FMC III - Trabalho 12

Alexandre Ribeiro   José Ivo   Marina Leite

28 de novembro de 2025

1. Prove que as fbfs a seguir estão corretas.

i) $\{par(a[i]) \wedge (i = j + 1)\}\ a[j] := a[i] + 1\{impar(a[i-1])\}$

1.	$\{impar(\text{se } i-1=j \ \text{ então } \ a[i]+1 \ \text{ senão } \ a[i-1])\}a[j] := a[i]+1\{impar(a[i-1])\}$	AAA
2.	$(par(a[i] \wedge (i = j+1))$	P
3.	$i = j+1$	2 Simp
4.	$i - 1 = j$	T
5.	$(i-1=j) \rightarrow (impar(a[i]+1))$	Pré-condição de 1
6.	$par(a[i])$	2 Simp
7.	$impar(a[i]+1)$	4,5 MP
8.	$impar(\text{se } i-1=j \ \text{ então } \ a[i]+1 \text{ senão } a[i-1])$	4,5,7 T
9.	$(par(a[i]) \wedge (i=j+1)) \rightarrow impar(\text{se } i-1=j \ \text{ então } \ a[i]+1 \text{ senão } a[i-1])$	2-8 PC
QED		1,9 Conseq.

ii) $\{a[2] = 2 \wedge a[1] = 1\}\ a[a[2]] := 1\ \{\exists z, (a[z] = 1) \wedge (a[2] = z)\}$

1.	$\{\exists z, ((\text{se } z = a[2] \ \text{ então } \ 1 \ \text{ senão } \ a[z]) = 1 \wedge (\text{se } 2 = a[2] \ \text{ então } \ 1 \ \text{ senão } \ a[2]) = z)\} a[a[2]] := 1 \{\exists z, (a[z] = 1 \wedge a[2] = z)\}$	AAA
2.	$(a[2] = 2 \wedge a[1] = 1)$	P
3.	$a[2] = 2$	2 Simp
4.	$a[1] = 1$	2, Simp
5.	$(\text{se } 2 = a[2] \text{ então } \ 1 \ \text{ senão } \ a[2]) = 1$	$3, T$
6.	$(\text{se } 1 = a[2] \ \text{ então } \ 1 \ \text{ senão } \ a[1]) = a[1]$	$3, T$
7.	$(\text{se } 1 = a[2] \ \text{ então } \ 1 \ \text{ senãoo } \ a[1]) = 1$	4,6 T
8.	$((\text{se } 1 = a[2] \text{ então } 1 \text{ senão } a[1]) = 1 \wedge (\text{se } 2 = a[2] \text{ então } 1 \text{ senão } a[2]) = 1)$	$4, 5, \text{Conj}$
9	$\exists z, ((\text{se } z = a[2] \text{ então } 1 \text{ senão } a[z]) = 1 \wedge (\text{se } 2 = a[2] \text{ então } 1 \text{ senão } a[2]) = z)$	$8, T$
10.	$(a[2] = 2 \wedge a[1] = 1) \rightarrow \exists z, ((\text{se } z = a[2] \ \text{ então } \ 1 \ \text{ senão } \ a[z]) = 1 \wedge (\text{se } 2 = a[2] \ \text{ então } \ 1 \ \text{ senão } \ a[2]) = z)$	2-9 PC
QED		$1, 10, \text{Conseq.}$

2. Use o algoritmo de Skolem para transformar a fbf a seguir em uma forma clausulal

.

$$\forall x \, \exists y \, \exists z \, [\, (\neg p(x,y) \wedge q(x,z)) \vee r(x,y,z) \,].$$

Utilizando o algoritmo de Skolen, teremos:

$$\forall x \, \exists y \, \exists z \, [\, (\neg p(x,y) \wedge q(x,z)) \vee r(x,y,z) \,] \equiv$$

$$\forall x \, [\, (\neg p(x, f(x)) \wedge q(x, g(x))) \vee r(x, f(x), g(x)) \,] \equiv$$

$$\forall x \, [\, (\neg p(x, f(x)) \vee r(x, f(x), g(x)) \wedge \ q(x, g(x)) \vee r(x, f(x), g(x)) \,] \equiv$$

3. Encontre uma prova de resolução para mostrar que o conjunto a seguir de cláusulas proposicionais é insatisfatório:

$$\{p \vee q, \ \neg p \vee r, \ \neg r \vee \neg p, \ \neg q\}.$$

1.	$p \lor q$	P
2.	$\neg p \lor r$	P
3.	$\neg r \lor \neg p$	P
4.	$\neg q$	P
5.	p	1, 4, R
6.	r	2, 5, R
7.	$\neg p$	3, 6, R
8.	$\square$	5, 7, R

QED

Como a resolução produziu a cláusula vazia, o conjunto é insatisfatível.

