# Поверхности

Быковских Дмитрий Александрович

02.11.2024

Сплайны

2024-11-01

Поверхности

Быновских Дмитрий Александрович

02.11.2024

4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□

1 / 12

 Быковских Д.А.
 Сплайны
 02.11.2024

## Введение

Традиционный способ построения/представления объемной модели с помощью ортогональной проекции.

Ортогональная проекция — сеть ортогональных кривых, используемых для изображения трехмерных объектов на плоскости.

Такую модель удобно исследовать с целью получения различных "физических" характеристик: размер, объем, площадь поверхности, угол кривизны и др.

#### Причины

Быковских Д.А

- Создание объемных моделей с нуля в соответствии с концептуальными и дизайнерскими требованиями.
- Реконструкция трехмерной модели может потребоваться на основе данных, полученных из сканирования реальных объектов (медицина);

Сплайны

02.11.2024

Сплайны

-Введение

Ортогональная проекция — сеть ортогональных кривых, используем оля изображения трехмерных объектов на плоскости

Такую модель удобно исследовать с целью получения различны физических" характеристик: размер, объем, площадь поверхност

- концептуальными и дизайнерскими тоебованиями.
- Реконструкция трехмерной модели может потребоваться на основе данных, полученных из сканирования реальных объекто

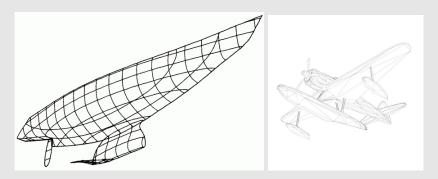


Рис. 1: Представление каркасных моделей: с помощью ортогональных проекций (слева); с помощью триангуляции (справа)

## Отображение параметрических поверхностей

Поверхность удобнее отображать из параметрического двумерного пространства uv в трехмерное объективное пространство xyz. Параметры  $(u,v) \to (x,y,z)$ , где  $u,v \in [0,1]$ . Задача.

Построить поверхность согласно его параметрическому представлению.

$$\begin{cases} x(u, v) = 3u + v \\ y(u, v) = 2u + 3v + uv \\ z(u, v) = 0 \end{cases}$$

Сплайны

2024

Отображение параметрических поверхностей

Отображение параметрических поверхностей

Повероность удобнее отображать из параметрического двумерного пространства uv в трехмерное объективное пространство xyz. Параметры  $(u, v) \to (x, y, z)$ , где  $u, v \in [0, 1]$ .

ероность согласно его параметрическому п



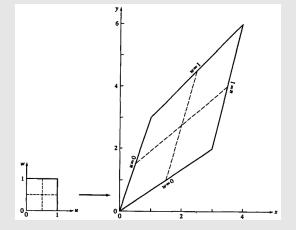


Рис. 2: Иллюстрация к примеру: параметрическое пространство (слева) и объектное пространство (справа)

3 / 12

### Билинейная поверхность

Билинейная поверхность конструируется из 4x угловых точек: P(0,0), P(1,0), P(0,1), P(1,1).

Любая точка поверхности S(u, v) определяется линейной интерполяцией между противоположными границами единичного квадрата.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix},$$

Сплайны

где  $u, v \in [0, 1]$ .

02.11.2024

4 / 12

2024-1 -Билинейная поверхность

 $\begin{bmatrix} 1 - u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$ где  $u, v \in [0, 1].$ 

Билинейная поверхность

$$S(u,v) = P(0,0)(1-u)(1-v) + P(0,1)(1-u)v + P(1,0)u(1-v) + P(1,1)uv$$

Примечание.

Сплайны

Легко проверить, подставив значения в параметры u, v.

При этом координаты точек P можно задавать произвольным образом.

Быковских Д.А

## Билинейная поверхность

Пример

Задача.

