FMC III - Trabalho 5

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

26 de setembro de 2025

article amsmath,amssymb,amsthm [utf8]inputenc [brazil]babel

1. Mostre que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial

Mostraremos que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A tem as seguintes propriedades: reflexividade, transitividade e antissimetria.

Para facilitar a organização, considere que **"TFQ"** significa "é pelo menos tão fina quanto".

(i) Reflexividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$ uma partição de A.

$$\begin{aligned} P_i \subseteq P_i &\implies \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq P_j \qquad (j = i) \\ &\implies \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i\in I} \end{aligned}$$

Logo, a relação é reflexiva.

(ii) Transitividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$, $\{Q_j\}_{j\in J}$, $\{S_k\}_{k\in K}$ partições de A, tais que $\{P_i\}_{i\in I}$ é tão fina quanto $\{Q_j\}_{j\in J}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$ é tão fina quanto $\{S_k\}_{k\in K}$.

$$\begin{aligned} \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j\in J} \ \wedge \ \{Q_j\}_{j\in J} \text{ TFQ } \{S_k\}_{k\in K} &\implies \forall i \in I, \exists j \in J, \ P_i \subseteq Q_j \\ &\quad \wedge \ \forall j \in J, \exists k \in K, \ Q_j \subseteq S_k \\ &\implies \forall i \in I, \exists k \in K, \ P_i \subseteq S_k \\ &\quad \text{(Transitividade de } \subseteq\text{)} \end{aligned}$$

Logo, a relação é transitiva.

(iii) Antissimetria: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$ partições de A.

$$\text{(i)} \quad \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j\in J} \implies \forall i \in I, \exists j \in J, \ P_i \subseteq Q_j$$

(ii) $\{Q_j\}_{j\in J}$ TFQ $\{P_i\}_{i\in I} \implies \forall j \in J, \exists i \in I,\ Q_j \subseteq P_i$

Logo, de (i) e (ii), temos $\{P_i\}_{i\in I} = \{Q_j\}_{j\in J}$. Com isso, temos que a relação é antissimétrica.

Portanto, a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial.

2. Mostre que a relação de identidade sobre um conjutno não vazio A é a única ordem parcial de A que também é uma relação de equivalência.

Demonstração. Suponha que R é uma ordem parcial e de equivalência de A. Se $a \neq b$:

$$\begin{aligned}(a,b) \in R &\implies (b,a) \in R && \text{(Simetria)}\\ &\implies a = b && \text{(Antissimetria)}\end{aligned}$$

Aqui, chegamos a um absurdo. Logo, se $a \neq b$, $(a,b) \notin R$. Ou seja, $R = I_{dA}$. □

3. Mostre que todo conjunto finito A é bem fundado sob qualquer reação transitiva e irreflexiva sobre ele

Demonstração. Seja A finito e R transitiva e irreflexiva sobre A:

Suponha por absurdo que A não é bem fundado sob R.

Seja S uma sequência infinita decrescente $S = (s_1, s_2, ..., s_i)$

$$\exists (s_i) : s_{i+1} R s_i \implies \exists j > k : s_j = s_k \quad (A \text{ finito, princípio da casa dos pombos})$$

$$\implies s_j R s_k \quad (\text{pela transitividade na cadeia } s_j R s_{j-1} \cdots R s_k)$$

$$\implies s_j R s_j \quad (\text{pois } s_j = s_k)$$

$$\implies \text{contradição} \quad (\text{irreflexividade de } R).$$

Portanto, A é bem fundado. □

4. Seja A qualquer conjunto finito. Mostre que seu conjunto de potências $P(A)$ está bem fundado na relação de inclusão apropriada de conjunto.

Demonstração. Seja $S = (A_i)$ cadeia descendente em $P(A)$:

$$A_{i+1} \subset A_i \implies |A_{i+1}| < |A_i| \quad \text{(Def. Cardinalidade)}$$

$$\implies |A| > \cdots > |A_2| > |A_1| \geq 0 \quad \text{(Def. P)}$$

$$\implies \text{sequência finita} \quad \text{(Começa em A e termina em } \emptyset\text{).}$$

Logo, $P(A)$ é bem fundado sob $\subset$. $\square$