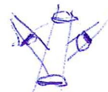
Что такое фрактал

"Фрактал" - 1975 г. Бенуа Б. Мандельброт

лат. fractus → дробный, ломаный

Опр-е: цельная структура ∀ природы, состоящей из частей (субструктур), обладающая свойством самоподобия. (т.е. её части напоминают целому).



Основа - рекурсивная функция

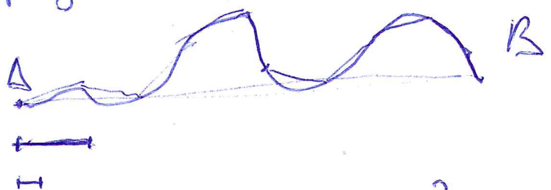
Примеры: 1) Леонардо да Винчи. $\sum S_{i\,\text{сечен. ветви}} = S_{\text{сечения ствола}}$

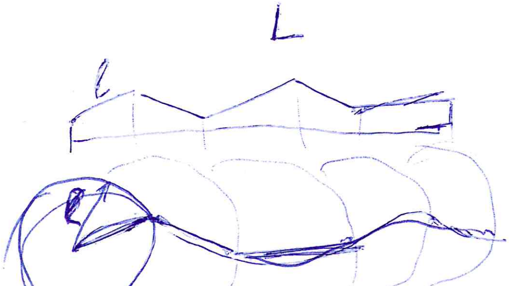
2) Биологический закон Мюллера и Геккеля
Онтогенез повторяет филогенез
почему у зародышей млекопитающ. появл. жабры?

3) Фрактальное (рекурсивное) сжатие/расширение изображ.

4) парадокс береговой линии 1967 г. (Мандельброт) Ричардсон.

необыкновенная легкость, с которой можно получить красивейшие узоры при использовании фракталов





Как посчитать длину м/у т. A и B

зависит от масштаба линейки

эффект Ричардсона. при $l \to 0$, $L \to \infty$

$$L = Nl = l\left(\frac{R}{l}\right)^D$$

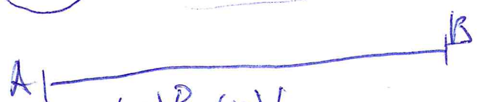
$D > 1$ → фрактальная размерность

где L → расстояние м/у двумя точками

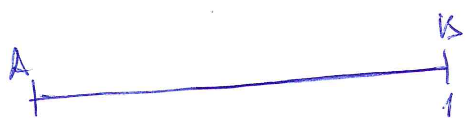
l → расстояние минимального значения линейки с помощью, которой измеряем

R → ломанный ~~отрезок м/у A и B~~

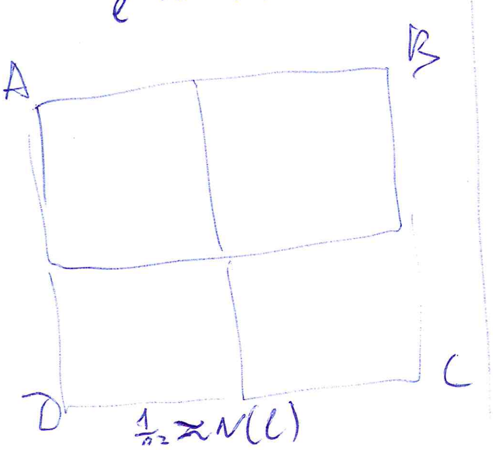
$1 < D$ → фрактальная размерность при $l \to 0$, $N \to \infty$



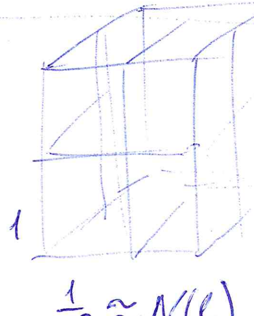
$$\left(\frac{R}{l}\right)^D = \left(\frac{R}{l}\right)^1 = N$$



$$\frac{1}{l} \approx N(l)$$



$$\frac{1}{l^2} \approx N(l)$$



$$\frac{1}{l^3} \approx N(l)$$

1, 2, 3 → евклидова размерность

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{l^d} \approx N(l)$$

$$l^d \approx \frac{1}{N(l)}$$

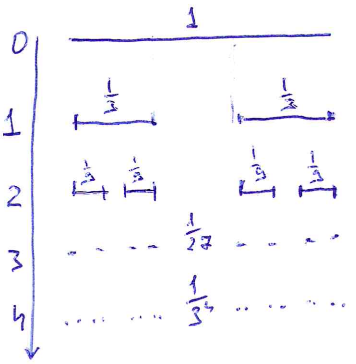
$$d \approx \log_l \frac{1}{N(l)} = -\frac{\ln N(l)}{\ln l} =$$

$$d = -\lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}$$

d → фрактальная размерность

1883. Канторово мн-во (К. пыль)

