

# Gekoppelte Übertragungssysteme

---

Bisher wurden verschiedene Methoden zur mathematischen Modellierung von technischen Übertragungssystemen betrachtet

Dabei wurde vorausgesetzt, dass das zu beschreibende System eine Einheit mit einem Eingang und einem Ausgang darstellt

Technische Wirkungsanordnungen sind jedoch oft aus miteinander gekoppelten Übertragungssystemen zusammengesetzt

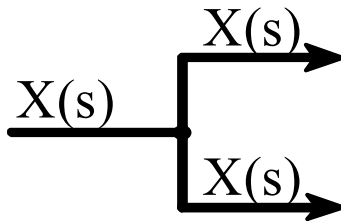
Solche oft komplizierten Verkopplungen werden häufig durch sogenannte Strukturbilder (Blockschaltbilder) dargestellt



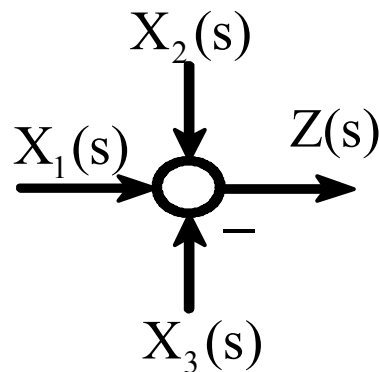
# Strukturbildelemente für gekoppelte Systeme



Rückwirkungsfreie Wirkungslineie eines Signals



Verzweigungsstelle eines Signals ohne Signalveränderung



Summationsstelle von Signalen. Negativ zu bewertende Signale werden mit einem Minuszeichen versehen, positive Signale mit einem Pluszeichen oder ohne Kennzeichnung. Hier:  $Z(s) = X_1(s) + X_2(s) - X_3(s)$



Signaldurchgang durch ein rückwirkungsfreies Übertragungsglied mit:  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$



# Grundverknüpfungsformen von Übertragungsgliedern

---

Mit den eingeführten Strukturbildelementen lassen sich sämtliche Verknüpfungen linearer Systeme beschreiben

Hierzu werden insgesamt drei Grundverknüpfungsformen benötigt:

**Reihenschaltung** von Übertragungssystemen

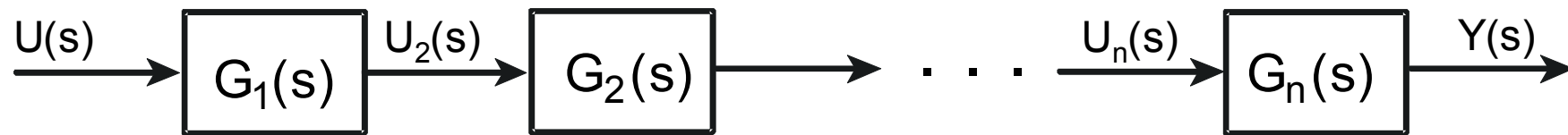
**Parallelschaltung** von Übertragungssystemen

