

FMC III - Trabalho 8

6,0

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

17 de outubro de 2025

i. $A \rightarrow A$

1. $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ [A2]
2. $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ [A1]
3. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ [1,2 MP]
4. $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ [A1]
5. $A \rightarrow A$ [3,4 MP]

ii) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

1. $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ [A3]
2. $\neg A \rightarrow \neg A$ [i) (Teorema anterior)]
3. $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ [1, 2 MP]

iii. Digamos que já tenhamos provado os teoremas $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$. Mostre que $A \rightarrow C$.

1.	$(A \rightarrow B)$	P T (Teorema)
2.	$(B \rightarrow C)$	P T
3.	$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	A1
4.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	2, 3, MP
5.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	A2
6.	$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	4, 5, MP
7.	$A \rightarrow C$	1, 6, MP
8.	<i>QED</i>	

iv. Digamos que já tenhamos provado $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. Mostre que $B \rightarrow (A \rightarrow C)$. (0,0) Errado!

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	P T
2.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$	A2 A1
3.	$B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	1, 2, MP
4.	$B \rightarrow [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))]$	A2 <- Errado!
5.	$(B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$	A2
6.	$B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	3, 5 MP
7.	$(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	A2
8.	B	P
9.	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	A1
10.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	7, 9, MP
11.	<i>QED</i>	

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	T
2.	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	Axioma 1
3.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Axioma 2
4.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	1, 3, MP
5.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	2, 4, Por (iii)
	<i>QED.</i>	

v. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (0,0) Errado!

1. $\neg B \rightarrow \neg A$	-----P--
2. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$	Não temos premissa
3. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Pois não temos PC!
4. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$	Axioma 1
5. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$	1,2, MP
6. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$	Axioma 1
7. $A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$	Axioma 3
8. $(A \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B))$	1,5, MP
9. $(A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	3,5, Questão III
10. $A \rightarrow B$	Axioma 2
<i>QED</i>	7,8, MP
	4,9, MP

1. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$	Axioma 3
2. $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B)$	1, Por (iv)
3. $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$	Axioma 1
4. $A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B)$	3, 2, Por (iii)
5. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	4, Por (iv)
<i>QED</i>	