

# Фракталы

Быковских Дмитрий Александрович

23.09.2023

# Фракталы

2023-09-23

Фракталы

Быковских Дмитрий Александрович

23.09.2023

- Введение
- Геометрические фракталы
- Алгебраические фракталы
- Стохастические фракталы

2023-09-23

## └ Содержание

# Содержание

- Введение
- Геометрические фракталы
- Алгебраические фракталы
- Стохастические фракталы



Рис. 1: Объекты живой природы

# Введение



Рис. 1: Объекты живой природы

## Фракталы

2023-09-23

### └ Введение

Воображение иссякает прежде природы.

Блез Паскаль

Многие формы природных объектов неправильны и фрагментированы.

Например, облака, горы, деревья и многое др.

Исследование этих объектов и неспособность их описать с помощью простых геометрических объектов привело к появлению фракталов.



Рис. 2: Benoit B. Mandelbrot (Nov. 1924 — Oct. 2010)



Рис. 2: Benoit B. Mandelbrot (Nov. 1924 — Oct. 2010)

## Фракталы

2023-09-23

## └ История фракталов

Бенуа Б. Мандельброт. является создателем термина "фрактал" и "фрактальной геометрии"

Термин "Фрактал" появился 1975 г.

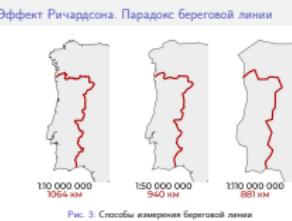
Произошло от лат. слова *fractus* — фрагментированный, дробный, ломанный.

"Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности"

"Все фигуры, которые я исследовал и назвал фракталами, в моем представлении обладали свойством быть нерегулярными, но самоподобными"

Мандельброт Б. "Геометрия природы".

Почему фракталы набрали такую популярность?



## Эффект Ричардсона. Парадокс береговой линии

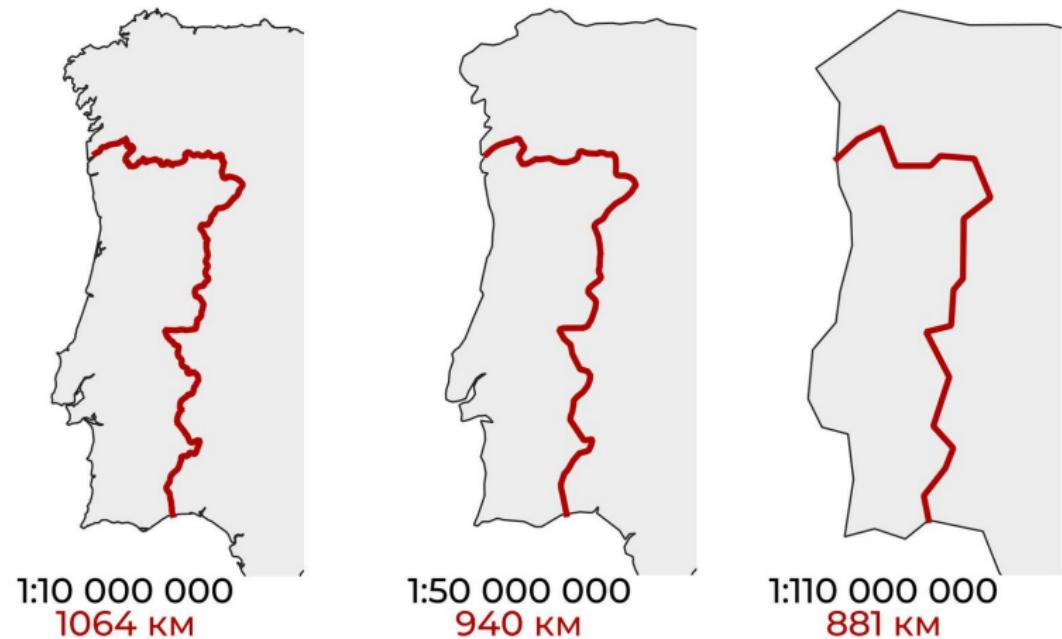


Рис. 3: Способы измерения береговой линии

## Фракталы

2023-09-23

### └ Эффект Ричардсона. Парадокс береговой линии

Как посчитать длину кривой между 2 точками?

$$L = RN = R(L/R)^D,$$

где

$D$  — фрактальная размерность;

$L$  — расстояние между двумя точками;

$RN$  — длина ломанного отрезка;

$R$  — длина шага с помощью, которого приблизительно пытаемся измерить расстояние.

