

FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

17 de outubro de 2025

i. $A \rightarrow A$

1. $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ [A2]
2. $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ [A1]
3. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ [1,2 MP]
4. $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ [A1]
5. $A \rightarrow A$ [3,4 MP]

ii) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

1. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ [A3]
2. $\neg A \rightarrow \neg A$ [i) (Teorema anterior)]
3. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ [1, 2 MP]

iii. Digamos que já tenhamos provado os teoremas $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$. Mostre que $A \rightarrow C$.

- | | | |
|----|---|----------|
| 1. | $(A \rightarrow B)$ | P |
| 2. | $(B \rightarrow C)$ | P |
| 3. | $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ | $A1$ |
| 4. | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | 2, 3, MP |
| 5. | $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | $A2$ |
| 6. | $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | 4, 5, MP |
| 7. | $A \rightarrow C$ | 1, 6, MP |
| 8. | QED | |

iv. Digamos que já tenhamos provado $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. Mostre que $B \rightarrow (A \rightarrow C)$.

- | | | |
|-----|---|----------|
| 1. | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | P |
| 2. | $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$ | $A2$ |
| 3. | $B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ | 1, 2, MP |
| 4. | $B \rightarrow [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))]$ | $A2$ |
| 5. | $(B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ | $A2$ |
| 6. | $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ | 3, 5 MP |
| 7. | $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ | $A2$ |
| 8. | B | P |
| 9. | $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ | $A1$ |
| 10. | $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ | 7, 9, MP |
| 11. | QED | |

v. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

1. $\neg B \rightarrow \neg A$	P
2. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$	Axioma 1
3. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	1,2, MP
4. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$	Axioma 1
5. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$	Axioma 3
6. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$	1,5, MP
7. $A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$	3,5, Questão III
8. $(A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B))$	Axioma 2
9. $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	7,8, MP
10. $A \rightarrow B$	4,9, MP
<i>QED</i>	