Геометрические преобразования (ГП)

Лит-ра Никулин К. геометр. и
алг. мат. граф.
Наша цель - овладеть мат. языком описания
динамики и визуализации

Геометрические преобразования —
отображение $f: R^n \to R^{n'}$ n-мерного
пространства прообраза в n-мерное
пространство образа

$f: R^n \to R^{n'}$ $\quad f(p) = p'$, где
$p' \in R^{n'}$, а $p \in R^n$

Виды преобразований:
1 Линейное

$$p' = pA + B$$

или

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}^T A + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}^T, \text{ где}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}^T$$

матрица преобразования.

1.1. Вырожденные (проективные), т.е. $|A| = 0$.
Замечание: исходное восстановление объекта невозможно.

1.2. Невырожденные (аффинные преобразов.)
$|A| \neq 0$, т.е. можно найти A^{-1} и вернуться к первоначальному состоянию.
Замечание: аф(ф)инное преобразование – геометрическое преобразование, при котором

параллельные прямые остаются параллельными. Affine (latin)

также верно: 1) $n = n'$ 2) $rang(A) = n$

Восстановление

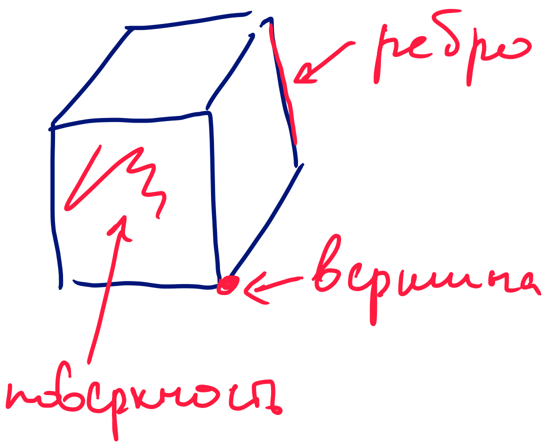
$$p = (p' - B)A^{-1}$$

2. Нелинейное преобразование

Например, отражение в кривом зеркале

$ax + b = y(x)$ — линейное

$ax^2 + bx + c = y(x)$ — нелинейное



объект

⇓

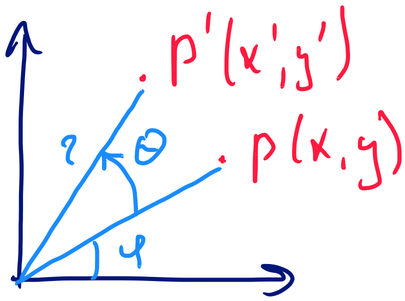
каркасная модель

поверхности

С целью упрощения и унификации записи ГП вводится понятие расширенного пространства R^{n+1}, в кот. $(n+1)$ координата равняется 1 (точка) или 0 (вектор).

Трехмерные преобразования

Поворот



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\varphi+\theta) \\ y' = r\sin(\varphi+\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) \\ y' = r(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta$$

$$M_R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Примечание:

чтобы выполнить вращение,

нужно $p' = M_T^{-1} M_R(\theta) M_T \cdot p$

$$p' = p \cdot \left(M_T \cdot M_R(\theta) \cdot M_T^{-1}\right)$$

Порядок выполнения умножения матриц имеет большое значение