

# FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro      José Ivo      Marina Leite

24 de outubro de 2025

## 1. Prove (usando argumentos de validade [interpretações e modelos/contramodelos]) que:

**a. Uma fbf é válida se e somente se o seu fecho universal for válido (  $\implies$  )**

Seja  $W$  uma fbf válida e  $I$  uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned} W \text{ válida} &\iff \forall I, I \models W && \text{(Def. Val.)} \\ &\implies \forall a_1, \dots, a_n, I[x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n] \models W && \text{(Semântica } \forall x) \\ &\iff \forall I, I \models \forall x_1 \dots \forall x_n W && \text{(Def. fecho universal)} \\ &\implies \text{Fecho universal válido} \end{aligned}$$

(  $\Leftarrow$  )

Seja  $W$  uma fbf qualquer e seja  $\forall x W$  o seu fecho universal, que é válido. Além disso, seja  $I$  uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned} \forall x W \text{ válido} &\iff \forall a_1, \dots, a_n, I[x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n] \models W && \text{(Def.)} \\ &\implies \forall I, I \models W && \text{(Semântica } \forall x) \\ &\iff W \text{ é válido} && \text{(Def. Val.)} \end{aligned}$$

**b. Uma fbf é insatisfatória se e somente se o seu fecho existencial for insatisfatório (  $\implies$  )**

Seja  $W$  uma fbf insatisfatória e  $I$  uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned} W \text{ insatisfatória} &\iff \nexists I, I \models W && \text{(Def. Insatisfatório)} \\ &\implies \nexists a_1, \dots, a_n \text{ tal que } I[x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n] \models W && (\nexists) \\ &\iff \nexists I, I \models \exists x_1 \dots \exists x_n W && \text{(Def. fecho existencial)} \\ &\implies \text{Fecho existencial insatisfatório} \end{aligned}$$

(  $\Leftarrow$  )

Seja  $W$  uma fbf qualquer e seja  $\exists xW$  o seu fecho existencial, que é insatisfatório. Além disso, seja  $I$  uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned}\exists xW \text{ insatisfatório} &\iff \nexists I, I \models \exists x_1 \dots \exists x_n W && (\text{Def. insatisfatório}) \\ &\implies \nexists a_1, \dots, a_n \text{ tal que } I[x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_n \rightarrow a_n] && (\nexists) \\ &\iff W \text{ insatisfatória} && (\text{Def. insatisfatório})\end{aligned}$$

## 2. Use equivalências para construir uma forma normal conjuntiva prenexa e uma forma disjuntiva prenexa para cada uma das seguintes fbfs.

a)  $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall xp(x) \vee \forall xq(x)$

$$\begin{aligned}\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall xp(x) \vee \forall xq(x) &\equiv \\ \forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall yp(y) \vee \forall zq(z) &\equiv && \text{Renom.} \\ \neg \forall x(p(x) \vee q(x)) \vee \forall yp(y) \vee \forall zq(z) &\equiv && \text{Rem. } \rightarrow \\ \exists x \neg(p(x) \vee q(x)) \vee \forall yp(y) \vee \forall zq(z) &\equiv && \neg \forall \\ \exists x(\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \forall yp(y) \vee \forall zq(z) &\equiv && \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \\ \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \forall yp(y) \vee \forall zq(z)) &\equiv \\ \exists x \forall y((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee \forall zq(z)) &\equiv \\ \exists x \forall y \forall z((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee q(z)) &\equiv\end{aligned}$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\begin{aligned}\exists x \forall y \forall z((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee q(z)) &\equiv \\ \exists x \forall y \forall z(\neg p(x) \vee p(y) \vee q(z)) \wedge (\neg q(x) \vee p(y) \vee q(z)) &\equiv\end{aligned}$$

b)  $\exists xp(x) \wedge \exists xq(x) \rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$

$$\begin{aligned}
& \exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \rightarrow \exists x (p(x) \wedge p(x)) \equiv \\
& \exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \rightarrow \exists z (p(z) \wedge p(z)) \equiv \text{Renom.} \\
& \neg(\exists p(x) \wedge \exists y q(y)) \vee \exists z (p(z) \wedge q(z)) \equiv \text{Rem. } \rightarrow \\
& \neg \exists p(x) \vee \neg \exists y q(y) \vee \exists z (p(z) \wedge q(z)) \equiv \\
& \forall x \neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z (p(z) \wedge q(z)) \equiv \\
& \forall x (\neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z (p(z) \wedge q(z))) \equiv \\
& \forall x (\neg p(x) \vee \neg y q(y) \vee \exists z (p(z) \wedge q(z))) \equiv \\
& \forall x \forall y \exists z (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z)))
\end{aligned}$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\begin{aligned}
& \forall x \forall y \exists z (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z))) \equiv \\
& \forall x \forall y \exists z ((\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee p(z)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee q(z)))
\end{aligned}$$

**c)**  $\forall x, \exists y, p(x, y) \rightarrow \exists y, \forall x, , p(x, y)$

$$\begin{aligned}
& \forall x, \exists y, p(x, y) \rightarrow \exists y, \forall x, p(x, y) \equiv \\
& \forall x, \exists y, p(x, y) \rightarrow \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv \text{[Renom.]} \\
& \neg \forall x, \exists y, p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv \text{[Remove } \rightarrow] \\
& \exists x, \neg \exists y, p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv [(\neg \forall x W) \equiv \exists x \neg W] \\
& \exists x, \forall y, \neg p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv [\neg \exists y W \equiv \forall y \neg W] \\
& \exists x, \forall y (\neg p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z)) \equiv \text{[Move } \forall y] \\
& \exists x, \forall y, \exists w, \forall z (\neg p(x, y) \vee p(w, z)) \equiv \text{[Move } \exists w \text{ e } \forall z]
\end{aligned}$$

A forma que encontramos está tanto na forma normal disjuntiva prenexa quanto na forma normal conjuntiva prenexa.