

## Отсечение

Быковских Дмитрий Александрович

19.10.2024

## Отсечение Clipping

Отсечение – это процесс, связанный с выделением и визуализацией фрагмента плоской или пространственной сцены, расположенного внутри (внутреннее отсечение) или, наоборот, вне (внешнее отсечение) некоторой соответственно двумерной или трехмерной отсекающей фигуры (отсекателя). Оставшаяся часть сцены при этом игнорируется, т.е. визуализации не подлежит.

Изображение формируется на основе связанных вершин.

## Culling и Clipping

2024-10-19

## Отсечение

└─ Отсечение

### Отсечение

Clipping

Отсечение – это процесс, связанный с выделением и визуализацией фрагмента плоской или пространственной формы, расположенного внутри (внутреннее отсечение) или, наоборот, вне (внешнее отсечение) некоторой соответственно двумерной или трехмерной отскакивающей фигуры (отскакивания). Оставшаяся часть сцены при этом игнорируется т.е. визуализации не подлежит.

Изображение формируется на основе связанных вершин.

Culling и Clipping

На этом этапе могут решаться следующие задачи

1. Визуализация определенной части сцены, т.е. применяется для удаление невидимых линий и поверхностей;
2. Применение в алгоритмах построения теней.

## Свойства

1. двумерное или трехмерное;
2. регулярная (например, прямоугольник, параллелепипед) или нерегулярная структура (отсекатель);
3. внутреннее и/или внешнее.

# Алгоритм Коэна и Сазерленда (Cohen-Sutherland algorithm)

## Двумерное отсечение

Рассматривается случай с параллельными границами, которые также параллельны осям координат.

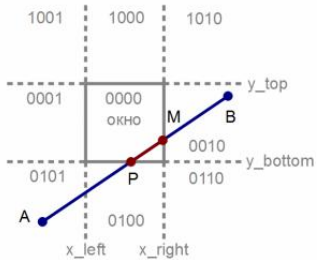


Рис. 1: Схема отсечения

Должно выполняться условие

$$\begin{cases} x_l \leq x \leq x_r \\ y_b \leq y \leq y_t \end{cases}$$

Таблица 1: таблица кодов

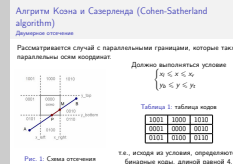
1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110

т.е., исходя из условия, определяются бинарные коды, длиной равной 4.

## Отсечение

2024-10-19

Алгоритм Коэна и Сазерленда (Cohen-Sutherland algorithm)



Для отрезков получаются следующие коды:

- 0000 = 0000, виден
- 1010 = 0010, не виден
- 0000 = 0000, частично виден
- 0001 = 0000, частично виден
- 0000 = 0000, частично виден
- 0001 = 0000, не виден

