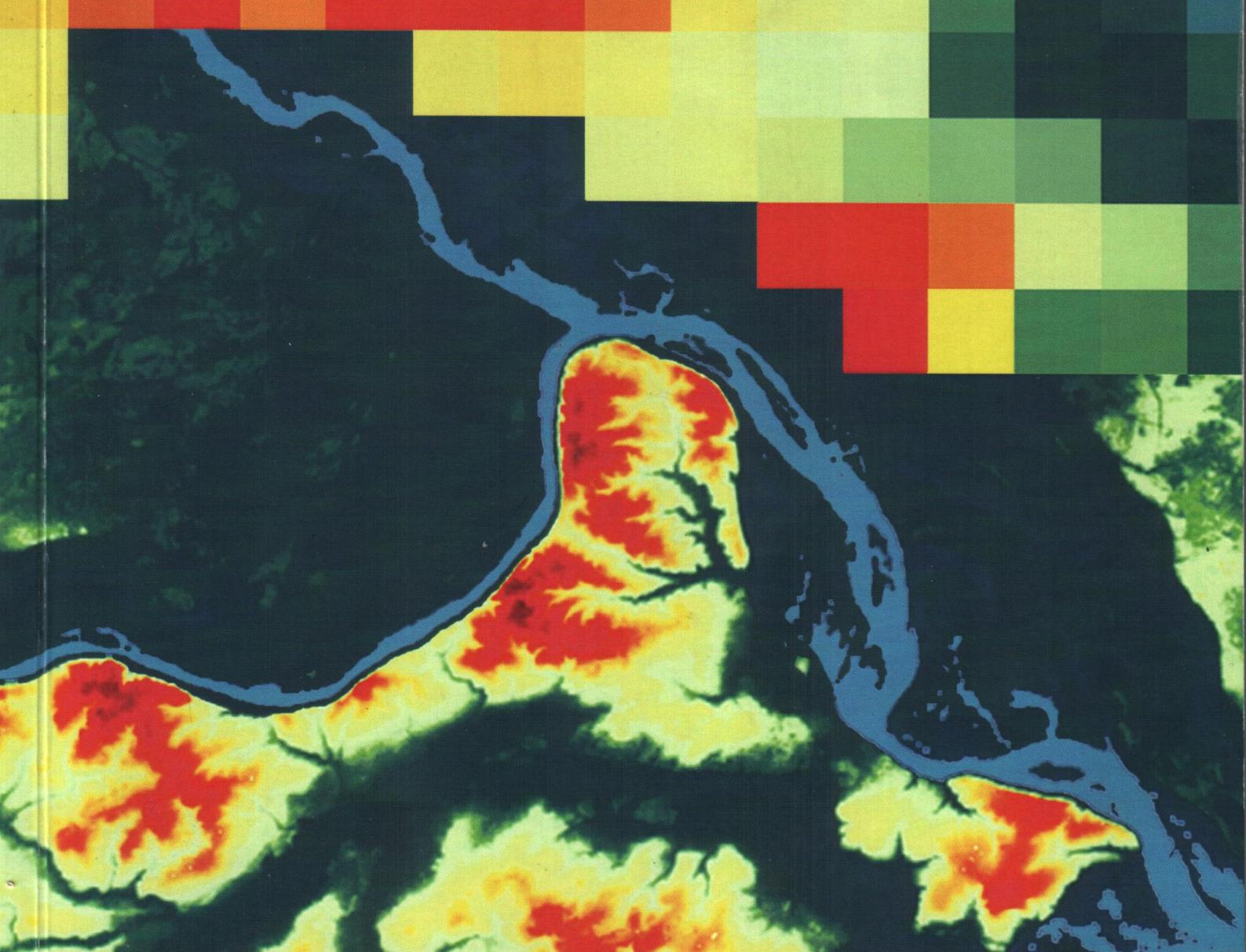


**Д.И. Иудин Е.В. Копосов**

# **ФРАКТАЛЫ:** **ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ**



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

Д. И. ИУДИН, Е. В. КОПОСОВ

---

# ФРАКТАЛЫ: ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ

МОНОГРАФИЯ

Нижний Новгород  
ННГАСУ  
2012

ББК 22.3  
И32  
УДК 530.1

**Рецензенты:**

**Мареев Е.А.** – руководитель отделения геофизических исследований Института прикладной физики РАН, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук

**Беллюстин Н.С.** – ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского радиофизического института, доктор физико-математических наук

Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегор. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012.–200 с., ISBN 978–5–87941–829–3

Предлагаемая книга является введением в мир скейлинга. Руководствуясь принципом от простого к сложному, авторы начинают изложение с основ фрактальной геометрии. В первой главе даны определения базовых понятий и рассмотрены простейшие примеры как регулярных, так и стохастических фракталов. Затем вторая глава знакомит читателя с фрактальными структурами, возникающими при геометрических фазовых переходах. Применения фрактальной геометрии и теории перколяции к описанию сложных систем составляют содержание третьей главы книги. В дополнении заинтересованный читатель сможет найти примеры программных кодов фрактальных и перколяционных моделей, реализованных в системе MATLAB на сетях клеточных автоматов.

Книга адресована широкому кругу научных работников, аспирантов и студентов, желающих ознакомиться с основами фрактальной геометрии, теории перколяции и методами их применения при описании различных явлений окружающего мира.

Табл. 4. Ил. 87.

ББК 22.3

ISBN 978–5–87941–829–3

© Д.И. Иудин, 2012  
© Е.В. Копосов, 2012  
© ННГАСУ, 2012

# Оглавление

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b>	<b>5</b>
<b>1 ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ</b>	<b>7</b>
1.1. Фрактала и скейлинг . . . . .	8
1.2. Регулярные фракталы . . . . .	11
1.3. Системы итерируемых функций . . . . .	16
1.4. Стохастические фракталы . . . . .	18
1.5. Методы расчета фрактальной размерности . . . . .	22
1.6. Химическая размерность фрактала . . . . .	26
1.7. Мультифракталы и мультифрактальный формализм . . . . .	28
1.8. Фрактальная геометрия и физика . . . . .	38
<b>2 ТЕОРИЯ ПЕРКОЛЯЦИИ</b>	<b>41</b>
2.1. Перколяция на регулярных решетках . . . . .	42
2.2. Протекание как критическое явление . . . . .	49
2.3. Структура перколяционного кластера . . . . .	52
2.4. Точное решение в одномерном случае . . . . .	58
2.5. Перколяция на дереве Кейли . . . . .	62
2.6. Уровень протекания . . . . .	67
2.7. Задача окружностей . . . . .	73
2.8. Перколяция в градиенте концентрации . . . . .	76
2.9. Направленное протекание . . . . .	78
<b>3 ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ</b>	<b>81</b>
3.1. Фрактальные временные ряды . . . . .	82
3.2. Фрактальные поверхности . . . . .	85
3.3. Ранговые распределения . . . . .	95
3.4. Перколяция в дисперсных системах . . . . .	101
3.5. Фрактальные сети и лабиринты . . . . .	108
3.6. Перколяция в активных средах . . . . .	115
3.7. Самоорганизующиеся дренажные системы . . . . .	125

3.8. Перколяционная дифференциация . . . . .	130
3.9. Векторное протекание и нейрональные сети . . . . .	149
3.10. Эстафетная передача информации . . . . .	153
<b>ДОПОЛНЕНИЕ. ПРОГРАММНЫЕ КОДЫ</b>	<b>159</b>
A. Система итерируемых функций . . . . .	159
B. Одномерная цепочка . . . . .	160
C. Градиентная перколяция . . . . .	160
D. Броуновские пейзажи . . . . .	162
E. Модель лесных пожаров . . . . .	164
<b>Литература</b>	<b>167</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>180</b>

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В природе широко распространены системы, морфология и поведение которых демонстрируют самоподобие при изменении пространственно-временных интервалов или, как говорят, масштабную инвариантность — один из фундаментальных видов симметрий физического мира, играющих формообразующую роль во Вселенной [68, 71, 145]. Рост деревьев и дренажные системы речных бассейнов, растительный покров и лесные пожары, структура облачности и грозовые электрические разряды, просачивание жидкости сквозь грунты и сейсмичность, эволюция популяций и динамика финансовых кризисов — все это примеры активного проявления самоподобия. В англоязычной литературе это явление называют скейлингом от английского scaling — масштабирование, изменение масштаба. Скейлинг бывает пространственным, временным или пространственно-временным. Хрестоматийным примером пространственного скейлинга служит береговая линия океанского побережья. Рассматривая изображения береговой линии, выполненные с разным увеличением и, следовательно, в разных масштабах, например 1 : 1000000 и 1 : 10000, мы не можем сказать, какому масштабу соответствует каждая из картин: обе выглядят статистически одинаково. Это означает, что береговая линия — самоподобна, т.е. является масштабно-инвариантным объектом или, другими словами, объектом не имеющим характерной длины. Инвариантность относительно преобразования длительности временных интервалов обнаруживает себя в разнообразных информационных потоках: сводках финансовых данных, данных экологического мониторинга и т.д. и т.п. Пространственно-временной скейлинг является наиболее общим проявлением самоподобия, его демонстрируют сложные социальные, техногенные, геофизические и космические процессы и системы. Примерами могут служить история социальных потрясений и техногенных катастроф [145], спайковая активность нейронов [34] и лесные пожары [136], динамика магнитосферной плазмы [22, 77, 181] и сейсмическая активность [107], вспышки на солнце и гамма активность звездных скоплений [86].

Существуют два взаимодополняющих аспекта масштабной инвариантности. С одной стороны, самоподобие характерно для активных многокомпонентных, иерархических систем, которые демонстрируют сложное поведение и требуют для реализации своего самоподобия широкого диапазона пространственно-вре-

менных масштабов. С другой стороны, математической формой скейлинга выступает простая степенная функция  $f(x) = x^a$ , где всего одно число — показатель степени  $a$  — характеризует сложную итерационную процедуру рождения фрактальной структуры — восхождения от малого к большому и от простого к сложному.

Масштабная инвариантность систем характеризуется сильными, спадающими по степенному закону, корреляциями, которые типичны для критических явлений. С физической точки зрения, степенной вид характеризующих систему корреляционных зависимостей означает простой и, вместе с тем, фундаментальный факт — у такой системы НЕТ НИКАКОГО ХАРАКТЕРНОГО пространственного, временного или пространственно-временного МАСШТАБА.

Самоподобие является неотъемлемым атрибутом систем с катастрофическим поведением. Это — сейсмическая активность и лесные пожары, войны и эпидемии, карстовые провалы и оползни. Именно поэтому исследование скейлинговых особенностей поведения сложных геофизических, экологических, политических, экономических и др. систем приобретает огромное значение при прогнозировании последствий и оценке рисков даже при незначительном воздействии на эти системы.

Предлагаемая книга является введением в мир скейлинга. Руководствуясь принципом от простого к сложному, мы начнем с изложения основ фрактальной геометрии в первой главе, где даны определения базовых понятий и рассмотрены простейшие примеры как регулярных, так и стохастических фракталов. Затем вторая глава познакомит читателя с фрактальными структурами, возникающими при геометрических фазовых переходах, которые изучаются теорией перколяции, появившейся на свет в 1957 году [93]. Фрактальный бум восьмидесятых годов прошлого века ознаменовал второе рождение этой теории [145, 44, 95, 96]. Применения фрактальной геометрии и теории перколяции к описанию сложных систем составляют содержание третьей главы книги. В дополнении заинтересованный читатель сможет найти примеры программных кодов фрактальных и перколяционных моделей, реализованных в системе MATLAB на сетях клеточных автоматов.

Книга основана на оригинальных публикациях авторов и на материалах специальных курсов лекций «Fractal geometry and percolation theory» и «Фрактальная динамика», читавшихся Д.И. Иудиным в Токийском университете электротехники и в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. Значительная часть материалов книги была предметом активного обсуждения на специализированных семинарах, проводимых под руководством Е.В. Копосова кафедрой ЮНЕСКО Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета.

## **Глава 1**

# **ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Математическим выражением самоподобия являются степенные законы. Если в однородной степенной функции  $f(x) = cx^\alpha$ , где  $c$  и  $\alpha$  постоянные, подвергнуть  $x$  преобразованию подобия путем умножения на некоторую константу, то функция  $f(x)$  по-прежнему будет пропорциональна  $x^\alpha$ , хотя и с другим коэффициентом пропорциональности. Таким образом, степенные законы с целочисленными или дробными показателями являются генераторами самоподобия. Тот факт, что однородные степенные законы не имеют естественных внутренних масштабов обуславливает феномен масштабной инвариантности в самых разнообразных явлениях реального мира: от разливов Нила и разорения игроков на финансовом рынке, до распределения галактик во Вселенной.

Другими словами, при изменении масштабов степенные законы воспроизводят сами себя, однако в строгом смысле, это утверждение справедливо только для математических моделей. Любые реальные объекты никогда не бывают в точности масштабно инвариантными, в том числе и из-за так называемых «концевых эффектов», связанных с естественными пространственно-временными границами физических или социальных явлений.

Масштабно-инвариантные системы обычно характеризуются нецелой – фрактальной размерностью. Понятие нецелой размерности и некоторые основные свойства фрактальных объектов изучались в XIX в. Георгом Кантором, Джузеппе Пеано, Давидом Гильбертом и в начале XX в. Хельге фон Кохом, Вацловом Серпинским, Гастоном Джулиа и Феликсом Хаусдорфом. Предпосылки концепции фрактальной геометрии обнаруживаются в трудах Карла Фридриха Гаусса (1777–1855), посвященных арифметике средних геометрических чисел, в гравюрах Альбрехта Дюрера (1471–1528) и даже в итальянской мозаике XII в. Само понятие фрактала было введено Бенуа Мандельбротом в семидесятых годах прошлого века [143, 144, 145, 44].

Исследованием фрактальных структур занимается фрактальная геометрия — одно из молодых, но очень быстро развивающихся направлений современной математики, фундаментальные и естественнонаучные приложения которого впервые нашли отражение в трудах Б.Мандельброта [143, 144, 145, 147, 44].

## 1.1. Фракталы и скейлинг

Несмотря на широкое распространение, понятие фрактала до сих пор не имеет четкого и строгого определения. Наиболее простым и кратким определением фракталов является следующее: фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Однако это определение не дает полного представления о разнообразии объектов, которые относят к фракталам. Мандельброт определил фрактал (от латинского *fractus* — дробный) следующим образом: «фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа

Безиковича которого строго больше его топологической размерности» (Мандельброт, 2002, с. 31) [44]. Это определение достаточно строго в математическом плане, однако именно это и является его существенным недостатком, поскольку оно требует определения еще и понятий размерности (топологической и хаусдорфовой), к тому же оно исключает многие классы фрактальных объектов, встречающиеся в различных областях естествознания. Мандельброту же принадлежит и более общая и менее формальная дефиниция: «Все фигуры, которые я исследовал и назвал фракталами, в моем представлении обладали свойством быть нерегулярными, но самоподобными» (Мандельброт, 2002) [44]. Таким образом, при характеристике фрактала центральным понятием оказывается самоподобие. Можно сказать, что фрактальный объект статистически единобразен в широком диапазоне масштабов. В идеальном случае (математический фрактал) такое самоподобие приводит к тому, что фрактальный объект оказывается инвариантным относительно масштабных изменений пространства (растяжений и сжатий).

В книге Фальконе [100] (Falconer, 1995) дано удачное сравнение: «Определить, что такое фракталы в математике столь же сложно, как и определить, что такая жизнь в биологии. Можно лишь перечислить некоторые свойства, которыми (не обязательно всеми) могут обладать эти объекты. Обычно, если говорят, что множество  $\mathfrak{F}$  является фракталом, то имеют в виду следующее:

- 1)  $\mathfrak{F}$  имеет тонкую структуру, т.е. детали произвольно малых масштабов.
- 2)  $\mathfrak{F}$  является слишком нерегулярным для того, чтобы описываться традиционной геометрией, как локально, так и глобально.
- 3)  $\mathfrak{F}$  обладает некоторым самоподобием, возможно приближенным или статистическим.
- 4) Обычно как-либо определенная «фрактальная размерность»  $\mathfrak{F}$  больше, чем его топологическая размерность.
- 5) Во многих интересных случаях множество  $\mathfrak{F}$  определяется очень просто, возможно рекурсивно.»

Четвертое из этих свойств соответствует первоначальному определению, данному Б. Мандельбротом [145] (Mandelbrot, 1982), причем под фрактальной размерностью в этом определении подразумевалась размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Главной количественной характеристикой фрактального объекта является его размерность [23]. Наиболее просто понятие размерности можно ввести как количество переменных (или измерений), необходимых для полного описания положения точки в пространстве. Так, для описания положения точки на плоскости необходимо указать две координаты, поэтому плоскость, также как и любая другая гладкая поверхность, имеет размерность, равную 2, то есть двумерна. Описать положение точки на линии можно с помощью одной координаты, поэтому линия одномерна, ее размерность равна 1. Аналогично, размерность точки равна нулю; пространство, в котором мы все живем, трехмерно. Введенное таким ин-

туитивным образом понятие размерности соответствует тому, что в математике называется топологической размерностью. Эта размерность всегда является целым числом.

Теперь, переходя к обсуждению фрактальной размерности, напомним, что физическое содержание самого понятия размерности геометрического объекта, в том числе и фрактального, определяется изменением массы объекта (или числа составляющих его элементов)  $M(r)$  с ростом его линейных размеров  $r$  [143, 144, 145, 44]. Если мы рассмотрим малую часть системы с размерами  $\lambda r$  ( $\lambda < 1$ ), то для массы фрагмента мы получим:

$$M(\lambda r) = \lambda^{d_f} \cdot M(r). \quad (1.1)$$

Решение функционального уравнения (1.1) имеет простой вид:  $M(r) = \text{const} \cdot r^{d_f}$ . Так, масса длинного провода меняется линейно с  $\lambda$ , т.е.  $d_f = 1$ . Для тонкой пластины мы найдем, что  $d_f = 2$ , а для бруска  $d_f = 3$ .

Такое «физическое» определение размерности естественно соотносится с интуитивно понятной возможностью разделения объекта на части. Действительно, в соответствие с этим классическим подходом объект имеет  $n$  измерений, если его можно разбить на части гиперплоскостями, которые сами являются  $(n - 1)$ -мерными объектами. Так мы получаем рекуррентное определение размерности, которое предполагает, что объемы — части пространства, поверхности — границы объемов, линии — границы поверхностей, а точки — границы линий.

Будем считать объект, который можно воспроизвести путем увеличения какой-либо его части, самоподобным, или инвариантным относительно преобразования масштаба, т.е фракталом.

Возвращаясь к функциональному уравнению (1.1) можно утверждать, что фрактальным, или самоподобным объектам отвечают решения (1.1) с нецелым  $d_f$ :

$$M(r) = \text{const} \cdot r^{d_f}. \quad (1.2)$$

Для фрактальных объектов величина размерности  $d_f$  оказывается меньше размерности объемлющего евклидового пространства  $d_f < d$ . Таким образом, плотность  $\rho(r)$ <sup>†</sup> фрактальных структур уменьшается по степенному закону с ростом их линейных размеров  $r$ :

$$\rho(\lambda r) = \frac{M(\lambda r)}{(\lambda r)^d} = \lambda^{d_f - d} \cdot \frac{M(r)}{r^d} = \lambda^{d_f - d} \cdot \rho(r). \quad (1.3)$$

Соотношение 1.3 дает нам интуитивно понятное определение фрактального объекта: фракталом является структура с дырками на всех масштабах. Чем больше линейные размеры фрактала тем больших размеров дырки мы в нем можем найти. Отсюда и следует падение плотности фрактала с ростом его линейных масштабов.

<sup>†</sup>Подразумевается объемная, поверхностная или погонная плотность в зависимости от величины размерности  $d$  объемлющего евклидова пространства

## 1.2. Регулярные фракталы

Рассмотрим свойства фракталов на нескольких простых примерах. Начнем с канторовского множества. Этот знаменитый фрактал строится следующим образом: отрезок единичной длины (называемый затравкой) делится на три равные части длиной  $l = 1/3$ , средняя из которых выбрасывается. На следующем шаге процедура повторяется для каждого из оставшихся отрезков и т.д. Результат первых нескольких итераций представлен на рис. 1.1.

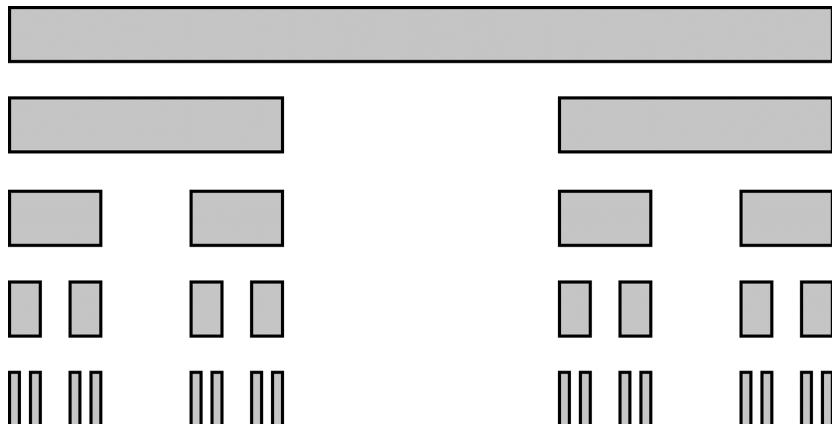


Рис. 1.1. Генерация канторовского множества

Нетрудно убедиться в том, что совокупная длина выброшенных при построении канторовского множества отрезков равна единице. Действительно, суммарные длины отрезков, выброшенных на очередном шаге итерационной процедуры, образуют бесконечную убывающую геометрическую последовательность:

$$\frac{1}{3}, \quad 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \quad 4 \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}, \quad \dots,$$

сумма которой  $\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  равна единице. Это означает, что полученное нами фрактальное множество — канторовское множество — не имеет длины.

Рассмотрим правую (или, если хотите, левую) третью нашего единичного отрезка подверженного итерационной генерации канторовского множества. Эта третья часть является уменьшенной (в три раза по линейным размерам) копией нашего канторовского множества и содержит при этом половину его массы (напомним, что третья часть, находящаяся в середине единичного отрезка попросту выброшена из него при генерации канторовского множества). Теперь все, что мы только

что сформулировали на словах, запишем в виде формул. Для этого воспользуемся функциональным уравнением (1.1) при  $\lambda = 1/3$  и  $r = L = 1$ :

$$M\left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) = \frac{1}{2} \cdot M(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \cdot M(1). \quad (1.4)$$

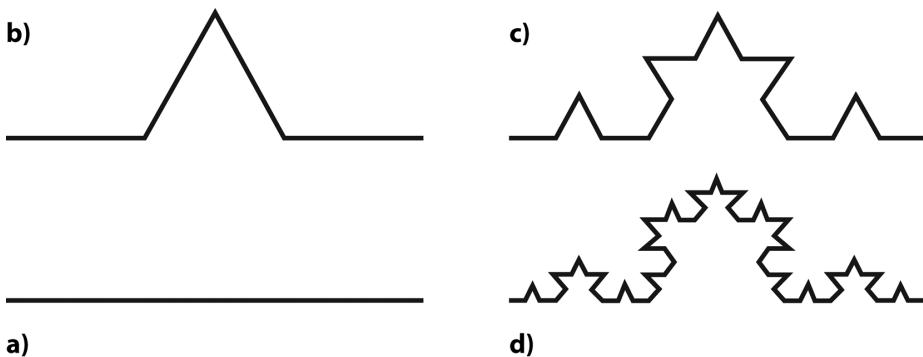
Сравнивая (1.4) с (1.1) мы получаем, что фрактальная размерность канторовского множества равна  $d_f = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309$ . Полученная величина размерности меньше единицы, что и подтверждает факт отсутствия длины у канторовского множества.

При построении канторовского множества мы стартовали от единичного отрезка, заменяя его «генератором» — двумя отрезками длиной  $1/3$  расположеными на одной прямой с интервалом  $1/3$  между ближайшими их концами. На каждом последующем шаге итерационной процедуры все новые отрезки заменяются новым генератором, который является уменьшенной в три раза копией предшествующего генератора. Но можно пойти и в сторону увеличения масштабов, удваивая число отрезков и увеличивая втрое линейные масштабы конструкции. Можно и объединить обе процедуры в одну.

