

Logo, a relação é reflexiva.

(ii) Transitividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$, $\{Q_j\}_{j\in J}$, $\{S_k\}_{k\in K}$ partições de A, tais que $\{P_i\}_{i\in I}$ é tão fina quanto $\{Q_j\}_{j\in J}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$ é tão fina quanto $\{S_k\}_{k\in K}$.

$$\begin{aligned} \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j\in J} \ \wedge \ \{Q_j\}_{j\in J} \text{ TFQ } \{S_k\}_{k\in K} &\Longrightarrow \forall i \in I, \exists j \in J,\ P_i \subseteq Q_j \\ &\quad\ \wedge\ \forall j \in J, \exists k \in K,\ Q_j \subseteq S_k \\ &\Longrightarrow \forall i \in I, \exists k \in K,\ P_i \subseteq S_k \\ &\quad\ \text{(Transitividade de } \subseteq) \end{aligned}$$

Logo, a relação é transitiva.

(iii) Antissimetria: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$ partições de A.

$$\text{(i)} \quad \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j\in J} \Longrightarrow \forall i \in I, \exists j \in J,\ P_i \subseteq Q_j$$

(ii) $\{Q_j\}_{j\in J}$ TFQ $\{P_i\}_{i\in I} \implies \forall j \in J, \exists i \in I,\ Q_j \subseteq P_i$

Logo, de (i) e (ii), temos $\{P_i\}_{i\in I} = \{Q_j\}_{j\in J}$. Com isso, temos que a relação é antissimétrica.

Portanto, a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial.

2. Mostre que a relação de identidade sobre um conjutno não vazio A é a única ordem parcial de A que também é uma relação de equivalência.

Demonstração. Suponha que R é uma ordem parcial e de equivalência de A. Se $a \neq b$:

$$\begin{aligned} (a,b) \in R &\implies (b,a) \in R && \text{(Simetria)} \\ &\implies a = b && \text{(Antissimetria)} \end{aligned}$$

Aqui, chegamos a um absurdo. Logo, se $a \neq b$, $(a,b) \notin R$. Ou seja, $R = I_{dA}$. □

3. Sejam as seguintes definições:
Definição 1 (conjunto bem fundado): seja W qualquer conjunto e $<$ qualquer relação irreflexiva e transitiva sobre W (atenção: não estamos exigindo linearidade, ou seja, que a relação também seja completa). Dizemos que W é bem fundado por $<$ sse todo subconjunto não vazio $A \subset W$ tiver pelo menos um elemento minimal.

Definição 2 (conjunto bem fundado): seja W qualquer conjunto e $<$ qualquer relação irreflexiva e transitiva sobre W. Então, W é bem fundamentado por $<$ se não houver encadeamento descendente infinito ... $< a_2 < a_1 < a_0$ de elementos de W.

Demonstre que as definições são equivalentes.

Demonstração. Seja W um conjunto qualquer e $<$ uma relação qualquer irreflexiva e transitiva sobre W. A partir disso, temos que.
1. $\forall a \in W, (a,a) \notin <$
2. $\forall a,b,c \in W, (a,b) \in <$ e $(b,c) \in < \implies (a,c) \in <$
Agora, vamos demonstrar a equivalência entre as definições.

Definição 1 $\implies$ Definição 2
Suponha por absurdo que existe um encadeamento descendente infinito sobre W. Isto é: $a_n < a_{n-1} < \ \ldots \ < a_2 < a_1 < a_0$.
E Seja A um subconjunto de W definidos como: $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
Pela hipótese:

$$\begin{aligned} \forall a_n \in A \subset W, \exists a_{n+1} \text{ tal que } a_{n+1} < a_n &\iff \neg(\nexists a_{n+1}, a_{n+1} < a_n) \qquad (1) \\ &\implies \text{Não existe minimal} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{(Contradição)} \end{aligned}$$

