FMC III - Trabalho 4

Alexandre Ribeiro, José Ivo e Marina Medeiros

Setembro 2025

1. Mostre que uma partição de um conjunto é pelo menos tão fina quanto outra sse a relação de equivalência associada com a primeira é uma sub-relação da relação de equivalência associada com a última.

Demonstração. Seja A um conjunto e sejam $\{P_i\}_{i\in I}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$ duas partições de A. Sejam R_P e R_Q as relações de equivalência associadas a $\{P_i\}_{i\in I}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$, respectivamente.

Queremos mostrar que:

$$\{P_i\}_{i\in I} \text{ é pelo menos tão fina quanto } \{Q_j\}_{j\in J} \iff R_P \subseteq R_Q.$$

($\Rightarrow$) Suponha que $\{P_i\}_{i\in I}$ seja pelo menos tão fina quanto $\{Q_j\}_{j\in J}$. Isso significa que $\forall i \in I, \exists j \in J; P_i \subseteq Q_j$. Com isso, teremos que:

$$
\begin{aligned}
a, b \in P_i &\Leftrightarrow (a, b) \in R_P && \text{(Def. } R_P\text{)} \\
P_i \subseteq Q_j &\Rightarrow (a, b) \in Q_j && \text{(Def } \subseteq\text{)} \\
&\Rightarrow (a, b) \in R_Q && \text{(Def. } R_Q\text{)} \\
&\Rightarrow (a, b) \in R_P \Rightarrow (a, b) \in R_Q && \\
&\Rightarrow R_P \subseteq R_Q && \text{(Def. } \subseteq\text{)}
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Suponha que $R_P \subseteq R_Q$.

$$
\begin{aligned}
a, b \in P_i &\Leftrightarrow (a,b) \in R_P \qquad (\text{Def. } R_P)\\
&\Rightarrow (a,b) \in R_Q \qquad (R_P \subseteq R_Q\\
&\Leftrightarrow a, b \in Q_j \qquad (\text{Def. } R_Q)\\
&\Rightarrow P_i \subseteq Q_j \qquad (\text{Def. } \subseteq)
\end{aligned}
$$

Concluímos que:

$$\{P_i\}_{i \in I} \text{ é pelo menos tão fina quanto } \{Q_j\}_{j \in J} \iff R_P \subseteq R_Q.$$

$\square$

2. A intersecção dos fechos transitivos de duas relações é sempre igual ao fecho transitivo da sua intersecção? Se for verdadeiro, prove, se for falso, de um exemplo onde não vale.

Demonstração. Falso. Tome como contra-exemplo as relações:
$R = \{(1,2),(2,3)\}$
$S = \{(1,3)\}$
Em um conjunto $A = 1, 2, 3$
$t(R) \cap t(S)$:

$$
\begin{aligned}
t(R) \cap t(S) &=\\
t(\{(1,2),(2,3)\}) \cap t(\{(1,3)\}) &= (\text{Def. de R e S})\\
\{(1,2),(2,3),(1,3)\} \cap \{(1,3)\} &= (\text{Def. Fecho Transitivo})\\
\{(1,3)\}
\end{aligned}
$$

$T(R \cap S)$:

$$
\begin{aligned}
t(R \cap S) &=\\
t(\{(1,2),(2,3)\} \cap \{(1,3)\}) &= (\text{Def. de R e S})\\
t(\emptyset) &= (\text{Def. } \cap)\\
&\emptyset \ (\text{Def. Fecho transitivo})
\end{aligned}
$$

Logo, a intersecção dos fechos transitivos de duas relações não é sempre igual ao fecho transitivo de sua intersecção. $\square$

3. Prove que se R é uma relação binária sobre A, então $tsr(R)$ é a menor relação de equivalência que contém R.

Demonstração. Seja R uma relação. Vamos demonstrar que tsr(R) contém R.

$$
\begin{aligned}
tsr(R) &\iff t(s(r(R))) && (1)\\
&\iff t((s(R \cup R^0))) && (\text{Corolário: r(R) = R} \cup \text{R}^0)\\
&\iff t((R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^{-1}) && (\text{Corolário: s(R) = R} \cup \text{R}^{-1})\\
&\iff t(R \cup R^0 \cup R^{-1} \cup (R^0)^{-1}) \\
& && (\text{Corolário: (R} \cup \text{S)}^{-1} = \text{R}^{-1} \cup \text{S}^{-1})\\
&\iff t(R \cup R^0 \cup R^{-1} \cup R^0) && ((\text{R}^0)^{-1} = R^0)\\
&\iff t(R \cup R^0 \cup R^{-1}) && (\text{Idempotência})\\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup R^0)^n && (\text{Definição de fecho transitivo})
\end{aligned}
$$

Assim. Sabemos que R $\subset R$ pois todo conjunto contém a si mesmo.

$$
\begin{aligned}
R \subset R &\implies R \subset R \cup R^{-1} \cup R^0 && (\text{Idempotência})\\
&\implies R \subset (R \cup R^{-1} \cup R^0)^1 && (2)\\
&\implies R \subset tsr(R) && (3)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos que tsr(R) contém R.
Além disso, pela própria definição de fecho, sabemos que tsr(R) é uma relação de equivalência, visto que aplica as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

Agora, demonstraremos que tsr(R) é a menor relação de equivalência que contém R.

Suponha uma relação de equivalência S qualquer tal que R $\subset$ S

$$
\begin{aligned}
R \subset S &\implies r(R) \subset S && (\text{S já é reflexiva})\\
&\implies sr(R) \subset S && (\text{S já é simétrica})\\
&\implies tsr(R) \subset S && (\text{S já é transitiva})
\end{aligned}
$$

Concluindo, tsr(R) sempre estará contida em uma relação de equivalência que contém R, ou seja, é a menor possível.

□

4. Prove o corolário: Seja R uma relação sobre A, então $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots R^n$, se A é finito, com n elementos.

Demonstração. Seja R uma relação sobre A, apliquemos indução sobre n.

Passo Base: $n = 1$.
Seja $|A| = 1$, A apenas possui um elemento.
As únicas relações possíveis sobre A são $\varnothing$ ou $\{(a,a)\}$. Em ambos os casos, não existe cadeia $(x,y),(y,z) \in R$ com $x \neq z$ capaz de gerar um par novo, logo, R já é transitiva por vacuidade e t(R) = R.

Ou seja, Vale a base.
Passo Indutivo:
Hipótese Indutiva:
$|A| = k \implies t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots R^k$

Queremos provar que:
$|A| = k+1 \implies t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots R^k \cup R^{k+1}$
A partir da hipótese, tome o seguinte:

$$\begin{aligned} |A| = k &\implies t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k && (4)\\ &\implies t(R)\ o\ R = (R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k)\ o\ R && (5)\\ &\implies t(R)\ o\ R = (R^1\ o\ R) \cup (R^2 o\ R) \cup \ldots \cup (R^k o\ R) && \text{(Distrib.)}\\ &\implies t(R)\ o\ R = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^{k+1} && (6) \end{aligned}$$

E pelo passo base, um elemento equivale a R. ($|A| = 1 \implies t(R) = R$)
Assim, adicionando um elemento a A, teremos que:
$|A| = k+1 \implies (R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots R^k \cup R^{k+1}$

E está provado.

□