

FMC III - Trabalho 6

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

1 de outubro de 2025

Questão 1

Dadas as fórmulas:

i) $Q \wedge \neg P \rightarrow P$

ii) $(P \vee Q) \wedge R$

(a) Use equivalências para transformá-las em FNC.

i.

$$\begin{aligned} (Q \wedge \neg P) \rightarrow P &\Leftrightarrow \neg(Q \wedge \neg P) \vee P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg \neg P) \vee P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \vee P \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \end{aligned}$$

ii.

$$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$$

(b) Use equivalências para transformá-las em uma FNC.

i.

$$\begin{aligned}(Q \wedge \neg P) \rightarrow P \\ \Leftrightarrow \neg(Q \wedge \neg P) \vee P \\ \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg(\neg P) \wedge P \\ \Leftrightarrow \neg Q \wedge P \wedge P \\ \Leftrightarrow \neg Q \wedge P\end{aligned}$$

ii.

A fbf $(P \vee Q) \wedge R$ já é uma FNC, pois é a conjunção de uma disjunção de literais e um literal.

(c) Transforme as fbfs em uma FND completa, se possível

i.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

Q	P	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Portanto, a FND completa é:

$$(Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge \neg P)$$

ii.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

P	Q	R	$(R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	F	F
F	F	F	F

Portanto, a FND completa é:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

(d) Transforme as fbf's em uma FNC completa, se possível

i.

A fbf $\neg Q \wedge P$ já é uma FNC completa, pois é a conjunção de dois literais. Segue a prova por tabela verdade:

Q	P	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$
V	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	F

ii.

Podemos fazer a transformação por meio do método da tabela verdade, utilizando a equivalência demonstrada anteriormente:

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge R$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	F	F
F	F	F	F

Portanto, a FNC completa é:

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

Questão 2

Para cada função, escreva as representações da FND completa e da FNC completa.

a) $f(P, Q) = \text{Verdadeiro sse } Q \text{ for Verdadeiro}$

Primeiro, a tabela-verdade:

P	Q	$f(P, Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Note que a função é equivalente a Q .

FNC completa

$$\begin{aligned}
 Q &\Leftrightarrow Q \vee \text{Falso} \\
 &\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge \neg P) \\
 &\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P)
 \end{aligned}$$

FND completa

$$\begin{aligned}
 Q &\Leftrightarrow Q \wedge \text{Verdadeiro} \\
 &\Leftrightarrow Q \wedge (P \vee \neg P) \\
 &\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)
 \end{aligned}$$

b) $f(P, Q, R) = \text{Verdadeiro}$ sse P for Verdadeiro ou Q for Falso

Tabela-verdade:

P	Q	R	$f(P, Q)$	$P \vee \neg Q$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Observe que a função é equivalente a $P \vee \neg Q$.

FND completa

$$\begin{aligned}
P \vee \neg Q &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg\neg Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge \text{Verdadeiro} \\
&\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \\
&\Leftrightarrow [(\neg P \wedge Q) \wedge R] \vee [(\neg P \wedge Q) \wedge \neg R] \\
&\Leftrightarrow [\neg P \wedge Q \wedge R] \vee [\neg P \wedge Q \wedge \neg R]
\end{aligned}$$

FNC completa

$$\begin{aligned}
P \vee \neg Q &\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \vee \text{Falso} \\
&\Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \vee (R \wedge \neg R) \\
&\Leftrightarrow [(P \vee \neg Q) \vee R] \wedge [(P \vee \neg Q) \vee \neg R] \\
&\Leftrightarrow [P \vee \neg Q \vee R] \wedge [P \vee \neg Q \vee \neg R]
\end{aligned}$$

Questão 3

Dê uma prova formal, nas duas notações (tabelas e árvores), para cada uma das tautologias a seguir usando a regra CP.

$$(a) (A \vee B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D \wedge E) \rightarrow (A \rightarrow D)$$

Tabela

1.	$A \vee B \rightarrow C$	[Premissa]
2.	$C \rightarrow D \wedge E$	[Premissa]
3.	A	[Premissa (para $A \rightarrow D$)]
4.	$A \vee B$	[3, Ad]
5.	C	[1,4 MP]
6.	$D \wedge E$	[2,5 MP]
7.	D	[6, Simp]
8.	$A \rightarrow D$	[3–7, PC]
9.	QED	[1,2,8, PC]

ok

Árvore

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{A \vee B \rightarrow C \text{ (Suposição)}}{\frac{A \text{ (MP)}}{D \wedge E \text{ (MP)}}} \quad \frac{\overline{A^1} \text{ (Suposição)}}{A \vee B \text{ (Adição)}}}{C \rightarrow D \wedge E}}{D \text{ (Simplificação)}} \\
 \frac{D \text{ (Simplificação)}}{A \rightarrow D \text{ (PC1)}} \\
 \hline
 (A \vee B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D \wedge E) \rightarrow (A \rightarrow D) \text{ (PC0)}
 \end{array}$$