A hipótese quebra a definição 1, logo, ela está errada e não existe sequência infinita decrescente.
Definição 2 $\implies$ Definição 1
Não existe sequência decrescente $a_n < a_{n-1} < \ \ldots < a_2 < a_1 < a_0$

Suponha por absurdo que não existe minimal em um subconjunto da relação, isto é: $\forall A \subset W$, $\nexists x \in A$, x minimal.

$$\begin{aligned} A \subset W, \nexists x \in A, \text{x minimal} &\implies \neg(\forall y \in A, y \not< x) && \text{(Neg. def.)} \\ &\implies (\exists y \in A, y < x) && (2) \\ &\implies (\exists y \in A, y < a_0) && (x = a_0) \\ &\implies a_0 \text{ Não é minimal} && (3) \\ &\implies (\exists a_1 \in A, a_1 < a_0) && (x = a_1) \\ &\implies a_1 \text{ Não é minimal} && (4) \\ &\implies a_{n+1} < a_n \quad \text{(Repetindo Recursivamente)} \\ &\implies a_n < a_{n-1} < \ \ldots \ < a_2 < a_1 < a_0 && (5) \end{aligned}$$

Contudo, isso é uma contradição, pela definição 2, essa sequência não existe. Logo, a suposição estava errada e existe pelo menos um minimal em um subconjunto da relação. □

4. O conjunto vazio é bem fundado na relação vazia? Demonstre

Demonstração. Seja $W = \emptyset$ e $<$ uma relação vazia sobre W.
Por vacuidade, sabemos que $<$ é irreflexiva
$\forall a \in \emptyset \to (a, a) \notin < \implies \forall a \in \emptyset, (a, a) \notin <$

Por vacuidade, sabemos que $<$ é transitiva
$\forall a, b, c \in \emptyset \to (a, b) \in <$ e $(b, c) \in < \implies (a, c) \in <$

A partir da definição 1, prova-se por vacuidade:

$\forall A \subset \emptyset, A \neq \emptyset \implies \exists x \in A$ minimal $\implies <$ é bem fundada

Logo a definição 1 é válida

A partir da definição 2:
Suponha que existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3,\ ...,\ a_n, a_{n+1},$ tal que $a_{n+1} < a_n \implies a_n \in W$
Contudo, isso é uma contradição, pois $W = \emptyset \implies \nexists x \in \emptyset$
Logo, não existe sequência infinita decrescente no vazio, e a relação é bem fundada.

□

5. Mostre que todo conjunto finito A é bem fundado sob qualquer reação transitiva e irreflexiva sobre ele

Demonstração. Seja A finito e R transitiva e irreflexiva sobre A:
Suponha por absurdo que A não é bem fundado sob R.
Seja S uma sequência infinita decrescente $S = (s_1, s_2, ..., s_i)$

$$\exists(s_i) : s_{i+1} R s_i \implies \exists j > k : s_j = s_k \quad (A \text{ finito, princípio da casa dos pombos})$$

$$\implies s_j R s_k \quad (\text{pela transitividade na cadeia } s_j R s_{j-1} \cdots R s_k)$$

$$\implies s_j R s_j \quad (\text{pois } s_j = s_k)$$

$$\implies \text{contradição} \quad (\text{irreflexividade de } R).$$

Portanto, A é bem fundado. □

6. Seja A qualquer conjunto finito. Mostre que seu conjunto de potências $\mathscr{P}(A)$ está bem fundado na relação de inclusão apropriada de conjunto.

Demonstração. Seja $S = (A_i)$ cadeia descendente em $\mathscr{P}(A)$:

$$A_{i+1} \subset A_i \implies |A_{i+1}| < |A_i| \quad (\text{Def. Cardinalidade})$$

$$\implies |A| > \cdots > |A_2| > |A_1| \geq 0 \quad (\text{Def. P})$$

$$\implies \text{sequência finita} \quad (\text{Começa em A e termina em } \emptyset).$$

Logo, $\mathscr{P}(A)$ é bem fundado sob $\subset$. □