Выводы:

Отсюда следует, что при  $l \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$

## Фрактальная размерность

$$d = - \lim_{I \rightarrow 0} \frac{\ln N(I)}{\ln I}$$

Понятие размерности связано с количеством пространственных измерений или степенью многомерности.

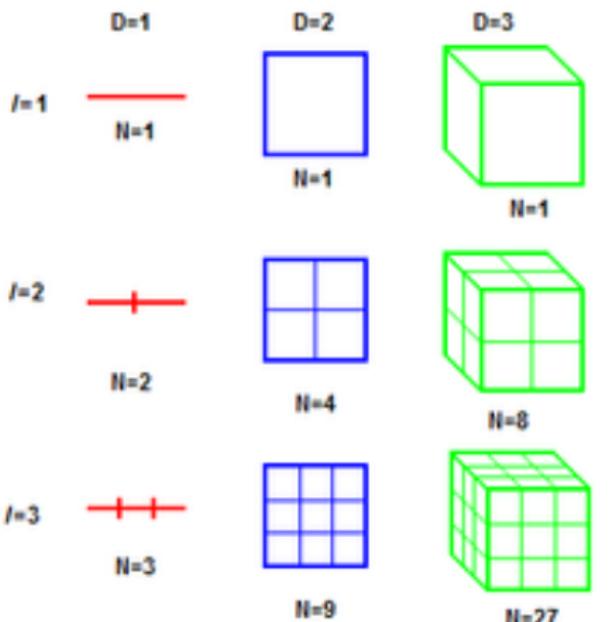


Рис. 4: Определение размерности и масштабирования

## Фракталы

## └ Фрактальная размерность

Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$\frac{1}{l^d} \approx N(l)$$

$$I^d \approx \frac{1}{N(I)}$$

$$d = \log_I I^d \approx \log_I \frac{1}{N(I)} = \frac{\ln \frac{1}{N(I)}}{\ln I} = \frac{\ln N(I)^{-1}}{\ln I} = -\frac{\ln N(I)}{\ln I}$$

$$d = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}$$

Примечание. Если  $d$  равняется 1, 2, 3, т.е.  $d \in N \cup 0$ , то величина  $d$  характеризует евклидову размерность.  
Но что будет, если величина  $l$  имеет не только целую часть, но и дробную, т.е.  $d \in Q$ ?

## Фракталы

- Структуры, которые представляются фракталами:
- Система рекуррентных функций на пространстве;
  - Стохастический алгоритм;
  - Итеративная система функций;
  - L-система (формальная грамматика);
  - Странный аттрактор (динамические системы);
  - Конечное правило разделения (рекурсивный способ деления двумерных фигур на меньшие части).

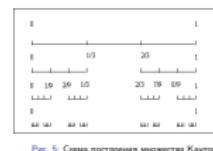
2023-09-23

## Способы задания фракталов

## Способы задания фракталов

Структуры, которые представляются фракталами:

- Система рекуррентных функций на пространстве;
- Стохастический алгоритм;
- Итеративная система функций;
- L-система (формальная грамматика);
- Странный аттрактор (динамические системы);
- Конечное правило разделения (рекурсивный способ деления двумерных фигур на меньшие части).



## Фракталы

2023-09-23

## └ Канторово множество (канторов дисконтинуум, канторова пыль)

Множество было описано Георгом Кантором в 1833 году.  
Пусть

$$E_0 = [0, 1]$$

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

...

Таким образом, множество Кантора строится пересечение отрезков

$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

Получается  $N = 2^n$  сегментов, где  $l_i = \frac{1}{3^n}$ .

