

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE  
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: FEI-5384-8739

**PODPISOVÉ SCHÉMY V POSTKVANTOVEJ  
KRYPTOGRAFII  
DIPLOMOVÁ PRÁCA**

**2015**

**Pavol Dobročka**

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY**

Evidenčné číslo: FEI-5384-8739

**PODPISOVÉ SCHÉMY V POSTKVANTOVEJ**  
**KRYPTOGRAFII**  
**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Študijný program: Aplikovaná informatika  
Číslo študijného odboru: 2511  
Názov študijného odboru: 9.2.9 Aplikovaná informatika  
Školiace pracovisko: Ústav informatiky a matematiky  
Vedúci záverečnej práce: doc. Ing. Pavol Zajac, PhD.

**Bratislava 2015**

**Pavol Dobročka**

# SÚHRN

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE  
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Študijný program:	Aplikovaná informatika
Autor:	Pavol Dobročka
Diplomová práca:	Podpisové schémy v postkvantovej kryptografii
Vedúci záverečnej práce:	doc. Ing. Pavol Zajac, PhD.
Miesto a rok predloženia práce:	Bratislava 2015

Abstract SK

Kľúčové slová:

# ABSTRACT

SLOVAK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY IN BRATISLAVA

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND INFORMATION TECHNOLOGY

Study Programme:	Applied Informatics
Author:	Pavol Dobročka
Diploma Thesis:	Signature schemas in postquantum cryptography
Supervisor:	doc. Ing. Pavol Zajac, PhD.
Place and year of submission:	Bratislava 2015

Abstract EN

Keywords:

## Vyhlásenie autora

Podpísaný Pavol Dobročka čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu Podpisové schémy v postkvantovej kryptografii vypracoval na základe poznatkov získaných počas štúdia a informácií z dostupnej literatúry uvedenej v práci.

Vedúcim mojej diplomovej práce bol doc. Ing. Pavol Zajac, PhD.

Bratislava, dňa 22.11.2015

.....

podpis autora

# Pod'akovanie

I would like to express a gratitude to my thesis supervisor.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>1 Úvod do postkvantovej kryptografie</b>	<b>11</b>
1.1 Motivácia . . . . .	11
1.2 Súčasný stav . . . . .	11
<b>2 Code-based kryptografia</b>	<b>12</b>
2.1 Úvod . . . . .	12
2.2 McEliece a Niederreiter . . . . .	12
2.2.1 Porovnanie McEliece a Niederreiter . . . . .	13
<b>3 Code-based podpisové schémy</b>	<b>14</b>
3.1 Úvod . . . . .	14
3.2 Prehľad code-based podpisových schém . . . . .	14
3.3 CFS schéma . . . . .	15
3.3.1 Praktické parametre . . . . .	16
3.3.2 CFS s pôvodným McEliece systémom . . . . .	16
3.4 LDGM podpis . . . . .	16
3.4.1 Ukážkový príklad . . . . .	17
3.5 Porovnanie . . . . .	20
<b>Záver</b>	<b>21</b>
<b>Resumé</b>	<b>22</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>23</b>
<b>Prílohy</b>	<b>I</b>

## Zoznam obrázkov a tabuliek



## **Zoznam skratiek a značiek**

WWW - World Wide Web

## Zoznam algoritmov

1	McEliece - Algoritmus šifrovania . . . . .	12
2	McEliece - Algoritmus dešifrovania . . . . .	13
3	Niederreiter - Algoritmus šifrovania . . . . .	13
4	Niederreiter - Algoritmus dešifrovania . . . . .	13
5	Schéma digitálneho podpisu . . . . .	14
6	Algoritmus podpisovania v CFS . . . . .	15
7	Algoritmus overovania v CFS . . . . .	16
8	Výpočet matice $Q$ . . . . .	16
9	Podpis v LDGM . . . . .	17
10	Overenie v LDGM . . . . .	18

# Úvod

Uvod SK

# 1 Úvod do postkvantovej kryptografie

## 1.1 Motivácia

Preco skumat postkvantovu kryptografiu, aku vyhodu ponukaju...

## 1.2 Súčasný stav

Popis ako sa momentalne používajú, či sa používajú (aký majú podiel).

Velmi stručny opis (prípadne len vymenovanie) toho aké rôzne postkvantové kryptosystémy poznáme (hash-based, code-based..)

