FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

31 de outubro de 2025

1. Dê uma prova formal de $A \to B$, em que A e B são definidos como segue:

$A = \exists x\big(r(x) \wedge \forall y\big(p(y) \to q(x,y)\big)\big) \ \wedge \ \forall x\big(r(x) \to \forall y\big(s(y) \to \neg q(x,y)\big)\big)$

$B = \forall x\big(p(x) \to \neg s(x)\big)$

1.$\exists x(r(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow q(x,y)))$	P
2.$\forall x(r(x) \rightarrow \forall y(s(y) \rightarrow \neg q(x,y)))$	P
3.$r(c) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow q(c,y))$	1, IE
4.$\forall y(p(y) \rightarrow q(c,y))$	3, Simp.
5.$p(y) \rightarrow q(c,y)$	4, IU
6.$r(c) \rightarrow \forall y(s(y) \rightarrow \neg q(c,y))$	2, IU
7. $\quad r(c)$	P (Para $s(y) \rightarrow \neg q(c,y)$)
8. $\quad \forall y(s(y) \rightarrow \neg q(c,y))$	6, 7 MP
9.$s(y) \rightarrow \neg q(c,y)$	8, IU
10. $\quad p(y)$	P (Para $q(c,y)$)
11.$q(c,y)$	5, 10, MP
12. $\quad s(y)$	P (Para obter contradição)
13. $\quad \neg q(c,y)$	9, 12, MP
14. $\quad Falso$	11, 13, Contr.
15.$\neg s(y)$	$12 - 14, PI$
16.$p(y) \rightarrow \neg s(y)$	$10 - 15, PC$
17.$\forall y(p(y) \rightarrow \neg s(y))$	$10 - 15, PC$
18.$\forall x(p(x) \rightarrow \neg s(x))$	$17, Subs.$

QED

2. Prove que a regra de prova do cálculo proposicional Silogismo Hipotético pode ser usada no cálculo de predicado.

Assumimos que as premissas $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$ são fbfs válidas.

Devemos mostrar que $A \rightarrow C$ também é uma fbf válida

Suponha que temos uma interpretação I arbitrária sobre um domínio D

Assim, segue-se que $A \rightarrow B$ é verdadeiro com respeito à interpretação I e $B \rightarrow C$ é verdadeiro com respeito à interpretação I

Portanto, usando a fbf de predicado como instância de fbf proposicional, temos as seguintes premissas verdadeiras:

Valor verdade de A $\rightarrow$ Valor verdade de B

Valor verdade de B $\rightarrow$ Valor verdade de C

Como sabemos que o Silogismo Hipotético é uma tautologia, podemos concluir que:

Valor verdade de A $\rightarrow$ Valor verdade de C

E portanto a fórmula $A \rightarrow C$ é verdadeira com respeito à interpretação I dada sobre D

Portanto, o Silogismo Hipotético pode ser usado no cálculo de predicado.

3. Uma relação arbitrária que é irreflexiva e transitiva também é assimétrica. Dê uma prova formal da afirmação, considerando que as seguintes fbf representam as três propriedades:

$$\text{Irreflexiva: } \forall x \ \neg p(x,x) \tag{1}$$

$$\text{Transitiva: } \forall x, \forall y, \forall z, \ (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)) \tag{2}$$

$$\text{Assimétrica: } \forall x, \forall y, \ (p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)) \tag{3}$$

1.	$\forall x \ \neg p(x,x)$	P (Irreflexiva)
2.	$\forall x \forall y \forall z \ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$	P (Transitiva)
3.	$p(a,b)$	Suposição (para PC), a, b arbitrários
4.	$p(b,a)$	Suposição (para PI)
5.	$p(a,b) \wedge p(b,a)$	3, 4, Adj.
6.	$(p(a,b) \wedge p(b,a)) \rightarrow p(a,a)$	2, IU (x=a, y=b, z=a)
7.	$p(a,a)$	5, 6, MP
8.	$\neg p(a,a)$	1, IU (x=a)
9.	$p(a,a) \wedge \neg p(a,a)$	7, 8, Adj. (Contradição)
10.	$\neg p(b,a)$	4-9, PI
11.	$p(a,b) \rightarrow \neg p(b,a)$	3-10, PC
12.	$\forall x \forall y \ (p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x))$	11, GU (pois a, b são arbitrários)

QED

4. Prove o Teorema da Dedução para o cálculo de predicado.

5. Prove formalmente que:

COPIAR O RESTO