

# 目 录

---

公理方法的科学意义·····	张锦文 (1)
几何作图杂谈·····	李克正 (9)
内角和定理·····	蒋 声 (35)
什么是长度?·····	莫 由 (44)
面积关系在几何证题中的运用·····	井 中 (59)
封闭折线的射影和·····	何裕新 (68)
用复数解几何题·····	常庚哲 (75)
几何证题中运用射影几何的方法·····	单 增 (94)
怎样判别整除? ·····	叶汉坤 (112)
二次多项式的因式分解·····	周 英 (116)
求解三次方程的赖恩兹法·····	陈云烽 (132)
$n!$ 是怎样计算的?·····	方 直 (142)
几种无理数的判定方法·····	顾忠德 (146)
种树游戏与图形实现论·····	张 铃 (154)

---

# 公理方法的科学意义

中国科学院计算技术研究所 张锦文

数学中的公理方法，是在数学的发展史上逐步形成的，并且也是由于数学的对象、性质所决定而不得不采用的一种科学方法。它既是一门数学发展到一定阶段时整理已有成果的一种工具，也是探求数学中未知结果（亦即寻求新定理）的一种重要手段，对于前者，数学界基本上是一致的；而对于后者，一般论及较少。因此，本文重点探讨后者，希引起讨论和注意。

众所周知，在古希腊时期，欧几里德在几何学的研究中系统地使用了公理方法，从少数公理出发逻辑地推演出整个几何学。但是，引人深思的是第五公设（亦即平行公理），它是否能从其它公理中逻辑地推演出来呢？二千多年来，不少人曾宣布给出了由其它公理逻辑地推演出第五公设的数学证明，但是，人们又逐渐发现了这些“证明”不是逻辑上有错误，就是使用了与平行公理相等价的数学命题。直至上世纪三十年代，俄国的罗巴契夫斯基、德国的高斯和匈牙利的亚诺士·波约才独立地发现并证明了平行公理是独立于欧氏几何学的其它公理。这就可以相信，除了平面上过一直线外的一点恰好可以引出一直线与已知直线相平行的欧氏空间外，尚有一条平行线也没有，或有无穷多条平行线的其它空间。随后，实践又检验了这一新的几何学。这样，使数学家困惑了二千年的迷雾

终于驱散了, 人们看到了真理的光芒. 非欧几何的发现, 说明了公理方法不仅可以使人们逻辑地推演出公理体系内的新定理, 而且突破了原来的体系和几何直观, 发现了新的体系和几何直观. 这是数学史上光辉的一例.

十九世纪下半叶开始了算术的公理化研究. 皮阿诺给出了一个清晰的算术公理系统, 这个系统既直观又严谨<sup>①</sup>, 人们以为, 一切算术定理都可以从它出发逻辑地推导出来. 但是, 1931年哥德尔证明了: 如果算术系统  $P$  是协调的<sup>②</sup>, 那么就一定有一个算术命题  $A$ , 使得  $P$  不能推演出  $A$ , 也不能推演出命题  $\neg A$  ( $\neg A$  表示  $A$  的否定, 读作“非  $A$ ”), 亦即:

$$P \nvdash A \quad (1)$$

和

$$P \nvdash \neg A. \quad (2)$$

由于哥德尔的上述结论, 人们才知道并不是每一个算术命题都是算术定理或否定理, 还存在着许多算术命题在  $P$  中是不可判定的(也就是说, 有许多算术命题  $A$ , 使得(1)与(2)同时成立). 哥德尔定理揭示了, 任一较为丰富的公理系统(在其中能够表示算术加法与乘法的公理系统)都是不完全的, 还揭示了公理系统的一个更为深刻的本质: 它不仅刻划人们原来熟悉的、意指的数学结构, 而且也刻划了人们原来(在给出公理系统时)所不曾料想到的新的模型或非预订模型, 亦即非标准模型.

第一个非标准模型是斯科伦在 1934 年给出的非标准算

① S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, 1952.

② 所谓  $P$  是协调的, 是指不存在一个命题  $B$ , 使

$$P \vdash B \quad \text{且} \quad P \vdash \neg B$$

同时成立, 其中记号“ $\vdash$ ”表示可以推出, 下面用到的记号“ $\nvdash$ ”则表示推不出.

术  ${}^*\mathbf{N}$ , 它是自然数集合  $\mathbf{N}$  的一个真的扩充,  $\mathbf{N} \subsetneq {}^*\mathbf{N}$ , 在  ${}^*\mathbf{N}$  中不仅包含所有的自然数  $0, 1, 2, \dots$ , 而且还包含了无穷多个无限大自然数, 并且这些无限大的自然数中没有一个最小元(亦即没有最小的无限大自然数). 这些对象如同人们熟知的算术一样, 满足皮阿诺的算术公理和逻辑公理. 在斯科伦这一工作之后, 人们又进行了许多有趣的研究, 并且已经证明了对于任意的无穷基数  $\omega_\alpha$ , 都至少存在  $2^{\omega_\alpha}$  个不同构的具有基数  $\omega_\alpha$  的非标准算术模型<sup>①</sup>. 非标准算术的研究使人们对公理系统的研究开阔了眼界.

$\Delta$ 1960年美国数学家 A·鲁宾逊在实数公理系统和标准微积分(即柯西微积分理论)的基础上, 使用数理逻辑的严谨的方法, 处理了莱布尼茨的实无限小和无限大数, 创立了非标准分析<sup>②</sup>. 这是当代数学的一个新领域, 人们不仅可以使使用极限方法来论证分析数学中的问题, 而且可以使用更为直观明显的无限小推理方法去论证相应的问题, 还可以开辟新的研究领域.

一个更为广泛和有趣的问题是集合论. 上世纪七十年代, 康托尔为了解决微积分的应用中的问题和它的基础问题, 创立了以研究无穷对象为中心的集合论(包括超穷序数和超穷基数理论), 并迅速地应用于数学的各个分支. 但是, 正在这时, 集合论中出现了悖论. 影响最深广的罗素悖论在 1903 年发表了, 它引起了数学家的震惊, 人们在问: “集合论还可靠吗?” “数学还可靠吗?” 为了回答这一极为严肃的数学问题, 同

① R. Rogers, Mathematical Logic and Formalized theories ... - A Survey of basic concepts and results, 1974. 第 119 页.

② H. J. Keisler, Elementary Calculus, 1976.

A. Robinson, Nonstandard Analysis, 1966.

时,集合论当时已有三十多年的发展史,有大量的科学成果,也出现了问题,有必要进行更为系统的整理。这样,公理方法就成为必要的了。在1908年,出现了两个著名的集合论公理系统,一个是罗素的类型论,它把集合分了层次或类型,从而避免了悖论;再一个是蔡梅罗的集合论系统,它是把康托尔集合论中的概括原则给以具体化,把概括原则作了精细的解剖,提出了代替它的无序对集合公理、并集合公理、幂集合公理、无穷集合存在公理和分离公理,后来又经过斯科伦,弗兰克尔等人的卓越工作,形成了今天大家所熟悉的ZF公理系统<sup>①</sup>。此外,还有冯·诺意曼、贝尔耐斯、哥德尔、蒯因、阿克曼等著名学者在这方面进行了卓越的工作,形成了若干不同风格的公理系统,这些系统人们虽然并未证明它们的协调性,但是已有的悖论全排除了。这样,也就保卫和发展了集合论的已有成果,并且它们也形成了集合论研究的新的强有力的工具。比如,当代数学中的著名难题——连续统假设<sup>②</sup>已经取得重大的进展,而这些进展都是在集合论的公理系统基础上取得的。我们知道,这一重要的数学命题在直观集合论中是无从着手的,但是,在公理集合论的研究中,在一定意义下这一命题已经获得了否定解决。但是,从集合论公理系统的更加合理化上看,从这一重大数学命题的科学性上来看,它仍然是一个未解决的数学问题<sup>③</sup>。

① H. B. Enderton, Elements of set theory, 1977.

② 所谓连续统假设,是指实数有多少的问题。也就是说,自然数集合的基数为 $\omega_0$ ,而比 $\omega_0$ 大的最小的基数是 $\omega_1$ ,已经证明实数集合的基数为 $2^{\omega_0}$ ,连续统假设是断定:

$$2^{\omega_0} = \omega_1.$$

③ 张锦文:《集合论与连续统假设浅说》,上海教育出版社,1980年6月版。

为了弄清连续统假设的进展, 我们把连续统假设记作 CH, 而集合论的公理系统采用 ZF 系统.

1938 年, 哥德尔证明 CH 相对于 ZF (包括选择公理) 的协调性结果. 也就是说, 如果 ZF 是协调的, 那么  $ZF+CH$  仍然是协调的. 换句话说, 如果 ZF 是协调的, 那么

$$ZF \not\vdash \neg CH. \quad (3)$$

这表明通常集合论公理系统推不出  $2^{\omega_0} \neq \omega_1$ . 1963 年美国数学家 P. J. 柯恩证明, 如果 ZF 是协调的, 那么

$$ZF \not\vdash CH, \quad (4)$$

亦即 ZF 推不出连续统假设 CH. 综合 (3) 与 (4) 说明, CH 对 ZF 而言是不可判定的. 通俗地讲, CH 是那样的复杂、“厉害”, 以至于公理系统 ZF 都管不住了. 这是公理集合论研究中一大进展, 并且哥德尔、柯恩又创造了比他们的结果更为重要的新方法——可构成方法和力迫方法, 人们使用这些方法和它们的新发展, 建立了一系列重大结果. 不仅这样, 而且由于对这一系列方法和问题的研究, 又提出了新的更加强有力的新公理和新的公理系统.

值得指出的是关于集合概念的刻划. 我们知道, “集合”这一重要的概念, 是不能够数学地定义的, 只能给出一个描述性的说明. 在我国出版的第一本集合论著作——肖文灿的《集合论初步》<sup>①</sup>中, 转述了康托尔对集合的刻划: “吾人直观或思维之对象, 如为相异而确定之物, 其总括之全体即谓之集合, 其组成此集合之物谓之集合之元素. 通常用大写字母表示集合, 如  $A, B, C$  等, 用小写字母表示元素, 如  $a, b, c$  等. 若集合  $A$  系由  $a, b, c, \dots$  诸元素所组成, 则表如  $A = \{a, b, c, \dots\}$ ,

① 肖文灿:《集合论初步》(算学小丛书), 商务印书馆, 1939 年 5 月初版, 1950 年 12 月再版.

而  $a$  为  $A$  之元素, 亦常有用  $a \in A$  之记号表之者, “ $a$  非  $A$  之元素则记如  $a \notin A$ .” 肖文灿先生对康托尔的概念作了一个有价值的注解, 他说: “上之定义中, 其所用之‘相异’与‘确定’之二语, 殊有说明之必要, 所谓相异者取二物于此, 其为同一, 其为相异, 而得而决定. 而集合所含之元素乃有彼此不同之意味. 所谓确定者, 此物是否属于此集合, 一望而知, 至少其概念上可以断定其是否为该集合之元素. 盖合于某某条件之集合, 须其界限分明, 不容有模糊不漠之弊. 如 1, 2, 3 三元素可组成一集合, 单位长直线上之一切点可组成一集合, 反之, 如甚大之数或与  $P$  接近之点, 则不能为一集合, 因其界限不清.” 这段话是我国学者对康托尔集合论的一个精辟的注解. 一元素是否属于一集合决不能有“模棱两可之余地”. 这就是康托尔集合论的基本思想, 但是世界在发展, 人们的认识也在深化, 1965 年出现的弗晰集合 (Fuzzy Sets, 也有人译作模糊集合) 就是美国数学家查德为解决现代科学技术中的新问题而提出的, 它正是要研究“甚大数的集合”或“与  $P$  接近之点的集合”等等, 因此, 人们也称之为非康托尔集合论<sup>①</sup>. 具体地说, 康托尔集合论研究这样的集合  $S$ , 使得对于任意的对象或元素  $a$ , 都有:

$$a \in S \quad \text{或者} \quad a \notin S \quad (5)$$

成立, 二者必具其一. 使用  $f_s$  表示  $S$  的特征函数<sup>②</sup>, 就是,

① A. Kaufmann, Introduction to the Theory of Fuzzy subsets, 1975.  
L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control, vol. 8, pp 338-353, 1965.

② 康托尔集合论中, 一集合的特征函数的定义可以是:

$$f_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in S \text{ 时;} \\ 0, & \text{其余情况.} \end{cases}$$

这一函数的值域显然是  $\{0, 1\}$ . 而弗晰集合、布尔值集合都是推广了特征函数的概念, 把值域推广到一格  $G$  上, 特别地推广到一布尔代数  $B$  上.

$$f_s(a) \in \{0, 1\}. \quad (6)$$

而弗晰集合  $\mathfrak{L}$ , 用其类属函数表示就是:

$$f_s(a) \in [0, 1], \quad (7)$$

其中  $[0, 1]$  为实数单位闭区间. 或者, 令  $G$  为任一格(特别地,  $G$  可以是某一布尔代数  $B$ ), 那么

$$f_s(a) \in G. \quad (8)$$

这就是一种实值的、格值的或者布尔值的集合论, 这是一门正在朝气蓬勃地发展着的集合论. 与此同时, 1965 年在力迫方法基础上发展出一门布尔值模型方法, 或称布尔值集合论. 它是由著名数学家索拉维和斯考特等创立的, 是证明集合论独立性问题时一个有力的工具. 这是在公理集合论研究中发展出来的, 因此, 斯考特称之为集合论的非标准模型<sup>①</sup>. 我们对这两个领域进行统一处理<sup>②</sup>, 证明了弗晰集合结构与正规弗晰集合结构是集合论公理系统的某种非标准模型, 这就说明, 集合论公理系统的丰富结果就为弗晰集合的发展提供了有力的工具.

关于公理方法的科学意义, 这里只是考察了若干事例, 指出在这些领域中公理化方法的极为重要的作用: 运用公理化方法发现了一系列所谓元定理或元数学定理, 这些定理是不存在机械化证明的; 运用公理化方法还揭示了许多重要的新

① D. Scott, Boolean-valued models for Set theory. Mimeographed notes for the 1967.

American math. Soc. Symposium on axiomatic Set theory.

② Zhang Jin-wen, An Unified Treatment of Fuzzy Set Theory and Boolean-valued Set Theory: Fuzzy Set Structures and Normal Fuzzy Set Structures, To appear Journal of Mathematical Analysis and Applications.

张锦文, 正规弗晰集合结构与布尔值模型, 华中工学院学报, 1979 年第二期.

张锦文, 正规弗晰集合结构的一些基本性质, 华中工学院学报, 1979 年第三期.



的数学模型，这些模型对数学的发展可能产生更为深远的影响。甚至，一个公理系统确定了，它本身的一些形式定理有相当一部分可以给出形式证明的，或者说存在着借助于计算机解决这类问题的算法，这也是有着重要意义的。计算一类问题总是要有一定的规则，这一组规则就是一组公理。这类问题由于人们的看法比较一致，本文也未加细述。仅就上面所谈及的几个问题，也完全可以看出公理方法的重要意义，试问：没有几何学公理系统以及对平行公理的长期研究，如何创立新的几何学？如何建立新的空间观念和学说？如果没有算术的皮阿诺公理系统，如何证明哥德尔的不完全性定理？如何创立算术的非标准模型？如果没有实数的公理系统，没有柯西微积分的严格理论，没有谓词逻辑的紧致性定理，又如何建立非标准分析？如何建立无限小方法的严谨理论？特别地，如果没有集合论的较为完整的公理系统，如何排除直观集合论的逻辑悖论？如何建立连续统假设的相对协调性证明？如何建立连续统假设的独立性证明？甚至，连这些问题都提不出一个清晰的观念。如果没有公理集合论中发展的一系列技巧，如何建立布尔值模型？更谈不上使用布尔值模型的技巧去发展和丰富应用极为广泛的弗晰集合论了。这一系列问题，清楚地揭示出公理方法是不容忽视的一个重要的数学方法。当然，我们讲公理方法的重要性时，并不意味着排斥其它数学方法的重要性。相反地，我们认为在数学中存在着许多其它重要的方法，值得人们进行深入地研究，比如与公理方法相伴随的形式化方法，模型论方法，此外，代数方法、拓扑方法、统计方法等等都是重要的数学方法，特别是，由于计算机的出现和发展，对数学可能产生极大的影响，这些都是不容忽视的数学方法，但是，这已不是本文所要论述的问题了。

# 几何作图杂谈

李克正

## (一) 尺规作图的可能性

在欧几里德的几何体系中，几何作图工具严格地限制只能用圆规和直尺。那时候，“尺规作图”和几何证明一样，需要天才式的思维，需要丰富的经验和机敏，确是锻炼思维的好方式。

然而，到了 19 世纪，随着解析几何和代数学的发展，圆规和直尺在作图中的作用已被彻底搞清，从此以后，尺规作图不再是困难问题了。简单地说，给定一个尺规作图问题，就可以通过既定的方法判定它能不能解，并且，如果能解的话，一定可以由此找出解法（尽管不一定是最简单的解法）。

下面先来介绍这个判定方法。

根据初等几何作图的规定，直尺的作用是过给定的两点作直线（包括两个方面：作连接给定两点的线段，并可将这线段任意延长）；圆规的作用是以给定点为圆心，给定线段的长度为半径作圆。如果在整个作图过程中多次使用圆规和直尺，那么作图的中间过程只是利用给定的和作出的圆与直线上的某些点，这些点都可以看作某些直线和圆相互的交点。因此，在作图过程中，重要的只是作出这些交点。例如，只要作出所求作的直线上的两点，或者作出所求作的圆的圆心及圆上一

点,就可以认为所求作的直线或圆已经作出了(只是在作图終了才需要实际地把直线和圆画出来). 如果要求作线段、角、三角形,可以把它化成求作线段的端点,角的顶点及每边上各一点,三角形的三个顶点,等等. 总而言之,可以把尺规作图问题化成作出一些点的问题. 这样,考察尺规作图的可能性,只需考察由给定的一些点使用尺规能作出些什么样的点.

在作图平面上建立一个直角坐标系,任何一个尺规作图问题所给的条件,都可以看作是给定了坐标平面上的一些点(也就是给定了这些点的横坐标和纵坐标),于是,使用圆规和直尺作图,可以归结为下面三种情况作出点  $E$  或  $F$ :

i) 已给点  $A, B, C, D$ , 直线  $AB$  和  $CD$  的交点为  $E$ .

ii) 已给点  $A, B, C, D$ , 以  $C$  为圆心过  $D$  的圆记为  $\odot C$ , 直线  $AB$  和  $\odot C$  的交点为  $E, F$ .

iii) 已给点  $A, B, C, D$ , 以  $A$  为圆心过  $B$  的圆记为  $\odot A$ , 以  $C$  为圆心过  $D$  的圆记为  $\odot C$ ,  $\odot A$  和  $\odot C$  的交点为  $E, F$ .

设  $A, B, C, D, E, F$  的坐标分别是  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2), (e_1, e_2), (f_1, f_2)$ .

在情况 i) 中, 直线  $AB$  的方程为  $\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2}$ , 直线  $CD$  的方程为  $\frac{x-c_1}{d_1-c_1} = \frac{y-c_2}{d_2-c_2}$ , 将这两个方程联立就求出  $E$  的坐标  $(e_1, e_2)$ . 可以知道,  $e_1, e_2$  都可以由  $a_i, b_i, c_i, d_i (i=1, 2)$  经过加、减、乘、除运算(以下简称“四则运算”)得出.

在情况 ii) 中,  $\odot C$  的方程为  $(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = (d_1-c_1)^2 + (d_2-c_2)^2$ , 将这个方程与  $\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2}$  联立, 所得的解就是  $(e_1, e_2)$  和  $(f_1, f_2)$ . 可以知道,  $e_1, e_2, f_1, f_2$  都可以由

$a_i, b_i, c_i, d_i (i=1, 2)$  通过四则及开平方运算得到.

情况 iii) 与情况 ii) 类似,  $e_1, e_2, f_1, f_2$  都可以由  $a_i, b_i, c_i, d_i (i=1, 2)$  通过四则及开平方运算得到.

因此, 为了完成尺规作图的任务, 只要能完成下面的四种作图就行了.

1) 建立直角坐标系, 就是作两条相互垂直的直线, 相交于一点  $O$ , 并在两条直线上各取异于  $O$  的一点  $P, P'$ , 使  $\overline{OP} = \overline{OP'}$ , 然后令  $O, P, P'$  的坐标分别为  $(0, 0), (1, 0)$  和  $(0, 1)$ .

2) 将点投影到坐标轴.

3) 由任意点  $(a, 0)$  作出点  $(0, a)$ , 并且反过来, 由任意点  $(0, b)$  作出点  $(b, 0)$ .

4) 在  $OP$  上进行四则及开平方运算, 即对任两给定点  $(a, 0)$  和  $(b, 0)$  作出  $(a \pm b, 0), (ab, 0)$ , 当  $b \neq 0$  时作出  $(\frac{a}{b}, 0)$ , 当  $a \geq 0$  时作出  $(\sqrt{a}, 0)$ .

我们知道, 作图 1~4 都是可以用圆规直尺完成的 (注意, 作  $(ab, 0)$  相当于作第四比例项  $1:a=b:x$ , 作  $(\sqrt{a}, 0)$  相当于作比例中项  $1:x=x:a$ , 这两个作图都是熟知的). 这就可以得出, 尺规的作图职能就是 1~4. 特别地, 如果要检验一个尺规作图问题能不能解, 只要检查所求作的点的坐标能不能由已给点的坐标经过四则及开平方运算得出就行了.

这里也许会发生一种疑问: 因把一个作图题转化为点的作图的化法很多, 会不会发生这样的情形: 按照某一种化法甲, 所求作的点的坐标可以由已给点的坐标经四则及开平方运算得出, 而按另一种化法乙 (它的坐标系和求作的点都可能与甲法不同) 却不能? 这是不会发生的, 因若发生这种情况, 由化

法甲. 所求作的图可以用尺规作出, 因而在乙法中所求作的点也都可以作出, 这样它们在化法乙中的坐标就都可以由给定点(在化法乙中)的坐标经四则和开平方运算得出, 即得矛盾.

[例 1] 立方倍积问题: 给定一个棱长为  $a$  的立方体  $A$ , 求作一个立方体  $B$ , 使  $B$  的体积为  $A$  的 2 倍.

立方体  $B$  的体积为  $2a^3$ , 它的棱长为  $\sqrt[3]{2}a$ , 因此问题是作  $\sqrt[3]{2}$ .

[例 2] 三等分角问题: 把给定角三等分.

给定一个角  $\alpha$ , 我们用它的顶点作原点  $O$ , 它的一边(所谓“始边”)作为  $x$  轴(正半轴), 任取单位长度建立一个直角坐标系, 并且以

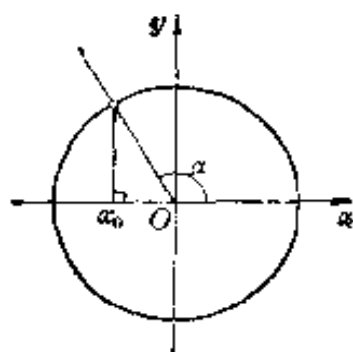


图 2-1

以  $O$  为圆心, 1 为半径作一个圆(如图 2-1), 角的另一边(所谓“终边”)与  $\odot O$  交点的横坐标为  $x_0 = \cos \alpha$ . 三等分角  $\alpha$  的问题, 可以化为求作点  $(\cos \frac{\alpha}{3}, \sin \frac{\alpha}{3})$ . 实际上, 只要在  $x$  轴

上作出坐标为  $x = \cos \frac{\alpha}{3}$  的点就行了.

由加法定理, 得

$$\begin{aligned} x_0 = \cos \alpha &= \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\alpha}{3} \\ &= \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \left( 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{3} \right) \cos \frac{\alpha}{3} \\ &= 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3} = 4x^3 - 3x. \end{aligned} \quad (1)$$

这就得到了  $x$  应满足的方程.

例 1 和例 2 都是不能用圆规直尺作出的. 要证明这一点,

只需要证明方程(1)的解不能由  $x_0$  经四则及开平方运算得出,  $\sqrt[3]{2}$  不能由整数经四则和开平方运算得出. 这是纯粹的代数问题. 这类问题的证明一般要用到“伽罗华理论”, 超出了本文的范围. 下面将用初等的方法来讨论.

**引理 1** 若三次方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

有一个根可以由  $a, b, c$  经四则及开平方运算得出, 那么它一定有一个根可以由  $a, b, c$  经四则运算得出.

**证明** 首先要解释一下, 所谓“经四则及开平方运算得出”, 一般需要多次开平方运算. 例如, 由整数作  $\sqrt{2+\sqrt{2}}$  需要两次开平方, 作出  $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$  需要三次开平方. 在这里, 开平方是有先后次序的, 例如, 必须先作  $\sqrt{2}$  及  $\sqrt{3}$ , 才能作  $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ . 注意到这一点, 我们先建立如下的定义.

设  $K_0$  为所有可由  $a, b, c$  经四则运算得出的数组成的集合, 在  $K_0$  中选一个数  $y_0 > 0$ , 使得  $\sqrt{y_0} \notin K_0$  (只要  $a, b, c$  不全为 0, 这总是可能的), 记  $K_1$  为所有形如  $a' + b'\sqrt{y_0}$  (其中  $a', b'$  为  $K_0$  中的任意数) 的数组成的集合, 则  $K_1 \supset K_0$ . 一般地, 若  $K_i$  已经作出, 在  $K_i$  中取一个数  $y_i > 0$ ,  $\sqrt{y_i} \notin K_i$ , 记  $K_{i+1}$  为所有形如  $a' + b'\sqrt{y_i}$  (其中  $a', b'$  为  $K_i$  中的任意数) 的数组成的集合, 显然  $K_{i+1} \supset K_i$ . 由归纳法可以证明:  $K_n$  中的数经过四则运算仍在  $K_n$  中 (当  $n=0$  时, 由定义可知  $K_0$  中的数经四则运算仍在  $K_0$  中). 假设  $K_i$  中的数经四则运算仍在  $K_i$  中, 设  $x_1, x_2$  为  $K_{i+1}$  中的两个数:  $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{y_i}$ ,  $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{y_i}$  (其中  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K_i$ ), 于是

$$\begin{aligned} x_1 \pm x_2 &= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{y_i}, \\ x_1 x_2 &= (a_1 a_2 + b_1 b_2 y_i) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{y_i}, \end{aligned}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2y_i}{a_2^2 + b_2^2y_i} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2y_i} \sqrt{y_i}. \quad (\text{若 } x_2 \neq 0)$$

由归纳法假设,  $a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2, a_1a_2 + b_1b_2y_i, a_1b_2 + a_2b_1, \frac{a_1a_2 + b_1b_2y_i}{a_2^2 + b_2^2y_i}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2y_i} \in K_i$ , 因此  $x_1 \pm x_2, x_1x_2, \frac{x_1}{x_2} \in K_{i+1}$ , 即  $K_{i+1}$  中的数经四则运算仍在  $K_{i+1}$  中).

现在来看方程(2). 如果它有一个根可由  $a, b, c$  经四则及开平方运算得出, 我们就可以按上述方法造一串集合  $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ , 使得(2)有一个根在  $K_n$  中. 如果  $K_0$  中没有(2)的根, 我们就可以找到一个  $i$ , 使  $K_i$  中没有(2)的根但  $K_{i+1}$  中有(2)的根. 设  $x_1$  就是  $K_{i+1}$  中的一个(2)的根,  $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{y_i}$  ( $a_1, b_1 \in K_i$ ), 于是

$$0 = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = A + B\sqrt{y_i},$$

其中  $A = a_1^3 + 3a_1b_1^2y_i + aa_1^2 + ab_1^2y_i + ba_1 + c \in K_i$ ,

$$B = 3a_1^2b_1 + b_1^3y_i + 2aa_1b_1 + bb_1 \in K_i.$$

若  $B \neq 0$ , 则  $\sqrt{y_i} = -\frac{A}{B} \in K_i$ , 与  $K_{i+1}$  的构造法矛盾, 故

只能有  $B=0, A=0$ . 令  $x_2 = a_1 - b_1\sqrt{y_i}$ , 就有

$$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = A - B\sqrt{y_i} = 0,$$

即  $x_2$  也是(2)的根. 设(2)的另一个根为  $x_3$ , 由韦达定理可知

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$

于是  $x_3 = -a - x_1 - x_2 = -a - 2A \in K_i$ ,

这与  $K_i$  中没有(2)的根矛盾. 这个矛盾说明了  $K_0$  中有(2)的根. 证毕.

现在来看例1和例2. 在例1中,  $x^3 - 2 = 0$  的根都不是有理数, 故由引理1,  $\sqrt[3]{2}$  不能用尺规作出. 在例2中, 方程(2)的根一般也是不能由  $x_0$  经四则运算得出的, 例如当  $\alpha = 60^\circ$  时, 不难验证  $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$  没有有理根, 因此用圆

规直尺作不出  $20^\circ$  的角来, 这也就说明用圆规直尺不能一般地解决三等分角问题. 但在一些特殊情况还是可能的, 例如  $72^\circ$  的角就可以用尺规三等分.

[例 3] 等分圆周问题: 将圆周分为  $n$  等分 ( $n > 2$ ).

这就是要作出角  $\frac{2\pi}{n}$ , 或者作出  $x = \cos \frac{2\pi}{n}$ ,  $y = \sin \frac{2\pi}{n}$ .

由棣美佛定理,

$$\begin{aligned}(x + yi)^n &= \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n \\ &= \cos n \cdot \frac{2\pi}{n} + i \sin n \cdot \frac{2\pi}{n} = 1.\end{aligned}\quad (3)$$

比较上式两边的实部和虚部, 就得到两个关于  $x, y$  的方程. 高斯证明了, (3) 的解可由整数经四则及开平方运算得出当且仅当  $n$  满足如下条件: 若将  $n$  分解成质因子的积, 它含有任意重的因子 2, 另外还可以含有若干个形如  $2^{2^k} + 1$  的质因子, 每个至多一重. 例如

$$n = 2^3 \cdot (2^{2^0} + 1) (2^{2^1} + 1) (2^{2^2} + 1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 65537.$$

因此只有当  $n$  满足这个条件时,  $n$  等分圆周才能用尺规完成. 注意, 形如  $2^{2^k} + 1$  的数不一定是质数, 如果它是质数, 就称为“费尔马质数”, 至今人们所知道的费尔马质数只有五个: 3、5、17、257 和 65537.

## (二) 只用直尺作图

只用直尺作图, 常常要利用一些给定的图, 如平行线, 圆等. 否则, 可作的图很少.

例如, 可以作出同一直线上三点  $A, B, C$  的第四调和点  $D$ , 即使得  $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$ .



**作法** 过  $C$  任作一条异于  $AB$  的直线(图 2-2), 在这直线上任取异于  $C$  的两点  $P, Q$ , 连结  $PA, QB$  交于  $M$ , 连结  $PB, QA$  交于  $N$ , 再连结  $MN$  与  $AB$  交于  $D$ .

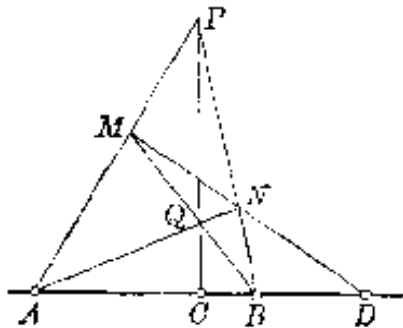


图 2-2

**证明** 由梅尼劳斯定理,

$$\frac{AM}{MP} \cdot \frac{PN}{NB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1,$$

再由西瓦定理,  $\frac{AM}{MP} \cdot \frac{PN}{NB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1,$

两式相除即得  $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$

这里实际上已经涉及一些射影几何知识, 下面还需要更多地用到射影几何.

[例 4] 设  $l, m$  是相互平行的两条直线,  $P$  是不在  $l, m$  上的一点, 试只用直尺过  $P$  作  $l$  的平行线.

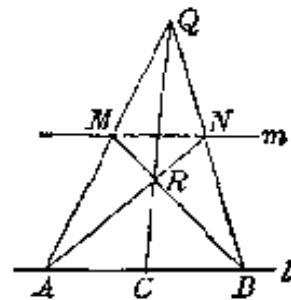


图 2-3

**作法** 在  $l$  上任取两点  $A, B$ , 我们先作出线段  $AB$  的中点. 作法如下: 任取不在  $l, m$  上的一点  $Q$ , 连结  $QA, QB$  分别与  $m$  交于  $M, N$ , 连结  $MB, NC$  交于  $R$ , 连结  $QR$  与  $l$  交于  $C$ , 则  $C$  就是线段  $AB$  的中点(图 2-3).

这是因为, 由西瓦定理可知

$$\frac{QM}{MA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BN}{NQ} = 1,$$

而因  $m \parallel l$ ,  $\frac{QM}{MA} = \frac{QN}{NA}$ , 由此得  $AC = CB$ .

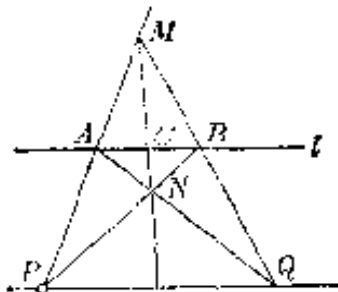


图 2-4

下面再利用  $C$  来作过  $P$  平行于  $l$  的直线. 连结  $PA, PB$ ,

在  $PA$  上取异于  $A, P$  的一点  $M$ , 连结  $MC$  与  $PB$  交于  $N$ , 连结  $AN, MB$  交于  $Q$ , 则  $PQ \parallel l$  (图 2-4).

证明 由西瓦定理  $\frac{AP}{PM} \cdot \frac{MQ}{QB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1$ , 再将  $BC = CA$  代入, 得  $\frac{MP}{PA} = \frac{MQ}{QB}$ , 于是  $AB \parallel PQ$ .

有了例 4 的准备, 就可以证明下面的命题了.

**命题 1** 设在平面上给定两条相互平行的直线  $l, m$ , 并在  $l$  上给定两点  $O, I$ , 以  $O$  为原点在  $l$  上建立坐标系, 使点  $I$  的坐标为 1, 则只用直尺在平面上作图可以对  $l$  上的点进行加、减、乘、除运算 (换言之, 在  $l$  上可以作出这样的点, 它的坐标可以由  $l$  上给定点的坐标经四则运算得出), 而且也只能进行这种作图 (即: 如果在  $l$  上给定一些点, 求作  $l$  上的另一些点, 则仅当所求作的点的坐标都可以由给定点的坐标经四则运算得出时, 才能够只用直尺完成作图).

证明 我们写出作图法. 设在  $l$  上任给定两点  $A, B$ , 它们的坐标分别是  $a, b$ .

i) 加法. 过  $A, B, O$  各作一条异于  $l$  的直线, 使它们不共点且互不平行. 设过  $O$  作的直线与过  $A, B$  作的直线分别交于  $P, Q$ , 过  $P$  作  $l$  的平行线 (由例 3, 这是作得出的) 与  $BQ$  交于  $R$ , 过  $Q$  作  $l$  的平行线 (由例 3, 这是作得出的) 与  $AP$  交于  $S$ , 连结  $RS$  与  $l$  交于  $C$ , 则  $C$  的坐标  $c = a + b$  (图 2-5).

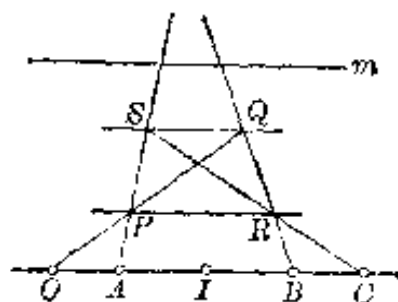


图 2-5

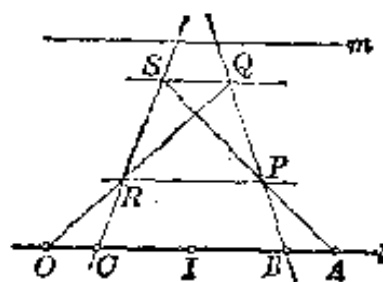


图 2-6

这是因为, 由  $l \parallel PR \parallel QS$  可得  $\frac{OA}{QS} = \frac{AP}{PS} = \frac{BR}{RQ} = \frac{BC}{QS}$ , 于是  $BC = OA$ , 因此  $C$  的坐标  $c = a + b$ .

ii) 减法. 过  $A$ 、 $B$ 、 $O$  各作一条异于  $l$  的直线, 使它们不共点也互不平行. 设过  $B$  作的直线与过  $A$ 、 $O$  作的直线分别交于  $P$ 、 $Q$ , 过  $P$  作  $l$  的平行线与  $OQ$  交于  $R$ , 过  $Q$  作  $l$  的平行线与  $AP$  交于  $S$ , 连结  $RS$  与  $l$  交于  $C$ , 则  $C$  的坐标  $c = a - b$  (图 2-6).

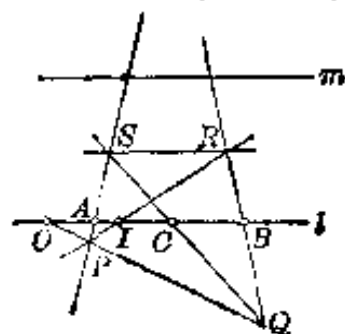


图 2-6

这是因为, 与 i) 相仿可知  $c + b = a$ , 于是  $c = a - b$ .

iii) 乘法. 在  $l$  外任取一点  $P$ , 连结  $PO$ 、 $PA$ 、 $PI$ , 过  $B$  作一条异于  $l$  的直线使之与  $PO$ 、 $PI$  均相交, 设交点分别为  $Q$ 、 $R$ , 过  $R$  作  $l$  的平行线与  $PA$  交于  $S$ , 连结  $QS$  与  $l$  交于  $C$ , 则  $C$  的坐标  $c = ab$  (图 2-7).

这是因为, 将梅尼劳斯定理分别应用到  $\triangle SAC$  和  $\triangle RIB$  可得

$$\frac{SP}{PA} \cdot \frac{AO}{OC} \cdot \frac{CQ}{QS} = 1, \quad \frac{RP}{PI} \cdot \frac{IO}{OB} \cdot \frac{BQ}{QR} = 1,$$

再由  $RS \parallel l$  得  $\frac{SP}{PA} = \frac{RP}{PI}$ ,  $\frac{CQ}{QS} = \frac{BQ}{QR}$ , 于是  $\frac{AO}{OC} = \frac{IO}{OB}$ , 即  $\frac{a}{c} = \frac{1}{b}$  或  $c = ab$ .

iv) 除法. 设  $B$  异于  $O$ . 在  $l$  外任取一点  $P$ , 连结  $PO$ 、 $PA$ 、 $PB$ , 过  $I$  作一条异于  $l$  的直线使之与  $PO$ 、 $PB$  都相交, 分别记交

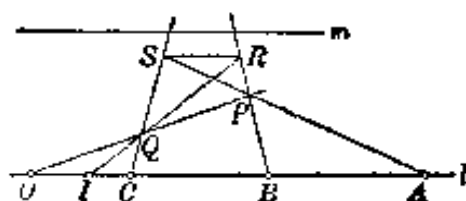


图 2-7

点为  $Q$ 、 $R$ , 过  $R$  作  $l$  的平行线与  $AP$  交于  $S$ , 连结  $QS$  与  $l$  交

于  $C$ , 则  $C$  的坐标  $c = \frac{a}{b}$  (如图 2-8).

这是因为, 与 iii) 相仿可得  $a = bc$ , 故  $c = \frac{a}{b}$ .

下面来证明命题 1 的后半部分. 设在  $l$  上给定一些点. 由上面的几个作图可以看出, 我们常常要“任作一条直线”或“任取一个点”, 前者也可以归结为任取一个点. 这些任取的点的坐标是不定的 (其实就是参变量), 前已指出, 两条直线相交, 其交点坐标可由两直线上各给定的两点的坐标经四则运算得到. 在目前情况下, 我们在作图过程中作出的点的坐标通常为含参变量的分式 (即依赖于“任取的”点), 但是最后在  $l$  上作出的点应该不随“任取的”点而变, 即其坐标不含参变量. 这样, 一方面, 最终作出的点的坐标可由给定点的坐标及“任取”点的坐标经四则运算得到 (即可表为这些坐标的一个分式), 另一方面, 它又不依赖于“任取”点, 即在其表达式中实际上不含参变量. 这就是说, 所作出的点的坐标可以表为已给坐标的一个分式. 证毕.