$k$	$I$	$N(I)$
0	1	1
1	$1/3$	2
2	$1/9$	4
3	$3^{-3}$	$2^3$
$\dots$		
$n$	$3^{-n}$	$2^n$

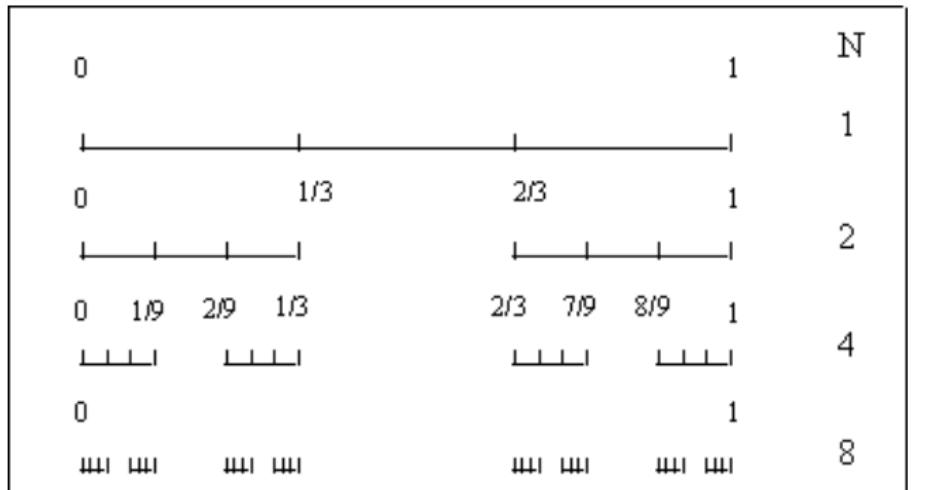


Рис. 5: Схема построения множества Кантора

Мера множества после удаления всех отрезков из исходного

$$\begin{aligned} L &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0 \end{aligned}$$

Фрактальная размерность

$$d = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{3^n}} = \log_3 2 \approx 0.6309 < 1$$

## Фракталы

2023-09-23

## └ Канторово множество

Рассмотрим последовательность

$$S_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$$

Эта последовательность является геометрической. Тогда сумму ряда можно вычислить по следующей формуле.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Видно, что  $b_1 = 1$ ,  $q = \frac{2}{3}$ . Тогда сумма ряда равняется

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

## Канторово множество

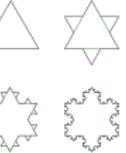


Рис. 6: Схема построения снежинки Коха

$k$	$I$	$N(I)$
0	1	3
1	$1/3$	12
2	$1/9$	48
$\dots$		
$n$	$3^{-n}$	$3 \cdot 4^n$

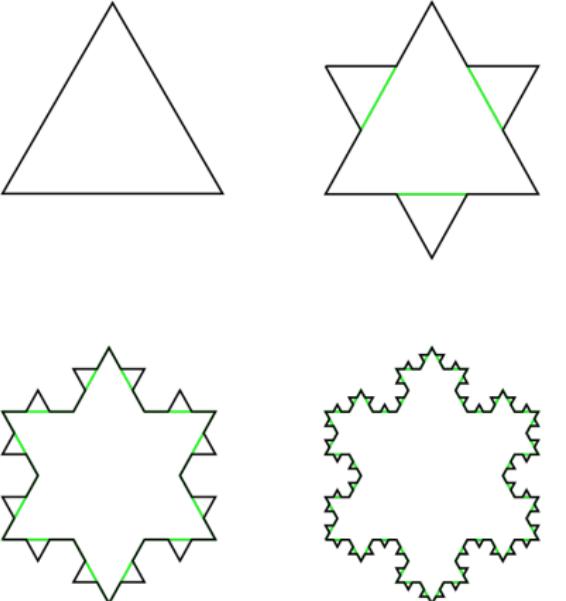


Рис. 6: Схема построения снежинки Коха

## Фракталы

2023-09-23

## Снежинка Коха

Множество было описано Кохом (Helge von Koch) в 1904 году.  
**Фрактальная размерность**

$$\begin{aligned}
 d &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln \frac{1}{3^n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3}{\ln 3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{\ln 4}{\ln 3} = \\
 &= \log_3 4 \approx 1.26186 > 1
 \end{aligned}$$



