2024-12-07 MW X

Метод Монте-Карло Monte Carlo Method

Быковских Дмитрий Александрович

07.12.2024

Метод Монте-Карло Monte Carlo Method

Быковских Дмитрий Александрович

07.12.2024

07.12.2024

1 / 15

Быковских Д.А. ММК

Содержание

- Определение, понятия, история
- Генератор псевдослучайных чисел
- Пример
- Квази МКМ
- Скорость сходимости
- Применение метода в компьютерной графике
- MISER algorithm

ММК

- Оправдилия, полотия, история
- Поравдилия, полотия, история
- Какия МММ
- Спорсто соправления
- ММОКТ абриллия
- ММОКТ абриллия

2024-12-07

Быковских Д.А. ММК 07.12.2024 2 / 15

Краткая справка Monte-Carlo Method (MCM)

Монте-Карло метод (ММК) — численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

Название происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом.

Датой рождения считается 1949 г., когда появилась статья под названием The Monte Carlo Method (Н. Метрополис и С. Улам). Теоретическая основа известна давно.

(D) (B) (E) (E) E 990

∟Краткая справка

MMK

2024-1

Монте-Кара метод (ММК) — часленный метод рошения математических задач при повоещи морилеровамих случайных вкличик. Назавими происходит от города Монте-Кара о якимастия Монако, зацианитос склим исправа делом. Кара поверхности и предоставления сета по дажамения ТВ Монте саби Кейле (М. Интесполае и С. Укак).

Краткая справка Monte-Carlo Method (MCN

еоретическая основа известна давно.

Рулетка — простейший прибор получения случайной величины. Метод Монте-Карло — [84: 85].

Первая работа по использованию вероятностного метода была опубликована А. Холлом в 1873 году именно при организации стохастического процесса экспериментального определения числа π путем бросания иглы на лист линованной бумаги. Идея такого эксперимента возникла у Ж.Л.Л. Бюффона для вычисления числа π в 1777 году. Бурное развитие и применение методов статистического моделирования (Монте-Карло) в различных областях прикладной математики началось с середины прошлого столетия. Это было связано с решением качественно новых задач, возникших при исследовании новых процессов.

Одним из первых, кто применил ММК для моделирования траекторий нейтронов был Дж. фон Нейман.

Первая работа с систематическим изложением была опубликована в 1949 году Н.К. Метрополисом и С.М. Уламом. Метод Монте-Карло применялся для решения линейных интегральных уравнений, в котором решалась задача о прохождении нейтронов через вещество.

Быковских Д.А. ММК 07.12.2024 3 /

Краткая справка

Особенности метода:

Быковских Д.А

- Простая структура вычислительного алгоритма, т.е. необходимо описать действие одного шага. А потом множество шагов усреднить. Метод статистических испытаний.
- 2 Ошибка вычислений, как правило, пропорциональная

$$\sqrt{\frac{D}{N}}$$

где D — некоторая постоянная, а N — число испытаний. Метод эффективен, когда высокая точность не сильно важна.

Задачи решаемые с помощью ММК:

- Любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы.
- Для любой задачи можно искусственно придумать вероятностную модель или даже несколько.

MMK

2024-12-07

07.12.2024

4 / 15

Краткая справка

Краткая справка

Особенности метода:

 Простая структура вычислительного алгоритма, т.е. необис описаты действие орного шага. А потом мномество шагов усреднять. Мегод статистических испытаний.
 Ошибка вычислений, как правило, пропорциональная



эффективен, когда высокая точность не сильно важна.
Задачи решаемые с помощью ММК:

э Любой процесс, на протекание которого влияют случайные

 Любой процесс, на протекание которого влиянот случайные факторы.
 Для любой задачи можно искусственно придумать вероятностичу

і любой задачи можно искусственно придума: рль или даже несколько.

Случайные числа

Быковских Д.А

Случайная величина — математический объект, которая представляет собой функцию, сопоставляющая каждому элементарному исходу случайного эксперимента числовое значение.

Функция распределения случайной величины предоставляет информацию о том, как вероятность распределена между различными значениями случайной величины. В теории вероятностей часто используются различные распределения (например, равномерное, биномиальное, нормальное), чтобы моделировать различные типы случайных величин.

Генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ) — алгоритм или устройство, создающее последовательность чисел, которые кажутся случайными, но на самом деле образуют детерминированную последовательность. Эти числа обычно используются в компьютерных программах для имитации случайности в различных приложениях, таких как моделирование, шифрование, игры и другие.

07.12.2024

MMK

-Случайные числа

лучайного эксперимента числовое значение.

информацию о том, как вероятность распределена между различных начениями случайной величины. В теории вероятностей часто используются различные распределения (например, равномерно

имитации случайности в различных приложениях, таких как

собой функцию, сопоставляющая каждому элементарному исход

Случайные величины могут быть классифицированы как

- 1. Дискретная случайная величина. Принимает конечное или счетное множество значений. Вероятности каждого значения определены явно.
- 2. Непрерывная случайная величина. Принимает значения из непрерывного интервала. Вероятность любого конкретного значения равна нулю (в отличие от дискретных случайных величин). Определяется функцией плотности вероятности (например, нормальное распределение).

Случайные величины также могут быть классифицированы как одномерные (включающие только одну переменную) или многомерные (включающие несколько переменных). Многомерные случайные величины используются, например, в многомерных статистиках и теории случайных процессов.

Вычисление площади определенного интеграла

Пример

Постановка задачи

$$I = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

Метод центральных прямоугольников

$$I \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \Delta x_i = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i),$$

где $\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = b - a$.

Быковских Д.А

$$I = (b - a)M[f(x)]$$

Пусть плотность распределения $\rho(x) = \frac{1}{b-a}$. Тогда интеграл можно вычислить следующим образом:

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{\rho(x)} \rho(x) dx = M \left[\frac{f(x)}{\rho(x)} \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\xi_i)}{\rho(\xi_i)}.$$

07.12.2024

6 / 15

MMK

—Вычисление площади определенного интеграла

Веченисление площарци определенного интеграла Пенено Пенено $I = \int_0^h f(x) dx$ Митад циптральных развированиям $I = \int_0^h f(x) dx$ Митад циптральных развированиям $I = \sum_{i=1}^h f(x_i) dx = \frac{h^2}{h^2} \sum_{i=1}^h f(x_i) dx$ $I = \sum_{i=1}^h f(x_i) dx = \frac{h^2}{h^2} \sum_{i=1}^h f(x_i)$, $I = \sum_{i=1}^h f(x_i) dx$ Пруст положень развиравания $f(x_i) = \frac{h^2}{h^2} \sum_{i=1}^h f(x_i) dx$ ваничестве социания фарма $I = \frac{h^2}{h^2} \sum_{i=1}^h f(x_i) dx$ ваничестве социания фарма $I = \frac{h^2}{h^2} \sum_{i=1}^h f(x_i) dx$

Estimator — правило для вычисления статистической оценки, определяющее скорость сходимости.

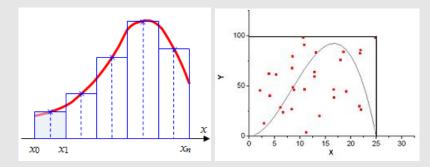


Рис. 1: Метод центральных прямоугольников (слева) и метод Монте-Карло (справа)

Оценка погрешностей при моделировании независимых испытаний

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — интегрируемая случайная величина, тогда математическое ожидание $M\xi$ и дисперсия $D\xi$ случайной величины ξ определяется формулами:

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(\mu(d\omega)) = \int_{R_1} x dF_{\xi}(x),$$

где $P(\mu(d\omega))$ — вероятность того, что величина ω определена на интервале $d\omega$, $F_{\xi}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f_{\xi}(t)\mu(dt)$ — функция распределения случайной величины ξ в точке x.

$$D\xi = \int_{R_2} [x - M\xi]^2 dF_{\xi}(x) = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

MMK

Оценка погрешностей при моделировании независимых испытаний

 $M\xi = \int \xi(\omega)P(\mu(d\omega)) = \int xdF_{\xi}(x)$

Для дискретной случайной величины ξ , принимающей значения x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n , формулы для математического ожидания $(M\xi)$ и дисперсии $(D\xi)$ запишутся следующим образом:

$$M\xi \approx \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$$

$$D\xi \approx \sum_{i=1}^{N} (x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i p_i)^2 p_i = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i p_i\right)^2$$

Быковских Д.А

07.12.2024

Оценка погрешностей при моделировании независимых испытаний

Доверительный интервал $(M\xi - \delta, M\xi + \delta)$, в котором находится истинное значение $M\xi$ случайной величины ξ с заданной вероятностью P, определяется следующим образом:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i}-M\xi\right|\leqslant\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=2\Phi(\alpha),$$

где ξ_i — неизвестная величина, полученная в результате i-го испытания; n — независимые истории (число испытаний); $\sigma = \sqrt{D\xi}$ — среднеквадратичное отклонение; $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\alpha e^{-t^2} dt$ — функция Лапласа.

