(ф-лов. ур.)

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Ф → фи большая? → или заглавная буква?

Проблема вычисления ф-ий

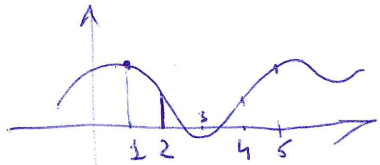
1) $y_i = f(x_i)$ → задана таблично

x_i	
y_i	

восстановить промежуточные, найти нужно значения в других точках

2) $y = f(x)$ → сложная ф-ия, много расчётов | заменить простой ф-ией

3) неточность результатов эксперимента; придумать решение



x	1	2	3	4	5
y	2	1	0	1	2

Вопросы:

1) входные данные → произвольные точки / произвольные только! / табличные значения / полностью известна } на $[a,b]$

2) доп. св-ва (гладкость ф-ии)

3) выбор вида ф-ии (~~параметрическая~~, полиномы, сплайны, тригонометрические)

4) точность? какая нужна

Постановка задачи интерполяции

Пусть в т. $x_0, x_1, \dots, x_n$ на $[a,b]$, задана таблица знач. f

Задача интерполяции состоит в построении ф-ии g удовлетворяющей условию $g(x_i) = y_i$, где $i = \overline{0,n}$

x_i → узлы интерполяции

Экстраполяция → вычисление значений, выходящих за $[a,b]$ отрезок

Другое не нужно! см. дальше

$\Phi_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x)$

явл-ся лин. ком. фиксиров. набора некоторых базисных ф-ий

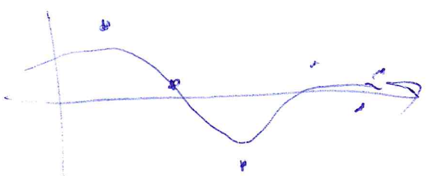
$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$.

Ф-ия $\Phi_m(x)$ → обобщенный многочлен по с-ме ф-ий

m → степень.

Если в качестве баз. берутся степен. ф-и $\varphi_k(x) = x^k \Rightarrow P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

Аппроксимация



Срочно 1р.

Задача интерполирования | интерполяции (1)

~~Интерполирование - стандартный способ аппроксимации~~

Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$, задана значениями $x_0, x_1, \dots, x_n$

~~тогда~~ задача чтобы не перебирать вычисл., подобрать легко вычисляемую ф-ию $\varphi(x)$, $f(x_i), i=\overline{0,n}$

Пусть $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ → набор л.н. ф-ий, определенных на $[a,b]$

и будем искать ~~интерполирующую~~ $\varphi(x)$ в виде линейной комбинации.

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x), \quad x \in [a,b] \rightarrow \text{условия интерполирования}$$

a_j — неопред. коэфф. $i=\overline{0,n}$

$\varphi(x)$ — обобщенный многочлен по с-ме $\{\varphi_i(x)\}$

СЛАУ

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) = f(x_i), \quad i=\overline{0,n}$$

(смотри (3))

Приближ. $f(x)$ задан. таблицей $\{x_i; f(x_i)\}$

Терминология

x_i - узлы интерполирования

$\{x_i, f(x_i)\}$ - исходные данные интерполирования

$\varphi(x)$ - обобщенный интерполяционный многочлен для $f(x)$

$R(x) = f(x) - \varphi(x)$, $x \in [a,b]$ → погрешность

$\exists$-ие и единственность обобщенного интерполяционного многочлена

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

Определение:

С-ма ф-ий $\{\varphi_i(x), x \in [a,b]\}, i=\overline{0,n}$ наз-ся с-мой Чебышева на $[a,b]$ если $\Delta \neq 0$ для $\forall$ набора попарно различных т. $x_0, x_1, \dots, x_n$ ~~из~~ $[a,b]$

$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i=\overline{0,n}$ $\quad \Delta_i$ - замена i-го столбца Δ столбцом свободных членов $f(x_j)$, $j=\overline{0,n}$