### (三) 有给定圆的直尺作图

我们现在来考察一下, 在什么条件下只用直尺可以完成尺规作图的全部任务. 只用直尺当然作不出圆来, 这里所谓的“完成尺规作图的全部任务”, 是在本书第 10 页 i~iii 意义下的, 就是说, 只要能完成 i~iii 的作图, 就认为可以完成尺规作图的全部任务了. 事实上, 如果作图题要求作一个圆, 那么如已作出这个圆的圆心及圆上的一点, 所剩的只是实际地把这个圆画出来.

**命题 2** 如果在平面上给定一个圆及其圆心, 则只用直

尺就能完成全部尺规作图的任务.

**证明** 我们来逐条验证本书第 11 页中的作图职能 1~4

在命题 2 的条件下都可以由直尺完成.

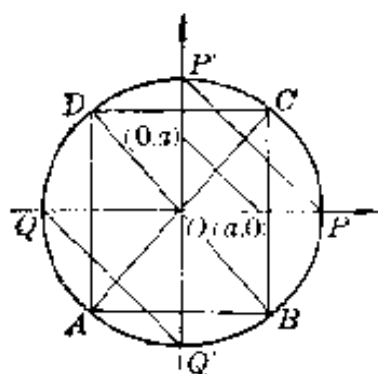


图 2-9

1) 过给定圆的圆心  $O$  任作两条直线与圆相交于四个点, 它们两两相连组成一个矩形  $ABCD$ , 于是由例 4, 可以用直尺过  $O$  分别作  $AB$ 、 $BC$  的平行线, 这两直线与  $\odot O$  的交点分别记为  $P$ 、 $Q$  及  $P'$ 、 $Q'$  (图 2-9). 令  $O$ 、 $P$ 、 $P'$  的坐标分别为  $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ , 这就建立了一个直角坐标系.

2) 显然, 过任一点可以作两坐标轴的平行线.

3) 连结  $PP'$  和  $QQ'$ . 由于  $PP' \parallel QQ'$ , 过坐标为  $(a, 0)$  的点可作  $PP'$  的平行线, 它与  $OP'$  的交点坐标为  $(0, a)$  (图 2-9). 反过来, 同样可以由点  $(0, b)$  作出点  $(b, 0)$ .

4) 已经知道用直尺在  $OP$  上可以进行四则运算, 所需要验证的就是开平方运算了. 设点  $A$  的坐标为  $(a, 0)$ ,  $a > 0$ , 则可以用直尺作出坐标为  $(\frac{|1-a|}{1+a}, 0)$  的点  $B$  (如图 2-10), 过

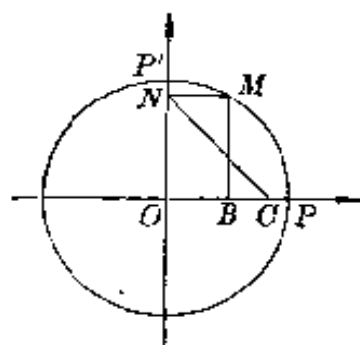


图 2-10

$B$  作  $OP'$  的平行线与  $\odot O$  在第一象限交于  $M$ , 过  $M$  作  $OP$  的平行线与  $OP'$  交于  $N$ , 过  $N$  作  $PP'$  的平行线与  $OP$  交于  $C$ , 则不难算出  $C$  的坐标为  $(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}, 0)$ , 由此也就可以作出坐标为  $(\sqrt{a}, 0)$  的点.

这就完成了命题 2 的证明.

如果给定一个圆, 但没有给出其圆心, 只用直尺能不能完成尺规作图的任务呢? 答案是否定的. 为了证明这一点, 只须证明只用直尺不能作出给定圆的圆心就行了. 下面的证明用到了“投影”的思想.

[例 5] 在平面  $P$  上给定一个圆  $\odot O$ , 但不给出它的圆心  $O$ , 则只用直尺不能作出它的圆心.

**证明** 任作  $P$  的一个不过  $O$  的垂面  $Q$ , 与平面  $P$  交于直线  $l$  (图 2-11). 过  $O$  作  $l$  的垂面  $R$  与  $l$  交于  $N$ , 与  $\odot O$  交于  $A$ 、 $B$ , 不妨设  $A$  在  $B$ 、 $N$  之间. 在平面  $R$  内过  $A$ 、 $B$  各作一直线, 使它们的交点  $M$  不在平面  $P$ 、 $Q$  上, 并且  $\angle MAN + \angle MBN = 90^\circ$  (这总是可以做得到的). 设  $MA$ 、 $MB$  与平面  $Q$  分别交于  $A'$ 、 $B'$ . 作  $\angle AMB$  的平分线与平面  $P$ 、 $Q$  分别交于  $S$ 、 $S'$ , 则

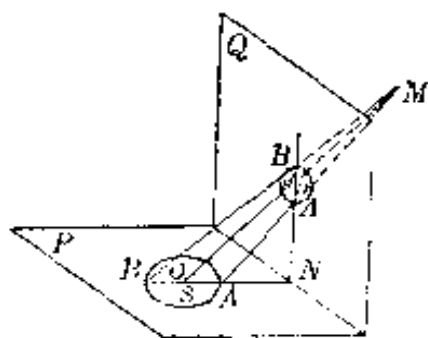


图 2-11

$$\begin{aligned}\angle MSN &= \angle MBN + \angle BMS = \angle MBN + \frac{1}{2} \angle BMA \\ &= \angle MBN + \frac{1}{2} (\angle MAN - \angle MBN) \\ &= \frac{1}{2} (\angle MAN + \angle MBN) = 45^\circ, \\ \angle SS'N &= 45^\circ.\end{aligned}$$

以  $M$  为中心, 把平面  $P$  “投影”到平面  $Q$  中去, 就是说, 对平面  $P$  上的任一点  $C$ ,  $MC$  与平面  $Q$  的交点 (如果有的话) 称为  $C$  在平面  $Q$  中的投影. 在这个投影之下, 直线变成直线, 点  $A$ 、 $B$ 、 $S$  分别变成点  $A'$ 、 $B'$ 、 $S'$ .  $M$  与  $\odot O$  上各点的连线组

成一个椭圆锥, 它与平面  $Q$  的交线就是  $\odot O$  在平面  $Q$  中的投影. 这个椭圆锥底面的长轴与平面  $P$ 、 $Q$  都平行, 而短轴(注意, 短轴在平面  $R$  上且垂直于  $MS$ )与平面  $P$ 、 $Q$  均成  $45^\circ$  的角. 因此, 平面  $Q$  与椭圆锥的交线相似于平面  $P$  与椭圆锥的交线, 即也是一个圆, 记为  $\odot O'$ .  $O'$  不是  $O$  在平面  $Q$  中的投影, 因为不妨设  $MA > MB$ , 显然  $O$  在线段  $BS$  上,  $O'$  在线段  $A'S'$  上, 而线段  $BS$  在投影下变到  $B'S'$ .

现在, 假如在平面  $P$  上只用直尺可以作出点  $O$ , 前已注意到, 在作图中仅仅是利用一些直线和圆相互的相交, 而相交性在投影之下是不会改变的, 即交点投影到交点. 设在作图中作了直线  $l_1, l_2, \dots$ , 它们在平面  $Q$  上的投影分别为  $l'_1, l'_2, \dots$ , 则  $l_1, l_2, \dots$  和  $\odot O$  的关系与  $l'_1, l'_2, \dots$  和  $\odot O'$  的关系是一样的. 既然由  $l_1, l_2, \dots$  相交得到  $\odot O$  的圆心  $O$ , 那么它们的投影  $l'_1, l'_2, \dots$  相交也应该得到  $\odot O'$  的圆心  $O'$ , 于是  $O'$  就是  $O$  在平面  $Q$  中的投影, 然而我们前面已经注意到这是不成立的. 这个矛盾就证明了不可能只用直尺作出圆心  $O$ .

尽管如此, 在仅给出圆不给出圆心的情况下, 只用直尺仍能进行许多有趣的作图.

[例 6] 给定一个圆(不给圆心)及一点  $P$ , 试只用直尺过  $P$  作圆的切线.

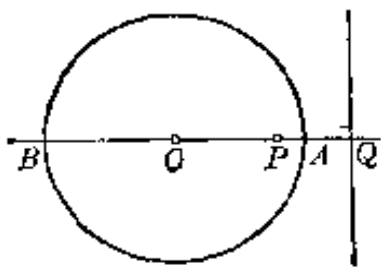


图 2-12

我们先介绍一下射影几何中的“极线”的概念.

给定  $\odot O$  及异于  $O$  的一点  $P$ , 连结  $OP$  与  $\odot O$  交于  $A$ 、 $B$ , 其中  $A$  在射线  $OP$  上. 在射线  $OP$  上取一

点  $Q$  使  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ , 过  $Q$  作  $OP$  的垂线, 则这条垂线称为  $P$

关于  $\odot O$  的极线 (如图 2-12).

由这个定义, 若  $P$  在  $\odot O$  外, 则  $P$  关于  $\odot O$  的极线与  $\odot O$  相交; 若  $P$  是  $\odot O$  内异于  $O$  的点, 则  $P$  关于  $\odot O$  的极线在圆外; 若  $P$  在  $\odot O$  上, 则  $P$  关于  $\odot O$  的极线就是过  $P$  点的切线.

极线有许多有趣的性质.

**引理 2** 若  $P$  在  $\odot O$  外,  $PM$ 、 $PN$  是  $\odot O$  的切线,  $M$ 、 $N$  是切点 (如图 2-13), 则  $MN$  就是  $P$  关于  $\odot O$  的极线.

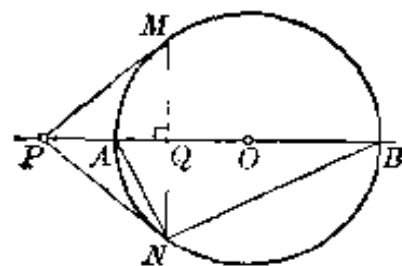


图 2-13

**证明** 连结  $OP$  与  $\odot O$  交于  $A$ 、 $B$ , 与  $MN$  交于  $Q$ , 则易见  $MN \perp OP$ . 连结  $NA$ 、 $NB$ , 则  $NA$ 、 $NB$  分别是  $\angle PNQ$  与其补角的平分线, 因此  $\frac{PA}{AQ} = \frac{PN}{NQ} = \frac{PB}{BQ}$ , 即  $\frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PB}$ , 故  $MN$  为  $P$  关于  $\odot O$  的极线.

**引理 3** 若  $P$  不在  $\odot O$  上, 割线  $PQ$  与  $\odot O$  交于  $A$ 、 $B$ , 与  $P$  的极线交于  $Q$ , 则  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ .

**证明** 连结  $OP$  与  $\odot O$  交于  $A'$ 、 $B'$ , 连结  $AA'$ 、 $BB'$  交于

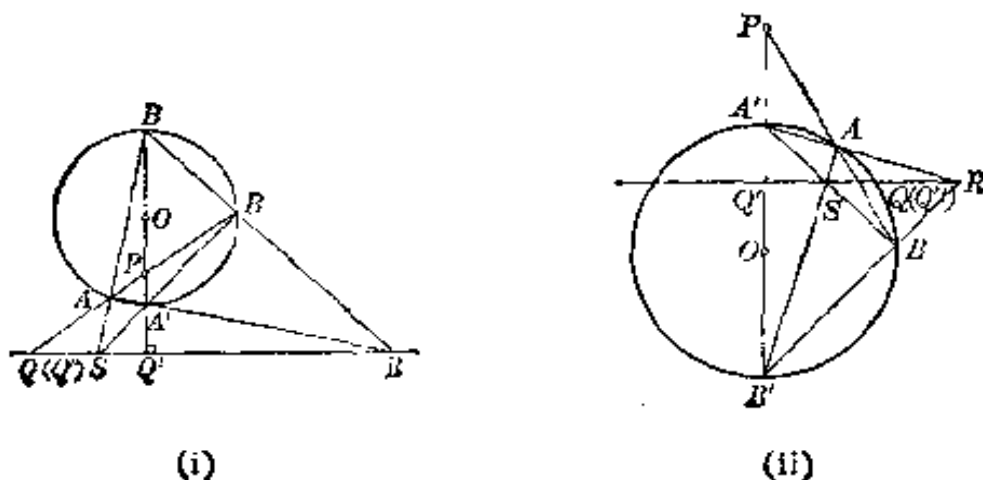


图 2-14



$R$ , 连结  $AB'$ 、 $BA'$  交于  $S$ , 连结  $RS$  与  $OP$  交于  $Q'$  (如图 2-14). 则因  $A'B'$  是直径,  $\angle A'AB' = \angle A'BB' = 90^\circ$ , 又由  $\triangle A'B'R$  的三条高交于一点可知  $RS \perp OP$ . 由本书第 15 页末一行的例, 可知  $\frac{A'P}{PB'} = \frac{A'Q'}{Q'B'}$ , 故  $RS$  就是  $P$  关于  $\odot O$  的极线, 因而  $Q$  在  $RS$  上. 再由本书第 15 页末一行的例, 有  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ .

**推论** 若  $P$  不在  $\odot O$  上, 过  $P$  的割线与  $\odot O$  交于  $A$ 、 $B$ ,  $Q$  是  $AB$  上的一点, 且  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ , 则  $Q$  在  $P$  关于  $\odot O$  的极线上.

这是因为, 若  $AB$  与  $P$  的极线交于  $Q''$ , 则  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ''}{Q''B}$ , 故  $Q$  与  $Q''$  重合 (参看图 2-14).

**引理 4** 设  $P$ 、 $Q$  是异于  $O$  的两点. 若  $P$  在  $Q$  关于  $\odot O$  的极线上, 则  $Q$  也在  $P$  关于  $\odot O$  的极线上.

**证明** 若  $P$ 、 $Q$  中有一点在  $\odot O$  上, 例如  $P$  在  $\odot O$  上, 则

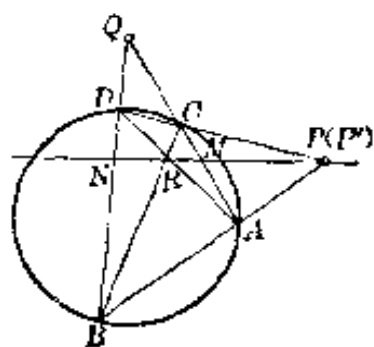


图 2-15

引理 4 就是说, 若  $Q$  在过  $P$  的切线上, 则  $Q$  关于  $\odot O$  的极线过  $P$ , 且反之亦然. 这实际上就是引理 2.

以下设  $P$ 、 $Q$  都不在  $\odot O$  上. 过  $P$  任作  $\odot O$  的一条割线与  $\odot O$  交于  $A$ 、 $B$ , 连结  $QA$  与  $\odot O$  交于另一点  $C$ , 连结  $QB$  与  $\odot O$  交于另一点  $D$  (因为  $PA$  是任取的, 总可以使得  $QA$ 、 $QB$  都不与  $\odot O$  相切). 连结  $AD$ 、 $BC$  交于  $R$ , 连结  $CD$  与  $AB$  交于  $P'$ , 连结  $P'R$  与  $QA$ 、 $QB$  分别交于  $M$ 、 $N$  (图 2-15). 由本书第 15 页末一行的例, 知  $\frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QC}$ ,  $\frac{BN}{NC} = \frac{BQ}{QC}$ , 故由引理 3 的推论

知  $M$ 、 $N$  都在  $Q$  的极线上, 因此  $MN$  就是  $Q$  的极线. 这样,  $P$ 、 $P'$  都在  $Q$  的极线  $MN$  上, 但  $MN$  与  $AB$  只有一个交点, 故  $P$  与  $P'$  重合. 由相仿的推理, 可知  $QR$  就是  $P$  关于  $\odot O$  的极线, 即  $Q$  在  $P$  关于  $\odot O$  的极线上.

引理 4 的证明启发了我们, 对于不在  $\odot O$  上的一点  $P$ , 可以只用直尺过  $P$  作  $\odot O$  的切线, 方法如下: 过  $P$  任作  $\odot O$  的两条割线, 分别与  $\odot O$  交于  $A$ 、 $B$  和  $C$ 、 $D$ , 连结  $AC$ 、 $BD$  交于  $E$ , 连结  $AD$ 、 $BC$  交于  $F$ , 再连结  $EF$  与  $\odot O$  交于  $M$ 、 $N$ , 则  $PM$ 、 $PN$  就是所求作的切线(图 2-16).

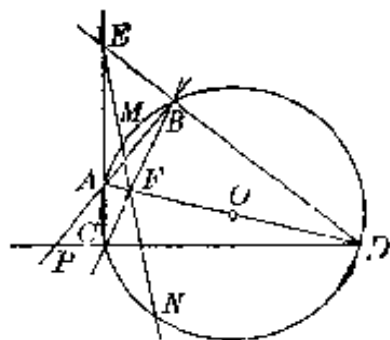


图 2-16

这是因为, 由引理 4 的证明可知  $EF$  就是  $P$  关于  $\odot O$  的极线, 故由引理 2 知  $PM$ 、 $PN$  就是  $\odot O$  的切线.

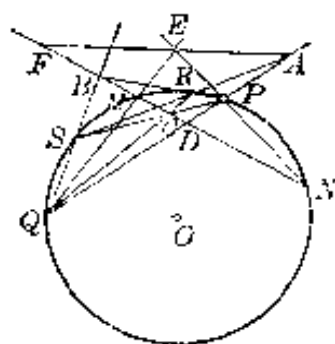


图 2-17

如果  $P$  在  $\odot O$  上, 作图要复杂些. 如图 2-17, 过  $P$  任作  $\odot O$  的一条割线与  $\odot O$  交于另一点  $Q$ , 再不过  $P$ 、 $Q$  作  $\odot O$  的一条割线与  $\odot O$  交于  $R$ 、 $S$ , 与  $PQ$  交于  $A$ . 连

结  $PR$ 、 $QS$  交于  $B$ , 连结  $PS$ 、 $QR$  交于  $C$ , 连结  $BC$  与  $PQ$  交于  $D$ , 与  $\odot O$  交于  $M$ 、 $N$ , 连结  $QM$ 、 $PN$  交于  $E$ , 连结  $AE$  与  $BC$  交于  $F$ , 则  $PF$  就是所求作的切线.

这是因为, 由作图及引理 4 的证明可知,  $BC$  就是  $A$  的极线, 因而  $A$  在  $D$  的极线上, 另外还有  $E$  也在  $D$  的极线上, 故  $AE$  就是  $D$  的极线. 既然  $F$  同时在  $A$  和  $D$  的极线上, 由引理 4,  $A$  和  $D$  都在  $F$  的极线上,  $AD$  就是  $F$  的极线. 故由引

理 2, 知  $PF$  就是  $\odot O$  的切线.

对  $P$  在  $\odot O$  上的情形, 还有一种更简单的作图法:

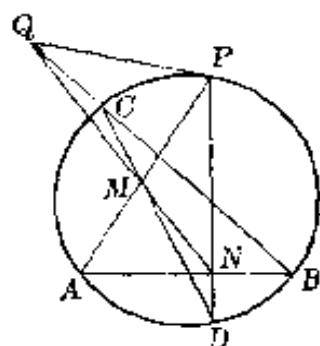


图 2-18

在  $\odot O$  上任取异于  $P$  的四点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ , 连结  $PA$ 、 $CD$  交于  $M$ , 连结  $AB$ 、 $DP$  交于  $N$ , 连结  $MN$ 、 $BC$  交于  $Q$ ,  $PQ$  就是所求作的切线 (图 2-18).

这个作法的证明需要用到巴斯加定理, 这里从略.

#### (四) 反演变换与圆规作图

用圆规当然作不出直线来. 但是, 如同前述那样, 如果只要求作出所求作的直线上的两点, 而不要求最终把直线画出来的话, 只用圆规就可以解决全部尺规作图问题. 为了证明这一点, 先介绍一下在几何中扮演着重要角色的反演变换.

给定一个圆, 半径为  $r$ , 圆心为  $O$ . 对于任一异于  $O$  的点  $P$ , 连结  $OP$ , 在射线  $OP$  上取一点  $P'$ , 使得  $OP \cdot OP' = r^2$ , 则称  $P'$  为  $P$  关于  $\odot O$  的反演点. 这时,  $P$  也是  $P'$  关于  $\odot O$  的反演点. 把平面上异于  $O$  的点变成它的反演点的变换, 称为反演变换. 很明显, 反演变换把  $\odot O$  内的点变到  $\odot O$  外, 把  $\odot O$  外的点变到  $\odot O$  内, 而保持  $\odot O$  上的点不变. 但须注意,  $O$  是没有反演点的.

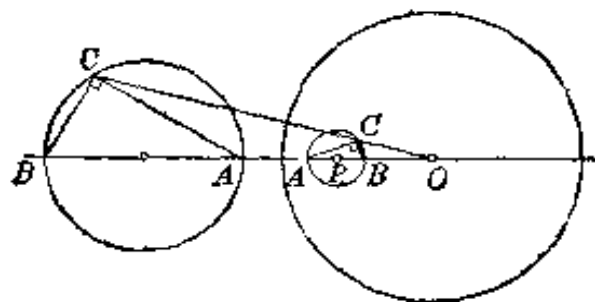


图 2-19

在反演变换下, 圆和直线变成什么?

**引理 5** 若  $\odot P$  不经过点  $O$ , 则  $\odot P$  在关于  $\odot O$  的反演变换下变成一个(不过  $O$  的)圆.

**证明** 设  $\odot O$  的半径为  $r$ . 连结  $OP$  与  $\odot P$  交于  $A, B$ , 任取  $\odot P$  上的一点  $C$ , 设  $A, B, C$  关于  $\odot O$  的反演点分别是  $A', B', C'$  (图 2-19). 连结  $OC'$ , 于是  $C'$  在  $OC$  上,  $A', B'$  在  $AB$  上. 由于  $OA \cdot OA' = r^2 = OC \cdot OC'$ , 即  $\frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OA'}$ , 故

$$\triangle OAC \sim \triangle OC'A', \angle A'C'O = \angle CAO.$$

同理  $\angle B'C'O = \angle CBO$ , 于是

$$\begin{aligned} \angle A'C'B' &= \angle B'C'O - \angle A'C'O \\ &= \angle CBO - \angle CAO = \angle ACB = 90^\circ, \end{aligned}$$

即  $C'$  在以  $A'B'$  为直径的圆上. 证毕.

**引理 6** 若直线  $l$  不经过点  $O$ , 则  $l$  在关于  $\odot O$  的反演变换下变成一个过  $O$  的圆.

**证明** 过  $O$  作  $l$  的垂线与  $l$  交于  $P$ . 设  $P$  关于  $\odot O$  的反演点为  $P'$ , 则  $P'$  在  $OP$  上. 对  $l$  上任一点  $A$ , 连结  $OA$ , 则  $A$  关于  $\odot O$  的反演点  $A'$  在  $OA$  上 (图 2-20). 连结  $A'P'$ , 则因  $OA \cdot OA' = OP \cdot OP'$ , 有

$\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}$ ,  $\triangle OAP \sim \triangle OP'A'$ ,  $\angle OA'P' = \angle OPA = 90^\circ$ , 故  $A'$  在以  $OP'$  为直径的圆  $\odot O'$  上.

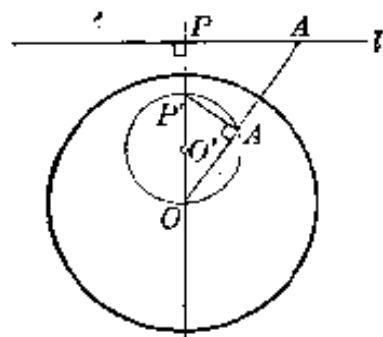


图 2-20

注意:  $\odot O'$  在关于  $\odot O$  的反演变换下变成直线  $l$ , 就是说, 一个过点  $O$  的圆在关于  $\odot O$  的反演变换下变成一条不过  $O$  的直线. 另外, 过  $O$  的直线在关于  $\odot O$  的反演变换下显然变成自身, 这就完全搞清了圆和直线在反演变换下的变化.

**命题 3** 只用圆规可以完成尺规作图的任务.

我们来证明, 用圆规可以完成本书第 10 页的 i~iii 的作图. 证明分三步.

1) 对任一圆  $\odot O$  及异于  $O$  的一点  $P$ , 只用圆规可以作出  $P$  关于  $\odot O$  的反演点.

**作法** 以  $P$  为圆心,  $PO$  为半径作圆, 与  $\odot O$  交于  $R, S$ . 再分别以  $R, S$  为圆心,  $OR$  为半径作圆, 得一异于  $O$  的交点  $P'$ ,  $P'$  就是  $P$  的反演点 (图 2-21).

**证明** 连结  $OP, OR, OS, PR, PS, P'R, P'S, RS$ ,  $RS$  与  $OP$  交于  $M$ . 易见  $P'$  在  $OP$  上,  $RS \perp OP$ ,  $OM = \frac{OP'}{2}$ . 于是

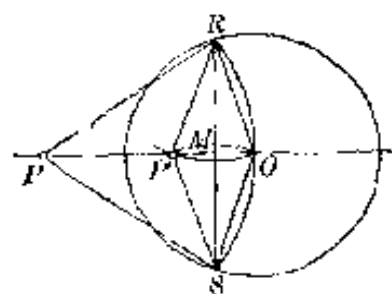


图 2-21

$$RM^2 = RP^2 - PM^2 = PO^2 - \left( PO - \frac{OP'}{2} \right)^2,$$

$$RM^2 = RO^2 - OM^2 = RO^2 - \left( \frac{OP'}{2} \right)^2.$$

由这两式得  $RO^2 = PO \cdot P'O$ , 即  $P'$  是  $P$  关于  $\odot O$  的反演点.

2) 给定不共线的三点  $A, B, C$ , 只用圆规可以作出过  $A, B, C$  的圆.

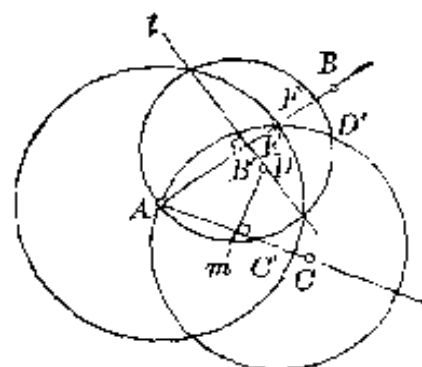


图 2-22

**作法** 以  $A$  为圆心任作一圆, 作  $B$  和  $C$  关于  $\odot A$  的反演点  $B'$  和  $C'$ , 分别以  $B'$  和  $C'$  为圆心,  $B'A$  和  $C'A$  为半径作圆, 两圆有一个异于  $A$  的交点  $D'$ , 再作  $D'$  关于  $\odot A$  的反演点  $D$ ,  $D$  就是所求作的圆的圆心 (图 2-22).

是所求作的圆的圆心 (图 2-22).

**证明** 连结  $AB$ , 由于  $B'$  在  $AB$  上, 故  $\odot B'$  关于直线  $AB$  对称. 在关于  $\odot A$  的反演变换下,  $\odot B'$  变成一条直线  $l$ , 由反演点的作图可知  $l$  关于  $AB$  也是对称的, 即  $l \perp AB$ . 设  $l$  与  $AB$  的交点为  $E$ ,  $\odot B$  与  $AB$  有一个异于  $A$  的交点  $F$ . 注意在关于  $\odot A$  的反演变换下直线  $AB$  不变, 因此  $\odot B'$  与  $AB$  的交点  $F$  应该变成  $l$  与  $AB$  的交点  $E$ , 于是有  $AE \cdot AF = r^2 = AB \cdot AB'$ , 其中  $r$  为  $\odot A$  的半径. 再注意  $AF = 2AB'$ , 就有  $AB = 2AE$ , 即  $E$  是  $AB$  的中点, 而  $l$  是  $AB$  的垂直平分线. 同理, 在关于  $\odot A$  的反演变换下,  $\odot C'$  变为  $AC$  的垂直平分线  $m$ , 故点  $D'$  变成  $l$  与  $m$  的交点, 这就是所求作的圆心.

3) 为了完成第 10 页 i 的作图, 我们取一个不在  $AB$ 、 $CD$  上的点  $P$ , 以  $P$  为圆心任作一个圆  $\odot P$ , 作  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  关于  $\odot P$  的反演点  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$ 、 $D'$ , 于是直线  $AB$  在关于  $\odot P$  的反演变换下变成一个过  $A'$ 、 $B'$ 、 $P$  的圆, 直线  $CD$  在反演变换下变成一个过  $C'$ 、 $D'$ 、 $P$  的圆. 由 2) 知道可以只用圆规作出过  $A'$ 、 $B'$ 、 $P$  的圆和过  $C'$ 、 $D'$ 、 $P$  的圆, 这两个圆有一个异于  $P$  的交点  $Q$ , 再作  $Q$  关于  $\odot P$  的反演点  $Q'$ ,  $Q'$  就是  $AB$  和  $CD$  的交点.

类似地, 可以用圆规完成第 10 页 ii 的作图. 若给定一个圆  $\odot O$  及一条直线  $AB$ , 任取不在  $\odot O$  及  $AB$  上的一点  $O'$ , 以  $O'$  为圆心任作一圆, 在  $\odot O$  上任取三点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ , 作  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $A$ 、 $B$  关于  $\odot O'$  的反演点  $P'$ 、 $Q'$ 、 $R'$ 、 $A'$ 、 $B'$ , 再分别过  $P'$ 、 $Q'$ 、 $R'$  和  $A'$ 、 $B'$ 、 $O'$  各作一个圆, 得到两个异于  $O'$  的交点  $M'$ 、 $N'$ , 再作  $M'$ 、 $N'$  关于  $\odot O'$  的反演点  $M$ 、 $N$ , 于是  $M$ 、 $N$  就是直线  $AB$  与  $\odot O$  的交点.

iii 显然可以用圆规作, 从而证明了只用圆规就可以完成全部尺规作图的任务.

## (五) 其他的作图工具

【例 7】 双边直尺. 用宽为  $d$  的双边直尺, 不但可以作直线, 而且可以作距离为  $d$  的平行线.

用双边直尺可以完成尺规作图的全部任务. 为证明这一点, 我们来逐项检查第 11 页的 1~4.

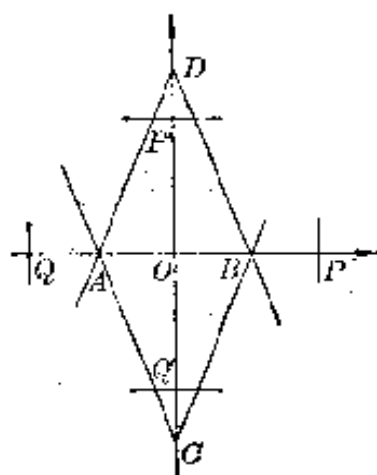


图 2-23

1) 任取两点  $A, B$ , 使  $AB > d$ . 作距离为  $d$  的平行线, 使得其中一条通过  $A$ , 另一条通过  $B$ , 这样的平行线可以作两对, 它们相交得到一个菱形  $ACBD$  (如图 2-23). 连结  $AB, CD$  交于  $O$ , 作两条与  $AB$  平行且距离为  $d$  的直线与  $CD$  分别交于  $P, Q$ , 作两条与  $CD$  平行且距离为  $d$  的直线与  $AB$  分别交于  $P', Q'$ , 令  $O, P, P'$  的坐标分别为  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ , 就可以建立一个直角坐标系.

2)、3) 与命题 2 的证明 2)、3) 相同.

4) 与命题 2 同样, 只要验证开平方运算的可能性就行了. 对于任一点  $A: (a, 0)$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , 作点  $B: \left( \frac{1+a}{|1-a|}, 0 \right)$ , 再作相互平行且距离为  $d$  的两条直线, 使其中的一条过  $O$ , 另一条过  $B$ , 这样的平行线可以作两对, 它们相交得一个菱形  $OCBD$ , 其中  $D$  在第一象限. 于是, 不难算出  $D$  的坐标为  $\left( \frac{1+a}{2|1-a|}, \frac{1+a}{4a} \sqrt{a} \right)$ , 由此就可以作出点  $(\sqrt{a}, 0)$ . 证毕.

一类重要的作图工具是所谓绞接机构, 它是这样做成的:

取一些长度不等的刚性杆, 将它们的某些端点相互绞接起来, 使得杆可以绕绞接点转动. 另一些端点绞接在作图平面的固定点上, 使杆可以绕固定点转动(我们这里所说的转动, 都是在平行于作图平面的平面上转动). 最后, 某个杆的端点上装着笔, 使得在绞接机构运动时, 笔可以在作图平面上画出轨迹.

[例 8] 圆规可以看作一个绞接机构(如图 2-24). 它只有一根杆, 杆的一端  $O$  绞接在作图平面的固定点上, 另一端  $P$  上装着笔. 当杆运动时,  $P$  端的笔画出的轨迹是圆.

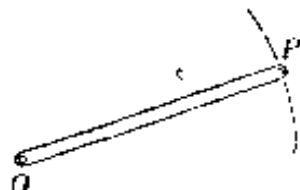


图 2-24

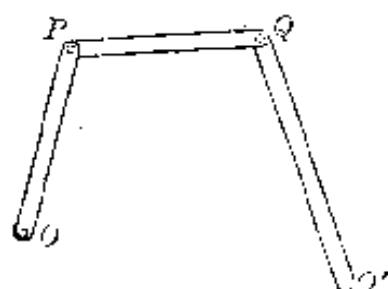


图 2-25

圆规可以画出整个的圆, 但是许多绞接机构只能画出一条代数曲线的一部分, 而不是全部. 图 2-25 就是一个例子. 这个绞接机构由三根杆  $OP$ 、 $PQ$ 、 $QO'$  组成, 其中  $O$ 、 $O'$  绞接在作图平面的两个固定点上,  $OP$  和  $PQ$  在  $P$  端绞接起来,  $PQ$  和  $QO'$  在  $Q$  端绞接起来. 在  $P$  端装着笔. 这个绞接机构一般只能画出一、两条圆弧, 而不能画出整个圆.

[例 9] 波瑟利反演器(图 2-26)由六根杆  $OP$ 、 $OQ$ 、 $RP$ 、 $RQ$ 、 $SP$ 、 $SQ$  组成, 其中  $OP = OQ = r$ ,  $RP = RQ = SP = SQ = s$ ,  $r > s$ .  $O$  绞接在作图平面的固定点上.

以  $O$  为圆心,  $\sqrt{r^2 - s^2}$  为半径作一个圆(如图 2-27). 我们来证明波瑟利反演器的一个重要性质:  $R$  和  $S$  关于  $\odot O$  永远是相互反演点.

心. 连结  $PQ$ 、 $QS$  相交于  $M$ , 容易看出  $R$  也在  $OS$  上, 且  $PQ$



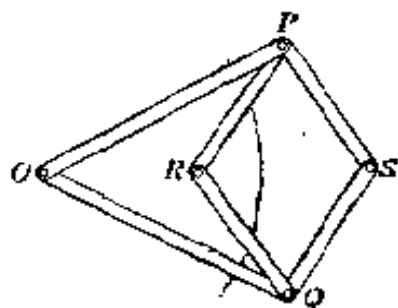


图 2-26

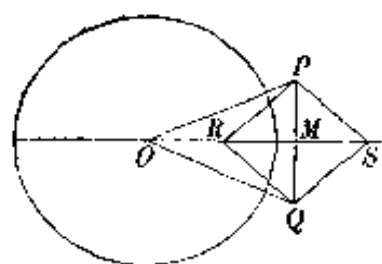


图 2-27

垂直平分  $RS$ , 于是

$$\begin{aligned} r^2 - \left( \frac{OR + OS}{2} \right)^2 &= PO^2 - OM^2 = PM^2 \\ &= PR^2 - RM^2 = s^2 - \left( \frac{OS - OR}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

由此得

$$OR \cdot OS = r^2 - s^2 = (\sqrt{r^2 - s^2})^2.$$

证毕.

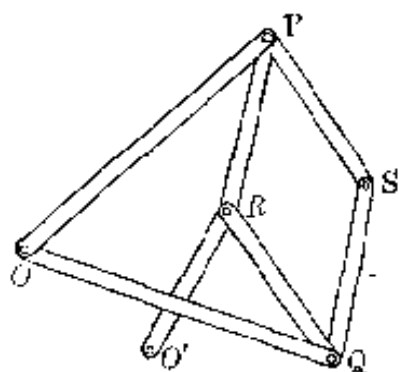


图 2-28

这样, 利用波瑟利反演器可以将曲线作反演变换. 特别地, 如果在波瑟利反演器上加一根杆  $O'R$  (如图 2-28), 其中端  $O'$  铰接在作图平面的 (异于  $O$  的) 固定点上,

且  $O'R = O'O$ , 则当这个铰接机构运动时,  $S$  端画出一条直线的一部分. 这是因为,  $R$  的轨迹是一个过  $O$  的圆  $\odot O'$  的一部分, 它在关于  $\odot O$  的反演变换下变到  $S$  的轨迹, 而由引理 6 可知,  $\odot O'$  在关于  $\odot O$  的反演变换下变成一条直线.

这样, 我们就造出了能画直线的铰接机构.

现在来考察一般的铰接机构. 设它有  $n$  个端点  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , 其中笔装在  $P_n$  上,  $P_1, \dots, P_i$  铰接在作图平面的固定点上 (因此它们的坐标是常数), 共有  $m$  根杆  $P_i P_j$ .

(其中  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq i_k \leq n$ ,  $1 \leq j_k \leq n$ ). 设  $P_i$  的坐标为  $(x_i, y_i)$ . 由于杆是刚性的,  $P_{i_k} P_{j_k}$  ( $1 \leq k \leq m$ ) 的长度保持固定, 设它为常数  $r_k$ . 于是有方程组

$$P_{i_k} P_{j_k}^2 = (x_{i_k} - x_{j_k})^2 + (y_{i_k} - y_{j_k})^2 = r_k^2. \quad (4)$$

注意这里只有  $2(n-l)$  个变量  $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n, y_{l+1}, y_{l+2}, \dots, y_n$ . 根据代数理论, 在一般情况下, 若  $2(n-l) \leq m$ , 则  $P_n$  将固定不动. 若  $2(n-l) > m+1$ , 则  $P_n$  的轨迹将是一个区域而不是一条曲线. 只有当  $2(n-l) = m+1$  的情形最重要, 这时由 (4) 的  $m$  个方程可以消掉变量  $x_{l+1}, \dots, x_{n-1}, y_{l+1}, \dots, y_{n-1}$ , 而得到一个关于  $x_n$  和  $y_n$  的代数方程. 由此可知,  $P_n$  的轨迹是一条代数曲线 (即坐标满足一个代数方程的点的轨迹) 的一部分. 图 2-28 正是这种情形.

反过来, 也可以证明, 对任何一条平面代数曲线, 总可以设计出一个铰接机构, 能够绘出这条代数曲线, 至少可以绘出它的一部分.

铰接机构是非常有力的作图工具. 象三等分角, 立方倍积等作图问题都可以由铰接机构解决. 又如, 利用铰接机构可以绘出蔓叶线 (方程是  $y^2(a-x) = x^3$ ) 或蚌线 (方程是  $(y-a)^2(x^2+y^2) = b^2y^3$ ). 如果有了一条蔓叶线或蚌线, 那么例 1、2 的作图都可以用尺规解决. 还有, 放大器实际上也可以看作铰接机构. 但是, 铰接机构毕竟还有局限性, 不能作出非代数曲线. 利用另一些机构可以作出非代数曲线.

