8,4

Propriedades de Fecho para Linguagens

Alexandre Ribeiro, José Ivo Araújo e Marina Leite

27 de Agosto de 2025

1. Podemos definir o conceito de uplas em termos de conjuntos. Definiremos $() = \emptyset, (x) = \{x\}, e(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. (0.9)

i) Use essa definição para mostrar que $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u$ e $y = v$;

Demonstração.

$$(x, y) = (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$$

$$\Leftrightarrow (\{x\} = \{u\} \ \wedge \ \{x, y\} = \{u, v\}) \ \vee \ (\{x\} = \{u, v\} \ \wedge \ \{x, y\} = \{u\})$$

(definição de conjuntos)

Caso 1: $\{x\} = \{u\} \ \wedge \ \{x, y\} = \{u, v\}$

De $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\underline{\{x\} = \{u\}}$ ~~(definição de conjuntos)~~

$\underline{\Leftrightarrow x = u}$ precisa demonstrar!

De $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\underline{\{x, y\}} = \{u, v\} = \underline{\{x, v\}}$ (substituição $u = x$)

$\underline{\Leftrightarrow y = v}$ precisa demonstrar! ~~(definição de conjuntos)~~

Caso 2: $\{x\} = \{u, v\} \ \wedge \ \{x, y\} = \{u\}$

De $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\underline{\{x\} = \{u, v\}}$ ~~(igualdade de conjuntos)~~

$\underline{\Leftrightarrow u = v \ \wedge \ x = u}$ precisa demonstrar!

De $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\underline{\{x, y\} = \{u\} = \{x\}}$

$\underline{\Leftrightarrow y = u}$ precisa demonstrar! ~~(definição de conjuntos)~~

$\Leftrightarrow y = v$ (pois $u = v$)

Portanto, em ambos os casos obtemos $x = u$ e $y = v$. $\square$

ii) Encontre um exemplo para mostrar que a definição $(x, y) = \{x, \{y\}\}$ não distinguirá entre pares distintos ok

Demonstração. A partir da definição $(x, y) = \{x, \{y\}\}$, tome os seguintes exemplos.

Exemplo 1: Seja $x = \{1\}$ e $y = 2$.

$$(\{1\}, 2) = \{\{1\}, \{2\}\}$$

Exemplo 2: Seja $x = \{2\}$ e $y = 1$.

$$(\{2\}, 1) = \{\{2\}, \{1\}\}$$

Pela definição de conjuntos, a ordem dos elementos não importa. Assim,

$$\{\{1\}, \{2\}\} = \{\{2\}, \{1\}\}.$$

No entanto,

$$(\{1\}, 2) \neq (\{2\}, 1).$$

Portanto, a definição em questão é falha para representar úplas ordenadas. $\square$

iii) Escreva uma representação para (x, y, z) [em termos do que já fizemos] e mostre que $(a, b, c) = (d, e, f) \Leftrightarrow a = d$ e $b = e$ e $c = f$ ok

Demonstração. A partir da definição $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, definimos

$$(y, z) = \{\{y\}, \{y, z\}\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (x, (y, z)) &\iff \{\{x\}, \{x, (y, z)\}\} \\ &\iff \{\{x\}, \{x, \{\{y\}, \{y, z\}\}\}\}. \end{aligned}$$

Agora, demonstraremos que

$$(a, b, c) = (d, e, f) \iff a = d,\ b = e,\ c = f.$$

Primeiro, observamos que

$$(a, b, c) = (d, e, f) \iff (a, (b, c)) = (d, (e, f)) \iff \{\{a\}, \{a, (b, c)\}\} = \{\{d\}, \{d, (e, f)\}\}.$$

Caso 1: $\{a\} = \{d\}$ e $\{a, (b, c)\} = \{d, (e, f)\}$

$$\begin{aligned}
(a, (b, c)) = (d, (e, f)) &\iff \{\{a\}, \{a, (b, c)\}\} = \{\{d\}, \{d, (e, f)\}\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(definição)} \\
&\iff a = d \text{ e } (b, c) = (e, f) \\
&\qquad \text{(suposição do caso e igualdade de conjuntos)} \\
&\iff a = d,\ b = e,\ c = f \qquad . \\
&\qquad\qquad \text{(pela demonstração do item i)}
\end{aligned}$$

Caso 2: $\{a\} = \{d, (e, f)\}$ e $\{a, (b, c)\} = \{d\}$

$$\{a\} = \{d, (e, f)\} \Leftrightarrow \{a\} = \{d, \{\{e\}, \{e, f\}\}\}$$

Contudo, isso não é possível. Pois quebra as propriedades de conjuntos. Dessa forma. Demonstramos que só é possível que a = d e b = e e c = f

$\square$

iv) Encontre um exemplo para mostrar que a definição $(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ não distingue entre ~~três~~ triplas distintas. (0,0)

Demonstração. Tome como contra-exemplo a tripla (1,1,2).