**Kreisschaltung** von Übertragungssystemen



# Reihenschaltung von Übertragungssystemen

---

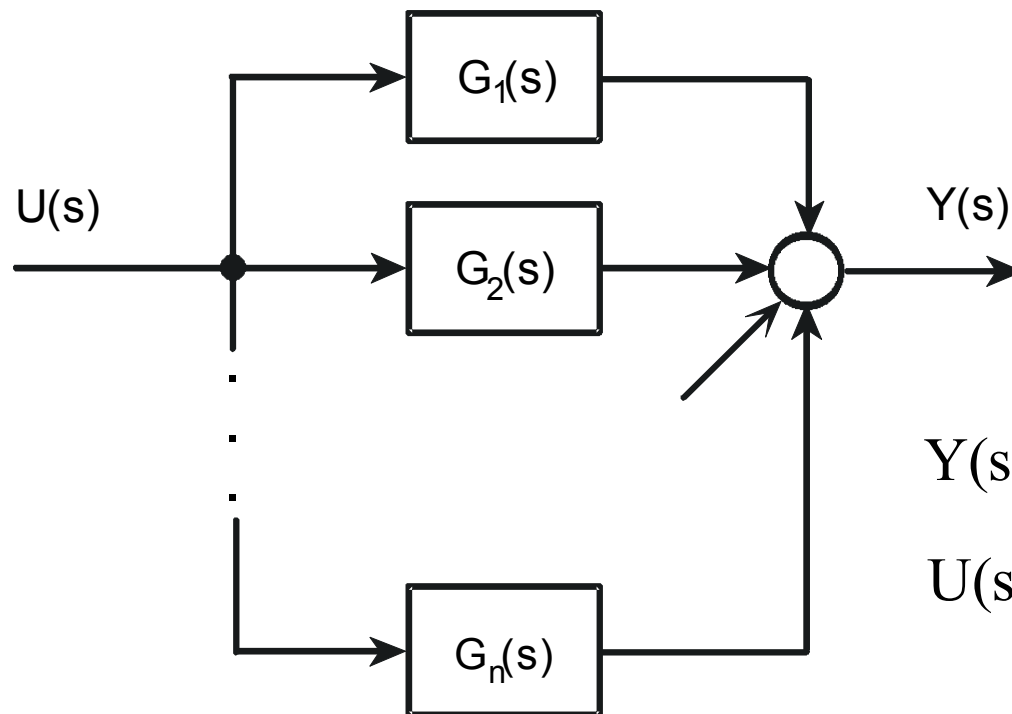


$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_n(s) = U_n(s) \cdot G_n(s) = U_{n-1}(s) \cdot G_{n-1}(s) \cdot G_n(s) \\ &= U(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_n(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$



# Parallelschaltung von Übertragungssystemen

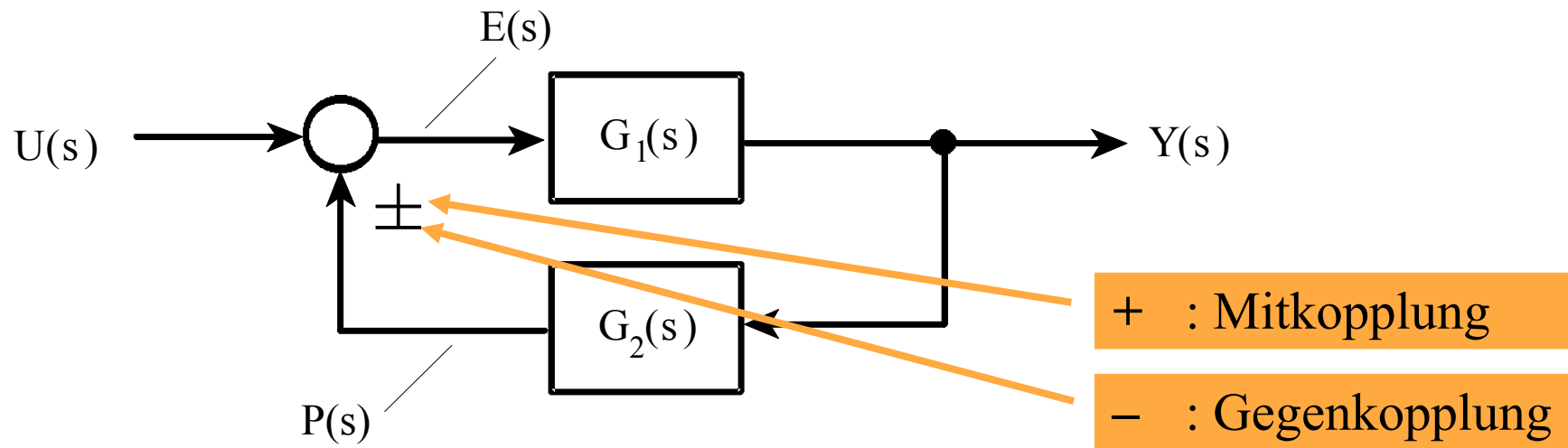


$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s)$$

$$U(s) = U_1(s) = U_2(s) = \dots = U_n(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{U(s) \cdot G_1(s) + U(s) \cdot G_2(s) + \dots + U(s) \cdot G_n(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

# Kreisschaltung von Übertragungssystemen



$$Y(s) = E(s) \cdot G_1(s) = (U(s) \pm P(s)) \cdot G_1(s) = (U(s) \pm Y(s) \cdot G_2(s)) \cdot G_1(s)$$

$$Y(s) \mp Y(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) = U(s) \cdot G_1(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