## 2 Code-based kryptografia

### 2.1 Úvod

Jednu triedu z postkvantových kryptosystémov tvoria code-based systémy, teda kryptosystémy vychádzajúce z teórie kódovania. Bezpečnosť takýchto systémov je založená na zložitosti takzvaného dekódovacieho problému. V súčasnosti nie je známy algoritmus, ktorý by efektívne dekodoval ľubovoľný kód ako na klasickom, tak aj na kvantovom počítači. Existujú však triedy lineárnych kódov, ktoré efektívne dekódovať vieme. Tento poznatok má kryptografické využitie. Podstata code-based kryptosystémov je skonštruovať kód, ktorý vieme dekódovať a následne tento kód zmodifikovať na kód, ktorý dekódovať nevieme bez toho, aby sme poznali "inverznú" modifikáciu.

### 2.2 McEliece a Niederreiter

Najstarším a pravdepodobne najznámejším code-based kryptosystémom je McEliecov kryptosystém. Jadro systému tvorí kód  $C$  dĺžky  $n$  s dimenziou  $k$  a minimálnou vzdialenosťou  $d \geq 2t + 1$ , kde  $t$  je počet chýb, ktorý vie kód opraviť. Podľa pôvodného návrhu sa používajú Goppove kódy, ku ktorým existuje efektívny dekódovací algoritmus.

Verejný a súkromný kľúč zostrojíme nasledovne. Určíme generujúcu maticu  $G$  s rozmermi  $k \times n$  pre kód  $C$ . Ďalej zvolíme náhodnú binárnu regulárnu maticu  $S$  s rozmermi  $k \times k$  a permutačnú maticu  $P$  s rozmermi  $n \times n$ . Verejný kľúč tvorí matica  $G' = SG P$  a parameter  $t$ . Súkromný kľúč tvoria matice  $S, G, P$ .

---

**Algoritmus 1** McEliece - Algoritmus šifrovania

---

- 1 Správu  $m$  dĺžky  $k$  vynásobíme s verejnou maticou  $G'$ .
  - 2  $c' = mG'$
  - 3 Ku zakódovanej správe pripočítame náhodný chybový vektor s váhou  $t$ .
  - 4  $c = c' + e, \quad wt(e) = t$
  - 5  $c$  tvorí zašifrovaný text
- 

Pre praktickú bezpečnosť sa hodnoty parametrov kódu volia približne  $n = 1000, k = 500, t = 50$ .

K McEliecovmu kryptosystému existuje varianta, ktorá namiesto generujúcej matice  $G$  využíva kontrolnú maticu  $H$ . Táto duálna forma sa označuje ako Niederreiterov kryptosystém. V tomto kryptosystéme sa správa  $m$  najskôr transformuje na vektor  $m'$  dĺžky  $n$  s Hammingovou váhou  $t$ . Funkciu, ktorá vykonáva túto transformáciu označujeme  $\phi_{n,t}(m)$ . Verejný kľúč tvorí matica  $H' = SH P$  a parameter  $t$ . Matica  $S$  je nahodná reg-

---

**Algoritmus 2** McEliece - Algoritmus dešifrovania

---

```
1 Správu  $c$  vynásobíme s  $\text{inv}(P)$ 
2
3  $c = mG' \text{inv}(P) = mSG + e \cdot \text{inv}(P)$ 
4  $m' = \text{decode}(mSG + e \cdot \text{inv}(P)) = mS;$ 
5  $m = m' \text{inv}(S)$ 
6
7  $m$  tvorí dešifrovanú správu
```

---

ulárna binárna matica s rozmermi  $(n - k) \times (n - k)$  a  $P$  je permutačná matica s rozmermi  $n \times n$  a súkromný kľúč tvoria matice  $S, H, P$ . Šifrovaný text sa vypočíta ako syndróm slova  $m'$ ,  $c = H'm'^T$ . Na dešifrovanie slova  $c$  vlastník súkromného kľúča najskôr vynásobi slovo  $c$  maticou  $S^{-1}$  zľava, následne aplikuje dekódovací algoritmus a výsledok vynásobí maticou  $P^{-1}$  zľava.  $m = P^{-1} \text{decode}(S^{-1}SHPm)$

---

**Algoritmus 3** Niederreiter - Algoritmus šifrovania

---

```
1 Vstup: Správa  $m$ 
2
3 Vypočítame  $m' = \text{phi}(m)$ , dostaneme chybové slovo dĺžky  $n$  s váhou  $t$ 
4  $c = H' \cdot \text{trans}(m)$ 
5  $c$  tvorí zašifrovaný text
```

---

---

**Algoritmus 4** Niederreiter - Algoritmus dešifrovania

---

```
1 Vstup: Šifrovaný text  $c$ 
2  $c' = \text{inv}(S) \cdot c$ 
3  $e' = \text{decode}(c')$ 
4  $e = \text{inv}(P) \cdot e'$ 
5  $m = \text{invphi}(e)$ 
6
7  $e$  je pôvodné chybové slovo. Po inverznej transformácii z  $e$  dostaneme  $m - o$ 
```