Найти т. P(0.5, 0.5) билинейной поверхности, заданной координатами:  $P(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $P(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Решение:

$$S(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = (1-u)v + u(1-v) \\ y(u,v) = (1-u)v + uv \\ z(u,v) = (1-u)(1-v) + (1-u)v \end{cases}$$

Ответ:

$$P(0.5, 0.5) = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]$$

Сплайны

Билинейная поверхность
Приме

Задага. P(5.5.5) бальныйная бизерности, заданнай опервиости, заданнай опервиости. заданнай опе

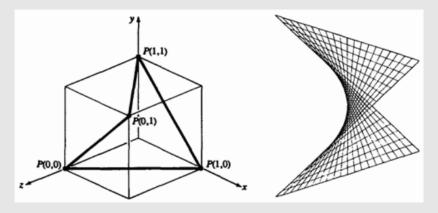


Рис. 3: Билинейная поверхность: определяющие угловые точки (слева); поверхность (справа)

## Линейчатые поверхности

Линейчатая поверхность — поверхность, образованная движением прямой линии.

Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими.

Каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие, называется направляющей кривой.

Линейчатая поверхность образуется при движении прямой линии вдоль направляющей с одной стороны степенью свободы.

- Линейчатые поверхности: плоскость, конусы, цилиндры.
- Двулинейчатые поверхности: однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид.

Такие поверхности важны в промышленности, при построении техники.

Сплайны

#### –Линейчатые поверхности

нейчатая поверхность образуется при движении прямой лина оль направляющей с одной стороны степенью свобода

днополостный гиперболомд, гиперболический параболом

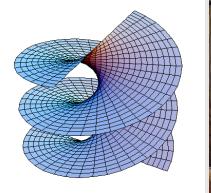




Рис. 4: Линейчатые поверхности: геликоид (слева); однополостный гиперболоид (справа)

Быковских Д.А

Сплайны

02.11.2024

## Линейчатые поверхности

Один способ представления линейчатой поверхности.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$$

где P(u,0) = f(u), P(u,1) = g(u).

Другой способ представления линейчатой поверхности.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,v) \\ P(1,v) \end{bmatrix} = P(0,v)(1-u) + P(1,v)u,$$

Сплайны

где 
$$P(0, v) = f(v), P(1, v) = g(v).$$

Быковских Д.А

02.11.2024

7 / 12

Сплайны

2024-11-01

—Линейчатые поверхности

Линейчатые поверхности

rae P(u, 0) = f(u), P(u, 1) = g(u).

 $S(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0, v) \\ P(1, v) \end{bmatrix} = P(0, v)(1 - u) + P(1, v)u$ где P(0, v) = f(v), P(1, v) = g(v).

# Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$$

где

$$P(u,0) = [\cos(u-\varphi) \sin(u-\varphi) - 1],$$

$$P(u,1) = [\cos(u+\varphi) \sin(u+\varphi) 1].$$

В основе лежат две окружности (направляющие).

В зависимости от дополнительного параметра  $\varphi$  получаются следующие типы поверхностей:

- при  $\varphi = 0$  получается цилиндр  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- при  $\varphi = \pi/2$  получается конус  $x^2 + y^2 = z^2$ ;
- при  $0<\varphi<\pi/2$  получается однополостный гиперболоид  $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ , где  $a=\cos\varphi$  ,  $c=\cot\varphi$ .

□ ▶ ◀疊 ▶ ◀ Ē ▶ ◆ Ē ● ⑨ Q @

Сплайны

2024-11-01

 Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус Вимер

 $S(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u, 0) \\ P(u, 1) \end{bmatrix} = P(u, 0)(1 - v) + P(u, 1)v$ 

 $P(u,0) = [\cos(u-\varphi) \sin(u-\varphi) - 1],$   $P(u,1) = [\cos(u+\varphi) \sin(u+\varphi) 1].$ By companying the companying (which is a second of the company of the compan

В зависимости от дополнительного параметра  $\varphi$  получаются следующие типы поверхностей:

• πριτ φ = 0 ποπηνώσετοι цилиндр  $x^2 + y^2 = 1$ ;

 $\bullet$  при  $\varphi=\pi/2$  получается конус  $\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2=\mathbf{z}^2;$ 

• при  $0 < \varphi < \pi/2$  получается однополостный гиперболоку  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = 1$ , гае  $a = \cos \varphi$  ,  $c = \cot \varphi$ .