Алимелова: Знакомство с фракталами



Пусть $E_0 = [0,1]$

$$E_1 = \left[0; \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}; 1\right]$$

$$E_2 = \left[0; \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}; \tfrac{3}{9}\right] \cup \left[\tfrac{6}{9}; \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}; 1\right]$$

$\vdots$

Получается $N = 2^n$ сегментов, где $l_i = \frac{1}{3^n}$

$$P = \bigcap_1^\infty E_n$$

длина отрезков $\rightarrow$ $L = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \ldots = 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots\right) = 0 = 1 - \frac{1}{3}\cdot 3$

$S_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots \rightarrow$ геомтр. прогрессия, где $b_1 = 1$, $q = \frac{2}{3}$

$$S_n = b_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

фрактальная размерность $\rightarrow$ $D = -\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{3^n}} \approx \log_3 2 \approx 0{,}6309 < 1$

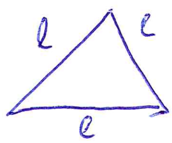
k	0	1	2	...	n
l	1	3^{-1}	3^{-2}		3^{-n}
$N(l)$	1	2^1	2^2		2^n

$D < 1$ $\quad L \to 0$

$$L = l\left(\frac{R}{l}\right)^D = \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)^{0{,}6309}$$

1904 Снежинка Коха Helge von Koch

$k=0$



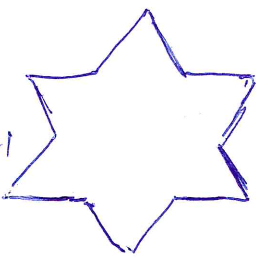
$l = 1$
$N(l) = 3$

$$\cancel{L = \frac{1}{3^d}\cdot 3\cdot 4^d = 3\frac{4^n}{3^n} = lM(l) = l\left(\frac{R}{l}\right)^D}$$

$$D = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 12}{\ln \frac{1}{3}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3\cdot 4^n)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1{,}26186$$

$$L = l\,M(l) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)^D = \left[\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}\right)^d\right]$$

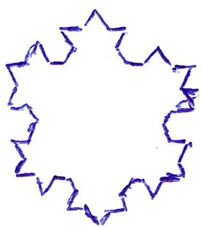
$k=1$



$l = \frac{1}{3}$
$M(l) = 12 = 3\cdot 4^1$

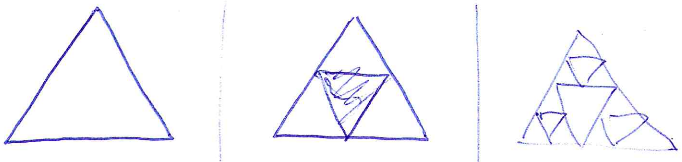
$D > 1 \rightarrow$ длина $L \rightarrow \infty$

$k=2$



$l = \frac{1}{9}$
$N(l) = 3\cdot 4^2$

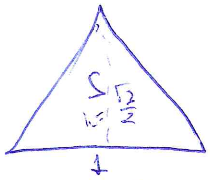
Салфетка и ковер Серпинского (1915 г.)



$k=0$	$k=1$	$k=2$
$l=1$	$l=\frac{1}{2}$	$l=\frac{1}{4}$
$N(l)=1$	$N(l)=3$	$N(l)=9$

$$D = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 3^n}{\ln \frac{1}{2^n}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1{,}5849$$

$$D < 2 \qquad S \to 0$$



$h = \sqrt{1^2 - 1/4} = \frac{\sqrt3}{2}$

$$S = \frac{\sqrt3}{4} = \frac12\left(\frac{\sqrt3}{2}\cdot 1\right) = \frac{\sqrt3}{4} \approx 0{,}433012$$

$$S_n = \frac{\sqrt3}{4} - \frac{\sqrt3\,3^0}{4\cdot 4^1} - \frac{\sqrt3\,3^1}{4\cdot 4^2} - \dots = \qquad 0{,}288675$$

$$= \frac{\sqrt3}{4}\left(1 - \frac14\left(1 + \frac34 + \dots\right)\right) = \frac{\sqrt3}{4}\left(1 - \frac14\cdot\frac41\right) = \cancel{\frac{1}{283}}\ 0$$

$$S'_n = 1\,\frac{1}{1-\frac34} = 4$$

$S_0 = \frac{\sqrt3}{4} = 0{,}43301$

$S_1 = S_0 - \frac{\sqrt3}{16} = 0{,}32475$

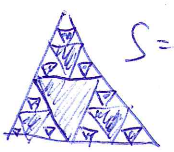
$S_2 = S_1 - \frac{\sqrt3}{4^3 = 64} = 0{,}29769$

