

## FMC III - Trabalho 5

Alexandre Ribeiro      José Ivo      Marina Leite

26 de setembro de 2025

### 1. Mostre que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto $A$ é uma ordem parcial

Mostraremos que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto  $A$  tem as seguintes propriedades: reflexividade, transitividade e antissimetria.

Para facilitar a organização, considere que "**TFQ**" significa "é pelo menos tão fina quanto".

(i) **Reflexividade:** Seja  $A$  um conjunto e  $\{P_i\}_{i \in I}$  uma partição de  $A$ .

$$\begin{aligned} P_i \subseteq P_i &\implies \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq P_j & (j = i) \\ &\implies \{P_i\}_{i \in I} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i \in I} \end{aligned}$$

Logo, a relação é reflexiva.

(ii) **Transitividade:** Seja  $A$  um conjunto e  $\{P_i\}_{i \in I}$ ,  $\{Q_j\}_{j \in J}$ ,  $\{S_k\}_{k \in K}$  partições de  $A$ , tais que  $\{P_i\}_{i \in I}$  é tão fina quanto  $\{Q_j\}_{j \in J}$  e  $\{Q_j\}_{j \in J}$  é tão fina quanto  $\{S_k\}_{k \in K}$ .

$$\begin{aligned} \{P_i\}_{i \in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j \in J} \wedge \{Q_j\}_{j \in J} \text{ TFQ } \{S_k\}_{k \in K} &\implies \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq Q_j \\ &\quad \wedge \forall j \in J, \exists k \in K, Q_j \subseteq S_k \\ &\implies \forall i \in I, \exists k \in K, P_i \subseteq S_k \\ &\quad (\text{Transitividade de } \subseteq) \end{aligned}$$

Logo, a relação é transitiva.

(iii) **Antissimetria:** Seja  $A$  um conjunto e  $\{P_i\}_{i \in I}$  e  $\{Q_j\}_{j \in J}$  partições de  $A$ .

$$(i) \quad \{P_i\}_{i \in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j \in J} \implies \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq Q_j$$

$$(ii) \quad \{Q_j\}_{j \in J} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i \in I} \implies \forall j \in J, \exists i \in I, Q_j \subseteq P_i$$

Logo, de (i) e (ii), temos  $\{P_i\}_{i \in I} = \{Q_j\}_{j \in J}$ . Com isso, temos que a relação é antissimétrica.

Portanto, a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial.

**2. Mostre que a relação de identidade sobre um conjunto não vazio A é a única ordem parcial de A que também é uma relação de equivalência.** (1,4)

Já mostramos no trab. 3 que  $I_A$  é de equiv. falta mostrar que é ord. parcial.

*Demonstração.* Suponha que R é uma ordem parcial e de equivalência de A. Se  $a \neq b$ :

$$\begin{aligned} (a, b) \in R &\implies (b, a) \in R && \text{(Simetria)} \\ &\implies a = b && \text{(Antissimetria)} \end{aligned}$$

Aqui, chegamos a um absurdo. Logo, se  $a \neq b$ ,  $(a, b) \notin R$ . Ou seja,  $R = I_A$ .  $\square$

**3. Sejam as seguintes definições:**

**Definição 1 (conjunto bem fundado):** seja  $W$  qualquer conjunto e  $<$  qualquer relação irreflexiva e transitiva sobre  $W$  (atenção: não estamos exigindo linearidade, ou seja, que a relação também seja completa). Dizemos que  $W$  é bem fundado por  $<$  se todo subconjunto não vazio  $A \subset W$  tiver pelo menos um elemento minimal.

**Definição 2 (conjunto bem fundado):** seja  $W$  qualquer conjunto e  $<$  qualquer relação irreflexiva e transitiva sobre  $W$ . Então,  $W$  é bem fundamentado por  $<$  se não houver encadeamento descendente infinito  $\dots < a_2 < a_1 < a_0$  de elementos de  $W$ .

**Demonstre que as definições são equivalentes.**

*Demonstração.* Seja  $W$  um conjunto qualquer e  $<$  uma relação qualquer irreflexiva e transitiva sobre  $W$ . A partir disso, temos que.

1.  $\forall a \in W, (a, a) \notin <$
2.  $\forall a, b, c \in W, (a, b) \in < \text{ e } (b, c) \in < \implies (a, c) \in <$

Agora, vamos demonstrar a equivalência entre as definições.

**Definição 1  $\implies$  Definição 2**

Suponha por absurdo que existe um encadeamento descendente infinito sobre  $W$ . Isto é:  $a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < a_0$ .