Рассмотрим вопрос о плотности канторовского множества. Воспользуемся для этого соотношением (1.1) при  $d = 1$  и  $d_f = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  и получим, что плотность  $\rho(L)$  канторовского множества уменьшается по степенному закону с ростом его линейных размеров  $L$ :

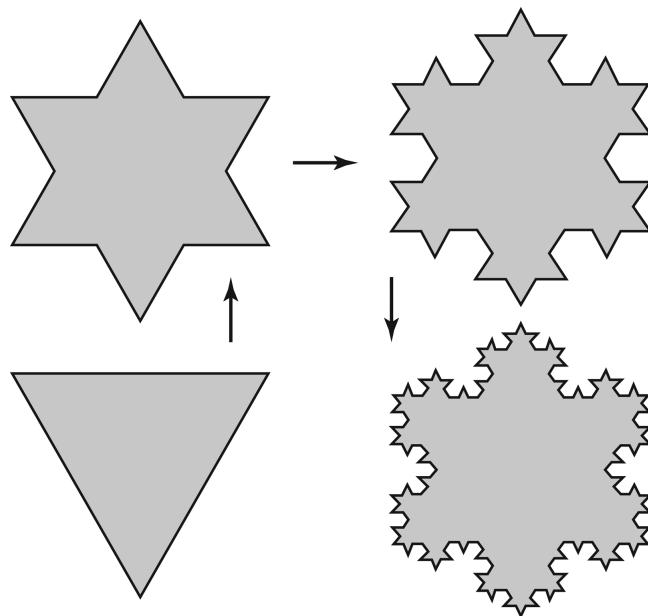
$$\rho(L) = L^{\ln 2 / \ln 3 - 1} = L^{-0.3691}. \quad (1.5)$$

Обратимся теперь к так называемой триадной кривой Коха, впервые предложенной шведским математиком Хельге фон Кохом в 1904 году [51]. Алгоритм ее построения также начинается с прямолинейного отрезка единичной длины. Центральная треть отрезка вырезается, а на его месте надстраивается фиорд из двух отрезков, образующих с вырезанной частью равносторонний треугольник (рис. 1.2), получается фигура, являющаяся генератором нашего нового фрактала. На последующих шагах построения кривой Коха все прямолинейные отрезки просто заменяются уменьшенными копиями генераторами, то есть их средняя треть вырезается и заменяется фиордом. В результате бесконечного повторения такой несложной процедуры получается очень красивая фигура, любая сколь угодно малая часть которой подобна целой конструкции. Используя функциональное уравнение (1.1) мы легко можем определить фрактальную размерность кривой Коха:  $d_f = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.2619$ . Длина кривой Коха не определена: ее величина зависит от точности измерения и расходится при увеличении этой точности. Действительно, на каждом шаге итерационной процедуры, представленной на рис. 1.2, длина образующейся ломаной увеличивается по сравнению с предыдущей в  $4/3$  раза и составляет  $(4/3)^n$ , где  $n$  – номер шага процедуры.



**Рис. 1.2.** Изображение итерационной процедуры построения кривой Коха

Применим теперь описанную выше процедуру Коха сразу для трех отрезков, образующих равносторонний треугольник (см. рис. 1.3). На первом шаге итерационной процедуры мы получим звезду Давида, а затем снежинку, граница которой на каждом последующем шаге становится все более изрезанной. Эта фигура с фрактальной границей называется островом Коха.



**Рис. 1.3.** Изображение итерационной процедуры построения острова Коха

Очевидно, что периметр острова Коха также как и длина кривой Коха зависит от точности его измерения и расходится при увеличении этой точности. На  $n$ -ом шаге итерационной процедуры периметр составляет  $P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ .

Найдем площадь острова Коха. На первом шаге процедуры площадь исходного равностороннего треугольника  $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$  увеличивается за счет площади фиордов, выступающих с каждой из трех сторон. Очевидно, что площадь одного фиорда составляет одну девятую часть от площади исходного равностороннего треугольника, так что  $S_1 = S_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot S_0$ . На каждом последующем шаге процедуры площадь острова будет увеличиваться за счет площади новых фиордов, число которых с каждой стороны исходного треугольника будет расти как степень четверки, а площадь будет уменьшаться как степень одной девятой:

$$S_n = S_0 + 3 \cdot \left( \frac{1}{9} \cdot S_0 + \frac{4}{9^2} \cdot S_0 + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^n} \cdot S_0 \right) = S_0 \left[ 1 + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n \left( \frac{4}{9} \right)^i \right]. \quad (1.6)$$

В выражении (1.6) справа стоит сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $\frac{4}{9}$ , поэтому окончательно мы получаем

$$S_n = S_0 \left\{ 1 + \frac{3}{5} \left[ 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right] \right\}. \quad (1.7)$$

При стремлении числа шагов процедуры к бесконечности мы найдем площадь острова Коха:

$$S = \frac{8}{5} \cdot S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}. \quad (1.8)$$

Мы получили интригующий результат — конечная площадь острова Коха ограничена периметром бесконечной длины.

Любопытно взглянуть на это еще и с другой стороны. Дело в том, что форма плоских фигур может быть охарактеризована краевым индексом:

$$\alpha_{EI} = \frac{P}{2\sqrt{\pi A}}, \quad (1.9)$$

где  $P$  — полный периметр фигуры, включая внутренние границы, если таковые имеются, а  $A$  — площадь фигуры. Для круга, например,  $\alpha_{EI}$  принимает минимальное возможное значение равное единице, для квадрата  $\alpha_{EI} \simeq 1,29$ . Для острова Коха краевой индекс равен бесконечности!<sup>†</sup>

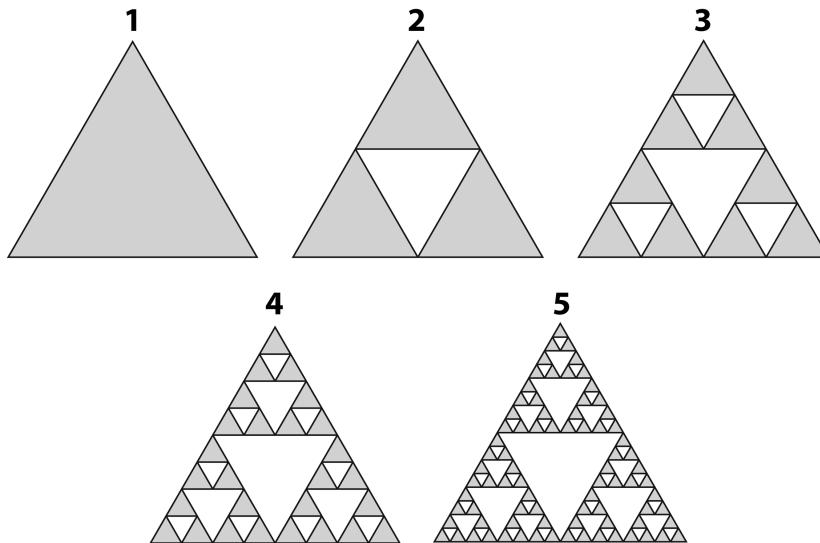
Ясно, что в реалиях физического мира мы никогда не встречаемся с такого рода бесконечностью. Тем не менее, как мы увидим в главе 3, природа очень часто обращается к подобным аномалиям для решения конкретных проблем.

<sup>†</sup> В трехмерном пространстве объемная фигура может быть охарактеризована поверхностным индексом

$$\alpha_3 = \frac{S}{(6\sqrt{\pi} \cdot V)^{2/3}},$$

где  $S$  — полная площадь поверхности фигуры, включая внутренние границы, если таковые имеются, а  $V$  — объем фигуры. Для шара, например,  $\alpha_3$  принимает минимальное возможное значение равное единице, для куба  $\alpha_3 \simeq 1,24$ .

Еще один классический пример — салфетка Серпинского. Ее построение начинается с равностороннего треугольника (рис. 1.4). Из него вырезается перевернутый центральный равносторонний треугольник со стороной, равной половине длины стороны исходного треугольника. Остаются три равносторонних треугольника со сторонами, вдвое меньше стороны исходного треугольника. К ним также применяется операция удаления центрального треугольника, образуется девять треугольников, из которых, в свою очередь, тоже вырезается треугольник и так до бесконечности. В результате и образуется салфетка Серпинского. Используя функциональное уравнение (1.1) мы найдем, что фрактальная размерность салфетки Серпинского составляет  $d_f = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1,5850$ . Самоподобие салфетки Серпинского очевидно: любой являющийся ее частью непустой треугольник является копией любого другого (включая и всю салфетку).



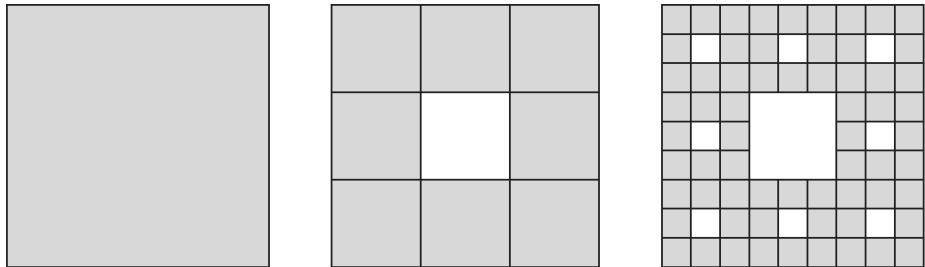
**Рис. 1.4.** Изображение итерационной процедуры построения треугольной салфетки Серпинского

Нетрудно убедиться в том, что полная площадь выброшенных при построении салфетки треугольников равна площади исходного треугольника. Действительно, суммарные площади треугольников, выброшенных на очередном шаге итерационной процедуры, образуют бесконечную убывающую геометрическую последовательность:

$$\frac{1}{4}, \quad 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}, \quad 9 \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}, \quad \dots,$$

сумма которой  $\frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$  равна единице. Это означает, что салфетка Серпинского имеет нулевую площадь.

Надо отдать должное заслугам Серпинского: кроме салфетки он придумал еще и ковер, также названный его именем. Алгоритм построения фрактального множества, называемого ковром Серпинского, представлен на рис. 1.5.



**Рис. 1.5.** Изображение итерационной процедуры построения ковра Серпинского

Используя функциональное уравнение (1.1) нетрудно убедиться в том, что фрактальная размерность ковра Серпинского составляет  $d_f = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \approx 1,8928$ .

Заметим, что процедура построения ковра Серпинского является плоским аналогом алгоритма генерации канторовского множества. Трехмерный вариант алгоритма генерации канторовского множества даст нам фрактальную структуру, называемую губкой Менгера с размерностью  $d_f = \frac{\ln(20)}{\ln(3)} \approx 2,7268$ .

### 1.3. Системы итерируемых функций

Кривая Коха и салфетка Серпинского являются представителями обширного класса так называемых конструктивных фракталов. Они конструируются путем применения некоторой простой процедуры-генератора к исходному множеству-затравке. Большое разнообразие примеров такого рода фракталов можно найти в литературе (Жиков, 1996; Божокин, Паршин, 2001; Морозов, 2002) [9, 21, 48, 51].

Другой распространенный способ получения фракталов называется методом систем итерируемых функций (СИФ), который был предложен американским исследователем Барнсли [100]. СИФ представляет собой систему функций из некоторого фиксированного класса функций, отображающих одно многомерное множество на другое. Наиболее простая СИФ состоит из аффинных преобразований плоскости:

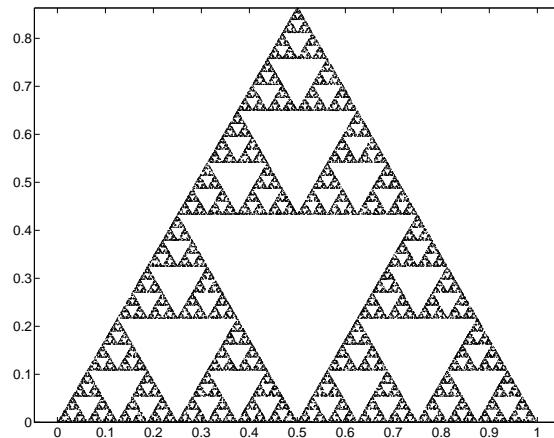
$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + \eta \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + \xi \end{cases} \quad (1.10)$$

Рассмотрим простую процедуру, которую Барнсли назвал игрой в хаос. Возьмем равносторонний треугольник. Выберем наугад некоторую начальную точку внутри этого треугольника. Далее наугад выберем одну из вершин треугольника, соединим начальную точку с этой вершиной и на середине получившегося отрезка

поставим новую точку, которая теперь будет играть роль начальной. Будем теперь повторять эту процедуру и откладывать все новые точки. Соответствующая СИФ имеет в этом случае следующий вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \eta) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \xi) \end{cases}, \quad (1.11)$$

где случайные величины  $\eta$  и  $\xi$  с вероятностью  $1/3$  принимают соответственно значения абсцисс и ординат вершин правильного треугольника:  $(0, 0); (1/2, 1/2\sqrt{3}); (1, 0)$ . Как ни удивительно, но в результате мы получим ни что иное, как салфетку Серпинского (рис. 1.6). Фактически, в такой игре в хаос выбор вершины треуголь-



**Рис. 1.6.** Результат применения СИФ-генератора салфетки Серпинского к равностороннему треугольнику

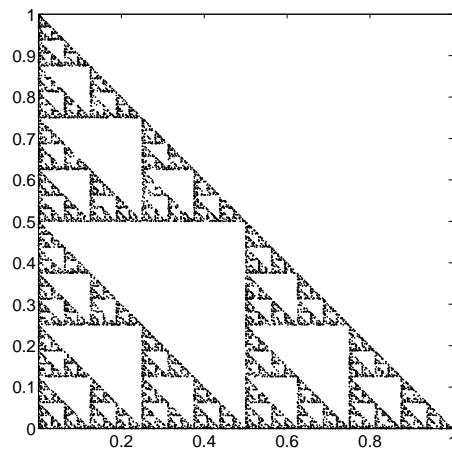
ника эквивалентен выбору одного из трех аффинных преобразований, которые применяются к точке.

Небольшое изменение системы 1.11 позволяет нам осуществить аналогичную процедуру с прямоугольным треугольником, когда случайные величины  $\eta$  и  $\xi$  с вероятностью  $1/3$  принимают соответственно значения абсцисс и ординат следующих вершин:  $(0, 0); (0, 1); (1, 0)$ . Результат представлен на рис. 1.7.

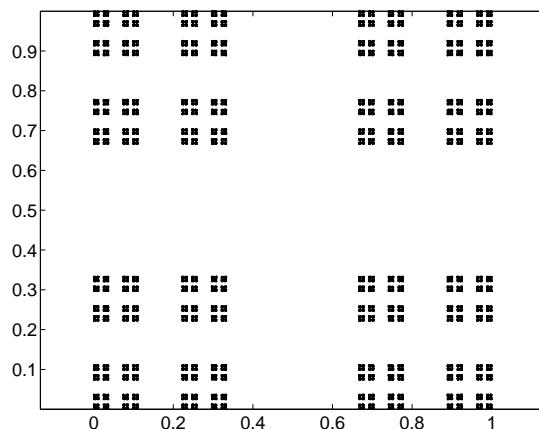
А вот еще один пример применения СИФ.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + 2\eta) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n + 2\xi) \end{cases} \quad (1.12)$$

где случайные величины  $\eta$  и  $\xi$  с вероятностью  $1/4$  принимают соответственно значения абсцисс и ординат вершин единичного квадрата:  $(0, 0); (0, 1); (1, 1); (1, 0)$ . Результат применения данной СИФ представлен на рис. 1.8.



**Рис. 1.7.** Результат применения СИФ-генератора салфетки Серпинского к прямоугольному треугольнику



**Рис. 1.8.** Результат применения СИФ-генератора 1.12

## 1.4. Стохастические фракталы

Все рассмотренные выше фракталы можно назвать регулярными, поскольку они являются результатом повторения некоторого детерминированного алгоритма. Для них свойство самоподобия выполняется строго. В природе же обычно встречаются так называемые случайные фракталы. Их основное отличие от регулярных состоит в том, что свойства самоподобия справедливы только после соответ-

ствующего усреднения по всем статистически независимым реализациям объекта. При этом увеличенная часть фрактала точно не идентична исходному фрагменту, однако их статистические характеристики совпадают [43, 70, 95, 96].

Простым примером стохастического фрактала может служить траектория броуновского движения — случайных блужданий, когда на каждом шаге модельного времени частица смещается на дистанцию  $a$  в случайно выбранный соседний узел  $d$ -мерной модельной решетки. Предположим, что в момент времени  $t = 0$  частица стартовала из начала координат  $d$ -мерного решеточного пространства. Тогда после некоторого числа  $t$  шагов модельного времени текущая позиция диффундирующей частицы будет описываться вектором смещения:

$$\mathbf{r}(t) = a \sum_{k=1}^t \mathbf{e}_k, \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{e}_k$  — обозначает единичный вектор в направлении прыжка на  $k$ -ом шагу модельного времени.

Характерная дистанция, на которую частица смещается в среднем в процессе случайных блужданий за  $t$  шагов модельного времени, описывается среднеквадратичным смещением  $\langle r^2(t) \rangle^{1/2}$ , где среднее  $\langle \dots \rangle$  понимается как среднее по всевозможным конфигурациям случайных блужданий на решетке. Из 1.13 мы находим

$$\langle r^2(t) \rangle = a^2 \sum_{k,k'=1}^t \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_k \rangle = a^2 t + \sum_{k \neq k'}^t \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_k \rangle.$$

Поскольку прыжки частицы в различные моменты времени  $k$  и  $k'$  некоррелированы друг с другом, мы имеем  $\langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_k \rangle = \delta_{kk'}$ , что приводит нас в результате к закону диффузии Фика:

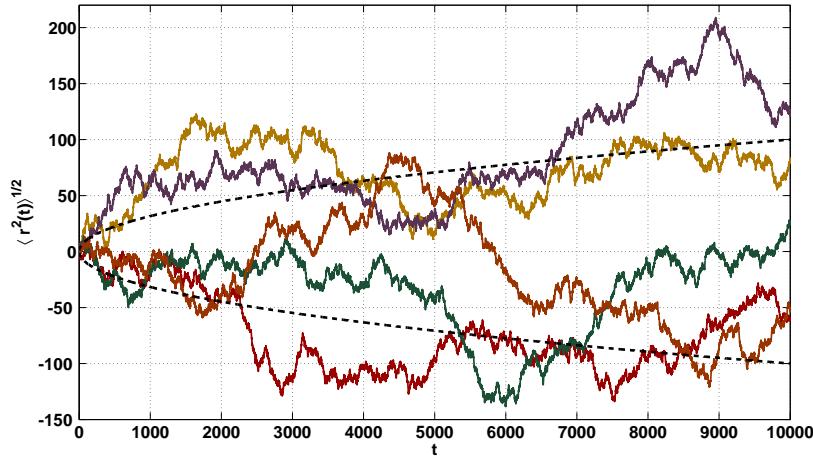
$$\langle r^2(t) \rangle = a^2 t \quad (1.14)$$

На рис. 1.9 представлено несколько реализаций случайных блужданий в одномерном случае на фоне графического представления результата 1.14. Заметим, что (1.14) не зависит от размерности  $d$  решетки. В более общем случае, когда частица имеет вероятность остаться на месте, среднеквадратичное смещение описывается формулой Эйнштейна:

$$\langle r^2(t) \rangle = 2dDt, \quad (1.15)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии.

Если вдоль траектории случайных блужданий прокладывать проволоку, то масса этой проволоки будет пропорциональна времени путешествия  $M \sim t$ . При этом характерный радиус евклидовой сферы, содержащей всю траекторию, к моменту времени  $t$  описывается соотношением  $r \sim \sqrt{t}$  (1.15). Таким образом,  $M \sim r^2$ , т.е. фрактальная размерность траектории броуновского движения равна двум и не зависит от размерности пространства.

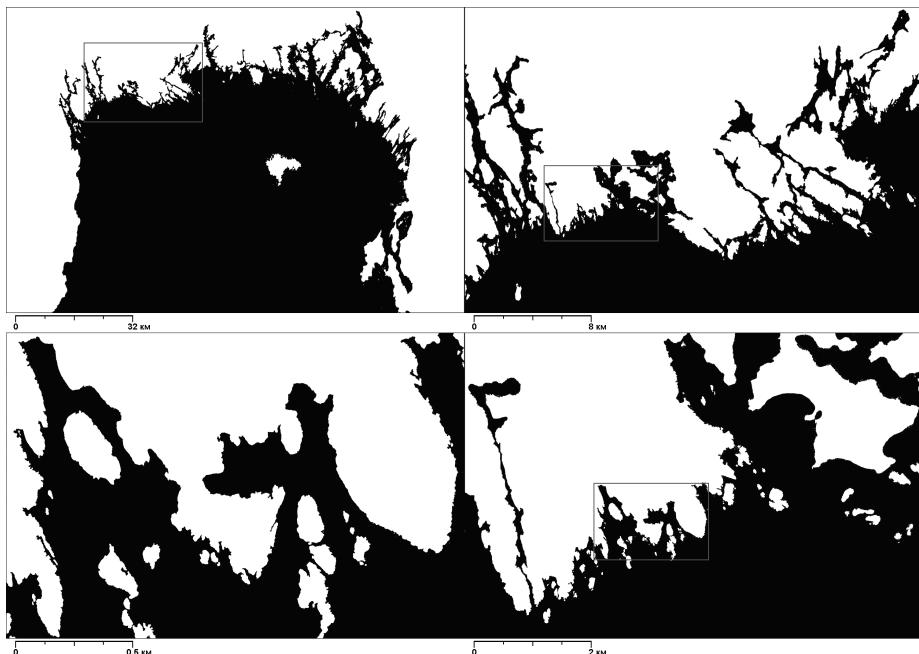


**Рис. 1.9.** Реализации одномерного случайного блуждания  $r(t)$ . Пунктиром показано среднеквадратичное смещение  $\langle r^2(t) \rangle^{1/2}$  в соответствии с законом Фика (1.14) при  $a = 1$

Замечательно, что и график зависимости смещения броуновской частицы также оказывается инвариантным относительно так называемого аффинного преобразования, когда масштабы времени и расстояния меняются в разных пропорциях (см. об этом в разделе 3.1.). Кривая зависимости смещения броуновской частицы сохраняет свои статистические свойства при аффинном преобразовании и поэтому называется самоаффинной. Это довольно сильно изрезанная кривая, причем характер ее изрезанности не зависит от масштаба, при его увеличении мы видим примерно такую же (статистически) частоту смен направления движения. Характерный вид такой зависимости представлен на рис. 1.9. Например, графики, отображенные на рис. 1.9, могут соответствовать интегральным результатам  $F(t)$  игры в «орлянку»: двое играющих подбрасывают монету, если выпадает «орел», то  $F(t+1) = F(t) + 1$ ; если выпадает «решка», то  $F(t+1) = F(t) - 1$ . Очевидно, что среднее значение функции  $F$  равно нулю  $\langle F \rangle = 0$ , но ее среднеквадратичные флуктуации растут как  $t^{1/2}$ . Более того, пересечения функцией  $F$  нулевого уровня (игроки не должны друг другу) встречаются с течением времени все реже и реже, конкретно, интервалы между соседними пересечениями тоже асимптотически увеличиваются как  $t^{1/2}$ . Именно этот факт лежит в основе народной мудрости: «играй, да не отыгryвайся»!

Наконец, обратимся к проблеме измерения длины береговой линии, поставленной впервые Ричардсоном при анализе береговой линии британского побережья [70, 95, 96]. Использованный им метод измерения длины можно описать следующим образом. Установим раствор циркуля на некоторую заданную длину  $\epsilon$ , которую назовем длиной шага, и пройдемся этим циркулем вдоль интересую-

шай нас береговой линии, начиная каждый новый шаг в той точке, где закончился предыдущий. Количество шагов, умноженное на длину  $\epsilon$ , даст нам приблизительную длину берега  $L(\epsilon)$ . Логично было бы ожидать, что при уменьшении длины шага  $\epsilon$  значение длины побережья быстро сойдется к некоторому значению, называемому истинной длиной. Однако Ричардсон обнаружил совсем иной эффект: при уменьшении длины шага  $\epsilon$  длина побережья  $L(\epsilon)$  склонна увеличиваться неограниченно, то есть, фактически, бесконечна. Такое поведение береговой линии связано с тем, что она не является гладкой кривой, а представляет собой фрактал. Идею масштабной инвариантности береговой линии иллюстрирует рис. 1.10. При увеличении масштаба рассмотрения береговой линии (то есть при уменьшении  $\epsilon$ ) неизбежно появляются новые подробности, новые полуострова и бухты, а на них еще более мелкие полуострова и бухточки и так далее.



**Рис. 1.10.** Скейлинг береговой линии Ладожского озера. Черная заливка соответствует водному зеркалу. Движение по часовой стрелке от паттерна в левом верхнем углу сопровождается последовательным четырехкратным ростом разрешения

Рассматривая изображения береговой линии выполненные в разных масштабах, мы не сможем сказать какому масштабу соответствует каждая из картин: они выглядят статистически одинаково. Это означает, что береговая линия — самоподобна, т.е. является масштабно-инвариантным объектом или, другими словами, объектом не имеющим характерной длины. Звездные скопления, горные ландшафты, речные системы [173], поверхности облаков [142], мозаичная структура

магнитосферной плазмы [77, 181] — все это примеры стохастических фрактальных систем, которыми заботливо окружила нас Природа.