Рис. 7: Схема построения салфетки Серпинского

# Салфетка Серпинского (треугольник Серпинского)

$k$	$I$	$N(I)$
0	1	1
1	$1/2$	3
2	$1/4$	9
$\dots$		
$n$	$2^{-n}$	$3^n$

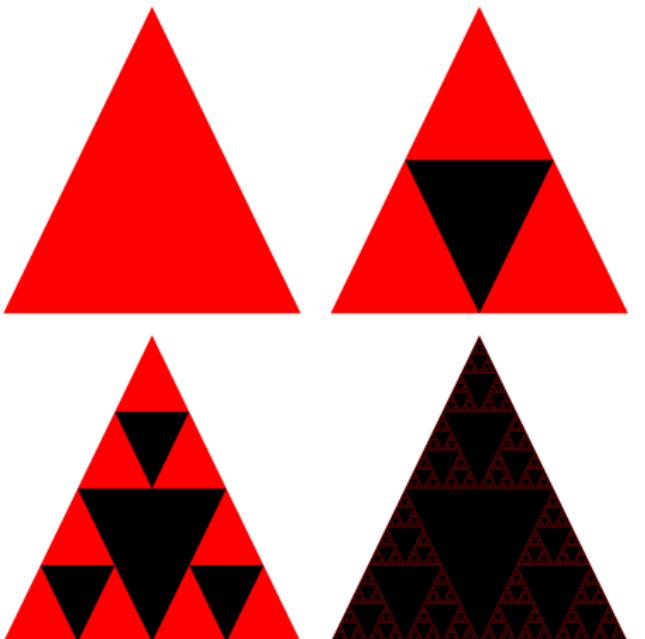


Рис. 7: Схема построения салфетки Серпинского

## Фракталы

2023-09-23

### Салфетка Серпинского (треугольник Серпинского)

Множество было описано Серпинским в 1916 году.

#### Площадь объекта

$$S = 1 - \frac{1}{4}(1 + \frac{3}{4} + \dots) = 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 0$$

#### Фрактальная размерность

$$d = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln \frac{1}{2^n}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \\ = \log_2 3 \approx 1.58496250072 > 1$$

Пусть задана рекуррентная функция в комплексной плоскости  $z_{n+1} = f(z_n)$ , где  $z_n \in \mathbb{Z}$ .  
Установим некоторое начальное значение  $z_0$  и рассмотрим последовательность вида  $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .  
В зависимости от начальных данных, т.е. от  $z_0$ , последовательность ведет себя по-разному. При  $n \rightarrow \infty$  возможны следующие значения функции:

- ①  $z_n \rightarrow \infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$ ;
- ②  $z_n = A$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ ;
- ③  $z_n = z_{n+\tau}$ , где  $\tau$  — период, т.е.  $z_n$  циклически принимает некоторый ряд значений.

2023-09-23

## └ Алгебраические фракталы

Операции над комплексными числами.

Сложение комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$ :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

Произведение комплексных чисел  $a + bi$  и  $c + di$ :

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac + bdi^2) + (bc + ad)i = (ac - bd) + (bc + ad)i. \end{aligned}$$

Рассмотрим производную такой функции:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Выполним ряд преобразований и в результате получим:

$$f(z + \Delta z) \approx f(z) + \Delta z f'(z).$$

Отсюда следует, что расстояние между точками можно задать через производную. Предположим, что существует неподвижная точка  $\hat{z}$  — корень уравнения функции, тогда, если

❶  $|f'(\hat{z})| < 1$ , то  $\hat{z}$  — притягивающая точка;

❷  $|f'(\hat{z})| > 1$ , то  $\hat{z}$  — отталкивающая точка;

❸  $|f'(\hat{z})| = 1$ , то  $\hat{z}$  — нейтральная точка.

# Алгебраические фракталы

Рассмотрим производную такой функции:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Выполним ряд преобразований и в результате получим:

$$f(z + \Delta z) \approx f(z) + \Delta z f'(z).$$

Отсюда следует, что расстояние между точками можно задать через производную. Предположим, что существует неподвижная точка  $\hat{z}$  — корень уравнения функции, тогда, если

❶  $|f'(\hat{z})| < 1$ , то  $\hat{z}$  — притягивающая точка;

❷  $|f'(\hat{z})| > 1$ , то  $\hat{z}$  — отталкивающая точка;

❸  $|f'(\hat{z})| = 1$ , то  $\hat{z}$  — нейтральная точка.