$S_3 = S_2 - \frac{\sqrt3}{4^4} = 0{,}290930$

$S_0 = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt3}{4} = 0{,}43301$

$S_1 = \frac34 \Rightarrow \frac{3\sqrt3}{4\cdot4} = 0{,}32475$

$S_2 = \qquad 0{,}2435$



$S = 1$

$$S_n = 1 - \frac14 - \frac{3}{4^2} - \frac{9}{4^3} - \dots =$$

$$= 1 - \frac14\left(1 + \frac34 + \frac{3^2}{4^2} + \dots + \frac{3^n}{4^n} + \dots\right) =$$

$$= 1 - \frac14\,1\,\frac{1}{1-\frac34} = 1 - \frac14\cdot\frac41 = 0$$

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 - \frac14 = \frac34$

$S_2 = \frac34 - \frac{3}{4^2} =$

Мн-во Жюлиа

$z_{n+1} = z_n^2 + c$ ← вид ур-ия

при $c = const$

z_0 (н.т.) 3 возможности:

1) $|z_0| < 1$ → ~~приближается к z_n~~ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

2) $|z_0| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$

3) $|z_0| = 1$ продолжает оставаться на орбите

Пример:

$z_0 = 1 + i0 \quad c = 0 + i0$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 \\ y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$z_0 = 0 + i1 \quad c = 0 + i0$

$x_1 = -1$

$y_1 = 0$

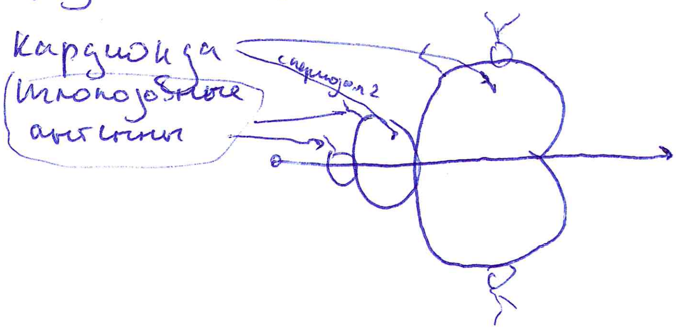
Пыль Фату (несвязанные структуры)

$c \notin$ не принадлежит мн-ву Мандельброта

Мн-во Мандельброта

∃-ет правило, позволяющее определить, какой вид будет иметь мн-во Жюлия при различном c $\quad z_0 = 0$

z_0



Алгебраические (динамические) фракталы

можно описать комплексной нелинейной ф-ией

В зависимости от нач. данных (z_0 или c)

последовательность $z_i = f(z_{i-1})$ ведет себя по разному:

1) $z_i \to \infty$ при $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$

2) ~~z_i~~ $z_i \to$ сходится к точке A $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$

3) $z_i = z_{i+T}$ T - период z_i циклически принимает ряд значений

и др.

Пример:

$$\boxed{\begin{aligned} z_n &= x_n + i y_n \\ c &= a + ib \\ z_{n+1} &= f(z_n) \end{aligned}}$$

$$f(z_n) = z_n^2 + c = (x_n + iy_n)^2 + a + ib =$$

$$= x_n^2 - y_n^2 + i2x_n y_n + a + ib$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\underbrace{f(z) - f(z+\Delta z)}_{\text{расстояние}} = \Delta z f'(z)$$

если рассмотрим как неподвижную точку $\tilde{z}$

Предположим $\tilde{z}$ (неподвиж. т.) - корень ур-и

если

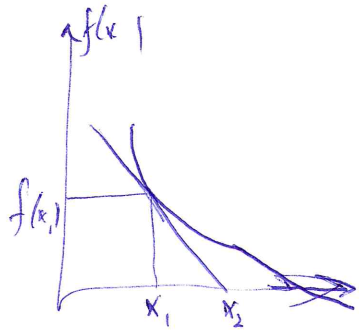
1) $|f'(\tilde{z})| < 1$ $\tilde{z}$ притягивающая

2) $|f'(z)| > 1$ $\tilde{z} \to$ отталкивающая

3) $|f'(z)| = 1$ $\tilde{z} \to$ нейтральная

Комплексные Ньютоновы границы

Алгоритм Ньютона для приближенного нахождения корней ур-ия $f(z)=0$ в комплексной плоскости. (метод касательных)



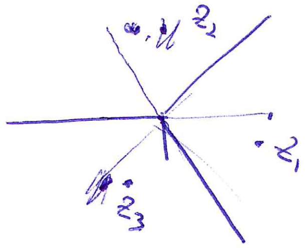
$$y = f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

1977 г. Джон Хаббард (John Hubbard)

Париж. унив. Орсэй

Что будет, если нач. точка z_0 выбрана в плоскости комплексных чисел не вблизи от корня, а произвольным образом?



Артур Кэли

Пи

Пирог Ньютона

$z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$