8,0

FMC III - Trabalho 3

Alexandre Ribeiro, José Ivo e Marina Medeiros

September 2025

1. Se o conjunto de dados de entrada de um programa for infinito, o programa não poderá ser testado em todas as entradas. No entanto, todo programa possui um número finito de instruções. Portanto, devemos ser capazes de encontrar um conjunto de dados finito para fazer com que todas as instruções do programa sejam executadas. Suponha que p seja o programa a seguir, onde x é um número inteiro e q, r e s representam outras partes do programa:

Algorithm 1 Função p(x)

```
procedure P(x)
    if x > 0 then
        q(x)
    else
        if x é par then
            r(x)
        else
            s(x)
        end if
    end if
end procedure
```

Descreva quais são as partições geradas pelo programa e escolha uma quantidade de números INTEIROS necessária e suficiente para testar as instruções em q, r e s de cada um dos conjuntos de partições.

Demonstração. A princípio, analisemos as possibilidades de entrada e saída do programa.
Seja $x \in \mathbb{Z}$
Caso 1: $x > 0$ (q(x))
Caso 2: $(x \leq 0) \ \wedge (x = 2q, q \in \mathbb{Z})$ (r(x))
Caso 3: $(x < 0) \ \wedge (x = 2q' + 1, q' \in \mathbb{Z})$ (s(x))

Agora, vamos demonstrar que os casos são partições de p(x), ou seja, são disjuntos e unidos formam p(x).

Assuma um x que pertence à mais de um caso.
Caso 1 e 2: $(x > 0) \wedge (x \leq 0) \wedge (x = 2q, q \in \mathbb{Z})$
Contradição. Pois não é possível que $x > 0 \wedge x \leq 0$

Casos 1 e 3: $(x > 0) \wedge (x < 0) \ \wedge (x = 2q' + 1, q' \in \mathbb{Z})$
Contradição. Pois não é possível que $x > 0 \wedge x < 0$

Casos 2 e 3: $(x \leq 0) \ \wedge (x = 2q) \wedge (x = 2q' + 1)$

$$\begin{aligned}
x \leq 0 \ \wedge x = 2q \wedge x = 2q' + 1 &\longleftrightarrow 2q = 2q' + 1 && (1)\\
&\longleftrightarrow 2q - 2q' = 1 && (2)\\
&\longleftrightarrow 2(q - q') = 1 && (3)\\
&\longleftrightarrow 2k = 1 && \text{(k = (q - q'), k} \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Contradição. Pois 1 não é um número par.

A partir disso, perceba o seguinte: O caso 1 representa todos os números positivos. O caso 2 representa zero e negativos pares. O caso 3 representa os negativos ímpares. Logo, a união deles resulta em p(x), que são os inteiros.

Por fim, note que o conjunto de números $\{-1, 0, 1\}$ é suficiente para testar cada uma das partições.
$1 > 0$: Caso 1
$(0 \leq 0) \ \wedge (0 = 2 \times 0)$: Caso 2
(-1 $<$ 0) $\wedge (-1 = 2 \times (-1) + 1)$: Caso 3

□

2. Mostre a dependência do domínio nas relações reflexivas

demonstrando que a relação vazia é reflexiva sobre o conjunto $A = \emptyset$, mas não é reflexiva sobre qualquer conjunto A maior.

Demonstração. A princípio, sabemos, por vacuidade, que uma relação R sob A $= \emptyset$ é reflexiva.
$\forall a, a \in \emptyset \implies (a,a) \in R \implies \forall a \in \emptyset, (a,a) \in R \longleftrightarrow R$ é reflexiva

Seja S uma relação sob B $= \{1,2\}$, tal que S $= \{(1,1),(1,2)\}$

R é reflexiva, de tal forma que:
$A \subset B$ (pois $\emptyset \subset \{1,2\}$)
$R \subset S$ (Corolário: Uma relação vazia é subrelação de qualquer relação)

Contudo, apesar de R ser reflexiva. S não é reflexiva pois $(2,2) \notin S$. □

3.(i) Uma relação (não vazia) pode ser ao mesmo tempo transitiva e intransitiva? Demonstre e dê um exemplo expondo os casos detalhadamente (0,0) Errado

Demonstração. Seja R uma relação não vazia transitiva e intransitiva sobre A.

$$\begin{aligned}
\forall a,b,c \in A,\ (a,b) \in R \land (b,c) \in R &\implies (a,c) \in R \land (a,c) \notin R && \text{(Def. tran. e intran.)}\\
&\implies (a,c) \in R \land (a,c) \in R^c && \text{(Def. }^c\text{)}\\
&\implies (a,c) \in R \cap R^c && \text{(Def. } \cap\text{)}\\
&\implies (a,c) \in \emptyset && \text{(Def. }^c\text{)}
\end{aligned}$$