Математически полученный Ричардсоном результат описывается следующим образом:

$$L(\epsilon) \sim \epsilon^{1-D}. \quad (1.16)$$

Итак, длина береговой линии бесконечна и поэтому не имеет никакой практической ценности. Что же было сделано неправильно и как же все-таки получить адекватную количественную характеристику береговой линии? Дело в том, что в данном случае изначально было неправильно выбрано понятие меры, что и привело к появлению бесконечности. Для гладких геометрических множеств мера определяется их топологической размерностью. Так, прямая характеризуется длиной, поверхность — площадью, множество в трехмерном пространстве — объемом. Если же для характеристики множества будет выбрана неверная мера, результат не будет иметь какой-либо ценности. Взявшись, например, измерить длину поверхности или площадь линии, мы обнаружим, что первая равна бесконечности, а вторая — нулю.

## 1.5. Методы расчета фрактальной размерности

Рассмотрим общую схему определения меры множества. Пространство, в котором находится множество, покрывается областями некоторого характерного размера  $\epsilon$ . Например, плоскость можно покрыть квадратной сеткой с размером ячеек  $\epsilon$ . Затем подсчитывается число  $N(\epsilon)$  таких областей, в которые попали точки исследуемого множества. Процедура повторяется для разных  $\epsilon$ , а мера определяется как предел:

$$\Pi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \epsilon^D. \quad (1.17)$$

Здесь  $D$  соответствует размерности объекта. Если ошибиться с выбором  $D$ , получим либо ноль, либо бесконечность. Именно это и происходит при оценке береговой линии. Полагая ее гладкой линией с  $D = 1$  и измеряя длину, получаем  $L = \infty$ . Увеличив размерность на единицу и полагая ее поверхностью с  $D = 2$ , получаем площадь  $S = 0$ . Единственный выход, ведущий к получению осмысленной меры, заключается в том, чтобы рассмотреть береговую линию как объект с дробной размерностью, лежащей между 1 и 2. Только при одном определенном значении размерности  $D = d_f$  существует ненулевой предел меры (1.17). Именно этот признак можно использовать для определения размерности фрактальных объектов:

$$d_f = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}. \quad (1.18)$$

Размерность, определенную с помощью покрытия множества областями фиксированной формы и размера, математики называют емкостью множества или раз-

мерностью Колмогорова. Математически более строгим является понятие размерности Хаусдорфа [67], именно эта размерность фигурирует в первом определении фрактала по Мандельброту.

Ключевой момент в определении размерности Хаусдорфа состоит в том, чтобы разрешить использовать для покрытия множества элементы произвольной формы и размера. Пусть мы имеем множество  $\mathfrak{F}$ , являющееся подмножеством  $n$ -мерного пространства. Рассмотрим его покрытие элементами произвольной формы и размера с тем ограничением, что диаметр множества, отвечающего любому элементу покрытия, не превышает заданной величины  $\delta$ . Диаметр  $i$ -го элемента покрытия  $E_i$  определяется как верхняя грань расстояния между двумя точками, ему принадлежащими:

$$\epsilon_i = \text{diam} E_i = \sup_{x,y \in E_i} \|x - y\|. \quad (1.19)$$

Введем зависящую от параметра  $d$  и от  $\delta$  сумму по всем элементам покрытия:

$$\Gamma_d(\delta) = \sum \epsilon_i^d \quad (1.20)$$

и определим нижнюю грань этой суммы по всем возможным покрытиям:

$$\gamma_d(\delta) = \inf(\Gamma_d(\delta)). \quad (1.21)$$

Если  $d$  велико, то

$$\gamma_d(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (1.22)$$

Если же  $d$  мало, то

$$\gamma_d(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty. \quad (1.23)$$

Промежуточное, критическое значение  $d_H$  такое, что при уменьшении  $\delta$  величина  $\gamma_d$  стремится к нулю для  $d > d_H$  и к бесконечности для  $d < d_H$ , есть размерность Хаусдорфа множества  $\mathfrak{F}$ .

Существует еще несколько различных определений размерности, например, размерность подобия, размерность Минковского [70, 100]. Суть такого многообразия размерностей в том, что существуют некоторые особые множества, для которых разные размерности принимают разные значения. Однако в практических приложениях чаще всего встречаются объекты, для которых все эти размерности совпадают, поэтому терминологически их часто не различают и говорят о фрактальной размерности объекта, обозначая её  $d_f$ .

Вернемся к нашему примеру с береговой линией. Расчеты Ричардсона показали, что показатель степени в уравнении (1.16) для западного побережья Британии составляет  $-0,22$ , соответственно фрактальная размерность  $d_f = 1,22$ . Данный результат свидетельствует о том, что береговая линия представляет собой нечто промежуточное между обычной гладкой кривой и поверхностью, она слишком извилиста, чтобы считаться обычной линией, но недостаточно, чтобы считаться

поверхностью. Фрактальная размерность в этом случае характеризует степень извилистости береговой линии. Существуют кривые, например кривые Пеано или след броуновской частицы на плоскости, которые имеют фрактальную размерность  $d_f = 2$ , т.е. они настолько извилисты, что заполняют плоскость.

Проще всего рассчитывать размерность конструктивных фракталов. Для них вследствие детерминированного способа построения фрактальную размерность можно посчитать точно. Пусть на некотором этапе построения конструктивного фрактала он состоит из  $N(\epsilon)$  элементов характерного размера  $\epsilon$ , а на другом этапе из  $N(\acute{\epsilon})$  элементов размера  $\acute{\epsilon}$ . Тогда величина фрактальной размерности может быть вычислена по формуле:

$$d_f = -\frac{\ln \left( \frac{N(\epsilon)}{N(\acute{\epsilon})} \right)}{\ln \left( \frac{\epsilon}{\acute{\epsilon}} \right)}. \quad (1.24)$$

В качестве примера рассчитаем размерность кривой Коха и салфетки Серпинского. При построении кривой Коха на каждом этапе отрезок фиксированного размера заменяется четырьмя отрезками втрое меньшего размера. Отсюда

$$d_f = -\frac{\ln \left( \frac{1}{4} \right)}{\ln \left( \frac{\epsilon}{\epsilon/3} \right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2816. \quad (1.25)$$

При построении салфетки Серпинского каждый треугольник фиксированного размера заменяется тремя треугольниками вдвое меньшего размера. Поэтому

$$d_f = -\frac{\ln \left( \frac{1}{3} \right)}{\ln \left( \frac{\epsilon}{\epsilon/2} \right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849. \quad (1.26)$$

При построении губки Менгера кубик фиксированного размера на каждом этапе заменяется двумя десятками кубиков втрое меньшего размера. Таким образом, для губки Менгера  $d_f = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2,7268$ .

Гораздо сложнее обстоит дело со случайными фракталами. Для таких фракталов приходится оценивать размерность по конкретной реализации, поэтому вследствие их стохастической природы неизбежно появляется ошибка, причем чаще всего статистические свойства такой оценки неизвестны (Loehle, Li, 1996) [141]. Методов оценки фрактальной размерности разработано достаточно много, однако четкой их классификации пока не существует. Так, например, Встовский и др. (2001) [12] выделяют прямые и непрямые геометрические методы, а также физические методы. Однако чаще выделяют группы методов в зависимости от типа данных, к которому они применяются.

Рассмотрим алгоритмы методов оценки размерности для некоторых часто встречающихся в расчетах типов данных (Halley et al., 2004) [121].

#### I. Метод подсчета занятых ячеек (box-counting)

Этот метод один из самых простых, чаще всего применяется для оценки размерности множества на плоскости по его изображению, хотя он легко обобщается на пространство любой размерности.

1. Изображение покрывается сеткой с размером ячейки  $\epsilon$ .
2. Подсчитывается число занятых ячеек  $N(\epsilon)$ .
3. Повторяются шаги 1. и 2. с увеличением размера ячейки  $\epsilon$  от минимального до максимального (увеличение обычно следует геометрическому ряду, например 2, 4, 8, 16).
4. Строится график зависимости  $N(\epsilon)$  в билогарифмических координатах.
5. Методом наименьших квадратов оценивается наклон этого графика, он и представляет собой фрактальную размерность, взятую с обратным знаком.

#### II. Метод скользящего окна (gliding box)

Этот метод является модификацией предыдущего. Он применяется, когда имеется сетка, каждая ячейка которой либо занята, либо нет (любое изображение легко приводится к такому виду).

1. Выбирается "окно анализа" некоторого размера  $\epsilon$ .
2. Окно помещается во все доступные позиции на сетке и подсчитывается число окон, захвативших хотя бы одну точку объекта  $N(\epsilon)$ .

Шаги 3-5 соответствуют методу подсчета ячеек.

#### III. Метод разделения (divider method)

Фактически это метод, использованный Ричардсоном. Применяется для оценки размерности линии по ее изображению.

1. Выбирается раствор воображаемого циркуля  $\epsilon$ .
2. Осуществляется проход линии этим циркулем и подсчитывается понадобившееся число шагов  $N(\epsilon)$ .

Шаги 3-5 соответствуют методу подсчета ячеек.

#### IV. Метод соотношения периметр-площадь

Применяется для определения фрактальной размерности береговой линии архипелага островов какой-либо природы по карте.

1. Для каждого острова определяется периметр  $P$  и площадь  $A$ .
2. Строится график зависимости  $P(A)$  в билогарифмических координатах.
3. Методом наименьших квадратов оценивается наклон этого графика, фрактальная размерность оценивается как удвоенный наклон.

#### V. Метод полувариограмм (semivariogram method)

Применяется, когда имеется набор точек, характеризующихся какой-либо величиной, это может быть временная серия или измерения на плоскости.

1. Измеряется расстояние между каждой парой точек (обычно евклидово).

2. Вычисляется разница в изучаемой величине для каждой пары точек и возводится в квадрат.

3. Строится график зависимости квадратов различий от расстояний между точками в билогарифмических координатах.

4. Фрактальная размерность вычисляется как  $d_f = n - m/n$ , где  $m$  — наклон графика,  $n$  — размерность пространства.

В заключение обзора методов оценки размерности следует отметить, что все они основаны на степенных законах. Такого рода зависимости характерны для фракталов и являются математическим выражением их свойства самоподобия. Однако это свойство у реальных природных фракталов выполняется лишь на некотором конечном диапазоне масштабов, вне этого диапазона самоподобие и фрактальные свойства пропадают. Поэтому для таких фракталов не имеет смысла предельный переход, использующийся в определениях размерности по Хаусдорфу и Колмогорову. Их фрактальная размерность должна оцениваться только по тем участкам графиков, где степенная зависимость сохраняется, то есть во всех изложенных выше алгоритмах наклон графиков в билогарифмических координатах должен определяться только по линейному участку.

## 1.6. Химическая размерность фрактала

Структуры имеющие одинаковую фрактальную размерность могут, тем не менее, значительно отличаться друг от друга, поэтому величина фрактальной размерности очень часто не может полностью охарактеризовать фрактальную структуру. Рассмотрим фрактал получающийся при реализации итерационной процедуры, изображенной на рис. 1.11.

Методом клеточной размерности находим размерность представленной структуры, она равна  $d_f = \frac{\ln 7}{\ln 4}$ . Для получения новой существенной информации об устройстве фрактала рассмотрим наикратчайший путь между двумя крайними точками структуры представленного фрактала. Очевидно, что элементы кластера, принадлежащие этому пути, формируют самоподобную структуру с фрактальной размерностью  $d_{\min} = \frac{\ln 5}{\ln 4}$ , называемой размерностью наикратчайшего пути или минимальной размерностью фрактала. Таким образом, длина  $l$  этого наикратчайшего пути, называемая часто химическим расстоянием [95, 96], меняется с увеличением евклидовой дистанции между выделенными элементами кластера по закону

$$l \sim r^{d_{\min}}. \quad (1.27)$$

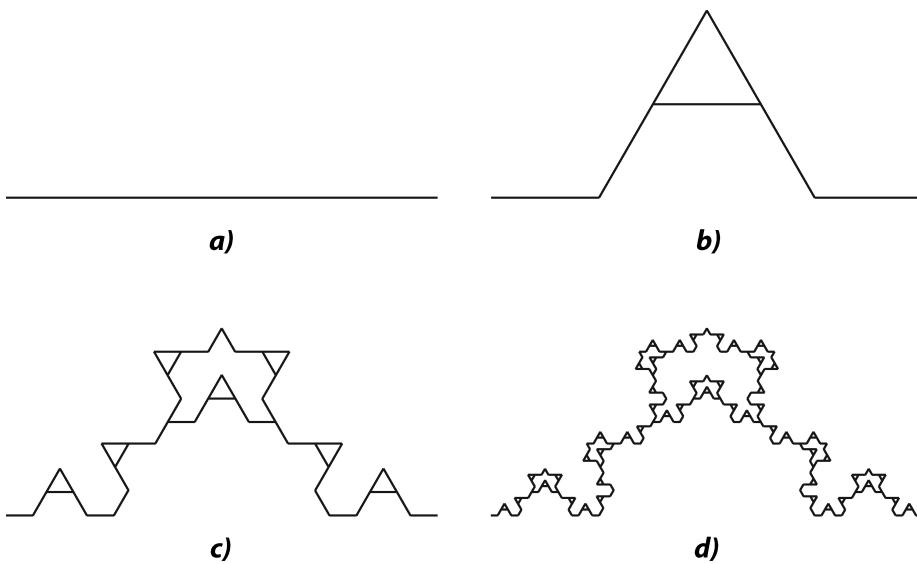
Обратное соотношение

$$r \sim l^{1/d_{\min}} \equiv l^{\tilde{\nu}} \quad (1.28)$$

показывает как  $r$  меняется с ростом  $l$ .

С размерностями  $d_f$  и  $d_{\min}$  тесно связана так называемая химическая размерность  $d_l$ , которая описывает изменение числа элементов кластера  $M$ , удаленных от некоторого фиксированного элемента на химическое расстояние, не превышающее дистанцию  $l$  с увеличением этой дистанции:

$$M(l) \sim l^{d_l}. \quad (1.29)$$



**Рис. 1.11.** Единичный отрезок а) делится на четыре равные части, крайние из которых остаются на месте, а центральные заменяются генератором из пяти отрезков в виде буквы А б). Далее процедура повторяется для каждого из 7 отрезков длины 1/4 в), а затем для каждого из 49 отрезков длины 1/16 г)

Если фрактальная размерность  $d_f$  характеризует рост массы кластера с увеличением его размера в евклидовом пространстве, то химическая размерность  $d_l$  описывает рост массы кластера в пространстве химических расстояний. Комбинируя (1.2), (1.27) и (1.29) находим связь

$$d_l = \frac{d_f}{d_{\min}}. \quad (1.30)$$

Для кривой Коха, например, химическая размерность равна единице  $d_l = 1$ , поскольку её минимальная и фрактальная размерности совпадают  $d_{\min} = d_f$ . А вот для ковра Серпинского, наоборот, единице равна его минимальная размерность  $d_{\min} = 1$ , при этом химическая размерность совпадает с фрактальной  $d_l = d_f$ .

В разделе 2.3. мы познакомимся с применением понятий минимальной и химической размерности в теории перколяции.

## 1.7. Мультифракталы и мультифрактальный формализм

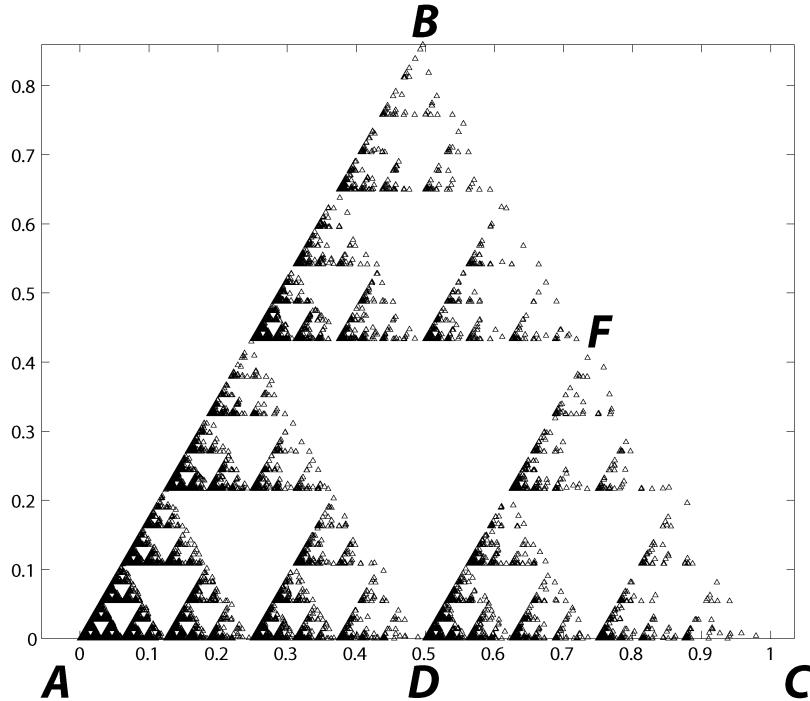
Мультифракталы — это неоднородные фрактальные объекты, для полного описания которых, в отличие от обычных фракталов, недостаточно введения всего лишь одной величины — его фрактальной размерности  $d_f$  — а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно [9, 70]. Причина этого заключается в том, что наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми размерностью  $d_f$ , такие фракталы обладают еще одним важным свойством, а именно распределением по своему геометрическому носителю некоторой меры. В качестве такой меры может выступать практически что угодно: плотность населения, концентрация вещества, намагниченность, энергия. Важным моментом является то, что мера распределена по мультифрактуалу неравномерно, но самоподобно [9, 12, 70, 95, 96].

Поясним, что понимается под «неоднородным фракталом», на примере салфетки Серпинского, получаемой посредством модифицированной игры в хаос (см. раздел 1.3.). Поменяем правила следующим образом: отдадим предпочтение какой-нибудь одной вершине (скажем, вершине  $A$ ) и будем выбирать ее с вероятностью 90%, другие же вершины оставим равнозначными, но на их долю теперь будет приходиться лишь по 5%. Результат такой «несимметричной игры» приводит к тому, что точки внутри треугольника распределены теперь крайне неравномерно. Большая их часть находится у вершины  $A$  и ее прообразов; в то же время у вершин  $B$  и  $C$  (и их прообразов) точек имеется крайне мало. Тем не менее данное множество точек является фракталом, так как свойство самоподобия здесь сохранилось. Треугольник  $DFC$ , хотя в нем в 20 раз меньше точек, по своим свойствам полностью подобен большому треугольнику  $ABC$ : так же, как и в большом треугольнике, точки в нем концентрируются в основном вблизи вершины  $D$  — аналоге вершины  $A$ . Процедура проиллюстрирована рис. 1.12.

Говоря о неоднородности такой салфетки Серпинского, мы указываем на различную концентрацию точек в разных ее частях. В данном случае, концентрация точек и выступает в роли той меры, распределенной по геометрическому носителю, о которой говорилось выше. Причем сам геометрический носитель неотличим от обычной салфетки Серпинского. Действительно, если устремить число точек в бесконечность, все возможные позиции (треугольники все уменьшающиеся масштаба) окажутся заняты, поэтому фрактальная размерность не изменится и останется равной  $\ln 3 / \ln 2$ .

Таким образом, обычный фрактальный подход не позволяет отличить однородные объекты от неоднородных. Неоднородные фракталы обладают рядом новых свойств по сравнению с однородными и для их полного описания одного показателя — фрактальной размерности  $d_f$  — оказывается недостаточно. Такая ситуация заставляет заняться поиском новых количественных характеристик. В

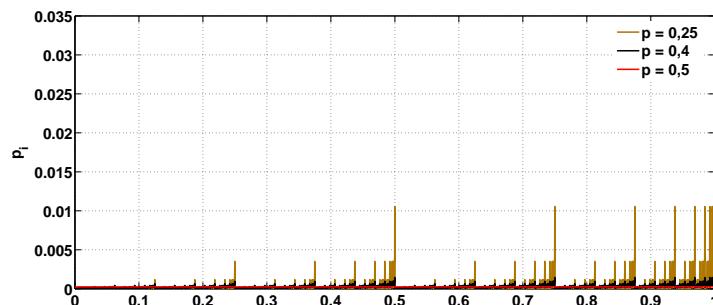
рамках решения этой задачи был разработан особый математический аппарат, получивший распространение как мультифрактальный формализм [122, 39, 53].



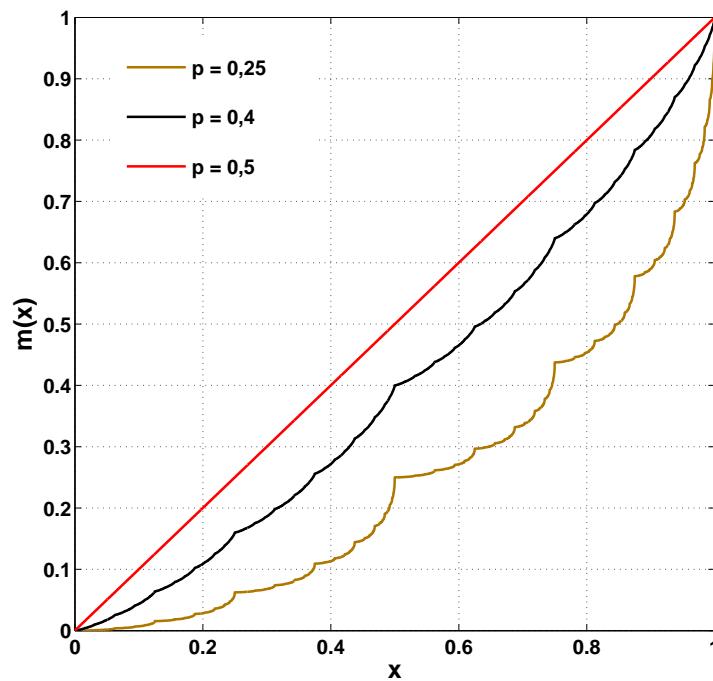
**Рис. 1.12.** Мультифрактальная салфетка Серпинского

Понятия, лежащие в основе мультифрактальной геометрии первоначально были введены Мандельбротом [143]. Мы изложим азбуку мультифрактального формализма, используя для иллюстрации биноминальный мультипликативный процесс [70]. Генератором мультипликативного процесса служит пара чисел  $p$  и  $1-p$ , где  $0 < p < 1$ . Запускается биноминальный мультипликативный процесс на единичном отрезке, на котором с единичной плотностью распределена некоторая масса или популяция. Исходный отрезок делится пополам и его масса перераспределяется следующим образом: левой половине приписывается плотность  $p$ , а правой — плотность  $1-p$ . Далее описанная процедура перераспределения массы применяется к каждой из двух половинок, в результате чего появляется четыре отрезка длины  $\epsilon = 2^{-2} = 1/4$  с соответствующим набором плотностей  $\{p^2; p(1-p); (1-p)p; (1-p)^2\}$ . На следующем шаге число отрезков снова удваивается и сопровождается соответствующим перераспределением массы. На рис. 1.13 показано распределение плотностей отрезков длины  $\epsilon = 2^{-12}$ , порожденных в 12-м поколении мультипликативного процесса при  $p = 0,25$ ;  $p = 0,4$  и  $p = 0,5$ . На рис. 1.14 представлена зависимость интегральной массы как функ-

ция положения на единичном отрезке для 12-ти итераций биноминального мультипликативного процесса при различных значениях  $p$



**Рис. 1.13.** Результаты 12-ти итераций биноминального мультипликативного процесса для различных значений  $p$



**Рис. 1.14.** Зависимость интегральной массы как функция положения на единичном отрезке для 12-ти итераций биноминального мультипликативного процесса при различных значениях  $p$

В общем случае рассматривается фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область  $\mathfrak{F}$  размера  $L$  в евклидовом пространстве с размерностью  $d$ . В нашем примере  $d = 1$  и  $L = 1$ . Пусть на каком-то этапе построения он представляет собой множество из  $G \gg 1$  точек, как-то распределенных в этой области. Мы будем предполагать, что в конце концов  $G \rightarrow \infty$ . Разобьем всю область  $\mathfrak{F}$  на кубические ячейки ( $d$ -кубики) со стороной  $\epsilon$  и объемом  $\epsilon^d$ . Далее нас будут интересовать только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка.

Пусть номер занятых ячеек  $i$  изменяется в пределах  $i = 1, 2, \dots, N(\epsilon)$ , где  $N(\epsilon)$  — суммарное количество занятых ячеек, зависящее от размера ячейки  $\epsilon$ . В нашем примере мультипликативного процесса  $N(\epsilon) = \epsilon^{-1}$ .

Пусть  $n_i(\epsilon)$  представляет собой количество точек в ячейке с номером  $i$ , тогда величина

$$p_i(\epsilon) = \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{n_i(\epsilon)}{G} \quad (1.31)$$

представляет собой вероятность того, что наугад взятая точка из нашего множества находится в ячейке  $i$ . Другими словами, вероятность  $p_i$  характеризует плотность или заселенность ячеек. Из определения  $p_i$  следует условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i(\epsilon) = 1. \quad (1.32)$$

Введем теперь в рассмотрение момент распределения точек по ячейкам, характеризуемый показателем степени  $q$ , который может принимать любые значения в интервале  $-\infty < q < +\infty$ :

$$M_q = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q(\epsilon). \quad (1.33)$$

Очевидно, что  $M_1 = 1$  и  $M_0 = N(\epsilon)$ . Для мультипликативного процесса поведение моментов  $M_q(\epsilon)$  при изменении  $\epsilon$  представлено на рис. 1.15 в билогарифмическом масштабе.