例如摆线. 在坐标平面上取一个圆  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  及圆上一点  $P: (0, 0)$ , 然后让这个圆沿  $X$  轴滚动, 这时点  $P$  描绘出一条曲线 (如图 2-29), 它的参数方程是:

$$\begin{cases} x = \theta - \sin \theta, \\ y = 1 - \cos \theta. \end{cases}$$

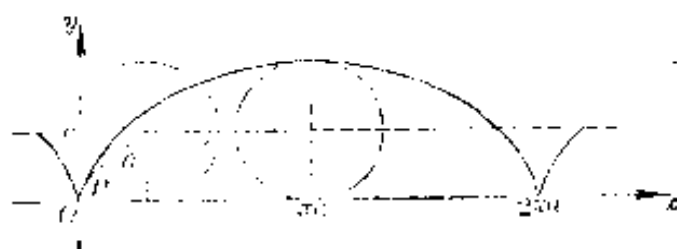


图 2-29

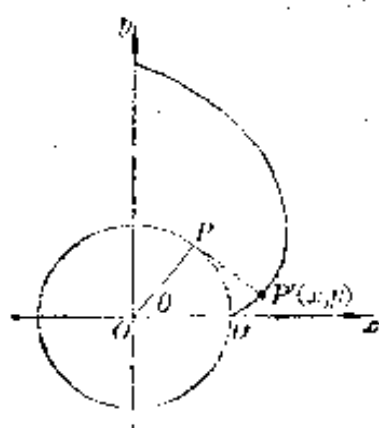


图 2-30

摆线不是代数曲线, 因此不能用绞接机构作出。

又如圆的渐开线。在坐标平面上安装一个半径为 1 的圆柱, 使得圆柱的轴线垂直于坐标平面并且通过原点  $O$ 。在圆柱上绕上线, 线端  $P: (1, 0)$  拴一枝笔, 然后把线拉紧, 将笔绕圆柱转动, 这样绘出一条曲线 (图 2-30), 它的参数方程是

$$\begin{cases} x = \cos \theta + \theta \sin \theta, \\ y = \sin \theta - \theta \cos \theta. \end{cases}$$

这条曲线也是非代数曲线。

# 内角和定理

扬州师范学院数学系 蒋 声

在初中数学课本里,有一个非常基本的几何定理:

**定理 1** (三角形内角和定理) 三角形的三内角之和等于  $\pi$ .

三角形一定是凸的. 从定理 1 稍加推广,立刻得到:

**定理 2** (凸多边形内角和定理) 凸  $n$  边形的内角和为  $(n-2)\pi$ .

**推论** 凸  $n$  边形的外角之和为  $2\pi$ .

在中学范围内,关于内角和定理的介绍,通常就到此为止了. 本文介绍内角和定理在几个不同方面的推广,有助于读者加深理解内角和定理的本质.

## (一)

首先,削弱定理 2 中对多边形的限制条件. 最好不要限定是凸的,因为在测量中常常遇到的是一些凹多边形.

这时需要引进一个辅助概念.

如果多边形的任意两边都不相交,任意一个顶点都不在边上,并且每个顶点仅是两边的端点时,这个多边形就叫做简单多边形.

注意,在上面的定义中,按照通常的习惯,多边形的顶点不认为是边上的点.

简单多边形把平面分成两个区域,一个是它的内部,一个是它的外部. 可以证明,每个简单  $n$  边形的内部区域可用其对角线分成  $n-2$  个三角形. 因而得到:

**定理 3** (简单多边形内角和定理) 简单  $n$  边形的内角之和为  $(n-2)\pi$ .

例如,正五角星如果看成图 3-1 所示的五边形,就不是简单多边形,因为五边中每一边都与另外某两边相交,这时其内角和为  $36^\circ \times 5 = 180^\circ$ ,即等于  $\pi$ ,而不是所期望的  $3\pi$ .



图 3-1

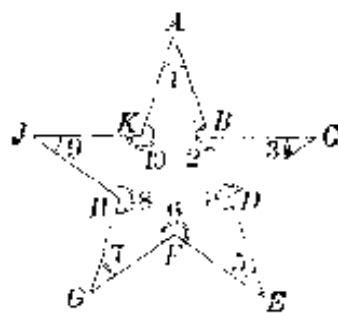


图 3-2

但是,如果将正五角星看成图 3-2 所示的十边形,就成为简单多边形了,它有十个内角,内角和为

$$36^\circ \times 5 + 252^\circ \times 5 = 1440^\circ = (10-2)\pi,$$

这恰好是定理 3 所指明的答数.

关于简单多边形概念和定理 3 的证明,可参看《初等几何学教程》上卷(别列标尔金著,马忠林译,高等教育出版社 1955 年版第 14~17 页,第 64 页). 但是,别列标尔金的书中并未写出简单多边形性质的证明,因为这些貌似简单的性质其实涉及拓扑学里简单闭曲线的若当定理和三角剖分问题,如果局限在初等数学范围内,就很难说清楚这些问题.

## (二)

第二方面的推广,是将以线段为边的普通多边形推广到

以曲线弧为边的曲线多边形。这时，有关概念都要作相应的推广。

设  $C$  是空间的一段曲线弧， $P$  是  $C$  上的一点。我们还假定曲线  $C$  在  $P$  点附近的性质不是特别“坏”的，就是指：若曲线  $C$  的参数方程为

$$x=f(t), y=g(t), z=h(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

$P$  点的参数值为  $t_0$ ，则在  $t_0$  附近，函数  $f(t)$ ,  $g(t)$  和  $h(t)$  都具有所需阶数的连续导数，并且三个函数的一阶导数不同时为零。

如图 3-3，在曲线  $C$  上  $P$  点附近任取一点  $Q$ ，当  $Q$  点沿曲线无限趋近  $P$  点时，割线  $PQ$  将无限趋近于一条确定的直线  $PT$ ，称为曲线在  $P$  点的切线。曲线  $C$  位于  $P$  点附近的一小段曲线弧，可以近似地看成切线  $PT$  上的一个小线段。切线  $PT$  是过  $P$  点的所有直线中与曲线  $C$  关系最密切的一条， $PT$  的方向就是曲线在  $P$  点的方向。

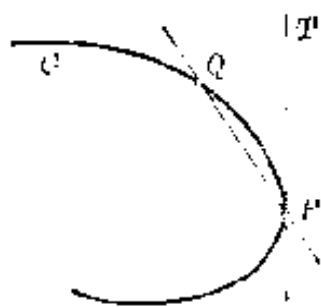


图 3-3

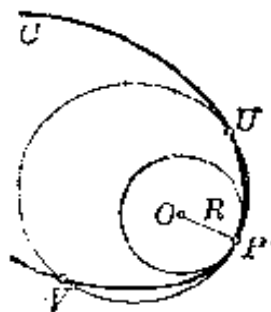


图 3-4

进而在曲线  $C$  上  $P$  点附近任取另外两点  $U$  和  $V$ ，过三点  $P$ 、 $U$ 、 $V$  作一个圆（图 3-4）。令  $U$  和  $V$  沿曲线无限趋近  $P$  点，则圆  $PUV$  无限趋近于一个确定的圆  $O$ ，称为曲线  $C$  在  $P$  点的密切圆（或曲率圆），圆心  $O$  点称为曲线在  $P$  点的曲率中心。曲率圆的半径  $R$  称为曲线在  $P$  点的曲率半径， $R$  的倒

数  $k = \frac{1}{R}$  称为曲线在  $P$  点的曲率. 如果当  $U$  和  $V$  趋近  $P$  点时圆  $PUV$  的半径无限增大, 则规定曲率等于零. 直线在每一点的曲率都等于零. 如果不满足于仅仅了解曲线在一点的方向, 而且还想了解曲线在一点附近的弯曲程度, 那末可将曲线  $C$  在  $P$  点附近的一小段曲线弧, 近似看成  $C$  在  $P$  点的密切圆上的一小段圆弧. 密切圆  $O$  是过  $P$  点的所有圆中与曲线关系最密切的一个圆(图 3-4).

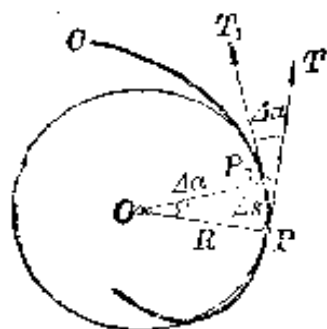


图 3-5

现在, 按照这种局部近似观点, 进行更进一步的考察.

如图 3-5, 设曲线  $C$  在  $P$  点的切线为  $PT$ ,  $\widehat{PP_1}$  是  $C$  在  $P$  点附近的一小段曲线弧,  $P_1T_1$  是  $C$  在  $P_1$  点的切线. 那末由于  $\widehat{PP_1}$  可看成  $P$  点处密切圆  $O$  上的一小段圆弧, 因而  $OP \perp PT$ ,  $OP_1 \perp P_1T_1$ , 所以  $\angle POP_1$  等于切线  $PT$  与  $P_1T_1$  的夹角. 记

$$\angle POP_1 = \Delta\alpha, \quad \widehat{PP_1} = \Delta s,$$

这里角  $\Delta\alpha$  是以弧度为单位的, 因而根据弧度制的定义, 若圆  $O$  的半径为  $R$ , 则

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R}.$$

由此得到

$$k \cdot \Delta s = \frac{\Delta s}{R} = \Delta\alpha.$$

就是说, 当  $P$  点沿曲线  $C$  走过微小弧长  $\Delta s$  到达  $P_1$  点时, 量  $k \cdot \Delta s$  等于  $P$  点处切线  $PT$  变动到  $P_1$  点处切线  $P_1T_1$  所转过的角  $\Delta\alpha$ . 沿着整个曲线求和, 并令每一段小弧  $\Delta s$  都无限趋近于 0, 就得到一个用积分表示的量

$$M = \int_C k ds,$$

称为曲线  $C$  的全曲率. 特别, 若  $C$  是闭曲线, 则其全曲率是沿着闭路  $C$  的积分  $\oint_C k ds$ .

如果两条曲线  $C_1$  和  $C_2$  交于点  $P$ , 那末两曲线在  $P$  点的交角定义成两曲线在  $P$  点的切线  $PT_1$  和  $PT_2$  的夹角 (图 3-6).

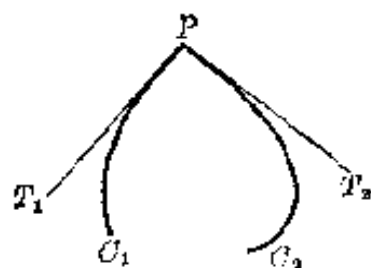


图 3-6

1929 年, 芬克尔 (Fenchel) 证明了一个定理: 正则空间闭曲线的全曲率  $\geq 2\pi$ , 等号当且仅当此曲线为平面凸闭曲线时成立. 从直观上解释, 就是如果空间闭曲线上没有尖角和其它坏点, 那末沿这曲线跑一圈时, 切线方向扭来扭去, 每一瞬间偏转的角度全部积累起来, 至少也要有一个周角.

芬克尔定理后来有许多推广. 从本文目的来看, 其中最有意思的要算是杭州大学白正国教授得到的如下结果:

**定理 4** 设  $C$  是一空间曲线多边形, 具有内角  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , 则它的全曲率

$$\oint_C k ds \geq \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n - (n-2)\pi, \quad (1)$$

等号只限于这多边形是由同一平面上的凸的曲线弧连结而成的 (带有  $n$  个角点的平面凸闭曲线).

特例——若  $C$  是平面上的凸  $n$  边形, 则 (1) 式中等号成立, 而且因为  $C$  的各边都是直线段, 故其全曲率为零, (1) 式成为

$$0 = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n - (n-2)\pi,$$

这正是定理 2 的内容. 所以, 定理 4 是定理 2 在曲线多边形情形下的推广.



### (三)

第三方面的推广，是从平面上的多边形推广到曲面上的多边形。这时，也需要引进一些新的概念。

在曲面上不存在普通意义下的直线，但是也还可以找到一种特殊的曲线，叫做测地线（或称短程线）。从曲面上一点  $P$  沿曲面走到附近一点  $Q$ ，沿测地线走过的弧长要比沿附近其它曲线走过的弧长都显得短些。平面上的测地线就是直线。球面上的测地线是大圆。

在普通平面几何学的三角形和多边形概念中，把平面换成曲面，以线段为边换成以测地线弧为边，就得到测地三角形和测地多边形的概念。测地三角形的内角和，已经不再是常数  $\pi$ ，而要依赖于曲面的弯曲情况了。当然，这里也能找到准确的数量关系，不过要借助所谓“高斯曲率”的概念。

什么是曲面在一点的高斯曲率呢？

为了说明这个重要概念，必须先交代几个辅助概念。这里也假定曲面上没有很“坏”的点。

设  $\Sigma$  是一个曲面， $P$  是  $\Sigma$  上一点。又设  $U$  和  $V$  是曲面  $\Sigma$  上位于  $P$  点附近的另外两个点。过  $P, U, V$  三点作一个平面  $\beta$ ，当点  $U$  和  $V$  沿曲面无限趋近  $P$  点时，平面  $\beta$  无限趋近于一个确定的平面  $\tau$ ，叫做曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的切平面。过  $P$  点

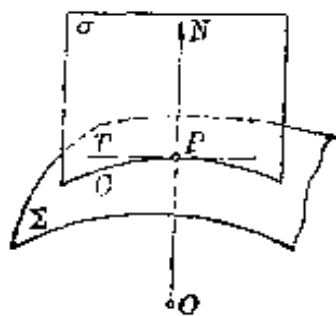


图 3-7

作切平面  $\tau$  的垂线  $PN$ ，叫做曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的法线。在法线上规定一个正方向，例如  $PN$  方向作为正方向。

过法线  $PN$  任意作一平面  $\sigma$ ，与曲面  $\Sigma$  相交于过  $P$  点的一条曲线  $C$ 。又设曲线  $C$  在  $P$  点的切线为  $PT$ ，曲率中

心为  $O$ , 曲率为  $k$ . 引进一个量  $k_n$ , 规定为

$$k_n = \begin{cases} k, & \text{若 } PO \text{ 与 } PN \text{ 同向;} \\ -k, & \text{若 } PO \text{ 与 } PN \text{ 反向;} \\ 0, & \text{若 } k=0. \end{cases}$$

量  $k_n$  叫做曲面  $\Sigma$  在  $P$  点和方向  $PT$  上的法曲率. 当截面  $\sigma$  绕法线  $PN$  转动时, 法曲率  $k_n$  也随之变化. 可以证明, 法曲率  $k_n$  在两个互相垂直的方向上取得极值. 这两个极值记为  $k_1$  和  $k_2$ , 叫做曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的主曲率. 两个主曲率的乘积就叫做曲面  $\Sigma$  在  $P$  点的高斯曲率, 记为  $K$ :

$$K = k_1 k_2.$$

例如, 椭圆抛物面的高斯曲率处处为正, 双曲抛物面的高斯曲率处处为负, 抛物柱面的高斯曲率处处为零.

在高斯曲率为零的曲面中, 以平面最为简单.

在高斯曲率为正的曲面中, 最简单的是球面, 它的高斯曲率为正常数  $\frac{1}{R^2}$ ,  $R$  是球半径.

在高斯曲率为负的曲面中, 最重要的一种叫做伪球面 (图 3-8). 取  $yOz$  平面上的曲线

$$\begin{cases} y = a \cos \varphi, \\ z = a [\ln (\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi) - \sin \varphi], \end{cases}$$

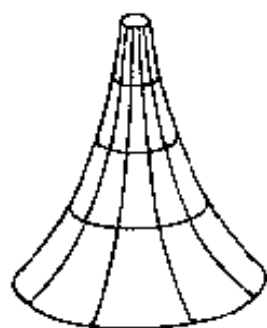


图 3-8

其中  $a$  为正常数,  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 将这曲线绕  $z$  轴旋转一周, 就得到伪球面. 伪球面的高斯曲率等于负常数  $-\frac{1}{a^2}$ . 二维的罗巴契夫斯基几何可解释成伪球面上的几何.

类似于曲线的全曲率  $\int_C k ds$ , 也可定义曲面的全曲率: 设

$S$  是曲面  $\Sigma$  上的一个区域,  $P$  为区域  $S$  内任意一点, 曲面在  $P$  点的高斯曲率为  $K$ , 面积元素为  $d\sigma$ , 则分布在曲面区域  $S$  上的曲面积分

$$N = \iint_S K d\sigma$$

叫做曲面区域  $S$  的全曲率.

现在可以叙述定理 1 在曲面上的推广了.

**定理 5** (关于测地三角形的高斯定理) 设一曲面上三条测地线构成一个三角形, 其内角为  $\angle A, \angle B, \angle C$ , 则

$$\iint_S K d\sigma = \angle A + \angle B + \angle C - \pi, \quad (2)$$

式中  $K$  为曲面的高斯曲率,  $d\sigma$  为曲面的面积元素, 积分区域  $S$  为测地三角形三边围出的曲面部分.

特例——对于平面, (2) 式左端为 0, 化为定理 1. 所以, 定理 5 是三角形内角和定理在曲面上的直接推广.

其次, 如果在球面上讨论, 那末  $K$  为常数  $\frac{1}{R^2}$ , 因而

$$\iint_S K d\sigma = \frac{1}{R^2} \Delta,$$

式中  $\Delta$  为球面三角形  $ABC$  的面积,  $R$  为球半径. 因此得到:

**推论 1** 球面三角形  $ABC$  的面积  $\Delta$  可由下式计算:

$$\Delta = R^2 (\angle A + \angle B + \angle C - \pi). \quad (3)$$

类似地得到

**推论 2** 在负常曲率  $K = -\frac{1}{a^2}$  的曲面上, 测地三角形  $ABC$  的面积  $\Delta$  可由下面的公式计算:

$$\Delta = -a^2 (\angle A + \angle B + \angle C - \pi). \quad (4)$$

由于面积  $\Delta > 0$ , 所以从 (3) 式知道球面三角形内角之和

大于  $\pi$ , 从(4)式知道负常曲率曲面上测地三角形内角之和小于  $\pi$ . 在两种情况下, 内角和与  $\pi$  之差, 都与三角形的面积成比例.

从定理 5 再作进一步推广, 是将测地三角形换成曲面上的曲线多边形, 但是要求曲线多边形的边没有重复的点, 结果就得到著名的高斯-崩尼公式. 这个公式是 1848 年崩尼得到的. 它与定理 5 的(2)式相比, 等式右端换成了曲线多边形所有  $n$  个内角之和减去  $(n-2)\pi$ , 左端除去曲线多边形所包围曲面部分的全曲率而外, 还要添上一项  $\oint_0 k_g ds$ , 式中  $k_g$  是所谓“测地曲率”或“切面曲率”, 要解释这个概念需要更多的微分几何知识, 已经不是本文所能胜任的了.

# 什么是长度?

莫 由

长度是最基本的计量单位之一。有了长度,才可以算面积、体积,以及求速度、加速度等等。长度概念中,直线段的长度更为基本。这里将介绍直线上线段长度的定义,直线上点集测度的概念,并讨论它们的各种推广。

## (一)长 度 公 理

关于什么是长度的问题,中学教科书一般都没有涉及。《平面几何》一开始多半这样写着:“直线上任意两点间的部分叫做线段。两点间线段的长,叫做两点间的距离。”这里已经默认线段有长度。也就是说,“线段有长度”的结论符合人们千百万次的实践,如果要给“长度公理”的话,那么这必须是其中的一条。

除了线段以外,有些很简单的几何图形也应该有长度,例如折线就是。它由几个线段组成,其长度应是各线段长度之和。如图4-1,折线 $ABC$ 的长度,理应等于 $AB$ 的长加上 $BC$ 的长。 $n$ 个线段组成的几何图形,其长度是各个线段长度之和,这其实也是一条和直观相符合的公理。

在图4-1中,我们可以用圆规把折线 $ABC$ 重新画在直线 $l$ 上,使 $AB$ 和 $A_1B_1$ 的长度相同, $BC$ 和 $B_1C_1$ 的长度相

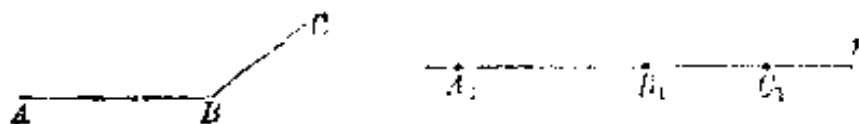


图 4-1

同。这就是说,折线  $ABC$  之长,可用线段

$$A_1C_1 (= A_1B_1 + B_1C_1)$$

的长度来表示。这时,我们要问,用圆规将线段搬家,会不会改变长度?按常理来说,两个线段  $AB$  和  $A_1B_1$  如果能够全等,即经过平移、旋转、反射等变换使  $AB$  和  $A_1B_1$  重合,就不会改变长度。这个常理,又是一条公理。

综上所述,我们可以给出关于直线  $l$  上一部分点集的长度公理了。

设  $l$  是其上具有坐标的数轴,  $l$  上的线段,可用区间  $[a, b]$  表示,  $l$  上有限个区间之和是  $l$  上的子集,这种集合的全体记为  $P$ ,今使  $P$  中的每个元素  $E$ , 和一非负数  $\mu(E)$  相对应,且  $\mu(E)$  满足下列三条公理:

1° 如果  $E = [a, b]$ , 则  $\mu(E) = b - a$ . (正则性)

2° 若  $E_1, E_2 \in P$ , 且  $E_1$  和  $E_2$  全等, 则  $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ . (运动不变性)

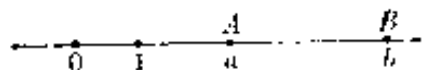


图 4-2

3° 若  $E_1, E_2, \dots, E_n$  是  $P$  中元素, 而且两两不相重叠, 令其并集  $\bigcup_{i=1}^n E_i$  为  $E$ , 则

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i). \quad (\text{有限可加性})$$

在  $P$  上定义且满足以上三条公理的集合函数  $\mu(E)$ , 称为是  $P$  上的约当 (Jordan) 测度,  $E$  的约当测度也简称为  $E$  的长度。

容易看出, 定义约当测度的三条公理, 反映了“线段有长”, “长度经全等运动保持不变”, 以及具备“有限可加性”这几条为人们所公认的长度的性质. 因而可以称之为“长度”公理.

值得注意的是,  $P$  中究竟包含了那些点集. 显然, 当  $a \neq b$  时  $[a, b]$  含在  $P$  中, 当  $a = b$  的特殊情形,  $[a, b]$  化为一点  $\{a\}$ , 所以单点集  $\{a\}$  也在  $P$  中, 而且  $\mu(\{a\}) = a - a = 0$ . 就是说, 一点的长度等于 0. 根据有限可加性, 我们有

$$\begin{aligned}\mu([a, b]) &= \mu(\{a\} \cup (a, b]) \\ &= \mu(\{a\}) + \mu((a, b]) = \mu((a, b]).\end{aligned}$$

同理可知

$$\mu([a, b]) = \mu((a, b]) = \mu([a, b)) = \mu((a, b)) = b - a.$$

这就表明, 一个区间的端点的存留与否, 不会改变区间的长度.

我们还不难看出,  $P$  中有限个  $E_i (i=1, 2, \dots, n)$  之和仍是有限个区间之和, 故  $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$  也在  $P$  中. 同样,  $P$  中两个元素  $E_1$  和  $E_2$  的差集  $E_1 \setminus E_2$  还是有限个区间之和, 仍在  $P$  中. 亦即  $P$  对有限个元素的“并”运算以及两个元素的“差”运算是封闭的.

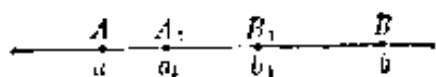


图 4-3

由于约当测度具有“有限可加性”, 我们可以推出: 当  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$  时 (图 4-3), 则从  $[a, b]$  中挖去  $[a_1, b_1]$  剩下的部分  $[a, a_1)$  和  $(b_1, b]$  当然也有约当测度, 而且

$$\mu([a, b] \setminus [a_1, b_1]) = \mu[a, a_1) + \mu(b_1, b].$$

综上所述, 我们大致可以想象,  $P$  中的元素是  $I$  上的子集, 它们总可表示为有限个点和有限多个非零区间之和. 在

十九世纪上半叶以前,人们关于直线上点集长度的认识,大体上就是如此(其实当时的认识还没有这样系统而明确).那时的数学(如微积分等),无非是把区间分划成几个小区间,或者把几个小区间并成大区间,逃不出将区间拆拆并并的范围,因而知道有限个区间的并和差的长度,已足够应付一切.但是,随着集合论的发展,长度概念扩展到较区间更为一般的集合类之上,逐步形成各种各样的测度理论.有“长度”的图形也不再限于  $P$  中的元素了.

## (二) 无限多个长度为 0 的集 并起来该有多少长?

前面说过,一点的长度是 0. 根据有限可加性,可知“两点的长度是 0”,以至“ $n$  个点所构成的集合其长度也是 0”,推而广之,能否说“任意多的点组成的集,其长度都是 0?”一般说是不行的. 常言道,点动成线. 一个线段  $AB$ , 一个非零区间  $[a, b]$ , 都是由点构成的:  $[a, b] = \bigcup_{a \leq x \leq b} \{x\}$ . 既然每点  $\{x\}$  为 0, 而无限多个 0 加起来还是 0, 如果再假定

$$\mu\left(\bigcup_{a \leq x \leq b} \{x\}\right) = \sum_{a \leq x \leq b} \mu(\{x\}),$$

那末将有

$$\mu([a, b]) = 0,$$

而非零区间  $[a, b]$  的约当测度明明是  $b - a \neq 0$ , 这就引起了矛盾.

问题出在那里呢? 原来是“无限”在作怪, 在以上论证中, 关键性的错误是  $\mu\left(\bigcup_{a \leq x \leq b} \{x\}\right) \stackrel{!}{=} \sum_{a \leq x \leq b} \mu(\{x\})$ . 此式右端是无限多个 0 相加, 当然是 0. 但是, 无限多个长度为 0 的集  $\{x\}$



固然可能仍并成一个长度为零的集，但也有可能并成一个长度不为 0 的集，这就看你对“无限”是否加以某些限制了。前面知道，由  $[a, b]$  中所含点的个数那样多的无限个单点集  $\{x\}$  已能并成不为 0 的集。因此，一般地说，“无限可加性”是不成立的。

可是，如果将“无限”加以限制，考虑由一系列点  $\{a_n\}$  并起来的集合  $E$ ，那么  $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$  是否可以成立？让我们看一个例子。

设点  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$  构成集合  $E$ 。我们认为  $E$

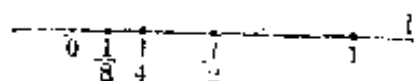


图 4-4

的“长度”定为 0 比较合理。理由如下：

按约当测度的正则性，有  $\mu[0, 1] = 1$ 。同理  $\mu\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$ ， $\mu\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ， $\dots$ ， $\mu\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n}$ ， $\dots$ 。若在  $[0, 1]$  中除去这些开区间，剩下的恰好是  $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right\}$ 。但这些开区间  $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$  的长度之和是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

于是，很自然地想到

$$\mu(E) = \mu[0, 1] - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) = 1 - 1 = 0.$$

这就是说，由可列个点构成的集合  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots\right\}$ ，其长度可以定义为各点的测度之和：

$$\mu(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

这里, 我们接触到了一个十分重要的概念, 叫做可列可加性. 由可列可加性, 将引出一类新的测度, 即波莱尔 (Borel)-勒贝格 (Lebesgue) 测度.

设  $I$  是数直线,  $S$  是  $I$  上子集所构成的集合类.  $S$  中的一列元素之并集仍在  $S$  内, 任何两个元素的差仍在  $S$  内. 这时, 如果有一个定义在  $S$  上的非负函数  $m(E)$ ,  $E \in S$ , 满足:

1° 任意闭区间  $[a, b] \in S$ ,  $\mu[a, b] = b - a$ ; (正则性)

2° 若  $E_1, E_2 \in S$ ,  $E_1$  和  $E_2$  全等, 则  $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ ; (运动不变性)

3° 设  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  是  $S$  中一系列集合, 两两不相重叠,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  在  $S$  中, 那么

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \quad (\text{可列可加性})$$

这时, 称集合函数  $m(I)$  为波莱尔-勒贝格测度, 简记为“ $L$  测度”.

$L$  测度比起约当测度是一个大的突破. 其主要区别是用可列可加性代替了有限可加性. 与此同时,  $m(E)$  的定义域  $S$  包含  $\mu(E)$  的定义域  $P$ , 并有了明显的扩大. 这是因为  $S$  中一系列元素可以相加, 一系列点, 一系列区间都可以属于  $S$ , 而  $P$  中只是有限个点和有限个区间之和,  $S$  中的集合远较  $P$  中集合来得复杂, 从下面例子也可见一斑.

例如, 设含在区间  $[0, 1]$  中的有理数全体, 构成集合  $Q_1$ , 它的  $L$  测度为 0.  $[0, 1]$  中无理数全体构成集合  $M_1$ , 其测度为 1. 让我们来证明这个结论.

$Q_1$  和  $M_1$  显然不在  $P$  中, 即没有约当测度. 但它们都在

$S$  中, 有  $L$  测度.

先求  $m\mathbf{Q}_1=0$ . 我们只要设法将  $\mathbf{Q}_1$  中的数排成一列  $\{r_n\}$ , 然后利用可列可加性即知

$$m\mathbf{Q}_1 = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\{r_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

那么如何将  $\mathbf{Q}_1$  排成一列呢? 大家知道  $[0, 1]$  中的有理数就是既约的真分数  $\frac{p}{q}$ , 其中  $p \leq q$ ,  $p$  和  $q$  是没有公因子的正整数. 我们规定分母小的在前, 分母大的在后; 如分母相同, 则分子小的在前、大的在后, 因此  $\mathbf{Q}_1$  中有理数可排成:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

每一既约真分数  $\frac{p}{q}$  迟早都要出现在这一列中, 且其位置是完全确定的. 这就把  $\mathbf{Q}_1$  排成了一列  $\{r_n\}$ . 这说明, 尽管  $[0, 1]$  中有理数有无限多个, 而且稠密地分布在整个  $[0, 1]$  区间内, 然而它的无限多是属“可列”型的, 因而可适用于可列可加性. 如上所述,  $m\mathbf{Q}_1=0$ . 至此, 我们给出了一个没有约当测度 (长度) 但有  $L$  测度的重要例子.

至于  $[0, 1]$  中全体无理数所成之集  $M_1$  的测度, 可由下式推知

$$m(M_1) = m[0, 1] - m\mathbf{Q}_1 = 1 - 0 = 1.$$

这就说明,  $[0, 1]$  中无理数全体不能是“可列”型的无限. 它的  $L$  测度  $mM_1$  等于全体  $[0, 1]$  中实数集  $\mathbf{R}_1$  的  $L$  测度  $m\mathbf{R}_1$ . 换句话说, 对于可列可加的测度  $m$  而言, 集合中去掉一系列点, 不改变它的  $L$  测度, 这正如在约当测度时, 改变区间内有限个点不改变其长度一样. 不过, 读者不要误会, 以为  $L$  测度为 0 的集合就是一列点, 可以证明存在着元素和  $[0, 1]$  中

实数一样多的集  $C$ , 其长度仍为 0. 著名的康托儿三分集就是一例, 这里就不准备多说了.

### (三) 数方格算面积的方法还有效吗?

计算不规则图形的面积, 常常用数方格的方法加以近似. 如图 4-5 中的闭曲线画在方格纸上, 它所围的图形  $I$  的面积  $P$ , 可近似地用完全含在  $I$  内部的小方格子数目来表示. 如每个方格的面积是 1, 则  $P$  的不足近似值等于 228. 同样,  $P$  也可用与  $I$  有公共部分的小方格子数 320 作为过剩近似值. 对某一类图形来说, 当小方格越分越小, 分点  $n$  无限增大时, 外包和内填小方格的面积就越来越接近, 它的极限值就定为曲线所围图形  $I$  的面积. 这个方法不妨称为内填外包法.

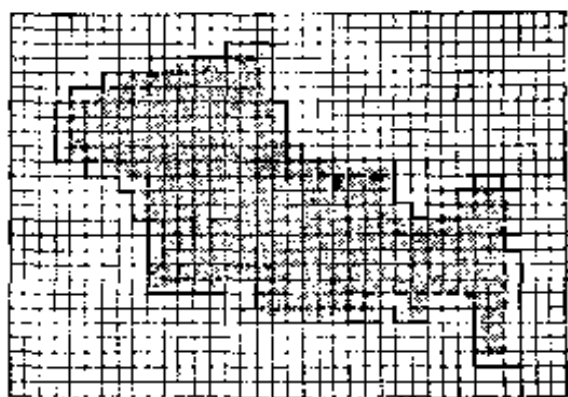


图 4-5

这个内填外包法不仅适用于确定面积, 也适用于确定直线点集的长度. 任给一个集合  $E$ , 我们用全部内含于  $E$  的闭区间内填和与  $E$  有公共部分的开区间来外包, 从而定出  $E$  的长度.

这个方法对于确定直线点集的  $L$  测度仍然有效. 假定  $P$  和  $S$  已经给定了, 我们想在  $P$  或  $S$  上定义一个非负函数  $\mu(E)$  或  $m(E)$ . 很自然, 我们就想到, 对每个  $E \in P$ , 用有限个区间进行内填外包, 得出一个极限值, 这是一个非负数, 记为  $\mu(E)$ .

它是外包区间的最小值，也是内含区间的最大值。而对每个  $E \in S$ ，则用“可列个”区间进行内填外包，也可得到一个类似的极限值，也是非负数  $m(E)$ 。不难证明，这个  $\mu(E)$  和  $m(E)$  满足正则性和对运动不变性，而且分别满足有限可加性和可列可加性。于是，数方格的方法提供了确定集合函数  $\mu(B)$  和  $m(E)$  的方法。

仍以  $[0, 1]$  中的有理数集  $\mathbf{Q}_1$  为例。 $\mathbf{Q}_1$  中填不进任何区间，即能填进的区间长度之和为 0。如果用有限个和  $\mathbf{Q}_1$  有公共点的区间外包，则盖住  $\mathbf{Q}_1$  的区间长度起码要是 1。因此，将  $\mathbf{Q}_1$  外包和内填的区间长度不可能彼此无限接近，更定不出一个极限值，这就说明  $\mathbf{Q}_1$  不可能有约当测度。

然而，当我们用一系列区间去外包和内填时，情形却完全不同。内填  $\mathbf{Q}_1$  的区间仍然没有，长度当然是 0。但可使外包  $\mathbf{Q}_1$  的区间长度之和任意小，无限地接近于 0。这就是说  $\mathbf{Q}_1$  的  $L$  测度将是 0。下面介绍一种构造外包区间使长度总和任意小的方法。前已说过， $\mathbf{Q}_1$  可排成一系列  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ ，于是可对任给的正数  $\varepsilon$ ，对  $r_n$  作一小区间  $I_n$ ， $r_n \in I_n$ ， $\mu(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ ，则这列小区间  $I_n$  的长度之和等于  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ 。由于  $\varepsilon$  是任意的，所以用可列的内填外包法确定的  $mB = 0$ 。和前面讨论的结果相同。

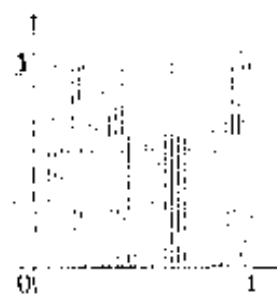


图 4-6

最后，再用这个可列的内填外包法来求一些平面图形的面积。如图 4-6 所示，这是一个镂空的正方形  $Q$ ，抽去了无理点为横坐标的垂直线段，仅由有理点为横坐标的垂直线段所构成。 $Q$  的面积应是底乘高。高恒为 1，底边长度是  $m\mathbf{Q}_1 = 0$ ，所以按长乘宽的法则，

$mQ = 1 \times 0 = 0$ . 按同样理由, 以无理点为横坐标的垂直线段全体构成镂空正方形  $Q'$ , 则其面积为

$$mQ' = 1 \times mM_1 = 1 \times 1 = 1.$$

我们也可以用内填外包法来考察  $Q$  和  $Q'$ . 在用有限个矩形去外包时, 其总面积至少为 1, 而用矩形去内填, 一个也填不进, 其总面积必须为 0, 即  $Q$  和  $Q'$  没有“面积”. 但用可列个矩形外包时,  $Q$  可用一列高为 1、底为  $I_n$  的矩形  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$  所盖住, 其中  $r_n \in I_n, \mu(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ . 于是可得  $mQ = 0$ . 同样可知  $mQ' = 1$ .

由此可知, 可列可加性的出现, 使一批本来无“面积”“长度”的几何图形确定了适当的面积和长度, 它确实给我们打开了新天地!

#### (四) 区间 $[a, b]$ 的长度必须是 $b - a$ 吗?

在长度公理中, 我们把有限可加性换成可列可加性, 引出了许多有趣的结果. 现在我们看看正则性和运动不变性的条件可不可以改动.

区间的长度是从几何学中产生出来的概念. 直线段  $AB = [a, b]$  的长度只能是  $b - a$ . 但是大量的实际问题告诉我们, 和“区间”联在一起的不一定是“长度”, 可能是其他一些非负集合函数. 比如一根细棒, 密度不均匀, 细棒上任截一段  $\overline{AB}$  或  $[a, b]$ , 当我们考察这段细棒的质量时, 这一质量是非负的集合函数, 若仍记  $m[a, b]$ , 它完全不必等于  $b - a$ , 而且也不一定有运动不变性. 这个简单的例子说明, 从“区间”的长度想开去, 选择适合于实际问题“测度”定义, 是很有必要的.

不妨再看一个概率论中的例子。稍微接触过概率的同志知道，凡是必然要发生的事件，其概率为 1；凡不可能发生的事件，其概率为 0；而可能发生、也可能不发生的事件，具有在 0 到 1 之间的概率。现在看一个概率问题的假想模型。设有  $l$  公里长的一条街道  $OP$ ，每天日夜不停地有治安人员在巡逻，而且治安人员在任何地方出现的机会都一样。于是，“在街道上出现巡逻人员”构成一个必然事件，即巡逻人员出现在  $OP$  上的概率是 1。而巡逻人员出现在某一段  $AB$  上的概率  $p[a, b]$  和这一段的长度成正比：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}} = \frac{b-a}{l} = p[a, b].$$

不难验证  $p[a, b] = \frac{b-a}{l}$  是一个在所有区间上都有定义的非负函数，它对运动不变，而且满足有限可加性（甚至也是可列可加的）。但是，当  $l \neq 1$  时  $p[a, b]$  不满足正则性，即

$$p[a, b] = \frac{b-a}{l} \neq b-a.$$

这个简单的模型说明，作为长度概念推广的测度，已经不能再受欧氏几何中“长度”概念的束缚，而应尽量使之适应实际需要。测度可以表区间质量，也可表区间上的概率等等。

下面我们用函数来进一步描述这类测度。

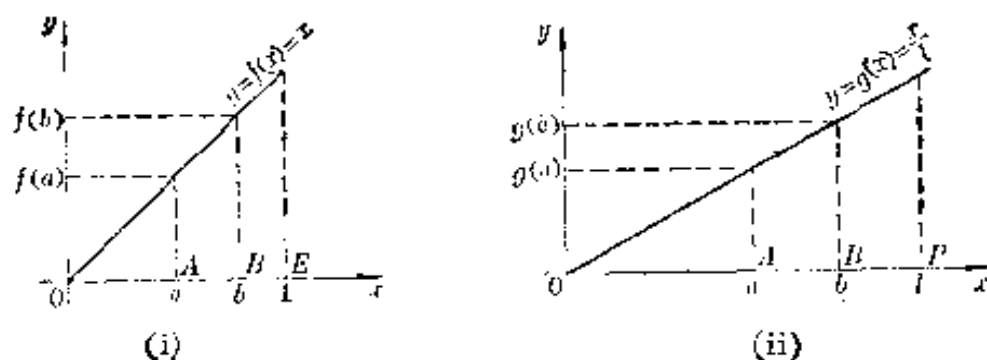


图 4-7

在图 4-7(i) 中, 我们通过  $y=f(x)=x$  定义任何区间  $[a, b]$  的测度为  $\mu[a, b]=b-a$ . 图 4-7(ii) 表示前面所举巡逻人员出现概率的例子, 这时从  $y=g(x)=\frac{x}{l}$  出发, 定义任何区间  $[a, b]$  的长度  $p[a, b]=g(b)-g(a)=\frac{b-a}{l}$ . 特别地

$$p[0, l]=\frac{l}{l}=1.$$

我们把约当测度  $\mu(E)$  看成是由  $y=f(x)=x$  导出的有限可加测度,  $m(E)$  是由  $y=x$  导出的可列可加测度. 同样,  $p(E)$  可看成是由  $y=\frac{x}{l}$  导出的有限(或可列)可加测度.

