FMC III - Trabalho 5

Alexandre Ribeiro   José Ivo   Marina Leite

25 de setembro de 2025

1. Mostre que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial

Mostraremos que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A tem as seguintes propriedades: reflexividade, transitividade e antissimetria.
Para facilitar a organização, considere que **"TFQ"** significa "é pelo menos tão fina quanto".

(i) Reflexividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$ uma partição de A.

$$\begin{aligned} P_i \subseteq P_i &\Longrightarrow \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq P_j \qquad (j = i) \\ &\Longrightarrow \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i\in I} \end{aligned}$$

Logo, a relação é reflexiva.

(ii) Transitividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$, $\{Q_j\}_{j\in J}$, $\{S_k\}_{k\in K}$ partições de A, tais que:
$\{P_i\}_{i\in I}$ é tão fina quanto $\{Q_j\}_{j\in J}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$ é tão fina quanto $\{S_k\}_{k\in K}$.

$$\begin{aligned} \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j\in J} \ \land\ \{Q_j\}_{j\in J} \text{ TFQ } \{S_k\}_{k\in K} &\Longrightarrow \forall i \in I, \exists j \in J,\ P_i \subseteq Q_j \\ &\quad\ \land\ \forall j \in J, \exists k \in K,\ Q_j \subseteq S_k \\ &\Longrightarrow \forall i \in I, \exists k \in K,\ P_i \subseteq S_k \\ &\quad\ (\text{Transitividade de } \subseteq) \end{aligned}$$

Logo, a relação é transitiva.

(iii) Antissimetria: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i\in I}$ e $\{Q_j\}_{j\in J}$ partições de A.

$$\text{(i)} \quad \{P_i\}_{i\in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j\in J} \Longrightarrow \forall i \in I, \exists j \in J,\ P_i \subseteq Q_j$$

$$\text{(ii)} \quad \{Q_j\}_{j\in J} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i\in I} \implies \forall j \in J, \exists i \in I,\ Q_j \subseteq P_i$$

Logo, de (i) e (ii), temos $\{P_i\}_{i\in I} = \{Q_j\}_{j\in J}$. Com isso, temos que a relação é antissimétrica.

Portanto, a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial

2. Mostre que a relação de identidade sobre um conjutno não vazio A é a única ordem parcial de A que também é uma relação de equivalência.

Demonstração. Suponha que R é uma ordem parcial e de equivalência de A. Se $a \neq b$:

$$\begin{aligned} (a,b) \in R &\implies (b,a) \in R && \text{(Simetria)} \\ &\implies a = b && \text{(Antissimetria)} \end{aligned}$$

Aqui, chegamos a um absurdo. Logo, se $a \neq b$, $(a,b) \notin R$.
Ou seja, $R = I_{dA}$ □

1 Desenvolvimento

Aqui vai o texto do desenvolvimento, escrito pelo colega 2.

2 Conclusão

Aqui vai o texto da conclusão, escrito pelo colega 3. s