

# FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro      José Ivo      Marina Leite

16 de outubro de 2025

i.  $A \rightarrow A$

1.	$(B \rightarrow C)$	$P$
2.	$(A \wedge B)$	$P$
3.	$\neg(A \wedge C)$	P para $(A \wedge C)$ Prova por absurdo
4.	$B$	2, <i>Simp</i>
5.	$C$	1, 4 <i>MP</i>
6.	$A$	2, <i>Simp</i>
7.	$A \wedge C$	5, 6 <i>Conj.</i>
8.	<i>Falso</i>	3, 7 <i>Contra.</i>
9.	$(A \wedge C)$	3 – 8, <i>PI</i>
10.	$(A \wedge B \rightarrow A \wedge C)$	2, 9 <i>PC</i>
	<i>QED</i>	1, 10 <i>P</i>

ii.  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

1.	$(B \rightarrow C)$	$P$
2.	$(A \wedge B)$	$P$
3.	$\neg(A \wedge C)$	P para $(A \wedge C)$ Prova por absurdo
4.	$B$	2, <i>Simp</i>
5.	$C$	1, 4 <i>MP</i>
6.	$A$	2, <i>Simp</i>
7.	$A \wedge C$	5, 6 <i>Conj.</i>
8.	<i>Falso</i>	3, 7 <i>Contra.</i>
9.	$(A \wedge C)$	3 – 8, <i>PI</i>
10.	$(A \wedge B \rightarrow A \wedge C)$	2, 9 <i>PC</i>
	<i>QED</i>	1, 10 <i>P</i>

iii. Digamos que já tenhamos provado os teoremas  $A \rightarrow B$  e  $B \rightarrow C$ . Mostre que  $A \rightarrow C$ .

1.	$(A \rightarrow B)$	$P$
2.	$(B \rightarrow C)$	$P$
3.	$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	$A1$
4.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	2, 3, <i>MP</i>
5.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$A2$
6.	$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	4, 5, <i>MP</i>
7.	$A \rightarrow C$	1, 6, <i>MP</i>
8.	<i>QED</i>	

iv. Digamos que já tenhamos provado  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ .  
Mostre que  $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ .

1.  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$   $P$
2.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$   $A2$
3.  $B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$  1, 2, MP
4.  $B \rightarrow [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))]$   $A2$
5.  $(B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$   $A2$
6.  $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$  3, 5 MP
7.  $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$   $A2$
8.  $B$   $P$
9.  $B \rightarrow (A \rightarrow B)$   $A1$
10.  $B \rightarrow (A \rightarrow C)$  7, 9, MP
11.  $QED$

v.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

1.  $\neg B \rightarrow \neg A$   $P$
2.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$  Axioma 1
3.  $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  1,2, MP
4.  $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$  Axioma 1
5.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$  Axioma 3
6.  $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$  1,5, MP
7.  $A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$  3,5, Questão III
8.  $(A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B))$  Axioma 2
9.  $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$  7,8, MP
10.  $A \rightarrow B$  4,9, MP
- $QED$