Оценка погрешностей при моделировании независимых испытаний

Доверительный интервал $\{M\xi-\delta, M\xi+\delta\}$, в котором находится истинное значение $M\xi$ случайной величины ξ с заданной вероятностью P, определяется следующим образом:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}\xi_{i}-M\xi\right|\leqslant \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=2\Phi(\alpha),$$
встная выпучена, полученая в результате i -то

где ξ ; — неихвестная величина, полученная в результате i-испытания; n — небависивые истории (число испытаний); $\sigma = \sqrt{0\xi} - c$ редификация учичное отномняме; $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\int_0^{\alpha} e^{-z^2}dt$ — функция Лапласа.

-Оценка погрешностей при моделировании независимых испытаний

Правило трех сигм.

MMK

2024-12-07

Доверительный интервал $(M\xi-3\sigma,M\xi+3\sigma)$, в котором находится истинное значение $M\xi$ случайной величины ξ , распределенной по нормальному закону, с заданной вероятностью P, определяется следующим образом

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i}-M\xi\right|\leqslant\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\approx0.9973,$$

Физически-корректный рендеринг

Physically-Based Rendering

Быковских Д.А

Физически-корректный рендеринг (Physically Based Rendering, PBR) подход к генерации изображений, который стремится моделировать физические свойства света и материалов для достижения более реалистичных результатов.

$$L_o(x,\omega_o) = \int_{\Omega} \left(k_d \frac{c}{\pi} + k_s \frac{DFG}{4(\omega_o \cdot n)(\omega_i \cdot n)} \right) L_i(x,\omega_i) (n \cdot \omega_i) d\omega_i$$

07.12.2024

9 / 15

MMK

изические свойства света и материалов для достижения более

 $L_0(x, \omega_0) = \int_{\mathbb{R}} \left(k_d \frac{c}{x} + k_d \frac{DFG}{4f_{(r)} + gh_{(r)} + gh}\right) L_1(x, \omega_1)(n \cdot \omega_1) d\omega$

-Физически-корректный рендеринг

Основные принципы физически-корректного рендеринга включают в себя:

- Моделирование света. Учет различных источников света, их цветовых температур, направления и интенсивности. Учет закона сохранения энергии процессе отражения и преломления света.
- Моделирование материалов. Физически-корректные модели отражения, преломления и поглощения света в зависимости от типа материала.
- Моделирование теней и окружающей среды. Учет влияния теней от различных объектов и источников света. Моделирование окружающей средь для более точного воссоздания условий освещения.
- Многоканальные текстуры. Использование текстур с несколькими каналами для более точного представления различных характеристик материалов, таких как шероховатость, металлические свойства и др.
- Моделирование камеры. Учет характеристик камеры, таких как диафрагма і выдержка, для более реалистичного эффекта глубины резкости и затемнени по краям кадра.

Вычисление энергетической яркости

Формулы энергетической яркости поверхности в конкретном направлении

$$L = \frac{d^2\Phi}{\cos\theta d\omega dA}$$
$$L\cos\theta d\omega = \frac{d^2\Phi}{dA}$$

где L — энергетическая яркость (Radiance), описывает количество светового потока, излучаемого поверхностью в определенном направлении, на единичную площадку и в единичный угловой диапазон $(W/(m\cdot sr))$; $d^2\Phi$ — элемент светового потока (Flux) через малую площадку dA в малом угловом диапазоне $d\omega$; $\cos\theta$ — косинус угла между нормалью к поверхности и направлением, в котором измеряется энергетическая яркость; dA — элемент площади поверхности, через которую измеряется световой поток; $d\omega$ — элемент углового диапазона, в пределах которого измеряется световой поток.

MMK

2024

Вычисление энергетической яркости

ение энергетической яркости

Формулы энергетической яркости поверхности в конкретном направлении

 $L\cos\theta d\omega = \frac{d^2\Phi}{dA}$

 дія.
 анергетическая яркость (Radiance), описывает количест го потока, излучаемого поверхностью в определенном ники, на единичено площадку и в единичный угловой.