---

### 2.2.1 Porovnanie McEliece a Niederreiter

Porovnanie veľkosti správ, kľucov prípadne tabuľka z CFS článku

## 3 Code-based podpisové schémy

### 3.1 Úvod

Prechod na postkvantovú kryptografiu so sebou prináša aj potrebu implementovať podpisové schémy pomocou postkvantového kryptosystému. Vo všeobecnosti sa na realizáciu digitálneho podpisu využívajú asymetrické kryptosystémy, respektíve kryptosystémy s verejným kľúčom. Kryptosystémy, ktoré sme si predstavili v predchádzajúcej časti spĺňajú toto kritérium. Všeobecná schéma na vytvorenie digitálneho podpisu správy má podľa definície tieto časti

- Algoritmus na generovanie páru privátnych a verejných kľúčov
- Podpisový algoritmus závislý od privátneho kľúča, ktorý vytvorí podpis pre danú správu
- Overovací algoritmus závislý od verejného kľúča, ktorý pre správu prijme alebo zamietne zodpovedajúci podpis

Niektoré kryptosystémy túto schému implementujú tak, že ako podpisovú funkciu použijú dešifrovací algoritmus s privátnym kľúčom a ako overovaciu zvolia šifrovací algoritmus s verejným kľúčom. Podpis a overenie v tejto implementácii môže vyzeráť takto

---

**Algoritmus 5** Schéma digitálneho podpisu

---

- 1 Máme správu  $m$ , ktorú chceme podpísať a odtlačkovú funkciu  $H$
  - 2 Vypočítame odtlačok  $h = H(m)$
  - 3 Vypočítame podpis tak, že dešifrujeme odtlačok  $h$  pomocou privátneho kľúča
  - 4 Podpísanú správu tvorí dvojica  $(m, s)$
- 

Možnosť tejto implementácie je silne závislá od toho, ako sa prekrývajú množiny šifrovaných textov a odtlačkov v konkrétnom kryptosystéme. Ako si ukážeme v ďalších častiach práce, nie všetky odtlačky musia byť dešifrovateľné správy.

### 3.2 Prehľad code-based podpisových schém

V ďalších častiach práce sa už budeme zaoberať iba code-based podpisovými schémami, teda schémami, ktoré využívajú code-based kryptosystémy. Veľkou prekážkou týchto kryptosystémov je v súčasnosti veľkosť kľúča, ktorá je v porovnaní s dnešnými kryptosystémami rádovo tisícnásobne väčšia. Pri implementácii a následne v praxi je dôležité nájsť vhodný kompromis medzi požadovanou bezpečnosťou a výpočtovou a dátovou náročnosťou,

ktorá závisí od voľby veľkosti kľúča.

Existuje niekoľko potenciálnych návrhov code-based kryptosystémov, z ktorých si bližšie prejdeme CFS (Courtois-Finiasz-Sendrier) a LDGM (Low-density generator matrix).

### 3.3 CFS schéma

Jedným z nádejných návrhov code-based podpisových schém je CFS schéma, ktorá používa na podpisovanie Niederreiterov kryptosystém. Základný problém, ktorý treba vyriešiť pri podpisovaní založenom na kódovaní, je ako získať taký odtlačok správy, ktorý je dekódovateľné slovo. Ak máme lineárny kód  $C(n, k, 2t + 1)$ , syndróm slova je vektor dĺžky  $n - k$ . Počet všetkých syndrémov je  $2^{n-k}$  a počet dekódovateľných syndrémov je

$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$ . To znamená, že  $\frac{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}}{2^{n-k}}$  všetkých syndrémov je dekódovateľných. Pre Goppove kódy je to približne  $\frac{1}{t!}$ . Pravdepodobnosť, že odtlačok správy bude zároveň dekódovateľný, je teda približne  $p = \frac{1}{t!}$ . Nato, aby sme vedeli podpísať každú správu, budeme musieť ku správe pridať bity navyše, a pokúsiť sa podpísať túto upravenú správu. Priemerný počet pokusov na podpísanie jednej správy je približne  $t!$ .