## Фракталы

2023-09-23

### └ Алгебраические фракталы

Должно выполняться условие Коши-Римана.

$$\frac{\partial f}{\partial a} + i \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

2023-09-23

└ Множество Мандельброта. Множество Жюлиа

Определение и название принадлежат французскому математику Адриену Дуади.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

где  $c$  — некоторая константа.

Характеристики множества Мандельброта:

- Кардиоида (периода);
- Иголоподобные антенны.

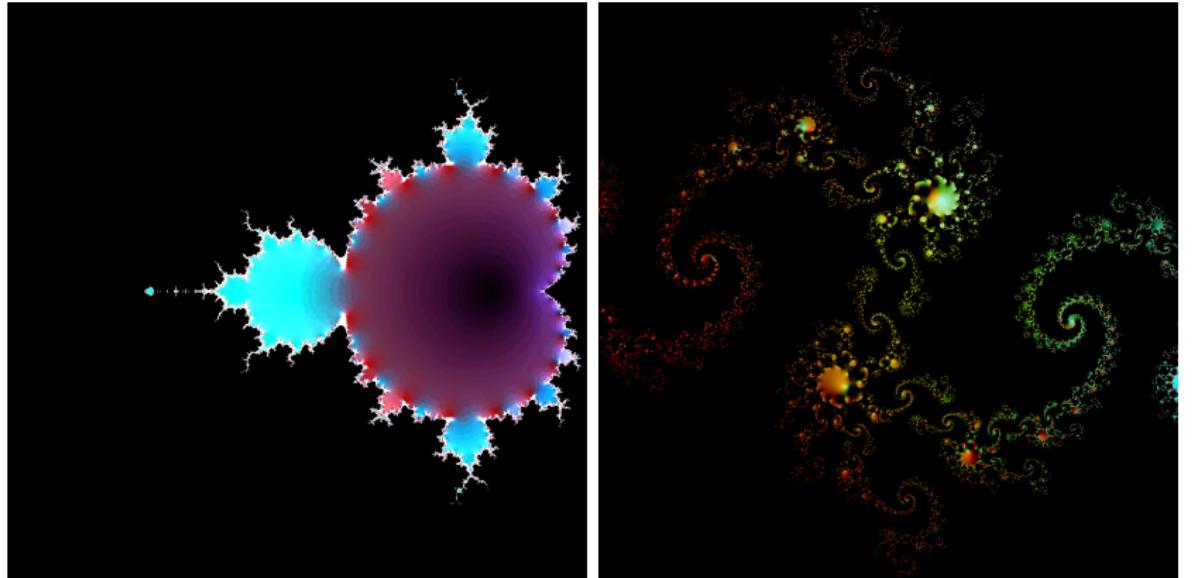


Рис. 8: Множество Мандельброта (слева) и Жюлиа (справа)

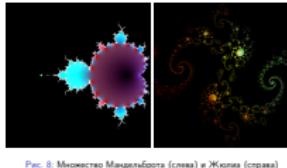


Рис. 8: Множество Мандельброта (слева) и Жюлиа (справа)

L-системы — тип формальной грамматики.  
L-система задается  $G = (V, \omega, P)$ , где

- $V$ (алфавит) — множество символов, содержащих как элементы, которые могут быть заменены (переменные), так и элементы, которые не могут быть заменены ("константы"или "терминальные символы");
- $\omega$  — (старт) строка символов из  $V$ , определяющая начальное состояние системы;
- $P$  — множество правил, определяющих, каким образом переменные могут быть заменены комбинациями констант и других переменных. Порождающее правило состоит из двух строк, прототип и преемник.

2023-09-23

## L-systems (L-системы)

Такой способ построения предложил в 1968 Аристид Линденмайер, венгерский биолог и ботаник из Уtrechtского университета. Он использовал L-системы для описания поведения клеток растений и моделирования процесса развития растения.

# L-systems (L-системы)

L-системы — тип формальной грамматики.

L-система задается  $G = (V, \omega, P)$ , где

- $V$ (алфавит) — множество символов, содержащих как элементы, которые могут быть заменены (переменные), так и элементы, которые не могут быть заменены ("константы"или "терминальные символы");
- $\omega$  — (старт) строка символов из  $V$ , определяющая начальное состояние системы;
- $P$  — множество правил, определяющих, каким образом переменные могут быть заменены комбинациями констант и других переменных. Порождающее правило состоит из двух строк, прототип и преемник.