Рис. 1.15 для различных значений  $p$  и  $q$  показывает, что  $\ln(M_q)$  линейно меняется с ростом  $\ln(\epsilon^{-1})$ . Другими словами, моменты  $M_q(\epsilon)$  являются степенными функциями размера ячеек  $\epsilon$ :

$$M_q = \epsilon^{-\tau(q)}, \quad (1.34)$$

где функция  $\tau(q)$  имеет вид

$$\tau(q) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_q}{\ln \epsilon}. \quad (1.35)$$

Зависимость  $\tau(q)$  для биноминального мультипликативного процесса для различных значений  $p$  представлена на рис. 1.16. Видно, что при  $p = 0, 5$  зависимость  $\tau(q)$  линейна, и при  $p/(1-p) \neq 1$  отклоняется от линейной тем сильнее, чем более величина  $p/(1-p)$  отличается от единицы.

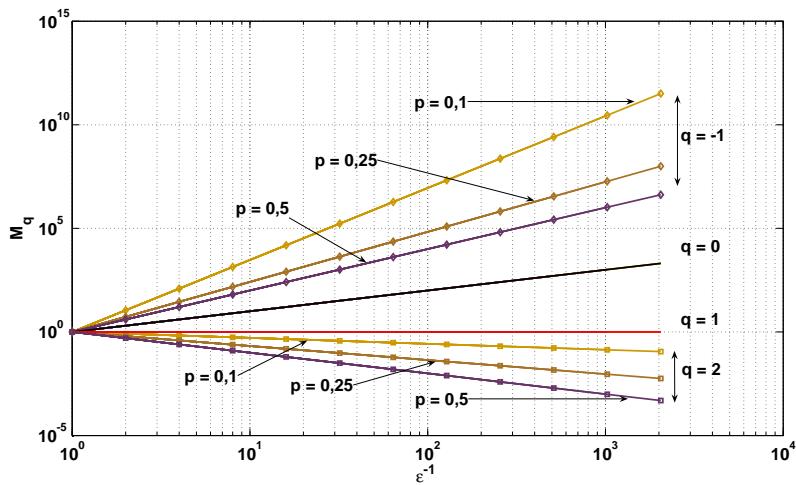


Рис. 1.15. Поведение моментов  $M_q(\epsilon)$  при изменении  $\epsilon$

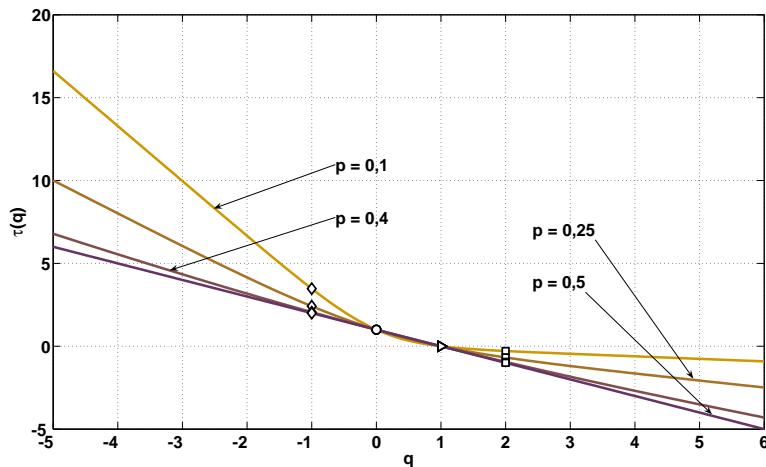


Рис. 1.16. Зависимость  $\tau(q)$  для биноминального мультипликативного процесса для различных значений  $p$

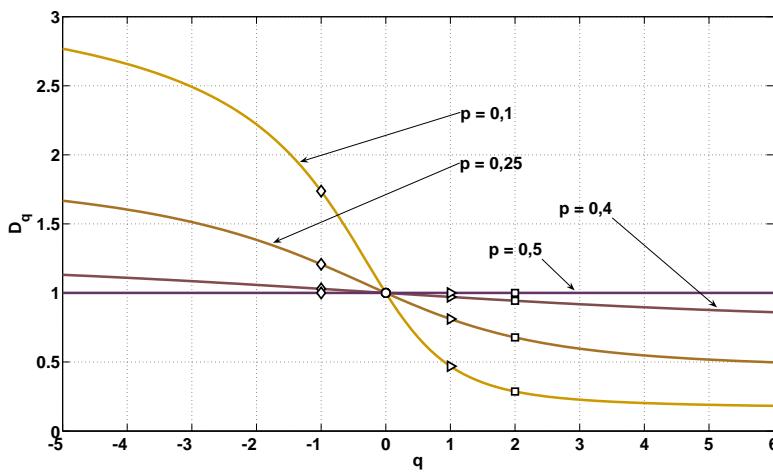
Для выявления степени отклонения от линейности функции  $\tau(q)$  в теории мультифракталов используют аппарат обобщенных размерностей.

Обобщенной размерностью  $D_q$  (обобщенной размерностью Ренни) распределения называется убывающая функция  $q$ , вводимая определением:

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1-q} \frac{\ln M_q(N)}{\ln \epsilon} \right\} = \frac{\tau(q)}{1-q}. \quad (1.36)$$

Для обычного однородного фрактала функция  $\tau(q)$  является линейной и все размерности Ренъи совпадают  $D_q = D_0 = d_f$  и не зависят от  $q$ . Он обладает только одной размерностью, поэтому такие объекты часто называют монофракталами, противопоставляя их мультифракталам, для описания которых нужен целый спектр размерностей Ренъи. Мультифрактал в общем случае характеризуется нелинейной функцией  $\tau(q)$ , определяющей поведение момента  $M_q$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Рис. 1.17 иллюстрирует зависимость  $D_q(q)$  на примере биноминального мультиплексивного процесса для различных значений  $p$ .



**Рис. 1.17.** Зависимость  $D_q(q)$  для биноминального мультиплексивного процесса для различных значений  $p$

Обобщенные размерности Ренъи  $D_q$  всегда монотонно убывают с ростом  $q$ , так что

$$D_q \geq D_{\dot{q}} \quad \text{при} \quad q > \dot{q}. \quad (1.37)$$

Здесь равенство имеет место для однородного фрактала. Максимального значения  $D_{max} = D_{-\infty}$  величина  $D_q$  достигает при  $q \rightarrow -\infty$ , а минимального  $D_{min} = D_{\infty}$  при  $q \rightarrow \infty$ .

Выясним теперь, какой физический смысл имеют обобщенные фрактальные размерности  $D_q$  для некоторых конкретных значений  $q$ . Так, при  $q = 0$  из выражения (1.33) следует, что

$$M_0(\epsilon) = N(\epsilon). \quad (1.38)$$

С другой стороны, согласно формулам (1.34) и (1.36),

$$M_0(\epsilon) \approx \epsilon^{-\tau(0)} = \epsilon^{D_0}. \quad (1.39)$$

Сопоставляя эти два равенства, мы приходим к заключению о том, что величина  $D_0$  представляет собой обычную фрактальную размерность мультифрактального

множества. Она является наиболее грубой характеристикой структуры и не несет информации о ее статистических свойствах.

Выясним теперь смысл величины  $D_1$ . Поскольку при  $q = 1$ , в силу условия нормировки вероятности (1.32), первый момент равен

$$M_1 = 1, \quad (1.40)$$

то  $\tau(1) = 0$ . Таким образом, мы имеем неопределенность в выражении (1.36) для  $D_1$ . Раскроем эту неопределенность с помощью операции предельного перехода. Полагая  $q = 1 + \varepsilon$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$ , мы используем очевидное представление

$$p_i^q = p_i p_i^{q-1} = p_i \exp[(q-1) \ln p_i].$$

В силу малости аргумента экспоненты, используем известную асимптотику

$$\exp(x) \approx 1 + x,$$

при  $|x| \ll 1$ , тогда:

$$p_i \exp[(q-1) \ln p_i] \approx p_i [1 + (q-1) \ln p_i],$$

и

$$p_i^q \approx p_i [1 + (q-1) \ln p_i].$$

Подставляя последнее выражение в формулу (1.36), получаем:

$$\lim_{q \rightarrow 1} M_q = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i.$$

Согласно условию нормировки (1.32) первая сумма в последнем выражении равна единице и

$$\lim_{q \rightarrow 1} M_q = 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i.$$

Вспоминая, что  $\ln(1+x) \approx x$ , при  $|x| \ll 1$ , получаем:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \ln M_q = \lim_{q \rightarrow 1} \ln \left\{ 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i \right\} = (q-1) \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$D_1 = \frac{-\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \epsilon} = \frac{H}{\ln \epsilon}, \quad (1.41)$$

где с точностью до знака числитель представляет собой энтропию фрактального множества или информационный индекс Шеннона:

$$H = - \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln p_i.$$

Такое определение энтропии множества полностью идентично используемому в термодинамике, где под  $p_i$  понимается вероятность обнаружить систему в квантовом состоянии  $i$ . Напомним, что в термодинамике энтропия есть мера беспорядка в системе. Простой пример, где молекулы газа, помещенные вначале в одну половину сосуда, заполняют весь сосуд, когда убирается перегородка, показывает, что в этом процессе беспорядок, а следовательно энтропия, возрастает. Этот рост беспорядка связан с ростом нашего незнания о состоянии системы, поскольку до удаления перегородки мы знали больше о расположении молекул. Основываясь на подобных соображениях, Клод Шенон обобщил понятие энтропии, известное в термодинамике, на абстрактные задачи теории передачи и обработки информации. Для этих задач энтропия стала мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении. Другими словами она является мерой нашего незнания о системе. В полной мере это относится и к проблеме распределения элементов мультифрактального множества по  $\epsilon$ -ячейкам. Действительно, величина  $D_1$  характеризует информацию, необходимую для определения местоположения элемента мультифрактального множества в той или иной  $\epsilon$ -ячейке. В связи с этим обобщенную фрактальную размерность  $D_1$  часто называют информационной размерностью. Она показывает как информация, необходимая для определения местоположения элементов, возрастает при уменьшении  $\epsilon$ .

Рассмотрим еще один частный случай,  $q = 2$ , и покажем, какой физический смысл имеет обобщенная фрактальная размерность  $D_2$ . Для нее справедливо следующее выражение:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2}{\ln \epsilon}. \quad (1.42)$$

Определим парную корреляционную функцию

$$C(G) = \frac{2}{G(G-1)} \sum_{n,m} \delta_{i(n)j(m)}, \quad (1.43)$$

где суммирование проводится по всем парам  $(n, m)$  из  $G$  элементов;  $i(n)$ , и  $j(m)$  – номера кубиков масштаба  $\epsilon$  (в нашем примере – отрезков длины  $\epsilon$ ), в которые попали выбранные точки;  $\delta_{i(n)j(m)}$  – символ Кронекера, т.е.  $\delta_{i(n)j(m)} = 1$ , если  $i = j$  и  $\delta_{i(n)j(m)} = 0$ , если  $i(n) \neq j(m)$ . Сумма в выражении (1.43) определяет число пар точек  $(n, m)$ , принадлежащих одному кубику  $\epsilon$ -разбиения. Поэтому, поделенная на  $G(G-1)/2$  – полное число пар, сумма в (1.43) определяет вероятность того, что две наугад взятые точки принадлежат одному и тому же  $\epsilon$ -кубику. Очевидно, что ненулевой вклад в сумму (1.43) будут вносить только пары точек, принадлежащих одному  $\epsilon$ -кубику, то есть:

$$\frac{2}{G(G-1)} \sum_{n,m} \delta_{i(n)j(m)} = \frac{2}{G(G-1)} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} G p_i (G p_i - 1)/2, \quad (1.44)$$

где  $Gp_i$  – число точек, попавших в  $i$ -й  $\epsilon$ -кубик. В асимптотике больших  $G$ , когда единицей можно пренебречь по сравнению с  $G$ , мы получаем

$$C(G) \simeq \sum_{i=1}^{N(G)} \frac{(Gp_i)^2}{G^2} = \sum_{i=1}^{N(G)} p_i^2. \quad (1.45)$$

Таким образом,

$$C(G) \simeq G^{-D_2}. \quad (1.46)$$

Мы приходим к выводу, что обобщенная размерность  $D_2$  определяет зависимость корреляционной функции  $C(G)$  от  $G$  в пределе  $G \rightarrow \infty$ . По этой причине величину  $D_2$  в литературе называют корреляционной размерностью [107].

Обобщенные размерности Ренни  $D_q$  не являются, строго говоря, фрактальными размерностями в общепринятом понимании этого термина. Поэтому наряду с ними для характеристики мультифрактального множества часто используют так называемую функцию мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  (спектр сингулярностей мультифрактала), к которой больше подходит термин фрактальная размерность.

Функция мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  дает представление структуры мультифрактала, полностью соответствующее представлению через обобщенные размерности Ренни  $D_q$  и функцию  $\tau(q)$ . Мультифрактальный спектр может быть получен преобразованием Лежандра функции  $\tau(q)$  при переходе от переменных  $q$  и  $\tau(q)$  к новым переменным  $\alpha$  и  $f(\alpha)$ :

$$\begin{cases} \alpha(q) &= \frac{d}{dq} \tau(q) \\ f(\alpha(q)) &= q\alpha(q) + \tau(q). \end{cases} \quad (1.47)$$

Переменная  $\alpha$  («индекс сингулярности») и неотрицательная функция  $f(\alpha)$  («спектр сингулярностей») дают представление о мультифрактальности структуры сообщества, полностью эквивалентное представлению через  $q$  и  $\tau(q)$ . Мультифрактальные спектры биноминального мультиплекативного процесса для различных значений  $p$  представлены на рис. 1.18.

Вернемся к рассмотрению вероятностей  $p_i$ , показывающих относительную заселенность ячеек размера  $\epsilon$ , которыми мы покрываем множество. Чем меньше размер ячейки, тем меньше величина ее заселенности. Для самоподобных множеств зависимость  $p_i$  от размера ячейки  $\epsilon$  имеет степенной характер:

$$p_i \simeq \epsilon^{\alpha_i}, \quad (1.48)$$

где  $\alpha_i$  представляет собой некоторый показатель степени, называемый индексом сингулярности, а также показателем Липшица-Гельдера. Зададимся вопросом о распределении вероятностей различных значений  $\alpha_i$ . Пусть  $n(\alpha)d\alpha$  есть вероятность того, что  $\alpha_i$  находится в интервале от  $\alpha$  до  $\alpha + d\alpha$ . Другими словами,  $n(\alpha)d\alpha$  представляет собой относительное число ячеек  $i$ , обладающих одной и той же мерой  $p_i$  с  $\alpha_i$ , лежащим в этом интервале. В случае монофрактала, для которого все

$\alpha_i$  одинаковы (и равны фрактальной размерности  $d_f$ ), это число пропорционально полному количеству ячеек  $N$ , степенным образом зависящим от размера ячейки  $\epsilon$ :  $N(\epsilon) \simeq \epsilon^{-d_f}$ . Показатель степени в этом соотношении определяется фрактальной размерностью множества  $d_f$ .

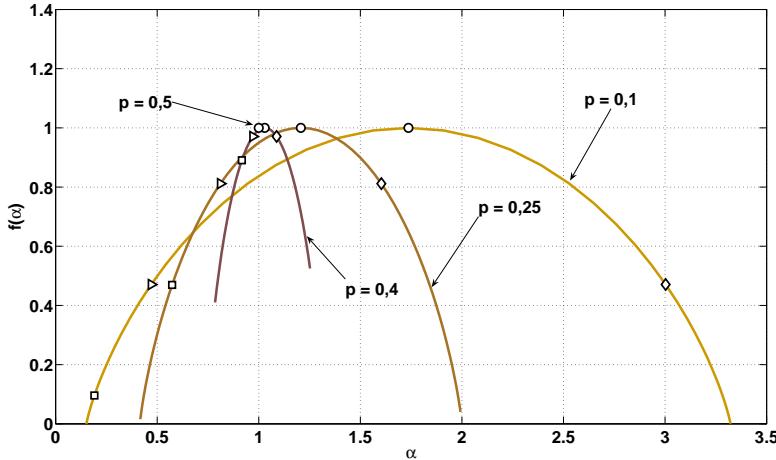
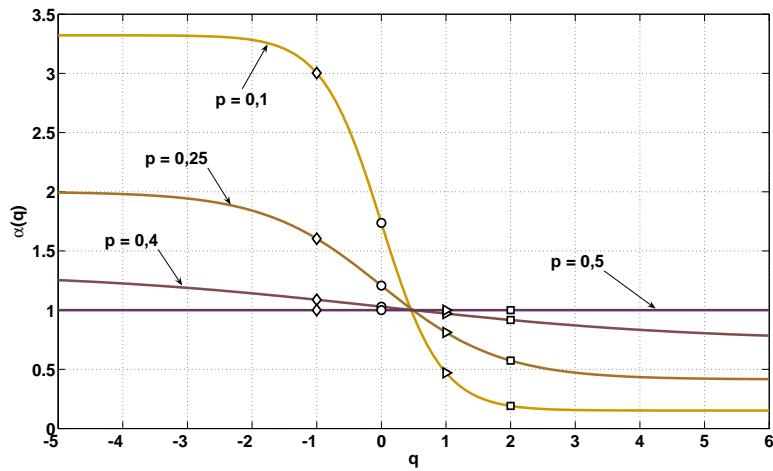


Рис. 1.18. Мультифрактальные спектры биноминального мультипликативного процесса для различных значений  $p$

Рис. 1.19 иллюстрирует зависимость  $\alpha(q)$  на примере биноминального мультипликативного процесса для различных значений  $p$ . Интересно сопоставить представленные здесь зависимости с поведением обобщенных размерностей  $D_q$  как функций порядка момента  $q$  (см. рис. 1.17).

Для мультифрактала разные значения  $\alpha_i$  встречаются с вероятностью, характеризуемой не одной и той же величиной  $d_f$ , а разными (в зависимости от  $\alpha$ ) значениями показателя степени  $f(\alpha)$ :

Таким образом, физический смысл функции  $f(\alpha)$  заключается в том, что она представляет собой размерность Хаусдорфа некоего однородного фрактального подмножества из исходного множества  $\mathfrak{F}$ , характеризуемого одинаковыми вероятностями заполнения ячеек  $p_i$ . Соответственно набор различных значений функции  $f(\alpha)$  представляет собой спектр фрактальных размерностей однородных подмножеств, на которые можно разбить исходное множество  $\mathfrak{F}$ . Отсюда становится понятным термин мультифрактал. Его можно понимать как некое объединение различных однородных фрактальных подмножеств исходного множества, каждое из которых имеет свое собственное значение фрактальной размерности.



**Рис. 1.19.** Зависимость  $\alpha(q)$  на примере биноминального мультипликативного процесса для различных значений  $p$

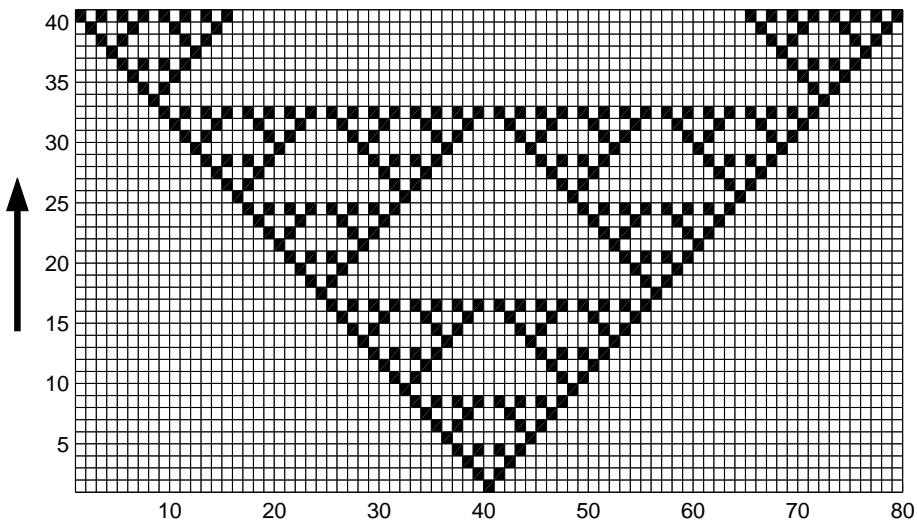
## 1.8. Фрактальная геометрия и физика

Мы знаем теперь как описать фрактальную конструкцию, как оценить ее размерность, но мы ничего не знаем о том как образуются фракталы. Почему так часто Природа решает свои проблемы с привлечением фрактальных структур? Поисками ответов на эти вопросы мучается сейчас значительная часть естествоиспытателей. Но пока рано говорить даже о свете в конце тоннеля. Мы можем лишь предложить войти в этот тоннель [69].

Поведение диссипативных распределенных систем реализуется в широком реPERTUARe динамических режимов: в зависимости от вида аттрактора, присутствующего в бесконечномерном фазовом пространстве системы, она может демонстрировать и всевозможные регулярные типы движений и пространственно-временной хаос. Исследования хаотических режимов часто сводятся к поиску конечномерных динамических аналогов исходной распределенной системы. Наименьшее число независимых переменных, однозначно определяющих установившееся движение диссипативной распределенной системы, называется минимальной размерностью вложения и оценивается либо с помощью процедуры основанной на теореме Такенса [172], либо с использованием более точного метода П. Грассбергера и И. Прокаччии [53, 111, 65]. Последний подход позволяет также рассчитать так называемую корреляционную размерность странного аттрактора [39].

Однако оценка размерности вложения аттрактора системы чрезвычайно усложняется с ростом числа измерений и становится совершенно невозможной, даже в теоретическом плане, для случая бесконечномерных аттракторов и нестацио-

нарных процессов. Альтернативный подход к исследованию нелинейной динамики распределенных систем может быть связан с идеей самоподобия структуры состояний системы в её конфигурационном или расширенном конфигурационном пространстве. Рассмотрим простой пример. Предположим, в нашем расположении есть одномерная цепочка взаимодействующих бистабильных элементов. Суть взаимодействия сводится к правилам перехода элементов из одного состояния в другое. Именно состояние элемента меняется на противоположное, если в предшествующий момент времени его ближайшие соседи – один справа, другой слева – находились в противоположных состояниях, в противном случае состояние элемента не меняется. В исходном положении все элементы находятся в одном состоянии и система стабильна. Пусть в некоторый момент времени один единственный элемент цепи был переведен насильно в противоположное состояние, тогда по цепи побегут волны переключения. Рис. 1.20 представляет эволюцию системы в расширенном конфигурационном пространстве: каждая горизонтальная линия соответствует конфигурации цепи в определенный момент времени. Полученная структура состояний оказывается фрактальной: с увеличением времени  $t$  полное число переключений в системе растет как  $t^{d_f}$ , где фрактальная размерность  $d_f = \ln 4 / \ln 3$  совпадает с размерностью знаменитой салфетки Серпинского [95].



**Рис. 1.20.** Распространение возбуждений (черные пиксели) в линейной цепочке спинов. Система представлена в расширенном конфигурационном пространстве, где каждому моменту времени соответствует отдельная строка структуры. Время увеличивается снизу вверх

Заметим, что фрактальным оказывается и поведение во времени каждого отдельного элемента линейной цепочки: число испытанных им переключений ме-

няется в асимптотике как  $t^{d_f - 1}$ . Поведение системы оказывается сложным в том смысле, что не существует ни одного характерного пространственного или временного масштаба (кроме размера и времени переключения элемента), контролирующего эволюцию системы во времени. Вместе с тем изменение состояний системы описывается простым степенным законом. При этом будущее прозрачно и предсказуемо, несмотря на нестационарность и отсутствие конечномерных динамических аналогов. Таким образом, уже на этом простом примере видно, что самоподобие структуры состояний системы в расширенном конфигурационном пространстве представляет собой конструктивную основу для анализа сложной динамики, которая не вписывается в рамки классических подходов [1, 6, 7, 11, 13, 19, 23, 24, 25, 29, 58, 59, 60, 71, 75].

## **Глава 2**

# **ТЕОРИЯ ПЕРКОЛЯЦИИ**

Мы уже упоминали, что возникающие в природе фрактальные структуры, как правило, оказываются стохастическими, т.е. присущее фракталам самоподобие проявляется в виде универсальных вероятностных распределений самих структурных элементов системы. Чрезвычайно эффективный и удивительный по своей простоте способ генерации фракталов дает теория перколяции, к изложению которой мы и переходим.