(b) $(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \vee C)$

Tabela

ok

1.	$A \rightarrow C$	[Premissa]
2.	A	[Premissa (para $A \rightarrow B \vee C$)]
3.	C	[1,2 MP]
4.	$C \vee B$	[3, Ad]
5.	$B \vee C$	4, [Exercício de sala]
6.	$A \rightarrow (B \vee C)$	[2–5, PC]
7.	QED	[1,6, PC]

Árvore

Errado (0,0)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{A \rightarrow C \quad A \text{ (Suposição)}}{C \text{ (MP)}} \quad \frac{B \text{ (Suposição)} ??}{B \vee C \text{ (Casos)}}}{\frac{B \vee C \text{ (Casos)}}{A \rightarrow (B \vee C) \text{ (PC1)}}} \\
 \hline
 (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C)) \text{ (PC0)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{A \rightarrow C \quad \overline{A^1}}{C}}{\frac{B \vee C}{\frac{A \rightarrow B \vee C}{(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \vee C)}}}}{\text{Ad.}} \\
 \text{PC 1: } A \\
 \text{PC 0: } A \rightarrow C
 \end{array}$$

(c) $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)$

(0,4)

Tabela

1.	$A \rightarrow B$	[Premissa]
2.	$C \vee A$	[Premissa (para $C \vee A \rightarrow C \vee B$)]
3.	A	Premissa (para $A \rightarrow B \vee C$)
4.	B	[1,3. MP]
5.	$\neg B \vee C$	[4. Ad]
6.	C	Premissa para $C \rightarrow B \vee C$
7.	$C \vee B$	[6. Ad]
8.	$\neg B \vee C$	[Exercício de sala]
9.	$C \vee A \rightarrow B \vee C$	[2-8.- PC]
10.	QED	[1,9. PC]

Árvore Errado! (0,0)

$$\begin{array}{c}
 \frac{C \text{ (Suposição)}}{\frac{C \vee B \text{ (Adição)}}{\frac{}{C \vee A \rightarrow C \vee B \text{ (PC1)}}}} \\
 \\
 \frac{\frac{A \text{ (Suposição)} \quad A \rightarrow B}{\frac{B \text{ (MP)}}{\frac{}{C \vee B \text{ (Adição)}}}}}{\frac{}{C \vee A \rightarrow C \vee B \text{ (PC1)}}} \\
 \\
 \frac{\frac{A \rightarrow B \quad C \vee A}{\frac{}{C \vee B \text{ (Casos)}}}}{(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B)) \text{ (PC0)}}
 \end{array}$$

1. $A \rightarrow B$
2. $C \vee A$
3. C
4. $C \vee B$
5. $C \rightarrow C \vee B$
6. A
7. B
8. $C \vee B$
9. $A \rightarrow C \vee B$
10. $C \vee B$
11. $C \vee A \rightarrow C \vee B$
- QED

- P*
- P (Para $C \vee A \rightarrow C \vee B$)
- P (Para $C \rightarrow C \vee B$)
- 3, Ad.
- 3, 4, PC
- P (Para $A \rightarrow C \vee B$)
- 1, 6, MP
- 7, Ad.
- 6-8, PC
- 2, 5, 9, Casos
- 2, 5, 9, 10, PC
- 1, 11, PC

$$\begin{array}{c}
 \frac{\overline{C}^3}{\frac{\overline{C} \rightarrow C \vee B}{\frac{PC 3: C}{\frac{\overline{C} \vee B \text{ Ad.}}{\frac{\overline{C} \vee B}{\frac{\frac{A \rightarrow B \quad \overline{A}^2}{\frac{B}{\frac{B \text{ MP}}{\frac{\overline{C} \vee B \text{ Ad.}}{\frac{\overline{A} \rightarrow C \vee B}{\frac{PC 2: A}{\frac{C \vee B}{\frac{C \vee A \rightarrow C \vee B}{\frac{PC 1: C \vee A}{(A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee A \rightarrow C \vee B)}}}}}}}}}}}}}}}{PC 0: A \rightarrow B}
 \end{array}$$