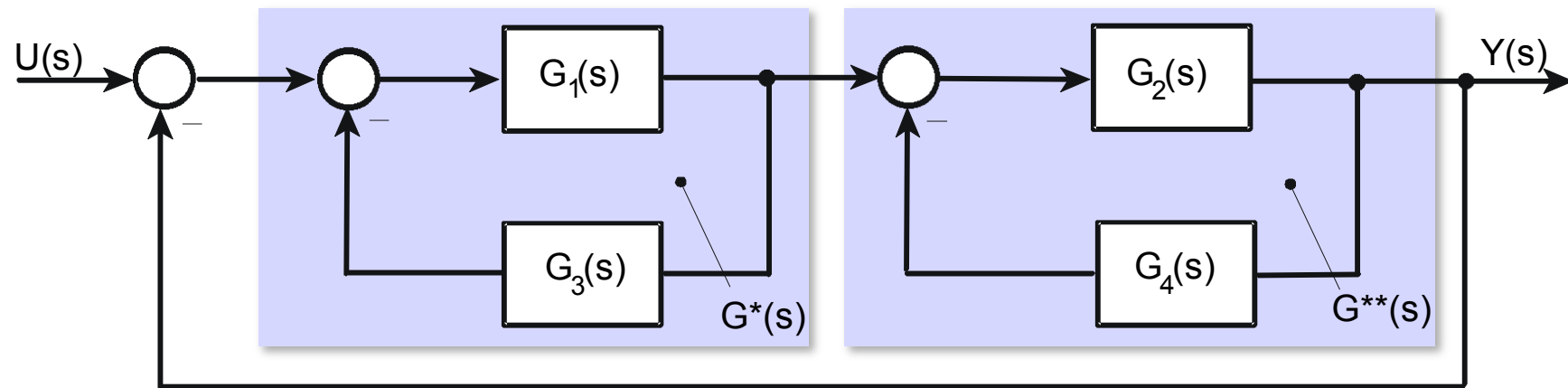
$-$  : Mitkopplung

$+$  : Gegenkopplung



# Beispiel 1 zur Kopplung von Übertragungssystemen

Folgendes System soll vereinfacht werden:

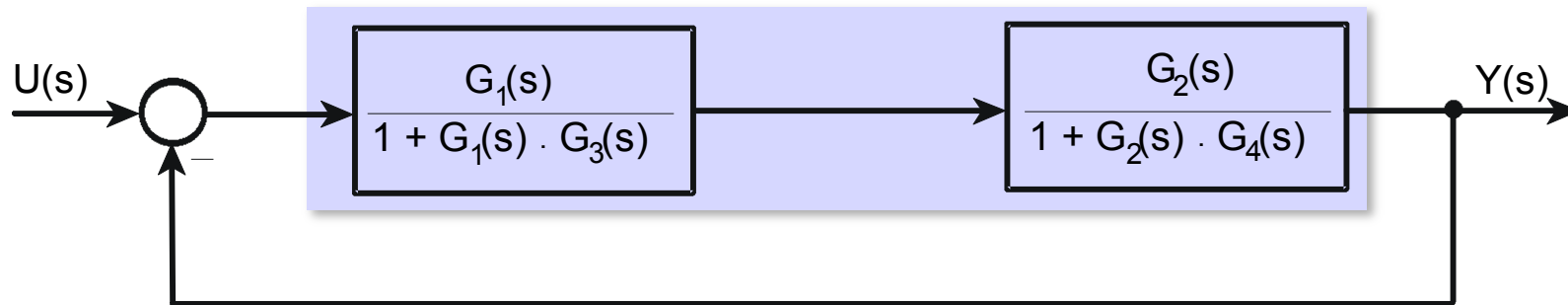


1. Schritt:  $G^*(s)$  und  $G^{**}(s)$  jeweils zusammenfassen

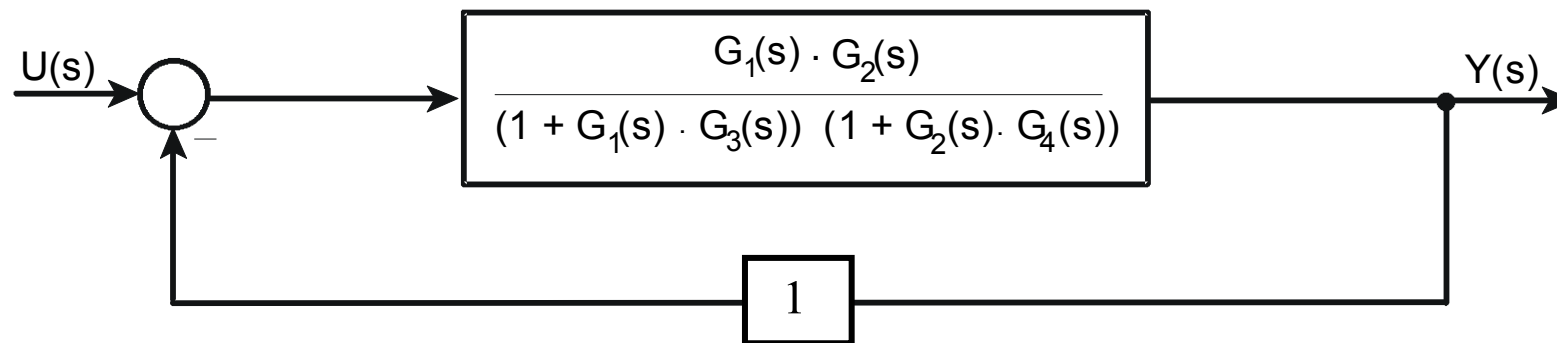
$$G^*(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_3(s)} ; \quad G^{**}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_4(s)}$$

# Beispiel 1 (Fortsetzung)

Ergebnis der ersten Vereinfachung:



2. Schritt: Reihenschaltung von  $G^*(s)$  und  $G^{**}(s)$  zusammenfassen

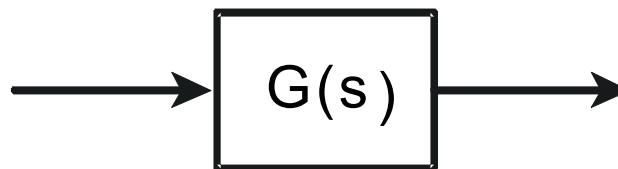




## Beispiel 1 (Fortsetzung)

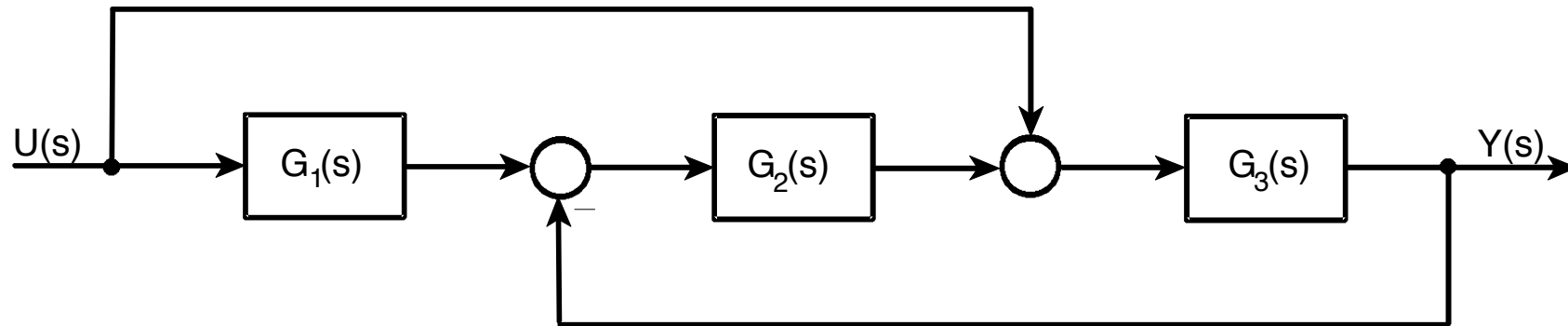
### 3. Schritt: Erneute Anwendung der Regel für die Kreisschaltung

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)) \cdot (1 + G_2(s) \cdot G_4(s))}}{1 + \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)) \cdot (1 + G_2(s) \cdot G_4(s))}} \\ &= \frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{(1 + G_1(s) \cdot G_3(s)) \cdot (1 + G_2(s) \cdot G_4(s)) + G_1(s) \cdot G_2(s)} \end{aligned}$$



## Beispiel 2 zur Kopplung von Übertragungssystemen

Folgendes System soll vereinfacht werden:



Problem:

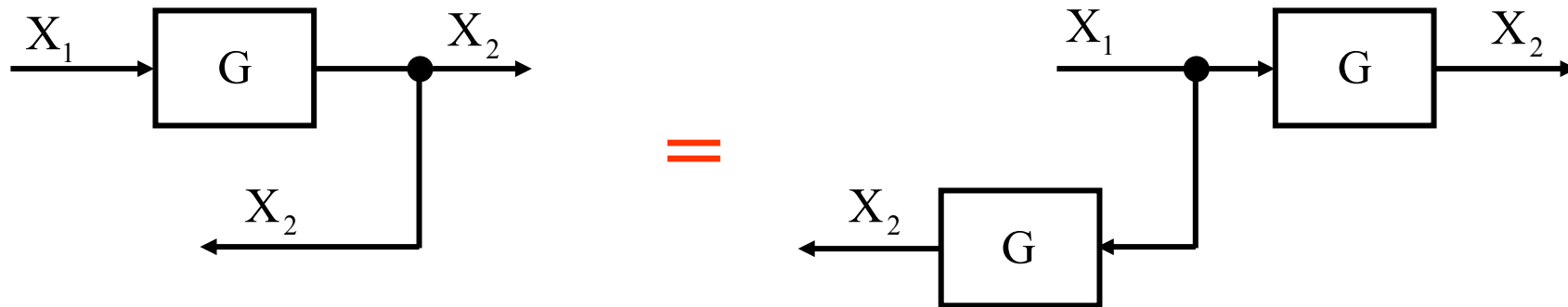
Offensichtlich ist hier eine direkte Anwendung der Kreisschaltung nicht möglich, da die Kreise ineinander verschränkt sind

Lösung:

Durch gezielte Verschiebung von Summationspunkten kann die ineinander greifende Vermaschung jedoch aufgelöst werden

# Verschieben von Verzweigungsstellen

Verschiebung einer Verzweigung vor einen Block:

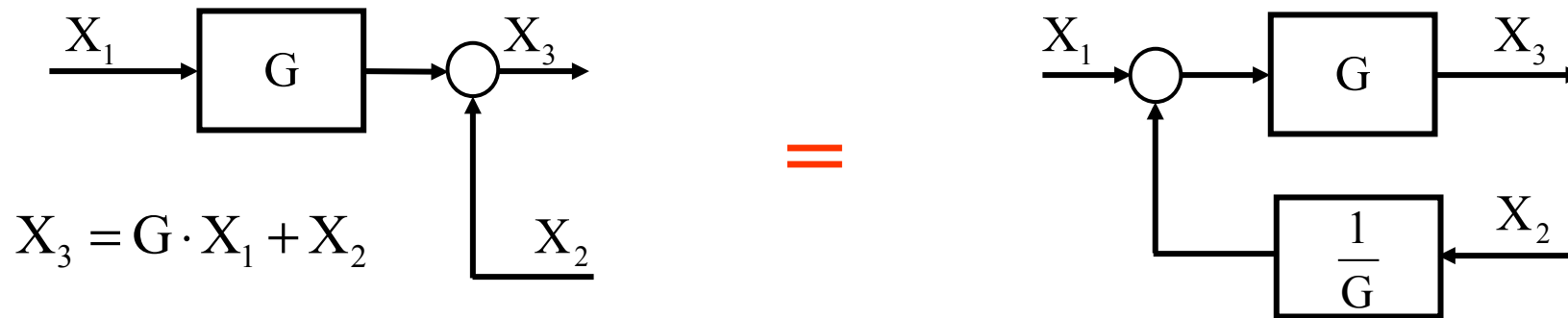


Verschiebung einer Verzweigung hinter einen Block:

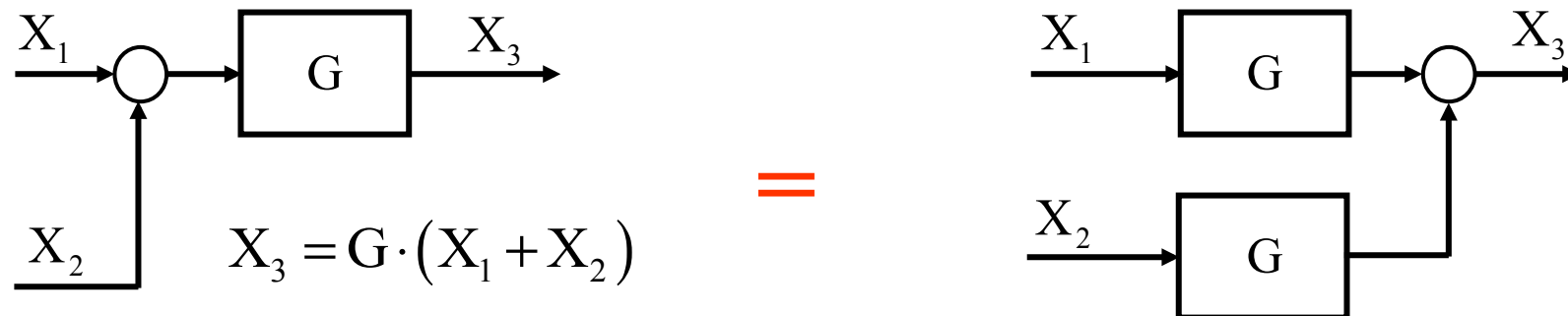


# Verschiebung von Summationspunkten

Verschiebung eines Summenpunktes vor einen Block:



Verschiebung eines Summenpunktes hinter einen Block:



# Vertauschen von Strukturelementen

## Vertauschen der Reihenfolge von Summenpunkten

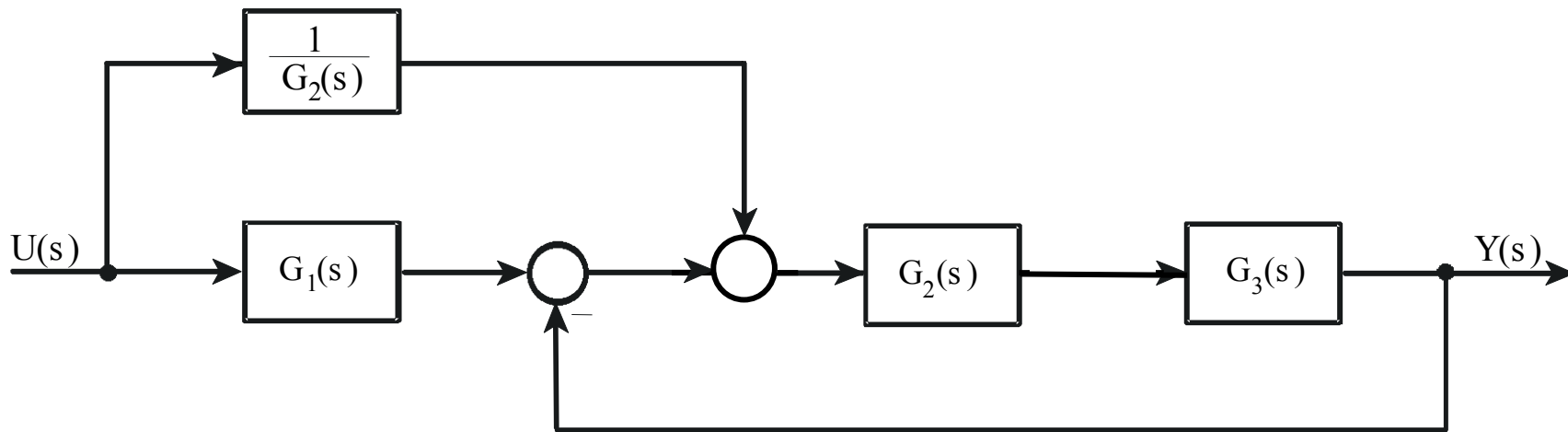


## Vertauschen der Reihenfolge von Systemblöcken



## Fortsetzung Beispiel 2

Verschiebung des rechten Summenpunktes vor  $G_2$ :



System besteht aus der Reihenschaltung einer Parallel- und einer Kreisschaltung

$$\Rightarrow G(s) = \left[ G_1(s) + \frac{1}{G_2(s)} \right] \cdot \left[ \frac{G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s)} \right] = \frac{G_3(s) \cdot (1 + G_1(s) \cdot G_2(s))}{1 + G_2(s) \cdot G_3(s)}$$



# Realisierung von Übertragungsfunktionen durch Teilsysteme

---

Die vorgestellten Methoden der Systemumformung durch Anwendung der Regeln für Übertragungsglieder erlauben es, Übertragungsfunktionen für beliebige vermaschte Systeme zu berechnen

Häufig ist jedoch genau das umgekehrte Problem zu lösen, nämlich die Synthese gegebener Übertragungsfunktionen aus Teilsystemen

Diese Zerlegung komplizierter technischer Systeme in einfach zu realisierende Teilsysteme ist eine der wesentlichen Aufgaben des Ingenieurs

