FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro — José Ivo — Marina Leite

24 de outubro de 2025

- 1. Prove (usando argumentos de validade [interpretações e modelos/contramodelos]) que:
- a. Uma fbf é válida se e somente se o seu fecho universal for válido (\Longrightarrow)

Seja W uma fbf válida e I uma interpretação qualquer.

$$W$$
 válida $\iff \forall I, I \models W$ (Def. Val.)
 $\implies \forall a_1, ..., a_n, I[x_1 \rightarrow a_1, ..., x_n \rightarrow a_n] \models W$ (Semântica $\forall x$)
 $\iff \forall I, I \models \forall x_1 ... \forall x_n W$ (Def. fecho universal)
 \implies Fecho universal válido

 (\Leftarrow)

Seja W uma fbf qualquer e seja $\forall xW$ o seu fecho universal, que é válido. Além disso, seja I uma interpretação qualquer.

$$\forall x W \text{ válido} \iff \forall a_1, ..., a_n, I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W$$
 (Def.)
 $\implies \forall I, I \models W$ (Semântica $\forall x$)
 $\iff W \text{ válido}$ (Def. Val.)

b. Uma fbf é insatisfatória se e somente se o seu fecho existencial for insatisfatório (\Longrightarrow)

Seja W uma f
bf insatisfatória e I uma interpretação qualquer.

$$W$$
 insatisfatória $\iff \exists I, I \models W$ (Def. Insatisfatório)
 $\implies \exists a_1, ..., a_n \text{ tal que } I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W \quad (\exists)$
 $\iff \exists I, I \models \exists x_1 ... \exists x_n W$ (Def. fecho existencial)
 $\implies \text{Fecho existencial insatisfatório}$

 (\iff)

Seja W uma fbf qualquer e seja $\exists xW$ o seu fecho existencial, que é insatisfatório. Além disso, seja I uma interpretação qualquer.

$$\exists x W$$
 insatisfatório $\iff \not\exists I, I \models \exists x_1 ... \exists x_n W$ (Def. insatisfatório) $\Longrightarrow \not\exists a_1, ..., a_n \text{ tal que } I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n]$ ($\not\exists$) \iff W insatisfatória (Def. insatisfatório)

2. Use equivalëncias para construir uma forma normal conjuntiva prenexa e uma forma disjuntiva prenexa para cada uma das seguintes fbfs.

a)
$$\forall x (p(x) \lor q(x)) \to \forall x p(x) \lor \forall x q(x)$$

$$\forall x(p(x) \lor q(x)) \rightarrow \forall xp(x) \lor \forall xq(x) \equiv \\ \forall x(p(x) \lor q(x)) \rightarrow \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv \\ \neg \forall x(p(x) \lor q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv \\ \exists x\neg (p(x) \lor q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv \\ \exists x(\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z) \equiv \\ \exists x((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor \forall yp(y) \lor \forall zq(z)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor \forall zq(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y\forall z((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(x)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(x)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(x)) \equiv \\ \exists x\forall y((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(x)) \equiv x((\neg p(x) \lor \neg q(x)) \lor x((\neg p(x)$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\exists x \forall y \forall z ((\neg p(x) \land \neg q(x)) \lor p(y) \lor q(z)) \equiv \\ \exists x \forall y \forall z (\neg p(x) \lor p(y) \lor q(z)) \land (\neg q(x) \lor p(y) \lor q(z))$$

b)
$$\exists x p(x) \land \exists x q(x) \rightarrow \exists x (p(x) \land q(x))$$

$$\exists x p(x) \land \exists y q(y) \rightarrow \exists x (p(x) \land p(x)) \equiv$$

$$\exists x p(x) \land \exists y q(y) \rightarrow \exists z (p(z) \land p(z)) \equiv$$

$$\neg (\exists p(x) \land \exists y q(y)) \lor \exists z (p(z) \land q(z)) \equiv$$

$$\neg \exists p(x) \lor \neg \exists y q(y) \lor \exists z (p(z) \land q(z)) \equiv$$

$$\forall x \neg p(x) \lor \forall y \neg y q(y) \lor \exists z (p(z) \land q(z)) \equiv$$

$$\forall x (\neg p(x) \lor \forall y \neg y q(y) \lor \exists z (p(z) \land q(z))) \equiv$$

$$\forall x (\neg p(x) \lor \neg y q(y) \lor \exists z (p(z) \land q(z))) \equiv$$

$$\forall x \forall y \exists z (\neg p(x) \lor \neg q(y) \lor (p(z) \land q(z)))$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\forall x \forall y \exists z (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z))) \equiv \\ \forall x \forall y \exists z ((\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee p(z)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee q(z)))$$

c)
$$\forall x, \exists y, p(x,y) \rightarrow \exists y, \forall x, p(x,y)$$

$$\forall x, \exists y, p(x,y) \rightarrow \exists y, \forall x, p(x,y) \equiv \\ \forall x, \exists y, p(x,y) \rightarrow \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv \\ \neg \forall x, \exists y, p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv \\ \exists x, \neg \exists y, p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv \\ \exists x, \forall y, \neg p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv \\ \exists x, \forall y, \neg p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv \\ \exists x, \forall y, \neg p(x,y) \vee \exists w, \forall z, p(w,z) \equiv \\ \exists x, \forall y, \exists w, \forall z, p(x,y) \vee p(x,z) \}$$
 [Move $\forall y$]
$$\exists x, \forall y, \exists w, \forall z, p(x,y) \vee p(x,z) \}$$
 [Move $\exists w \in \forall z$]

A forma que encontramos está tanto na forma normal disjuntiva prenexa quanto na forma normal conjuntiva prenexa.