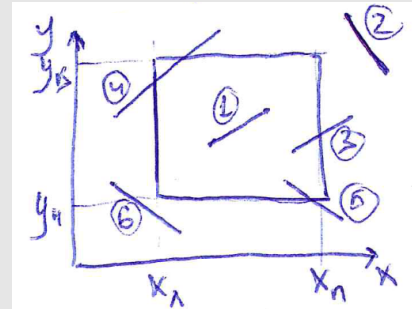


Рис. 2: Схема с различными случаями

# Алгоритм Коэна и Сазерленда

Cohen-Sutherland algorithm

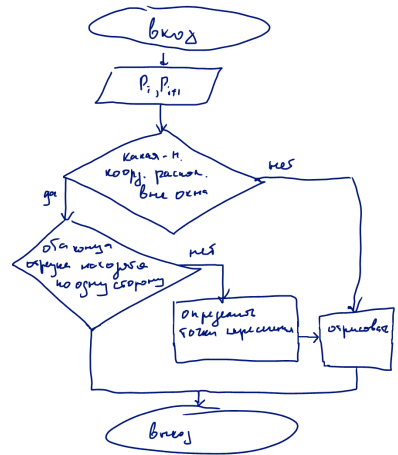


Рис. 3: Условный алгоритм двумерного отсечения

2024-10-19

## Отсечение

└ Алгоритм Коэна и Сазерленда

Алгоритм Коэна и Сазерленда  
Cohen-Sutherland algorithm

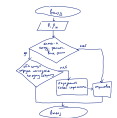


Рис. 3: Условный алгоритм двумерного отсечения

# Поиск точки пересечения

Рассмотрим задачу пересечения двух отрезков (двух прямых). Пусть даны координаты отрезка  $P_a(x_a, y_a)$  и  $P_b(x_b, y_b)$ . Тогда требуется решить системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-x_a}{x_b-x_a} = \frac{y-y_a}{y_b-y_a} \\ \text{уравнение границы} \end{cases}$$

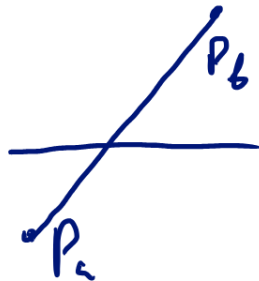


Рис. 4: Схема пересечения отрезка и отсекателя

2024-10-19

## Отсечение

### Поиск точки пересечения

#### Уравнения границ

$$x = x_l$$

$$x = x_r$$

$$y = y_b$$

$$y = y_t$$

#### Определение второй координаты т. пересечения

$$x_l : y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} (x_l - x_a)$$

$$x_r : y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} (x_r - x_a)$$

$$y_b : x = x_a + \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} (y_b - y_a)$$

$$y_t : x = x_a + \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} (y_t - y_a)$$

При поиске т. пересечения с некоторыми границами отсекателя точки пересечения могут м.б. не обнаружены.

Поиск точки пересечения

Рассмотрим задачу пересечения двух отрезков (двух прямых). Пусть даны координаты отрезка  $P_a(x_a, y_a)$  и  $P_b(x_b, y_b)$ . Тогда требуется решить системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-x_a}{x_b-x_a} = \frac{y-y_a}{y_b-y_a} \\ \text{уравнение границы} \end{cases}$$



Рис. 4: Схема пересечения отрезка и отсекателя

# Поиск точки пересечения

Или может возникнуть следующая проблема...

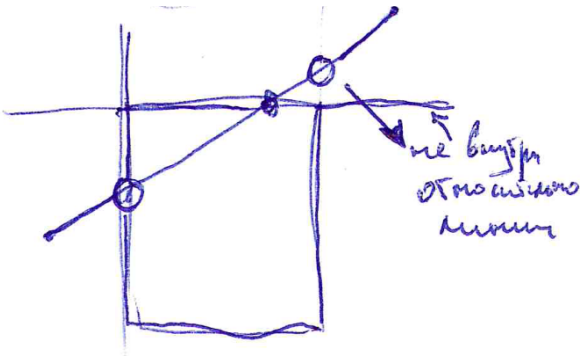


Рис. 5: Случай пересечения 3х и более точек

2024-10-19

## Отсечение

└ Поиск точки пересечения

Примечание. Существует также аппаратная реализация, основанная на методе половинного деления отрезка, т.е. побитового свига.



# Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)

## Отсечение двумерного отрезка выпуклой областью

Пусть даны отрезка  $P_1$  и  $P_2$ .  
Тогда представим в параметрическом виде:  
 $P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t$ , где  $0 \leq t \leq 1$   
или можно расписать подробнее:

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Пусть выпуклая область (окно) задано набором точек  $f_j$ . Тогда две смежные точки  $f_j$  и  $f_{j+1}$  образуют отсекающую линию, у которой можно вычислить нормаль  $n_j$ .