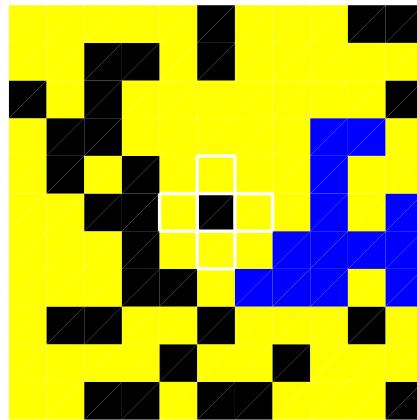
## 2.1. Перколяция на регулярных решетках

В 1957 году математики Бломберген и Хаммерсли опубликовали статью [93], в которой поделились с читателями идеей вероятностной формализации процесса просачивания воды в перколяторе электрической кофеварки. Их построение было альтернативой классическому диффузионному описанию распространения одной физической субстанции, условно называемой *жидкостью* в другой, условно называемой *средой*. Так возникла новая теория, названная впоследствии теорией перколяции или протекания (от английского глагола *to percolate* – просачиваться, протекать). Справедливости ради стоит отметить, что впервые перколяционные идеи были сформулированы еще в 1941 году Флори [101] при исследовании процесса полимеризации или гелеобразования (см. раздел. 2.5.).

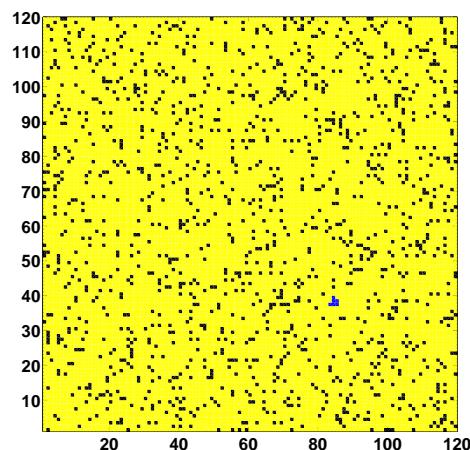
Перколяция представляет наглядную модель неупорядоченной среды. Простейшие решеточные задачи теории протекания формулируются следующим образом [64, 96, 161, 73]. Рассмотрим квадратную решетку, каждый узел которой занят с вероятностью  $p$  или пуст с вероятностью  $1 - p$ . Вероятность  $p$  можно интерпретировать как долю (концентрацию) занятых узлов при случайно-однородном заполнении решетки. Пустые и занятые узлы могут отвечать самым разнообразным физическим свойствам. Например, в разделе 3.4., рассматривая модель пористой среды, мы будем считать занятые узлы порами, а свободные – элементами твердой матрицы. Или можно считать занятые узлы проводниками электрического тока, а свободные – изоляторами. Для определенности мы сейчас так и поступим. Пусть для наглядности занятые (черные) квадратики на рис. 2.1 являются проводниками, а пустые (желтые) — изоляторами.

Естественно предположить, что электрический ток может течь только между ближайшими проводящими ячейками, имеющими общее ребро. Варианты выбора четырех ближайших соседей для фиксированного узла на квадратной решетке обведены на рис. 2.1 белым.

Поскольку перколяционная теория оперирует с вероятностными характеристиками, ее выводы становятся тем более точными, чем больше размеры системы. Рис. 2.1 играет вспомогательную роль и демонстрирует нам маленькую решетку с размерами  $11 \times 11$  и концентрацией занятых, т.е. проводящих, узлов  $p = 0, 3$ , а вот на рис. 2.2 показана решетка  $120 \times 120$  с концентрацией проводящих узлов  $p = 0, 1$ .



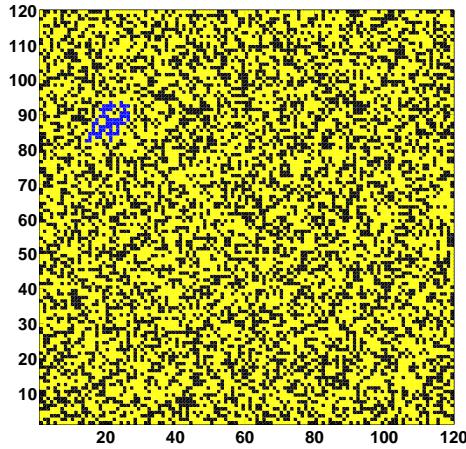
**Рис. 2.1.** Задача узлов на квадратной решетке. Черные ячейки квадратной решетки проводят электрический ток, желтые – являются изоляторами, синие – соответствуют максимальному проводящему кластеру. Белым выделены ближайшие соседи центрального узла



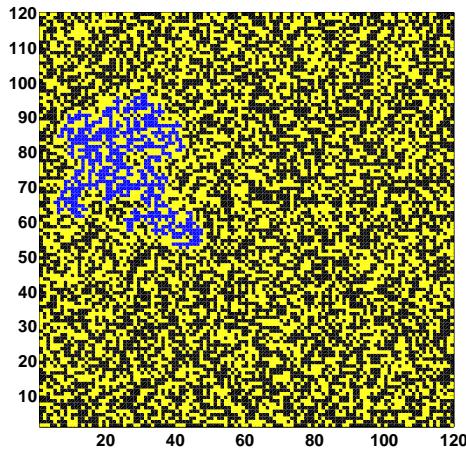
**Рис. 2.2.** Задача узлов на квадратной решетке. Концентрация проводящих узлов равна  $p = 0,1$ . Синий цвет соответствует максимальному проводящему кластеру

Из рис. 2.2 видно, что при малых концентрациях  $p \ll 1$  проводящие квадратики либо изолированы друг от друга либо формируют небольшие группы — кластеры ближайших соседей (cluster — англ. — гроздь). Два проводящих узла принадлежат одному кластеру в том и только том случае, когда они связаны

проводящей цепочкой ближайших соседей<sup>†</sup>. Максимальный проводящий кластер выделен на всех рисунках этого пункта синим цветом.



**Рис. 2.3.** Задача узлов на квадратной решетке. Концентрация проводящих узлов равна  $p = 0,4$ . Синий цвет соответствует максимальному проводящему кластеру



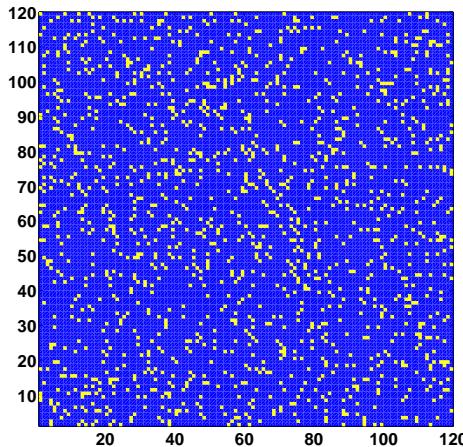
**Рис. 2.4.** Задача узлов на квадратной решетке. Концентрация проводящих узлов равна  $p = 0,55$ . Синий цвет соответствует максимальному проводящему кластеру

---

<sup>†</sup>Здесь и далее, если не оговорено противное, мы считаем ближайшими соседями ячейки, имеющие общее ребро

При увеличении концентрации занятых узлов растут и характерные размеры проводящих кластеров. Так, рис. 2.3 и 2.4 показывают нашу решетку  $120 \times 120$  при концентрации проводящих узлов, равной, соответственно,  $p = 0,4$  и  $p = 0,55$ .

При  $p \ll 1$  (а также при  $p = 0,3$  и  $p = 0,55$ ) система в целом демонстрирует диэлектрические свойства, поскольку не существует длинных проводящих цепей соединяющих противоположные стороны нашей решетки. Наоборот, как видно из рис. 2.5 при  $p \sim 1$  проводящей оказывается подавляющая доля пространства решетки, синие узлы формируют гигантский проводящий кластер обеспечивающий прохождение электрического тока с одной стороны системы на другую.



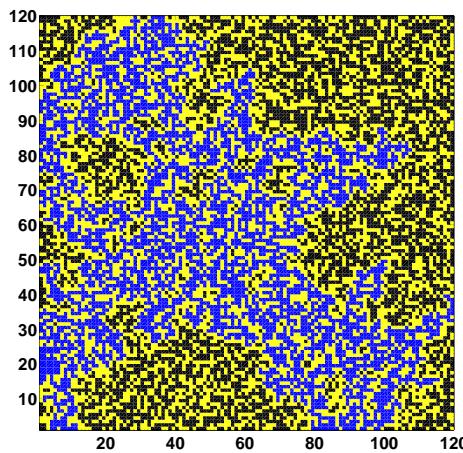
**Рис. 2.5.** Задача узлов на квадратной решетке. Концентрация проводящих узлов равна  $p = 0,9$ . Все занятые узлы принадлежат одному максимальному проводящему кластеру

Существует некоторое критическое значение  $p = p_c$ , при котором происходит переход от диэлектрического состояния (при  $p < p_c$ ) к проводящему при ( $p > p_c$ ). Критическое значение  $p = p_c$  называется порогом протекания (перколяции). Говорят при этом, что перколяция – протекание осуществляется по занятым узлам. Глядя на наши рисунки мы можем сказать, что протекание происходит по черным узлам решетки (правда, сам перколяционный кластер мы перекрасили для наглядности в синий цвет).

Внимательный читатель мог обратить внимание на то, что рисунки 2.2 и 2.5, соответствующие значениям концентрации  $p = 0,1$  и  $p = 0,9$ , с точностью до замены цветов статистически идентичны друг другу. Действительно, в силу случайно однородного распределения пустых или занятых узлов наша система инвариантна относительно «перекрашивания», т.е. замены пустых ячеек занятыми и

наоборот при одновременной замене вероятности  $p$  на величину  $1 - p$ . Другими словами, с математической точки зрения нет никакой разницы между протеканием по занятым (черным) узлам от протекания по свободным (желтым) узлам. Следует подчеркнуть при этом, что физические или прикладные аспекты протекания, разумеется, жестко связаны с выбором типа узлов: протекание по проводящим узлам не идентично протеканию по узлам-изоляторам.

Для задачи узлов на квадратной решетке порог протекания приблизительно равен  $p_c \approx 0,59$  (для кубической решетки порог задачи узлов равен  $p_c \approx 0,33$ ). Близкая к порогу ситуация отображена на рис. 2.6.

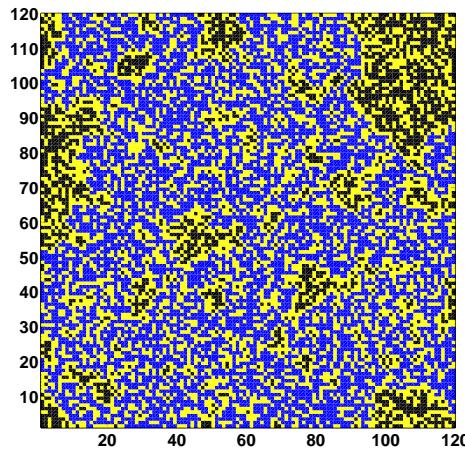


**Рис. 2.6.** Задача узлов на квадратной решетке. Концентрация пор близка к пороговой и равна  $p = 0,59$ . Синий цвет соответствуют перколоционному проводящему кластеру

В противоположность обычным фазовым превращениям, где смена фаз происходит при некоторой критической температуре, описанный выше перколоционный переход является геометрическим фазовым превращением. Перколоционный фазовый переход характеризуется геометрическими свойствами проводящих кластеров вблизи  $p = p_c$ . При  $p \ll 1$  существуют только кластеры небольших размеров. По мере роста концентрации занятых узлов  $p$  средний размер кластеров увеличивается. При концентрации, близкой к критической, появляется кластер, связывающий противоположные стороны решетки. Такой кластер называют *перколоционным* (*percolating*)<sup>†</sup> (синие пиксели на рис. 2.6). В термодинамическом пределе бесконечно протяженной решетки перколоционный кластер называют *бесконечным* кластером (*infinity cluster*). Как видно из рис. 2.7 с дальнейшим ростом концентрации доля принадлежащих перколоционному кластеру узлов (плот-

<sup>†</sup> В специальной литературе перколоционный кластер иногда называют стягивающим (spanning) или соединяющим (connecting).

нность перколяционного кластера) возрастает. В системе возникает перколяционная сеть, размеры дыр в которой сокращаются с увеличением  $p$ . Соответственно, средний размер конечных кластеров, не принадлежащих перколяционному кластеру, уменьшается и при  $p \sim 1$  все узлы принадлежат, очевидно, только одному кластеру.



**Рис. 2.7.** Задача узлов на квадратной решетке. Концентрация проводящих узлов ,больше критической и равна  $p = 0,62$ . Синий цвет соответствует перколяционному проводящему кластеру

С математической точки зрения каждый кластер — это связная компонента всего множества занятых узлов, поэтому перколяционный кластер можно интерпретировать как связное подмножество всех занятых узлов решетки, по которому мы можем пройти, или, как в рассматриваемом нами примере, пропустить ток с одного края системы на противоположный. В пределе бесконечной системы бесконечным становится и перколяционный кластер.

Естественно характеризовать перколяционный кластер его мощностью, которая определяется как отношение числа его элементов, т.е. числа принадлежащих ему узлов, к полному числу узлов решетки. Другими словами, мощность перколяционного кластера — это просто вероятность того, что выбранный наугад узел решетки принадлежит перколяционному кластеру. Мощность бесконечного кластера обозначается в литературе как  $P_\infty$ . Величину  $P_\infty$  называют еще вероятностью протекания. Можно сказать, что перколяционный переход связан с появлением ненулевой вероятности протекания в системе. Когда  $p < p_c$ , существуют только конечные кластеры, и  $P_\infty = 0$ . При  $p > p_c$ , как мы увидим в разделе 2.2.,  $P_\infty$  увеличивается с  $p$  по степенному закону, что типично для обычных физических фазовых превращений.

Введем функцию распределения кластеров  $n_s$  по размерам, точнее, по числу  $s$  составляющих их элементов:

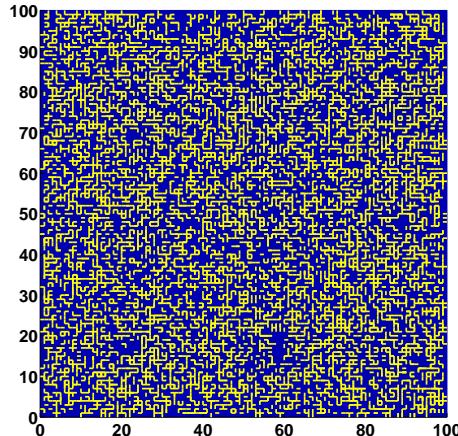
$$n_s(p) = \frac{\langle N_s \rangle}{N}, \quad (2.1)$$

где  $\langle N_s \rangle$  — среднее число кластеров размера  $s$ , а  $N$  — полное число ячеек рассматриваемой решетки. Величина  $sn_s$  определяет удельное (в пересчете на одну ячейку решетки) число ячеек, принадлежащих кластерам размера  $s$ . Очевидно, что

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} sn_s(p) = p. \quad (2.2)$$

Другими словами, вероятность того, что узел принадлежит хоть какому-либо кластеру, совпадает с вероятностью того, что он просто занят.

Выше мы рассмотрели формулировку задачи узлов (site percolation), когда случайно занятыми или пустыми оказывались узлы квадратной решетки. Если случайно выбирать состояние ребер решетки (например, считать ребра проводящими или непроводящими), мы придем к формулировке задачи связей (bond percolation). Формулировка задачи связей иллюстрирует рис. 2.8



**Рис. 2.8.** Задача связей на квадратной решетке  $100 \times 100$ . Концентрация проводящих связей ниже критической

Две занятых (проводящих) связи принадлежат одному кластеру в том и только том случае, когда они связаны цепочкой занятых (проводящих) связей. Критическая концентрация связей отделяет фазу конечных кластеров от фазы существования бесконечного кластера на плоской решетке. Для простой квадратной решетки критическая концентрация связей равна точно половине:  $p_c = 1/2$ .

## 2.2. Протекание как критическое явление

Теория критических явлений имеет дело с макроскопическими статистическими системами, находящимися вблизи точки фазового перехода. Наблюдаемые явления в этой ситуации характеризуются крупномасштабными неустойчивостями, или флуктуациями.

Как было уже упомянуто, появление в системе бесконечного кластера связанных элементов можно рассматривать как геометрический фазовый переход: критическая концентрация  $p = p_c$  отделяет фазу конечных кластеров  $p < p_c$  от фазы  $p > p_c$ , где уже существует бесконечный кластер. Мы увидим, что перколяционное превращение во многом напоминает обычные термодинамические фазовые переходы 2-го рода. Следуя работам [96, 62] проведем эту параллель на примере магнитного превращения. Так, некоторые материалы демонстрируют при низких температурах спонтанную намагниченность  $\mu > 0$  при отсутствии внешнего магнитного поля (ферромагнитная фаза). При повышении температуры спонтанная намагниченность, непрерывно уменьшаясь, исчезает при некоторой критической температуре  $\theta = \theta_c$ . При температурах выше критической  $\mu = 0$  (парамагнитная фаза).

Магнитные материалы представлены набором элементарных магнитных моментов (спинов). Взаимодействие между ними поддерживает упорядоченное состояние, в котором направления всех спинов параллельны друг другу. С другой стороны, термические флуктуации разрушают порядок и поддерживают состояние, в котором ориентации спинов случайны. При низких температурах взаимодействие магнитных моментов доминирует – в системе возникает дальний порядок. Спонтанная намагниченность описывает этот дальний порядок и называется параметром порядка магнитного перехода. С увеличением температуры спонтанная намагниченность уменьшается и вблизи  $\theta_c$  стремится к нулю по степенному закону  $\mu(\theta) \sim (\theta_c - \theta)^\beta$ . Выше критической температуры тепловая энергия доминирует и лишь конечные кластеры соноправленных спинов могут существовать. Их случайная ориентация обеспечивает нулевую спонтанную намагниченность.

В протекании концентрация  $p$  занятых узлов играет роль температуры в термических фазовых переходах. Как и в термических фазовых переходах длинные корреляционные связи контролируют перколяционное превращение и поведение значимых величин вблизи перехода описывается степенными законами и критическими индексами.

Перколяционный переход характеризуется геометрическими свойствами связанных кластеров вблизи  $p = p_c$ . Важной величиной является вероятность  $P_\infty$  того, что узел (или связь) принадлежит бесконечному кластеру. Когда  $p < p_c$ , существуют только конечные кластеры, и  $P_\infty = 0$ . При  $p > p_c$ ,  $P_\infty$  ведет себя подобно спонтанной намагниченности ниже  $\theta_c$  и увеличивается с  $p$  по степенному закону

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta. \quad (2.3)$$

Так же, как и спонтанная намагниченность,  $P_\infty$  описывает порядок в перколяционной системе и может быть определена как параметр порядка. Линейные размеры конечных кластеров ниже и выше  $p_c$  характеризуются корреляционной длиной. Корреляционная длина  $\xi$  определена как среднее расстояние между узлами одного и того же конечного кластера. С приближением к  $p_c$   $\xi$  возрастает как

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad (2.4)$$

с одинаковым показателем  $\nu$  ниже и выше порога. Среднее число узлов (масса) конечного кластера тоже расходится

$$S \sim |p - p_c|^{-\gamma}, \quad (2.5)$$

опять же с одинаковым показателем  $\gamma$  ниже и выше порога. Для получения  $S$  и  $\xi$  требуется вычисление средних по всем конечным кластерам на решетке. В магнитных системах величинам  $P_\infty$  и  $S$  соответствуют спонтанная намагниченность  $\mu$  и восприимчивость  $\chi$  (см. табл. 2.1).

**Таблица 2.1.** Критические индексы перколяционного перехода

Перколяция	$d = 2$	$d = 3$	$d \geq 6$
Индекс параметра порядка, $\beta$	5/36	$0,417 \pm 0,003$	1
Индекс радиуса корреляции, $\nu$	4/3	$0,875 \pm 0,008$	1/2
Среднее число элементов в кластере, $\gamma$	43/18	$1,795 \pm 0,005$	1
Магнетизм	$d = 2$	$d = 3$	$d \geq 6$
Индекс параметра порядка, $\beta$	1/8	0,32	1/2
Индекс радиуса корреляции, $\nu$	1	0,63	1/2
Восприимчивость, $\gamma$	7/4	1,24	1

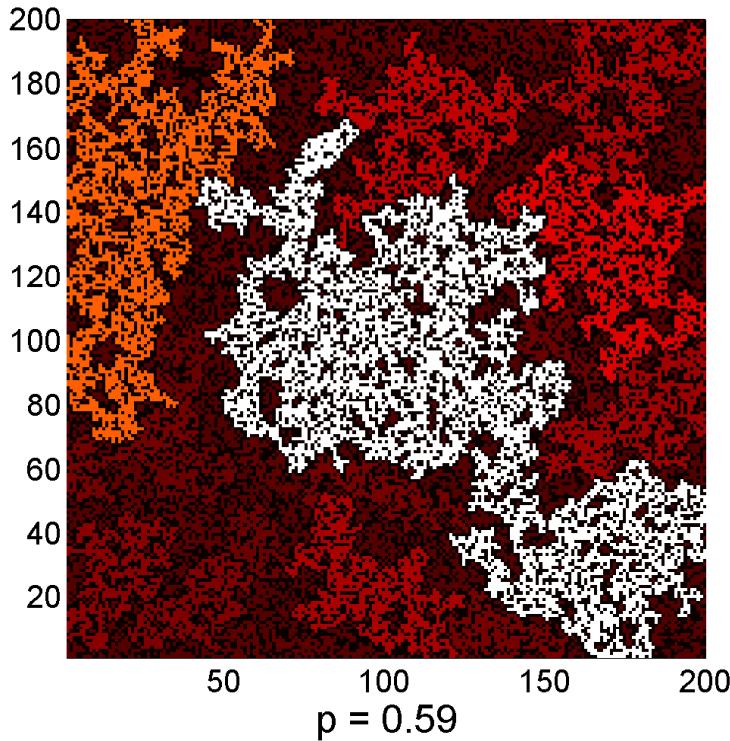
Еще один критический индекс характеризует поведение функции распределения кластеров по размерам  $n_s$ . Зависимость  $n_s$  от критического параметра  $p$  имеет следующий вид:

$$n_s(p) \sim s^{-\kappa} \exp\{-As|p - p_c|^\delta\}. \quad (2.6)$$

Показатель  $\delta$  определяет характерный наибольший размер конечных кластеров. Кластеры с  $s_c \sim |p - p_c|^{-\delta}$  называются критическими. Кластеры с  $s > s_c$  экспоненциально маловероятны. А вот встречаемость кластеров с числом элементов  $s \ll s_c$  как видно из (2.6) демонстрирует скейлинговое поведение

$$n_s(p) \sim s^{-\kappa}. \quad (2.7)$$

На рис. 2.9 представлена иллюстрация задачи перколяции узлов в непосредственной близости от порога, при этом кластеры различных размеров выкрашены в различные цвета (чем крупнее кластер, тем более теплый и светлый оттенок).



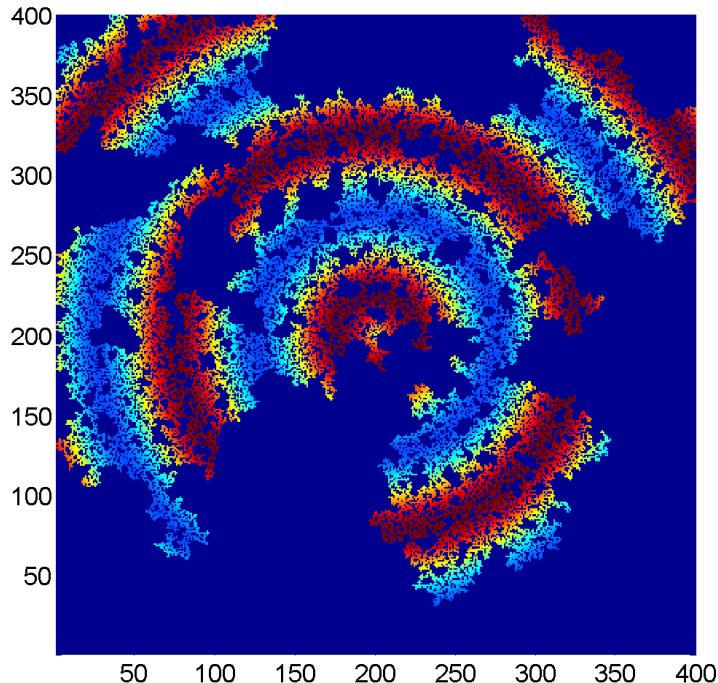
**Рис. 2.9.** Задача узлов на квадратной решетке  $200 \times 200$ . Различные цвета соответствуют кластерам различного размера, максимальный кластер выделен белым

Показатели  $\beta$ ,  $\nu$  и  $\gamma$  описывают критическое поведение типичных величин связанных с переколяционным переходом и называются критическими индексами. Индексы эти универсальны и не зависят не от структурных особенностей решетки (квадратная или треугольная и т.д.), не от типа протекания (по узлам, по связям или континуальное), но только от размерности пространства.