Die Schwierigkeit liegt hierbei darin, die Schnittstellen zwischen den Teilsystemen geeignet festzulegen, um so die Gesamtkomplexität und Kosten eines gegebenen Systems zu minimieren



# Realisierung von Systemen in Reihen-, Parallel- und Kreisschaltung

---

In Reihe geschaltete Systeme können durch das Produkt und parallel geschaltete Systeme durch die Summe der Teilübertragungsfunktionen zu einer Gesamtübertragungsfunktion zusammengefasst werden

Hieraus folgt:

Für eine Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen erfolgt die Umrechnung der Übertragungsfunktion in ihre Produktform

Soll eine Parallelschaltung realisiert werden, muss die Übertragungsfunktion in die Partialbruchform überführt werden

Durch Umformung der Übertragungsfunktion in Kreisschaltungen kann jedes System ausschließlich aus Integratoren, Summationspunkten und Proportionalgliedern (= statische Systeme) realisiert werden

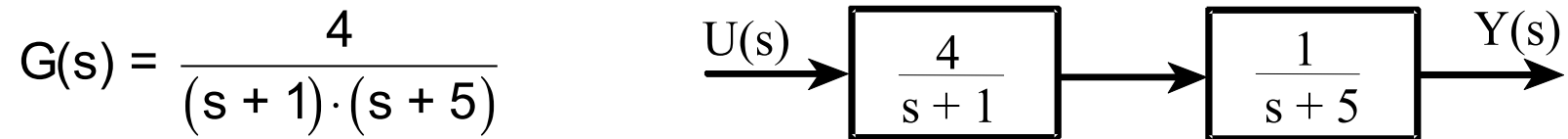




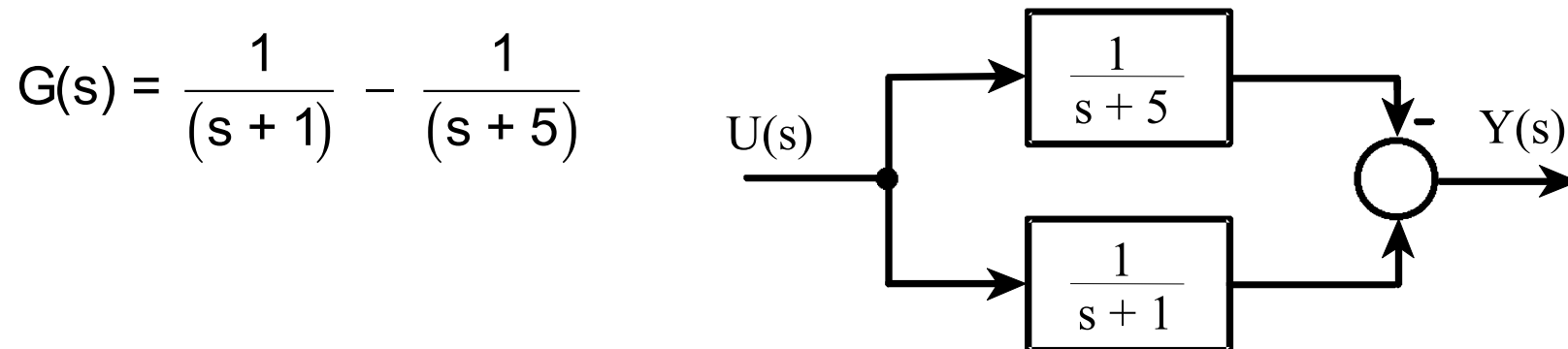
# Beispiel zur Parallel- und Reihenschaltung von Teilsystemen

Gegeben sei das folgende System:  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + 6s + 5}$

Produktform und Realisierung durch eine Reihenschaltung:



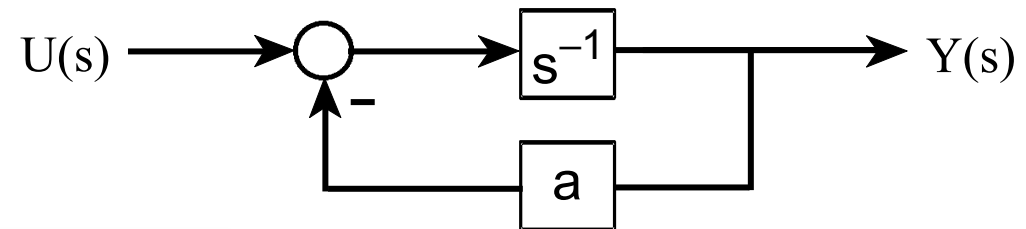
Partialbruchform und Realisierung durch eine Parallelschaltung:



# Beispiele zur Realisierung von Systemen durch Kreisschaltungen mit Integratoren

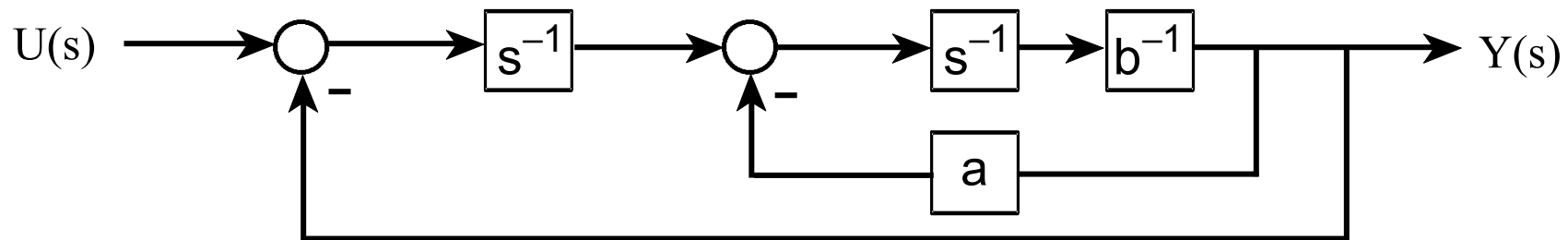
## Realisierung eines Systems 1. Ordnung:

$$G(s) = \frac{1}{s+a} = \frac{1/s}{1+a/s}$$



## Realisierung eines Systems 2. Ordnung:

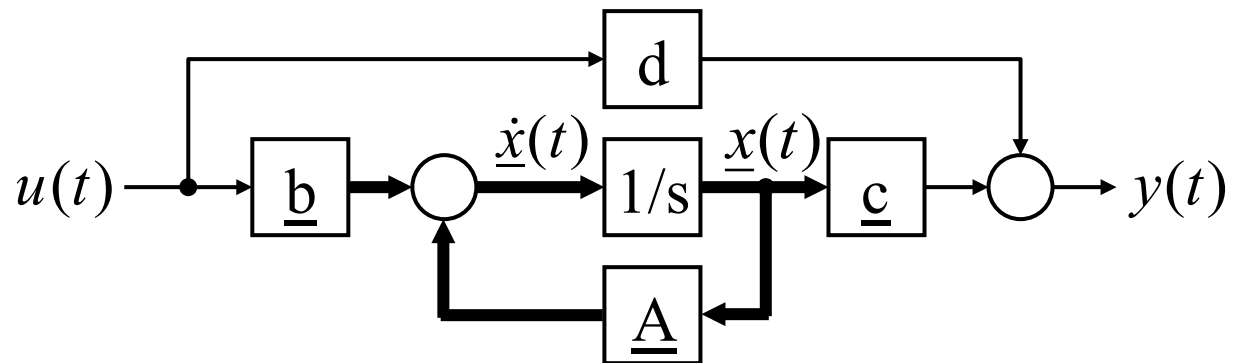
$$G(s) = \frac{1}{b \cdot s^2 + a \cdot s + 1} = \frac{1/(b \cdot s^2 + a \cdot s)}{1 + 1/(b \cdot s^2 + a \cdot s)} = \frac{\frac{1}{s \cdot (bs + a)}}{1 + \frac{1}{s \cdot (bs + a)}} = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{1/(bs)}{(1 + a/(bs))}}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{1/(bs)}{(1 + a/(bs))}}$$



# Darstellung der Zustandsform als Strukturbild

Auch die Zustandsform von Systemen kann aus Integratoren, Summationspunkten und Proportionalgliedern zusammengesetzt werden

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t) \\ y(t) &= \underline{c} \cdot \underline{x}(t) + d \cdot u(t)\end{aligned}$$



Fasst man die fett dargestellten Pfeile als Wirkungslinien von Multiplexsignalen auf mit jeweils einem Integrator und Summierer für jede Vektor-komponente, so gilt das Strukturbild für Systeme beliebiger Ordnung