2024-10-19

## Отсечение

### └ Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)

Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)  
Отсечение двумерного отрезка выпуклой областью

Пусть даны отрезка  $P_1$  и  $P_2$ .  
Тогда представим в параметрическом виде:  
 $P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t$ , где  $0 \leq t \leq 1$   
или можно расписать подробнее:

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Пусть выпуклая область (окно) задано набором точек  $f_j$ . Тогда две смежные точки  $f_j$  и  $f_{j+1}$  образуют отсекающую линию, у которой можно вычислить нормаль  $n_j$ .

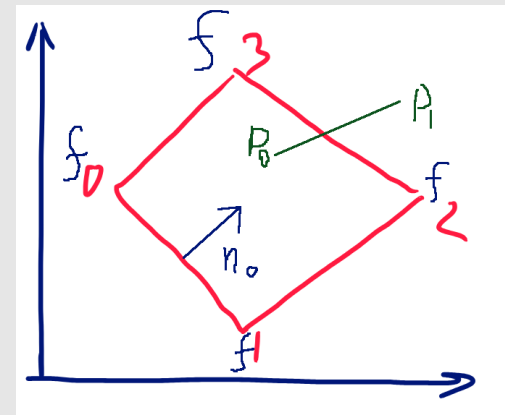


Рис. 6: Схема

# Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)

## Отсечение двумерного отрезка выпуклой областью

Для простоты понимания рассмотрим случай плоского выпуклого многоугольника.

Суть алгоритма заключается в следующем условии

$$n_j[P_i(t)-f_j] \begin{cases} < 0, & \text{т. находится снаружи, т.к. вектор направлен наружу} \\ = 0, & \text{т. лежит на границе, т.к. вектор перпендикулярен} \\ > 0, & \text{т. находится внутри, т.к. вектор направлен внутрь} \end{cases},$$

где  $j$  — номер точки границы;  $i$  — номер отрезка;  $n_j$  — нормаль границы;  $f_j$  — точка выпуклой области;  $P_i(t)$  — параметрическое уравнение отрезка.

Примечание.

Нормировать вектора необязательно, т.к. интересен только знак.

2024-10-19

## Отсечение

### Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)

Скалярное произведение векторов

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y$$

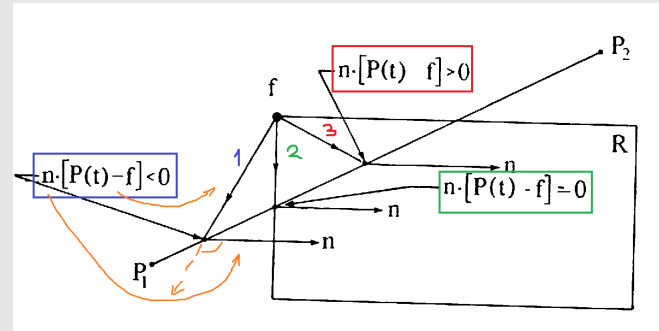


Рис. 7: Другая схема

Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)  
Отсечение двумерного отрезка выпуклой областью

Для простоты понимания рассмотрим случай плоского выпуклого многоугольника.  
Суть алгоритма заключается в следующем условии

$$n_j[P_i(t)-f_j] \begin{cases} < 0, & \text{т. находится снаружи, т.к. вектор направлен наружу} \\ = 0, & \text{т. лежит на границе, т.к. вектор перпендикулярен} \\ > 0, & \text{т. находится внутри, т.к. вектор направлен внутрь} \end{cases},$$

где  $j$  — номер точки границы;  $i$  — номер отрезка;  $n_j$  — нормаль границы;  $f_j$  — точка выпуклой области;  $P_i(t)$  — параметрическое уравнение отрезка.  
Примечание.  
Нормировать вектора необязательно, т.к. интересен только знак.



# Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)

## Отсечение двумерного отрезка выпуклой областью

Рассмотрим пример.