由于  $y=x$  和  $y=\frac{x}{l}$  都是一次函数, 且是齐次的, 故它导出的测度关于移动不变. 只要  $[a, b]$  和  $[c, d]$  彼此重合, 它们的测度都是  $b-a=c-d$ , 或  $\frac{b-a}{l}=\frac{c-d}{l}$ . 很自然, 我们用非一次函数导出的测度将不会再有运动不变性.

设有一细棒  $0x$ , 其质量分布函数  $d(x)=x^2$  表示  $[0, x]$  段棒的质量. 由  $y=x^2$  可导出任意区间  $[a, b]$  的测度:

$$m[a, b]=b^2-a^2,$$

它表示这段细棒  $AB$  的质量.  $m[a, b]$  显然是非负的集合函数, 它也有有限可加性, 甚至也是可列可加的. 但这个测度既没有正则性, 也没有运动不变性. 因为

$$m[a, b]=b^2-a^2 \neq (b-a); \quad (\text{除非 } b=a)$$

$$m[1, 2]=4-1=3, \text{ 而 } m[2, 3]=9-4=5.$$

测度概念经过不断扩充, 逐步减少条件, 终于放弃了正则性和运动不变性, 以便适应更广泛的要求. 现代的测度概念是: 设  $S$  是直线  $R$  上的子集所成的类, 其中的集经有限(可



列)个相加及任意两个相减仍在  $S$  内. 我们令  $S$  中每一个集合  $E$  都对应一个实数  $mE$ , 使得

$$1^\circ mE \geq 0;$$

2° 对于  $S$  中有限个  $E_1, E_2, \dots, E_n$  (或者一列  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ ) 彼此互不相交, 有

$$m\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n m(E_k) \quad \left(\text{或 } m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)\right),$$

则称  $m(E)$  是  $S$  中的有限(可列)可加测度.

这种测度的内容各异, 用途亦不同, 其中最常用的是单调增加函数  $f(x)$  所导出的测度, 每个  $f(x)$  对应一个  $m_f$ , 它显然是非负的, 且为有限(或可列)可加的测度.

### (五) 一点的测度必须是 0 吗?

在讨论约当测度和  $L$  测度时, 由于定义  $m[a, b] = b - a$ , 自然引出一点的测度等于 0. 在由  $y = \frac{x}{l}$  和  $y = x^2$  导出的测度中, 也同样具有一点的测度为 0 的性质. 例如, 若令

$$m[a, b] = b^2 - a^2$$

虽然没有正则性, 但  $m[a, a] = a^2 - a^2 = 0$  仍然成立. 那么, 在一点的测度等于 0 是不是普遍规律呢?

否! 这只要考虑当单调增加函数  $f(x)$  在不连续点上的情形就行了.

先看一模型. 一根无限长的金属导线, 其表面电荷分布状况是: 在 0 点有一个带一个单位的点电荷, 其余各处均没有电荷. 用函数  $F(x)$  表示  $(-\infty, x)$  中所含的电量, 显然

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

函数  $F(x)$  在 0 点有一跳跃 1 (图 4-9). 这时, 由  $F(x)$  导出的测度是:

$$m_F[a, b] = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \in [a, b] \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 0 \notin [a, b] \text{ 时.} \end{cases}$$

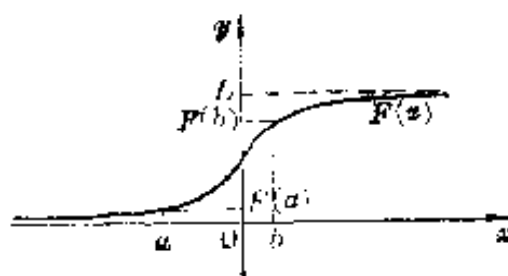


图 4-8

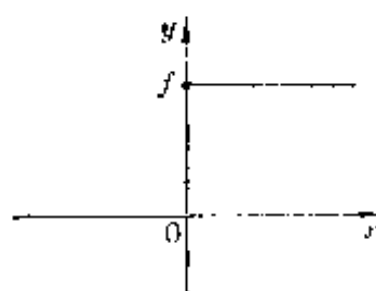


图 4-9

特别地, 在 0 点的测度是

$$m_F\{0\} = m_F(-\infty, 0] - m_F(-\infty, 0) = 1 - 0 = 1.$$

就是说,  $m_F$  在 0 点的测度不为 0.

一般地说, 一个单调增加函数不必是连续的, 如在它的不连续点  $x_0$  处, 函数有跳跃  $k$ , 那么由这函数导出的测度在  $x_0$  的测度是  $k$ . 在实际问题中, 常常会遇到这种集中在一点的测度.

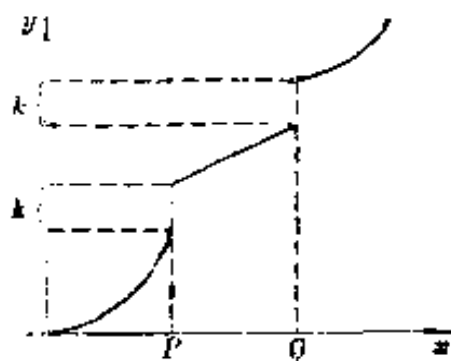


图 4-10

测度理论的发展, 可说是二十世纪数学的重大成就之一. 从理论上讲, 它突破了黎曼积分的框框, 出现了勒贝格积分等

许多新工具,使三角级数、微分方程等许多分支大为改观,在此基础上,发展了泛函分析等一系列新学科.在实际应用方面,概率论和数理统计学以测度论作为理论基础,许多理论物理学、力学问题归结为测度问题.现在,一般的测度理论仍在发展,受理论物理学的刺激,无限维空间上的测度与积分的研究方兴未艾.对于深入探讨初等数学来说,学习怎样从长度发展到一般测度理论的过程,对于促进自己的思考,掌握现代数学的特点,进一步提高数学水平,也将是十分有益的.

## 面积关系在几何证题中的运用

井 中

众所周知, 三角形的面积公式有:

$$S = \frac{1}{2} ah,$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

并且, 运用三角形面积公式, 即可推出四边形的面积公式:

$$\text{四边形 } ABCD \text{ 面积} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha,$$

其中  $\alpha$  为对角线  $AC$ 、 $BD$  的夹角, 上式不论对凸四边形或凹四边形均成立.

面积公式不仅可用于计算一个平面多边形的面积, 还可用于几何证题. 这时, 用不同的方法计算同一个图形的面积, 把所得的不同形式的结果用等号连起来, 可得到一个(或几个)等式; 从这些等式中消去某些与问题无关的量, 以得到欲证的几何结论.

[例 1] 在  $\triangle ABC$  中,  $B$ 、 $C$  两角的分角线分别为  $BD$ 、 $CE$ , 已知  $BD = CE$ , 求证  $AB = AC$ .

证明 记  $l = BD = CE$ ,  $2\alpha = B$ ,  $2\beta = C$ ,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分别为角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边. 由

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \triangle ABD \text{ 面积} + \triangle DBC \text{ 面积},$$

得

$$\frac{1}{2} ac \sin 2\alpha = \frac{1}{2} cl \sin \alpha + \frac{1}{2} al \sin \alpha.$$

上式两端以  $\frac{1}{2} acl$  除之, 并应用倍角公式, 得

$$\frac{2 \cos \alpha}{l} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c};$$

同理, 有

$$\frac{2 \cos \beta}{l} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

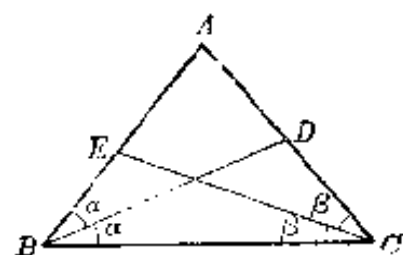


图 5-1

上两式相减, 得

$$\frac{2}{l} (\cos \alpha - \cos \beta) = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}.$$

这里, 若  $b > c$ , 则  $\cos \alpha > \cos \beta$ , 即  $\beta > \alpha$ . 由大角对大边推出  $c > b$  矛盾; 若  $b < c$ , 则  $\cos \alpha < \cos \beta$ , 即  $\alpha > \beta$ , 从而得  $b > c$  矛盾. 这就证得了  $b = c$ .

这个证法仅仅用到了面积可加性、最基本的三角形性质及三角函数性质, 没有挖空心思去找辅助线, 可算是例 1 的众多证法中较为简单的一种.

象这样从面积关系出发来证明几何题的例子还可以举出很多, 甚至还包括一些初看似乎颇难入手的题目. 为了加深理解面积方法的作用, 下面从证明正弦定理和勾股定理入手.

[例 2] 求证: 在  $\triangle ABC$  中, 有

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

证明 根据三角形面积公式, 有

$$\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

上式等号两侧各用  $\frac{1}{2} abc$  除之, 即得:

$$\frac{2\triangle ABC \text{ 面积}}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

[例 3] 已知  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ ,  
求证:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) \\ &= \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta. \end{aligned}$$

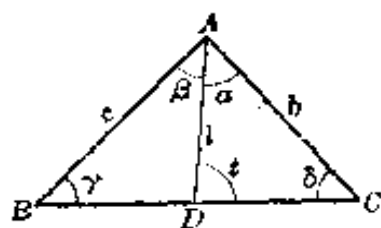


图 5 2

证明 如图 5-2 构造  $\triangle ABC$ , 这里  $A = \alpha + \beta$ ,  $B = \gamma$ ,  $C = \delta$ . 由  $\triangle ABC$  面积 =  $\triangle ABD$  面积 +  $\triangle ADC$  面积, 得

$$\frac{1}{2} bc \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} cl \sin \beta + \frac{1}{2} bl \sin \alpha.$$

上式等号两侧各用  $\frac{1}{2} bc$  除之, 得

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{l}{b} \sin \beta + \frac{l}{c} \sin \alpha.$$

根据正弦定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{l}{b} &= \frac{\sin \delta}{\sin t} = \frac{\sin \delta}{\sin(\beta + \gamma)}, \\ \frac{l}{c} &= \frac{\sin \gamma}{\sin(180^\circ - t)} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}. \end{aligned}$$

代入前式, 去分母, 即得所要之等式.

在例 3 中, 取特例  $\beta + \gamma = 90^\circ$ , 即得和角公式:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

上式中再取特例  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , 得:

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

从而亦可推出勾股定理. 这样, 我们从面积关系证明了正弦定理和勾股定理. 有了这两定理, 即可方便地得到三角形全等、相似的条件. 而有了勾股定理和正弦和角公式, 又可导出整套三角恒等式. 那么, 初等几何中常用的基本定理, 又有哪

些与面积公式无关呢？这就可以理解面积关系在几何证题中的作用了。

当然，在具体运用时还有一些技巧，对于较复杂的问题，有时要计算多个三角形面积，得出好几个等式，并要求有一定的代数运算的能力。

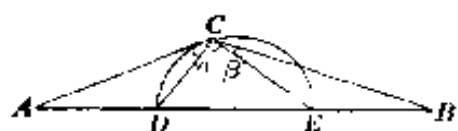


图 5-3

[例 4] 已知  $D$ 、 $E$  为  $AB$  的三等分点，以  $DE$  为直径作半圆，在半圆上任取一点  $C$ ，令

$\angle ACD = \alpha$ 、 $\angle BCE = \beta$ ，求证： $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$ 。

证明  $\triangle CAD = \frac{1}{2} AC \cdot DC \sin \alpha$ ,

$$2\triangle CAD = \triangle CAE = \frac{1}{2} AC \cdot EC \sin(\alpha + 90^\circ).$$

两式相比，得：

$$\frac{1}{2} = \frac{DC}{EC} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{DC}{EC} \operatorname{tg} \alpha.$$

同理：

$$\frac{1}{2} = \frac{EC}{DC} \operatorname{tg} \beta.$$

两式相乘，即得：

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}.$$

[例 5] 设  $AM$  是  $\triangle ABC$  边  $BC$  上的中线。任作一条直线，分别交  $AB$ 、 $AC$ 、 $AM$  于  $P$ 、 $Q$ 、 $N$ 。求证： $\frac{AB}{AP}$ 、 $\frac{AM}{AN}$ 、 $\frac{AC}{AQ}$  成等差数列。

证明 由于  $\triangle ABC = 2\triangle ABM = 2\triangle ACM$ ，所以

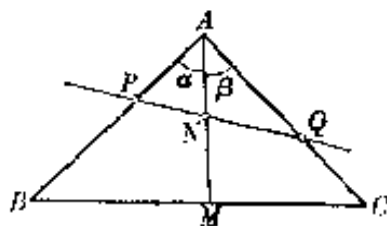


图 5-4

$$\frac{\triangle APN}{\triangle ABC} = \frac{\triangle APN}{2\triangle ABM} = \frac{AP \cdot AN}{2AB \cdot AM},$$

$$\frac{\triangle AQN}{\triangle ABC} = \frac{\triangle AQN}{2\triangle ACM} = \frac{AQ \cdot AN}{2AC \cdot AM},$$

上两式相加,得:

$$\frac{\triangle APQ}{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{AM} \cdot \left( \frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} \right).$$

但

$$\frac{\triangle APQ}{\triangle ABC} = \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC},$$

$$\therefore \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{AM} \cdot \left[ \frac{AP}{AB} + \frac{AQ}{AC} \right].$$

整理之,即得:

$$2 \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ}.$$

在一些难度更大的题目中,有时要多次运用面积关系,或配合其它代数技巧和几何基本知识,才能奏效. 下面的几个例,通常被认为是比较难的题目了,但仍可以借助于面积关系找到解法.

[例6] 设  $ABCD$  是圆内接四边形,求证:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

证明 过点  $A$  作  $ABCD$  外接圆之切线,与  $AB$ 、 $AC$ 、 $AD$  成共顶点之角记为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$  (图 5-5), 从而

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi.$$

设外接圆之直径为  $2R$ , 则:

$$AB = 2R \sin \alpha, \quad BC = 2R \sin \beta, \quad CD = 2R \sin \gamma,$$

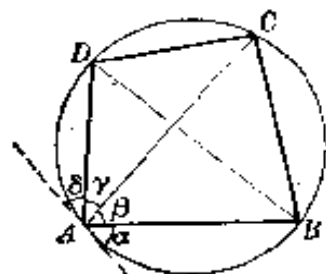


图 5-5



$$DA = 2R \sin \delta, \quad AC = 2R \sin(\alpha + \beta),$$

$$BD = 2R \sin(\beta + \gamma).$$

因此, 所要证之等式等价于:

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta.$$

此即前述例 3 中已证明过的结论.

[例 7] 设  $G$  是  $\triangle ABO$  中任一点, 连接  $BG$ 、 $AG$  和  $OG$ , 分别交对边于  $C$ 、 $D$ 、 $E$ . 连  $CD$ , 交  $OE$  于  $F$ . 求证:

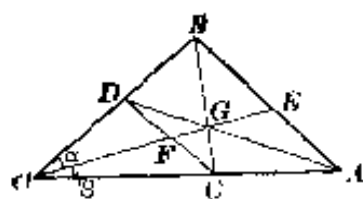


图 5-6

$$\frac{GF}{GE} = \frac{OF}{OE}.$$

证明 如图 5-6, 记  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $\dots$ ,  $OG = g$ ;  $\angle BOE = \alpha$ ,  $\angle EOA = \beta$ .

所要证的等式, 即:

$$\frac{g-f}{e-g} = \frac{f}{e},$$

它等价于:

$$\frac{g-f}{f} = \frac{e-g}{e}, \quad \text{即:} \quad \frac{g}{f} - 1 = 1 - \frac{g}{e},$$

即:

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{f} = \frac{2}{g}.$$

从  $\triangle OAB = \triangle OAE + \triangle OEB$ , 得到

$$\frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} be \sin \alpha + \frac{1}{2} ae \sin \beta,$$

同用  $\frac{1}{2} abc$  除, 得:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{c} = \frac{\sin \alpha}{a} + \frac{\sin \beta}{b}. \quad (1)$$

同理可得:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{g} = \frac{\sin \alpha}{c} + \frac{\sin \beta}{b}, \quad (2)$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{f} = \frac{\sin \alpha}{c} + \frac{\sin \beta}{d}, \quad (3)$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{g} = \frac{\sin \alpha}{a} + \frac{\sin \beta}{d}. \quad (4)$$

(1) + (2) + (3) - (4) 得:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{e} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{f} - \frac{2\sin(\alpha+\beta)}{g} = 0,$$

约去  $\sin(\alpha+\beta)$ , 即得

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{f} = \frac{2}{g}.$$

【例 8】圆  $O$  与等腰  $\triangle ABC$  两腰  $AB$ 、 $AC$  切于  $H$ 、 $G$ , 与  $\triangle ABC$  之外接圆切于  $D$ . 连接  $HG$ , 交  $\angle BAC$  之分角线于  $E$  (图 5-7). 求证:  $E$  是  $\triangle ABC$  之内心.

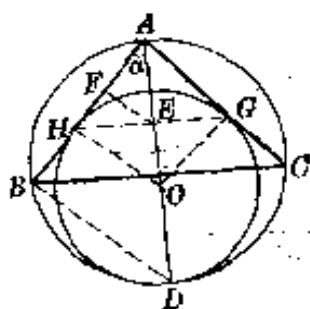


图 5-7

证明 显然,  $AD$  即是  $\angle BAC$  之分角线. 由于内心在分角线上, 故只要证明  $E$  到  $AB$  之距离  $EF$  等于  $\triangle ABC$  之内切圆半径  $r$  即可.

设  $\angle BAC = 2\alpha$ , 大圆半径为  $R_1$ , 小圆半径为  $R_2$ ,  $\triangle ABC$  之周长为  $l$ .

一方面, 有:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} rl,$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} AB^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (2R_1 \cos \alpha)^2 \sin 2\alpha \\ &= 4R_1^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} l &= 2(AB + AB \sin \alpha) = 2(2R_1 \cos \alpha + 2R_1 \cos \alpha \sin \alpha) \\ &= 4R_1 \cos \alpha (1 + \sin \alpha), \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{R_2}{2R_1 - R_2},$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \frac{2\triangle ABC}{l} = \frac{8R_1^2 \sin \alpha \cos^3 \alpha}{(4R_1 \cos \alpha) \left(1 + \frac{R_2}{2R_1 - R_2}\right)} \\ &= (2R_1 - R_2) \cos^2 \alpha \sin \alpha = AO \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ &= AH \cos \alpha \sin \alpha = AE \sin \alpha = EF. \end{aligned}$$

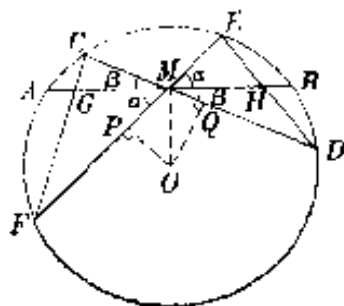


图 5-8

这就证得了  $E$  是  $\triangle ABC$  的内心.

对这个题来说, 这里的证法不算最简单, 但没有用辅助线, 思路也是直截了当的.

【例 9】 已知圆  $O$  的弦  $AB$  的中点为  $M$ , 过  $M$  作弦  $CD$ 、 $EF$ , 连接  $CF$ 、 $DE$ , 分别交  $AB$  于  $G$ 、 $H$ , 求证:  $MG = MH$ .

证明 如图 5-8, 由  $\triangle MDE = \triangle EMH + \triangle HMD$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ME \cdot MD \sin(\alpha + \beta) \\ = \frac{1}{2} ME \cdot MH \sin \alpha + \frac{1}{2} MH \cdot MD \sin \beta. \end{aligned}$$

同用  $\frac{1}{2} ME \cdot MD \cdot MH$  除, 得:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{MH} = \frac{\sin \alpha}{MD} + \frac{\sin \beta}{ME},$$

同理:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{MG} = \frac{\sin \alpha}{MC} + \frac{\sin \beta}{MF}.$$

上两式相减, 得

$$\begin{aligned} & [\sin(\alpha + \beta)] \cdot \left( \frac{1}{MH} - \frac{1}{MG} \right) \\ &= \frac{MC - MD}{MD \cdot MC} \sin \alpha + \frac{MF - ME}{ME \cdot MF} \sin \beta. \quad (*) \end{aligned}$$

过  $O$  向  $FE$ 、 $CD$  引垂线, 则垂足  $P$ 、 $Q$  分别为  $FE$ 、 $CD$  之中点; 连  $OM$ , 必有  $OM \perp AB$ ,

$$\begin{aligned} \therefore \angle OMQ &= 90^\circ - \beta, \\ \therefore MD - MC &= 2MQ = 2OM \sin \beta, \\ \angle OMP &= 90^\circ - \alpha, \\ \therefore MF - ME &= 2MP = 2OM \sin \alpha. \end{aligned}$$

又根据圆内相交弦定理, 有:  $MD \cdot MC = ME \cdot MF$ , 把这三式代入  $(*)$  的右端, 得:

$$\begin{aligned} & [\sin(\alpha + \beta)] \left( \frac{1}{MH} - \frac{1}{MG} \right) \\ &= \frac{1}{ME \cdot MF} (-2OM \sin \beta \sin \alpha + 2OM \sin \alpha \sin \beta) = 0. \end{aligned}$$

从而  $MH = MG$ , 证毕.

# 封闭折线的射影和

北京宣武区教师进修学校 何裕新

如果给定一条数轴  $l$ , 另有一条有向线段  $\overrightarrow{AB}$ . 作  $AA' \perp l$ ,  $BB' \perp l$ , 垂足分别为  $A'$ 、 $B'$ , 我们把有向线段  $\overrightarrow{A'B'}$  在  $l$  上的值, 称为  $\overrightarrow{AB}$  在  $l$  上的射影(图 6-1).

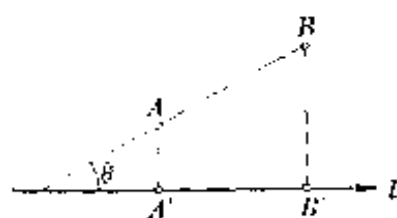


图 6-1

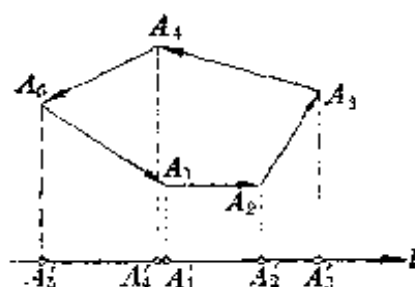


图 6-2

记有向线段  $\overrightarrow{AB}$  与轴  $l$  的夹角为  $\theta$ , 则有

$$\overrightarrow{AB} \text{ 的射影} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \theta.$$

可以证明: 有向线段  $\overrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\cdots$ 、 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$  在  $l$  上射影和, 等于有向线段  $\overrightarrow{A_1A_n}$  在  $l$  上的射影:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1A_2} \text{ 的射影} + \overrightarrow{A_2A_3} \text{ 的射影} + \cdots \\ + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \text{ 的射影} = \overrightarrow{A_1A_n} \text{ 的射影}. \end{aligned}$$

特别地, 有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1A_2} \text{ 的射影} + \overrightarrow{A_2A_3} \text{ 的射影} + \cdots \\ + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \text{ 的射影} + \overrightarrow{A_nA_1} \text{ 的射影} = 0. \end{aligned}$$

上式表明, 封闭折线在任一条轴上的射影和等于零(图 6-2). 这个结论的物理意义是很明显的, 即: 如果一个物体从  $A_1$  点

出发,先后到达  $A_2, A_3, \dots, A_n$  最后回到  $A_1$  点,那么它的总位移等于零,并且它在任一轴上的分位移之和也等于零.

这样一个简单的结论,如果加以灵活运用,可以得到一些有趣的结果.

[例 1] 计算

$$\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ.$$

解 这里,  $5^\circ, 77^\circ, 149^\circ, 221^\circ, 293^\circ$  恰好组成等差数列,其公差为  $72^\circ$ . 一般解法是遍乘上  $2 \sin 36^\circ$ , 然后每项再积化和差,通过前后项相消,从而得解. 下面介绍利用射影来解题的方法.

由于公差  $72^\circ$  恰是正五边形的一个外角. 我们在平面上作一个边长为 1 的正五边形  $A_1A_2A_3A_4A_5$ , 使其一边  $A_1A_2$  恰与  $x$  轴成倾斜角  $5^\circ$ . 这时, 有向线段  $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots, \overrightarrow{A_5A_1}$  分别与  $x$  轴的夹角等于  $5^\circ, 77^\circ, 149^\circ, 221^\circ, 293^\circ$ . 显然,  $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \dots, \overrightarrow{A_5A_1}$  在  $x$  轴上的射影恰等于  $\cos 5^\circ, \cos 77^\circ, \dots, \cos 293^\circ$ , 由封闭折线在轴上的射影和等于零, 即知:

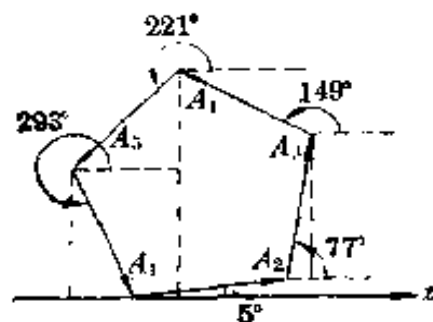


图 6-3

$$\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ = 0.$$

从例 1 可以看出, 如果把  $5^\circ$  改为  $10^\circ$ , 公差仍然是  $72^\circ$ , 那么结论仍然是一样的. 一般地, 有

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos(\alpha + 72^\circ) + \cos(\alpha + 144^\circ) \\ & + \cos(\alpha + 216^\circ) + \cos(\alpha + 288^\circ) = 0. \end{aligned}$$

并且, 对于其他正多边形, 也有类似的结论.

如果要把余弦改为正弦, 只需把各有向线段在  $x$  轴的射影改为在  $y$  轴上的射影, 其结论完全一样.

[例 2] 求证  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ .

**证明** 构造一个正七边形, 使其边长为 1, 一边在  $x$  轴上. 写出该封闭折线在  $x$  轴上的射影:

$$\begin{aligned} & \cos 0 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \\ & + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} = 0, \end{aligned}$$

即

$$1 + 2\left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}\right) = 0.$$

这就证得了

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

从上述两例可以看出, 这种解题方法的关键是根据题意构造封闭折线, 并取定方向以及投影轴, 使封闭折线在轴上的射影与题设条件、结论关联在一起, 从而把待证的问题转化为式的恒等变形, 直至得到期望的结果.

利用封闭折线的射影和, 还可以证明几何和三角方面的许多问题, 为了深入理解这一点, 得从基础着手.

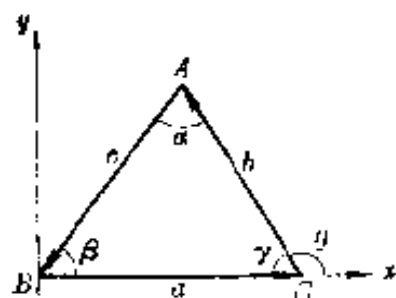


图 6-4

首先, 我们利用封闭折线的射影和, 来证明平面三角中的几个基本公式, 如勾股定理、正弦定理、和角公式等.

1. 给定任意三角形  $ABC$ , 任取一边  $BC$  为  $x$  轴 (如图 6-4). 易知  $\sin \theta = \sin \gamma$ . 由封闭折线  $\vec{BCAB}$  在  $y$  轴上的射影和等于零, 即得:

$$a \sin 0 + b \sin \theta + c \sin (\pi + \beta) = 0.$$

于是

$$b \sin \gamma - c \sin \beta = 0,$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

同理可证

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

这就证得了正弦定理.

由封闭折线  $\overrightarrow{BCAB}$  在  $x$  轴上的射影和等于零, 即得:

$$a \cos 0 + b \cos \theta + c \cos (\pi + \beta) = 0.$$

于是

$$a - b \cos \gamma - c \cos \beta = 0,$$

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta.$$

同理可证

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha,$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

这就证得了射影定理. 作为特例,  $\gamma = 90^\circ$ , 即有  $\cos \beta = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ , 代入  $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ , 即有

$$c = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

这就证得了勾股定理.

2. 如图 6-5 所示, 以  $\alpha$  的一边为  $x$  轴, 在另一边上任取  $OA = m$ . 作  $AB \perp OA$ , 交  $\beta$  的另一边于  $B$ . 易知:

$$OB = \frac{m}{\cos \beta},$$

$$AB = m \operatorname{tg} \beta,$$

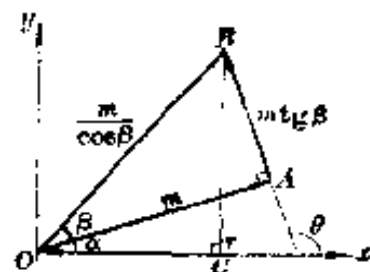


图 6-5



$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

由封闭折线  $\overrightarrow{OABO}$  在  $x$  轴上的射影和等于零, 即得:

$$m \cos \alpha + m \operatorname{tg} \beta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{m}{\cos \beta} \cos(\alpha + \beta + \pi) = 0. \quad (3)$$

于是

$$\cos \alpha - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = 0,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

由封闭折线  $\overrightarrow{OABO}$  在  $y$  轴上的射影和等于零, 即得:

$$m \sin \alpha + m \operatorname{tg} \beta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{m}{\cos \beta} \sin\left(\alpha + \beta + \frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

于是

$$\sin \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cos \alpha - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = 0,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

这就导出了正弦和余弦的和角公式 (当然, 还要对  $\alpha, \beta$  为任意角情况加以讨论). 注意: 从正弦和角公式出发, 也可独立地导出勾股定理.

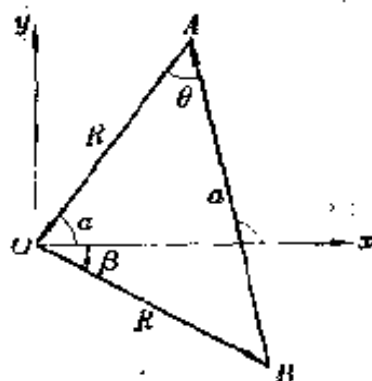


图 6-5

3. 也可以利用封闭折线的射影和, 来推导和差化积公式. 如图 6-6, 在  $x$  轴的两侧分别作  $\alpha, \beta$  角 (设为锐角的情形), 并在角的边上截取  $OA = OB = R$ . 易知:

$$a = 2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta),$$

$$\therefore \varphi = \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

由封闭折线  $\overrightarrow{OBAO}$  在  $y$  轴上的射影和等于零, 即得:

$$\alpha \sin \varphi + R \sin(\pi + \alpha) + R \sin(-\beta) = 0,$$

$$2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) - R \sin \alpha - R \sin \beta = 0,$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

由封闭折线  $\overrightarrow{OBAO}$  在  $x$  轴上的射影和等于零, 即得:

$$\alpha \cos \varphi + R \cos(\pi + \alpha) + R \cos(-\beta) = 0,$$

$$2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) - R \cos \alpha + R \cos \beta = 0,$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

下面, 我们利用封闭折线的射影和, 来证明初等几何中的一些题目.

[例 3] 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  的平分线交  $BC$  于  $D$ , 求证

$$AB:AC = BD:CD.$$

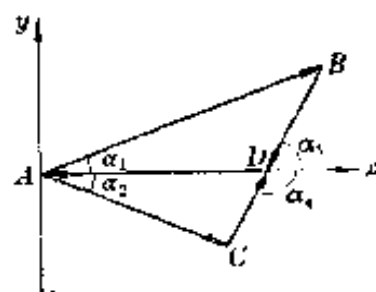


图 6-7

证明 以  $AD$  为  $x$  轴, 建立平面直角坐标系(如图 6-7). 由封闭折线  $\overrightarrow{ABDA}$  在  $y$  轴上的射影和等于零, 得:

$$AB \sin \alpha_1 + BD \sin(\pi + \alpha_3) + DA \sin \pi = 0,$$

$$AB \sin \alpha_1 = BD \sin \alpha_3;$$

由封闭折线  $\overrightarrow{DACD}$  在  $x$  轴上的射影和等于零, 得:

$$DA \sin 0 + AC \sin(-\alpha_2) + CD \sin \alpha_4 = 0,$$

$$AC \sin \alpha_2 = CD \sin \alpha_4.$$

因为  $\alpha_1 = \alpha_2$ , 即有

$$AB:AC = BD:CD.$$

运用封闭折线的射影和的方法, 可以解决几何和三角中的好些证明题、计算题以至极值问题, 并且, 还可以推广到空间封闭折线, 解决立体几何中的一些问题. 当然, 这种方法并非普遍适用, 对于某些类型的问题, 例如有关正切、余切的三角问题, 就并不合适.

# 用复数解几何题

中国科学技术大学数学系 常庚哲

我们知道, 形如  $z = \xi + i\eta$  (其中  $\xi, \eta$  为任何实数,  $i$  适合  $i^2 = -1$ ) 的表达式称为一个复数, 而把复数  $\bar{z} = \xi - i\eta$  称为  $z$  的共轭复数(简称  $z$  的共轭). 显然有:

$$\xi = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \eta = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

它们分别叫做  $z$  的实部和虚部, 分别记为  $\operatorname{Re}(z)$  和  $\operatorname{Im}(z)$ . 直接计算可知  $z\bar{z} = \xi^2 + \eta^2$ , 我们把  $|z| = +\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  叫做复数  $z$  的模(或绝对值).

可以用平面上的点来代表复数. 在一个平面直角坐标系中, 用点  $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$  来表示复数  $z$ ; 反过来, 给出平面上的任一点  $(\xi, \eta)$ , 我们使之与复数  $\xi + i\eta$  对应(图 7-1). 这样, 全体复数与平面上所有点之间就建立了一一对应, 这张平面就叫做复平面. 今后, 我们就把复数同复平面上的点等同起来, 不加区别, 把复数  $z$  直接称为点  $z$ .

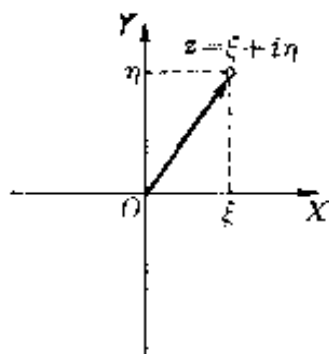


图 7-1

显然,  $z$  与  $\bar{z}$  是关于实轴对称的两点;  $|z|$  正好是点  $z$  到坐标原点的距离.

还可以把复数解释为平面矢量. 从原点  $O$  起、到点  $z$  为

止的有向线段  $\overrightarrow{Oz}$ , 既有长度 (即为  $|z|$ ) 又有方向, 因此是一个矢量, 它是点  $z$  的定位矢量. 每一个复数都有自己的确定的

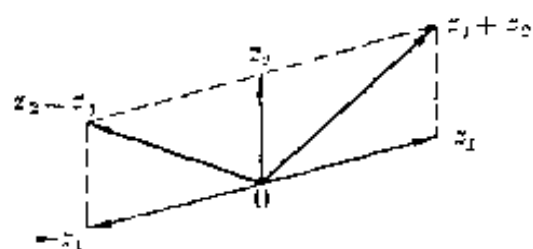


图 7-2

定位矢量; 反过来, 任一自原点出发的矢量, 其终点总代表着一个确定的复数. 很重要的一个事实是: 由复数加法的定义可知,  $z_1+z_2$  的定位矢量, 正好

是以  $z_1$  与  $z_2$  的定位矢量为邻边作成的平行四边形的对角线矢量 (图 7-2). 这就是说, 复数加法的规则与平面矢量加法的平行四边形法则是完全一致的, 也就是说, 复数的加法运算就是平面矢量的加法运算!

对照着图 7-2, 关于复数的绝对值不等式

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1)$$

就有了很明确的几何意义, 它表明: 三角形的两边之和决不会小于第三边. 所以不等式 (1) 也叫做三角形不等式.

因为  $z_2-z_1 = z_2 + (-z_1)$ , 由图 7-2 可见,  $z_2-z_1$  的定位矢量与矢量  $\overrightarrow{z_1z_2}$  有相同的长度和方向, 从自由矢量 (即不计较矢量的起点的位置) 的观点来看, 这两个矢量是相等的, 即

$$\overrightarrow{z_1z_2} = z_2 - z_1.$$

复平面上两点  $z_1$  与  $z_2$  之间的距离, 即矢量  $\overrightarrow{z_1z_2}$  的长度:

$$\|\overrightarrow{z_1z_2}\| = |z_2 - z_1|,$$

这就是计算复平面上两点间距离的公式.

用复平面上的点来代表复数之后, 便可导出复数的另一种表达式. 令  $\rho = |z|$ , 由图 7-1 可见

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \quad (2)$$

其中  $\theta$  是矢量  $\overrightarrow{Oz}$  与实轴正向的夹角, 称为复数  $z$  的幅角, 记为  $\theta = \arg z$ , 同一个复数的幅角当然可以彼此相差  $2\pi$  的任一

整倍数,但是从几何应用看来,可以把幅角限制在:  $-\pi < \arg z \leq \pi$ . 显然,  $z=0$  是无法定义幅角的唯一复数. 有了关系式 (2) 之后, 可以把复数  $z$  写成

$$z = \xi + i\eta = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

引入缩写记号  $e^{i\theta} \equiv \cos \theta + i \sin \theta$ , 复数  $z$  便可表为  $z = \rho e^{i\theta}$ , 这称为复数  $z$  的指数形式.

直接计算可知, 对任何实数  $\theta$ ,  $|e^{i\theta}| = 1$ , 这就表明:  $e^{i\theta}$  总是单位圆 (以原点为圆心, 1 为半径的圆周) 上的点. 在高等数学中, 可以从理论上证明指数函数  $e^{i\theta}$  确实是  $\cos \theta + i \sin \theta$ , 但对我们的几何应用来说, 完全无须理解这一点, 大家只须知道: 表达式  $\cos \theta + i \sin \theta$  确实具有指数函数的一条基本性质, 因为直接计算可知

$$\begin{aligned} & (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'), \end{aligned}$$

用新引入的记号来表示则是  $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$ , 可见采用这种记号是合理的.

设  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $z' = \rho' e^{i\theta'}$ , 那么

$$zz' = (\rho e^{i\theta}) (\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')},$$

由此可知

$$\begin{aligned} |zz'| &= \rho\rho' = |z||z'|, \\ \arg(zz') &= \theta + \theta' = \arg z + \arg z'. \end{aligned}$$

这两条性质显然可以利用数学归纳法推广到多个复数相乘的情形中去.

在以上两式中, 若取  $z = e^{i\theta}$ , 则有

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} z'| &= |z'|, \\ \arg(e^{i\theta} z') &= \theta + \arg z'. \end{aligned}$$

此两式表明, 用  $e^{i\theta}$  去乘任一复数  $z'$  的后果是: 没有改变定位

矢量  $\overrightarrow{Oz'}$  的长度, 但是将它绕着原点向反时针方向旋转了角度  $\theta$ . 特别, 由于  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ , 所以  $iz'$  乃是将  $\overrightarrow{Oz'}$  绕着原点向反时针方向旋转一直角所得的矢量.

讨论两复数相除的情形:  $\frac{z}{z'}$  ( $z' \neq 0$ ). 由于  $z' \left( \frac{z}{z'} \right) = z$ , 所以  $|z'| \left| \frac{z}{z'} \right| = |z|$ ,  $\arg z' + \arg \left( \frac{z}{z'} \right) = \arg z$ , 由此得到:

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad (z' \neq 0)$$

$$\arg \left( \frac{z}{z'} \right) = \arg z - \arg z'.$$

后一等式表明: 由矢量  $\overrightarrow{Oz'}$  沿反时针方向转动到矢量  $\overrightarrow{Oz}$  所扫过的角, 可以用  $\arg \left( \frac{z}{z'} \right)$  来计算.

## (一) 基本定理

我们已经看到, 复数可以用来表示平面上的点, 也可以看成平面矢量; 复数的加法、减法正好相当于矢量的加法、减法运算; 平面上的旋转变换可以用  $e^{i\theta}$  来作乘法而实现; 两点之间的距离以及两个矢量之间所夹的角都可以通过复数来计算. 不仅如此, 下面将指明, 许多特殊的几何关系可以用复数的某种代数关系式来刻画. 所有这一切, 提供了用复数计算来作几何证题的基础.