2023-09-23

## └ L-systems (L-системы)

Примр. Множество Кантора

- переменные: A, B
- константы: нет
- старт: A
- правила:  $(A \rightarrow ABA), (B \rightarrow BBB)$

Пусть A означает «рисуем отрезок», а B означает «движемся».

## Пример. Множество Кантора

- переменные: A, B
- константы: нет
- старт: A
- правила:  $(A \rightarrow ABA), (B \rightarrow BBB)$

Пусть A означает «рисуем отрезок», а B означает «движемся».

2023-09-23

## L-systems (L-системы)

Пример. Треугольник Серпинского

- переменные:  $F, G$
- константы:  $+, -$
- старт:  $F - G - G$
- правила:  $(F \rightarrow F - G + F + G - F), (G \rightarrow GG)$
- угол:  $120^\circ$

Здесь  $F$  и  $G$  означают «рисуем отрезок»,  $+$  означает «поворнуть вправо на угол», а  $-$  означает «поворнуть влево на угол».

## L-systems (L-системы)

Пример. Треугольник Серпинского

- переменные:  $F, G$
- константы:  $+, -$
- старт:  $F - G - G$
- правила:  $(F \rightarrow F - G + F + G - F), (G \rightarrow GG)$
- угол:  $120^\circ$

Здесь  $F$  и  $G$  означают «рисуем отрезок»,  $+$  означает «поворнуть вправо на угол», а  $-$  означает «поворнуть влево на угол».

# Стохастические фракталы

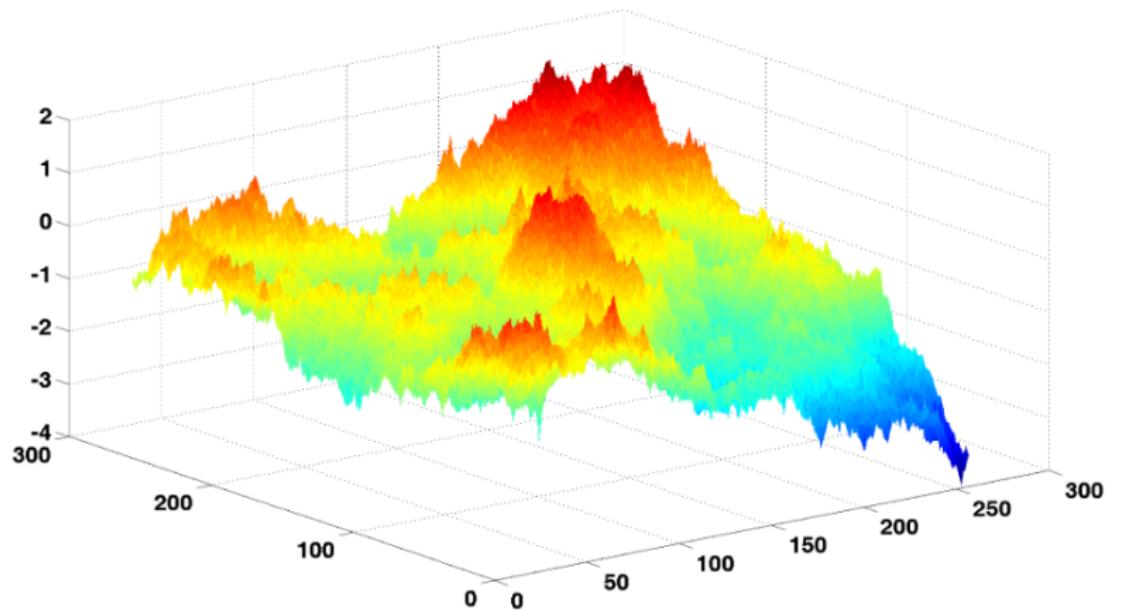


Рис. 9: Генерация обобщенного броуновского рельефа

## Фракталы

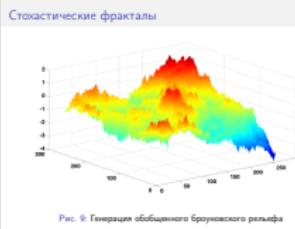
2023-09-23

### └ Стохастические фракталы

Стохастические фракталы являются известным классом фракталов. Они нашли широкое применение в области создания природных несимметричных объектов, таких как ландшафты, деревья и облака.

