

FMC III - Trabalho 5

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

26 de setembro de 2025

1. Mostre que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial

Mostraremos que a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A tem as seguintes propriedades: reflexividade, transitividade e antissimetria.

Para facilitar a organização, considere que "**TFQ**" significa "é pelo menos tão fina quanto".

(i) Reflexividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i \in I}$ uma partição de A.

$$\begin{aligned} P_i \subseteq P_i &\implies \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq P_j & (j = i) \\ &\implies \{P_i\}_{i \in I} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i \in I} \end{aligned}$$

Logo, a relação é reflexiva.

(ii) Transitividade: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i \in I}$, $\{Q_j\}_{j \in J}$, $\{S_k\}_{k \in K}$ partições de A, tais que $\{P_i\}_{i \in I}$ é tão fina quanto $\{Q_j\}_{j \in J}$ e $\{Q_j\}_{j \in J}$ é tão fina quanto $\{S_k\}_{k \in K}$.

$$\begin{aligned} \{P_i\}_{i \in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j \in J} \wedge \{Q_j\}_{j \in J} \text{ TFQ } \{S_k\}_{k \in K} &\implies \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq Q_j \\ &\quad \wedge \forall j \in J, \exists k \in K, Q_j \subseteq S_k \\ &\implies \forall i \in I, \exists k \in K, P_i \subseteq S_k \\ &\quad (\text{Transitividade de } \subseteq) \end{aligned}$$

Logo, a relação é transitiva.

(iii) Antissimetria: Seja A um conjunto e $\{P_i\}_{i \in I}$ e $\{Q_j\}_{j \in J}$ partições de A.

$$(i) \quad \{P_i\}_{i \in I} \text{ TFQ } \{Q_j\}_{j \in J} \implies \forall i \in I, \exists j \in J, P_i \subseteq Q_j$$

$$(ii) \quad \{Q_j\}_{j \in J} \text{ TFQ } \{P_i\}_{i \in I} \implies \forall j \in J, \exists i \in I, Q_j \subseteq P_i$$

Logo, de (i) e (ii), temos $\{P_i\}_{i \in I} = \{Q_j\}_{j \in J}$. Com isso, temos que a relação é antissimétrica.

Portanto, a relação de 'ser pelo menos tão fina quanto' entre as partições de um conjunto A é uma ordem parcial.

2. Mostre que a relação de identidade sobre um conjutno não vazio A é a única ordem parcial de A que também é uma relação de equivalência.

Já mostramos no trab. 3 que I_{dA} é de equiv. falta mostrar que é ord. parcial.

Demonstração. Suponha que R é uma ordem parcial e de equivalência de A. Se $a \neq b$:

$$\begin{aligned} (a, b) \in R &\implies (b, a) \in R && (\text{Simetria}) \\ &\implies a = b && (\text{Antissimetria}) \end{aligned}$$

Aqui, chegamos a um absurdo. Logo, se $a \neq b$, $(a, b) \notin R$. Ou seja, $R = I_{dA}$. \square

3. Sejam as seguintes definições:

Definição 1 (conjunto bem fundado): seja W qualquer conjunto e $<$ qualquer relação irreflexiva e transitiva sobre W (atenção: não estamos exigindo linearidade, ou seja, que a relação também seja completa). Dizemos que W é bem fundado por $<$ se todo subconjunto não vazio $A \subset W$ tiver pelo menos um elemento minimal.

Definição 2 (conjunto bem fundado): seja W qualquer conjunto e $<$ qualquer relação irreflexiva e transitiva sobre W. Então, W é bem fundamentado por $<$ se não houver encadeamento descendente infinito $\dots < a_2 < a_1 < a_0$ de elementos de W.

Demonstre que as definições são equivalentes.

Demonstração. Seja W um conjunto qualquer e $<$ uma relação qualquer irreflexiva e transitiva sobre W. A partir disso, temos que.

1. $\forall a \in W, (a, a) \notin <$
2. $\forall a, b, c \in W, (a, b) \in < \text{ e } (b, c) \in < \implies (a, c) \in <$

Agora, vamos demonstrar a equivalência entre as definições.

Definição 1 \implies Definição 2

Suponha por absurdo que existe um encadeamento descendente infinito sobre W. Isto é: $a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < a_0$.