---

**Algoritmus 6** Algoritmus podpisovania v CFS

---

```
1 Vstup: Správa m, odtlačková funkcia H ktorá vracia hashe dĺžky n-k (dĺžka :  
2 Zvolíme i = 0, h = H(m || i)  
3 Pokiaľ h nie je dekódovateľné, zvolíme i = i + 1 a opakujeme predošlý krok  
4 e = D(s)  
5 signature = (e, i)
```

---

Implementácia uvedeného algoritmu môže byť vylepšená po viacerých stránkach. Prvé vylepšenie sa dá realizovať pri hľadaní dekódovateľného syndrómu. Na začiatku podpisovania si vypočítame hash samotnej správy  $h' = H(m)$  a v ďalších krokoch počítame  $h = H(h' || i)$ . Ďalší priestor na vylepšenie, tentokrát dĺžka výsledného podpisu, sa ponúka v spôsobe uloženia časti e z podpisu. Autori tejto podpisovej schémy navrhli ukladať e ako index  $I$  z množiny všetkých  $n$  bitových vektorov s váhou  $t$ . To predstavuje číslo z rozsahu  $< 1, \binom{n}{t} >$



---

**Algoritmus 7** Algoritmus overovania v CFS

---

```
1 Vstup: podpis (e, i), správa m, verejný kľúč H', odtlačková funkcia H ktorá
2
3 Vypočítame s1 = H*trans(e)
4 Vypočítame s2 = H(m || i)
5
6 Ak s1 = s2, podpis prijímame, inak zamietame
```

---

### 3.3.1 Praktické parametre

### 3.3.2 CFS s pôvodným McEliece systémom

## 3.4 LDGM podpis

Ďalší z možných návrhov pre code-based kryptografiu sa pokúša zmenšiť potrebnú veľkosť kľúča pomocou vhodne zvoleného kódu, respektíve pomocou vhodne zvolenej generačnej matice. LDGM (Low-density generation matrix) kódy, čiže kódy s riedkou generovaciou maticou sa v niektorých prípadoch dajú zapísať kompaktne pomocou cirkulantných matíc. Generovacia matica  $G$  kódu dĺžky  $n$  s dimenziou  $k$  sa skladá z  $k_0 n_0$  blokov s rozmermi  $p \times p$ , kde  $n_0 = n/p$  a  $k_0 = k/p$ .

$$G = \begin{bmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & \cdots & C_{0,n_0-1} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & \cdots & C_{1,n_0-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k_0-1,0} & C_{k_0-1,1} & \cdots & C_{k_0-1,n_0-1} \end{bmatrix}$$

Každé  $C_{i,j}$  je  $p \times p$  cirkulatná matica. Vďaka tomu nám stačí uložiť z každého bloku iba jeden riadok. Tým zmenšíme veľkosť kľúča  $p$ -násobne. Matica v takomto tvare sa nazýva kvázicyklická (QC). K matici  $G$  vypočítame kontrolnú maticu  $H$  v systematickom tvare, t.j.  $H = [X|I]$ . Kontrolná matica  $H$  je súčasťou súkromného kľúča. Ďalšiu časť kľúča tvoria matice  $Q$  a  $S$ . Postup ako určiť maticu  $Q$  je zhrnutý v nasledovnom algoritme.

---

**Algoritmus 8** Výpočet matice  $Q$ 

---

```
1 Určíme náhodne matice a, b s rozmermi z x r0, z <= r0 (r0 = n0-k0)
2 Vypočítame maticu R = trans(a)*b X ones(p,p)
  //ones – matica p x p same jednotky, X Kroneckerov sucin
3 Určíme maticu T poskladanú z r0*r0 cirkulantných matic tak, aby váha každého
4 Q = R + T
```

---

Maticu  $S$  určíme ako náhodnú maticu poskladanú z  $n_0 \times n_0$  cirkulantných blokov veľkosti  $p \times p$  tak, aby váha každého riadku aj stĺpca bola  $w_s$  a aby mala plnú hodnotu.

Verejný kľúč tvorí upravená kontrolná matica  $H' = Q^{-1}HS^{-1}$ . Spôsob, ktorým počítame matice  $Q$  a  $S$  zachovávaajú QC vlastnosti pôvodnej matice  $H$ , čo nám umožňuje zmenšenie veľkosti verejného kľúča.

Pri generovaní musíme riešiť podobný problém ako pri CFS schéme. Potrebujeme výstup z hashovacej funkcie transformovať na vektor, ktorý spĺňa podmienky určené štruktúrou kódu. Prepokladajme, že máme funkciu  $\phi$ , ktorá jednoznačne priradí vektoru dĺžky  $l$  vektor dĺžky  $r$  s váhou  $w$  a funkciu  $\psi$ , ktorá pre každú správu  $m$  vyberie kódové slovo s nízkou váhou  $w_c$  z kódu generovaného maticou  $G$ . Generovanie podpisu je opísané v nasledovnom algoritme.