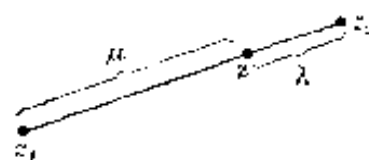


图 7-3

**1. 定比分点**  $z_1, z_2$  是复平面上两个不同的点, 所谓定比分点问题是指: 要在  $z_1$  与  $z_2$  连成的直线段

上求出一点  $z$ , 它按事先指定的比例分割此直线段, 例如说

$$|\vec{z_1 z}| : |\vec{z z_2}| = \mu : \lambda \quad (\lambda > 0, \mu > 0).$$

由图 7-3 看出, 矢量  $\vec{z_1 z} = z - z_1$  与矢量  $\vec{z z_2} = z_2 - z$  不但平行而且指向也一致, 故以上比例式可以写为

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{\mu}{\lambda},$$

由此解得定比分点公式:

$$z = \frac{\lambda z_1 + \mu z_2}{\lambda + \mu}. \quad (3)$$

特别地, 当  $\lambda = \mu$  时, (3) 式所表示的正好是  $z_1$  与  $z_2$  连线的中点, 所以称  $z = (z_1 + z_2)/2$  为中点公式, 这是一个常用的公式.

如果把 (3) 中的  $\lambda/(\lambda + \mu)$  直接记为  $\lambda$ , 那么  $\mu/(\lambda + \mu)$  就等于  $1 - \lambda$ , 这时 (3) 变为

$$z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2, \quad (4)$$

其中  $0 < \lambda < 1$ , 这是定比分点公式的又一种形式, 它的好处是式中只包含一个参数  $\lambda$ .

由定比分点公式, 很容易推出三点共线的条件.

**定理 1** 三点  $z_1, z_2, z_3$  共线的必要充分条件是: 存在三个不全为零的实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  使得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \text{且} \quad \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0. \quad (5)$$

**证明** 设  $z_1, z_2, z_3$  三点共线. 无妨设  $z_3$  在  $z_1$  与  $z_2$  的连线之内, 按定比分点公式 (4) 有:  $z_3 = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2$ , 令  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = 1 - \lambda$ ,  $\lambda_3 = -1$ , 显然它们不全为零, 并且适合  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  以及  $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0$ . 这就证完了必要性. 充分性留给读者来证.

在解题过程中, 有时要用到的是定理 1 的如下推论:

**推论** 如果已有三个实数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  使得 (5) 中的两式成立, 并且我们已知三点  $z_1, z_2, z_3$  分明不在同一直线上, 那么



只能有  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

**2. 两三角形直接相似的条件** 在定义两三角形直接相似的概念之前, 先说明三角形的定向. 如果  $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow z_1$  是沿反时针方向绕行的, 则称  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正向三角形; 否则称之为负向三角形. 如果  $\triangle z_1 z_2 z_3$  与  $\triangle w_1 w_2 w_3$  按通常的意义是相似的并且还有相同的定向, 则称它们是直接相似的, 此时记为  $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$ .

**定理 2**  $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$  的必要充分条件是

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}, \quad (6)$$

或者

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

**证明** 由图 7-4 可见, 如果  $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$ , 一方面,

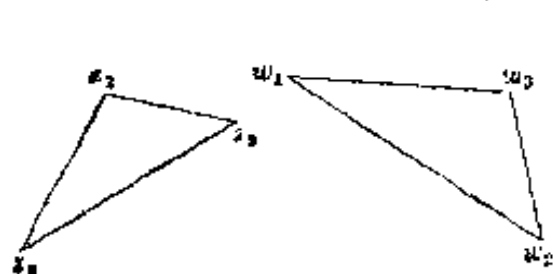


图 7-4

$\overrightarrow{z_1 z_3}$  到  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  的有向转角等于  $\overrightarrow{w_1 w_3}$  到  $\overrightarrow{w_1 w_2}$  的有向转角, 即

$$\begin{aligned} \arg \left( \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right) \\ = \arg \left( \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right), \end{aligned}$$

另一方面, 夹等角的两边成比例, 即

$$\frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|w_2 - w_1|}{|w_3 - w_1|}.$$

以上二式可以合并表为

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}.$$

反过来, 由上式很容易推出  $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$ . 直接计算可

知, (6) 与 (7) 是等价的.

### 3. 三角形为正三角形的条件

**定理 3**  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正三角形的必要充分条件是

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2. \quad (8)$$

**证明** 显而易见,  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正三角形当且只当  $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle z_2 z_3 z_1$ , 利用定理 2 便可得出关系式 (8).

下面是  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正三角形的另一特征:

**定理 4**  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正向的正三角形的必要充分条件是  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$  适合

$$u^2 z_1 - u z_2 + z_3 = 0, \text{ 其中 } u = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

(或  $u^2 z_2 - u z_3 + z_1 = 0$ , 或  $u^2 z_3 - u z_1 + z_2 = 0$ )

**证明** 若  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正向正三角形, 一方面有  $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$ , 同时由  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  到  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  所扫过的有向角为  $\pi/3$ , 这就是说  $(z_3 - z_1) = (z_2 - z_1) e^{i\frac{\pi}{3}} = (z_2 - z_1) u$ , 由此可以推出  $(u-1)z_1 - u z_2 + z_3 = 0$ , 由于  $u-1 = -u^2$ , 故上式可以写成  $u^2 z_1 - u z_2 + z_3 = 0$ . 当然, 由此式反推回去亦可证得  $\triangle z_1 z_2 z_3$  是正向的正三角形.

### 4. 三角形的面积

公式

设  $\triangle z_1 z_2 z_3$  是任意三角形 (图 7-5),  $\theta$  是由矢量  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  转动到  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  的有向转角 (对于图 7-5 中的左图,  $\theta > 0$ ; 对于图 7-5 中的右图,  $\theta < 0$ ), 我们把实数

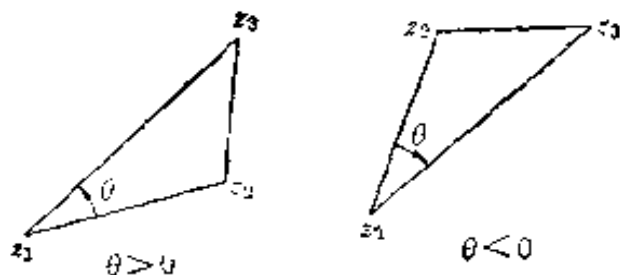


图 7-5

$$\frac{1}{2} |z_2 - z_1| |z_3 - z_1| \sin \theta$$

称为  $\triangle z_1 z_2 z_3$  的有向面积, 仍旧用  $\triangle z_1 z_2 z_3$  来记. 这个实数的正、负, 依赖于  $\sin \theta$  的符号, 亦即依赖于三角形的定向, 如果三角形  $\triangle z_1 z_2 z_3$  是正向的, 则  $\triangle z_1 z_2 z_3 > 0$ ; 如果是负向的, 则  $\triangle z_1 z_2 z_3 < 0$ ; 而  $|\triangle z_1 z_2 z_3|$  即是该三角形的面积. 所以说, 有向面积不但反映三角形的面积, 还能指明三角形的定向.

按  $\theta$  的定义, 应有

$$\theta = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right),$$

所以

$$e^{i\theta} = \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) \bigg/ \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} \frac{(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)},$$

由此可得

$$\begin{aligned} \triangle z_1 z_2 z_3 &= \frac{1}{2} |z_2 - z_1| |z_3 - z_1| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} |z_2 - z_1| |z_3 - z_1| \operatorname{Im}(e^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2} |z_2 - z_1| |z_3 - z_1| \operatorname{Im}\left[\frac{|z_2 - z_1|}{|z_3 - z_1|} \frac{(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)}\right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left[|z_2 - z_1|^2 \frac{(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)}\right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}[(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1). \end{aligned}$$

于是我们有:

**定理 5** 三角形  $\triangle z_1 z_2 z_3$  的有向面积

$$\triangle z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1),$$

由于

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1) &= \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) + \operatorname{Im}(\bar{z}_2 z_3) + \operatorname{Im}(\bar{z}_3 z_1) \\
&= \frac{1}{2i} [(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2) + (\bar{z}_2 z_3 - z_2 \bar{z}_3) + (\bar{z}_3 z_1 - z_3 \bar{z}_1)] \\
&= \frac{i}{2} [(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) + (z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3) + (z_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 z_1)],
\end{aligned}$$

所以又有:

**定理 6** 三角形的有向面积

$$\Delta z_1 z_2 z_3 = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}.$$

如果  $z_1, z_2, z_3$  共线, 则  $\Delta z_1 z_2 z_3 = 0$ ; 反之也对. 由此可得出推论: 三点  $z_1, z_2, z_3$  共线的必要充分条件是

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1) = 0,$$

或者

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

## 5. 圆的切线

**定理 7** 有一中心在原点、半径为  $\rho$  的圆周,  $z$  是圆外的一点. 自  $z$  向该圆作两条切线, 切圆于  $a, b$  两点, 则有

$$z = \frac{2\rho^2}{a + \bar{b}} \quad \text{或} \quad z = \frac{2ab}{a + b}.$$

**证明** 设  $z, a, b$  的相互位置如图 7-6 所示. 由于

$$\overrightarrow{az} \perp \overrightarrow{Oa}, \quad \overrightarrow{bz} \perp \overrightarrow{Ob}, \quad \|\overrightarrow{az}\| = \|\overrightarrow{bz}\| = \lambda,$$

故应有

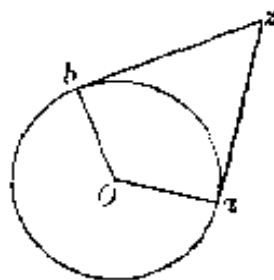


图 7-6

$$z-a=\lambda \frac{a}{\rho} i, \quad z-b=-\lambda \frac{b}{\rho} i,$$

亦即

$$z=a\left(1+\frac{\lambda}{\rho} i\right), \quad z=b\left(1-\frac{\lambda}{\rho} i\right),$$

用  $\bar{a}$  及  $\bar{b}$  分别乘以上二式的两边, 利用  $a\bar{a}=b\bar{b}=\rho^2$ , 得

$$\bar{a}z=\rho^2+\lambda\rho i, \quad \bar{b}z=\rho^2-\lambda\rho i.$$

将以上两式双方分别相加后解出

$$z=\frac{2\rho^2}{a+b}=\frac{2\rho^2ab}{(a+b)ab}=\frac{2ab}{a+b}.$$

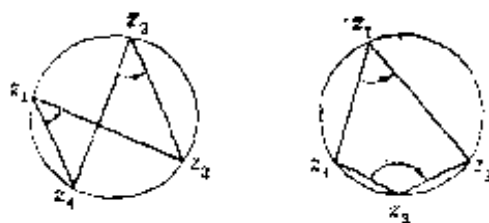


图 7-7

## 6. 四点共圆的条件



**定理 8**  $z_1, z_2, z_3, z_4$  在同一圆周上的必要充分条件是

$$\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_4-z_1)(z_3-z_2)} = \text{实数}.$$

**证明** 四个点分布在同一圆周上, 其相互位置一共有六种不同的情况, 图 7-7 中画出的只是其中的两种情况.

对图 7-7 中的左图, 从  $\overrightarrow{z_1z_4}$  到  $\overrightarrow{z_1z_3}$  的有向转角等于从  $\overrightarrow{z_2z_4}$  到  $\overrightarrow{z_2z_3}$  的有向转角, 因此

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right)=\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\right).$$

对图 7-7 中的右图, 从  $\overrightarrow{z_1z_4}$  到  $\overrightarrow{z_1z_3}$  的有向转角与从  $\overrightarrow{z_3z_4}$  到  $\overrightarrow{z_3z_2}$  的有向转角之差正好等于  $\pi$ , 因此

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right)-\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\right)=\pi.$$

以上两式可以合并写为

$$\arg \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = \begin{cases} 0, \\ \pi. \end{cases}$$

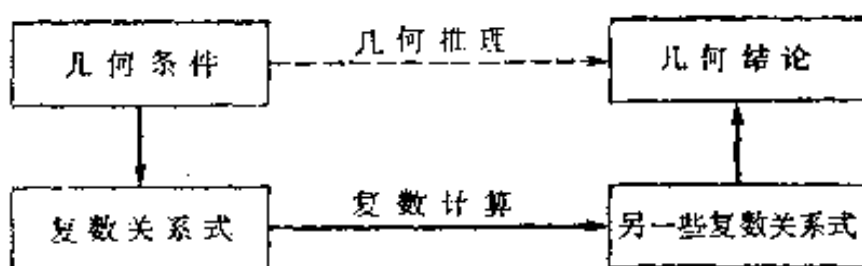
这正表明

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = \text{实数}.$$

读者可以自行证明, 对于其余的四种情形, 也可导出同样的结论.

## (二) 若 干 例 题

复数计算用于证明几何问题的基本思想, 可以用下列框图明晰地表示出来:



详细地说, 如果从已知的一些几何假设出发, 经过纯几何的推理, 得到欲证的几何结论, 即沿着虚箭头的方向进行, 这就是综合几何的方法. 而用复数方法来证几何问题, 则是首先将已知的几何条件“翻译”成复数的若干关系式, 然后经过一系列的复数计算, 得出一批新的关系式, 最后把它们再“翻译”为几何事实, 就是所需的几何结论. 所以, 我们是沿着实箭头所指示的道路, 到达了虚箭头所指示的目的地. 虽然经过的是一条迂回曲折的道路, 但是, 这条道路往往是“平坦的”, 不需要更多的“巧思”, 只要求踏踏实实、直截了当地计算, 这是用复数解几何题的最大优点!

[例 1] 证明: 三角形的三条中线相交于一点.

证明 设  $\triangle z_1 z_2 z_3$  各边上的中点为  $w_1, w_2, w_3$ , (图 7-8), 并设  $z_1$  与  $w_1$  的联线和  $z_2$  与  $w_2$  的联线相交于点  $m$ . 按定比分点公式, 应有实数  $\lambda$  及  $\mu$ , 使

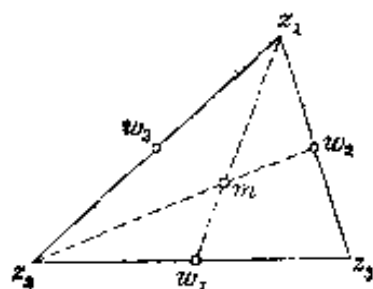


图 7-8

$$m = \lambda z_1 + (1 - \lambda) w_1$$

$$= \mu z_2 + (1 - \mu) w_2.$$

用中点公式  $w_1 = (z_2 + z_3)/2$  及  $w_2 = (z_3 + z_1)/2$  代入上式中, 移项整理后得出

$$\left(\lambda + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}\right) z_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} - \mu\right) z_2 + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) z_3 = 0,$$

由于

$$\left(\lambda + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} - \mu\right) + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = 0,$$

而  $z_1, z_2, z_3$  分明不共线, 由定理 1 的推论可得

$$\lambda + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} - \mu = \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0$$

由此得出  $\lambda = \mu = 1/3$ , 从而  $m = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ , 这是关于  $z_1, z_2, z_3$  的对称式, 由此推知另外一条中线也必通过这一点.

$(z_1 + z_2 + z_3)/3$  叫做  $\triangle z_1 z_2 z_3$  的重心.

注意, 例 1 的解法中提供了求两条线段的交点的方法.

[例 2] 如果三角形的重心和外心重合, 则此三角形为等边三角形.

证明 把  $\triangle z_1 z_2 z_3$  的外心放在原点, 所以  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ ,  $\rho$  是此三角形外接圆的半径. 由于重心与外心即原点重合, 所以  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ . 这样

$$\begin{aligned}
z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 &= z_1 z_2 z_3 \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \\
&= z_1 z_2 z_3 \left( \frac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_3}{z_3 \bar{z}_3} \right) \\
&= \frac{1}{\rho^2} z_1 z_2 z_3 (\overline{z_1 + z_2 + z_3}) = 0.
\end{aligned}$$

于是, 由  $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0$  可以推出  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ . 我们最后得到了  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2$ , 根据定理 3, 可知  $\triangle z_1 z_2 z_3$  是一个正三角形.

[例 3] 如果圆内接六边形  $ABCDEF$  满足:

$$AB = CD = EF = \rho,$$

其中  $\rho$  为圆的半径, 求证  $BC$ 、 $DE$ 、 $FA$  的中点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  联成一个正三角形(图 7-9).

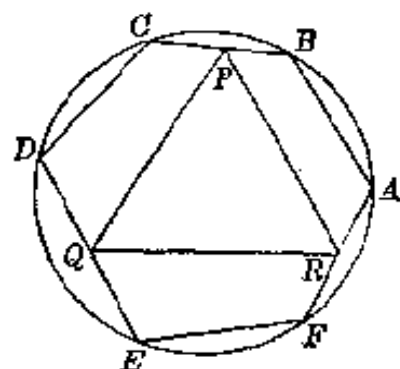


图 7-9

**证明** 设圆心放在原点,  $u = e^{i\frac{\pi}{3}}$ , 从而有  $B = Au$ ,  $D = Cu$ ,  $F = Eu$ . 由中点公式, 得

$$P = \frac{1}{2} (B + C) = \frac{1}{2} (Au + C),$$

$$Q = \frac{1}{2} (D + E) = \frac{1}{2} (Cu + E),$$

$$R = \frac{1}{2} (F + A) = \frac{1}{2} (Eu + A).$$

由于  $u^3 = -1$ , 所以

$$\begin{aligned}
2(Pu^2 - Qu + R) &= (Au + C)u^2 - (Cu + E)u \\
&\quad + (Eu + A) = Au^3 + A = 0.
\end{aligned}$$

按定理 4 便知  $\triangle PQR$  是一个正三角形.

[例 4] 在  $\triangle z_1 z_2 z_3$  的各边上, 向外作一个三角形(图



7-10), 使  $\triangle z_1 z_2 z'_3 \sim \triangle z_2 z_3 z'_1 \sim \triangle z_3 z_1 z'_2$ . 求证: 当  $\triangle z'_1 z'_2 z'_3$  为正三角形时, 必须  $\triangle z_1 z_2 z_3$  是正三角形, 或者上述三个相似三角形都是顶角为  $120^\circ$  的等腰三角形.

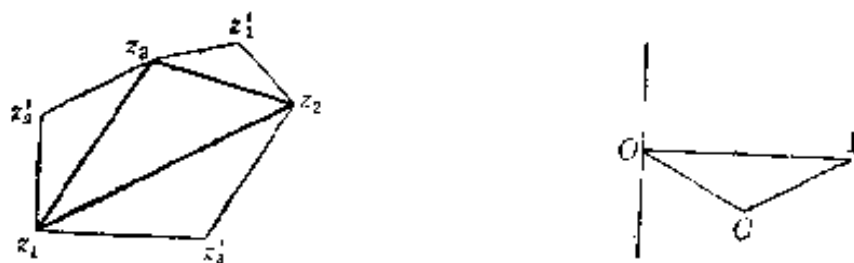


图 7-10

**证明** 由题设, 可知

$$\frac{z'_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z'_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{z'_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

把这个公共比值用复数  $c$  来表示, 则可得

$$z'_1 = (1 - c)z_2 + cz_3,$$

$$z'_2 = (1 - c)z_3 + cz_1,$$

$$z'_3 = (1 - c)z_1 + cz_2.$$

设  $u = e^{i\frac{\pi}{3}}$ , 今计算

$$\begin{aligned} & u^2 z'_1 - u z'_2 + z'_3 \\ &= (1 - c)(u^2 z_2 - u z_3 + z_1) + c(u^2 z_3 - u z_1 + z_2) \\ &= (1 - c)u^2(z_2 + u^2 z_3 - u z_1) + c(u^2 z_3 - u z_1 + z_2) \\ &= (u^2 z_3 - u z_1 + z_2)[u^2 + c(1 - u^2)], \end{aligned}$$

以上计算中用到了  $u^3 = -1$ . 如果  $\triangle z'_1 z'_2 z'_3$  为正三角形, 则必须  $u^2 z'_1 - u z'_2 + z'_3 = 0$ . 如果  $u^2 z_3 - u z_1 + z_2 = 0$ , 则依定理 4, 此时  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正三角形, 否则将有

$$c = \frac{u^2}{u^2 - 1} = \frac{u^3}{u^3 - u} = \frac{1}{1 + u}.$$

这时  $1+c = \frac{u}{1+u}$ , 所以  $|c| = |1+c|$ , 由  $z'_1 = (1+c)z'_1 + cz'_1$   
 $= (1+c)z_2 + cz_3$  得到  $(1+c)(z'_1 - z_2) = c(z_3 - z'_1)$ , 双方取模之  
 后得出  $|z'_1 - z_2| = |z'_1 - z_3|$ , 这说明在各边上作出的三角形均  
 是等腰三角形.

由于

$$\begin{aligned} 1+u &= 1+e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

故

$$\arg c = -\arg(1+u) = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ,$$

由此可知

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z'_1 - z_2}\right) = 30^\circ,$$

这表明在各边上作出的等腰三角形的底角均为  $30^\circ$ , 即顶角  
 为  $120^\circ$ . 证完.

[例 5] 若  $G$  是  $\triangle ABC$  内部一点, 且  $\triangle ABG$ 、 $\triangle BCG$ 、  
 $\triangle CAG$  的面积相等, 则  $G$  必是  $\triangle ABC$  的重心.

证明 设  $A, B, C, G$  的复数表示分别是  $a, b, c, g$ . 从  
 顶点  $a$  到  $g$  联一直线交对边于  $d$ , 根据定比分点知识, 有正数  
 $\lambda$  使  $d = \lambda b + (1-\lambda)c$ , 又有正数  $\mu$  使  $g = \mu d + (1-\mu)a$ . 于  
 是

$$g = (1-\mu)a + \lambda\mu b + (1-\lambda)\mu c.$$

令

$$\lambda_1 = 1-\mu, \quad \lambda_2 = \lambda\mu, \quad \lambda_3 = (1-\lambda)\mu,$$

这是三个正数, 一方面使  $g = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$ , 另一方面

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

由于  $\triangle abg = \frac{1}{3} \triangle abc$ , 根据定理 6 中的面积公式, 应有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & g \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{g} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix},$$

但是

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & g \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{g} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ a & b & \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c \\ \bar{a} & \bar{b} & \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda_3 \\ a & b & \lambda_3 c \\ \bar{a} & \bar{b} & \lambda_3 \bar{c} \end{vmatrix} = \lambda_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

可见  $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ . 同理可证  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$ . 所以  $g = (a+b+c)/3$ ,

这正是  $\triangle abc$  的重心. 证完.

[例 6]  $\triangle w_1 w_2 w_3$  的内切圆切三边于点  $z_1, z_2, z_3$  (图 7-11). 若  $\triangle w_1 w_2 w_3 \sim \triangle z_1 z_2 z_3$ , 则  $\triangle w_1 w_2 w_3$  为正三角形.

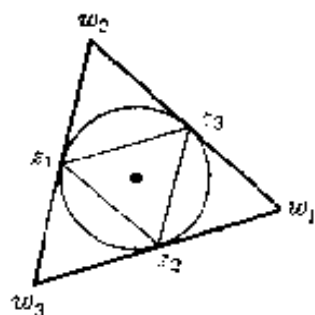


图 7-11

证明 把  $\triangle w_1 w_2 w_3$  的内心放在原点, 按照定理 7 中的公式, 应有

$$w_1 = \frac{2z_2 z_3}{z_2 + z_3},$$

$$w_2 = \frac{2z_3 z_1}{z_3 + z_1}, \quad w_3 = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

若  $\triangle w_1 w_2 w_3 \sim \triangle z_1 z_2 z_3$ , 则由公式(7)可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} & \frac{z_3 z_1}{z_3 + z_1} & \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \end{vmatrix} = 0.$$

但是

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} & \frac{z_3 z_1}{z_3 + z_1} & \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)(z_1 + z_2)} \begin{vmatrix} z_2 + z_3 & z_3 + z_1 & z_1 + z_2 \\ z_1(z_2 + z_3) & z_2(z_3 + z_1) & z_3(z_1 + z_2) \\ z_2 z_3 & z_3 z_1 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2}{(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)(z_1 + z_2)} \begin{vmatrix} z_2 + z_3 & z_3 + z_1 & z_1 + z_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ z_2 z_3 & z_3 z_1 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)(z_1 + z_2)} (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2),
\end{aligned}$$

所以  $z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = 0$ . 用  $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$  去乘前式双方, 得出

$$\rho^2 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 0,$$

其中  $\rho$  表示内切圆的半径. 由此可知  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , 从

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0$$

可以推得  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = 0$ . 由定理 3 便可得知  $\triangle z_1 z_2 z_3$  为正三角形, 此时  $\triangle w_1 w_2 w_3$  亦必为正三角形.

[例 7] 设以  $w_1, w_2, w_3, w_4$  为顶点的四边形有内切圆, 求证此四边形的两条对角线的中点与圆心共线.

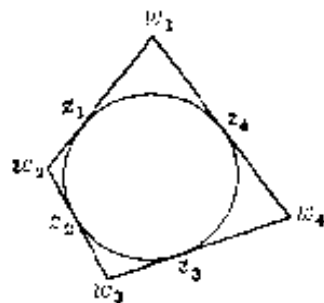


图 7-12

证明 无妨设此四边形的内切圆是单位圆, 切各边于点  $z_1, z_2, z_3, z_4$  (图 7-12). 按定理 7 中的公式, 有

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{2}{\bar{z}_4 + \bar{z}_1}, & w_2 &= \frac{2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}, \\
w_3 &= \frac{2}{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}, & w_4 &= \frac{2}{\bar{z}_3 + \bar{z}_4}.
\end{aligned}$$

两对角线的中点分别用  $p, q$  来记, 于是

$$p = \frac{1}{2}(w_1 + w_3) = \frac{\overline{z_1 + z_2 + z_3} + \overline{z_4}}{(\overline{z_4 + z_1})(\overline{z_2 + z_3})},$$

$$q = \frac{1}{2}(w_2 + w_4) = \frac{\overline{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}}{(\overline{z_1 + z_2})(\overline{z_3 + z_4})},$$

为了证明  $O, p, q$  三点共线, 只须证明  $p/q$  为一实数, 亦或只须证明  $(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) / [(z_4 + z_1)(z_2 + z_3)]$  为一实数. 由于四点  $z_1, z_3, (-z_2), (-z_4)$  共圆, 按照定理 8, 便知

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)}{(z_3 + z_2)(z_1 + z_4)}$$

的确是一实数, 这样就得出欲证的结果.

[例 8] (Padoe 不等式) 设  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $\triangle ABC$  的三条边,  $\alpha', \beta', \gamma'$  是  $\triangle A'B'C'$  的三条边. 用  $\Delta$  与  $\Delta'$  分别记这两个三角形的面积, 则有不等式

$$\begin{aligned} \alpha'^2(-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \beta'^2(\alpha^2 - \beta^2 \\ + \gamma^2) + \gamma'^2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \geq 16\Delta\Delta'. \end{aligned} \quad (9)$$

式中等号当且只当  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  时成立.

证明 把  $\triangle ABC$  的一个顶点  $C$  放在座标原点, 其余二顶点用复数  $a, b$  来记, 设  $\alpha = |a|, \beta = |b|$ , 于是  $\gamma = |a - b|$ . 类似地处理  $\triangle A'B'C'$ , 即设  $C' = 0, \alpha' = |a'|, \beta' = |b'|$ , 于是  $\gamma' = |a' - b'|$ . 所以

$$\begin{aligned} \alpha'^2(-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) &= a'\bar{a}'[-a\bar{a} + b\bar{b} + (a - b)(\bar{a} - \bar{b})] \\ &= a'\bar{a}'[2b\bar{b} - (a\bar{b} + \bar{a}b)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta'^2(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) &= b'\bar{b}'[a\bar{a} - b\bar{b} + (a - b)(\bar{a} - \bar{b})] \\ &= b'\bar{b}'[2a\bar{a} - (a\bar{b} + \bar{a}b)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma'^2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) &= (a' - b')(\bar{a}' - \bar{b}') [a\bar{a} + b\bar{b} - (a - b)(\bar{a} - \bar{b})] \\ &= [a'\bar{a}' + b'\bar{b}' - (a'\bar{b}' + \bar{a}'b')] (a\bar{b} + \bar{a}b). \end{aligned}$$

把以上三式两边分别相加, 得

$$\begin{aligned}
 H &= \alpha'^2(-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \beta'^2(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) \\
 &\quad + \gamma'^2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \\
 &= 2(|\alpha'|^2|b|^2 + |\alpha|^2|b'|^2) \\
 &\quad - (ab + \bar{a}b)(a'\bar{b}' + \bar{a}'b').
 \end{aligned} \tag{10}$$

对于图 7-13 所示的情形, 我们有

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{a}b) = \frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{4i}, \\
 \Delta' &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{a}'b') = \frac{\bar{a}'b' - a'\bar{b}'}{4i}.
 \end{aligned}$$

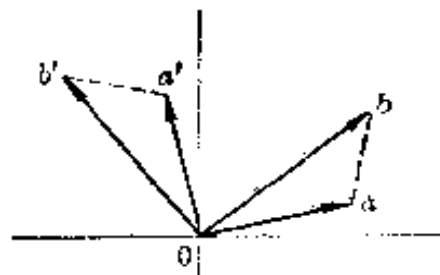


图 7-13

所以

$$16\Delta\Delta' = -(\bar{a}b - a\bar{b})(\bar{a}'b' - a'\bar{b}'). \tag{11}$$

从(10)与(11)可得

$$\begin{aligned}
 H - 16\Delta\Delta' &= 2(|\alpha'|^2|b|^2 + |\alpha|^2|b'|^2) \\
 &\quad + (\bar{a}b - a\bar{b})(\bar{a}'b' - a'\bar{b}') - (a\bar{b} + \bar{a}b)(a'\bar{b}' + \bar{a}'b') \\
 &= 2[|\alpha'|^2|b|^2 + |\alpha|^2|b'|^2 - (a\bar{a}'\bar{b}b' + \bar{a}a'b\bar{b}')] \\
 &= 2(ab' - a'b)(\overline{ab' - a'b}) = 2|ab' - a'b|^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

由此可见, 恒有  $H \geq 16\Delta\Delta'$ , 式中等号当且只当  $ab' = a'b$  时 (亦即当  $a/b = a'/b'$  时) 成立. 而此式表明  $\triangle Oab \sim \triangle Oa'b'$ , 即  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'O'$ . 这样就完全证明了 Pedoe 不等式.

# 几何证题中运用射影几何的方法

单 博

解决一个数学问题往往可以有两种不同的途径，一种是充分利用已经学过的知识和方法，来解这个问题，另一种是暂时先撇开所要解的问题，引入一些新的（当然不是与所说问题毫无关系的）概念和方法，导出某些较为一般的结论，而原来要解的问题就作为特例包含在这些结论之中，或者作为这些结论的简单推论而立即得出。

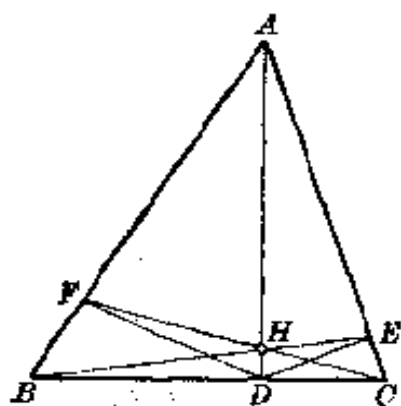


图 8-1

下面举出几个几何问题：

问题一 在  $\triangle ABC$  中， $AD$  为高， $H$  为  $AD$  上任意一点，直线  $BE$ 、 $CF$  分别与  $AC$ 、 $AB$  相交于  $E$ 、 $F$ ，连接  $ED$ 、 $FD$ ，证明  $\angle FDH = \angle HDE$ 。（图 8-1）

问题二 在正方形  $ABCD$  中，作直线  $EF \parallel BC$ ，交  $CD$  于  $F$ ，在  $EF$  上任取一点  $G$ ，直线  $AG$  与  $BF$  相交于  $H$ ， $DH$  与  $BC$  相交于  $I$ （以后简称为  $AG \times BF = H$ ， $DH \times BC = I$ ，本文中，两直线的交点均采用这样的记法），证明  $GI \parallel AB$ 。（图 8-2）

问题三 点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  在直线  $l$  上，点  $D$ 、 $E$ 、 $F$  在直线  $m$  上， $AE \times BD = G$ ， $AF \times DC = H$ ， $BF \times CE = I$ ，证明  $G$ 、 $H$ 、

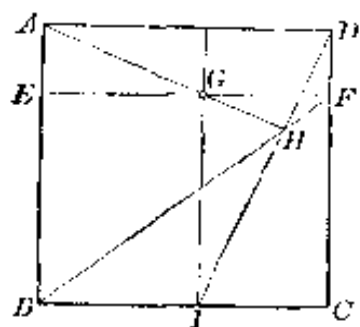


图 8-2

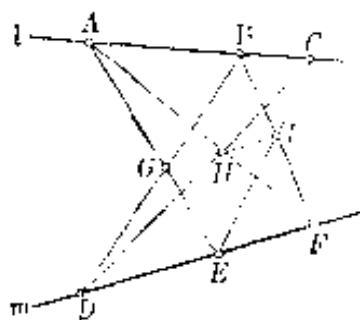


图 8-3

$I$  三点共线, (图 8-3)

**问题四** 自圆  $O$  外一点  $P$  作圆  $O$  的一条切线和一条割线, 切线与圆  $O$  相切于  $A$ , 割线与圆  $O$  相交于  $C$ 、 $D$ ,  $AB$  为圆  $O$  的直径, 过  $C$  作直线  $CQ \parallel PO$ ,  $CQ \times AB = E$ ,  $CQ \times BD = F$ , 证明  $CE = EF$ . (图 8-4)

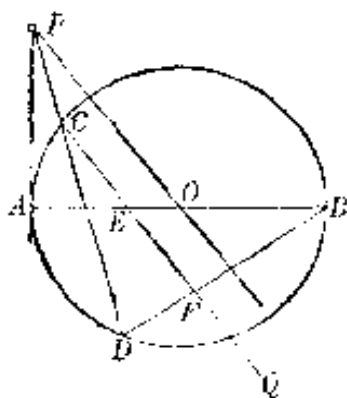


图 8-4

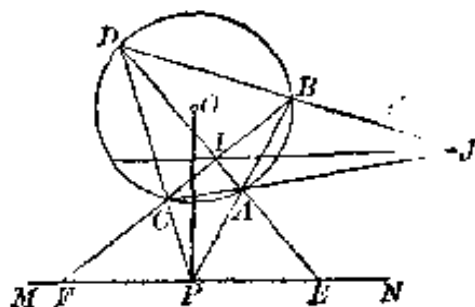


图 8-5

**问题五** 自圆  $O$  的圆心  $O$  向直线  $MN$  作垂线, 垂足为  $P$ , 自  $P$  作两条割线, 分别与圆  $O$  相交于  $A$ 、 $B$ ;  $C$ 、 $D$ .  $AD \times MN = E$ ,  $BC \times MN = F$ , 证明  $P$  为  $EF$  的中点. (图 8-5)

这些初等几何题目, 如果只用中学的几何知识, 都可以解决, 但并不太容易. 如果引入少数射影几何的概念与方法, 就可易于解决一些初等几何的问题.



## (一) 射影几何中的几个概念

### 1. 点列及其中四点的交比

在同一条直线上的若干个点称为一个点列. 设  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  为其中四点(图 8-6), 那么比值

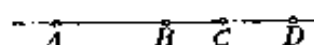


图 8-6

$$\frac{AB}{BC} \bigg/ \frac{AD}{DC} = \frac{AB \times CD}{BC \times DA}$$

称为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的交比, 并记为  $(AC, BD)$ .

不难验证, 在符号  $(AC, BD)$  中,

(1) 前一对点与后一对点是“平等”的, 即将这两对点位置互换, 交比的值不变:

$$(AC, BD) = (BD, AC) = \alpha.$$

(2) 如果将  $A$ 、 $C$  互换或者将  $B$ 、 $D$  互换, 交比的值变为原来的倒数:

$$(CA, BD) = (AC, DB) = \frac{1}{\alpha}.$$

交比  $(AC, BD)$  还具有以下性质:

$$(3) (CA, DB) = (AC, BD) = \alpha.$$

$$(4) (AB, CD) = (DC, BA) = 1 - (AC, BD) = 1 - \alpha.$$

我们以(4)中  $(AB, CD) = 1 - (AC, BD)$  的证明为例:

$$\begin{aligned} (AB, CD) + (AC, BD) &= \frac{AC \times BD}{CB \times DA} + \frac{AB \times CD}{BC \times DA} \\ &= \frac{(AB + BC)(BC + CD) - AB \times CD}{BC \times AD} \\ &= \frac{BC \times (AB + BC + CD)}{BC \times AD} - \frac{BC \times AD}{BC \times AD} \\ &= 1, \end{aligned}$$

所以

$$(AB, CD) = 1 - (AC, BD).$$

下面研究交比等于 1 或 -1 的情况.

(1) 如果  $(AC, BD) = 1$ , 那么  $(AB, CD) = 1 - 1 = 0$ , 因此  $A$  与  $C$  重合或者  $B$  与  $D$  重合. 反过来, 如果  $A$  与  $C$  重合, 或者  $B$  与  $D$  重合, 那么  $(AC, BD) = 1$ .

所以, 在  $A, B, C, D$  为一个点列中四个不同的点时,  $(AC, BD) \neq 1$ .

(2) 如果  $(AC, BD) = -1$ , 那么  $\frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$ . 这样的四个点  $A, B, C, D$  称为调和点列,  $A, C$  与  $B, D$  称为调和共轭,  $D$  称为  $A, C, B$  的第四调和点.

[例 1] 设  $(AC, BD) = -1$ , 证明:

$$(1) \frac{1}{AC} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right);$$

$$(2) OC^2 = OB \times OD, \text{ 其中 } O \text{ 为线段 } AC \text{ 的中点.}$$

证明 (1) 因为  $(AC, BD) = \frac{AB \times CD}{BC \times DA} = -1$ , 所以

$$AB \times (AD + CA) = (BA + AC) \times AD.$$

移项合并, 得

$$2AB \times AD = AB \times AC + AC \times AD.$$

两边同除以  $2AB \times AC \times AD$ , 得

$$\frac{1}{AC} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right).$$

这就是说  $\frac{1}{AB}, \frac{1}{AC}, \frac{1}{AD}$  成等差数列, 所以如果一个数

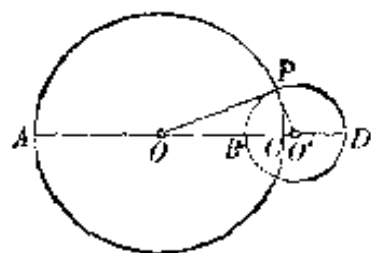


图 8-7

列各项的倒数成等差数列,我们就把这个数列称为调和数列.

(2) 将  $AB = AO + OB = OC + OB$ ,  $AD = AO + OD = OC + OD$ ,  $AO = 2AO$  等代入(1)中,得

$$\frac{1}{OC} = \frac{1}{OB+OC} + \frac{1}{OD+OC},$$

去分母并化简,即得  $OC^2 = OB \times OD$ .

这就是说,以  $O$  为圆心,  $OC$  为半径作反演时,  $B$  的反演是  $D$ .

[例 2] 如果  $A$ 、 $B$ 、 $O$ 、 $D$  为调和点列,圆  $O$  是以  $AO$  为直径的圆,圆  $O'$  是以  $BD$  为直径的圆,那么圆  $O$  与圆  $O'$  直交(即设两圆相交于  $P$ ,那么  $\angle OPO' = 90^\circ$ ,参看图 8-7).

证明 由例 1,  $OP^2 = OB \times OD$ ,所以  $OP$  为圆  $O'$  的切线,  $\angle OPO' = 90^\circ$ .