Способы построения

- алгоритм случайного блуждания;
- алгоритм Diamond-square.



# Построение салфетки Серпинского с помощью метода случайных итераций

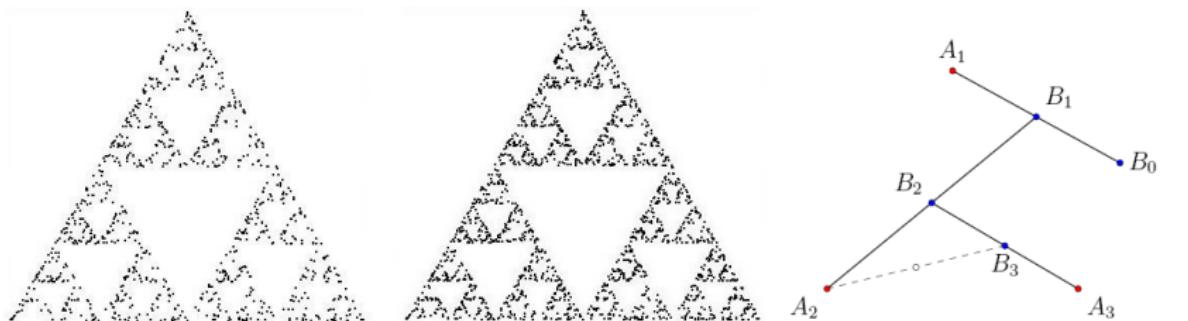


Рис. 10: Игра "Хаос"(слева) и алгоритм построения (справа)

## Фракталы

2023-09-23

### └ Построение салфетки Серпинского с помощью метода случайных итераций

Получается в результате случайного блуждания точки на плоскости. Этот способ называется «игрой Хаос». С его помощью можно построить и некоторые другие фракталы.

Суть «игры» такова.

На плоскости зафиксирован правильный треугольник  $A_1A_2A_3$ . Отмечают любую начальную точку  $B_0$ . Затем случайным образом выбирают одну из трех вершин треугольника и отмечают точку  $B_1$  — середину отрезка с концами в этой вершине и в  $B_0$  (на рисунке справа случайно выбиралась вершина  $A_1$ ).

Затем повторяют с точкой  $B_1$ , чтобы получить  $B_2$ . Потом получают точки  $B_3, B_4$ , и т. д.

Важно, чтобы точка «прыгала» случайным образом, то есть чтобы каждый раз вершина треугольника выбиралась случайно, независимо от того, что было выбрано в предыдущие шаги. Удивительно, что если отмечать точки из последовательности  $B_i$ , то вскоре начнет пропадать треугольник Серпинского.

Построение салфетки Серпинского с помощью метода случайных итераций

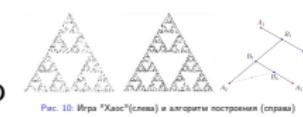


Рис. 10: Игра "Хаос"(слева) и алгоритм построения (справа)

2023-09-23

## └ Алгоритм Diamond-square

Описание алгоритма было впервые представлено в 1982 г (by Fournier, Fussell and Carpenter at SIGGRAPH).

### Алгоритм Diamond-square

1. Инициализация угловых точек. Присваивание им значений высот (например, выбором случайных чисел).
2. Шаг diamond. Нахождение срединной точки, присваивание ей значения, на основе среднего от угловых, плюс случайное число.
3. Шаг square. Нахождение срединных точек для ромбов отмеченных черными точками (на этом шаге, по одной точке каждого ромба выходят за пределы массива). Плюс случайное число.