Дано:  
 $P_1(6, -2), P_2(10, 1).$   
 $F_1(0, 0), F_2(8, 4).$

Найти:

точку пересечения

Решение:

Составим параметрическое уравнение отрезка

$$\begin{cases} x(t) = 6 + (10 - 6)t \\ y(t) = -2 + (1 + 2)t \end{cases}$$

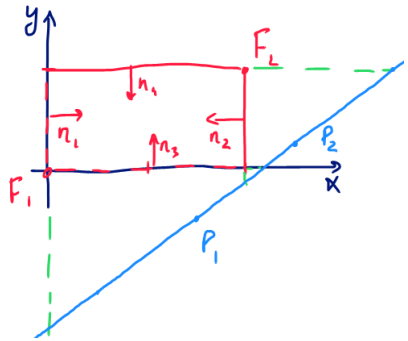


Рис. 8: Иллюстрация к примеру

2024-10-19

## Отсечение

### Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)

Алгоритм Кируса-Бека (Cyrus-Beck)  
Отсечение двумерного отрезка выпуклой областью

Рассмотрим пример.

Дано:  
 $P_1(6, -2), P_2(10, 1).$   
 $F_1(0, 0), F_2(8, 4).$

Найти:  
точку пересечения

Решение:  
Составим параметрическое уравнение отрезка

$$\begin{cases} x(t) = 6 + (10 - 6)t \\ y(t) = -2 + (1 + 2)t \end{cases}$$



Рис. 8: Иллюстрация к примеру

№	$n_j$	$F_j$	$P_i(t) - F_j$	$n_j \cdot (P_i(t) - F_j)$	$t$
1	$(1, 0)$	$(0, 0)$	$(6t + 4, -2 + 3t)$	$(6t + 4)$	$-3/2$
2	$(-1, 0)$	$(8, 4)$	$(-2t + 4, -6 + 3t)$	$2t - 4$	$1/2$
3	$(0, 1)$	$(0, 0)$	$(6t + 4, -2 + 3t)$	$-2 + 3t$	$2/3$
4	$(0, -1)$	$(8, 4)$	$(-2t + 4, -6 + 3t)$	$6 - 3t$	$2$

№	$n_j \cdot (P_i(t) - F_j)$	$t = 1/2$	$t = 2/3$
1	$(6t + 4)$	8	$> 0$
2	$2t - 4$	0	$< 0$
3	$-2 + 3t$	-0.5	
4	$6 - 3t$		

Параметр  $t$  должен принадлежать отрезку  $[0, 1]$ .

Поэтому отбрасываются случаи  $t = -3/2$  и  $t = 2$ .

Далее при подстановке каждого значения параметра  $t$  в каждое уравнение скалярное произведение не должно быть отрицательным.

# Выпуклость многоугольника

Как определить выпуклость многоугольника?

Для этого используется псевдоскалярное произведение нормалей смежных граней

$$n_i \vee n_{i+1} = \begin{vmatrix} n_{x,i} & n_{y,i} \\ n_{x,i+1} & n_{y,i+1} \end{vmatrix}$$

При обходе против часовой стрелки

$$n_i \vee n_{i+1} \begin{cases} \geq 0, & \text{выпуклый} \\ < 0, & \text{вогнутый} \end{cases}$$

Аналогичным образом формулируется по часовой стрелки при этом знаки меняются наоборот.

2024-10-19

Отсечение

└ Выпуклость многоугольника

Выпуклость многоугольника

Как определить выпуклость многоугольника?  
Для этого используется псевдоскалярное произведение нормалей смежных граней

$$n_i \vee n_{i+1} = \begin{vmatrix} n_{x,i} & n_{y,i} \\ n_{x,i+1} & n_{y,i+1} \end{vmatrix}$$

При обходе против часовой стрелки

$$n_i \vee n_{i+1} \begin{cases} \geq 0, & \text{выпуклый} \\ < 0, & \text{вогнутый} \end{cases}$$

Аналогичным образом формулируется по часовой стрелки при этом знаки меняются наоборот.