4. Calcule a composição $\theta\sigma$ de cada um dos pares de substituições a seguir

$$\theta = \{x/f(z), y/a\}, \sigma = \{z/b\}.$$

1. Aplique σ aos termos (denominadores) de θ. Resulta em

$$\{x/f(z)\sigma, y/a\sigma\} = \{x/f(b), y/a\}$$

2. Exclua quaisquer ligações no formato x_i/x_i do conjunto do Passo 1. Resulta em

$$\{x/f(b), y/a\}$$

3. Exclua qualquer y_i/s_i de σ se y_i for uma variável em $dom(\theta) = \{x, y\}$.
O conjunto $\sigma = \{z/b\}$. A variável z não pertence ao domínio $\{x, y\}$ de θ.

$$\{z/b\}$$

4. $\theta\sigma$ é a união dos conjuntos construídos dos Passos 2 e 3

$$\theta\sigma = \{x/f(b), y/a, z/b\}$$

Verificação

Para verificar, usaremos o átomo $p(x, y, z)$, pois x, y e z são as variáveis distintas que ocorrem no domínio e contradomínio de θ e σ.
Primeiro cálculo:

$$(p(x, y, z)\theta)\sigma = p(f(z), a, z)\sigma = p(f(b), a, b)$$

Segundo cálculo:

$$p(x, y, z)(\theta\sigma) = p(f(b), a, b)$$

Assim. como os resultados são os mesmos, isso confirma que a composição está correta.

5. Use o algoritmo de unificação de Robinson para encontrar um unificador geral para o conjunto de átomos a seguir.

$$\{p(x, f(x), y), p(x, y, z), p(w, f(a), b)\}.$$

Vamos aplicar o algoritmo ao conjunto $S = \{p(x, f(x), y), p(x, y, z), p(w, f(a), b)\}$.
1. Defina $k = 0$ e $\theta_0 = \epsilon$ e vá para a Etapa 2

$$\theta_0 = \epsilon$$

2. Calcule $S\theta_k$

$$S\theta_0 = S\epsilon = \{p(x, f(x), y), p(x, y, z), p(w, f(a), b)\} \text{ não é um conjunto unitário}$$

2.2 Seja D_k o conjunto de desacordo de $S\theta_k$ e vá para a Etapa 3.

$$D_0 = \{x, w\}$$

3.1 Se D_k contém uma variável v e um termo t, tal que v não ocorre em t, então calcule a composição $\theta_{k+1} = \theta_k\{v/t\}$, defina $k := k + 1$ e vá para o Passo 2

A variável w não ocorre no termo x de D_0.

Coloque $\theta_1 = \theta_0\{w/x\} = \{w/x\}$

2. Calcule $S\theta_k$

$$S\theta_1 = \{p(x, f(x), y), p(x, y, z), p(x, f(a), b)\}$$

Não é um conjunto unitário
2.2 Seja D_k o conjunto de desacordo de $S\theta_k$ e vá para a Etapa 3. O desacordo ocorre no segundo argumento:

$$D_1 = \{f(x), y, f(a)\}$$

3.1 Se D_k contém uma variável v e um termo t, tal que v não ocorre em t, então calcule a composição $\theta_{k+1} = \theta_k\{v/t\}$, defina $k := k + 1$ e vá para o Passo 2

$$\text{A variável y não ocorre no termo } f(a) \text{ de } D_1$$

$$\text{Coloque } \theta_2 = \theta_1\{y/f(a))\} = \{w/x, y/f(a)\}$$

2. Calcule $S\theta_k$

$$S\theta_2 = \{p(x, f(x), f(a)), p(x, f(a), z), p(x, f(a), b)\}$$

Não é um conjunto unitário
2.2 Seja D_k o conjunto de desacordo de $S\theta_k$ e vá para a Etapa 3.

$$D_2 = \{x, a\}$$

3.1 Se D_k contém uma variável v e um termo t, tal que v não ocorre em t, então calcule a composição $\theta_{k+1} = \theta_k\{v/t\}$, defina $k := k + 1$ e vá para o Passo 2

$$\text{A variável x não ocorre no termo } a \text{ de } D_2$$

$$\text{Coloque } \theta_3 = \theta_2\{x/a\} = \{w/a, y/f(a), x/a\}$$

2. Calcule $S\theta_k$

$$S\theta_3 = \{p(a, f(a), f(a)), p(a, f(a), z), p(a, f(a), b)\}$$

Não é um conjunto unitário
2.2 Seja D_k o conjunto de desacordo de $S\theta_k$ e vá para a Etapa 3.

$$D_3 = \{f(a), z, b\}$$

3.1 Se D_k contém uma variável v e um termo t, tal que v não ocorre em t, então calcule a composição $\theta_{k+1} = \theta_k\{v/t\}$, defina $k := k + 1$ e vá para o Passo 2

$$\text{A variável z não ocorre no termo } b \text{ de } D_3$$

$$\text{Coloque } \theta_4 = \theta_3\{z/b\} = \{w/a, y/f(a), x/a, z/b\}$$

2. Calcule $S\theta_k$

$$S\theta_4 = \{p(a, f(a), f(a)), p(a, f(a), b)\}$$

Não é um conjunto unitário
2.2 Seja D_k o conjunto de desacordo de $S\theta_k$ e vá para a Etapa 3.

$$D_4 = \{f(a), b\}$$

O conjunto D_4 contém apenas a função composta $f(a)$ e a constante b. Logo, S não é unificável.