为叙述方便起见,我们约定在每一条直线上有一个广义的点,称为无穷远点.在同一平面的两条直线如果不平行,它们相交于一个普通点,如果平行,我们约定这两条直线相交于一无穷远点.这样,在同一平面内每两条直线都有一个交点.无穷远点到它所在直线上任一点的距离为  $\infty$ ,所以我们就用记号  $\infty$  来表示无穷远点.

约定平面上所有的无穷远点在同一条(广义的)直线上,这条直线称为无穷远线.

从例 1 的(1)式可以看出,在  $(AC, BD) = -1$  时,如果  $D = \infty$ ,那么  $AB = \frac{AC}{2}$ ,即  $B$  为  $AC$  中点;反过来,如果  $B$  为  $AC$  中点,那么由(1)得出  $D = \infty$ .这个结论在解题时常常用到.

## 2. 线束及其中四线的交比

射影几何的许多概念与命题只用到点在直线上、直线通过点等结合关系,在每一个这样的概念或命题中,将点与直线互换,便得到相应的“对偶概念”或“对偶命题”.例如线束——通过同一个点的若干条直线的集合,就是点列的对偶概念.

设  $a, b, c, d$  为同一线束中的四条直线,我们称比值  $\frac{\sin(a, b)\sin(c, d)}{\sin(b, c)\sin(d, a)}$  为  $a, b, c, d$  的交比(其中  $(a, b)$  表示始边  $a$  与终边  $b$  所构成的角),记为  $(ac, bd)$ .

显然在  $a, b, c, d$  四条直线全不相同时,  $(ac, bd) \neq 1$ , 如果  $(ac, bd) = -1$ , 称这四条线为调和线束.

在  $a, b, c, d$  为调和线束时,如果  $b$  平分  $(a, c)$ , 那么

$$\frac{\sin(c, d)}{\sin(d, a)} = -1,$$

从而

$$(c, d) + (a, d) = 180^\circ, (b, d) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

即  $b \perp d$ . 反过来,如果  $b \perp d$ , 那么也易知  $b$  平分  $(a, c)$ . 这也是我们要利用的一个结论.

下面的定理 1 建立了线束的交比与点列的交比之间的关系.

**定理 1** 如果直线  $a, b, c, d$  都通过  $V$  点, 直线  $l$  截这线束于  $A, B, C, D$  (图 8-8), 那么

$$(ac, bd) = (AC, BD).$$

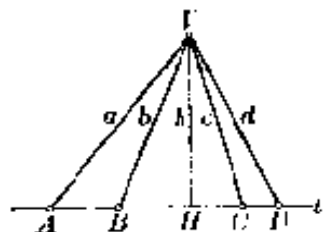


图 8-8

**证明** 记  $V$  到  $l$  的垂线长为  $h$ ,  $VA = \bar{a}$ , 有向三角形  $VAB$  面积为  $S_{\triangle VAB}$  等等, 那么

$$\begin{aligned}
(AC, BD) &= \frac{AB \times CD}{BC \times DA} = \frac{\left(\frac{1}{2} h \times AB\right) \times \left(\frac{1}{2} h \times CD\right)}{\left(\frac{1}{2} h \times BC\right) \times \left(\frac{1}{2} h \times DA\right)} \\
&= \frac{S_{\triangle VAB} \times S_{\triangle VCD}}{S_{\triangle VBC} \times S_{\triangle VDA}} = \frac{\frac{1}{2} \overline{ab} \sin(a, b) \times \frac{1}{2} \overline{cd} \times \sin(c, d)}{\frac{1}{2} \overline{bc} \sin(b, c) \times \frac{1}{2} \overline{da} \sin(d, a)} \\
&= (ac, bd).
\end{aligned}$$

### 3. 射影对应与透视对应

如果点列  $A, B, C, D, \dots$  与点列  $A', B', C', D', \dots$  之间可以建立起一一对应, 并且任意四个点的交比  $(AC, BD)$  与对应点的交比  $(A'C', B'D')$  相等, 我们就说这两个点列是射影对应的, 并记为  $(AC, BD) \bar{\wedge} (A'C', B'D')$ .

如果两个点列  $A, B, C, D, \dots$  与  $A', B', C', D', \dots$  间可以建立起一一对应并且任一对对应点的连线都通过一个定点  $V$ , 那么这两个点列称为透视对应的, 并记为  $(ACBD) \bar{\wedge} (A'C'B'D')$ , 定点  $V$  称为透视中心.

**定理 2** 如果  $(ACBD) \bar{\wedge} (A'C'B'D')$ , 那么  
 $(ACBD) \bar{\wedge} (A'C'B'D')$ .

**证明** 设透视中心为  $V$ , 记  $VA=a, VB=b$  等等. 那么  
 $(AC, BD) = (ac, bd) = (A'C', B'D')$ ,

所以  $(ACBD) \bar{\wedge} (A'C'B'D')$ .

反过来, 如果两个点列成射影对应, 它们是不是一定成透视对应呢? 答案是否定的. 因为在两个点列成透视对应时, 这两个点列所在直线的交点, 作为两个点列的公共元素是自身对应的, 如果将第一个点列的点都沿所在直线移动距离  $h>0$ , 那么由于交比保持不变, 新的点列仍和第二个点列成



在所有的情况中,我们用 $\wedge$ 表示射影对应, $\overline{\wedge}$ 表示透视对应,例如 $(ACBD) \overline{\wedge} V(ACBD)$ 表示点列 $A、C、B、D、\dots$ 与线束 $VA、VC、VB、VD、\dots$ 成透视对应,显然 $\wedge$ 是传递的,而 $\overline{\wedge}$ 不一定是传递的.

## (二) 一些例题

[例3] 设 $A、B、C、D$ 为同一平面内四个不同的点,

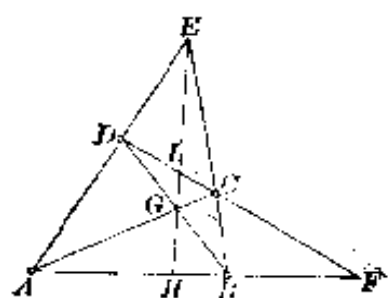


图 8-10

$AD \times CB = E$ ,  $AB \times DC = F$ ,  $AC \times BD = G$ , 这样的图形(图 8-10)称为完全四边形  $ABCD$ ,  $E、F、G$  称为它的对角点. 设  $EG \times AB = H$ ,  $EG \times CD = I$ , 证明  $A、H、B、F$  与  $D、I、C、F$  都是调和点列.

证明  $(ABHF) \overline{\wedge} G(ABHF) \overline{\wedge} (CDIF) \overline{\wedge} E(CDIF) \overline{\wedge} (BAHF)$ , 所以交比

$$(AB, HF) = (BA, HF) = \frac{1}{(AB, HF)}.$$

即  $(AB, HF)^2 = 1$ , 从而  $(AB, HF) = -1$ , 即  $A、B、H、F$  四点为调和点列, 显然, 由此可得  $D、I、C、F$  也是调和点列.

上面证明的命题, 称为射影几何的基本定理. 利用这个定理, 可以作出  $A、B、H$  (在同一直线上) 的第四调和点  $F$ , 而且整个作图只要一根直尺就可以完成(参见第 16 页).

在例 3 中, 如果  $CD \parallel AB$ , 那么  $F = \infty$ , 从而  $H、I$  分别为  $AB、CD$  的中点. 由此不难得出以下结论:

(1) 如果已知平行线段  $AB$  和  $CD$ , 那么只用一根直尺就可以平分  $AB$  与  $CD$ .

(2) 如果已知  $CD$  及其中点  $I$ , 那么只用一根直尺就可以过  $CD$  外一已知点  $A$ , 作直线  $AB \parallel CD$ .

[例 4] 第 94 页中问题一(参看图 8-1).

证明 设  $DE \times AB = I$ , 那么由基本定理得

$$(AB, FI) = -1.$$

但  $(ABFI) \bar{\wedge} D(ABFI)$ , 所以  $DA, DF, DB, DI$  四线调和. 因为  $AD \perp BD$ , 所以  $DA$  平分  $\angle FDE$ .

从这个例题可以看出, 运用射影几何是何等的便利!

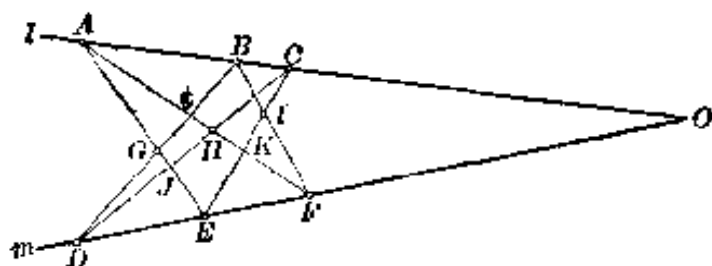


图 8-11

[例 5] 第 94 页中问题三.

证明 设  $AE \times CD = J$ ,  $AF \times CE = K$ ,  $AC \times DF = O$  (图 8-11), 那么

$$(AGJE) \bar{\wedge} D(AGJE) \bar{\wedge} (ABCO) \\ \bar{\wedge} F(ABCO) \bar{\wedge} (KICE),$$

所以  $(AGJE) \bar{\wedge} (KICE)$ . 由于公共元素  $E$  自身对应, 所以

$$(AGJE) \bar{\wedge} (KICE),$$

从而对应点的连线  $GI$  过透视中心  $AK \times CJ = H$ , 即  $G, H, I$  共线.

这个命题称为帕普斯(Pappus)定理, 也是射影几何中的一条重要定理.

[例 6] 如图 8-12,  $BA \times CD = K$ ,  $AD \times BC = J$ , 过  $J$  作直线交  $CD$  于  $F$ , 过  $K$  作直线交  $BO$

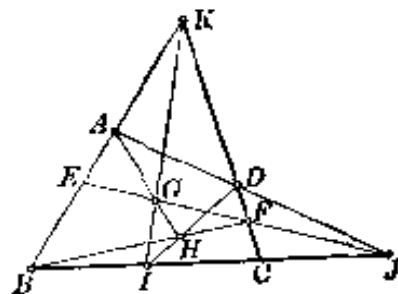


图 8-12



于  $I$ ,  $JF \times KI = G$ ,  $DI \times BF = H$ . 证明  $A, G, H$  共线.

**证明** 考虑直线  $BJ$  上的三个点  $B, I, J$  与直线  $CK$  上的三个点  $F, D, K$ , 根据帕普斯定理立即得出  $A, G, H$  共线.

[例 7] 如图 8-13,  $ABCD$  是四边形,  $AD \parallel BC$ ,  $AB \times CD = K$ ,  $I$  为  $BC$  上任一点,  $G$  为  $KI$  上任一点,  $AG \times DI = H$ ,  $BH \times CD = F$ , 那么  $GF \parallel BC$ .

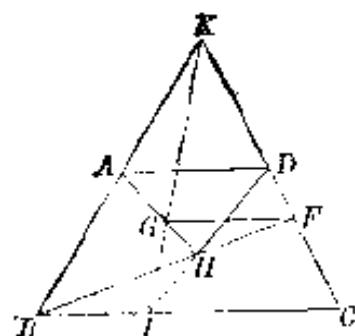


图 8-13

**证明** 这是例 6 的  $J = \infty$  的特殊情况, 而第 94 页的问题二是  $K, J$  均为  $\infty$  的特殊情况.

从例 6 可以看出, 在证明线段平行、垂直, 或证明一点为某个线段的中点, 一线为某个角的平分线, 或证明几

点共线、几线共点时, 射影几何方法往往是有帮助的.

下面我们再证明一个在射影几何中很重要的定理.

### 笛沙格 (Desargne) 定理

如果  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$  的对应顶点的连线  $AA', BB', CC'$  相交于一点  $O$ , 那么对应边的交点  $BC \times B'C' = P$ ,  $CA \times C'A' = Q$ ,  $AB \times A'B' = R$  在同一条直线上. (图 8-14)

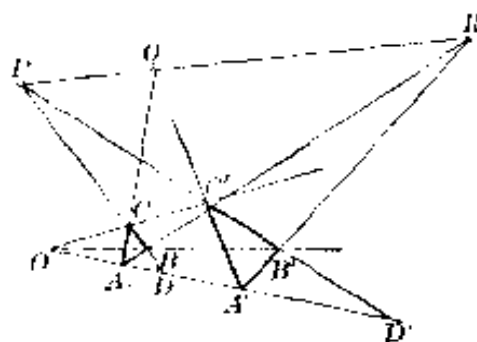


图 8-14

**证明** 设  $PC \times AA' = D$ ,  $PC' \times AA' = D'$ , 那么

$$\begin{aligned} A(A'PQR) \bar{\wedge} (DPCB) \bar{\wedge} O(DPCB) \\ \bar{\wedge} (D'PC'B') \bar{\wedge} A'(D'PC'B'), \end{aligned}$$

所以  $A(A'PQR) \bar{\wedge} A'(A'PQR)$ .

因为公共元素  $AA'$  自身对应, 所以

$$A(A'PQR) \bar{\wedge} A'(APQR),$$

因此两个线束的对应直线的交点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  共线。

[例 8] 如果  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$  的对应边的交点:  $BC \times B'C' = P$ ,  $CA \times C'A' = Q$ ,  $AB \times A'B' = R$  在同一条直线上, 那么对应顶点的连线  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  交于一点。

证明 这是笛沙格定理的逆定理。只要对  $\triangle QAA'$  与  $\triangle PBB'$  应用笛沙格定理, 使得  $CC'$  过  $AA'$  与  $BB'$  的交点  $O$ , 即三条直线  $AA'$ 、 $BB'$ 、 $CC'$  共点(图 8-14)。

反过来, 也不难证明由笛沙格定理的逆定理可以推出笛沙格定理, 因此笛沙格定理与它的逆定理是等价的。

不但如此, 笛沙格定理的对偶定理也就是它的逆定理。

在射影几何中有一条重要的原则, 称为对偶原则, 即如果一个命题是成立的, 那么它的对偶命题也一定成立。这样一来, 我们对两个互为对偶的定理, 只要证明一个就可以了。

[例 9] 在  $\triangle ABC$  中,  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  为角平分线, 如果  $EF \times BC = D_1$ ,  $FD \times CA = E_1$ ,  $DE \times AB = F_1$ , 那么  $D_1$ 、 $E_1$ 、 $F_1$  共线。

证明 由于  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  交于同一点, 即  $\triangle ABC$  的内心  $I$ , 对  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  应用笛沙格定理即得结论。

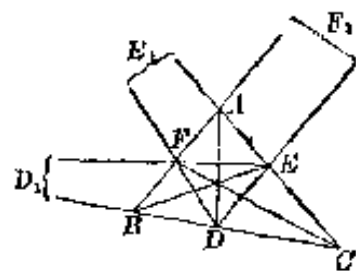


图 8-15

本题不仅对三条角平分线成立, 而且对于三条高或三条中线(这时  $D_1$ 、 $E_1$ 、 $F_1$  都是无穷远点, 均在无穷远线上)或任意的三条共点线  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$ , 类似的结论均成立。

下面我们来看看与圆有关的问题。

[例 10] 图 8-16 中,  $ABCD$  为圆  $O$  的内接正方形,  $S$

为圆  $O$  上任意一点, 证明  $SA$ 、 $SB$ 、 $SC$ 、 $SD$  为调和线束.

证明 参见例 11.

[例 11] 图 8-17 中,  $AC$  为圆  $O$  的直径, 弦  $BD \perp AC$ ,  $S$  为圆  $O$  上任意一点, 则  $SA$ 、 $SB$ 、 $SC$ 、 $SD$  为调和线束.

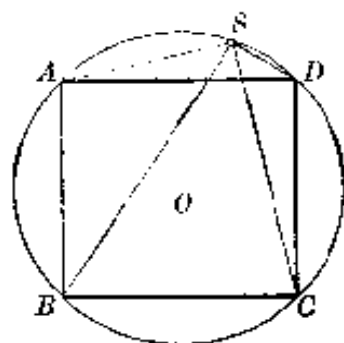


图 8-16

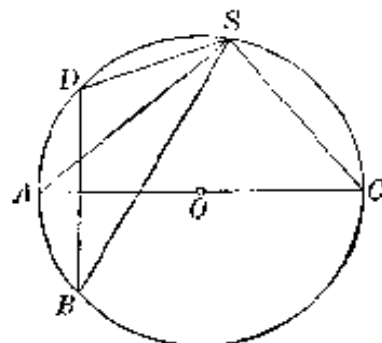


图 8-17

证明 因为  $AC$  平分  $\widehat{BD}$ , 所以  $\angle DSA = \angle ASB$ , 又  $AS \perp SC$ , 由此不难算出  $SA$ 、 $SB$ 、 $SC$ 、 $SD$  的交比为  $-1$ , 即这四条线调和.

[例 12]  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  在同一个圆上, 那么

$$E(ABOD) \cap F(ABCD).$$

证明 利用圆周角相等.

例 12 的结论虽然简单, 却很有用.

注意: 在  $E$  与  $A$  重合时,  $EA$  就是过  $E$  的切线.

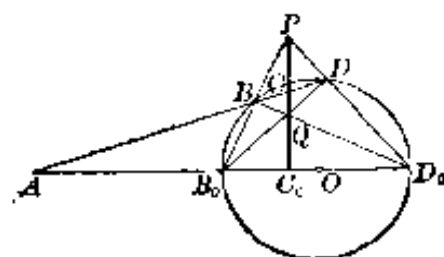


图 8-18

[例 13] 自一点  $A$  引圆  $O$  的割线, 交圆  $O$  于  $B$ 、 $D$ , 那么  $B$ 、 $D$ 、 $A$  的第四调和点  $C$  的轨迹是一条直线 (图 8-18).

证明 自  $A$  点任作一条割线交圆  $O$  于  $B$ 、 $D$ , 又设  $AO$  交圆  $O$  于  $B_0$ 、 $D_0$ ,  $B_0B \times D_0D = P$ ,  $B_0D \times BD_0 = Q$ ,  $PQ \times BD = C$ ,  $PQ \times B_0D_0 = C_0$ , 利用基本定理可知  $O$  为  $B$ 、 $D$ 、 $A$  的第四调和点,  $C_0$  为  $B_0$ 、 $D_0$ 、 $A_0$  的第

四调和点.

又在  $\triangle P_0B_0D_0$  中,  $B_0D$  与  $D_0B$  都是高, 所以  $PC_0$  也是高, 即  $PC_0 \perp B_0D_0$ .

因为  $C_0$  是一个定点, 所以  $C_0P$  是一条定直线, 不论割线  $ABD$  怎样作,  $B$ 、 $D$ 、 $A$  的第四调和点  $C$  都在这条直线上, 即  $C$  点的轨迹就是直线  $PC_0$ .

直线  $PC_0$  称为点  $A$  的极线. 当  $A$  为圆心时, 极线为无穷远直线. 当  $A$  在圆内时, (它的反演)  $C_0$  在圆外, 极线  $C_0P$  也在圆外. 当  $A$  在圆外时,  $C_0$  在圆内, 并且当过  $A$  点的割线  $ABD$  成为切线时,  $B$ 、 $D$  重合成为切点, 从而  $C$  也与切点重合, 所以自  $A$  作圆  $O$  的切线  $AT_1$ ,  $AT_2$ , 则直线  $T_1T_2$  就是点  $A$  的极线 (这时  $C$  的轨迹实际上只是线段  $T_1T_2$ , 要引入虚元素才能将整个直线  $T_1T_2$  解释为  $C$  的轨迹). 当  $A$  在圆上时, 约定  $A$  的极线为过  $A$  的切线.

可以这样地作出  $A$  的极线: 自  $A$  引两条割线  $AB_1D_1$  与  $AB_2D_2$ , 设  $B_1B_2 \times D_1D_2 = P$ ,  $B_1D_2 \times B_2D_1 = Q$ , 则  $PQ$  就是  $A$  的极线. 这是因为  $PQ$  与  $AD_1$ 、 $AD_2$  的交点  $C_1$ 、 $C_2$  分别为  $B_1$ 、 $D_1$ 、 $A_1$  与  $B_2$ 、 $D_2$ 、 $A_2$  的第四调和点, 所以直线  $C_1C_2$  (也就是直线  $PQ$ ) 是  $A$  点的极线 (图 8-19).

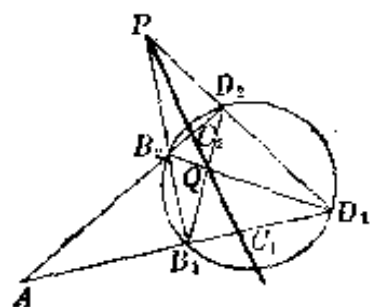


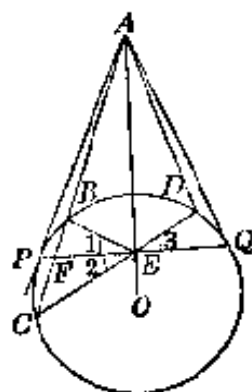
图 8-19

如果  $C$  是  $B$ 、 $D$ 、 $A$  的第四调和点, 那么

$$(BD, CA) = \frac{1}{(BD, AC)} = \frac{1}{-1} = -1,$$

所以  $A$  也是  $B$ 、 $D$ 、 $C$  的第四调和点. 因此, 如果  $A$  的极线过  $C$ , 那么  $C$  的极线也一定过  $A$ .

[例 14] 如图 8-20,  $A$  在圆  $O$  外,  $AP$ 、 $AQ$  为切线,  $P$ 、 $Q$  为切点,  $PQ \times OA = E$ , 过  $E$  作弦  $CD$ , 则  $\angle CAE = \angle EAD$ .



证明 设  $AC$  与圆  $O$  的另一个交点为  $B$ ,  $AC \times PQ = F$ , 由例 13,  $C$ 、 $F$ 、 $B$ 、 $A$  四点调和.

但  $E(CBAF) \bar{\wedge} (CBAF)$ , 所以  $EC$ 、 $EB$  与  $EF$ 、 $EA$  调和共轭. 不难看出  $EP \perp OA$ , 所以  $EF$  平分  $\angle CEB$ , 从而  $\angle 1 = \angle 2$

$= \angle 3$ ,  $B$  点与  $D$  点关于直线  $OA$  对称,  $\angle BAE = \angle EAD$ .

[例 15] 如图 8-21,  $AB$ 、 $AC$  为圆  $O$  的切线, 割线  $AEF$  与弦  $CD$  平行,  $BD \times EF = M$ , 则  $M$  为  $EF$  的中点.

证明 设  $BC \times EF = G$ , 那么

$$(EFM\infty) \bar{\wedge} D(EFBC) \bar{\wedge} B(EFAC) \bar{\wedge} (EFAG),$$

而  $(EF, AG) = -1$ , 所以  $(EF, M\infty) = -1$ , 即  $M$  为  $EF$  的中点.

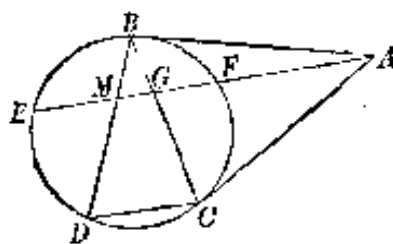


图 8-21

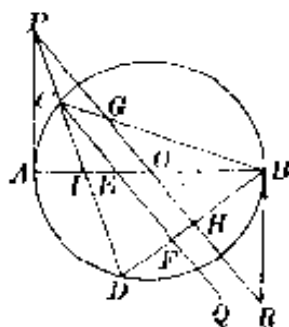


图 8-22

[例 16] 第 95 页中问题四.

证明 设  $B$  点处的切线为  $BR$ ,  $PO \times BR = R$ ,  $PO \times BC = G$ ,  $PO \times BD = H$ ,  $PD \times AB = I$ , 那么

$$(POGH) \bar{\wedge} (PICD) \bar{\wedge} A(PICD) \\ \bar{\wedge} B(ARCD) \bar{\wedge} (ORGH).$$

所以  $(PO, GH) = (OR, GH)$ , 再根据  $PO = OR$ , 不难推出  $OG = HO$ , 从而  $CE = EF$ .

[例 17] 第 95 页中问题五 (参看图 8-5).

证明 设  $AD \times BC = I$ ,  $AC \times BD = J$ , 则由例 13, 可知  $IJ$  是  $P$  点的极线, 它和  $EF$  平行.

由基本定理可知  $IO$ ,  $IP$ ,  $IA$ ,  $IJ$  是调和线束, 而  $(FEP\infty) \bar{\wedge} I(CAPJ)$ ,

所以  $(FE, P\infty) = -1$ , 即  $P$  为  $EF$  的中点.

最后介绍两个著名的定理.

**巴斯加 (Pascal) 定理**  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  六个点在同一个圆周上,  $A_1A_2 \times A_4A_5 = B_1$ ,  $A_2A_3 \times A_5A_6 = B_2$ ,  $A_3A_4 \times A_6A_1 = B_3$ , 则  $B_1, B_2, B_3$  共线.

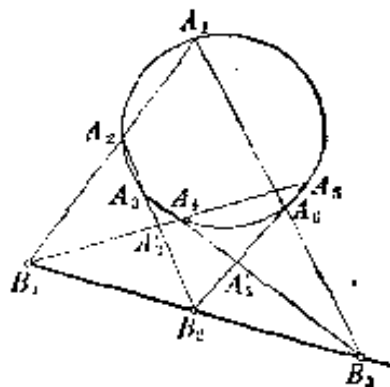


图 8-23

证明 设  $A_2A_3 \times A_4A_5 = A'_3$ ,  $A_5A_6 \times A_3A_4 = A'_5$ , 由例 12 的结论, 有

$$A_2(A_4A_3A_5A_1) \bar{\wedge} A_6(A_4A_3A_5A_1).$$

但

$$A_2(A_4A_3A_5A_1) \bar{\wedge} (A_4A'_3A_5B_1),$$

$$A_6(A_4A_3A_5A_1) \bar{\wedge} (A_4A_3A'_5B_3),$$

所以

$$(A_4A'_3A_5B_1) \bar{\wedge} (A_4A_3A'_5B_3).$$

因为公共元素  $A_4$  自身对应, 所以

$$(A_4A'_3A_5B_1) \bar{\wedge} (A_4A_3A'_5B_3),$$

从而  $A'_3A_5, A_5A'_5, B_1B_3$  交于一点, 即  $B_2$  在  $B_1B_3$  上.

巴斯加定理不仅对圆, 而且对任意的圆锥曲线 (椭圆、双曲线、抛物线) 也都适用.

巴斯加定理有许多的特殊情形, 比如说有两个点  $A_1$ 、 $A_2$  重合等等, 读者可以自己加以叙述. 如果圆锥曲线退化为两条直线, 那么巴斯加定理就成为帕普斯定理.

巴斯加定理的对偶定理称为布利安香 (Brianchon) 定理: 设一个六边形外切于一个圆锥曲线, 那么它的三对顶点的连线交于一点.

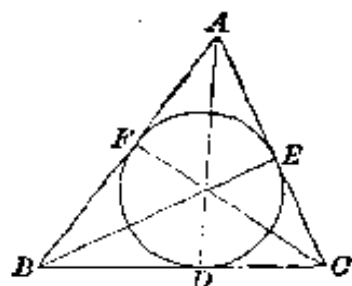


图 8-24

这个定理在 1806 年才发现, 比巴斯加定理问世迟了一百六十多年.

[例 18] 在  $\triangle ABC$  中, 内切圆与三边分别切于  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 证明  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  三线共点.

证明 将布利安香定理应用于“六边形”  $AFBDCE$  即得.

### (三) 练 习 题

1.  $AD$  为  $\triangle ABC$  的角平分线,  $BB_1$ 、 $CC_1$  与  $AD$  垂直,  $B_1$ 、 $C_1$  为垂足, 证明  $A$ 、 $C_1$ 、 $D$ 、 $B_1$  四点调和 (图 8-25).

2. 如果  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四点调和, 以  $AC$  为直径作圆,  $S$  为这圆上一点, 则  $BS$  与  $DS$  所截得的弧被  $CS$  平分 (图 8-26).

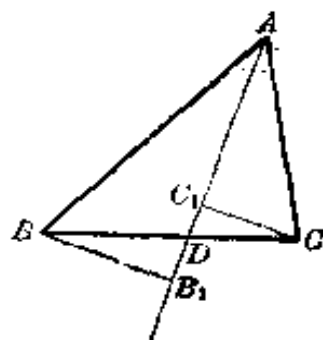


图 8-25

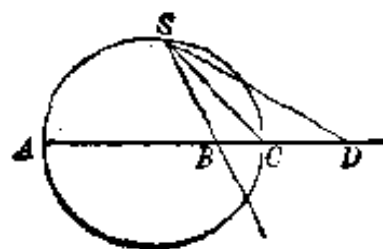


图 8-26

3. 已知一个平行四边形  $ABCD$  和一条线段  $EF$ , 试只用一根直尺把  $EF$  平分(图 8-27).

4. 设  $E, F, G$  为完全四边形  $ABCD$  的对角点,  $BD \times EF = H$ ,  $CD \times FG = I$ ,  $BC \times EG = J$ , 证明  $H, I, J$  共线(图 8-28).

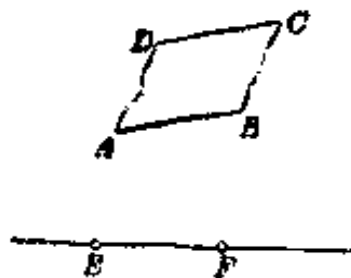


图 8-27

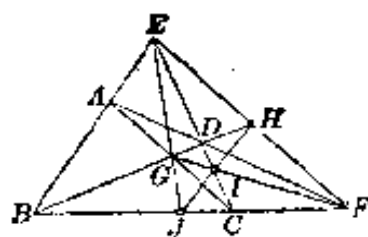


图 8-28

5.  $AB$  为圆  $O$  直径,  $C$  为圆  $O$  上一点,  $ON \perp AB$ ,  $CT$  为切线, 一直线平行于  $OB$ , 截  $CT$ 、 $CA$ 、 $CN$  于  $E$ 、 $G$ 、 $F$ , 证明  $EG = GF$ (图 8-29).

6. 在圆  $O$  中,  $P$  为弦  $EF$  的中点, 弦  $AC$ 、 $BD$  过  $P$ , 并且  $AB \times EF = G$ ,  $CD \times EF = H$ , 证明  $GP = PH$ (图 8-30).

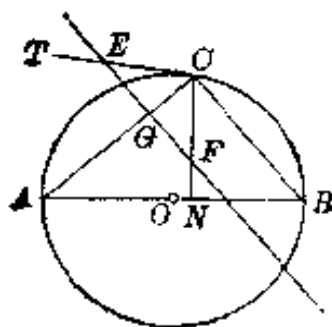


图 8-29

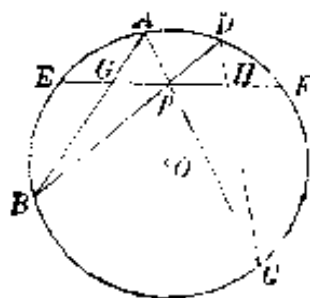


图 8-30



# 怎样判别整除？

上海市扬州中学 叶汉坤

我们知道，对于一个整数，当末位数字为 0 或偶数时，必能被 2 整除；末位数字为 0 或 5 时，必被 5 整除；从它的各位数字相加后得到的数是否被 3 整除，就可知道这个数是否被 3 整除。一般地，对正整数  $a$  和  $b$ ，可以找出另一个整数  $d$ ，把判别  $b$  是否整除  $a$ ，转化为判别  $b$  是否整除  $d$ 。如  $b=2, 5$  时， $d$  是末位数字； $b=3$  时， $d$  是  $a$  的各位数字之和。数  $d$  叫做  $b$  是否整除  $a$  的判别数，在不混淆的情况下，简称判别数。

通常，一个  $n$  位十进制正整数  $a$  可表示成：

$$a = 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_{n-2} + \cdots + 10 \cdot a_1 + a_0,$$

其中  $a_i$  都是整数， $0 \leq a_i \leq 9$ ， $a_{n-1} \neq 0$ 。若对  $a$  进行分节，即自右到左，每  $k$  位为一节（ $k$  为正整数），分成  $(t+1)$  节，依次记为：

$$A_0(k), A_1(k), \cdots, A_t(k).$$

其中  $A_0(k), A_1(k), \cdots, A_{t-1}(k)$  都是  $k$  位数， $A_t(k)$  的位数小于或等于  $k$ ，于是：

$$\begin{aligned} a = & 10^{tk} \cdot A_t(k) + 10^{(t-1)k} \cdot A_{t-1}(k) + \cdots \\ & + 10^k \cdot A_1(k) + A_0(k). \end{aligned}$$

以下，我们总用  $a$  表示被除数，并具有上述表达式， $b$  表示除数， $d$  表示判别数。符号  $b|a$ ，表示  $b$  整除  $a$ ； $b \nmid a$  表示  $b$  不整除  $a$ 。下面，先介绍二个简单的判别法。

**方法 1** 若  $b|10^k$ , 则  $d=A_0(k)$ .

**证明** 若  $b|10^k$ , 则  $b|10^{2k}, \dots, b|10^{tk}$ . 由  $b|A_0(k)$  知,  $b$  整除  $a$  表达式的每一项, 得  $b|a$ . 反之,  $b|a$  时,  $d=A_0(k)=a-10^{tk}\cdot A_t(k)-\dots-10^k\cdot A_1(k)$ , 必有  $b|d$ . 证毕.

例如  $b=8$ , 由  $8|10^3$ , 得  $k=3$ , 即对被除数进行 3 位分节,  $d=A_0(3)$  表示末 3 位.  $a=3527104$ , 从  $8|104$  知  $8|3527104$ ;  $a'=1213218$ , 从  $8|218$  知  $8|1213218$ .

又如  $b=4$ , 由  $4|10^2$ , 得  $k=2$ , 得判别数就是被除数的末二位数.

**方法 2** 若  $b|10^k-1$ , 则  $d=A_0(k)+A_1(k)+\dots+A_t(k)$ .

**证明** 记

$$a'=a-d=(10^{tk}-1)A_t(k)+(10^{(t-1)k}-1)A_{t-1}(k)+\dots+(10^k-1)A_1(k).$$

从  $10^{tk}-1=(10^k)^t-1$  知  $(10^k-1)|(10^{tk}-1)$ , 故从  $b|(10^k-1)$  得  $b|a'$ . 于是  $b|d$  时, 从  $a=a'+d$  得  $b|a$ ; 反之, 由  $b|a$ , 从  $d=a-a'$  得  $b|d$ . 证毕.

例如  $b=3, 9$  时, 由  $3|(10-1), 9|(10-1)$ , 得  $k=1$ , 即对被除数实行 1 位分节, 此时  $d=a_0+a_1+\dots+a_{n-1}$ , 为被除数的各位数字相加.

又如  $b=33$  时, 由  $33|(10^2-1)$ , 得  $k=2$ ,  $a=326581$ ,  $d=81+65+32=178$ , 由  $33|178$  知  $33|326581$ ;  $a'=97317$ ,  $d=17+73+9=99$ , 由  $33|99$  知  $33|97317$ . 当然, 此法也可用来判别  $b=11$  的情形.  $a=450246$ ,  $d=46+2+45=93$ , 从  $11|93$  知  $11|450246$ ;  $a'=20362903$ ,  $d=3+29+36+20=88$ , 由  $11|88$  知  $11|20362903$ .

容易知道, 由方法 1 可以解决  $b=2, 5, (k=1), b=4, 25, (k=2), b=8, 125, (k=3), \dots$  时的判别数求法. 由方法 2 可

以解决  $b=3, 9, (k=1)$ ,  $b=11, 33, 99, (k=2)$ ,  $b=27, 37, 111, 333, (k=3)$ , ... 时的判别数求法. 事实上, 还可以建立寻求判别数的一般方法.

**方法 3** 若  $b | (m_2 \cdot 10^k - m_1)$ , 则

$$d = m_2^t \cdot A_0(k) + m_2^{t-1} \cdot m_1 \cdot A_1(k) + \cdots + m_1^t A_t(k).$$

其中  $m_1, m_2$  都是非 0 整数, 且最大公因数为 1.

**证明**

$$\begin{aligned} m_2^t \cdot a &= (m_2^t \cdot a - d) + d \\ &= \{ [m_2^t \cdot 10^{tk} \cdot A_t(k) + m_2^t \cdot 10^{(t-1)k} \cdot A_{t-1}(k) + \cdots \\ &\quad + m_2^t \cdot A_0(k)] - [m_2^t \cdot A_0(k) \\ &\quad + m_2^{t-1} \cdot m_1 \cdot A_1(k) + \cdots + m_1^t \cdot A_t(k)] \} + d \\ &= \{ [(m_2 \cdot 10^k)^t - m_1^t] \cdot A_t(k) + [(m_2 \cdot 10^k)^{t-1} \\ &\quad - m_1^{t-1}] \cdot m_1 \cdot A_{t-1}(k) + \cdots + (m_2 \cdot 10^k - m_1) \\ &\quad \cdot m_2^{t-1} \cdot A_1(k) \} + d \end{aligned}$$

由  $b | (m_2 \cdot 10^k - m_1)$ ,  $(m_2 \cdot 10^k - m_1) | [(m_2 \cdot 10^k)^t - m_1^t]$ , 上式可表成

$$m_2^t \cdot a = b \cdot c + d,$$

其中  $c$  是一个整数.

显然, 从上式, 如  $b | d$ , 则  $b | m_2^t \cdot a$ , 又从  $b | m_2 \cdot 10^k - m_1$ ,  $m_2, m_1$  的最大公因数为 1, 得  $b \nmid m_2$ , 故  $b \nmid a$ . 反之, 如  $b \nmid d$ , 从上式得  $b \nmid m_2^t \cdot a$ , 只要推出  $b \nmid a$ , 就完成了证明, 我们用反证法: 如  $b \nmid a$ , 则  $b$  必含有  $m_2$  的一个不等于 1 的因数, 即有整数  $c_1, c_2$ , 使

$$b = c_1 \cdot c_2, \quad c_1 | m_2,$$

从  $c_1 | b$ ,  $b | (m_2 \cdot 10^k - m_1)$ , 得  $c_1 | m_1$ , 这与  $m_1, m_2$  的最大公因数为 1 是矛盾的, 即只能  $b \nmid a$ . 证毕.

运用方法 3, 可得  $b=11$  的另一种判别法. 由  $11 = 10 \div 1$ ,

可取  $m_2 = -1$ ,  $m_1 = -1$ ,  $k = 1$ , 这时  $d = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}$ , 仍以前面列举的二数检验,  $a = 450246$ ,  $d = 6 - 4 + 2 - 0 + 5 - 4 = 5$ , 从  $11 \nmid 5$  得

$$11 \nmid 450246, \quad a' = 20362903,$$

$$d = 3 - 0 + 9 - 2 + 6 - 3 + 0 - 2 = 11,$$

得  $11 \mid 20362903$ . 又如  $a'' = 42075$ ,  $d = 5 - 7 + 0 - 2 + 4 = 0$ , 从  $11 \mid 0$  得  $11 \mid 42075$ .

再以  $b = 7$  为例. 当  $a$  是一个 3 位数时, 由  $7 \mid 20 + 1$ , 可取  $m_2 = 2$ ,  $m_1 = -1$ ,  $k = 1$ , 得  $d = 4a_0 - 2a_1 + a_2$ . 当  $a$  的位数大于 3 时, 又可以从  $7 \times 143 = 1001 = 10^3 + 1$ , 取  $m_2 = 1$ ,  $m_1 = -1$ ,  $k = 3$ , 得  $d = A_0(3) - A_1(3) + A_2(3) \cdots$ . 在这种情形, 如果  $d$  仍较大, 可再求  $b$  整除  $d$  的判别数  $d'$ , ……直到容易判别为止. 如  $a = 782102902$ ,  $d = 902 - 102 + 782 = 1582$ ,  $d' = 582 - 1 = 581$ ,  $d'' = 4 \times 1 - 2 \times 8 + 5 = -7$ , 得  $7 \mid 782102902$ .

从上例还可看出, 当  $a$  的位数较多时,  $k$  不妨大一些,  $|m_2|$ ,  $|m_1|$  小些, 计算  $d$  就较方便; 当  $a$  的位数较少时, 可选  $k$  小些,  $|m_2|$ ,  $|m_1|$  大一些也无妨.

