FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

18 de outubro de 2025

1. Prove (usando argumentos de validade [interpretações e modelos/contramodelos]) que:

a. Uma fbf é válida se e somente se o seu fecho universal for válido
b. Uma fbf é insatisfatória se e somente se o seu fecho existencial for insatisfatório

2. Use equivalëncias para construir uma forma normal conjuntiva prenexa e uma forma disjuntiva prenexa para cada uma das seguintes fbfs.

a) $\forall x(p(x) \lor q(x)) \to \forall xp(x) \lor \forall xq(x)$

$$
\begin{aligned}
&\forall x(p(x) \lor q(x)) \to \forall xp(x) \lor \forall xq(x) \equiv && \\
&\forall x(p(x) \lor q(x)) \to \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv && \text{Renom.} \\
&\neg\forall x(p(x) \lor q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv && \text{Rem. } \to \\
&\exists x\neg(p(x) \lor q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv && \neg\forall \\
&\exists x(\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv && \neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \\
&\exists x((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z)) \equiv && \text{Adicionando ()} \\
&\exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor \forall zq(z)) \equiv && \text{iv (b)} \\
&\exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv && \text{iv (b)}
\end{aligned}
$$

b) $\exists xp(x) \land \exists xq(x) \to \exists x(p(x) \land q(x))$

$$
\begin{aligned}
\exists x p(x) \land \exists x q(x) \to \exists x (p(x) \land q(x)) &\equiv \\
\neg(\exists x p(x) \land \exists y q(y)) \to \exists z (p(z) \land q(z)) &\equiv \\
\neg \exists x p(x) \lor \neg \exists y q(y) \to \exists z (p(z) \land q(z)) &\equiv
\end{aligned}
$$