FMC III - Trabalho 8

Alexandre Ribeiro José Ivo Marina Leite

24 de outubro de 2025

1. Prove (usando argumentos de validade [interpretações e modelos/contramodelos]) que:

a. Uma fbf é válida se e somente se o seu fecho universal for válido

$(\Longrightarrow)$

Seja W uma fbf válida e I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned}
W \text{ válida} &\Longleftrightarrow \forall I, I \models W && \text{(Def. Val.)}\\
&\Longrightarrow \forall a_1, ..., a_n, I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W && \text{(Semântica } \forall x)\\
&\Longleftrightarrow \forall I, I \models \forall x_1 ... \forall x_n W && \text{(Def. fecho universal)}\\
&\Longrightarrow \text{Fecho universal válido}
\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$

Seja W uma fbf qualquer e seja $\forall x W$ o seu fecho universal, que é válido. Além disso, seja I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned}
\forall x W \text{ válido} &\Longleftrightarrow \forall a_1, ..., a_n, I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W && \text{(Def.)}\\
&\Longrightarrow \forall I, I \models W && \text{(Semântica } \forall x)\\
&\Longleftrightarrow W \text{é válido} && \text{(Def. Val.)}
\end{aligned}$$

b. Uma fbf é insatisfatória se e somente se o seu fecho existencial for insatisfatório $(\Longrightarrow)$

Seja W uma fbf insatisfatória e I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned}
W \text{ insatisfatória} &\Longleftrightarrow \nexists I, I \models W && \text{(Def. Insatisfatório)}\\
&\Longrightarrow \nexists a_1, ..., a_n \text{ tal que } I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] \models W && (\nexists)\\
&\Longleftrightarrow \nexists I, I \models \exists x_1 ... \exists x_n W && \text{(Def. fecho existencial)}\\
&\Longrightarrow \text{Fecho existencial insatisfatório}
\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$

Seja W uma fbf qualquer e seja $\exists x W$ o seu fecho existencial, que é insatisfatório. Além disso, seja I uma interpretação qualquer.

$$\begin{aligned} \exists x W \text{ insatisfatório} &\Longleftrightarrow \nexists I, I \models \exists x_1 ... \exists x_n W && \text{(Def. insatisfatório)} \\ &\Longrightarrow \nexists a_1, ..., a_n \text{ tal que } I[x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n] && (\nexists) \\ &\Longleftrightarrow \text{W insatisfatória} && \text{(Def. insatisfatório)} \end{aligned}$$

2. Use equivalências para construir uma forma normal conjuntiva prenexa e uma forma disjuntiva prenexa para cada uma das seguintes fbfs.

a) $\forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$

$$\begin{aligned} \forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall x p(x) \vee \forall x q(x) &\equiv \\ \forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \text{Renom.} \\ \neg \forall x(p(x) \vee q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \text{Rem. } \to \\ \exists x \neg (p(x) \vee q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \neg \forall \\ \exists x(\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z) &\equiv && \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \\ \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee \forall y p(y) \vee \forall z q(z)) &\equiv \\ \exists x \forall y((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee \forall z q(z)) &\equiv \\ \exists x \forall y \forall z((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee q(z)) &\equiv \end{aligned}$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$\begin{aligned} \exists x \forall y \forall z((\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee p(y) \vee q(z)) &\equiv \\ \exists x \forall y \forall z(\neg p(x) \vee p(y) \vee q(z)) \wedge (\neg q(x) \vee p(y) \vee q(z)) \end{aligned}$$

b) $\exists x p(x) \wedge \exists x q(x) \to \exists x(p(x) \wedge q(x))$

$$
\begin{aligned}
\exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \rightarrow \exists x(p(x) \wedge p(x)) &\equiv & \\
\exists x p(x) \wedge \exists y q(y) \rightarrow \exists z(p(z) \wedge p(z)) &\equiv & \text{Renom.} \\
\neg(\exists p(x) \wedge \exists y q(y)) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) &\equiv & \text{Rem. } \rightarrow \\
\neg\exists p(x) \vee \neg\exists y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) &\equiv & \\
\forall x \neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z)) &\equiv & \\
\forall x(\neg p(x) \vee \forall y \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z))) &\equiv & \\
\forall x(\neg p(x) \vee \neg y q(y) \vee \exists z(p(z) \wedge q(z))) &\equiv & \\
\forall x \forall y \exists z(\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z))) & &
\end{aligned}
$$

A fbf que encontramos já está na forma normal disjuntiva prenexa. Agora, encontraremos a forma normal conjuntiva prenexa.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y \exists z(\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee (p(z) \wedge q(z))) &\equiv \\
\forall x \forall y \exists z((\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee p(z)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg q(y) \vee q(z)))
\end{aligned}
$$

c) $\forall x, \exists y, p(x, y) \rightarrow \exists y, \forall x, , p(x, y)$

$$
\begin{aligned}
&\forall x, \exists y, p(x, y) \rightarrow \exists y, \forall x, p(x, y) \equiv & \\
&\forall x, \exists y, p(x, y) \rightarrow \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\text{Renom.}] \\
&\neg\forall x, \exists y, p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\text{Remove } \rightarrow] \\
&\exists x, \neg\exists y, p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [(\neg\forall x\ W) \equiv \exists x\ \neg W] \\
&\exists x, \forall y, \neg p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\neg\exists y\ W \equiv \forall y\ \neg W] \\
&\exists x, \forall y(\neg p(x, y) \vee \exists w, \forall z, p(w, z) \equiv & [\text{Move } \forall y] \\
&\exists x, \forall y, \exists w, \forall z(\neg p(x, y) \vee p(w, z)) & [\text{Move } \exists w \text{ e } \forall z]
\end{aligned}
$$

A forma que encontramos está tanto na forma normal disjuntiva prenexa quanto na forma normal conjuntiva prenexa.