«аправления», на одиничного площадку и в одиничный укловой заракаласи (W/m. :s-s); от № — выхым сактоска (Flax) черка малую площадку dA в калом укловом диалазоне du; сос 6 — косянус кламерительного профильно к поверности и направлениями, изгорым актирости. Черка которую кламеритель сеговой поток; du — актими поверности, черка которую кламеритель сектовой поток; du — актими кламерительного заилазона, в поведиях кламерого изамеритель сектовой поток.

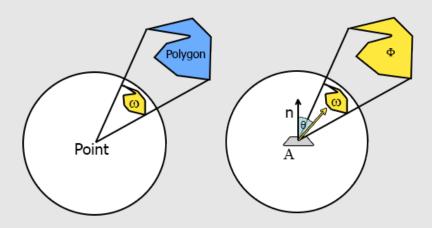


Рис. 2: Схема расчета телесного угла и энергетической яркости

 Быковских Д.А.
 ММК
 07.12.2024
 10 / 1

Вычисление площади единичной полусферы

Площадь единичной полусферы

$$S_{\mathsf{hemisphere}} = \int_{\Omega_+} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta d\phi = \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Расчетная формула

$$S_{\mathsf{hemisphere}} \approx \frac{\pi}{2N_1} \frac{2\pi}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sin(\theta_i) = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sin(\theta_i) \Delta \theta_i \Delta \phi_j = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \Delta S_{ij},$$

где
$$\sum_{i=1}^{N_1} \Delta \theta_i = \pi/2$$
; $\sum_{i=1}^{N_2} \Delta \phi_i = 2\pi$.

Примечание.

Есть более удобный способ расчета.

11 / 15

MMK

2024-1

Вычисление площади единичной полусферы

 $S_{hemisphere} = \int_{\Omega_{-}} d\omega = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi/2} \sin\theta d\theta d\phi = \int_{0}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_{0}^{2\pi} d\phi = 2\pi$

 $S_{benisphere} \approx \frac{\pi}{2M_1} \frac{2\pi}{M_2} \sum_{i}^{M_2} \sum_{j}^{M_2} \sum_{i}^{M_2} \sin(\theta_i) = \sum_{i}^{M_2} \sum_{j}^{M_1} \sin(\theta_i) \Delta \theta_i \Delta \phi_j = \sum_{i}^{M_2} \sum_{j}^{M_2} \Delta S_{ij}$ где $\sum_{i}^{N_2}$, $\Delta\theta_i = \pi/2$; $\sum_{i}^{N_2}$, $\Delta\phi_i = 2\pi$.

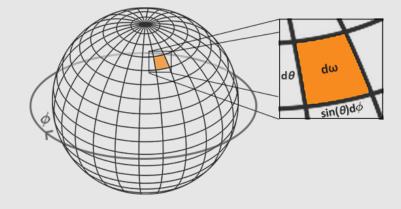


Рис. 3: Иллюстрация к интегрированию в сферической системе координат

Вычисление диффузного рассеивания

Рассмотрим следующее выражение

$$L_o(x,\omega_o) = k_d \frac{c}{\pi} \int_{\Omega} L_i(x,\omega_i) (n \cdot \omega_i) d\omega_i$$

Его расчетная формула будет иметь вид

$$L_o(x,\omega_o) \approx k_d \frac{c}{\pi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i(x,\omega_i) (n \cdot \omega_i) = k_d \frac{c}{\pi} \sum_{i=1}^N L_i(x,\omega_i) (n \cdot \omega_i) \Delta \omega_i,$$

где ω_i — входящий вектор направления рассчитывается случайным образом с равномерным законом распределения.