Teríamos então:

$(1, 1, 2) = \{\{1\}, \{1, 1\}, \{1, 1, 2\}\}$

Porém, note que $\{1\} = \{1, 1\}$ e $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$ pela definição de conjuntos.

Portanto, teríamos na verdade:

$(1, 1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$

Logo,

$(1, 1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} = (1, 2)$, pela definição do conceito de uplas em termos de conjuntos. (Contradição) Não demonstrou que não distingue entre triplas distintas

Portanto, a definição $(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ não distingue entre três triplas distintas demonstrou que não distingue de duplas!

$\square$

2. Sejam L e M linguagens quaisquer sobre um mesmo alfabeto. Mostre:

(i) Se $\varepsilon \notin L$ e $\varepsilon \notin M$, então $\varepsilon \notin LM$. (0,8)

Demonstração. Suponha, por absurdo, que:

$$\begin{aligned} \varepsilon \notin L \ \wedge\ \varepsilon \notin M &\implies \varepsilon \in LM \\ &\implies \varepsilon\varepsilon \in LM && (\text{pois } s\varepsilon = \varepsilon s = s) \\ &\implies \varepsilon \in L \ \wedge\ \varepsilon \in M && (\text{Def. do produto}) \end{aligned}$$

a conclusão não é imediata na ida (precisa demonstrar)!

Com isso, chegamos a uma contradição. Portanto, se $\varepsilon \notin L$ e $\varepsilon \notin M$, então $\varepsilon \notin LM$. □

(ii) $L^*M^* \subseteq (L^* \cup M^*)^*$. ~~dd~~ ok

Demonstração.

$$\begin{aligned} a \in L^*M^* &\iff b \in L^*,\ c \in M^* && (a = bc) \\ &\implies b \in L^* \cup M^* \ \wedge\ c \in L^* \cup M^* && (\cancel{\text{Def. de } \cup}) \text{ Absorção} \\ &\iff bc \in (L^* \cup M^*)(L^* \cup M^*) && (\text{Def. prod.}) \\ &\iff a \in (L^* \cup M^*)(L^* \cup M^*) && (bc = a) \\ &\implies a \in (L^* \cup M^*)^2 && (\text{Def. exp.}) \\ &\implies a \in (L^* \cup M^*)^* && (\text{Def. fecho}) \end{aligned}$$

Portanto, $L^*M^* \subseteq (L^* \cup M^*)^*$.

□

(iii) $L^* \cup M^* \subseteq (L^*M^*)^*$. ok

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
a \in L^* \cup M^* &\iff a \in (L^* \cup M^*)^1 && (L^1 = L)\\
&\implies a \in (L^* \cup M^*)^* && (k \in \mathbf{N}, L^k \subseteq L^*)\\
&\implies a \in (L^* M^*)^* && ((L^* M^*)^* = (L^* \cup M^*)^*)
\end{aligned}
$$

Vou aceitar, mas não poderia usar esse resultado já que demonstramos ele usando essa questão como lema.

Portanto, $L^* \cup M^* \subseteq (L^* M^*)^*$. □

(iv) $L^* \subseteq (L \cup M)^*$. ok

Demonstração. Seja $w \in L^*$.

Portanto, temos que, dado k natural: $w = l_1 l_2 \cdots l_k$ (Def. Fecho de Kleene),

onde $l_1, l_2, \ldots, l_k \in L$.

Demonstrarei então que $w \in (L \cup M)^*$.

Como k é natural, ele pode ser igual ou maior que zero.

Caso $k = 0$**:**

$w = \epsilon \Rightarrow \epsilon \in (L \cup M)^*$ (Def. *).

Caso $k > 0$**:**

Como $L \subseteq L \cup M$ Absorção ~~(Def. ∪)~~, temos que, $l_1, l_2, \ldots, l_k \in L \cup M$.

Logo, $w \in (L \cup M)^*$. □

(v) $L \cup M \subseteq L^* \cup M^*$. ok

Demonstração. Seja $w \in L \cup M$

Logo, temos que

$w \in L \vee w \in M$

Caso $w \in L$:

Como $L \subseteq L^*$ (Def. Fecho de Kleene),

Temos que $L \subseteq L^* \cup M^*$ ~~(Def. $\cup$)~~ Absorção

Portanto $w \in L^* \cup M^*$

Caso $w \in M$:

De forma análoga, $M \subseteq L^* \cup M^*$

Como em ambos os casos $w \in L^* \cup M^*$, temos que a proposição é verdadeira.

□