E Seja  $A$  um subconjunto de  $W$  definidos como:  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Pela hipótese:

$$\begin{aligned} \forall a_n \in A \subset W, \exists a_{n+1} \text{ tal que } a_{n+1} < a_n &\iff \neg(\nexists a_{n+1}, a_{n+1} < a_n) & (1) ? \\ &\implies \text{Não existe minimal} \\ & & (\text{Contradição}) \end{aligned}$$

A hipótese quebra a definição 1, logo, ela está errada e não existe sequência infinita decrescente.

**Definição 2  $\implies$  Definição 1**

Não existe sequência decrescente  $a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < a_0$

Suponha por absurdo que não existe minimal em um subconjunto da relação, isto é:  $\forall A \subset W, \nexists x \in A, x \text{ minimal}$ .

$$\begin{aligned} A \subset W, \nexists x \in A, x \text{ minimal} &\implies \neg(\forall y \in A, y \not< x) & (\text{Neg. def.}) \\ &\implies (\exists y \in A, y < x) & (2) ? \\ &\implies (\exists y \in A, y < a_0) & (x = a_0) \\ &\implies a_0 \text{ Não é minimal} & (3) ? \\ &\implies (\exists a_1 \in A, a_1 < a_0) & (x = a_1) \\ &\implies a_1 \text{ Não é minimal} & (4) ? \\ &\implies a_{n+1} < a_n \quad (\text{Repetindo Recursivamente}) \\ &\implies a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < a_0 & (5) \end{aligned}$$

Contudo, isso é uma contradição, pela definição 2, essa sequência não existe. Logo, a suposição estava errada e existe pelo menos um minimal em um subconjunto da relação.  $\square$

**4. O conjunto vazio é bem fundado na relação vazia? Demonstre**

*Demonstração.* Seja  $W = \emptyset$  e  $<$  uma relação vazia sobre  $W$ .

Por vacuidade, sabemos que  $<$  é irreflexiva

$$\cancel{\forall a \in \emptyset \rightarrow (a, a) \notin <} \implies \forall a \in \emptyset, (a, a) \notin < \quad \forall a \in \emptyset, (a, a) \notin < \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall a, a \in \emptyset \rightarrow (a, a) \notin <$$

Por vacuidade, sabemos que  $<$  é transitiva

$$\cancel{\forall a, b, c \in \emptyset \rightarrow (a, b) \in < \text{ e } (b, c) \in < \implies (a, c) \in <} \quad \text{erro análogo!}$$

A partir da definição 1, prova-se por vacuidade:

$\forall A \subset \emptyset, A \neq \emptyset \implies \exists x \in A \text{ minimal} \implies < \text{ é bem fundada}$

Logo a definição 1 é válida

A partir da definição 2:

Suponha que existe uma sequência infinita  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ , tal que  $a_{n+1} < a_n \implies a_n \in W$

Contudo, isso é uma contradição, pois  $W = \emptyset \implies \nexists x \in \emptyset$

Logo, não existe sequência infinita decrescente no vazio, e a relação é bem fundada.

□

### 5. Mostre que todo conjunto finito A é bem fundado sob qualquer relação transitiva e irreflexiva sobre ele

*Demonstração.* Seja A finito e R transitiva e irreflexiva sobre A:

Suponha por absurdo que A não é bem fundado sob R.

Seja S uma sequência infinita decrescente  $S = (s_1, s_2, \dots, s_i)$

$\exists (s_i) : s_{i+1} R s_i \implies \exists j > k : s_j = s_k$  (A finito, princípio da casa dos pombos)

$\implies s_j R s_k$  (pela transitividade na cadeia  $s_j R s_{j-1} \dots R s_k$ )

$\implies s_j R s_j$  (pois  $s_j = s_k$ )

$\implies$  contradição (irreflexividade de R).

Portanto, A é bem fundado.

□

### 6. Seja A qualquer conjunto finito. Mostre que seu conjunto de potências $\mathcal{P}(A)$ está bem fundado na relação de inclusão apropriada de conjunto. (0,4)

*Demonstração.* Seja  $S = (A_i)$  cadeia descendente em  $\mathcal{P}(A)$ :

$A_{i+1} \subset A_i \implies |A_{i+1}| < |A_i|$  (Def. Cardinalidade) ---- precisa provar!

$\implies |A| > \dots > |A_2| > |A_1| \geq 0$  (Def. P.) ---- precisa provar!

$\implies$  sequência finita (Começa em A e termina em  $\emptyset$ ).

Logo,  $\mathcal{P}(A)$  é bem fundado sob  $\subset$ .

□