最后, 再举二个例子, 说明如何根据  $b$  的结构, 找出较好的判别法. 如  $b = 149$ , 从  $149 \times 2 = 298$ , 知  $149 \mid (3 \cdot 10^2 - 2)$ , 即取  $m_2 = 3$ ,  $m_1 = 2$ ,  $k = 2$ ; 如  $b = 43$ , 从  $7 \times 43 = 301$ , 知取  $m_2 = 3$ ,  $m_1 = -1$ ,  $k = 2$ .

# 二次多项式的因式分解

江苏师范学院数学系 周 英

本文详细讨论了二次多项式因式分解的条件, 并提供一个较为方便的分解方法.

## (一)

实系数二元二次多项式的一般形式是:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g.$$

为方便计, 我们假定其首项系数  $a > 0$ .

**定理 1**  $f(x, y)$  在实数体上可分解因式的必要条件是:

$$\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

**证明** 设  $f(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$ , 从而有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \alpha_1 \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) xy + \beta_1 \beta_2 y^2 \\ &\quad + (\alpha_1 \gamma_2 + \gamma_1 \alpha_2) x + (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) y + \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned}$$

则有

$$a = \alpha_1 \alpha_2, \quad b = \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2, \quad c = \beta_1 \beta_2.$$

由于

$$(\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2)^2 - 4(\alpha_1 \alpha_2)(\beta_1 \beta_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 \geqslant 0,$$

这就证得了

$$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

显然,  $\Delta \geqslant 0$  并不充分, 例如  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$  即是一

反例. 为讨论一个二次多项式在实数域上可分解成两个一次多项式乘积的充要条件, 我们令

$$\lambda = \begin{vmatrix} 2a & d \\ b & e \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2g \end{vmatrix}.$$

**定理 2** 如果  $\Delta=0$ , 当且仅当  $\lambda=0$  时,  $f(x, y)$  可转化为二次三项式:  $f(x, y) = X^2 + kX + g$ , 其中  $X = \alpha x + \beta y$ .

**证明** 先证必要性. 设

$$\begin{aligned} f(x, y) &= X^2 + kX + g = (\alpha x + \beta y)^2 + k(\alpha x + \beta y) + g \\ &= \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 + k\alpha x + k\beta y + g. \end{aligned}$$

则有  $a = \alpha^2$ ,  $b = 2\alpha\beta$ ,  $c = \beta^2$ ,  $d = k\alpha$ ,  $e = k\beta$ ,  $g = g$ . 显然,

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 2\alpha^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & 2\beta^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda = \begin{vmatrix} 2\alpha^2 & k\alpha \\ 2\alpha\beta & k\beta \end{vmatrix} = 0.$$

再证充分性. 由于  $b^2 - 4ac = 0$ , 因为  $a > 0$ , 故  $c \geq 0$ . 则  $b = 2 \operatorname{sng}(b) \sqrt{ac}$ , 其中  $\operatorname{sng}(x)$  为符号函数. 令

$$X = \sqrt{a}x + \operatorname{sng}(b)\sqrt{c}y.$$

由于  $\lambda = 2ae - bd = 0$ , 故有

$$e = \frac{bd}{2a} = \frac{2 \operatorname{sng}(b) \sqrt{ac} \cdot d}{2a} = \frac{\operatorname{sng}(b) \sqrt{c}}{\sqrt{a}} d,$$

所以

$$dx + ey = \frac{d}{\sqrt{a}} (\sqrt{a}x + \operatorname{sng}(b)\sqrt{c}y) = \frac{d}{\sqrt{a}} X.$$

这就证明了

$$f(x, y) = X^2 + \frac{d}{\sqrt{a}} X + g.$$

**定理 3** 如果  $\Delta > 0$ , 当且仅当  $D = 0$  时,  $f(x, y)$  可分解成两个一次因式之乘积.

这个结论在解析几何中已有论证, 现在设法导出另一个等价而又较为简单的条件. 由于

$$\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} < 0,$$

所以方程组

$$\begin{cases} 2ax + by = d, \\ bx + 2cy = e \end{cases}$$

有唯一解  $x^*, y^*$ .

**定理 4** 如果  $\Delta > 0$ , 当且仅当

$$2g - (dx^* + ey^*) = 0$$

时,  $f(x, y)$  可分解为两个一次因式之乘积.

**证明** 因为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b & 2ax^* + by^* \\ b & 2c & bx^* + 2cy^* \\ d & e & 2g \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ b & 2c & 0 \\ d & e & 2g - (dx^* + ey^*) \end{vmatrix} \\ &= [2g - (dx^* + ey^*)] \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

由于  $\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} \neq 0$ , 所以  $D$  与  $2g - (dx^* + ey^*)$  同时为零或同

时不为零. 运用定理 3 的结论, 即知定理 4 成立. 不仅如此, 这里还给出了一种具体的分解式. 如果令

$$X = x + x^*, \quad Y = y + y^*,$$

则有

$$\begin{aligned} &aX^2 + bXY + cY^2 \\ &= a(x + x^*)^2 + b(x + x^*)(y + y^*) + c(y + y^*)^2 \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 + (2ax^* + by^*)x + (bx^* + 2cy^*)y \\ &\quad + ax^{*2} + bx^*y^* + cy^{*2}. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} ax^{*2} + bx^*y^* + cy^{*2} &= \frac{1}{2} [(2ax^* + by^*)x^* + (bx^* + 2cy^*)y^*] \\ &= \frac{1}{2} (dx^* + ey^*) = g. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} aX^2 + bXY + cY^2 &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

再由  $b^2 - 4ac > 0$ , 故  $aX^2 + bXY + cY^2$  可分解因式, 从而可得到  $f(x, y)$  的具体分解式.

[例 1] 试讨论下列多项式的因式分解:

(1)  $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 3x - 5y + 5;$

(2)  $f(x, y) = x^2 - 8xy + 16y^2 - 5x + 20y + 4;$

(3)  $f(x, y) = 18x^2 - 19xy + 5y^2 - 3x + 2y - 3.$

解 (1) 因为  $1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ , 所以不满足必要条件, 由定理 1,  $f(x, y)$  在实数体上不能分解因式.

(2) 因为  $(-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 0$ , 且

$$\begin{aligned} \lambda &= \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 0; & \sqrt{1} &= 1, & \sqrt{16} &= 4, \\ \text{sng}(-18) &= -1, & \frac{(-5)}{\sqrt{1}} &= -5, \end{aligned}$$

令  $X = x - 4y$ , 由定理 2, 有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= X^2 - 5X + 4 = (X - 4)(X - 1) \\ &= (x - 4y - 4)(x - 4y - 1). \end{aligned}$$

(3) 因为  $(-19)^2 - 4 \times 18 \times 5 = 1 > 0$ , 方程组

$$\begin{cases} 36x - 19y = -3, \\ -19x + 10y = 2 \end{cases}$$

的解为  $x^* = -8$ ,  $y^* = -15$ . 又







这时  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  可分解因式的充要条件是:

$$b_{nn} \leq 0, \text{ 其余的 } b_{ij} = 0.$$

亦就是说, 矩阵  $B$  除右下角的一个元素不大于零外, 其余元素均应是零.

**证明** 先证必要性. 设

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1})(\beta_1x_1 + \dots + \beta_nx_n + \beta_{n+1}),$$

展开上式右端, 则得相应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2a_1\beta_1 & a_1\beta_2 + \beta_1a_2 & \dots & a_1\beta_j + \beta_1a_j & \dots & a_1\beta_{n+1} + \beta_1a_{n+1} \\ a_1\beta_2 + \beta_1a_2 & 2a_2\beta_2 & \dots & a_2\beta_j + \beta_2a_j & \dots & a_2\beta_{n+1} + \beta_2a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1\beta_i + \beta_1a_i & a_2\beta_i + \beta_2a_i & \dots & a_i\beta_j + \beta_ia_j & \dots & a_i\beta_{n+1} + \beta_ia_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1\beta_{n+1} + \beta_1a_{n+1} & a_2\beta_{n+1} + \beta_2a_{n+1} & \dots & a_i\beta_{n+1} + \beta_ia_{n+1} & \dots & 2a_{n+1}\beta_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

由于

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} 2a_1\beta_1 & a_1\beta_{j+1} + \beta_1a_{j+1} \\ a_1\beta_{j+1} + \beta_1a_{j+1} & 2a_{j+1}\beta_{j+1} \end{vmatrix} = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

即  $(a_1\beta_{j+1} - \beta_1a_{j+1})^2 = 0$ , 又  $a_1 > 0, \beta_1 > 0$ , 故

$$\beta_{j+1} = \frac{\beta_1}{a_1} a_{j+1}, \quad \beta_1 = \frac{\beta_1}{a_1} a_1.$$

令  $k = \frac{\beta_1}{a_1}$ , 则

$$\beta_j = ka_j, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

所以

$$A = \begin{pmatrix} 2ka_1^2 & 2ka_1a_2 & \dots & 2ka_1a_j & \dots & a_1(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) \\ 2ka_1a_2 & 2ka_2^2 & \dots & 2ka_2a_j & \dots & a_2(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2ka_1a_i & 2ka_2a_i & \dots & 2ka_i^2 & \dots & a_i(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) & a_2(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) & \dots & a_i(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) & \dots & 2a_{n+1}\beta_{n+1} \end{pmatrix},$$

这就证得了:

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} 2ka_1^2 & 2ka_1a_{i+1} \\ 2ka_1a_{i+1} & 2ka_{i+1}a_{i+1} \end{vmatrix} = 0,$$

$$b_{in} = \begin{vmatrix} 2ka_1^2 & a_1(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) \\ 2ka_1a_{i+1} & a_{i+1}(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) \end{vmatrix} = 0,$$

$$b_{nn} = \begin{vmatrix} 2ka_1^2 & a_1(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) \\ a_1(\beta_{n+1} + ka_{n+1}) & 2a_{n+1}\beta_{n+1} \end{vmatrix} = -a_1^2(\beta_{n+1} - ka_{n+1})^2 \leq 0.$$

再证充分性. 因为  $b_{ij} = 4a_{11}a_{i+1, j+1} - a_{1, i+1}^2 = 0$ ,  $a_{11} > 0$ ,  
故  $a_{i+1, j+1} \geq 0$ , 且  $|a_{1, i+1}| = 2\sqrt{a_{11}a_{i+1, i+1}}$ ; 另外,

$$b_{ij} = 2a_{11}a_{i+1, j+1} - a_{1, i+1}a_{1, j+1} = 0,$$

故

$$a_{i+1, j+1} = \frac{a_{1, i+1}a_{1, j+1}}{2a_{11}}.$$

令

$$\alpha_j = \operatorname{sng}(a_{1j}) \sqrt{a_{jj}}, \quad k = \frac{a_{1, n+1}}{\sqrt{a_{11}}}.$$

设  $X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ , 则

$$\begin{aligned} X^2 + kX + a_{n+1, n+1} \\ = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)^2 + k(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + a_{n+1, n+1}, \end{aligned}$$

展开上式右端,  $x_j^2$  的系数即为  $\alpha_j^2$ ,  $x_i x_j$  ( $i < j$ ) 的系数为  $2\alpha_i \alpha_j$ ,  
 $x_j$  的系数为  $k\alpha_j$ , 常数项仍为  $a_{n+1, n+1}$ . 容易验证:

$$\alpha_j^2 = a_{jj}, \quad 2\alpha_i \alpha_j = a_{ij}.$$

另外, 因为

$$b_{in} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{1, n+1} \\ a_{1, i+1} & a_{i+1, n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{i+1, n+1} &= \frac{a_{1, n+1}a_{1, i+1}}{2a_{11}} = \frac{a_{1, n+1}}{\sqrt{a_{11}}} \left( \frac{a_{1, i+1}}{2\sqrt{a_{11}}} \right) = k \frac{a_{1, i+1}}{2\sqrt{a_{11}}} \\ &= k \frac{\operatorname{sng}(a_{1, i+1})(2\sqrt{a_{11}a_{i+1, i+1}})}{2\sqrt{a_{11}}} \\ &= k (\operatorname{sng}(a_{1, i+1}) \sqrt{a_{i+1, i+1}}) = k\alpha_{i+1}, \end{aligned}$$

即有  $a_{i, n+1} = k\alpha_i$ , 故

$$X^2 + kX + a_{n+1, n+1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

$$\therefore b_{nn} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{1, n+1} \\ a_{1, n+1} & 2a_{n+1, n+1} \end{vmatrix} \leq 0,$$

$$\therefore a_{11} \left( 4a_{n+1, n+1} - \frac{a_{1, n+1}^2}{a_{11}} \right) = a_{11} (4a_{n+1, n+1} - k^2) \leq 0,$$

即  $k^2 - 4a_{n+1, n+1} \geq 0$ , 这就证得了  $X^2 + kX + a_{n+1, n+1}$  可分解因式, 从而  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  亦可分解因式, 定理 2' 完全得证.

在上面的证明过程中, 我们还得到  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的具体分解式:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= X^2 + kX + a_{n+1, n+1} \\ &= (X + p)(X + q), \end{aligned}$$

$$X = \sqrt{a_{11}}x_1 + \operatorname{sgn}(a_{12})\sqrt{a_{22}}x_2 + \dots + \operatorname{sgn}(a_{1n})\sqrt{a_{nn}}x_n.$$

[例 2] 讨论下述多项式的因式分解:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= 4x^2 + 4xy - 12xz + 20xw + 14x \\ &\quad + y^2 - 6yz + 10yw + 7y \\ &\quad + 9z^2 + 30zw - 21z \\ &\quad + 25w^2 + 35w \\ &\quad + 12. \end{aligned}$$

解 由于

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & -12 & 20 & 14 \\ 4 & 2 & -6 & 10 & 7 \\ -12 & -6 & 18 & 30 & -21 \\ 20 & 10 & 30 & 50 & 35 \\ 14 & 7 & -21 & 35 & 24 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故  $f(x, y, z, w)$  可分解因式, 且

$$\alpha_1 = \sqrt{4} = 2, \quad \alpha_2 = \operatorname{sng}(4) \sqrt{1} = 1,$$

$$\alpha_3 = \operatorname{sng}(-12) \sqrt{9} = -3,$$

$$\alpha_4 = \operatorname{sng}(20) \sqrt{25} = 5; \quad k = \frac{14}{\sqrt{4}} = 7;$$

$$X = 2x - y - 3z + 5w.$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x, y, z, w) &= X^2 + 7X + 12 = (X + 4)(X + 3) \\ &= (2x + y - 3z + 5w \\ &\quad + 4)(2x + y - 3z + 5w + 3). \end{aligned}$$

若矩阵  $\mathbf{B}$  的主对角线元素除  $b_{nn}$  外还有不等于零的项. 如某一  $b_{i_0 i_0} > 0$ , 这时  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  当然不能分解 (因不满足必要条件); 假定只有小于零的项, 不失一般性, 设  $b_{11} < 0$ , 此时, 不能仅用一级判别矩阵  $\mathbf{B}$  来判别, 而是要由  $\mathbf{B}$  构造它的一级判别矩阵  $\mathbf{C}$ , 即  $\mathbf{A}$  的二级判别矩阵. 由于  $\mathbf{B}$  是  $n$  阶, 故  $\mathbf{C}$  是  $n-1$  阶对称方阵. 令

$$\mathbf{C} = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{1, j+1} \\ b_{1, i+1} & b_{i+1, j+1} \end{vmatrix}.$$

**定理 4'** 当矩阵  $\mathbf{B}$  的主对角线元素除  $b_{nn}$  非零外, 还有小于零的项, 设  $b_{11} < 0$ , 这时  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  可分解的充要条件是  $\mathbf{C}$  为零矩阵:

$$\mathbf{C} = \mathbf{0}.$$

为了证明, 先导出与  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  等价的条件. 直接由  $\mathbf{A}$  作矩阵  $\mathbf{C}' = (c'_{ij})$ , 其中

$$\begin{aligned} c'_{ij} &= \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{1, j+2} \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{2, j+2} \\ a_{1, i+2} & a_{2, i+2} & a_{i+2, j+2} \end{vmatrix}, \\ c'_{jj} &= \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{1, j+2} \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{2, j+2} \\ a_{1, j+2} & a_{2, j+2} & 2a_{j+2, j+2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

利用行列式的性质, 可以证明:

$$c'_{ij} = \frac{1}{2a_{11}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{1,j+1} \\ b_{1,i+1} & b_{i+1,j+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2a_{11}} c_{ij}.$$

故  $c'_{ij}$  与  $c_{ij}$  或同时为零, 或同时不为零. 另外, 由于

$$b_{11} \neq \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以方程组

$$\begin{cases} 2a_{11}x + a_{12}y = a_{1j}, \\ a_{12}x + 2a_{22}y = a_{2j}, \end{cases} \quad (3 \leq j \leq n+1)$$

有唯一解  $x_j^*, y_j^*$ . 前已证明,

$$c'_{ij} = 0 \quad \text{与} \quad a_{i+2,j+2} - (a_{1,i+2}x_{j+2}^* + a_{2,i+2}y_{j+2}^*) = 0$$

一致, 令  $C'' = (c''_{ij})$ , 其中:

$$c''_{ij} = a_{i+2,j+2} - (a_{1,i+2}x_{j+2}^* + a_{2,i+2}y_{j+2}^*).$$

则  $C, C', C''$  或同时为零矩阵, 或同时为非零矩阵.

**证明** 先证必要性. 设

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1})(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \beta_{n+1}),$$

展开上式右端, 得对应矩阵 (\*). 当

$$b_{11} = \begin{vmatrix} 2\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 \end{vmatrix} < 0$$

时, 方程组

$$\begin{cases} 2\alpha_1\beta_1 x + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)y = \alpha_1\beta_j + \beta_1\alpha_j, \\ (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)x + 2\alpha_2\beta_2 y = \alpha_2\beta_j + \beta_2\alpha_j \end{cases}$$

有唯一解  $x_j^*, y_j^*$ , 且

$$x_j^* = -\frac{\alpha_2\beta_j - \beta_2\alpha_j}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, \quad y_j^* = \frac{\alpha_1\beta_j - \beta_1\alpha_j}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}, \quad 3 \leq j \leq n_1$$



$$x_{n+1}^* = -\frac{\alpha_2\beta_{n+1} - \beta_2\alpha_{n+1}}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2},$$

$$y_{n+1}^* = \frac{\alpha_1\beta_{n+1} - \beta_1\alpha_{n+1}}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}.$$

而

$$\begin{aligned} \alpha_i\beta_j + \beta_i\alpha_j - [(\alpha_1\beta_i + \beta_1\alpha_i)x_j^* + (\alpha_2\beta_i + \beta_2\alpha_i)y_j^*] \\ = \alpha_i\beta_j + \beta_i\alpha_j - \left[ -\frac{(\alpha_1\beta_i + \beta_1\alpha_i)(\alpha_2\beta_j - \beta_2\alpha_j)}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \right. \\ \left. + \frac{(\alpha_2\beta_i + \beta_2\alpha_i)(\alpha_1\beta_j - \beta_1\alpha_j)}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} \right] = 0, \end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned} \alpha_i\beta_{n+1} + \beta_i\alpha_{n+1} - [(\alpha_1\beta_i + \beta_1\alpha_i)x_{n+1}^* \\ + (\alpha_2\beta_i + \beta_2\alpha_i)y_{n+1}^*] = 0, \\ 2\alpha_{n+1}\beta_{n+1} - [(\alpha_1\beta_{n+1} + \beta_1\alpha_{n+1})x_{n+1}^* \\ + (\alpha_2\beta_{n+1} + \beta_2\alpha_{n+1})y_{n+1}^*] = 0. \end{aligned}$$

这就证得了  $C'' = 0$ , 从而  $C = 0$ , 必要性得证.

再证充分性. 由于

$$b_{11} = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix} < 0,$$

如前一样, 得到  $n-1$  组解  $x_j^*, y_j^*, j=3, 4, \dots, n+1$ . 令

$$\begin{cases} X = x_1 + x_3^*x_2 + \dots + x_n^*x_n + x_{n+1}^*, \\ Y = x_2 + y_3^*x_3 + \dots + y_n^*x_n + y_{n+1}^*, \end{cases}$$

即  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_j = x_j^*; \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_j = y_j^*$ . 设  $a_{11}X^2 + a_{12}XY + a_{22}Y^2$  展开式中  $x_ix_j$  的系数为  $a'_{ij}$ ,  $x_j$  的系数为  $a'_{j, n+1}$ , 则有

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= 2a_{11}\alpha_i\alpha_j + a_{12}(\alpha_i\beta_j + \beta_i\alpha_j) + 2a_{22}\beta_i\beta_j \\ &= 2a_{11}x_i^*x_j^* + a_{12}(x_i^*y_j^* + y_j^*x_i^*) + 2a_{22}y_i^*y_j^* \\ &= (2a_{11}x_i^* + a_{12}y_i^*)x_j^* + (a_{12}x_i^* + 2a_{22}y_i^*)y_j^*, \end{aligned}$$

由于  $C''=0$ , 即

$$\begin{aligned} c''_{i-2, j-2} &= a_{ij} - (a_{1i}x_j^* + a_{2i}y_j^*) = 0, \\ a_{ij} &= a_{1i}x_j^* + a_{2i}y_j^*, \end{aligned}$$

另外

$$\begin{cases} 2a_{11}x_i^* + a_{12}y_i^* = a_{1i}, \\ a_{12}x_i^* + 2a_{22}y_i^* = a_{2i}. \end{cases}$$

所以

$$a'_{ij} = a_{1i}x_j^* + a_{2i}y_j^* = a_{ij}.$$

从而

$$a_{11}X^2 + a_{12}XY + a_{22}Y^2 = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

因为上式右端能分解因式, 故  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  可分解, 充分性得证.

从上面的证明中看到, 当二级判别矩阵  $C$  为零矩阵 (且  $b_{11} < 0$ ) 时,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  不仅可分解, 而且得到了具体的分解式, 其计算量也不太大.

[例3] 讨论多项式:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= 6x^2 + 5xy - xz + 13xw + 3x \\ &\quad - 4y^2 + 6yz - yw - 7y \\ &\quad - 2z^2 + 3zw + 5z \\ &\quad + 5w^2 - 2w \\ &\quad - 3. \end{aligned}$$

解 由于

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -1 & 13 & 3 \\ 5 & -8 & 6 & -1 & -7 \\ -1 & 6 & -4 & 3 & 5 \\ 13 & -1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -121 & 77 & -77 & -99 \\ 77 & -49 & 49 & 63 \\ -77 & 49 & -49 & -63 \\ -99 & 63 & -63 & -81 \end{pmatrix},$$

根据行列式的性质, 将各行约去相同的公因数, 其值不变, 故在构造  $\mathbf{C}$  时可将  $\mathbf{B}$  的各行公因数约去 (但约去公因数后, 可能使对称性破坏, 因此由  $\mathbf{A}$  构造  $\mathbf{B}$  时, 一般不这样做), 得

$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & -7 & -9 \\ 11 & -7 & 7 & 9 \\ -11 & 7 & -7 & -9 \\ -11 & 7 & -7 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以  $f(x, y, z, w)$  可以分解因式. 因为

$$\frac{b_{1j}}{b_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{1j} \\ a_{j2} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix}} = y_j^*,$$

故可通过一级判别矩阵  $\mathbf{B}$  的第一行 (约去公因数后亦然) 计算  $y_j^*$ , 即

$$y_3^* = -\frac{7}{11}, \quad y_4^* = \frac{7}{11}, \quad y_5^* = \frac{9}{11};$$

从而得

$$x_3^* = \frac{2}{11}, \quad x_4^* = -\frac{9}{11}, \quad x_5^* = -\frac{1}{11}.$$

令

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{2}{11}z + \frac{9}{11}w - \frac{1}{11}, \\ Y &= y - \frac{7}{11}z + \frac{7}{11}w + \frac{9}{11}. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & 6X^2 + 5XY - 4Y^2 = (3X + 4Y)(2X - Y) \\ & = \left[ 3\left(x + \frac{2}{11}z + \frac{9}{11}w - \frac{1}{11}\right) + 4\left(y - \frac{7}{11}z + \frac{7}{11}w + \frac{9}{11}\right) \right] \\ & \quad \cdot \left[ 2\left(x + \frac{2}{11}z + \frac{9}{11}w - \frac{1}{11}\right) - \left(y - \frac{7}{11}z + \frac{7}{11}w + \frac{9}{11}\right) \right] \\ & = (3x + 4y - 2z + 5w + 3)(2x - y + z + w - 1). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) = & (3x + 4y - 2z + \\ & + 5w + 3)(2x - y + z + w - 1). \end{aligned}$$

最后指出, 对于三元二次多项式, 利用解析几何中二次曲面分类理论,  $f(x, y, z)$  可分解因式就相当于方程  $f(x, y, z) = 0$  表示两个平面(实), 但判别十分复杂, 以两相交平面为例, 需要由一个四阶行列式、四个三阶行列式、三个二阶行列式的值来检验, 而用本文所提供的方法, 其运算量不到计算一个四阶行列式的值, 而且容易得到分解式.

# 求解三次方程的赖恩兹法

中山大学数学力学系 陈云烽

对于实系数一元三次方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

根据卡尔丹公式<sup>①</sup>, 可以先求得

$$Q = b - \frac{a^2}{3}, \quad (2)$$

$$R = c - \left(\frac{a}{3}\right)^3 - Q \left(\frac{a}{3}\right); \quad (3)$$

从而得到方程(1)的三个根为:

$$x_1 = A + B - \frac{a}{3};$$

$$x_2 = \omega A + \omega^2 B - \frac{a}{3};$$

$$x_3 = \omega^2 A + \omega B - \frac{a}{3}.$$

其中

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27}}},$$

---

① 关于三次方程的卡尔丹公式, 可参见《简明数学手册》(上海教育出版社, 1979年版) 或《高次方程》(李传芳等编, 上海教育出版社, 1979年版).

$$B = \sqrt[3]{-\frac{R}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27}}}.$$

根据上述公式, 可以分三种情况加以讨论:

(1) 当  $\frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27} > 0$  时, 方程(1)有一实根和一对共轭复根:

$$\begin{aligned} x_1 &= A + B - \frac{a}{3}, \\ x_{2,3} &= -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{a}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(A-B)i; \end{aligned} \quad (4)$$

(2) 当  $\frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27} = 0$  时, 方程(1)有三实根, 且有一对重根:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt[3]{4R} - \frac{a}{3}, \\ x_2 &= x_3 = \sqrt[3]{\frac{R}{2}} - \frac{a}{3}; \end{aligned} \quad (5)$$

(3) 当  $\frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27} < 0$  时, 方程(1)有三不等实根:

$$x_k = 2\sqrt{-\frac{Q}{3}} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad (6)$$

其中  $k=1, 2, 3$ ;  $\theta$  由下式决定:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{Q\sqrt{-Q}}\right).$$

可以看到, 直接用卡尔丹公式来求根是相当麻烦的, 但可用以派生出其他各种解法, 下面介绍一种更有实用价值的赖恩兹方法.

由前述关于三次方程 (1) 的解的讨论可见, (2)、(3) 式所确定的  $Q$  值和  $R$  值起着重要的作用. 赖恩兹方法按  $Q$  值的符号分成三种情形加以讨论:

**情形 I**  $Q > 0$

这时, 必有  $\frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27} > 0$ , 所以方程 (1) 有一实根和一对共轭复根. 为了计算方便, 我们依次定义  $G$ 、 $K$ 、 $Z$  如下:

$$G = \sqrt{Q},$$

$$K = -\frac{R}{G^3} = \frac{1}{G} \left[ \frac{a}{3} + \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c}{G^2} \right], \quad (7)$$

$$Z = \sqrt[3]{\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{K}{2} - \sqrt{\frac{K^2}{4} + \frac{1}{27}}}, \quad (8)$$

这样, 公式 (4) 即表成

$$x_1 = GZ - \frac{a}{3}, \quad (9)$$

$$x_{2,3} = -\frac{GZ}{2} - \frac{a}{3} \pm i\sqrt{3\left(\frac{GZ}{2}\right)^2 + G^2}.$$

而计算  $Q$ 、 $G$ 、 $K$  都是比较简单的, 由  $Z$  求  $x$  也不难, 所以只要给出一张由  $K$  确定  $Z$  的算表, 即可把 (4) 式的计算简化了.

由 (8) 式可反解出  $K = Z + Z^3$ , 由  $Z$  值来计算对应的  $K$  值, 即可制出  $K$ - $Z$  表如下. (表中只列出  $0.1 < |K| < 30$ ; 查表时, 注意  $Z$  与  $K$  有相同的符号)

情形 I 的 K-Z 表

Z	K	Z	K	Z	K
0.10	0.1010	0.62	0.8583	1.38	4.008
0.12	0.1217	0.66	0.9475	1.42	4.283
0.14	0.1427	0.70	1.043	1.46	4.572
0.16	0.1641	0.74	1.145	1.50	4.875
0.18	0.1858	0.78	1.255	1.60	5.696
0.20	0.2080	0.82	1.371	1.70	6.613
0.22	0.2306	0.86	1.496	1.80	7.632
0.24	0.2538	0.90	1.629	1.90	8.759
0.26	0.2776	0.94	1.771	2.00	10.00
0.28	0.3020	0.98	1.921	2.10	11.36
0.30	0.3270	1.02	2.081	2.20	12.85
0.32	0.3528	1.06	2.251	2.30	14.47
0.34	0.3793	1.10	2.431	2.40	16.22
0.38	0.4349	1.14	2.622	2.50	18.13
0.42	0.4941	1.18	2.823	2.60	20.18
0.46	0.5573	1.22	3.036	2.70	22.38
0.50	0.6250	1.26	3.260	2.80	24.75
0.54	0.6975	1.30	3.497	2.90	27.29
0.58	0.7751	1.34	3.746	3.00	30.00

注: 用直线内插法的最大误差不超过 0.1%.

### 情形 II $Q < 0$

这时, 定义  $G$ 、 $K$  如下:

$$G = \sqrt{|Q|} = \sqrt{-Q},$$

$$K = -\frac{R}{G^3} = \frac{1}{G} \left[ \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c}{G^2} - \frac{a}{3} \right]. \quad (10)$$

因为  $\frac{R^2}{4} + \frac{Q^3}{27} = \left( \frac{K^2}{4} - \frac{1}{27} \right) G^6$ , 故而又得分三种情形讨论如下:



(1) 当  $\frac{K^2}{4} - \frac{1}{27} > 0$ , 即  $|K| > \frac{2\sqrt{3}}{7} = 0.3849$  时, 三次方程(1)有一实根和一对共轭复根. 仿照情形 I, 由  $K$  确定  $Z$  如下:

$$Z = \sqrt[3]{\frac{K}{2} + \sqrt{\frac{K^2}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{K}{2} - \sqrt{\frac{K^2}{4} - \frac{1}{27}}}, \quad (11)$$

则公式(4)即表成

$$\begin{aligned} x_1 &= GZ - \frac{a}{3}, \\ x_{2,3} &= -\frac{GZ}{2} - \frac{a}{3} \pm i\sqrt{3\left(\frac{GZ}{2}\right)^2 - G^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

同样, 由(11)式解得  $K = Z^3 - Z$ , 可制出情形 II 的  $K-Z$  表如下:

情形 II 的  $K-Z$  表

$Z$	$K$	$Z$	$K$	$Z$	$K$
1.00	0	1.48	1.702	2.20	8.448
1.04	0.08486	1.52	1.992	2.30	9.867
1.08	0.1797	1.56	2.236	2.40	11.42
1.12	0.2849	1.60	2.496	2.50	13.13
1.16	0.4009	1.64	2.771	2.60	14.98
1.20	0.5280	1.68	3.062	2.70	16.98
1.24	0.6666	1.72	3.368	2.80	19.15
1.28	0.8172	1.76	3.692	2.90	21.49
1.32	0.9800	1.80	4.032	3.00	24.00
1.36	1.155	1.90	4.959	3.10	26.69
1.40	1.344	2.00	6.000	3.20	29.57
1.44	1.546	2.10	7.161	3.30	32.64

注: 用直线内插法的最大误差不超过 0.1%.

(2) 当  $\frac{K^2}{4} - \frac{1}{27} < 0$ , 即  $|K| < 0.3849$  时, 方程(1)有

三个不等实根。如果引进  $Z$  如下：

$$Z = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \theta, \quad (13)$$

注意到

$$G = \sqrt{-Q},$$

$$R = -G^3 K,$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{Q\sqrt{-Q}} \right),$$

则公式(6)即表成

$$\begin{aligned} x_1 &= GZ - \frac{a}{3}, \\ x_{2,3} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} G \left( -\frac{1}{2} \cos \theta \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) - \frac{a}{3} \\ &= G \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \right) - \frac{a}{3} \\ &= -\frac{GZ}{2} - \frac{a}{3} \pm \sqrt{G^2 - 3 \left( \frac{GZ}{2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

现在来寻求  $K$  和  $Z$  之间的联系。由于

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{Q\sqrt{-Q}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} K, \end{aligned}$$

而由(13)式又可得

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} Z,$$

因为  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ , 所以

$$\frac{3\sqrt[3]{3}}{2} K = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} Z^3 - \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} Z,$$

即得  $K = Z^3 - Z$ , 所以前述由(11)式确定的“情形 II 的  $K-Z$  表”对这里亦适用.

(3) 当  $-\frac{K^2}{4} - \frac{1}{27} = 0$ , 即  $K = \pm 0.3849$  时, 由公式(5), 方程(1)的三根可由下列公式求得:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt[3]{4R} - \frac{a}{3} \\ &= -\sqrt[3]{-4KG^3} - \frac{a}{3} \\ &= \pm \frac{2}{\sqrt[3]{3}} G - \frac{a}{3}, \\ x_{2,3} &= \mp \frac{G}{\sqrt[3]{3}} - \frac{a}{3}. \end{aligned} \tag{15}$$

情形 III  $Q=0$

这时,  $R$  退化为  $R = c - \left(\frac{a}{3}\right)^3$ . 令

$$H = \sqrt[3]{-R},$$

则方程(1)可化为

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 - H = 0,$$

从而三根为

$$\begin{aligned} x_1 &= H - \frac{a}{3}, \\ x_{2,3} &= \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)H - \frac{a}{3}. \end{aligned} \tag{16}$$

综上所述, 用赖恩兹方法解三次方程(1)的过程可列表如下:

步 骤	情 形 I	情 形 II	情 形 III
1. 计算 $Q$ 值 $Q = b - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2$	$Q > 0$	$Q < 0$	$Q = 0$
2. 计算 $K$ 、 $K$ 或 $H$ 值	$K = \frac{1}{G} \left[ \frac{a}{3} + \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c}{G^2} \right]$ $G = \sqrt[3]{Q}$	$K = \frac{1}{G} \left[ -\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c}{G^2} + \frac{a}{3} \right]$ $G = \sqrt{-Q}$	$H = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c}$
3. 计算或查表 求 $Z$ 值	$0.1 <  K  \leq 30$ 时, 查 $K-Z$ 表; $ K  \leq 0.1$ 时, $Z = K - K^2$ ; $ K  > 30$ 时, $Z = K^{1.3} - \frac{1}{3K^{1.3}}$ .	$ K  \leq 32$ 时, 查 $K-Z$ 表; $ K  > 32$ 时, $Z = K^{1.3} + \frac{1}{3K^{1.3}}$ ; $ K  = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时, 不用求 $Z$ 值.	不用求 $Z$ 值
4. 求根	$x_1 = GZ - \frac{a}{3};$ $x_{2,3} = -\left(\frac{GZ}{2} + \frac{a}{3}\right) \pm i\sqrt{3\left(\frac{GZ}{2}\right)^2 + G^2}.$	$ K  \neq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时, $x_1 = GZ - \frac{a}{3};$ $x_{2,3} = -\left(\frac{GZ}{2} + \frac{a}{3}\right) \pm \sqrt{G^2 - 3\left(\frac{GZ}{2}\right)^2}.$ $ K  = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时, $x_1 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} G - \frac{a}{3};$ $x_2 = x_3 = \mp \frac{\sqrt{3}}{3} G - \frac{a}{3}.$	$x_1 = H - \frac{a}{3}$ $x_{2,3} = -\frac{a}{3}$ $+ H\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

「例 1」 解三次方程  $2x^3 + x^2 + 14x - 30 = 0$ .

解 化方程为标准形式, 即

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7x - 15 = 0.$$

这时,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 7$ ,  $c = -15$ . 故

$$Q = b - 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 = 7 - 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{83}{12} > 0.$$

属情形 I, 依次计算  $G$  和  $K$ :

$$G = \sqrt{\frac{83}{12}} = 2.63,$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{G} \left[ \frac{a}{3} + \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3 - c}{G^2} \right] \\ &= \sqrt{\frac{12}{83}} \times \left[ \frac{1}{6} + \frac{12}{83} \times \left( \frac{1}{216} + 15 \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{12}{83}} \times \frac{1745}{747} = 0.8882. \end{aligned}$$

查  $K$ - $Z$  表, 可知与 0.8882 最靠近的两个  $K$  值为 0.8583 与 0.9475, 所以运用线性内插法, 由

$$\frac{Z - 0.62}{0.8882 - 0.8583} = \frac{0.66 - 0.62}{0.9475 - 0.8582}$$

求得

$$Z = 0.6334.$$

最后, 求得方程的三个根为:

$$\begin{aligned} x_1 &= GZ - \frac{a}{3} \\ &= 2.63 \times 0.6334 - 0.1667 \\ &= 1.499, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{2,3} &= -\left(\frac{GZ}{2} + \frac{a}{3}\right) \pm i\sqrt{3\left(\frac{GZ}{2}\right)^2 + G^2} \\
 &= -(2.63 \times 0.3167 + 0.1667) \\
 &\quad \pm i\sqrt{3 \times (2.63 \times 0.3167)^2 + 6.9167} \\
 &= -0.9993 \pm 3i.
 \end{aligned}$$

[例 2] 解三次方程  $x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0$ .

解 这里,  $a = -12$ ,  $b = 36$ ,  $c = -32$ . 故

$$Q = 36 - 3 \times (-4)^2 = -12 < 0.$$

属情形 II, 依次计算  $G$  和  $K$  的数值:

$$G = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$K = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \left[ \frac{(-4)^3 + 32}{12} + 4 \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

所以, 方程的三个根为:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} + 4 = 8,$$

$$x_2 = x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} + 4 = 2.$$

## $n!$ 是怎样计算的?

方 直

符号  $n!$  表示自然数  $n$  的阶乘, 也就是

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

当  $n$  较小时, 可直接由上式求出  $n!$  的值. 但是, 当  $n$  较大时, 例如  $n=20$ , 按上式计算, 就要做 19 次乘法, 其结果

$$20! = 2, 432, 902, 008, 176, 640, 000,$$

有 19 位之多, 显属不便.

当  $n$  很大时, 能否找到一个计算  $n!$  的近似表达式呢?

计算  $n!$  可用下述近似公式:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

只要  $n$  稍大, 上式的相对误差就很小.

下面来推导这个公式. 记

$$a_n = n! / \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n+1/12n},$$

$$b_n = n! / \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}.$$

显然,  $a_n < b_n$ . 而

$$\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\ln \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

其中右项

$$\begin{aligned}
& \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdots \frac{2n+1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p-1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2p-2}} < 1 + \frac{1}{3} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2p-2}} \\
&= 1 + \frac{1}{12n(n+1)},
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} &> 0 > \ln \frac{b_{n+1}}{b_n}, \\
a_{n+1} &> a_n, \quad b_{n+1} < b_n.
\end{aligned}$$

另外, 由于

$$\frac{b_n}{a_n} = e^{\frac{1}{12n}} \rightarrow 1,$$

所以, 可设  $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$ , 则

$$\alpha = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n + \frac{\theta}{12n}}}, \quad (0 < \theta < 1)$$

将上式中的  $n!$  代入瓦利斯公式:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{n!^2 \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \right)^2,$$

可求得常数  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{2\alpha^2 \pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n + \frac{\theta}{6n}} \cdot 2^{2n}}{\alpha \sqrt{2\pi} \cdot 2n \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n + \frac{\theta}{24n}}} \right)^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\alpha^2 \pi}{2n+1} e^{\frac{\theta}{3n} - \frac{\theta}{12n}} = \frac{\alpha^2 \pi}{2},
\end{aligned}$$

因此,  $\alpha=1$ . 这样, 我们就得到

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad (0 < \theta < 1)$$

这就是有名的斯特林 (Stirling) 公式.