E Seja A um subconjunto de W definidos como: $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Pela hipótese:

$$\begin{aligned} \forall a_n \in A \subset W, \exists a_{n+1} \text{ tal que } a_{n+1} < a_n &\iff \neg(\exists a_{n+1}, a_{n+1} < a_n) \quad (1)? \\ &\implies \text{Não existe minimal} \\ &\qquad\qquad\qquad (\text{Contradição}) \end{aligned}$$

A hipótese quebra a definição 1, logo, ela está errada e não existe sequência infinita decrescente.

Definição 2 \implies Definição 1

Não existe sequência decrescente $a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < a_0$

Suponha por absurdo que não existe minimal em um subconjunto da relação, isto é: $\forall A \subset W, \exists x \in A$, x minimal.

$$\begin{aligned} A \subset W, \exists x \in A, x \text{ minimal} &\implies \neg(\forall y \in A, y \not< x) \quad (\text{Neg. def.}) \\ &\implies (\exists y \in A, y < x) \quad (2)? \\ &\implies (\exists y \in A, y < a_0) \quad (x = a_0) \\ &\implies a_0 \text{ Não é minimal} \quad (3)? \\ &\implies (\exists a_1 \in A, a_1 < a_0) \quad (x = a_1) \\ &\implies a_1 \text{ Não é minimal} \quad (4)? \\ &\implies a_{n+1} < a_n \quad (\text{Repetindo Recursivamente}) \\ &\implies a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1 < a_0 \quad (5) \end{aligned}$$

Contudo, isso é uma contradição, pela definição 2, essa sequência não existe. Logo, a suposição estava errada e existe pelo menos um minimal em um subconjunto da relação. \square

4. O conjunto vazio é bem fundado na relação vazia? Demonstre

Demonstração. Seja $W = \emptyset$ e $<$ uma relação vazia sobre W.

Por vacuidade, sabemos que $<$ é irreflexiva

$$\forall a \in \emptyset \rightarrow (a, a) \notin < \implies \forall a \in \emptyset, (a, a) \notin < \quad \forall a \in \emptyset, (a, a) \notin < \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall a, a \in \emptyset \rightarrow (a, a) \notin <$$

Por vacuidade, sabemos que $<$ é transitiva

$$\forall a, b, c \in \emptyset \rightarrow (a, b) \in < \text{ e } (b, c) \in < \implies (a, c) \in < \quad \text{erro análogo!}$$

A partir da definição 1, prova-se por vacuidade:

$\forall A \subset \emptyset, A \neq \emptyset \implies \exists x \in A \text{ minimal} \implies < \text{é bem fundada}$

Logo a definição 1 é válida

A partir da definição 2:

Suponha que existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$, tal que $a_{n+1} < a_n \implies a_n \in W$

Contudo, isso é uma contradição, pois $W = \emptyset \implies \forall x \in \emptyset$

Logo, não existe sequência infinita decrescente no vazio, e a relação é bem fundada.

□

5. Mostre que todo conjunto finito A é bem fundado sob qualquer reação transitiva e irreflexiva sobre ele

Demonstração. Seja A finito e R transitiva e irreflexiva sobre A:

Suponha por absurdo que A não é bem fundado sob R.

Seja S uma sequência infinita decrescente $S = (s_1, s_2, \dots, s_i)$

$\exists(s_i) : s_{i+1}Rs_i \implies \exists j > k : s_j = s_k \quad (A \text{ finito, princípio da casa dos pombos})$

$\implies s_jRs_k \quad (\text{pela transitividade na cadeia } s_jRs_{j-1}\cdots Rs_k)$

$\implies s_jRs_j \quad (\text{pois } s_j = s_k)$

$\implies \text{contradição} \quad (\text{irreflexividade de } R).$

Portanto, A é bem fundado.

□

6. Seja A qualquer conjunto finito. Mostre que seu conjunto de potências $\mathcal{P}(A)$ está bem fundado na relação de inclusão apropriada de conjunto. (0,4)

Demonstração. Seja S = (A_i) cadeia descendente em $\mathcal{P}(A)$:

$A_{i+1} \subset A_i \implies |A_{i+1}| < |A_i| \quad (\text{Def. Cardinalidade}) \text{--- precisa provar!}$

$\implies |A| > \dots > |A_2| > |A_1| \geq 0 \quad (\text{Def. P}) \text{--- precisa provar!}$

$\implies \text{sequência finita} \quad (\text{Começa em A e termina em } \emptyset).$

Logo, $\mathcal{P}(A)$ é bem fundado sob \subset .

□