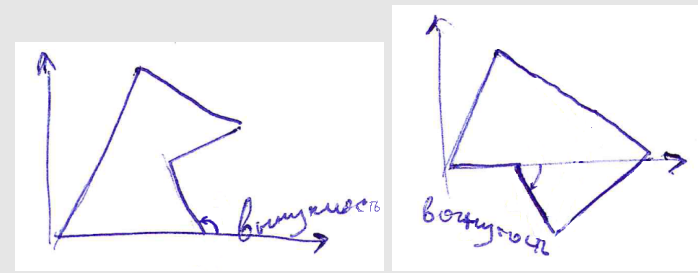


Рис. 9: Пример определения вогнутой области

Примечание.

Для таких областей тоже можно строить, но нужно их разбивать на выпуклые области.

# Трёхмерное отсечение для параллелепипеда

Представленный алгоритм  
Коэна-Сазерленда можно легко  
адаптировать для трёхмерного  
случая, расширив кодовую  
бинарную последовательность для  
точки до 6 бит.

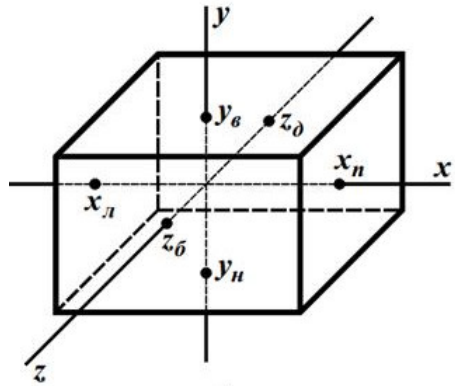


Рис. 10: Прямоугольный  
параллелепипед

2024-10-19

Отсечение

└ Трёхмерное отсечение

Для точек отрезков  $P_i(x, y, z)$ , рисуемых на экране, должно  
выполняться следующее условие:

$$\begin{cases} x_l \leq x \leq x_r \\ y_b \leq y \leq y_t \\ z_n \leq z \leq z_f \end{cases}$$



# Трехмерное отсечение

для усеченной пирамиды

Рассмотрим трехмерное отсечение для усеченной пирамиды.

Каноническая форма:

$$x_l = -1, x_r = 1,$$

$$y_b = -1, y_t = 1,$$

$$z_n = a, z_f = 1,$$

$$z_c = 0,$$

$$\text{где } 0 < a < 1.$$

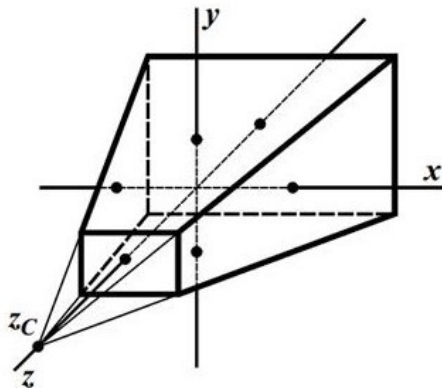


Рис. 11: Усеченная пирамида

2024-10-19

Отсечение

└ Трехмерное отсечение

Этот вариант актуален для перспективного проецирования.

Трехмерное отсечение  
для усеченной пирамиды

Рассмотрим трехмерное отсечение для усеченной пирамиды. Каноническая форма:  
 $x_l = -1, x_r = 1,$   
 $y_b = -1, y_t = 1,$   
 $z_n = a, z_f = 1,$   
 $z_c = 0,$   
где  $0 < a < 1$ .

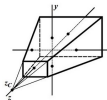


Рис. 11: Усеченная пирамида

# Трехмерное отсечение

$$x = \frac{z - z_c}{z_f - z_c} x_r = z\alpha_1 + \alpha_2,$$

где  $\alpha_1 = \frac{x_r}{z_f - z_c}$ ,  $\alpha_2 = -\alpha_1 z_c$ .