Это свойство универсальности является характерной чертой фазовых переходов 2-го рода, где параметр порядка непрерывно исчезает в критической точке. Например, спонтанная намагниченность всех трехмерных магнитных материалов описывается одним и тем же индексом  $\beta$  независимо от кристаллической структуры и типа взаимодействия между соседними спинами. Заметим, что все введенные выше величины определены в термодинамическом пределе бесконечно больших систем. В ограниченной системе  $P_\infty$ , например, не обязательно равно нулю ниже порога.

### 2.3. Структура перколоционного кластера

Начнем с рассмотрения бесконечного кластера на пороге протекания  $p = p_c$ . Типичный пример двумерного бесконечного кластера показан на рис. 2.10, где видно, что бесконечный кластер содержит дыры на всех масштабах, подобно салфетке Серпинского (см. рис. 1.4).



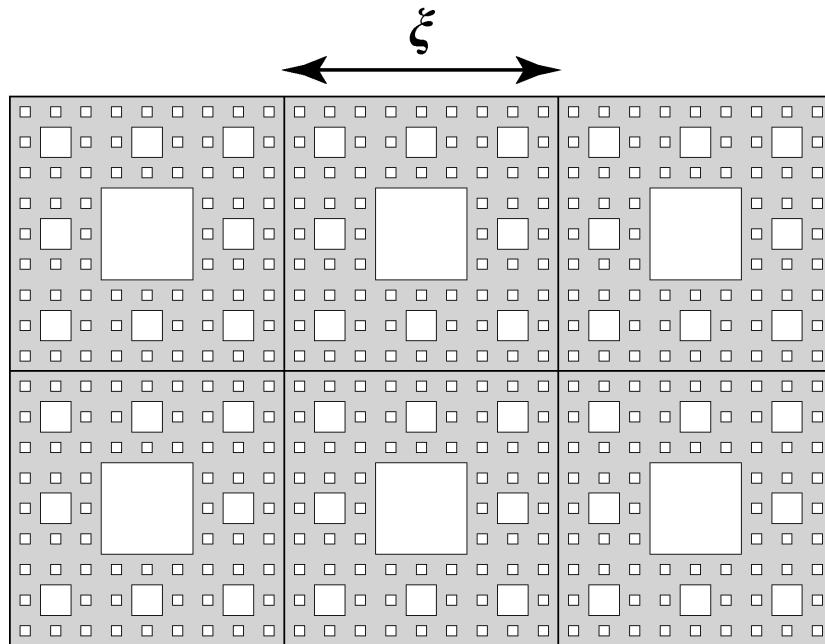
**Рис. 2.10.** Перколоционный кластер вблизи порога протекания. Цвет узлов меняется как периодическая функция их евклидова расстояния от некоторого узла в центре решетки

Кластер самоподобен на всех линейных масштабах больших периода решетки и меньших размера системы и может рассматриваться как фрактал. Фрактальная размерность  $d_f$  описывает как в среднем меняется масса кластера  $M$  (число его элементов) внутри евклидовой сферы с радиусом ее радиуса  $r$ ,

$$M(r) \sim r^{d_f}. \quad (2.8)$$

Мы знаем, что для случайных фракталов  $M(r)$  представляет результат усредне-

ния по многим различным конфигурациям бесконечного кластера или, что то же самое, по многим сферам с различными центрами на одном и том же бесконечном кластере. Выше и ниже порога средние размеры конечных кластеров описываются корреляционной длиной  $\xi$ . На пороге  $p = p_c$   $\xi$  расходится и дыры в бесконечном кластере обнаруживаются на всех масштабах. Выше порога  $\xi$  представляет средний характерный размер дыр в бесконечном кластере. Поскольку  $\xi$  конечно выше порога, то самоподобие бесконечного кластера простирается только на масштабы меньшие  $\xi$ . Мы можем интерпретировать  $\xi(p)$  как типичный масштаб самоподобия, в пределах которого бесконечный кластер демонстрирует фрактальные свойства. На масштабах больших  $\xi$  структура бесконечного кластера утрачивает самоподобие и становится однородной.



**Рис. 2.11.** Иллюстрация явления кроссовера от фрактального поведения на малых масштабах к однородному на больших на примере регулярного паркета составленного из ковриков Серпинского с размерами  $\xi$

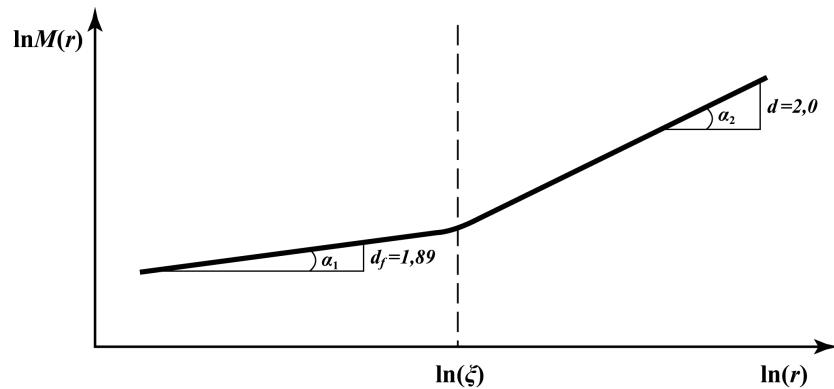
На рис. 2.11 кроссовер от фрактального поведения на малых масштабах к однородному на больших показан на примере регулярного паркета составленного из ковриков Серпинского с размерами  $\xi$ . На масштабах  $r < \xi$  представленная структура характеризуется фрактальным поведением, напротив, при  $r > \xi$  структура становится однородной и её плотность не меняется с масштабом.

Итак, мы видим фрактальный кластер на линейных масштабах меньше чем  $\xi$ . На масштабах превышающих  $\xi$  мы обнаруживаем однородную структуру, кото-

рая набрана из многочисленных ячеек размера  $\xi$ . Математически это может быть записано в виде:

$$M(r) \sim \begin{cases} r^{d_f}, & r \ll \xi, \\ r^d, & r \gg \xi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Рис. 2.12 схематически показывает явление кроссовера в перколяционной системе для значений  $r \simeq \xi$ .



**Рис. 2.12.** Схематическое изображение явления кроссовера

Сейчас мы свяжем фрактальную размерность  $d_f$  перколяционного кластера с критическими индексами  $\beta$  и  $\nu$ . Вероятность того, что некоторый, выбранный наугад, узел внутри евклидовой сферы радиуса  $r$  принадлежит бесконечному кластеру, определяется отношением числа узлов принадлежащих бесконечному кластеру к полному числу узлов в сфере

$$P_\infty \sim \frac{r^{d_f}}{r^d}, r < \xi. \quad (2.10)$$

Последнее соотношение корректно для  $r = \lambda \xi$  где  $\lambda$  – некоторая константа меньше 1. Подставляя  $r = \lambda \xi$  в (2.10) получаем:

$$P_\infty \sim \frac{\xi^{d_f}}{\xi^d}. \quad (2.11)$$

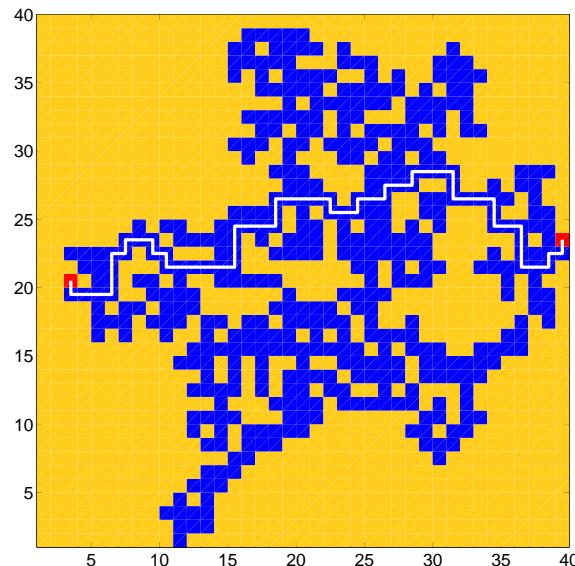
Обе части последнего соотношения являются степенными функциями от  $p - p_c$ . Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.11) находим:

$$d_f = d - \frac{\beta}{\nu}. \quad (2.12)$$

Таким образом, фрактальная размерность перколяционного кластера на пороге протекания не является новым независимым показателем, но выражается через термодинамические показатели  $\beta$  и  $\nu$ . Поскольку  $\beta$  и  $\nu$  являются универсальными индексами,  $d_f$  также является универсальной величиной, зависящей только

от размерности пространства. Можно показать, что ниже порога и на пороге соотноршение (2.12) определяет и фрактальную размерность конечных кластеров с линейными размерами не превышающим  $\xi$ . Ниже порога встречаются, хотя и редко, кластеры с размерами превышающими  $\xi$ . Такие кластеры называют решеточными зверями (lattice animals) и их фрактальная размерность меньше чем  $d_f$ .

В разделе 1.6. мы уже отмечали, что структуры, имеющие одинаковую фрактальную размерность, могут, тем не менее, значительно отличаться друг от друга. Поэтому для получения новой существенной информации об устройстве перколяционной паутины, кроме фрактальной размерности перколяционного кластера полезно, по аналогии с разделом 1.6., рассмотреть его минимальную и химическую размерности.



**Рис. 2.13.** Перколяционный кластер узлов (синие ячейки) на квадратной  $40 \times 40$  решетке. Наиболее длинный путь, соединяющий красные узлы кластера с координатами  $(3, 20)$  и  $(39, 24)$  представлен ломаной белого цвета

Начнем с того, что рассмотрим наибольший путь между двумя узлами перколяционного кластера представленного на рис. 2.13. Выбранные узлы выделены на рис. 2.13 красным цветом.

Элементы кластера, принадлежащие этому пути, формируют самоподобную структуру (ломаная белого цвета на рис. 2.13) с фрактальной размерностью  $d_{\min}$ , называемой, как мы уже знаем, размерностью наибольшего пути или минимальной размерностью на перколяционном кластере. Длина  $l$  этого наибольшего

шего пути, называемая химическим расстоянием [95, 96], меняется с увеличением евклидовой дистанции между выделенными элементами кластера по закону

$$l \sim r^{d_{\min}}. \quad (2.13)$$

Обратное соотношение

$$r \sim l^{1/d_{\min}} \equiv l^{\tilde{\nu}} \quad (2.14)$$

показывает, как  $r$  меняется с ростом  $l$ .

Выберем произвольный элемент кластера и в некоторый момент времени  $t = 0$  начнем рассматривать его как источник какой-либо информации или инфекции (часто это оказывается одним и тем же). Характерное расстояние, на которое фронт развивающейся инфекции успевает уйти за время  $t$  определяется именно минимальной размерностью перколяционного кластера.

Химическая размерность  $d_l$  перколяционного кластера описывает изменение числа его элементов  $M$ , удаленных от некоторого фиксированного узла на химическое расстояние, не превышающее дистанцию  $l$  с увеличением этой дистанции:

$$M(l) \sim l^{d_l}. \quad (2.15)$$

Если фрактальная размерность  $d_f$  характеризует рост массы перколяционного кластера с увеличением его размера в евклидовом пространстве, то химическая размерность  $d_l$  описывает рост массы кластера в пространстве химических расстояний. Комбинируя (2.8), (2.13) и (2.15) находим связь

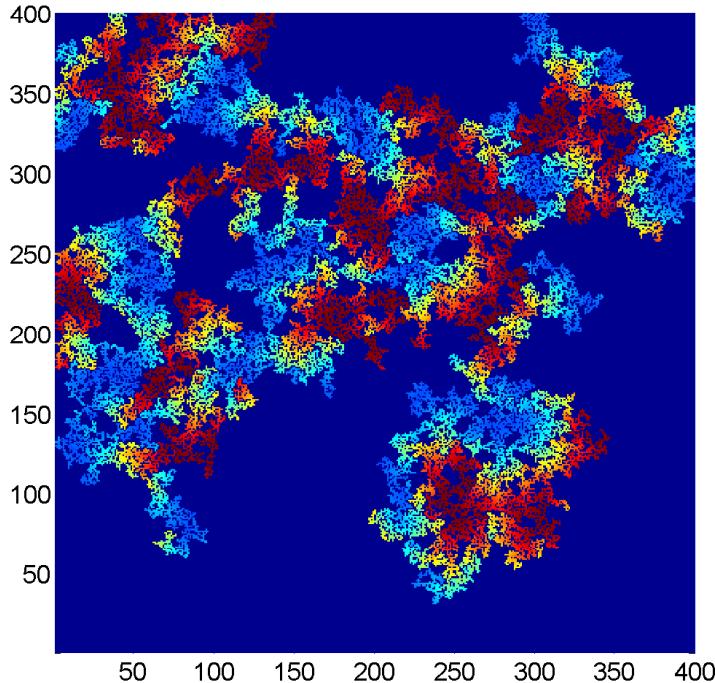
$$d_l = \frac{d_f}{d_{\min}}. \quad (2.16)$$

Путешествие по лабиринтам перколяционного кластера с периодическим изменением цвета узлов по мере роста химического расстояния представлено на рис. 2.14.

Значения минимальной и химической размерностей приведены для справок в табл. 2.2.

**Таблица 2.2.** Морфологические размерности перколяционного кластера [95, 96]

Размерности	$d = 2$	$d = 3$	$d \geq 6$
Размерность кластера, $d_f = d - \beta/\nu$	91/48	$2,54 \pm 0,008$	4
Минимальная размерность, $d_{\min}$	$1,13 \pm 0,004$	$1,84 \pm 0,02$	2
Химическая размерность, $d_l$	$1,678 \pm 0,005$	$1,795 \pm 0,005$	1
Размерность оболочки, $d_h$	$7/4$	$2,54 \pm 0,008$	4



**Рис. 2.14.** Путешествие по лабиринтам перколяционного кластера с периодическим изменением цвета узлов по мере роста химического расстояния

Для описания структуры перколяционного кластера было предложено несколько геометрических моделей [95, 96, 64]. Мы рассмотрим модель на основе фрактала Мандельброта-Гивена [146]. Этапы построения фрактала Мандельброта-Гивена представлены на рис. 2.15. Все начинается с единичного отрезка (рис. 2.15a). На первом шаге получаем генератор фрактала Мандельброта-Гивена (рис. 2.15b), который на следующем этапе построения применяется ко всем новым отрезкам длины  $1/3$  (рис. 2.15c). Следует обратить внимание, что на фрагментах  $d$  и  $e$  рисунка 2.15 мы для наглядности дополнительно увеличиваем в 3 раза линейного масштаба конструкции. Фрактальная размерность структуры Мандельброта-Гивена близка к размерности двумерного перколяционного кластера и равна  $d_f = \ln 8 / \ln 3 \approx 1,893$ . Напомним, что размерность перколяционного кластера на плоскости составляет  $d_f = 91/48 \approx 1,896$ . В структуре Мандельброта-Гивена присутствуют петли, ветви и мертвые концы всех размеров.

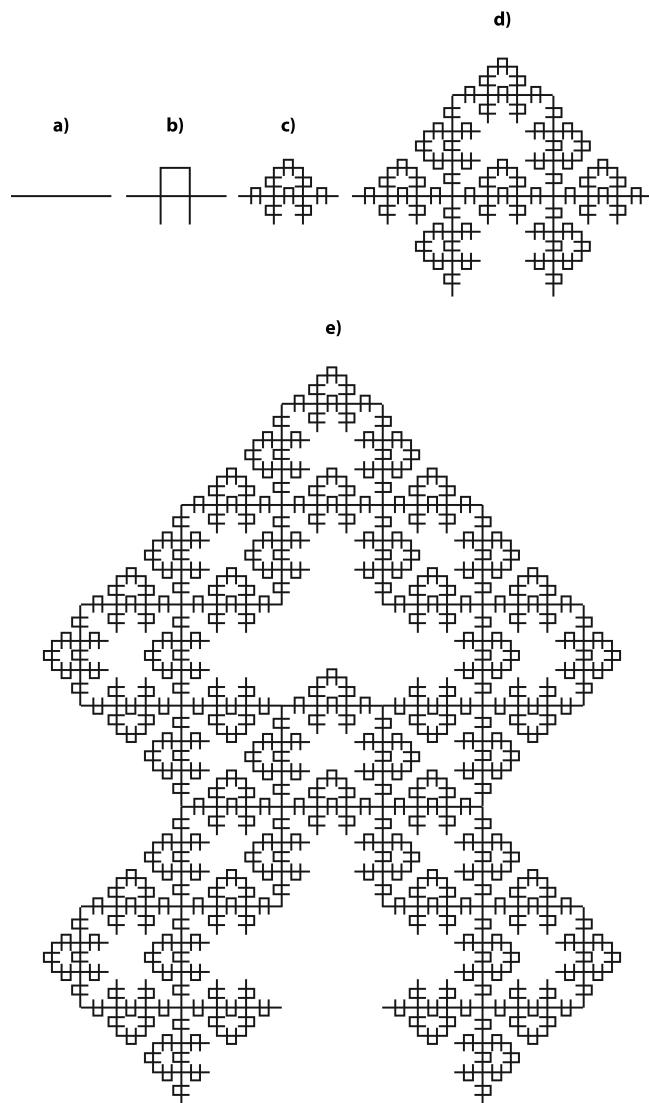


Рис. 2.15. Этапы построения фрактала Мандельброта-Гивена

## 2.4. Точное решение в одномерном случае

Подобно многим другим проблемам теоретической физики проблема перколяции может быть решена точно в одном измерении, а некоторые аспекты этого решения сохраняют значение и для более высоких размерностей. Изучим протекание узлов на бесконечно длинной линейной цепи — одномерной решетке, узлы которой расположены на фиксированном расстоянии друг от друга (рис. 2.16).

Каждый узел в решетке случайно занят с вероятностью  $p$  и соответственно

пуст с вероятностью  $1 - p$ . Группа соседних занятых узлов, не содержащих между собой пустых узлов, является кластером. В одномероном случае кластер представляет собой цепочку занятых узлов с числом элементов от 1 до  $\infty$ . Появление пустого узла разбивает группу соседних занятых узлов на два различных кластера. Чтобы кластер был отделен от других кластеров, узлы, граничащие с правым и левым его концами, должны быть пустыми. На рис. 2.16 представлены изолированные занятые узлы и кластеры из двух и шести элементов. Для образования, например, центрального кластера из шести элементов на рис. 2.16, необходимо иметь конфигурацию из подряд расположенных шести занятых узлов и двух пустых соседей справа и слева от этих шести.



**Рис. 2.16.** Пример кластеров на одномерной решетке. Занятые узлы – серые, пустые узлы – белые

Поскольку занятые узлы распределены случайно однородно, вероятность быть занятыми для двух произвольно выбранных, например, двух соседних узлов равна  $p^2$ , для трех –  $p^3$ , для пяти –  $p^5$ , и т.д. (произведение вероятностей для независимых событий). Так как в одномерном случае любой кластер имеет только два конца, вероятность образования кластера из  $s$  элементов ( $s$ -кластера) определяется произведением

$$n_s = p^s(1-p)^2. \quad (2.17)$$

Величину (2.17) можно определить как удельное число (число кластеров отнесенное к общему числу узлов решетки) или плотность  $s$ -кластеров. Для  $p < 1$  удельное число конечных кластеров экспоненциально уменьшается до нуля при стремлении  $s$  к бесконечности. Чему равен порог в одномерном случае? При  $p = 1$ , каждый узел линейной цепи занят, и вся цепь целиком образует один единственный кластер. Для любого  $p < 1$  существует, по крайней мере, один пустой узел, разывающий бесконечный кластер на фрагменты и препятствующий протеканию с одного конца линейной цепи на другой. Таким образом, порог протекания, представляющий собой критическую плотность  $p_c$ , обеспечивающую возникновение бесконечного кластера, в одномерном случае равен единице

$$p_c = 1. \quad (2.18)$$

Невозможно наблюдать область  $p > p_c$  в одном измерении, и исследованию доступна только половина фазового перехода — зона ниже порога переколяции.

Вероятность протекания в одномерной решетке длиной  $L$  может быть описана следующим образом:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P(p, L) = p^L = \begin{cases} 0, & \text{при } p < 1 \\ 1, & \text{при } p = 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

Вероятность того, что узел принадлежит  $s$ -кластеру есть  $n_s s$ . Вероятность того, что узел принадлежит хоть какому-либо кластеру совпадает с вероятностью того, что он просто занят:

$$\sum_{s=1}^{\infty} n_s s = p \quad (p < p_c). \quad (2.20)$$

Последнее соотношение может быть проверено прямым вычислением с использованием (2.17):

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} p^s (1-p)^2 s &= (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} p \frac{d(p^s)}{dp} = (1-p)^2 p \frac{d\left(\sum_{s=1}^{\infty} p^s\right)}{dp} = \\ &= (1-p)^2 p \frac{d\left(\frac{p}{1-p}\right)}{dp} = p. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнение (2.20) сохраняет силу и для более высоких размерностей пространства, если узлы, принадлежащие бесконечному кластеру, учесть отдельно, не включая их в сумму по всем размерам кластера. В одном измерении при  $p = p_c = 1$  имеется только один кластер, покрывающий всю решетку таким образом,  $s = \infty$  и  $n_s = 0$ , что делает уравнение (2.20) неопределенным при  $p = 1$  и ограничивает его справедливость областью  $p < 1$ .

Будем теперь произвольно выбирать занятые узлы. Насколько большие в среднем кластеры нам будут при этом попадаться? Другими словами, определим характерный средний размер конечного кластера на одномерной решетке. Мы знаем вероятность  $n_s s$  того, что произвольный узел (занятый или нет) принадлежит  $s$ -кластеру и вероятность  $\sum_s n_s s$  того, что узел принадлежит какому-либо конечному кластеру. Таким образом,

$$w_s = \frac{n_s s}{\sum_s n_s s} \quad (2.22)$$

есть вероятность того, что кластер, которому принадлежит произвольно выбранный нами занятый узел, содержит точно  $s$  узлов. Средний размер  $S$  кластера<sup>†</sup>,

<sup>†</sup>Термин *средний размер кластера* (*mean cluster size*) является общепринятым для величины  $S$ , хотя существуют и другие типы средних. Например,  $\sum_s n_s s / \sum_s n_s$  является средним размером кластера, если каждый кластер, а не каждый узел, как в уравнении (2.23), выбирается с равной вероятностью.

который мы измеряем, произвольно выбирая занятые узлы, определяется выражением:

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} w_s s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{n_s s^2}{\sum_{s=1}^{\infty} n_s s}. \quad (2.23)$$

Вычислим теперь средний размер кластера явно. Знаменатель, согласно (2.20), дает просто  $p$ . Для числителя:

$$(1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s = (1-p)^2 \left( p \frac{d}{dp} \right)^2 \sum_{s=1}^{\infty} p^s,$$

где суммирование ведется снова от  $s = 1$  до бесконечности с использованием производных от более простых сумм. Таким образом,

$$S = \frac{1+p}{1-p} \quad (p < p_c) \quad — \quad (2.24)$$

средний размер кластера — расходится, если мы приближаемся к порогу протекания. Позже мы получим подобные результаты и для числа измерений больше чем один. Обнаруженная сингулярность очень естественна, поскольку, если выше порога протекания имеется бесконечный кластер, то чуть ниже порога уже существуют очень большие (хотя и конечные) кластеры. Таким образом, среднее по размерам этих крупных кластеров также становится весьма большим, если мы находимся лишь слегка ниже порога.

Определим функцию корреляции или попарную связность (*pair connectivity*)  $g(r)$  как вероятность того, что некоторый узел на расстоянии  $r$  от занятого узла принадлежит тому же самому кластеру. Для  $r = 0$  вероятность  $g(0)$  равняется единице. Для  $r = 1$  соседний узел принадлежит тому же самому кластеру, если и только если этот узел занят, что случается с вероятностью  $p$ . Для узла на расстоянии  $r$ , сам этот узел и все  $(r-1)$  узлов между ним и исходным узлом в начале координат  $r = 0$  должны быть заняты без исключения, что случается с вероятностью  $p^r$ . Таким образом:

$$g(r) = 2p^r \quad (2.25)$$

для всех  $p$  и  $r$ . Множитель 2 возникает из того факта, что  $r$ -кластер может располагаться слева или справа от исходного узла. Для  $p < 1$  введенная нами функция корреляции, называемая также функцией связности, экспоненциально падает до нуля при стремлении расстояния  $r$  к бесконечности:

$$g(r) = 2 \exp\left(\frac{-r}{\xi}\right),$$

где

$$\xi = -\frac{1}{\ln(p)} = \frac{1}{p_c - p}. \quad (2.26)$$

Последнее равенство в уравнении (2.26) имеет силу только для значений  $p$ , близких к порогу  $p = p_c$ , где можно использовать разложение  $\ln(1 - x) = -x$  для маленького  $x$ . Мы видим, что корреляционная длина (или длина связности)  $\xi$  также расходится вблизи порога. Более того, длина корреляции пропорциональна диаметру типичного кластера. В одномерном случае это совершенно очевидно и сохраняет силу в случае более высоких размерностей пространства. Длина кластера из  $s$  узлов составляет  $(s - 1)$ , что не сильно отличается от  $s$ , если  $s$  велико. Таким образом, средняя длина  $\xi$  изменяется как средний размер кластера  $S$ :

$$S \propto \xi \quad (p \rightarrow p_c). \quad (2.27)$$

Универсальным оказывается соотношение между суммой от функции корреляции по всем дистанциям  $r$  и средним размером кластера:

$$\sum_r g(r) = S. \quad (2.28)$$

Сумма в уравнении (2.28) включает не только  $r = 0, 1, 2, \dots$ , то есть соседей справа, но также и соседей слева. Поскольку  $r$  не может принимать отрицательные значения, то сначала нужно вычислить сумму по правым соседям и центру,  $r = 0, 1, 2, \dots$ , а затем умножить результат на 2, чтобы принять во внимание левую часть решетки, и вычесть единицу, соответствующую вкладу от центра, который иначе был бы подсчитан дважды.

