FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

9,5

24 de outubro de 2025

1. Prove (usando argumentos de validade [interpretações e modelos/contramodelos]) que:

a. Uma fbf é válida se e somente se o seu fecho universal for válido

$(\implies)$

Seja W uma fbf válida e I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned} W \text{ válida} &\iff \forall I, \underline{I \models W} && \text{(Def. Val.)} \\ &\implies \forall a_1, ..., a_n, I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W && \text{(Semântica } \forall x) \\ &\iff \forall I, I \models \forall x_1 ... \forall x_n W && \text{(Def. fecho universal)} \\ &\implies \text{Fecho universal válido} \end{aligned}$$

o que isso significa? Precisa def.

$(\impliedby)$

Seja W uma fbf qualquer e seja $\forall x W$ o seu fecho universal, que é válido. Além disso, seja I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned} \forall x W \text{ válido} &\iff \forall a_1, ..., a_n, I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W && \text{(Def.)} \\ &\implies \forall I, I \models W && \text{(Semântica } \forall x) \\ &\iff W \text{é válido} && \text{(Def. Val.)} \end{aligned}$$

b. Uma fbf é insatisfatória se e somente se o seu fecho existencial for insatisfatório $(\implies)$

Seja W uma fbf insatisfatória e I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned} W \text{ insatisfatória} &\iff \nexists I, I \models W && \text{(Def. Insatisfatório)} \\ &\implies \nexists a_1, ..., a_n \text{ tal que } I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W && (\nexists) \\ &\iff \nexists I, I \models \exists x_1 ... \exists x_n W && \text{(Def. fecho existencial)} \\ &\implies \text{Fecho existencial insatisfatório} \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$)
Seja W uma fbf qualquer e seja $\exists xW$ o seu fecho existencial, que é insatisfatório. Além disso, seja I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned}
\exists xW \text{ insatisfatório} &\Longleftrightarrow \nexists I, I \models \exists x_1 ... \exists x_n W && \text{(Def. insatisfatório)} \\
&\Longrightarrow \nexists a_1, ..., a_n \text{ tal que } I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] && (\nexists) \\
&\Longleftrightarrow \text{W insatisfatória} && \text{(Def. insatisfatório)}
\end{aligned}$$

2. Use equivalências para construir uma forma normal conjuntiva prenexa e uma forma disjuntiva prenexa para cada uma das seguintes fbfs.

a) $\forall x(p(x) \lor q(x)) \to \forall xp(x) \lor \forall xq(x)$

$$\begin{aligned}
\forall x(p(x) \lor q(x)) \to \forall xp(x) \lor \forall xq(x) &\equiv && \\
\forall x(p(x) \lor q(x)) \to \forall yp(y) \lor \forall zq(z) &\equiv && \text{Renom.} \\
\neg\forall x(p(x) \lor q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) &\equiv && \text{Rem. } \to \\
\exists x\neg(p(x) \lor q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) &\equiv && \neg\forall \\
\exists x(\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) &\equiv && \neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \\
\exists x((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z)) &\equiv && \\
\exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor \forall zq(z)) &\equiv && \\
\exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) &\equiv &&
\end{aligned}$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\begin{aligned}
\exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) &\equiv \\
\exists x\forall y\forall z(\neg p(x) \lor p(y) \lor q(z)) \land (\neg q(x) \lor p(y) \lor q(z))&
\end{aligned}$$

b) $\exists xp(x) \land \exists xq(x) \to \exists x(p(x) \land q(x))$

$$
\begin{aligned}
\exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \to \exists x(p(x) \wedge p(x)) &\equiv \\
\exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \to \exists z(p(z) \wedge p(z)) &\equiv && \text{Renom.} \\
\neg(\exists p(x) \wedge \exists y q(y)) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) &\equiv && \text{Rem. } \to \\
\neg\exists p(x) \vee \neg\exists y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) &\equiv \\
\forall x \neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) &\equiv \\
\forall x(\neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z))) &\equiv \\
\forall x(\neg p(x) \vee \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z))) &\equiv \\
\forall x \forall y \exists z(\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z)))
\end{aligned}
$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y \exists z(\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z))) &\equiv \\
\forall x \forall y \exists z((\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee p(z)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee q(z)))
\end{aligned}
$$

c) $\forall x, \exists y, p(x,y) \to \exists y, \forall x, , p(x,y)$

$$
\begin{aligned}
&\forall x, \exists y, p(x,y) \to \exists y, \forall x, p(x,y) \equiv \\
&\forall x, \exists y, p(x,y) \to \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv && [\text{Renom.}] \\
&\neg\forall x, \exists y, p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv && [\text{Remove } \to] \\
&\exists x, \neg\exists y, p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv && [(\neg\forall x\ W) \equiv \exists x\ \neg W] \\
&\exists x, \forall y, \neg p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv && [\neg\exists y\ W \equiv \forall y\ \neg W] \\
&\exists x, \forall y(\neg p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv && [\text{Move } \forall y] \\
&\exists x, \forall y, \exists w, \forall z(\neg p(x,y) \vee p(w,z)) && [\text{Move } \exists w \text{ e } \forall z]
\end{aligned}
$$

A forma que encontramos está tanto na forma normal disjuntiva prenexa quanto na forma normal conjuntiva prenexa.