Com isso, chegamos a um absurdo. Portanto, uma relação não vazia não pode ser ao mesmo tempo transitiva e intransitiva. □

Como exemplo, usaremos a relação $<$ sobre o conjunto dos números naturais.

$$\begin{aligned}
&\forall a,b,c \in \mathbf{N},\\
a < b \land b < c &\iff \exists d, f \in \mathbf{N}^*, b = a + d \land c = b + f && \text{Def. } <\\
&\iff \exists d, f \in \mathbf{N}^*, c = (a + d) + f && \text{Subst.}\\
&\implies \exists d, f \in \mathbf{N}^*, c = a + (d + f) && \text{Assoc.}\\
&\iff a < c && \text{Def. } <
\end{aligned}$$

Sim. Suponha que para todo $a, b, c \in A$, temos $(a,b) \in R \to (b,c) \notin R$. Então,

$\forall\, a,b,c,(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R \to (a,c) \in R \Leftrightarrow R$ é transit. em A;

$\forall\, a,b,c,(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R \to (a,c) \notin R \Leftrightarrow R$ é intransit. em A.

Portanto, as propriedades são válidas por vacuidade, já que a premissa é sempre falsa.

Exemplo: $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,2)\}$. Note que não existe $a \in A$, tal que $(a,1) \in R$ e $(1,2) \in R$ e não existe $b \in B$ tal que $(1,2) \in R$ e $(2,b) \in R$. Logo, a afirmação $\forall\, a,b,c,(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$ é sempre falsa. Portanto, por vacuidade R é transitiva e intransitiva.

Então, $a < b$ e $b < c \implies a < c$. Portanto, $<$ é transitiva.

Agora, mostraremos que $<$ não é uma relação intransitiva. Observe que:

$$(1 < 2) \wedge (2 < 3) \Rightarrow 1 < 3 \qquad \text{(Pois } < \text{ é transitiva)}$$

Portanto, $<$ não é intransitiva.

(ii) Uma relação pode ser ao mesmo tempo simétrica e assimétrica? Demonstre. (1,0)

Demonstração. Seja R uma relação simétrica e assimétrica sobre A.

$$\begin{aligned}
\forall a, b \in A,\ (a,b) \in R &\implies (b,a) \in R \wedge (b,a) \notin R && \text{(Def. sim. e assim.)}\\
&\implies (b,a) \in R \wedge (b,a) \in R^c && \text{(Def. }^c\text{)}\\
&\implies (b,a) \in R \cap R^c && \text{(Def. } \cap \text{)}\\
&\implies (b,a) \in \emptyset && \text{(Def. }^c\text{)}
\end{aligned}$$

Portanto, uma relação ser simétrica e assimétrica, se $R = \emptyset$. □

4. Por que a união de quaisquer relações simétricas é simétricas, mas a união de quaisquer relações transitivas não necessariamente é transitiva?

Demonstração.

Isso se dá pelo fato de que, dadas duas relações simétricas R_1, R_2 sobre o mesmo conjunto A, o conjunto de duplas que as compõem é o mesmo, e portanto, também é o mesmo da união das duas.

Sejam R_1, R_2 relações simétricas no mesmo conjunto A. Teremos:
$(a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R_1$
e também,
$(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_2$
logo,
$R_1 \subseteq R_2$ & $R_2 \subseteq R_1 \Rightarrow$
$R_1 = R_2 \Rightarrow$
$R_1 = R_1 \cup R_2$ & $R_2 = R_1 \cup R_2$
Veja que o mesmo não vale para todas as relações transitivas. Tome como exemplo as relações $R_>$ e $R_<$ sobre o conjunto $\mathbb{N}$. Suponha por absurdo que $R_< \cup R_>$ é transitiva. Teremos:
$(1, 2) \in R_< \cup R_>$ & $(2, 1) \in R_< \cup R_> \Rightarrow$
$(1, 1) \in R_< \cup R_> \Rightarrow$
$(1, 1) \in R_<$ ou $(1, 1) \in R_> \Rightarrow$
Sabemos que $1 > 1$ e $1 < 1$ são falsos, portanto, temos que o mesmo não vale para relações transitivas.

□

5. Mostre que a relação identidade sobre um conjunto é a menor relação de equivalência sobre aquele conjunto, no sentido de que está incluído em toda relação de equivalência sobre o conjunto. (1,0)

Demonstração. Seja R uma relação de equivalência qualquer em A.
Mostrarei que $I_A \subseteq R$:
$(a, a) \in R \Rightarrow$ (Reflexividade)
$(a, a) \in A \times A \Rightarrow$ (Def. Relação)
$(a, a) \in I_A \Rightarrow$ (Def. identidade)
$I_A \subseteq R$

está mal estruturada!

□

Faltou demonstrar que I_A é uma relação de equival.