UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Trabalho 2: Solução numérica de sistemas não-lineares

Atividade

Sabe-se que os sistemas não-lineares a seguir possuem alguma solução $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ na região do plano definida por $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_i| \leq 1\}$:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - \operatorname{sen}(x_1 - x_2) &= 0, \\ -x_1 + 8x_2 + \cos(x_1 \cdot x_2) &= 0, \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} 9x_1 - {x_2}^3 &= 0, \\ {x_1}^2 - 6x_2 &= -1. \end{cases} \quad (2)$$

Cada equipe (trio ou dupla) deverá analisar e encontrar uma solução aproximada para **apenas um** dos sistemas. O sistema a ser resolvido é determinado pela primeira letra dos nomes de cada membro da equipe: se o primeiro nome (em ordem alfabética) tiver inicial de A a J, deverá resolver o primeiro sistema. Se for de K a Z, deverá resolver o segundo.

O trabalho consistirá de duas partes: (1) um relatório (em PDF, para evitar variações na formatação) com a análise teórica e a tabela com os resultados gerados pelo algoritmo implementado; e (2) o algoritmo (em um arquivo de texto, com a extensão apropriada para linguagem escolhida).

1. **Análise teórica**

   (a) Escolher uma função de iteração $\varphi : Q \to \mathbb{R}^2$, que seja contínua.

   (b) Garantir que a função de iteração φ escolhida possui um ponto fixo em Q, mostrando que todo ponto de Q é levado por φ, em algum ponto de Q. Em outras palavras, $\varphi(x_1, x_2) \in Q$, sempre que $(x_1, x_2) \in Q$.

   (c) Mostrar que as derivadas parciais da função de iteração φ escolhida são pequenas o bastante para garantir a convergência do método de iteração de ponto fixo para este sistema não linear. Em outras palavras, encontre algum $K < 1$ tal que para $(x_1, x_2) \in Q$ seja verdade que $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_1, x_2)\right| \leq K/2$, para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$.

2. **Implementação computacional**

   (a) Implementar o método de iteração de ponto fixo em alguma linguagem de programação (preferencialmente em Scilab ou Python), utilizando como critério de parada a estimativa do erro relativo:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\max\left\{\left|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\right|, \left|x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}\right|\right\}}{\max\left\{\left|x_1^{(k)}\right|, \left|x_2^{(k)}\right|\right\}} < 10^{-5}.$$

   (b) Utilizar o algoritmo implementado, as funções obtidas anteriormente e um ponto arbitrário da região Q como aproximação inicial, para gerar uma sequência de aproximações da solução. Os resultados obtidos deverão constar em uma tabela, que mostre o número da iteração, a aproximação (com 7 dígitos após a vírgula) e o erro relativo a cada etapa.