FMC III - Trabalho 10

Alexandre Ribeiro   José Ivo   Marina Leite

21 de novembro de 2025

1. Dê uma prova formal de $A \to B$, em que A e B são definidos como segue:

$A = \exists x\big(r(x) \land \forall y\big(p(y) \to q(x,y)\big)\big) \ \land \ \forall x\big(r(x) \to \forall y\big(s(y) \to \neg q(x,y)\big)\big)$

$B = \forall x\big(p(x) \to \neg s(x)\big)$

1.$\exists x(r(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow q(x,y)))$	P
2.$\forall x(r(x) \rightarrow \forall y(s(y) \rightarrow \neg q(x,y)))$	P
3.$r(c) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow q(c,y))$	1, IE
4.$\forall y(p(y) \rightarrow q(c,y))$	3, Simp.
5.$p(y) \rightarrow q(c,y)$	4, IU
6.$r(c) \rightarrow \forall y(s(y) \rightarrow \neg q(c,y))$	2, IU
7. $r(c)$	P (Para $s(y) \rightarrow \neg q(c,y)$)
8. $\forall y(s(y) \rightarrow \neg q(c,y))$	6, 7 MP
9.$s(y) \rightarrow \neg q(c,y)$	8, IU
10. $p(y)$	P (Para $q(c,y)$)
11.$q(c,y)$	5, 10, MP
12. $s(y)$	P (Para obter contradição)
13. $\neg q(c,y)$	9, 12, MP
14. $Falso$	11, 13, Contr.
15.$\neg s(y)$	$12-14, PI$
16.$p(y) \rightarrow \neg s(y)$	$10-15, PC$
17.$\forall y(p(y) \rightarrow \neg s(y))$	$10-15, PC$
18.$\forall x(p(x) \rightarrow \neg s(x))$	$17, Subs.$

QED

2. Prove que a regra de prova do cálculo proposicional Silogismo Hipotético pode ser usada no cálculo de predicado.

Assumimos que as premissas $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$ são fbfs válidas.

Devemos mostrar que $A \rightarrow C$ também é uma fbf válida

Suponha que temos uma interpretação I arbitrária sobre um domínio D

Assim, segue-se que $A \rightarrow B$ é verdadeiro com respeito à interpretação I e $B \rightarrow C$ é verdadeiro com respeito à interpretação I

Portanto, usando a fbf de predicado como instância de fbf proposicional, temos as seguintes premissas verdadeiras:

Valor verdade de A $\rightarrow$ Valor verdade de B

Valor verdade de B → Valor verdade de C

Como sabemos que o Silogismo Hipotético é uma tautologia, podemos concluir que:

Valor verdade de A → Valor verdade de C

E portanto a fórmula $A \rightarrow C$ é verdadeira com respeito à interpretação I dada sobre D

Portanto, o Silogismo Hipotético pode ser usado no cálculo de predicado.

3. Uma relação arbitrária que é irreflexiva e transitiva também é assimétrica. Dê uma prova formal da afirmação, considerando que as seguintes fbf representam as três propriedades:

$$\text{Irreflexiva: } \forall x \ \neg p(x,x) \tag{1}$$

$$\text{Transitiva: } \forall x, \forall y, \forall z, \ (p(x,y) \wedge p(y,z) \rightarrow p(x,z)) \tag{2}$$

$$\text{Assimétrica: } \forall x, \forall y, \ (p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x)) \tag{3}$$

1.	$\forall x \ \neg p(x,x)$	P (Irreflexiva)
2.	$\forall x \forall y \forall z \ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$	P (Transitiva)
3.	$p(a,b)$	Suposição (para PC), a, b arbitrários
4.	$p(b,a)$	Suposição (para PI)
5.	$p(a,b) \wedge p(b,a)$	3, 4, Adj.
6.	$(p(a,b) \wedge p(b,a)) \rightarrow p(a,a)$	2, IU (x=a, y=b, z=a)
7.	$p(a,a)$	5, 6, MP
8.	$\neg p(a,a)$	1, IU (x=a)
9.	$p(a,a) \wedge \neg p(a,a)$	7, 8, Adj. (Contradição)
10.	$\neg p(b,a)$	4-9, PI
11.	$p(a,b) \rightarrow \neg p(b,a)$	3-10, PC
12.	$\forall x \forall y \ (p(x,y) \rightarrow \neg p(y,x))$	11, GU (pois a, b são arbitrários)

QED

4. Prove o Teorema da Dedução para o cálculo de predicado.

O Teorema da Dedução pode ser definido da seguinte forma:

$$\text{Se } \Gamma, A \vdash B, \text{ então } \Gamma \vdash A \to B$$

Para provar, façamos uma prova por indução sob o comprimento n do cálculo lógico.
1. Caso Base ($n = 1$)
No caso base, B é a primeira linha da prova de $\Gamma, A \vdash B$. Há duas possibilidades:
1. $B \in \Gamma$
2. B é a premissa A.
Façamos uma demonstração por casos:

