6,4

Propriedades de Fecho para Linguagens

Alexandre Ribeiro, José Ivo Araújo e Marina Leite

27 de Agosto de 2025

1. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A.
(a) Mostre que se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ (1,2)

Demonstração. Sejam A e B tais que $A \subseteq B$.
então Se $S \subseteq A$, Se ~~então,~~ $S \subseteq \mathcal{P}(A)$. Além disso, temos: (Argumentação confusa!)
(justif.)

$$\begin{aligned} S \subseteq A &\implies S \subseteq B && \text{(justif.)} \\ &\implies S \in \mathcal{P}(B) && \text{(justif.)} \end{aligned}$$

Logo, se $S \in \mathcal{P}(A)$, então $S \in \mathcal{P}(B)$.
Portanto, se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. □

(b) Verdadeiro ou falso: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Dê uma prova ou um contraexemplo. (0,0)

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subset (A \cap B) && \text{(Def. P(A))} \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) && (\text{Def. } \subset, x \in X) \text{ mal formulado!} \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B && (\text{Def. } \cap) \\ &\Leftrightarrow \cancel{x \in \mathcal{P}(A) \text{ e } x \in \mathcal{P}(B)} && \cancel{\text{(Def. P(A))}} \text{ falso!} \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) && (\text{Def. } \cap) \end{aligned}$$

□

(c) Verdadeiro ou falso: $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? Dê uma prova ou um contraexemplo.

Demonstração. A afirmação é falsa. Tome o seguinte contra exemplo:
Seja $A = \{1, 2\}$ *e* $B = \{3\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A \cup B) &= \mathcal{P}(\{1,2\} \cup \{3\}) && (1)\\
&= \mathcal{P}(\{1,2,3\}) && (2)\\
&= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} && (3)
\end{aligned}$$

Contudo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(\{1,2\}) \cup \mathcal{P}(\{3\}) && (4)\\
&= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \cup \{\emptyset, \{3\}\} && (5)\\
&= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}\} && (6)
\end{aligned}$$

Assim, está provado.

$\square$

2. Identifique $dom(A \times B)$ **e** $im(A \times B)$ **e demonstre o resultado.** (0,5)

?

Demonstração. $dom(A \times B) = A$:

$dom(A \times B) \subseteq A$: incompleto!

$$\text{Dom}(A \times B) = \begin{cases} A, & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset. \end{cases}$$

$$\text{Im}(A \times B) = \begin{cases} B, & \text{se } A \neq \emptyset \text{ e } B \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{se } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset. \end{cases}$$

Seja x tal que:

$x \in dom(A \times B) \Rightarrow$

falha! $(x, y) \in A \times B \Rightarrow$ (Def. Domínio) veremos os detalhes em sala!

$x \in A$ & $y \in B \Rightarrow$ (Def. Produto cartesiano)

$x \in A$.

$A \subseteq dom(A \times B)$:

$x \in A \Rightarrow$

falha! $x \in dom(A \times B)$. (Def. Produto Cartesiano)

$\square$

3. Mostre que quando $A \neq \emptyset$ **e** $B \neq \emptyset$**, então** $A \times B = B \times A$ **sse** $A = B$.

(1,4)

Demonstração. $(\Rightarrow)$: (justif.)

$a \in A \;\&\; b \in B \Rightarrow$

$(a, b) \in A \times B \Rightarrow$ (justif.)

$(a, b) \in B \times A \Rightarrow$ (justif.)

$a \in B \Rightarrow$ (justif.)

$A \subseteq B$

De modo análogo, $B \subseteq A$, logo:

$A = B$

$(\Leftarrow)$:

$A = B \Rightarrow$ (justif.) (justif.)

$A \times B = A \times A = B \times B = B \times A$ (justif.)

Logo, $A \times B = B \times A$ □

4. Verifique em detalhes a afirmação de que $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$ **sse** $(x_1 = y_1$ **e** $x_2 = y_2)$ **ou** $(x_1 = y_2$ **e** $x_2 = y_1)$

Demonstração. Primeiro, mostraremos que:
$\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\} \implies (x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2) \text{ ou } (x_1 = y_2 \text{ e } x_2 = y_1)$

Pela definição de igualdade de conjuntos, temos que:

$$\begin{aligned}
\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\} &\implies \{\forall a, a \in \{x_1, x_2\} \Leftrightarrow a \in \{y_1, y_2\}\} \\
&\implies x_1 \in \{y_1, y_2\} \wedge x_2 \in \{y_1, y_2\} \\
&\implies (x_1 = y_1 \vee x_1 = y_2) \wedge (x_2 = y_1 \vee x_2 = y_2)
\end{aligned}$$

Assim, teremos 4 casos:

1. Caso $x_1 = y_1$:

   (a) Caso $x_2 = y_1$:
   Aqui, teremos:

$$\begin{aligned}
\{x_1, x_2\} &= \{y_1, y_1\} && \text{(Por substituição)} \\
&= \{y_1\} \\
&\neq \{y_1, y_2\}
\end{aligned}$$

   Aqui, chegamos em um absurdo.

(b) Caso $x_2 = y_2$:
Aqui, teremos:

$$\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\} \qquad \text{(Por substituição)}$$

2. Caso $x_1 = y_2$:

(a) Caso $x_2 = y_1$:
Aqui, teremos:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \{y_2, y_1\} && \text{(Por substituição)} \\ &= \{y_1, y_2\} && \text{(Def. conjuntos)} \end{aligned}$$

(b) Caso $x_2 = y_2$:
Aqui, teremos:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \{y_2, y_2\} && \text{(Por substituição)} \\ &= \{y_2\} \\ &\neq \{y_1, y_2\} \end{aligned}$$

Aqui, chegamos em um absurdo.

Logo,
$\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\} \implies (x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2) \text{ ou } (x_1 = y_2 \text{ e } x_2 = y_1)$

Agora, mostraremos que:
$(x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2) \text{ ou } (x_1 = y_2 \text{ e } x_2 = y_1) \implies \{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$

Aqui, teremos 2 casos:

1. Caso $(x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2)$:
Nesse caso:

$$\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\} \qquad \text{(Por substituição)}$$

2. Caso ($x_1 = y_2$ e $x_2 = y_1$):
   Nesse caso:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \{y_2, y_1\} && \text{(Por substituição)} \\ &= \{y_1, y_2\} && \text{(Def. conjuntos)} \end{aligned}$$

Logo,
($x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$) ou ($x_1 = y_2$ e $x_2 = y_1$) $\implies \{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$.

Portanto,
$\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$ sse ($x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$) ou ($x_1 = y_2$ e $x_2 = y_1$) $\square$