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta} \varphi_i(x)$$

$\varphi_m(x_i) = y_i \quad i=\overline{0,n}$

$$\begin{cases} \varphi_0(x_0)a_0 + \varphi_1(x_0)a_1 + \dots + \varphi_m(x_0)a_m = y_0 \\ \varphi_0(x_1)a_0 + \varphi_1(x_1)a_1 + \dots + \varphi_m(x_1)a_m = y_1 \\ \\ \varphi_0(x_n)a_0 + \varphi_1(x_n)a_1 + \dots + \varphi_m(x_n)a_m = y_n \end{cases} \Rightarrow Pa = y$$

Введем векторы $\varphi_j = (\varphi_j(x_0), \dots, \varphi_j(x_n))^T, \ j=0,1,\dots,m$

Будем говорить, что с-ма ф-ций $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ л.з. в т. $x_0, \dots, x_n$ если один из векторов будет явл. лин. комбинац. остальных

$\varphi_j = \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{m} a_k \varphi_k$ | иначе с-ма ф-ций → л. независим. в т. х

Пример. Покажем, что при $m \le n$ с-ма ф-ций $1, x, \dots, x^m$ → л.н. в т. $x_0, x_1, \dots x_n$, если они попарно различны

Обратное (противное)

Допустим
$$x_i^j = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{m} a_k x_i^k \ (i=\overline{0,n})$$

Полагая $a_j = -1$, получаем, что $P_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ обращается в 0 в т. $x_0, x_1, \dots, x_n$, число к-ых $n+1$. Однако, в силу основной теоремы алгебры многочлен степени m, тождественно не равный 0, не м. иметь более m корней.

Получаем противоречие $\xrightarrow{\text{т.с.}}$ с-ма л.н.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (x_1 \cdot x_2^2 - x_1^2 \cdot x_2) = x_1 x_2 (x_2 - x_1) +$$

$$(-x_0 x_2^2 + x_2 \cdot x_0^2) = x_0 x_2 (x_0 - x_2) +$$

$$(x_0 x_1^2 - x_1 \cdot x_0^2) = x_0 x_1 (x_1 - x_0)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_0 - x_1$$

Док-во определит. Вандермонда (6)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_2 \cdot x_0 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) =$$

$$(x_1 - x_0)(x_0 - x_2)(x_2 - x_1)$$

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta(j)}{\Delta} \phi_i(x) \quad a_i$$

$$\begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = y_0 (x_1 \cdot x_2^2 - x_2 x_1^2) = y_0 x_1 x_2 (x_2 - x_1)$$

$$\begin{vmatrix} y_0 & x_0 & 0 \\ y_1 & x_1 & x_1^2 - x_1 x_0 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 - x_2 x_0 \end{vmatrix} \qquad y_0 = x_1 \cdot x_2 (x_2 - x_0)$$

Интерполяционная ф-ла Ньютона (ИФН)

Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$ и задана таб. $\{x_i, f(x_i)\}$ $i=\overline{0,n}$

Разделенные разности нулевого порядка

$$f(x_i);\ i=\overline{0,n}$$

первого порядка

$$f(x_i;x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i},\ i=\overline{0,n-1}$$

второго порядка

$$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1},x_{i+2})-f(x_i,x_{i+1})}{x_{i+2}-x_i},\ i=\overline{0,n-2}$$

Разделенная разность k-го порядка

$$f(x_i;x_{i+1};\dots;x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1};\dots;x_{i+k})-f(x_i;\dots;x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_i},\ i=\overline{0,n-k}$$

x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0;x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0;x_1;x_2)$	
		$f(x_1;x_2)$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1;x_2;x_3)$	
		$f(x_2;x_3)$		
x_3	$f(x_3)$			

$$\left(f(x_i,x_{i+1},\dots;x_{i+k}) = \sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_{i+j})}{\prod_{l=0,\,l\neq j}^{k}(x_{i+j}-x_{i+l})},\ i=\overline{0,n-k}\right.$$

Лемма: Для каждого $k=\overline{1,n}$ справедливо представление

Если подсчитать
$f(x_n)+f(x_n;x_{n-1})(x-x_n)+$
$+\frac{f(x_n,x_{n-1},x_{n-2})}{2!}(x-x_n)(x-x_{n-1})$

Док-во по индукции

При $k=1$ $f(x_i;x_{i+1}) = \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} =$

Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями
Интерполяция вперед

$$L_n(x) = f(x_0)+f(x_0;x_1)(x-x_0)+f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\dots+$$
$$+f(x_0;\dots;x_n)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} f(x_0,x_1,\dots,x_k)\omega_k(x)$$

Погрешность интерполяции (Лагранж)

Теорема Пусть f дифференцируема $n+1$ раз на $[a,b]$, содержащем узлы интерполяции x_i, $i=\overline{0,n}$

Тогда для погрешности интерполяции в т. $x \in [a,b]$ справедливо:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x)$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

ξ — точка, принадлежащая (a,b)

Следствие теоремы

В условиях предыдущей теоремы справедлива оценка погрешности интерполяции в т. $x \in [a,b]$, имеющая вид

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|\omega_{n+1}(x)|$$

и также оценка максимума модуля погрешности интерполяции на $[a,b]$, имеющ

$$\max |f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$

С конечными разностями ИМН

Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ дано $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ $\Rightarrow$ где $x_{i+1} - x_i = h$, $x_i = x_0 + ih$

$\Delta^2 y_0 = y_2 + 2y_1 + y_0$

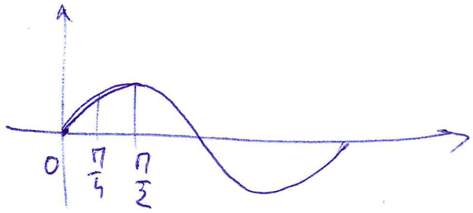
$\Delta y_0 = y_1 - y_0$

$\Delta^3 y_0 =$

$\Delta^k y_i = \sum\limits_{k=0}^{k} (-1)^{k-k} C_k^k y_{i+k}$

Пусть $t = (x - x_0)/h$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}t(t-1)(t-2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\dots(t-\dots$$



x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$L_1(x) = \sum_{j=0}^{1} y_j\, l_{1j}(x) = y_0 \frac{(x-x_1)\cancel{(x-x_2)(x-x_3)}}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{x_1-x_0} = 0\,\frac{x-\frac{\pi}{4}}{0-\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(x-0)}{\frac{\pi}{4}-0} =$$

$$l_{1j} = \prod_{\substack{k=0\\ j\neq k}}^{1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

$$L_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} x$$

$$L_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,4(6)$$

$\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$$L_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} + 1\,\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 16}{-\pi^2} + \frac{x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 8}{\pi^2}$$

$$L_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\,\cancel{16}\,\frac{\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}{-\pi^2} + \ldots = \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{1}{9} = 0,51$$

$$\frac{\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 8}{\pi^2} = -\frac{4\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 3} = -\frac{1}{9} \qquad \frac{1}{6}-\frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$\max\left|\frac{1}{2} - 0,4(6)\right| \leq \frac{1}{2!}\max_{[0,\frac{\pi}{4}]}\left|(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8^2} \approx 0,077$$

$$f' = (\sin x)' = \cos x$$

$$f'' = (\cos x)' = -\sin x$$

$$\max\left|\frac{1}{2} - 0,51\right| \leq \frac{1}{3!}\max_{0,\frac{\pi}{2}}\left|(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{1}{\cancel{3!}}\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\pi^3}{256} = 0,12$$

$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{8}$ $\quad$ $-\frac{\pi}{8}\cdot\frac{3\pi}{8}$

0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\,\frac{4}{\pi} = \frac{2(\sqrt{2})}{\pi}$$

$$\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{\frac{\pi}{4}} + \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}+0}{\cancel{2}}\,\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{(2-2\sqrt{2})4}{\pi^2}$$

$$L_2(x) = 0 + \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi}\cdot(x-0) + \frac{(3-2\sqrt{2})4}{\pi^2}(x-0)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + x\,\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi} + x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{4}{\pi^2}(3-2\ldots$$

$$L_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 + \frac{\pi}{3}\,\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi} + \frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{4}{\pi^2}(3-2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{2}-1)}{3} + \frac{3-2\sqrt{2}}{18} = 0,517$$

$0,37$ $\quad$ $0,63$

$\frac{1}{6}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$

Приближение в виде полинома

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$ → интерполяционный многочлен

если он удовлетворяет условиям

$$P_n(x_i) = y_i \quad i = \overline{0,n}$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

На практике часто такая с-ма является плохо обусловленной

Кроме того, существуют различные более удобные формы

Наконец, в большинстве приложений интерпол. многочлена явное вычисление a_k не нужно.

Многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_{nj}(x)$$

где
$$l_{nj}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

Нетрудно видеть, что

$$l_{nj}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow l_{nj}(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}$$

т.е. $y_j = y_i$ и. Поэтому многочлен Лагранжа явл-ся интерполяционным.

На практике часто используются:

линейная $(n=1)$ $L_1(x) = \sum_{j=0} y_j l_{1j}(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

квадратичная $(n=2)$ $L_2(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j l_{2j}(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

кубическая $(n=3)$ $L_3(x) = \sum_{j=0}^{3} y_j l_{3j}(x)$

лекция 4М

Минимизация погрешности многочленной интерполяции путем специального выбора узлов интерполяции

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

где $|\omega_{n+1}(x)|$ зависит от x, т.е. от выбора узлов интерполяции.

Хотя мы с вами выбирали узлы произвольного образом, ниоткуда не следует, что этот способ оптимален с точки зрения минимизации погрешности.

Задача минимизации $|\omega_{n+1}(x)|$ была решена П.Л. Чебышёвым (1821–1894), где ключевую роль играют многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \cos[n\cdot\arccos(x)] \quad (n=1,2,\dots)$$ интервал $[-1;1]$

Очевидно, что при $n=1$

$T_1(x) = x$ $\qquad T_0(x) = 1$

~~используя тригоном. тождество~~

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

легко получить рекуррент. ф-лу

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Оценка погрешности

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}$$

где $\frac{1}{2^n} = |\omega_{n+1}(x)|$

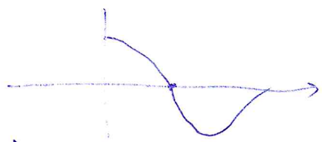
Тогда при $n=2$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \Rightarrow x = \left\{0; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

и т.д.



Наша задача, чтобы $T_n(x) = 0$, тогда

$$\cos[n\arccos(x)] = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi(1+2k)}{2}$$

$$n\arccos(x) = \frac{\pi(1+2k)}{2}$$

$$x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

$$\boxed{y = \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + \frac{b+a}{2}}$$

итоговая ф-ла для построения

указать n и k

Переход от $x\in(-1;1)$ на $y\in[a,b]$: $\frac{x+1}{1-(-1)} = \frac{y-a}{b-a}$

$$y = \underset{①}{\frac{b-a}{2}x} + \underset{②}{\frac{b-a}{2}} - a = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$$

$$\frac{x+1}{2}(b-a) - a \quad ④$$

① $y\in[0,2]$ ③ $y\in[0,b-a]$

② [illegible]

Понятие сходимости интерполяционного процесса

Сравнивая интерполяцию Лагранжа и Ньютона ; с одной стороны,
и сплайн-интерполяцию, с другой, видим,
что построение сплайнов - процесс более громоздкий и неудобный
Тем не менее, в приложениях чаще всего используют сплайны.

При росте степени интерполяционного многочлена
возникает проблема сходимости.

~~Чтобы~~ Логично предположить, что ~~при~~ $\lim\limits_{n \to \infty} L_n(x^*) = f(x^*)$, $\forall x^*$
многочл. Л и Н.

Ответ процесс интерполяции явл-ся расходящимся.

Наглядно проиллюстрировал ученый Бернштейн
на примере $y = |x|$ на отрезке $[a, b]$ при равноотстоящ. узлах
не сходится ~~ве~~ ни в одной точке, кроме $\{-1; 0; 1\}$

Экстраполяция (вычисления за пределами)

для вычислений будем использовать ИМН

1 ф-ла интерполяции вперед узлы нач. с x_0 ~~экстраполирование~~ назад

2 ф-ла интерполяции назад узлы нач. с x_n экстраполирование вперед

Для экстраполяции часто используют МНК

Но чаще всего МНК используется для аппроксимации

Аналог экстраполяции лежит за пределами математики
Поскольку предполагается зависимость не простой функциональной
а вероятностной. (например, корреляционной / метод монте-карло)