---

#### Algoritmus 9 Podpis v LDGM

---

```

1  Vstup: Správa m
2
3  Vypočítame hash  $h = H(m)$ 
4   $i = 0$  //  $|h| + |i| = l$ 
5  Vypocitame  $s = \phi(h \parallel i)$ 
6  Vypocitame  $b1 = b \times \text{ones}(1, p)$  //  $\times$  kronecker
7  Ak  $b1 * s \neq 0$ , tak  $i++$  a pokračujeme predoslym krokom.
8
9  Vypocitame  $s' = Q * s$ 
10 Urcime  $e = [0k \parallel \text{trans}(s')]$  //  $0k$  – nulovy vektor dlzky k
11 Vyberieme kodove slovo  $c = \psi(m)$ 
12 Vypocitame  $e' = (e + c) * \text{trans}(S)$ 
13
14 Podpis tvori dvojica  $(e', i)$ 

```

---

Overenie podpisu je rýchle a prebieha takto.

#### 3.4.1 Ukážkový príklad

Pre lepšiu predstavu ako LDGM podpisová schéma funguje si predvedieme generovanie, podpisovanie a overenie na príklade. Hodnoty parametrov použité v príklade sú odlišné od hodnôt vhodných pre praktické využitie.

**Generovanie kľúčov** Majme kód  $C(15, 9)$  s kontrolnou maticou  $H$  v systematickom tvare

---

**Algoritmus 10** Overenie v LDGM

---

```
1  Vstup: Správa m, podpis (e', i)
2
3  Ak neplatí wt(e') ≤ (w_t*w + w_c)*w_s podpis zamietneme
4  inak vypocitame s = phi(H(m) | i)   wt(s) = w
5      Ak wt(s) ≠ w podpis zamietneme,
6      inak pocitame s1 = H'*trans(e')
7          Ak s ≠ s1 podpis zamietame
8          inak akceptujeme
```

---

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozmer cirkulantných matíc je  $p \times p$ ,  $p = 3$ ,  $n_0 = 5$ ,  $r_0 = 2$ .

Ďalej vypočítame maticu  $Q$ . Matica  $Q$  je tvorená ako súčet matíc  $R$  a  $T$ . Na výpočet matice  $R$  zvolíme matice  $a$ ,  $b$  s rozmermi  $z \times r_0$ , kde  $z \leq r_0$ .

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matica  $R = (a' \times b) \otimes 1_{p,p}$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maticu  $T$  vyberáme tak, aby sa skladala z  $r_0 \times r_0$  cirkulantných blokov, váha každého stĺpca a riadku bola  $w_t$  a hodnosť  $R + T$  bola  $r = r_0 p$ . Zvolme  $w_t = 1$ .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matica  $S$  je regulárna matica tvorená z  $n_0 \times n_0$  cirkulatných blokov, každý stĺpec a riadok má hodnotu  $w_s$ . Nech  $w_s = 1$ , potom matica  $S$  môže vyzerat nasledovne

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Keď máme matice  $Q$  a  $S$ , môžeme vypočítať maticu  $H' = Q^{-1}HS^{-1}$ , ktorá tvorí verejný kľúč

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Vytvorenie podpisu** Predpokladajme, že máme správu  $m$ , pre ktorú je výstup z funkcie  $\phi$  vektor s váhou  $w$

$$s = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T \quad w = 2$$

Ďalej vypočítame  $s' = Q \cdot s$

$$s' = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$$

Pre vektor  $s'$  určíme chybové slovo v tvare  $e = [0_{1 \times k}, s'^T]$

$$e = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Predstavme si, že funkcia  $\psi(m)$  vyberie kódové slovo  $c$  s váhou  $w_c = 4$  pre správu  $m$

$$c = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Posledný krok podpisu je výpočet  $e' = (e + c) \cdot S^T$

$$e' = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Podpis tvorí dvojica  $(e', i)$ . V tomto príklade však  $i$  neuvádzame.

**Overenie podpisu** Ako prvé overíme, či  $wt(e') \leq (w_t \cdot w + w_c) \cdot w_s$ . V našom príklade  $w_t = 1$ ,  $w = 2$ ,  $w_c = 4$  a  $w_s = 1$ . Potom  $6 \leq (1 \cdot 2 + 4) \cdot 1$ ,  $6 \leq 6$  Prvá podmienka je splnená. Ďalej pomocou verejného kľúča zrekonštruujeme odtlačok správy  $s_0 = H' \cdot e'^T$

$$s_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

Vidíme, že  $s = s_0$  a podpis teda akceptujeme.

### 3.5 Porovnanie

# Záver

Záver SK

# Resumé

Resume SK

## Zoznam použitej literatúry



# Prílohy