Caso 1: $B \in \Gamma$ **(ou** B **é um Axioma)**

$1.\Gamma \vdash B$	P
$2.\Gamma \vdash B \to (A \to B)$	Axioma
$3.\Gamma \vdash A \to B$	1, 2, MP
QED	

Caso 2: B **é a premissa** A

$1.\Gamma \vdash A \to A$	Tautologia
$2.\Gamma \vdash A \to B$	B = A
QED	

Com isso, tem-se que a base é válida.
2. Passo Indutivo
Hipótese indutiva: O teorema é válido para todo $k < n$
Novamente, temos duas possibilidades sobre como B foi derivado:
1. Modus Ponens (MP).
2. Generalização Universal (GU).
Novamente, façamos uma demonstração por casos:

Modus Ponens

B é derivada de C e $C \to B$ por MP.

$1.\Gamma \vdash A \to C$	HI
$2.\Gamma \vdash A \to (C \to B)$	HI
$3.\Gamma \vdash (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$	Axioma
$4.\Gamma \vdash (A \to C) \to (A \to B)$	2, 3, MP
$5.\Gamma \vdash A \to B$	1, 4, MP
QED	

Generalização Universal

$B = \forall x C$ é derivada de C por GU (assumindo que x não é livre em A ou em Γ). A dedução de C a partir de Γ, A tem comprimento $< n$.

$1.\Gamma \vdash A \to C$	HI
$2.\Gamma \vdash \forall x(A \to C)$	1, GU
$3.\Gamma \vdash \forall x(A \to C) \to (A \to \forall x C)$	Axioma
$4.\Gamma \vdash A \to \forall x C$	2, 3, MP
$5.\Gamma \vdash A \to B$	4, Substituição ($B = \forall x C$)
QED	

Assim, prova-se o teorema da dedução.

5. Prove formalmente que:

$\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow (x \equiv y))) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall x \forall y(A(x) \wedge A(y) \rightarrow (x = y))$

($\Longrightarrow$)

1.	$\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow (x = y)))$	P
2.	$A(c) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow (c = y))$	1, IE
3.	$A(c)$	2,Simp
4.	$\exists x A(x)$	3, GE
5.	$\forall y(A(y) \rightarrow (c = y))$	2, Simp
6.	$\quad A(u) \wedge A(v)$	P (Subprova para $A(u) \wedge A(v) \rightarrow u = v$)
7.	$\quad A(u)$	6,Simp
8.	$\quad A(v)$	6,Simp
9.	$\quad A(u) \rightarrow (c = u)$	5, IU
10.	$\quad A(v) \rightarrow (c = v)$	5, IU
11.	$\quad c = u$	7,9,MP
12.	$\quad c = v$	8,10, MP
13.	$\quad u = c$	11, Simetria
14.	$\quad u = v$	12,13, Transitividade
15.	$A(u) \wedge A(v) \rightarrow u = v$	6-14, PC
16.	$\forall y(A(u) \wedge A(y) \rightarrow u = y)$	15, GU
17.	$\forall x \forall y(A(x) \wedge A(y) \rightarrow x = y)$	16,GU
18.	$\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y(A(x) \wedge A(y) \rightarrow x = y)$	4,17, Conj
19.	$\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow (x = y))) \rightarrow (\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y(A(x) \wedge A(y) \rightarrow (x = y)))$	1-18,PC

QED

$(\Longleftarrow)$

1.	$\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \rightarrow (x = y))$	P
2.	$\exists x A(x)$	1,Simp
3.	$\forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \rightarrow (x = y))$	1, Simp
4.	$A(c)$	2, IE
5.	$\quad A(d)$	P (para $A(d) \rightarrow c = d$)
6.	$\quad \forall y (A(c) \wedge A(y) \rightarrow c = y)$	3,IU
7.	$\quad A(c) \wedge A(d) \rightarrow c = d$	6,IU
8.	$\quad A(c) \wedge A(d)$	4,5 Conj
9.	$\quad c = d$	7,8, MP
10.	$A(d) \rightarrow c = d$	5-9, PC
11.	$\forall y (A(y) \rightarrow c = y)$	10, GU
12.	$A(c) \wedge \forall y (A(y) \rightarrow c = y)$	4,11,Conj
13.	$\exists x (A(x) \wedge \forall y (A(y) \rightarrow x = y))$	12, GE
14.	$(\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \rightarrow (x = y))) \rightarrow \exists x (A(x) \wedge \forall y (A(y) \rightarrow (x = y)))$	1-13, PC

QED