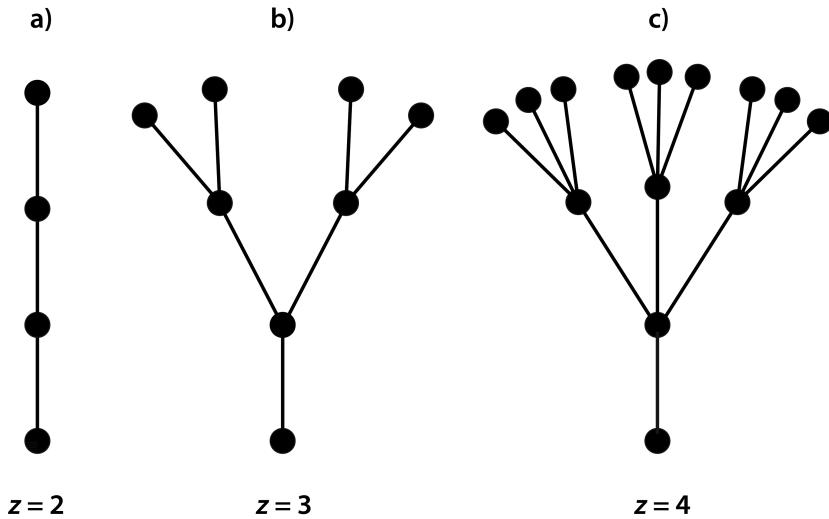
Из этого точного решения для одного измерения мы видим, что некоторые величины расходятся на пороге протекания, и что эта расходимость может быть описана простыми степенными законами типа  $1/(p_c - p)$ , по крайней мере асимптотически близко к порогу. Это остается справедливым и в пространствах с большим числом измерений, хотя задача и не имеет там точного решения. Величины  $S$  и  $\xi$  имеют аналоги в случае тепловых фазовых переходов. В экспериментах с жидкостями по рассеянию света вблизи их критической точки, наблюдается критическая опалесценция, так как сжимаемость (аналог  $S$ ) и длина корреляции  $\xi$  расходятся. Дальнейшее продвижение в исследовании одномерного протекания связано с вычислением плотности кластеров в конечных одномерных цепочках. Это дает возможность проиллюстрировать понятия универсальности и скейлинга конечных размеров.

Другой случай с точно известным решением — решетка Бете, к рассмотрению которой мы и переходим.

## 2.5. Перколяция на дереве Кейли

Замечательно то, что перколяция на одномерной цепочке является частным случаем другой, более сложной и, к счастью, решаемой точно, проблемы, которая,

в некотором смысле, соответствует преколияции в пространстве бесконечной размерности. Это решетка Бете или дерево Кейли, фрагмент которого изображен на рис. 2.17.



**Рис. 2.17.** Фрагменты решетки Бете или дерева Кейли с координационными числами ( $z$ ):  
а)  $z = 2$ , б)  $z = 3$ , в)  $z = 4$

Что общего между решеткой Бете и бесконечной размерностью  $d = \infty$ ? Деревья не имеют замкнутых циклов — петель, и их объем совпадает с их поверхностью. Для  $d = 2$ , площадь круга радиуса  $r$  равна  $\pi r^2$ , в то время как длина ограничивающей его окружности есть  $2\pi r$ . Поверхность трехмерной сферы радиуса  $r$  равна  $4\pi r^2$  тогда как ее объем пропорционален  $r^3$ . В  $d$ -мерном случае объем сферы пропорционален  $r^d$ , а ее поверхность —  $r^{d-1}$ . Таким образом,

$$S \propto V^{(1-1/d)} \quad (2.29)$$

в  $d$  измерениях. Мы видим, что в пределе  $d \rightarrow \infty$  поверхность становится пропорциональной объему.

Это фундаментальное свойство  $d$ -мерного объема и состоит оно в том, что при очень больших  $d$  объем  $d$ -мерной фигуры сосредоточен вблизи ее поверхности. Например, объем шарового кольца между сферами радиуса 1 и  $1 - \epsilon$  равен  $V_d[1 - (1 - \epsilon)^d]$ , что при фиксированном сколь угодно малом  $\epsilon$ , но растущем  $d$  стремится к объему шара  $V_d$ . Например, двадцатимерный арбуз радиуса 20 см с толщиной корки 1 см чуть не на две трети состоит из корки (65% против 14% для обычного трехмерного арбуза):

$$1 - \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{20} \approx 1 - e^{-1}.$$

К этому же выводу мы придем, если рассмотрим квадраты, кубы и гиперкубы.

Другой важный аспект связан с вероятностью обнаружения замкнутых циклов или петель в высших размерностях. Мы можем оценить эту вероятность, рассматривая кластеры из четырех узлов. Для очень большого  $d$  число способов, которыми можно расположить цепочку из четырех узлов на гиперкубической решетке, пропорционально  $(2d - 1)^3$  (каждый из трех последних узлов может быть помещен на другой оси). Однако число возможностей для построения замкнутого цикла, когда эти четыре узла находятся в одной плоскости и формируют квадрат, пропорционально  $d(d - 1)$ . Поэтому вероятность появления петель становится бесконечно малой при  $d \rightarrow \infty$ , что как раз типично для деревьев.

Итак, формирование решетки Бете начинается с центрального узла, имеющего  $z$  связей (в примере на рис. 2.17b  $z = 3$ ). Каждая связь заканчивается узлом, который, в свою очередь, также является началом для  $z$  связей. Причем одна из этих  $z$  связей соединяет узел с центральным исходным узлом, а другие  $z - 1$  приводят к новым узлам. Этот ветвящийся процесс продолжается снова и снова. Таким образом, если мы достигли некоторого узла во внутренней части решетки Бете, то мы можем продолжить движение в других  $z - 1$  направлениях в дополнение к направлению, по которому мы прибыли. Только на поверхности решетки, где ветвление останавливается, существует единственная связь, соединяющая поверхностный узел с внутренней частью решетки. В получающейся структуре нет замкнутых циклов, что означает, что любые два узла соединены только одним путем. Решетку Кейли проще описывать с помощью химического расстояния  $l$ , которое мы ввели в разделе 1.6. Например, химическое расстояние между центральным узлом и произвольным узлом, принадлежащим  $l$ -ой оболочке, в точности равно  $l$ , причем  $l$ -тая оболочка дерева содержит ровно  $z(z - 1)^{l-1}$  узлов. Таким образом, мы видим (рис. 2.17), что число узлов решетки Бете экспоненциально увеличивается с расстоянием от центра, в то время как для любой  $d$ -мерной решетки число узлов растет как расстояние в степени  $d$ . В нашем примере с  $z = 3$  (рис. 2.17b), исходный узел окружен оболочкой из трех узлов (первая генерация), за второй оболочкой, содержащей шесть узлов, следует третье поколение из двенадцати узлов и т.д.

Читателю рекомендуется в качестве упражнения проверить справедливость следующих выкладок для общего количества узлов решетки Бете с координационным числом  $z$  на  $i$ -ом шаге генерации:

$$N_{\text{total}}(i, z) = 1 + z(1 + (z - 1) + \dots + (z - 1)^{i-1}) = 1 + z \cdot \frac{(z - 1)^i - 1}{(z - 1) - 1}. \quad (2.30)$$

В рассматриваемом нами примере  $z = 3$  и

$$N_{\text{total}}(i, 3) = 3 \cdot 2^i - 2. \quad (2.31)$$

Соответственно, количество поверхностных узлов решетки определяется как

$$N_{\text{surf}}(i, z) = z \cdot (z - 1)^{i-1}, \quad (2.32)$$

и

$$N_{\text{surf}}(i, 3) = 3 \cdot 2^{i-1}. \quad (2.33)$$

Таким образом, при  $z = 3$  отношение поверхностных узлов к общему числу узлов в решетке составляет  $1/2$ , то есть удельная доля поверхности является величиной постоянной. Нетрудно определить, что в общем виде для решетки Бете характерно соотношение:

$$\frac{N_{\text{surf}}}{N_{\text{total}}} = \frac{z-2}{z-1}. \quad (2.34)$$

Таким образом, при любых  $z > 1$  удельная доля поверхности дерева Кейли  $N_{\text{surf}}/N_{\text{total}}$  приближается к конечному пределу, причем при  $z \rightarrow \infty$ ,  $\frac{N_{\text{surf}}}{N_{\text{total}}} \rightarrow 1$ .

Для обычных решеток такое поведение, как мы видели из уравнения (2.29), может наблюдаться только при  $d = \infty$ , т.е. при бесконечной размерности пространства.

Найдем порог протекания на решетке Бете. Стоя в центре решетки, мы пытаемся обнаружить бесконечный путь проходящий через занятые узлы. Если мы сделаем один шаг в направлении от центра, то кроме пути, по которому мы прибыли, мы находим  $(z-1)$  новых направлений. Каждое из этих  $(z-1)$  направлений приводит нас к новому соседу, который может оказаться занятым с вероятностью  $p$ . Следовательно, в среднем мы имеем  $(z-1)p$  занятых соседей, а, значит, и ровно такое же число возможностей для продолжения пути. Если величина  $(z-1)p$  меньше единицы, то среднее число различных путей, ведущих к бесконечности, уменьшается в каждом поколении (с каждым шагом) в  $(z-1)p$  раз. Таким образом, даже если все  $z$  соседей занятого узла в центре тоже заняты и дают нам  $z$  различных возможностей для продолжения пути, и даже если  $z$  очень велико, при  $p < 1/(z-1)$  вероятность обнаружения непрерывной цепочки занятых соседей экспоненциально стремится к нулю с ростом длины траектории. Поэтому для решетки Бете с числом  $z$  ближайших соседей для каждого узла, мы получаем:

$$p_c = \frac{1}{z-1}. \quad (2.35)$$

Приведенные выше аргументы сохраняют силу и для задачи связей на решетке Бете, когда открыты или блокированы связи между соседними узлами. Следовательно, порог на решетке Бете не зависит от типа протекания, и уравнение (2.35) выполняется как для задачи узлов, так и для задачи связей.

Выражение для порога протекания на дереве Кейли можно также получить, вычисляя корреляционную функцию  $g(l)$ , которая определяется как среднее число узлов того же самого кластера, находящихся на химическом расстоянии  $l$  от произвольно выбранного занятого узла. Если два узла на расстоянии  $l$  принадлежат одному и тому же кластеру, то и все  $l - 1$  узлы между ними должны быть заняты. Поскольку узлы заняты случайным образом с вероятностью  $p$  и число различных конфигураций  $l$ -кластеров, содержащих выбранный узел в качестве

крайнего элемента, совпадает с числом узлов в его  $l$ -той оболочке  $z(z-1)^{l-1}$ , то

$$g(l) = z(z-1)^{l-1} p^l = \frac{z}{z-1} ((z-1)p)^l. \quad (2.36)$$

Для  $z = 2$  (рис. 2.17a) дерево Кейли превращается в одномерную цепочку и уравнение (2.36) переходит в (2.25). Из уравнения (2.36) следует, что при  $l \rightarrow \infty$  корреляционная функция  $g(l)$  экспоненциально стремится к нулю для  $p(z-1) < 1$  и расходится для  $p(z-1) > 1$ . Следовательно, бесконечный кластер может появиться только тогда, когда  $p \geq \frac{1}{z-1}$ , и мы снова приходим к результату (2.35).

Из уравнения (2.36) легко можно вычислить и корреляционную длину  $\xi_l$  в химическом пространстве, т.е. в  $l$ -пространстве

$$\xi_l^2 = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} l^2 g(l)}{\sum_{l=1}^{\infty} g(l)}. \quad (2.37)$$

Вычисляя суммы в (2.37), читатель может убедиться, что при  $p < p_c$

$$\xi_l^2 = p_c \frac{p_c + p}{(p_c - p)^2}. \quad (2.38)$$

Итак, как и в одномерном случае, критический показатель радиуса корреляции  $\nu$  в  $l$ -пространстве равен 1. Поэтому среднее число элементов конечного кластера на дереве Кейли может быть записано в виде, соответствующем одномерному случаю:

$$S = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} g(l). \quad (2.39)$$

Подставляя (2.36) в (2.39), находим при  $p < p_c$ :

$$S = p_c \frac{p_c + p}{p_c - p}. \quad (2.40)$$

Полученное выражение обобщает результат (см. 2.24), полученный для одномерного случая. Таким образом, для дерева Кейли критический индекс характерного размера кластера  $\gamma = 1$ .

Даже если  $p$  больше чем порог протекания  $1/(z-1)$ , центральный узел не всегда будет иметь связь с бесконечностью. Если, например, центральный узел занят, а все  $z$  его соседей пусты, тогда он не принадлежит бесконечной сети. Мы определяем вероятность протекания  $P_\infty$  как вероятность того, что центральный или любой другой произвольно выбранный узел принадлежит бесконечному кластеру. Ясно, что эта вероятность нулевая для  $p$  ниже порога протекания, и поэтому мы вычислим её только для  $p > 1/(z-1)$ . Пусть, как и при рассмотрении одномерного случая,  $n_s(p)$  – вероятность того, что произвольно выбранный узел дерева

Кейли принадлежит кластеру размера  $s$ . Имеется простое соотношение между  $n_s$  и  $P_\infty$ . Каждый узел решетки либо пуст с вероятностью  $1 - p$ , либо занят и принадлежит бесконечному кластеру с вероятностью  $p(1 - P_\infty) = \sum_s sn_s$ . Это приводит к точному соотношению

$$P_\infty = 1 - \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} sn_s. \quad (2.41)$$

Можно показать, что вблизи порога перколяции величина  $P_\infty$  растёт линейно с  $p - p_c$  и для дерева Кейли критический индекс параметра порядка  $\beta = 1$  [96, 64].

## 2.6. Уровень протекания

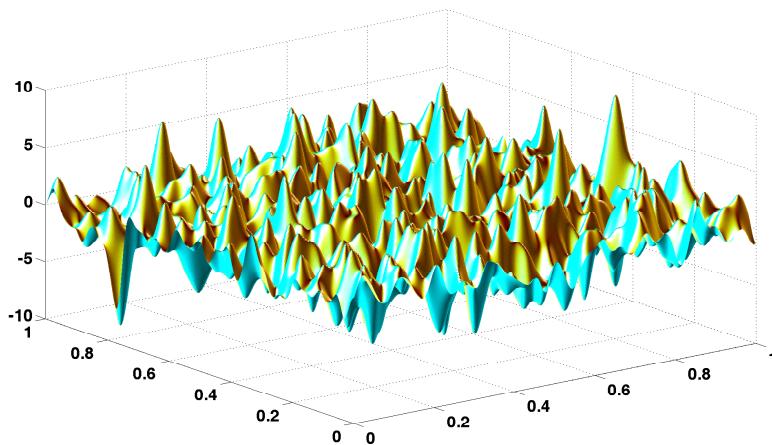
Выше мы рассматривали решеточные задачи теории перколяции, где протекание осуществлялось по узлам или связям решеток. Решеточная формулировка перколяционных задач очень проста и удобна как для аналитических исследований, так и для численного моделирования. Однако многие естественные неупорядоченные среды не имеют решеточной структуры и требуют развития других подходов. В этом параграфе мы рассмотрим модель потенциалов или задачу об уровне протекания.

Начнем с двумерного случая и зададим на координатной плоскости  $(X, Y)$  случайную функцию  $\Psi(X, Y)$ , где  $X$  и  $Y$  — координаты. Можно считать для наглядности, что  $\Psi$  задает случайный рельеф и представляет собой высоту над уровнем моря в точке земной поверхности с заданными координатами. Ограничимся случаем нормально распределенного случайного рельефа. Нормальное распределение, также называемое гауссовским распределением или распределением Гаусса, играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в статистической физике. Физическая величина, подверженная влиянию значительного числа независимых факторов, способных вносить с равной погрешностью положительные и отрицательные отклонения, вне зависимости от природы этих случайных факторов, часто подчиняется нормальному распределению, поэтому из всех распределений в природе чаще всего встречается нормальное (отсюда и произошло одно из названий этого распределения вероятностей).

Простейший способ построения гауссовой случайной функции  $\Psi(X, Y)$  состоит в следующем. Рассмотрим участок плоскости  $(X, Y)$  с характерным линейным размером  $L$ . Пусть для определенности  $L = 1$  и наш участок будет единичным квадратом. Введем характерный масштаб особенностей рельефа  $r_0 \ll L = 1$  и выберем точки случайно-однородно распределенные по квадрату с концентрацией  $n \gtrsim r_0^{-2}$ . В каждой из этих точек с координатами  $(X_i, Y_i)$  мы зададим гауссовское распределение высот с характерным радиусом  $r_0$ :

$$\Psi_i(X, Y) = h_i \exp \left( -\frac{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2}{r_0^2} \right),$$

где амплитуды  $h_i$  выбираются из дискретного нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией. Положительные значения  $h_i$  соответствуют горам нашего рельефа, а отрицательные — впадинам. Искомая функция  $\Psi(X, Y)$  определяется аддитивной композицией или, попросту, наложением всех всплесков  $Z_i$ :  $\Psi(X, Y) = \sum_i \Psi_i(X, Y)$ . Типичная реализация потенциала  $\Psi(X, Y)$  как результат работы описанного нами алгоритма представлена на рис. 2.18.



**Рис. 2.18.** Гауссовская случайная функция  $\Psi(X, Y)$  на единичном квадрате. При построении было сложено 5000 гауссовых всплесков с характерной шириной  $r_0 = 0,02$

Можно ввести функцию распределения потенциала  $\Psi$ . Обозначим её через  $f(\Psi)$ . По определению вероятность того, что во взятой наугад точке пространства функция  $\Psi(X, Y)$  имеет значение, заключенное в малый интервал от  $\Psi_1$  до  $\Psi_1 + d\Psi$ , равна  $f(\Psi_1)d\Psi$ . Можно показать, что полученный потенциал  $\Psi(X, Y)$  обладает гауссовым распределением вида:

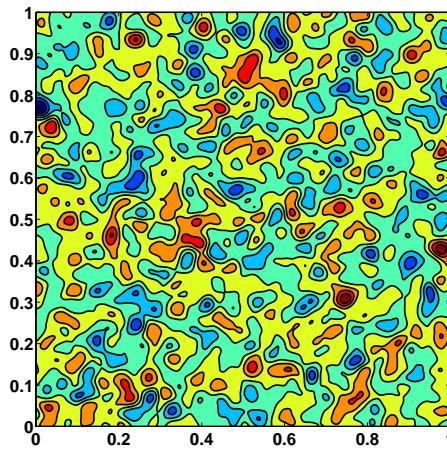
$$f(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\Psi^2\right). \quad (2.42)$$

При этом выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Psi)d\Psi = 1. \quad (2.43)$$

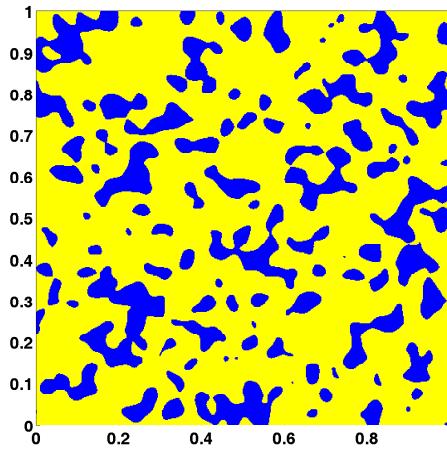
Очевидно, что среднее значение  $\Psi(X, Y)$  по всем точкам плоскости равно нулю.

Теперь построим бассейн, дном которого будет изображенный на рис. 2.18 рельеф, а борта будут сформированы вертикальными плоскостями, проходящими через стороны квадрата. Рис. 2.19 воспроизводит распределение уровней одинаковой высоты  $\Psi(X, Y) = \text{const}$  для нашего стохастического бассейна. Начнем наливать в него воду.



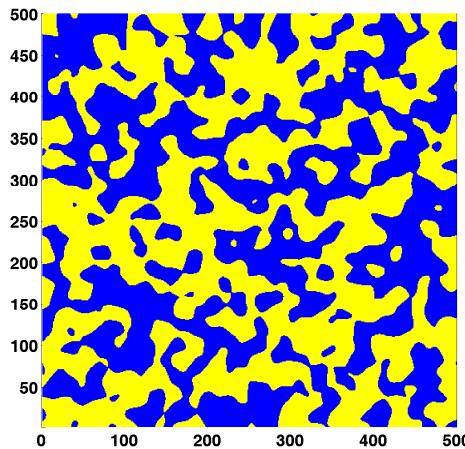
**Рис. 2.19.** Распределение эквипотенциальных уровней для случайного потенциала

Для того чтобы задать уровень воды, нужно ввести число  $\chi$ , изменяющееся в интервале от  $-\infty$  до  $\infty$ . Участки плоскости, в которых  $\Psi(X, Y) < \chi$ , назовем синими (залитыми водой), а участки, где  $\Psi(X, Y) > \chi$ , – желтыми (выступающими из воды). При повышении уровня воды доля площади водного зеркала увеличивается. На рис. 2.20 водные озёра (участки, заполненные синим цветом) ещё не сообщаются друг с другом.



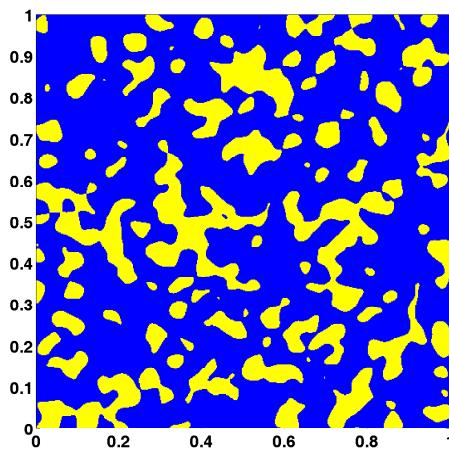
**Рис. 2.20.** Карта бассейна при уровне заполнения  $h = -1$ . Участки, заполненные водой, залиты синим цветом

Затем вода поднимается выше, и на рис. 2.21 уже возникли водные пути, пересекающие всю систему. Заметим, что на рис. 2.21 одновременно сосуществуют сухопутный и водный пути, пересекающие модельную систему.



**Рис. 2.21.** Карта бассейна при уровне заполнения  $h = 0$ . Участки, заполненные водой, залиты синим цветом

Наконец, уровень заполнения доходит до  $h = 1$  и на рис. 2.22 из воды поднимаются лишь отдельные горные вершины.



**Рис. 2.22.** Карта бассейна при уровне заполнения  $h = 1$ . Участки, заполненные водой, залиты синим цветом

Итак, в постановке задачи об уровне протекания нас интересует вопрос: до какого уровня должна опуститься или подняться вода в нашем бассейне, чтобы исчез или появился водный путь, соединяющий его противоположные стороны? Ясно, что такой путь существует, пока определённая часть перевалов случайног рельефа  $\Psi(X, Y)$  не вышла из воды, а затем он исчезает. Уровень воды, при котором появляется (или исчезает) водный путь, называется уровнем протекания. Задача о его определении представляет собой плоскую задачу теории протекания.

Рис. 2.20, 2.21 и 2.22 подсказывают нам, что задача об уровне протекания может быть сформулирована и иначе. Допустим, что плоскость хаотически раскрашена желтой и синей краской. Характерный радиус корреляции пятен  $r_0$  много меньше размеров системы  $r_0 \ll L$ . Пусть доля площади, раскрашенной синей краской, равна  $p$ . При малых  $p$  синие фрагменты образуют изолированные озёра, а при значениях  $p$ , близких к единице, изолированы, наоборот, желтые острова. Нужно найти критическое значение  $p = p_c$ , при котором исчезает (или появляется) сквозной путь через всю систему, идущий только по синим (или только жёлтым) областям.