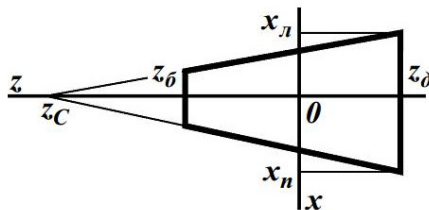


Рис. 12: Проекция вида сверху пирамиды

2024-10-19

## Отсечение

### Трехмерное отсечение

$$f_r = x - z\alpha_1 - \alpha_2 \begin{cases} > 0, & \text{точка расположена правее плоскости отсечения} \\ = 0, & \text{точка принадлежит плоскости отсечения} \\ < 0, & \text{точка расположена левее плоскости отсечения} \end{cases},$$

где  $\alpha_1 = \frac{x_r}{z_f - z_c}$ ,  $\alpha_2 = -\alpha_1 z_c$ .

$$f_l = x - z\beta_1 - \beta_2 \begin{cases} > 0, & \text{точка расположена правее плоскости отсечения} \\ = 0, & \text{точка принадлежит плоскости отсечения} \\ < 0, & \text{точка расположена левее плоскости отсечения} \end{cases},$$

где  $\beta_1 = \frac{x_l}{z_f - z_c}$ ,  $\beta_2 = -\beta_1 z_c$ .

Трехмерное отсечение

$$x = \frac{z - z_c}{z_f - z_c} x_r = z\alpha_1 + \alpha_2,$$

где  $\alpha_1 = \frac{x_r}{z_f - z_c}$ ,  $\alpha_2 = -\alpha_1 z_c$ .

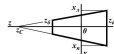


Рис. 13: Проекция вида сверху пирамиды

# Трехмерное отсечение усеченной пирамиды

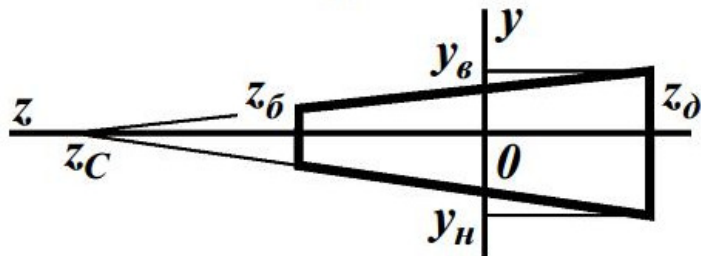


Рис. 13: Проекция вида сбоку пирамиды

Отсечение

2024-10-19

└ Трехмерное отсечение усеченной пирамиды

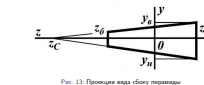


Рис. 13: Проекция вида сбоку пирамиды

$$f_t = y - z\gamma_1 - \gamma_2 \begin{cases} > 0, & \text{точка расположена выше плоскости отсечения} \\ = 0, & \text{точка принадлежит плоскости отсечения} \\ < 0, & \text{точка расположена ниже плоскости отсечения} \end{cases},$$

где  $\gamma_1 = \frac{y_t}{z_f - z_c}$ ,  $\gamma_2 = -\gamma_1 z_c$ .

$$f_b = y - z\delta_1 - \delta_2 \begin{cases} > 0, & \text{точка расположена выше плоскости отсечения} \\ = 0, & \text{точка принадлежит плоскости отсечения} \\ < 0, & \text{точка расположена ниже плоскости отсечения} \end{cases},$$

где  $\delta_1 = \frac{y_b}{z_f - z_c}$ ,  $\delta_2 = -\delta_1 z_c$ .