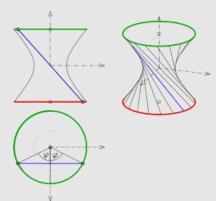


Рис. 5: Однополостный гиперболоид, где  $\varphi=\pi/3$ 

Быковских Д.А. Сплайны 02.11.2024 8 / 12

## Бикубическая поверхность Кунса

В основе лежит кубическое уравнение, описывающие поведение граничной кривой

$$P(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3,$$

где  $t \in [0, 1]$ .

Каждая из четырех граничных кривых P(u,0), P(u,1), P(0,v), P(1,v)задается следующим образом:

$$P(t) = [T][N][G] = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P'_0 \\ P'_1 \end{bmatrix},$$

где  $t \in [0,1]$  (т.е. t- это u, v), а  $P_0, P_1, P_0', P_1'-$  координатные и касательные векторы.

Сплайны

2024-1

Бикубическая поверхность Кунса

Бикубическая поверхность Кунса

 $P(t) = B_0 + B_1t + B_2t^2 + B_3t^3$ ,

Тогда смешивающие функции имеют вид:

$$[F] = [T][N] = \begin{bmatrix} F_0(t) \\ F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Бикубическая поверхность Кунса

$$S(u, v) = [U][N][P][N]^{T}[V],$$

где 
$$u = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T$$
 ,  $v = \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}^T$  .

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} F_0(u) \\ F_1(u) \\ F_2(u) \\ F_3(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{bmatrix}$$

где  $u, v \in [0, 1]$ .

$$[P] = egin{bmatrix} {\sf угловые} & {\sf координатные} & {\sf векторы} & {\it v-} {\sf касательныe} & {\sf векторы} & {\sf векторы} & {\sf кручения} & {\sf векторы} & {\sf кручения} & {\sf векторы} & {\sf кручения} & {\sf kproposition} & {\sf k$$

Сплайны

-Бикубическая поверхность Кунса



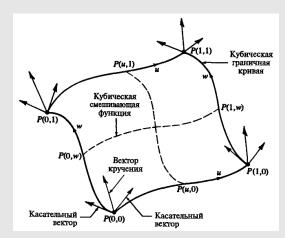


Рис. 6: Геометрия для куска бикубической поверхности Кунса

## Поверхность Безье

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} B_{n,i}(u) K_{m,j}(v),$$

где глобальные базисные функции (многочлены Бернштейна) имеют вид

$$B_{n,i}(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}$$
  
 $K_{m,j}(v) = C_m^j v^j (1-v)^{m-j}$ 

Сплайны

2024-1

□Поверхность Безье

Roseptocots. Desire  $S(u,v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij}B_{ij}(u)K_{inj}(v),$  can redainment fastechen dynomen (incorrection Esperantisho) ensect  $B_{inj}(u) = C_{inj}^{(i)}(1-u)^{n-i}$   $K_{inj}(v) = C_{inj}^{(i)}(1-u)^{n-i}$   $K_{inj}(v) = C_{inj}^{(i)}(1-u)^{n-i}$ 

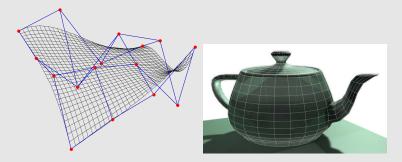


Рис. 7: Поверхность Безье: модель при n=m=3 (слева); чайник из Юты (справа)

Быковских Д.А. Сплайны 02.11.2024 11 / 12

## В-сплайн поверхность

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} N_{i,k}(u) K_{j,l}(v),$$

где  $N_{i,k}(u)K_{j,l}(v)$  локальные базисные функции, основанные на рекуррентных формулах Кокса-де Бура.

Сплайны

2024-11-0

-В-сплайн поверхность

 $S(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m F_{i,j} N_{i,k}(u) K_{j,j}(v),$   $N_{i,k}(u) K_{j,j}(v)$  локальные баземые функции, основанные н принятных формулых Комса-да Бура.

В-сплайн поверхность

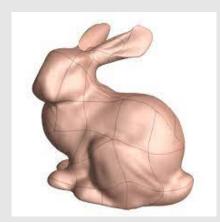


Рис. 8: В-сплайн поверхность



Быковских Д.А.

Сплайны

02.11.2024

12 / 12