Рис. 11: Схема алгоритма Diamond-square

# Алгоритм Diamond-square

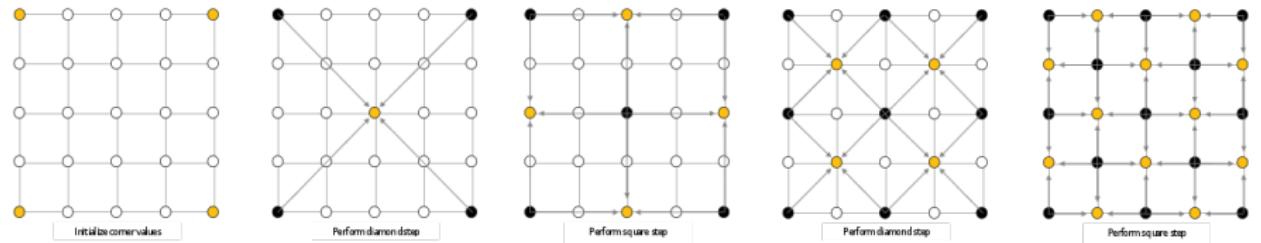


Рис. 11: Схема алгоритма Diamond-square

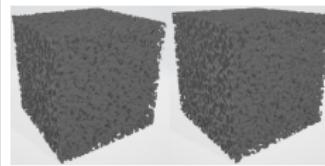


Рис. 12: Построение пористой среды с помощью шума Перлина (слева) газового фрактала (справа)

## Фракталы

2023-09-23

## └ Стохастические фракталы

В качестве цифровых моделей пористых сред были использованы фрактальные пористые структуры, созданные на основе стохастических фракталов: шум Перлина и газовое облако на основе алгоритма Octahedron and Cube.

## Стохастические фракталы

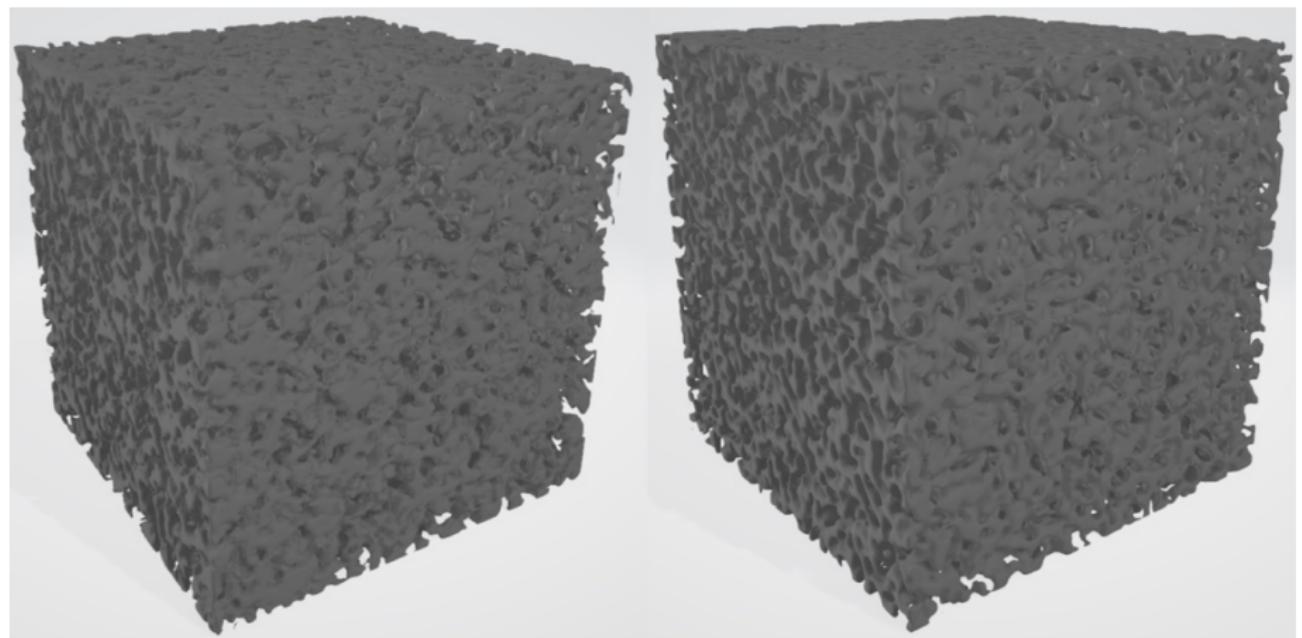


Рис. 12: Построение пористой среды с помощью шума Перлина (слева) газового фрактала (справа)