Роджерс Мат. осн. КГ стр. 3

1) Поверхности

Традиционный способ построения/представления — использование ортогональных проекций. → сеть из ортогональных плоских кривых

Такая модель удобна! при исследовании различных характеристик:
количественных, физических характеристик
размеры, объем, угл кривизны и т.д.
: уменьшает число инф-ии

способ Построение и описание

1 идея по известным данным — м. Кунса / конструирование

2 идея создать, а не построить — м. Безье / визуализация.

Виды

Поверхности вращения

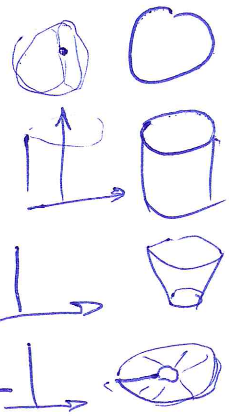
Вращение двумерного объекта

из точки → сферу

отрезок параллельно оси вращения → цилиндр

отрезок и ось вращения компланарн. → усеченный конус

→ диск с круглым отверстием



$$Q(t,\varphi) = [x(t) \quad y(t)\cos\varphi \quad y(t)\sin\varphi]$$

Пример ПВ

стр. ~~380~~ 380 - 381 2

412 - 416

416 - 418

418 - 421 11 (1)

424 - 426 2

алгоритмические основы Роджерс стр. 380 - 381

стр. 413 - 455

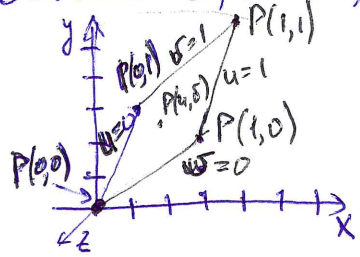
Некоторые виды поверхностей ~~вы~~ вы уже знаете из Курса Алгебры.
~~Это~~ Квадратичные поверхности: сфера, конус, эллипсоид.

Отображение параметрических поверхностей

Поверхность удобнее отображать ~~в виде~~ из параметрического 2-х пространства uv в трехмерное объектное пространство xyz

Параметры $u, v \Rightarrow xyz$ обычно $u, v \in [0, 1]$

Пример
$$\begin{cases} x(u,v) = 3u + v \\ y(u,v) = 2u + 3v + uv \\ z(u,v) = 0 \end{cases}$$



Билинейная поверхность

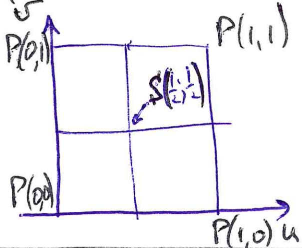
Эта поверхность конструируется из 4-х угловых точек: $P(0,0), P(1,0), P(0,1); P(1,1)$

$\forall$ т. поверхности $S(u,v)$ определяется линейной интерполяцией м/у противоположными границами единичного квадрата

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$, где $u, v \in [0, 1]$

$$S(u,v) = P(0,0)\cdot(1-u)(1-v) + P(0,1)(1-u)v + P(1,0)u(1-v) + P(1,1)uv$$

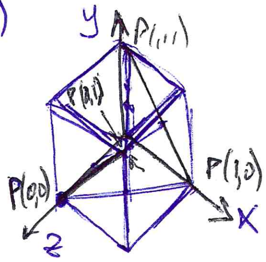
Легко проверить, что (подставить, знач. $u=[0,1]$ $v=[0,1]$)

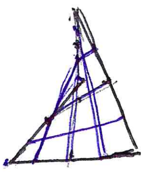


Таким образом, координаты точек P можно задавать произвольным образом.

Задача Найти т. билинейной поверхности, заданной координатами: $P(0,0) = [0, 0, 1]$ (вектор-строка)
$P(0,1) = [1\ 1\ 1]$
$P(1,0) = [1\ 0\ 0]$
$P(1,1) = [0\ 1\ 0]$
т. $P(0{,}5; 0{,}5)$

Решение:
$$S(u,v) = \begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{cases}$$





Ответ:
$P(0.5, 0.5) = [0{,}5\ 0.5\ 0.5]$

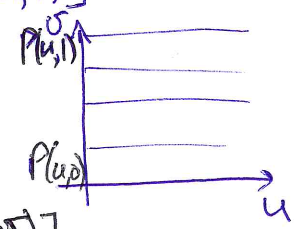
Линейчатые и развертывающиеся поверхности

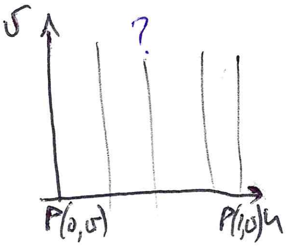
Линейчатая поверхность образуется при движении прямой линии вдоль направляющей с одной степенью свободы.