当  $n \rightarrow \infty$  时,  $e^{\frac{1}{12n}} \rightarrow 1$ . 所以, 当  $n$  较大时

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

不难估计, 其相对误差小于  $e^{\frac{1}{12n}} - 1$ .

斯特林公式是数学分析中最重要的公式之一, 它在概率论及统计学里也有很多的应用. 有时把它写成下列等价形式:

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln 2\pi.$$

$n!$  的意义, 还可以从自然数推广到大于  $-1$  的任意实数. 记

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad (a > 0)$$

称它为  $\Gamma$  函数. 它对任何  $a > 0$  都收敛, 而且具有各阶连续导数.

由分部积分法, 得

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-x} dx = -x^a e^{-x} \Big|_0^{\infty} + a \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

因为  $x^a e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 0$ , 故有

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a), \quad (a > -1)$$

由于  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$ , 即

$$\Gamma(1) = 1.$$

当  $n = n, n-1, \dots, 3, 2, 1$  时, 重复运用上述公式, 得

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也即

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

当  $n$  是自然数时, 这个公式给出了  $n!$  的一个分析表达式. 而公式右端的积分不仅对于自然数  $n$ , 而且对于任何大于  $-1$  的实数  $n$  都有意义, 因此很自然地, 对于任何大于  $-1$  的  $n$ , 可以利用这个公式来定义表达式  $n!$ . 这样, 记号  $n!$  即为  $n$  的一个连续函数, 定义域为  $n > -1$  的任何实数, 函数值由公式右端给定. 当  $n$  为自然数时, 它就取通常的数值.

特别, 当  $n=0$  时, 由于  $\Gamma(1)=1$ , 所以定义

$$0! = 1.$$

当  $n$  为大于  $-1$  的非整数时, 一般地说, 右侧积分较难计算, 不要说它的精确数值, 就连它的大小数量级, 也不易直接求出.

例如, 计算  $\left(\frac{1}{2}\right)!$ , 可以利用一系列复杂的积分变换而求得  $\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 故

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

利用上述斯特林公式, 计算推广后的  $n!$ , 就显得方便得多, 例如,

$$\left(\frac{1}{2}\right)! \approx \sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.47346 \sqrt{\pi},$$

与正确值  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  相比已很接近. 当  $n$  很大时, 其精确度就更高.

另外, 对于  $\Gamma$  函数, 人们编了函数值表(参见《简明数学手册》第 3-218 页, 上海教育出版社). 这样, 求  $n!$  的数值, 也可直接查  $\Gamma$  函数表而得.

# 几种无理数的判定方法

上海市南洋模范中学 顾忠德

定义一个概念,一般不应是否定形式的,但无理数的定义却是例外.众所周知,在初等代数中,无理数被定义为不循环的无限小数,或是定义为不能表成两个整数  $p$ 、 $q$  之比  $\frac{p}{q}$  的实数 ( $q \neq 0$ ). <sup>无法确定</sup>这就决定了要判定一个实数是无理数,就得否定其不是有理数,因而往往采用反证法.

最有代表性的,要算是判定  $\sqrt{2}$  为无理数的证明方法了.即假定  $\sqrt{2}$  是有理数,设  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , 其中正整数  $p$ 、 $q$  互素.两边平方,得

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad p^2 = 2q^2.$$

上式中,可看出  $p$  是偶数,设为  $p = 2p_1$ , 其中  $p_1$  为正整数,则

$$(2p_1)^2 = 2q^2, \quad q^2 = 2p_1^2.$$

所以  $q$  亦是偶数,从而和  $p$ 、 $q$  互素矛盾,这就证明了  $\sqrt{2}$  是无理数.

至于其他一些无理数又如何判定呢?下面先介绍几种基本初等函数值中无理数的判定方法,最后介绍  $e$  和  $\pi$  是无理数的判定方法.

## (一) 开 方 数

仿照上述判定  $\sqrt{2}$  是无理数的证明方法,可以证明:如

果  $n$ 、 $N$  都是正整数,  $n \neq 1$ , 而且  $\sqrt[n]{N}$  不是整数, 则  $\sqrt[n]{N}$  是无理数.

**证明** 采用反证法. 假定  $\sqrt[n]{N}$  是有理数, 设有  $\sqrt[n]{N} = \frac{p}{q}$ , 其中正整数  $p$ 、 $q$  互素,  $q \neq 1$ . 上式两边  $n$  次乘方, 即有

$$N = \frac{p^n}{q^n}, \quad \text{即 } p^n = N \cdot q^n.$$

上式表明  $q^n$  可以整除  $p^n$ , 但  $p$ 、 $q$  互素,  $p$  和  $q$  的质因子无一相同, 这就引起矛盾, 所以  $\sqrt[n]{N}$  非有理数.

同样, 对于有理数的开方, 也有类似的结论: 对于正有理数  $\frac{a}{b}$ , 其中  $a$ 、 $b$  是互素的正整数,  $b \neq 1$ , 如果  $\sqrt[n]{a}$ 、 $\sqrt[n]{b}$  不同时为整数, 其中  $n$  为正整数,  $n \neq 1$ , 则  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  是无理数.

**证明** 采用反证法. 假定  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  是有理数, 设有  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}$ , 其中正整数  $p$ 、 $q$  互素. 上式两边  $n$  次乘方, 即有

$$\frac{a}{b} = \frac{p^n}{q^n}, \quad \text{即 } aq^n = bp^n.$$

上式中, 一方面由  $b|aq^n$  得  $b|q^n$ , 由  $p^n|aq^n$  得  $p^n|a$ ; 另一方面, 由  $a|bp^n$  得  $a|p^n$ , 由  $q^n|bp^n$  得  $q^n|b$ . 这里,  $a$  和  $p^n$ 、 $b$  和  $q^n$  都是正整数, 分别相互整除, 即有

$$a = p^n, \quad b = q^n,$$

从而  $\sqrt[n]{a} = p$ 、 $\sqrt[n]{b} = q$  均整数, 这就和已知条件  $\sqrt[n]{a}$ 、 $\sqrt[n]{b}$  不同时为整数发生矛盾, 所以  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  是无理数.

上述结论表明, 对于幂函数  $y = \sqrt[n]{x}$ , 当  $x$  为正有理数时, 仅当  $x$  表成既约正分数的分子和分母均为整数的  $n$  次完全乘方数时, 函数值才能是有理数; 而当  $x$  为正无理数时, 其函数值必为无理数 (同样可用反证法证得). 但是, 函数  $y = \sqrt[n]{x}$

的值域又包含了一切非负有理数(这可由反函数的定义域得知).

## (二) 常用对数值

首先,我们来证明  $\lg 2$  是无理数.

**证明** 同样用反证法. 假定  $\lg 2$  是有理数, 设有  $\lg 2 = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  为互素的正整数. 按对数的定义, 有

$$10^{\frac{p}{q}} = 2, \quad \text{即 } 10^p = 2^q.$$

上式中, 等号左端可被 5 整除, 而右端不能被 5 整除, 显然是矛盾的, 这就证明了  $\lg 2$  是无理数.

一般地, 可以证明, 当  $N$  不是 10 的有理数幂时,  $\lg N$  为无理数.

**证明** 用反证法. 假定  $\lg N$  为有理数, 设有  $\lg N = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  为互素的正整数, 按对数的定义, 有

$$10^{\frac{p}{q}} = N, \quad \text{即 } 10^p = N^q.$$

上式中, 既然  $N$  不是 10 的有理数幂, 故  $N^q$  不能是 10 的整数幂, 而等号左端  $10^p$  却是 10 的整数幂, 此即矛盾, 这就证明了  $\lg N$  为无理数.

上述结论的逆命题也成立, 所以, 当且仅当  $x$  为 10 的有理数幂时, 对数函数  $y = \lg x$  的函数值才是有理数. 同样, 函数  $y = \lg x$  的值域仍能包含一切有理数.

## (三) 三角函数值

对于三角函数, 情况要复杂一点, 要给出函数值取有理数

值的一般判定是困难的. 下面, 我们来证明: 当  $\phi = \frac{m}{n}\pi$  时 (其中  $m, n$  为整数,  $n \neq 0$ ),  $\sin \phi$  与  $\cos \phi$  除了取得  $0, \pm \frac{1}{2}$  及  $\pm 1$  外全都是无理数,  $\operatorname{tg} \phi$  除了取得  $0$  与  $\pm 1$  外全都是无理数.

**证明** 利用三角恒等式

$$\begin{aligned}\cos n\phi &= \cos^n \phi - C_n^2 \cos^{n-2} \phi \sin^2 \phi \\ &\quad + C_n^4 \cos^{n-4} \phi \sin^4 \phi - \cdots,\end{aligned}$$

当  $n$  为偶数时, 末项为  $(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \phi$ ; 当  $n$  为奇数时, 末项为  $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos \phi \sin^{n-1} \phi$ .

取  $\phi = \frac{m}{n}\pi$ , 这里  $m, n$  互素, 则  $\cos n\phi = \cos m\pi = \pm 1$ . 从而  $\cos \phi$  满足整系数代数方程

$$x^n - C_n^2 x^{n-2} (1-x^2) + C_n^4 x^{n-4} (1-x^2)^2 - \cdots = \pm 1,$$

上式按  $x$  之降幂次序加以整理, 并注意到

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1},$$

那末, 当  $n$  为奇数时, 得

$$2^{n-1}x^n + \cdots \pm 1 = 0,$$

当  $n$  为偶数时, 则  $m$  为奇数,  $\cos n\phi = -1$ , 从而

$$2^{n-1}x^n + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} + 1 = 0.$$

对上述两个方程的有理根进行考察.

当  $n$  为奇数或  $n$  为  $4k$  形式的偶数时,

$$x = \pm \frac{1}{2^\lambda} \quad (0 \leq \lambda \leq n-1),$$

又因  $\cos 2\phi = 2\cos^2 \phi - 1 = 2x^2 - 1$ , 而  $2\phi$  同属  $\frac{m}{n}\pi$  形式的角, 故

$$\cos 2\phi = \pm \frac{1}{2^\mu} \quad (0 \leq \mu \leq n-1),$$

由此得

$$\pm \frac{1}{2^\mu} = 2\left(\frac{1}{2^\lambda}\right)^2 - 1,$$

此式仅当  $\lambda=0$  或  $1$  时才能成立, 也就是  $\cos \frac{m}{n}\pi$  只能有  $\pm \frac{1}{2}$  及  $\pm 1$  这几个有理数.

当  $n$  为  $4k+2$  形式的偶数时, 因为  $2\phi = \frac{m}{2k+1}\pi$ , 分母为奇数, 利用上面结果, 得

$$2\cos^2\phi - 1 = \cos 2\phi = \pm \frac{1}{2} \text{ 或 } \pm 1,$$

也就是说, 此时  $\cos \frac{m}{n}\pi$  只能有  $0, \pm \frac{1}{2}$  及  $\pm 1$  这几个有理数值.

又由  $\sin\phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$  可知, 当  $\phi = \frac{m}{n}\pi$  时,  $\sin\phi$  也只能取  $0, \pm \frac{1}{2}$  及  $\pm 1$ , 此外全是无理数.

设  $\operatorname{tg}\phi = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  为整数,  $q \neq 0$ ), 则

$$\sin 2\phi = \pm \frac{2pq}{p^2+q^2}, \quad \cos 2\phi = \pm \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}.$$

即是说  $\sin 2\phi$  与  $\cos 2\phi$  将同时为有理数. 由上可知, 只能二者之一为  $0$ , 另一为  $\pm 1$ , 因此  $2\phi = l\pi$  (其中  $l$  整数),  $\phi = \frac{l}{2}\pi$ ,  $\operatorname{tg}\phi = \pm 1$ , 证毕.

#### (四) 数 $e$

我们知道, 数  $e$  是数列  $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的极限, 可表为:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

并且, 在证明这一极限的存在性时曾得到  $e < 3$ . 下面来证明数  $e$  是无理数.

**证明** 仍用反证法. 假定  $e$  是有理数, 设有  $e = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  为正整数. 于是

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

从而有

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!}.$$

所以

$$\begin{aligned} q! \cdot \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= q! \cdot e - q! \cdot \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \\ &= (q-1)! \cdot p - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}. \end{aligned}$$

上式中, 等号右端是整数, 而左端

$$\begin{aligned} 0 &< q! \cdot \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \\ &+ \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots \\ &+ \frac{1}{(q+1)^n} + \cdots = \frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} \leq 1. \end{aligned}$$

可见左端不是整数, 这就引起矛盾, 即证得了  $e$  是无理数.

## (五) 圆 周 率 $\pi$

关于圆周率  $\pi$  是无理数的证明, 比较麻烦, 需要用到微积



分方面的一些知识.

同样用反证法. 假定  $\pi$  是有理数, 设有  $\pi = \frac{p}{q}$ , 其中  $p$ 、 $q$  为正整数. 首先, 引进一个辅助函数:

$$f(x) = \frac{x^n (p - qx)^n}{n!}.$$

显然,  $f(x)$  是  $2n$  次多项式,  $x=0$  和  $x=\pi = \frac{p}{q}$  都是  $f(x)$  的  $n$  重根. 所以  $f(x)$  在  $x=0$  和  $x=\pi$  上的函数值以及 1 至  $n-1$  阶导数值均等于零:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0,$$

$$f(\pi) = f'(\pi) = f''(\pi) = \cdots = f^{(n-1)}(\pi) = 0.$$

至于  $f(x)$  的  $k$  阶导数 ( $n \leq k \leq 2n$ ), 由高阶导数的莱布尼兹公式, 可知

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^k C_k^i (x^n)^{(k-i)} [(p - qx)^n]^{(i)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^k \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} \cdot n(n-1)\cdots(n-k+i+1) x^{n-k+i} \cdot n(n-1)\cdots(n-i+1) (-q)^i (p - qx)^{n-i}. \end{aligned}$$

当  $k \geq n$  时, 上式中各项的系数均为整数, 从而  $f(x)$  在点  $x=0$  和  $x=\pi = \frac{p}{q}$  的  $n$  至  $2n$  阶导数值均为整数.

进一步, 再建立一个辅助函数:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots \\ &\quad + (-1)^n f^{(2n)}(x). \end{aligned}$$

由上述关于  $f(x)$  的结论, 可知  $F(0)$  与  $F(\pi)$  均为整数.

易证  $F''(x) + F(x) = f(x)$ , 而

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (F'(x) \sin x - F(x) \cos x) \\ &= F''(x) \sin x + F'(x) \cos x - F'(x) \cos x + F(x) \sin x \\ &= (F''(x) + F(x)) \sin x = f(x) \sin x, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= [F'(x) \sin x - F(x) \cos x] \Big|_0^\pi \\ &= F'(\pi) + F(0). \end{aligned}$$

由于  $F(0)$  与  $F(\pi)$  都是整数, 所以  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$  也是整数.

另一方面, 当  $0 < x < \pi$  时,  $p - qx > p - q\pi = 0$ , 故

$$f(x) \sin x = \frac{x^n (p - qx)^n}{n!} \sin x > 0.$$

又

$$\frac{x^n (p - qx)^n}{n!} < \frac{\pi^n p^n}{n!} = \frac{(\pi p)^n}{n!},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\pi p)^n}{n!} = 0,$$

所以, 当  $n$  充分大时,  $\frac{(\pi p)^n}{n!}$  小于任一给定的常数. 不妨取此常数为  $\frac{1}{\pi}$ , 这样

$$0 < f(x) \sin x < \frac{(\pi p)^n}{n!} < \frac{1}{\pi},$$

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < \int_0^\pi \frac{1}{\pi} dx = 1.$$

上式表明  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$  不是整数, 它与前述已证得  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$  是整数相矛盾. 因而, 最初假设  $\pi = \frac{p}{q}$  是错误的, 这就证得了  $\pi$  是无理数.

# 种树游戏与图形实现论

安徽劳动大学 张 铃

14

先讲两个种树数学游戏。

种树数学游戏一 种十棵树,使成五行,要求每行恰有四棵,问有几种不同的种法?

读者也许很快就可以想到,按五角星形状,在各交点上种一棵树,则满足要求(图 14-1)。这想法是对的。现在要问,还有没有其他的种法? 以及是否可用数学方法推导出所有的解来,而不要硬猜?

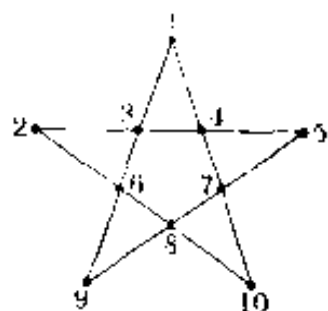


图 14-1

下面我们来进行分析。

要有五行,每行四棵,而  $4 \times 5 = 20$ ,就是说要有 20 “棵”树,而真正的树只有 10 棵,这就一定要有树同在几行上(即在其交点上)。那么,一棵树至多能同在几行上呢?

下面先证明:任一棵树不可能同时在多于两行上。

先证不会同在四行上。因为四行每行四棵,  $4 \times 4 = 16$ ,即要 16 “棵”,除交点上的一棵树重复计算了四次,故必须有  $16 - 3 = 13$  棵树。而树只有十棵,这就引出了矛盾,即证得任一棵树不会同在四行上。

再证不可能同在三行上。仍用反证法,设有一棵同在  $l_1, l_2, l_3$  上(见图 14-2),即在其交点上。每行四棵,  $4 \times 3 = 12$ ,  $a$

点重复计算了三次,故实际上有  $12-2=10$  棵. 换句话说,所有十棵树都在这三行上.

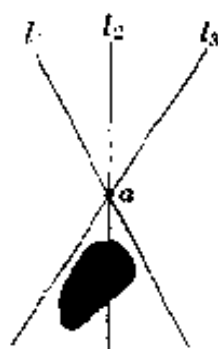


图 14-2

下面证明这十棵树,除上述三行每行四棵外,不存在另外有四棵树的行.

设存在  $l_4$  (不同于  $l_1, l_2, l_3$ ), 在  $l_4$  上有四棵树(设为  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ). 因是四棵,故由抽屉原则,至少有两棵同在  $l_1, l_2, l_3$  之一行上. 不妨设  $a_1, a_2$  同属  $l_1$ , 由于两点决定一直线,故有  $l_1 \equiv l_4$ , 此即矛盾. 这就证得了任一棵树不能同在三行上.

这样,就得出结论:任一棵树至多只能同属两行.

另一方面,又因五条直线两两相交(两两互不相重)其交点至多共有  $C_5^2=10$ . 故得每棵树恰在两行交点上,且任两行必相交,其交点必植有一棵树.

通过上面分析,得出了这样一个很强的性质,据此就可以求出所有解来.

任取一行  $l_5$ , 其上四点记为 1, 2, 3, 4, (以后“树”就看成“点”). 由上述性质,通过点 2, 3 各恰有一行  $l_2, l_3$  与  $l_5$  相交,又由上述性质,  $l_2$  与  $l_3$  必相交于一点 5. 于是  $l_3, l_2, l_5$  将平面分成七个区域,记为  $D_1, D_2, \dots, D_7$ . (见图 14-3)

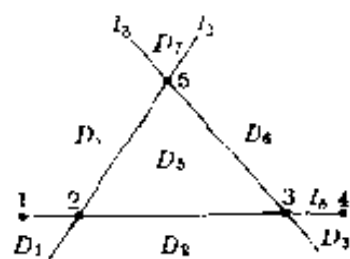


图 14-3

由性质,通过点 1, 4 也各恰有一行  $l_1, l_4$ , 它们的交点记为点 6. 那么,点 6 不可能在  $l_2$ , 或  $l_3$ , 或  $l_5$  上(不然,点 6 就同在三行上). 故点 6 只能落在区域  $D_1, D_2, \dots, D_7$  的内部.

现在分几种情况来讨论. 因  $D_1$  与  $D_3$  的位置是对称的,

只要考察一个就行了. 同理  $D_4, D_6$  也只要考察一个. 于是, 最后分  $(D_1, D_3), (D_2), (D_4, D_6), (D_5), (D_7)$  这五种情况来讨论.

1. 点6属于  $D_1$ , 得图 14-4、14-5、14-6 三种情况.

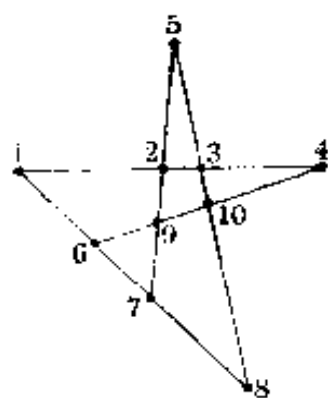


图 14-4

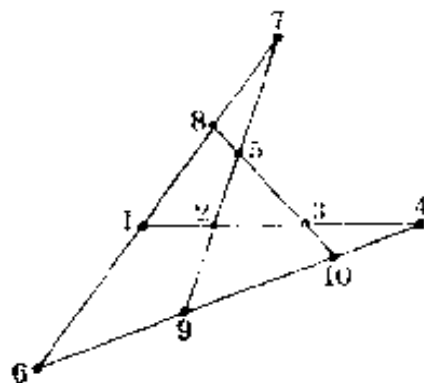


图 14-5

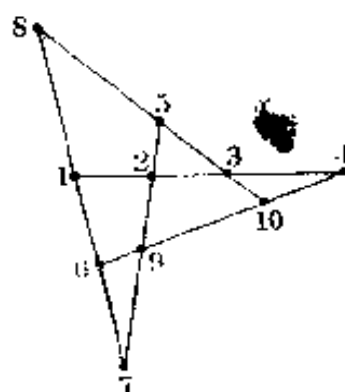


图 14-6

注: 设  $l_1$  与  $l_2$  的交点为点7,  $l_3$  与  $l_1$  的交点为点8, 则图 14-4 是点7、点8在  $l_5$  下面的情况; 图 14-5 是点7、点8均在  $l_5$  之上的情况; 图 14-6 是点7在  $l_5$  之下, 点8在  $l_5$  之上的情况. 而点7在  $l_5$  之上, 点8在  $l_5$  之下的情况不会发生, 故不同的情况共三种.

2. 点6属于  $D_2$ , 也有三种情况, 见图 14-7~图 14-9.

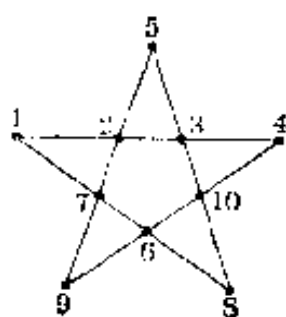


图 14-7

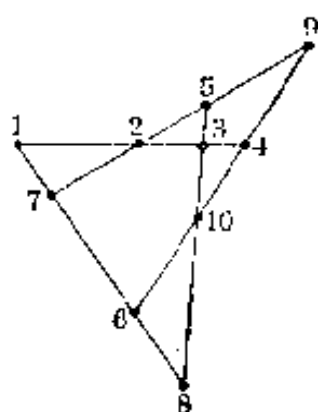


图 14-8

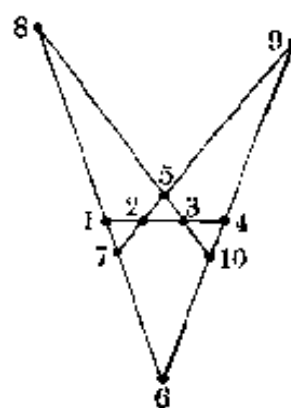


图 14-9

3. 点6属于  $D_5$ , 只有一种情况, 见图 14-10.

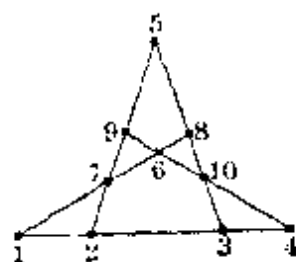


图 14-10

4. 点 6 属于  $D_0$ , 有三种情况, 见图 14-11~图 14-13.

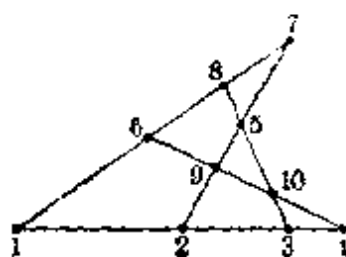


图 14-11

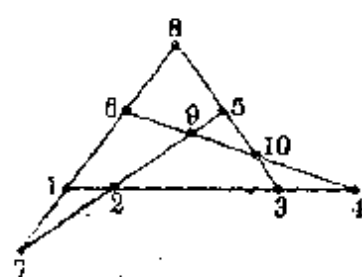


图 14-12

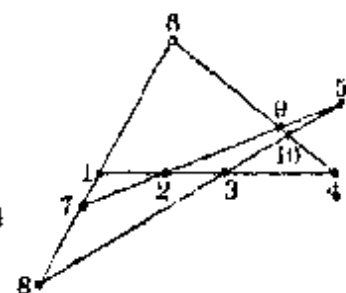


图 14-13

5. 点 6 属于  $D_1$ , 有三种情况, 见图 14-14~图 14-16.

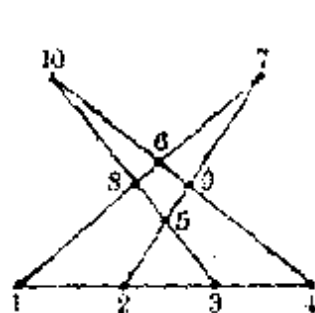


图 14-14

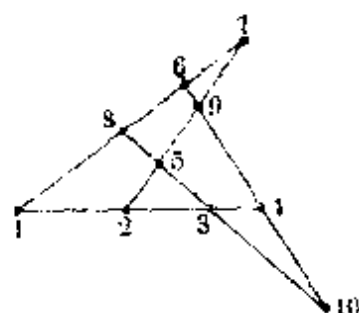


图 14-15

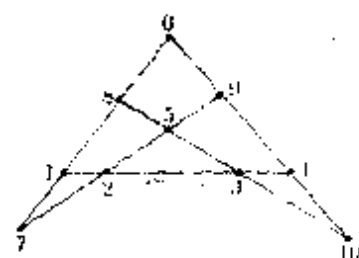


图 14-16

以上 13 个图, 其中图 14-4、图 14-13、图 14-14 是相同; 图 14-5、图 14-9、图 14-11、图 14-16 是相同; 图 14-6、图 14-12、图 14-15 是相同 (图 14-15 是图 14-12 的镜像); 图 14-7、图 14-8、图 14-10 是相同的. 故不同的图形共五种, 即图 14-4、图 14-5、图 14-6、图 14-7、图 14-8.

上面,根据数学方法求出了满足要求的所有图形,而凭直观只猜到一个图形.

**种树数学游戏二** 请种九棵树,使成十行,要求每行恰有三棵,问有几种不同的种法?

和上述问题一样,先根据点、线之间的数量关系,推导出一些性质,然后根据这些性质来帮助作图.

每行树有两个端点,于是十行共有 20 “端点”,而总共只有九棵树,所以至少有一棵树是三行的共同端点(因  $2 \times 9 = 18 < 20$ , 这里应用了抽屉原则). 即不管怎么种,只要满足要求,就一定有图 14-17 的结构,这就大体确定了七棵树的位置.

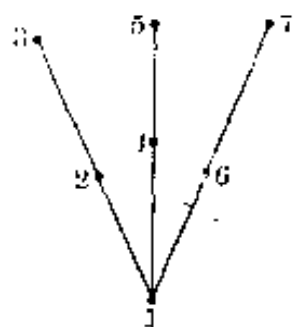


图 14-17

另一方面, 每行三棵共十行, 故有  $3 \times 10 = 30$  “棵”, 而  $3 \times 9 = 27 < 30$ , 于是至少有一棵树是四行的交点. 又因任一棵树不可能是五行的交点(这是因  $3 \times 5 = 15$ , 又交点重复五次便有  $15 - 4 = 11 > 9$ , 故不允许), 这就推得至少有三棵树是四行的交点.

根据这些性质, 对图 14-17 分成几种情况进行讨论. 设包含图 14-17 中点 2、3、…、7 的最小凸多边形为  $D$ . 可分三种情况: 1.  $D$  是六边形; 2.  $D$  是五边形; 3.  $D$  是四边形(其

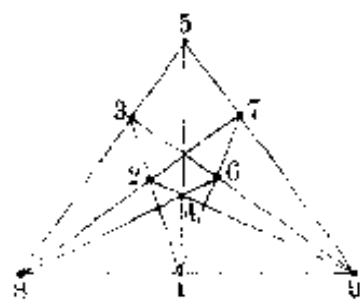


图 14-18

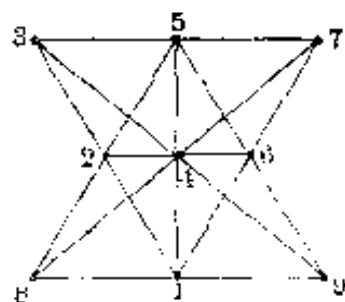


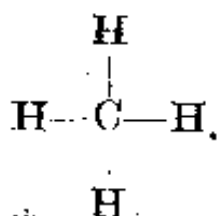
图 14-19

他情况不可能出现)。可以证明：第一种情况有唯一解(如图 14-18)；第三种情况也有唯一解(如图 14-19)；第二种情况没有解。

在初等几何中，有已知边、角、高、中线等其中的一些量，求作三角形的题目。种树的游戏与之相仿，不过现在已知的不是边、角的长度、大小，而是边、点之间的某些特定的关系，求作的也不是三角形而是更复杂的图形。种树数学游戏也可看成是下面这样一个问题的特殊情况：给定图形的某些特定的性质，求作合乎条件的图形。

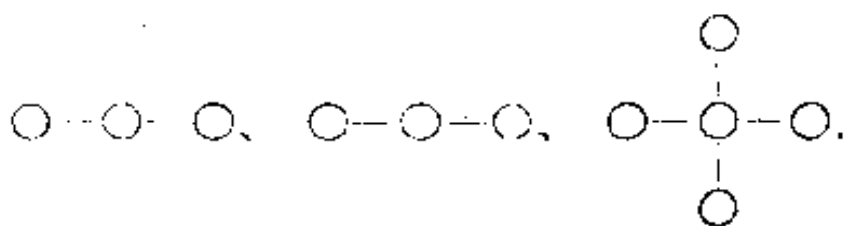
在生产实践和科学研究中，也会遇到同样类型的问题。如在化学中，已知物质的分子式，求其所有同素异构体；在电子计算机的电路设计中，按设计要求提出对线路结构的一些限制，求在这些限制下合乎要求的线路，等等。正因如此，故在图论中就有专门讨论这类问题的课题，称为图形的实现论。当然，图论实现论远较上面的植树问题复杂得多。

让我们先从一些具体例子讲起。在化学中，大家都熟悉水的分子式是  $H_2O$ ，其中 H 是一价，O 是二价；它的结构式可写成  $H-O-H$ 。又如二氧化碳： $CO_2$ ，其中 C 是四价，结构式可写成  $O=C=O$ 。又如甲烷  $CH_4$ ，结构式可写成



在物质的分子结构式中，一元素是几价，则在图中由该元素就有几条边与其他元素相连。若将元素以“点”表示，那么对应水、二氧化碳、甲烷的图为：





一般,如求  $C_nH_{2n+2}$  的分子结构,这即要求我们作一连通图,图中共有  $3n+2$  个点,有  $n$  个点有四条边与其他点相连,有  $2n+2$  个点只有一条边与其他点相连. 为叙述方便,称一点与其他点相连的边个数为该点的指数,这就可以将求分子结构式问题一般化,变成图论中下面这样一个问题:给定  $n$  个正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (不妨设  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ), 问在什么样条件下,可以造出一个有  $n$  个点的图形  $G$ , 使  $G$  的各点的指数恰好是  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 再问,若有,如何求得它? 以及如何求得所有满足条件的图形?

下面,仍采取在解决种树游戏中采用过的方法. 就是先进行分析,希望能从所给的条件中推导出一些有用的性质,利用这些性质指导我们作图.

下面讨论图中任何两点至多只允许连一条边的情况.

例如,  $H_2O$  表成  $O-O-O$ , 共三个点二条边, 其指数可写成  $(2, 1, 1)$ .  $2+1+1=4$ .

一条边在其两端点计算指数时各计算了一次, 故得图中各点指数总和等于边数的二倍, 即一定是偶数. 所以, 象指数为  $(1, 1, 1)$  的图肯定是不存在的. 这就得到  $a_1, \dots, a_n$  满足的第一个条件为:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \text{偶数}. \quad (1)$$

是否只要(1)满足, 就能造出相应的图呢? 这也未必, 如  $(4, 1, 1)$ , 其指数和  $=6$  是偶数, 但不存在对应的图. 为什么呢? 因为我们限制任两点之间至多只能连一条边, 共三点

那么任一点至多只能与其他两点相连,故任一点指数  $\leq 2$ , 而  $(4, 1, 1)$  中第一个指数为  $4 > 2$ , 故不行.

从上面的分析,又得出  $a_1, \dots, a_n$  要满足的第二个条件:

$$a_i \leq n-1, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

下面将看到,有 (1)、(2) 两条件,基本上就可造出相应的图.

设有  $n$  个点,其指数分别为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (其中  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ). 因  $a_1 \leq n-1$ , 则第 1 点可与其余的  $a_1$  个点用一条边相连,不妨设与第 2, 3,  $\dots$ ,  $a_1+1$  点相连. 这样,第一点的指数就满足要求了. 这时,若将第一点和与其相连的边删去,则余下的  $n-1$  个点的指数为  $(a_2-1, a_3-1, \dots, a_{a_1+1}-1, a_{a_1+2}, \dots, a_n)$  (记为  $L_{n-1}$ ), 若对应于  $L_{n-1}$  的图形存在, 那么将第 1 点加上 (连同相连的边), 就可得对应于  $L_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  的图形. 进一步,  $L_{n-1}$  对应的图若存在, 则也必须满足 (2) 式, 即  $L_{n-1}$  中每个数  $\leq n-2$ . 那么, 按上面同样方法, 可得  $L_{n-2}, \dots$  这样一直判别下去, 若能每次都满足条件 (2), 即每次都能使一个点的指数满足要求, 那么至多经过  $n$  次, 最后就求得对应于  $L_n$  的图形. 反之, 数学上可以证明, 如果按上面方法进行到某一步 (比如  $L_i$ ) 时条件 (2) 不满足, 则对应于  $L_n$  的图形就不存在.

将上面的叙述归纳一下, 得判别法如下: 令  $L_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 则对应于  $L_n$  的图形存在的充分必要条件是:

(1)  $a_1 \leq n-1$ ;

(2)  $L_{n-1} = (a_2-1, a_3-1, \dots, a_{a_1+1}-1, a_{a_1+2}, \dots, a_n)$ ,  $L_{n-1}$  对应的图形存在.

这个判别法不但提供了判别准则, 而且提供了求出对应图形的方法.

[例 1] 求指数为  $(4, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 1)$  的图形.

解	4	4	4	3	2	1	1	1	连接情况
	3	3	2	1	1	1	1	1	$1 \longrightarrow (2, 3, 4, 5)$
		2	1	0	1	1	1	1	$2 \longrightarrow (3, 4, 5)$
			0		0	1	1	1	$3 \longrightarrow (4, 6)$
						0			$7 \longrightarrow 8$

注: 右边一栏表示每次删去的一点与其他点连接的情况. 如  $2 \longrightarrow (3, 4, 5)$  表 2 与 3、4、5 相连.

现按右边一栏自下至上逐步画出图来.

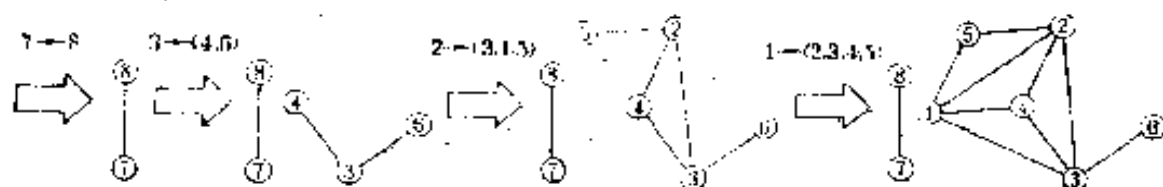


图 14-20

[例 2] 设指数为  $(4, 4, 3, 2, 1)$ , 求作对应的图.

解	4	4	3	2	1	
	3	2	1	0	0	$1 \longrightarrow (2, 3, 4, 5)$

最后一行为  $(3, 2, 1)$ , 有  $3 > 3 - 1 = 2$ . 即对  $(3, 2, 1)$ , 条件  $a_1 \leq n - 1$  不满足, 故得本题无解.

象在种树游戏中一样, 下面我们要研究如何求出所有合乎条件的图形.

先从图 14-20 着手. 在图 14-20 中, 若将边  $(7, 8)$ 、 $(1, 3)$  换成  $(8, 3)$ 、 $(7, 1)$ , 显然所得的图形也满足要求 (因变换后各点的指数没有变).

一般, 在一图中, 将边  $(a, b)$ 、 $(c, d)$  ( $a, b, c, d$  均不相同) 换成  $(a, c)$ 、 $(b, d)$  或  $(a, d)$ 、 $(b, c)$ , 所得的图形各点的指数仍保持不变. 但变换后新的图中是否会出现其中有两点

其连线多于一条？这是可能的，如在图 14-20 中将  $(1, 2)$ 、 $(3, 4)$  换成  $(1, 3)$ 、 $(2, 4)$ ，则得到的新图在 1、3 之间的连线就有两根（不满足我们的要求），为避免出现多于一根连线，只要在原图中没有  $(a, c)$ 、 $(b, d)$ ，或没有  $(a, d)$ 、 $(b, c)$ ，就行了。

综上所述，在一图中，将  $(a, b)$ 、 $(c, d)$  换成  $(a, c)$ 、 $(b, d)$ ，或  $(a, d)$ 、 $(b, c)$ ，只要第一： $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  互不相同；第二：原图中没有边  $(a, c)$ 、 $(b, d)$ ，或  $(a, d)$ 、 $(b, c)$ ，则变换后的新图也满足要求。

这样一来，只要有一个满足条件的图，我们就可以用上面的方法（简称为“初等变换”），造出许多新的满足条件的图，还可以证明，所有满足条件的图，都可以从任一个已知的图经过有限次的“初等变换”求得。

这样，我们就完全解决了限于两点之间至多只连一条边情况下的图形实现问题。

上面，我们限于任两点之间只许至多连一条边，这个限制太强了，如  $\text{CO}_2$  写成  $\text{O}=\text{C}=\text{O}$ ， $\text{C}$  与  $\text{O}$  之间就要连两条边，这就要求我们讨论更一般的情况，允许两点间连若干条边，只是，这种情况下套用任两点之间只许至多连一条边的方法是不行的，需要作些改进。另外，上述图形实现问题中是各边不考虑方向性的，还有一种是有向图形实现问题，就稍要复杂一些，这里就不介绍了。

上面我们从种树游戏中，只讨论点、线关系出发，引伸到图形实现论，这其中就不管连线的“曲直”，若我们着眼点放在图形中的直线性上，则可引伸到另一个有趣的方向上去，例如可以提出如下的问题：给定  $m$  个点，要求每  $n$  ( $n \leq m$ ) 个点在一直线上，问最多能构成几条这样的直线？

这个问题就非同小可，不是很快就能回答的。近代数学

中有一专门的课题叫做有限几何，它专门研究有限个点、线、面等等之间的关系。我们学过的初等几何也研究直线、点之间的关系，在初等几何中，一直线上有无数个点，一平面上可画出无数不同的直线等等，而有限几何研究的对象只有有限个点、有限条直线等等。比如在那里研究一种叫做有限射影平面 $\pi$ ，在这平面 $\pi$ 上，若假定存在一条直线恰好包含 $(n+1)$ 个点( $n \geq 2$ )，那么就可推出平面 $\pi$ 上每一条直线都正好包含 $(n+1)$ 个点，及每一个点正好是 $(n+1)$ 条直线的交点，进一步，还可断定这平面恰包含 $(n^2+n+1)$ 条直线。

一个很简单的种树游戏，竟能把我们带进近代数学的一些课题上来，这也许就是数学游戏耐人寻味的地方。