2024-12-07 MW X

Вычисление диффузного рассеивания

Paccentrate Configuration augments $L_{\delta}(x,\omega) = k_{\delta}^{2} \int_{\mathbb{R}} L(t,\omega)(x,\omega) d\omega$ Et paccerna denotes denotes deperture for meta and $L_{\delta}(x,\omega) = k_{\delta}^{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_{\delta}(x,\omega)(x,\omega) = k_{\delta}^{2} \sum_{i=1}^{N} L_{\delta}(t,\omega)(x,\omega) \Delta \omega_{i}.$

Вычисление диффузного рассеивания

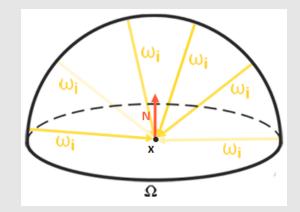


Рис. 4: Иллюстрация усредненной суммы энергетической яркости внутри полусферы

Быковских Д.А. MMK 07.12.2024 12 / 15

Квази-метод Монте-Карло

Quasi-Monte Carlo Method

Квази-метод Монте-Карло представляет собой вариацию метода Монте-Карло, который использует квазислучайные последовательности вместо полностью случайных чисел. В отличие от стандартных случайных чисел, квазислучайные последовательности обладают определенными детерминированными свойствами, направленными на создание последовательности чисел, которые стремятся к равномерному покрытию пространства. Основная идея квази-метода Монте-Карло состоит в том, чтобы заменить случайные числа последовательностью чисел с некоторыми хорошими свойствами равномерного распределения. Эти

последовательности разрабатываются так, чтобы минимизировать

дисперсию оценок интегралов, т.е. улучшить скорость сходимость метода, и обеспечивать равномерное покрытие пространства.

Быковских Д.А. MMK 07.12.2024 13 / 15

ММК 5 1 1 1 — Квази-метод Монте-Карло

Казан жетод Монтк-Карил подставанет собай авращию очетара. Монтк-Карил, отвершай использует законогу займен или оборожения оборожения оборожения оборожения оборожения собарает отвершения отвершения собарает отвершения отвершения оборожения собарает отвершения отвершения оборожения собарает отвершения оборожения обор

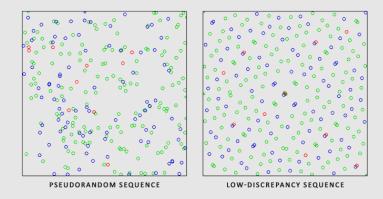


Рис. 5: Результаты моделирования: псевдослучайная последовательность (слева) и последовательность низкого несоответствия (справа)

MISER algorithm

MISER algorithm позволяет адаптивно распределять вычислительные ресурсы в зависимости от сложности функции на различных участках интервала интегрирования. Это улучшает эффективность численного интегрирования, особенно для функций с различной степенью изменчивости.

Описание метода

- Задание начального интервала интегрирования.
- 2 Разбиение текущего интервала на более мелкие подинтервалы.
- Вычисление приближенных значений на каждом подинтервале.
- Оценка погрешности.
- **5** Адаптация разбиения за счет увеличения количества подинтервалов в областях с большой погрешностью.
- **6** Повторение процесса (шагов 3-5) до достижения заданной точности.

MMK

└─MISER algorithm

:R algorithm

ресурсы в дависивности от споиности функция на различных учасинтервала интеграрования. Это улучшает аффактивность численинтеграрования, особенно для функций с различной степенью изменчивости.

- Задание начального интервала интегрирования
 - Разбиение текущего интервала на более мелк
 - Вычисление приближенных значений на каждом п
- Адаптация разбиения за счет увеличения количес
- подинтервалов в областях с большой погрешностью.

 Оповторение процесса (шагов 3-5) до достижения заданной

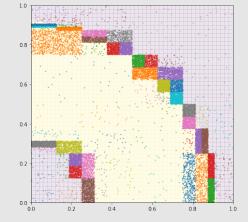


Рис. 6: Результат моделирования методом MISER при вычислении интеграла

Быковских Д.А. MMK 07.12.2024 14 / 15

Заключение

Литература

Быковских Д.А

- Соболь И.М. Метод Монте-Карло (Популярные лекциии по математике, выпуск 46)
- Учебное пособие по курсу "Численные методы в оптике"
- 3 Coding Labs Physically Based Rendering
- Maxwell rules Monte Carlo Integration
- **5** Learn OpenGL. Урок 6.3 Image Based Lighting. Диффузная облученность

MMK Заключение математике, выпуск 46) 2024-1 -Заключение

Соболь И.М. Метод Монте-Карло (Популярные лекциих по

- В Учебное пособие по курсу "Численные методы в оптике"
- Coding Labs Physically Based Rendering
- Maxwell rules Monte Carlo Integration
- Learn OpenGL. Урок 6.3 Image Based Lighting. Диффузиая

4 D F 4 D F 4 D F 4 D F

07.12.2024

15 / 15