# Трехмерное отсечение усеченной пирамиды

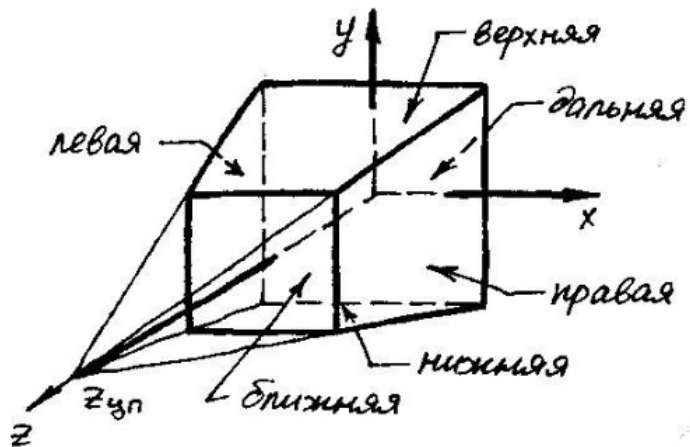


Рис. 14: Проекция вида сбоку пирамиды

2024-10-19

## Отсечение

### Трехмерное отсечение усеченной пирамиды



$$f_n = z - z_n \begin{cases} > 0, & \text{точка расположена перед плоскостью отсечения} \\ = 0, & \text{точка принадлежит плоскости отсечения} \\ < 0, & \text{точка расположена за плоскостью отсечения} \end{cases} .$$

$$f_f = z - z_f \begin{cases} > 0, & \text{точка расположена перед плоскостью отсечения} \\ = 0, & \text{точка принадлежит плоскости отсечения} \\ < 0, & \text{точка расположена за плоскостью отсечения} \end{cases} .$$

# Комбинированное отсечение

Задачи внутреннего отсечения легко адаптировать к решению задач внешнего отсечения.

Результаты внешнего отсечения могут быть получены путем инвертирования (обращения) результатов внутреннего отсечения:

- отрезки или их части, которые при внутреннем отсечении определяются как видимые, при внешнем отсечении на экран не выводятся,
- и, наоборот, отрезки или их части, которые алгоритмом внутреннего отсечения игнорируются, при внешнем отсечении идентифицируются как видимые и визуализируются.

Комбинированное отсечение — комбинация внутреннего и внешнего отсечений.

Комбинированное отсечение позволяет реализовать также внутреннее или внешнее отсечение графических объектов невыпуклыми (частично вогнутыми) отсекающими.

2024-10-19

## Отсечение

### Комбинированное отсечение

Характерный пример комбинированного отсечения наблюдается на экране компьютерного дисплея при многооконном режиме его работы под управлением операционной системы.

Содержимое рабочей области пассивного окна 3 подвергается внутреннему отсечению прямоугольником, образованным границами этой области; само окно 3 со всем содержимым подвергается внешнему отсечению окнами 1 и 2, имеющими приоритеты выше, чем окно 3.

#### Комбинированное отсечение

Задачи внутреннего отсечения легко адаптировать к решению задач внешнего отсечения.  
Результаты внешнего отсечения могут быть получены путем инвертирования (обращения) результатов внутреннего отсечения:  
• отрезки или их части, которые при внутреннем отсечении определяются как видимые, при внешнем отсечении на экран не выводятся,  
• и, наоборот, отрезки или их части, которые алгоритмом внутреннего отсечения игнорируются, при внешнем отсечении идентифицируются как видимые и визуализируются.  
Комбинированное отсечение — комбинация внутреннего и внешнего отсечений.  
Комбинированное отсечение позволяет реализовать также внутреннее или внешнее отсечение графических объектов невыпуклыми (частично вогнутыми) отсекающими.

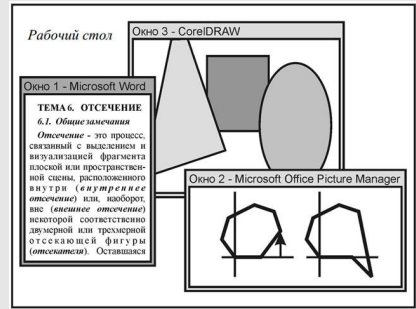


Рис. 15: Многооконный режим работы