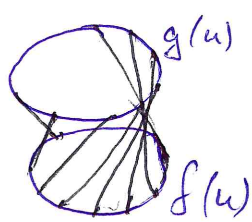
(Примеры: плоскость, конус, цилиндр, однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид). → дважды линейчатые

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$$

где $P(u,0) = f(u)$
$P(u,1) = g(u)$







? альт. $S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,v) \\ P(1,v) \end{bmatrix}$

Такие поверхности важны в промышленности (строение техники)

В качестве $f(u)$ и $g(u)$ могут быть взяты рассмотренные ранее сплайны, например, кривая Безье или B-сплайн

Может ли поверхность быть развертывающейся? (нужно прокатной промышленности)

Нужно исследовать кривизну поверхности

Таким образом, поверхность м.б. развернута без растяжений и разрывов

Экстра

Виды ~~кривизн~~:

$H = (k_{min} + k_{max})/2$ — средняя кривизна

$K = k_{min} \cdot k_{max}$ — гауссова кривизна (полная)

$$H = \frac{A|S'_v|^2 - 2B S'_u S'_v + C|S'_u|^2}{2|S_u \times S_v|^3}$$

$$K = \frac{AC - B^2}{|S'_u \times S'_v|^4} \qquad [A\ B\ C] = [S'_u \times S'_v] \cdot [S'_{uu}\ S'_{uv}\ S'_{vv}]$$

Типы поверхностей

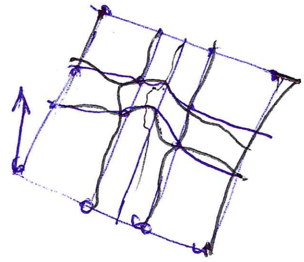
K	k_{min}, k_{max}	Форма
$K<0$	одинаковые	Эллиптическая
$K>0$	противоп.	Гиперболическая
$K=0$	~~разные~~ равна нулю	цилиндрич. коническая

Поверхность Безье

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} B_{n,i}(u) K_{m,j}(v)$$

$$B_{n,i}(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}$$

$$K_{m,j}(v) = C_m^j v^j (1-v)^{m-j}$$



B-сплайн поверхность

лок. базис

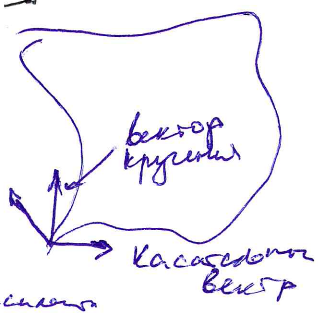
$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(v)$$

Это раньше

Бикубическая поверхность Кунса

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} F_1(u) \\ F_2(u) \\ F_3(u) \\ F_4(u) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ \hline P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{array}\right] \begin{bmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \\ F_4(v) \end{bmatrix}$$, где $u, v \in [0,1]$

$$[P] = \left[\begin{array}{c|c} \text{угловые координатные векторы} & v\text{-касательные векторы} \\ \hline u\text{-касательные векторы} & \text{векторы кручения} \end{array}\right]$$



Более простой вариант использовать повер Безье и B-сплайн

3) Поверхности

Квадратичные поверхности

$F(x, y, z) = 0$, пример сфера, конус, цилиндр, эллипсоид, параболоид вращения и гиперболоид вращения.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

в матричной форме можно записать как.

$$[X][S][X]^T = 0$$

$$[X] = [x\ y\ z\ 1] \qquad [S] = \begin{bmatrix} A & D/2 & F/2 & G/2 \\ & B & E/2 & H/2 \\ & & C & J/2 \\ & & & K \end{bmatrix}$$