В противоположность решеточным задачам представленная постановка является типичным примером так называемой континуальной перколяции [88]. Плоская задача имеет точное решение, если свойства случайной функции  $\Psi(X, Y)$  в среднем симметричны относительно значения  $\Psi = 0$ . Такими свойствами обладают, в частности, описанные выше гауссовые функции. Очевидно, что кроме уровня протекания по синим областям можно ввести уровень протекания по жёлтым областям. Из симметрии функции  $\Psi(X, Y)$  следует, что  $\chi_c = -\chi'_c$ . Действительно, заменим в каждой точке плоскости  $(X, Y)$  функцию  $\Psi(X, Y)$  на  $-\Psi(X, Y)$ . При этом получится функция  $\Psi(X, Y)' = -\Psi(X, Y)$ , в среднем обладающая теми же свойствами, так что уровни протекания, вычисленные с её помощью, должны быть такими же, как уровни, вычисленные с помощью исходной функции. Из неравенства  $\Psi(X, Y) < \chi_c$  следует неравенство  $\Psi(X, Y) > -\chi_c$ , т. е.  $\Psi(X, Y)' > -\chi_c$ . При  $\chi = \chi_c$  синие с точки зрения функции  $\Psi(X, Y)$  области ( $\Psi(X, Y) < \chi_c$ ) образуют бесконечный кластер. Эти же самые области пространства являются жёлтыми, если рассматривать функцию  $\Psi(X, Y)'$  и  $\chi = -\chi_c$ . Ведь в них  $\Psi(X, Y)' > -\chi_c$ . Следовательно, значение  $\chi = -\chi_c$  является уровнем протекания по жёлтым областям для функции  $\Psi(X, Y)'$ . Но, как уже говорилось, уровни протекания у функций  $\Psi(X, Y)$  и  $\Psi(X, Y)'$  должны быть одинаковыми. Следовательно, и для функции  $\Psi(X, Y)$  уровнем протекания по жёлтым областям является  $\chi_c = -\chi_c$ .

Если  $\chi_c < 0$ , то по мере увеличения  $\chi$  сначала появляется протекание по синим областям (при  $\chi = \chi_c < 0$ ), а затем (при  $\chi = -\chi_c > 0$ ) исчезает протекание по жёлтым областям. В области  $\chi_c < \chi < -\chi_c < 0$  существует протекание и по синим, и по жёлтым областям. Если  $\chi_c > 0$ , то сначала исчезает протекание по жёлтым областям, а затем появляется протекание по синим областям. При этом

в области  $-\chi_c < \chi < \chi_c < 0$  нет никакого протекания. В случае плоской задачи протекание по жёлтым областям исключает протекание по синим областям, и наоборот. Действительно, если через систему скал и рифов можно пробраться с запада на восток по воде на лодке, значит, исключён сухопутный маршрут через эту систему с севера на юг. Следовательно, случай  $\chi_c < 0$  исключается. С другой стороны, отсутствие протекания по синим областям обязательно означает наличие протекания по жёлтым областям с севера на юг. (В этом можно убедиться, рассматривая рис. 2.20, 2.21 и 2.22) Таким образом, исключается и случай  $\chi_c > 0$ . Следовательно, остается одна возможность  $\chi_c = 0$ . Мы получили важный результат: в двумерном случае уровень протекания равен нулю.

Можно также говорить о критической доле площади  $p_c$ , заполненной синими областями в момент возникновения плоского протекания. Эта доля равна вероятности того, что непрерывная случайная величина  $\Psi$  принимает какое-либо значение в интервале  $-\infty < \Psi(X, Y) < \chi_c$ . По смыслу функции распределения:

$$p_c = \int_{-\infty}^{\chi_c} \Psi(X, Y) dX dY. \quad (2.44)$$

С помощью формулы (2.44) можно вычислить критическую долю площади  $p_c$ . Из условия нормировки функции распределения (см. формулу (2.43)) следует, что при  $\chi_c = \infty$  правая часть формулы (2.44) равна единице. Из симметрии функции  $\Psi(X, Y)$  вытекает, что при  $\chi_c = 0$  доля площади  $p_c = 0,5$ .

Аналогичным образом можно сформулировать и объёмную задачу, заполнив объемную область желтым и синим веществом (см. рис. 2.23). Затем нужно менять долю объёма, заполненную одним из веществ, пока по нему не возникнет протекание. Теперь нам потребуется трехмерное распределение случайного потенциала. Рассмотрим единичный куб в пространстве  $(X, Y, Z)$  и, считая, что характерный масштаб особенностей рельефа  $r_0 \ll L = 1$ , выберем в этом кубе  $N \simeq r_0^{-3}$  точек с координатами  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , независимо и случайно-однородно распределенными на единичном интервале. В каждой из этих точек мы зададим гауссовское распределение всплесков потенциала с характерным радиусом  $r_0$ :

$$\Psi_i(X, Y, Z) = \psi_i \exp \left( -\frac{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2}{r_0^2} \right),$$

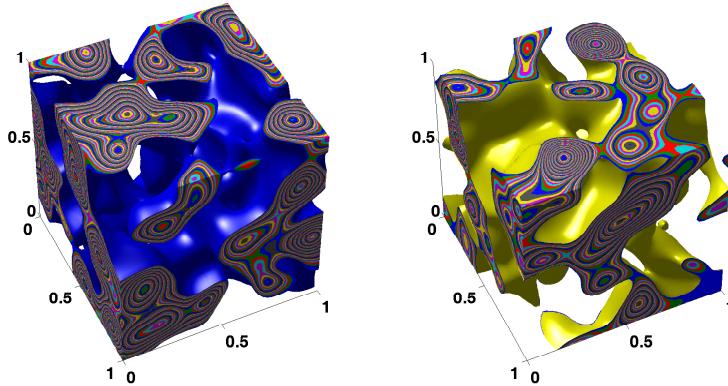
где амплитуды  $\psi_i$  выбираются из дискретного нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией. Искомая функция  $\Psi(X, Y, Z)$  определяется аддитивной композицией всех всплесков  $\Psi_i$ :  $\Psi(X, Y, Z) = \sum_i \Psi_i(X, Y, Z)$ . Результат работы этого простого алгоритма представлен на рис. 2.23.

Уровнем протекания в трехмерном случае называется критическое значение  $\Psi = \Psi_c$ , при котором синие области образуют пути, пронизывающие всю систему. Можно также говорить о критической доле пространства  $p_c$ , заполненной синими областями в момент возникновения протекания. Эта доля пространства равна

вероятности того, что непрерывная случайная величина  $\Psi$  принимает какое-либо значение в интервале  $-\infty < \Psi(X, Y, Z) < \Psi_c$ . По смыслу функции распределения:

$$p_c = \int_{-\infty}^{\Psi_c} \Psi(X, Y, Z) dX dY dZ. \quad (2.45)$$

Формула (2.45) связывает критическую долю пространства  $p_c$  с уровнем протекания.



**Рис. 2.23.** Изображение трехмерного гауссовского потенциала. На левой панели области пространства со значениями потенциала ниже фиксированного уровня  $\Psi(X, Y, Z) < 0,001$  заполнены синей краской. На правой – области с  $\Psi(X, Y, Z) > 0,001$  заполнены желтой краской

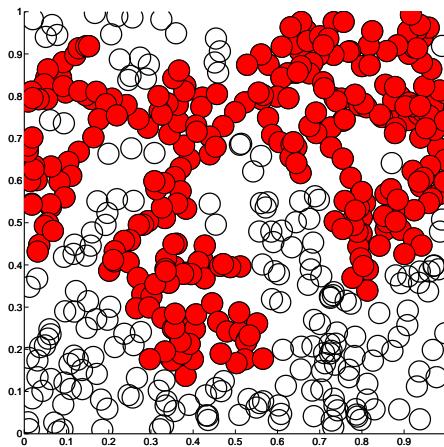
Расчёты, произведенные методом Монте-Карло для гауссовых случайных функций, показывают, что в трехмерном случае  $p_c = 0.16 \pm 0.01$ .

## 2.7. Задача окружностей

Рассмотрим теперь несколько иную перколяционную проблему, формулировка которой тоже отличается от решеточных задач. Допустим, что на плоскости расположены окружности с одинаковым радиусом, равным  $R$ , центры которых случайно-однородно (т.е. хаотически и в среднем равномерно) распределены по плоскости. Другими словами, обе координаты центров окружностей задаются случайными числами, равномерно распределенными в интервале от нуля до  $L$ , где  $L$  – очень большая (по сравнению с  $R$ ) длина, характеризующая размер рассматриваемой системы. Важная отличительная черта этой задачи состоит в том, что окружности

могут сколь угодно перекрываться друг другом. Среднее число центров окружностей, приходящееся на единицу площади (концентрация центров окружностей), равно  $n$ .

Две окружности считаются связанными друг с другом, если они имеют общие точки, т.е. являются пересекающимися. Если окружность  $A$  связана с окружностью  $B$ , а  $B$  связана с  $C$ , то  $A$  связана с  $C$ . Таким образом, далекие друг от друга окружности могут быть связаны по цепочке охватывающих окружностей (рис. 2.24). Задача состоит в том, чтобы найти критическое значение концентра-



**Рис. 2.24.** Континуальная перколяция случайно-однородно распределенных окружностей

ции  $n$ , при котором возникает протекание по связанным окружностям, т. е. возникают пути, проходящие через всю систему и состоящие из пересекающихся окружностей. (Иными словами, возникает бесконечный кластер связанных друг с другом окружностей. На рис. 2.24 максимальный кластер пересекающихся окружностей выделен красным цветом).

Вообще говоря, в этой задаче введено два параметра — концентрация  $n$  и радиус  $R$ . (Есть еще размер системы  $L$ , но ясно, что, если система достаточно велика, критическое значение  $n$  слабо зависит от  $L$ .) Между тем, легко убедиться в том, что отсутствие или наличие протекания зависит лишь от одного параметра, представляющего собой среднее число центров окружностей, находящееся внутри одной окружности. Оно равно

$$B = \pi n R^2.$$

В том, что протекание возникает при некотором значении параметра  $B$  и не зависит от того, чему при этом равны величины  $n$  и  $R$  по отдельности, легче всего

убедиться следующим образом. Допустим, что дана плоскость с нарисованными на ней окружностями. Увеличим данную картину в несколько раз, например, с помощью проектора. Это и будет преобразование, меняющее  $n$  и  $R$ , но не меняющее  $B$ , поскольку среднее число центров окружностей, находящееся внутри окружности, от увеличения не меняется. Легко также понять, что это преобразование не влияет на протекание. Если протекание отсутствовало на исходной картине, то оно отсутствует и на увеличенной, и, наоборот, если на исходной картине было протекание по пересекающимся окружностям, то от увеличения оно не исчезнет.

Итак, масштабное преобразование, меняющее  $n$  и  $R$ , но не изменяющее  $B$ , не влияет на протекание. Таким образом, отсутствие или наличие протекания в системе зависит лишь от величины параметра  $B$ . При больших значениях этого параметра протекание есть, а при малых значениях его нет.

Только что сформулированная задача называется задачей окружностей. Трехмерный ее аналог называется задачей сфер. Задача сфер формулируется следующим образом. В трехмерном пространстве с помощью генератора случайных чисел задаются координаты центров сфер, имеющих радиус  $R$ . Две пересекающиеся сферы называются связанными друг с другом. Требуется определить критическую концентрацию центров, при которой возникает протекание по пересекающимся сферам<sup>†</sup>.

Легко понять, что, как и в плоском случае, наличие протекания определяется только значением параметра представляющего собой среднее число центров сфер, находящихся внутри одной сферы:

$$B = \frac{4\pi}{3} n R^3,$$

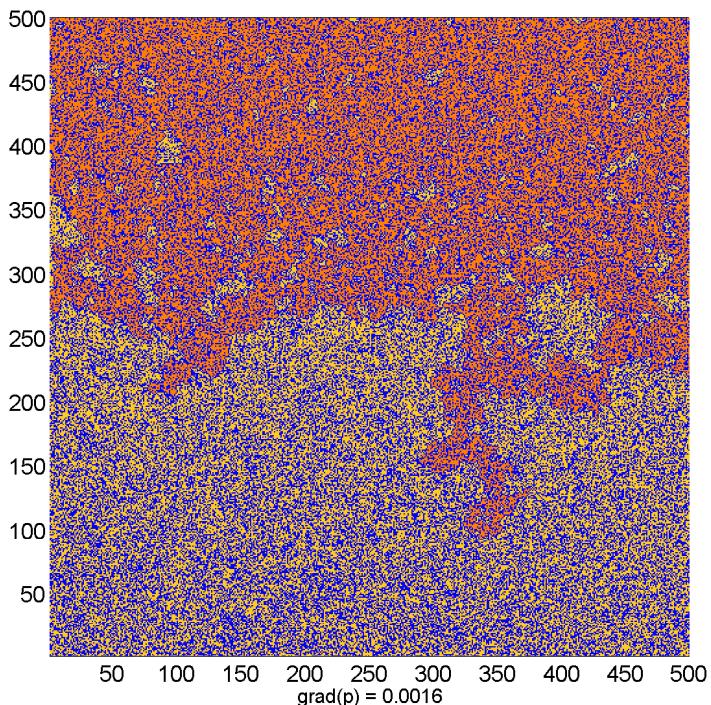
где  $n$  — среднее число центров сфер в единице объема. Задача сфер имеет важное значение для теории электропроводности полупроводников при низких температурах. Поэтому она исследовалась многими авторами с помощью самых различных методов. По современным данным критическое значение  $B_c$ , при котором возникает протекание по сферам, равно  $0,34 \pm 0,01$ . Задача окружностей исследовалась физиками менее интенсивно, и в результатах, приводимых разными авторами, имеется значительный разброс. В работе [73] для двумерного случая приведено значение  $B_c = 1 \pm 0,1$ .

---

<sup>†</sup>Существует альтернативная формулировка задачи сфер (окружностей): две сферы (окружности) считаются связанными друг с другом, если центр одной из них находится внутри другой, — такие сферы (окружности) иногда называют охватывающими. Приведенная в тексте формулировка переходит в альтернативную при удвоении радиуса сферы (окружности). При этом величина критического параметра  $B$  увеличивается в  $2^d$  раз, где  $d$  — евклидова размерность вмещающего пространства.

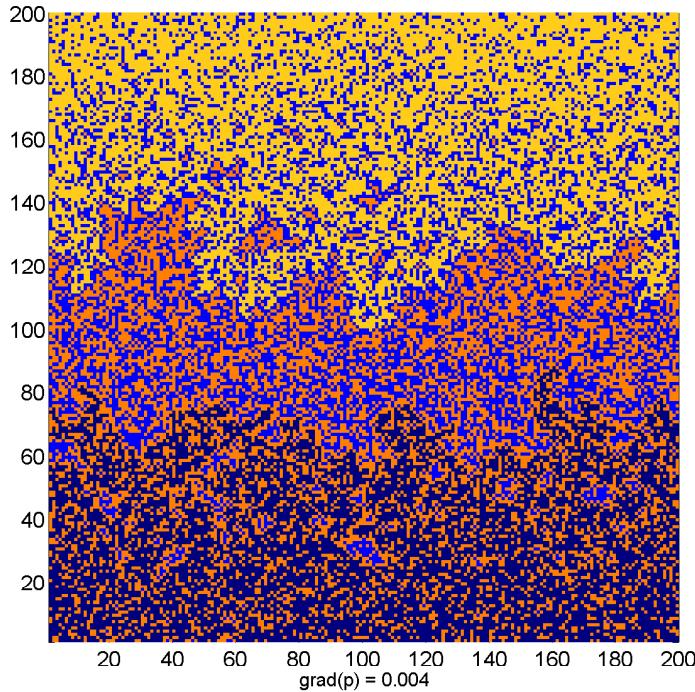
## 2.8. Перколяция в градиенте концентрации

Предположим, что концентрация  $p$  занятых узлов на квадратной решетке линейно меняется от нуля до единицы вдоль вертикального направления (рис. 2.25). В этом случае говорят о протекании в градиенте концентрации или о градиентной перколяции [110, 162].



**Рис. 2.25.** Протекание в градиенте концентрации

Используя традиционную терминологию, будем называть область решетки занятую максимальным кластером – сушей (белые пиксели на рис. 2.25), а область связанных пустых узлов не окруженных сушей – морем. Кластеры изолированные от суши называются островами (серые пиксели на рис. 2.25), группы связанных пустых узлов окруженных сушей – озерами. Береговая линия – граница между морем и сушей – имеет фрактальную структуру и называется диффузионным фронтом. Среднее положение фронта  $z = z_c$  соответствует порогу протекания:  $p(z_c) = p_c$ . В двумерной задаче узлов  $p_c \approx 0,59 > 1/2$  и мы имеем два диффузионных фронта, возникающих соответственно при  $p = p_c$  и  $p = 1 - p_c$  (см. рис. 2.26).



**Рис. 2.26.** Протекание в градиенте концентрации. Жёлтый цвет пикселей соответствует – максимальному кластеру занятых узлов, темно-синий цвет пикселей – максимальному кластеру пустых узлов

Диффузионный фронт характеризуется средней шириной  $h_f$ , которую можно связать со значением градиента концентрации вблизи  $p = p_c$ . Мы видим на рис. 2.25, что озера и острова чрезвычайно малы вдали от фронта, с другой стороны, вблизи фронта их размеры соизмеримы с шириной  $h_f$ . Острова соответствуют конечным кластерам перколяционной системы, а озера – ограниченным дырам. По мере приближения к фронту и те и другие растут как корреляционная длина в соответствии с (2.4). Однако, благодаря конечному градиенту  $\nabla p$ , размеры озер и островов остаются конечными даже при  $p = p_c$ . Их максимальный размер не превышает ширины фронта  $h_f$ , которая является единственным характерным масштабом задачи. Таким образом, мы можем предположить, что

$$h_f \simeq R_c(z_c \pm h_f). \quad (2.46)$$

Это предположение просто выражает наше наблюдение о том, что вблизи фронта кластеры имеют размеры, соизмеримые с шириной самого фронта. Используя

(2.46) и раскладывая  $p(z)$  в ряд Тейлора в окрестности  $z = z_c$ , обнаруживаем:

$$h_f \simeq |p(z_c \pm h_f) - p_c|^{-\nu} \simeq \left| h_f \frac{dp}{dz}(z_c) \right|^{-\nu},$$

что дает

$$h_f \simeq \left| \frac{dp}{dz}(z_c) \right|^{-\beta_f}, \quad (2.47)$$

где

$$\beta_f = \frac{\nu}{1 + \nu}. \quad (2.48)$$

Из выражения (2.47) видно, что ширина диффузионного фронта  $h_f$  растет с уменьшением градиента критического параметра. Поскольку перколяция является критическим явлением, структура фронта также обладает универсальностью – показатель  $\beta_f$  зависит только от размерности решетки, но не от деталей ее локального устройства (квадратная, треугольная и т.д.).

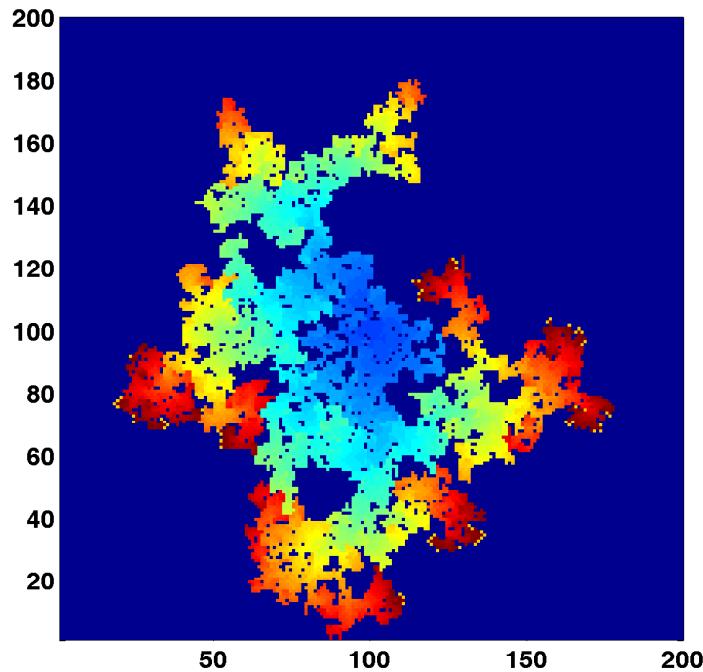
В двумерной задаче узлов  $p_c \approx 0,59 > 1/2$  и мы имеем два диффузионных фронта, возникающих соответственно при  $p = p_c$  и  $p = 1 - p_c$  (рис. 2.26).

## 2.9. Направленное протекание

В разделе 2.1. мы исследовали появление протекания при увеличении концентрации  $p$  структурных элементов и определили перколяционный переход как появление бесконечного кластера занятых узлов. Рассмотрим теперь динамическую модель протекания. Обратимся к задаче узлов. Предположим, что если в данный момент времени узел находится в возбужденном состоянии, то в следующий (дискретный) момент времени он возвращается в исходное состояние покоя, но может при этом с вероятностью  $p$  возбудить своих ближайших соседей по решетке. В результате разыгрывается стохастический процесс, напоминающий распространение инфекции (рис. 2.27). Цвет зараженных элементов на рис. 2.27 меняется в холодную сторону с увеличением интервала времени прошедшего после их инфицирования. Жёлтые пиксели на периферии соответствуют новоиспечённым носителям бациллы. Ясно, что когда вероятность передачи возбуждения очень мала, число возбужденных элементов будет убывать со временем. В обратном пределе, когда вероятность передачи возбуждения близка к единице, число возбужденных элементов решетки неограниченно возрастает во времени.

Критическое значение вероятности передачи возбуждения  $p_c$ , при котором появляется конечная вероятность роста эпидемии при единственном инфицированном в начальный момент, соответствует перколяционному порогу. Заметим, что в каждый фиксированный момент эволюции возбуждения элементы фронта эпидемии удалены от её источника на одно и тоже химическое расстояние, а соответствующие пиксели на рис. 2.27 имеют один и тот же цвет. Таким образом,

внутренняя структура паттерна развивающейся эпидемии при вероятности передачи возбуждения близкой к критической, совпадает с рассмотренной в разделе 2.3. химической структурой перколяционного кластера вблизи порога перколяции (рис. 2.14).



**Рис. 2.27.** Рост эпидемии при единственном инфицированном в начальный момент с вероятностью передачи возбуждения близкой к критической. Изменение цвета пикселей соответствует росту времени прошедшему после возбуждения. Яркие пиксели на периферии принадлежат фронту эпидемии

Как и для других задач теории перколяции величина порога направленного протекания существенно зависит от числа ближайших соседей для заданной решетки, т.е. от координационного числа  $z$ . Чем большее число элементов находится в контакте с зараженным, тем выше вероятность размножения инфекции. Координационное число возрастает с увеличением размерности решетки. В пределе высоких координационных чисел для расчета порога протекания может быть использовано приближение среднего поля. Пусть в фиксированный момент времени  $t$  доля элементов среди, находящихся в возбужденном состоянии, составляла  $q_t$ . Если число ближайших соседей  $z$  у каждого элемента среди велико, можно считать, что среди его соседей в момент времени  $t$  имелось  $zq_t$  возбужденных эле-

ментов. Выбранный нами элемент может быть инфицирован в следующий  $(t+1)$ -й момент времени с вероятностью

$$1 - (1 - p)^{zq_t}, \quad (2.49)$$

поскольку мы предполагаем независимость передачи инфекции через ближайших соседей. Величина вероятности (2.49) определяет долю элементов среди находящихся в возбужденном состоянии в следующий  $(t+1)$ -й момент времени, т.е.

$$q_{t+1} = 1 - (1 - p)^{zq_t}. \quad (2.50)$$

Выше порога перkolации величина  $q_t$  должна стремиться к отличающемуся от нуля конечному пределу  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = \tilde{q}$ , который дает долю возбужденных элементов в установившемся режиме, тогда как ниже порога перkolации  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = 0$ .

Исследуя точечное отображение (2.50), нетрудно показать, что его аттракторами могут быть только стационарные точки, причем потеря устойчивости стационарной точки  $q = 0$  и рождение новой устойчивой стационарной точки  $q = \tilde{q}$  происходит при прохождении вероятности  $p$  через значение  $p_c$ , удовлетворяющее условию:

$$1 - p_c = \lim_{\tilde{q} \rightarrow 0} (1 - \tilde{q})^{\frac{1}{z\tilde{q}}} = \exp(-\frac{1}{z}). \quad (2.51)$$

Таким образом, порог перkolации определяется соотношением:

$$p_c = 1 - \exp(-\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \dots \quad (2.52)$$

При уменьшении координационного числа приближение среднего поля теряет применимость. В этом случае становятся существенными флюктуационные эффекты.

## **Глава 3**

# **ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ**

### 3.1. Фрактальные временные ряды

Важным с практической стороны частным случаем фрактальных объектов являются фрактальные временные ряды. Примером такого ряда является координата частицы при броуновском движении или зависимость от времени интегрального результата игры в «орлянку» (см. раздел 1.4.). Такие объекты являются статистически самоаффинными, как уже отмечалось в разделе 1.4.

В общем случае, имея график зависимости какой-либо величины от времени, можно формально вычислить её фрактальную размерность клеточным методом. Однако эта величина будет зависеть от относительных масштабов по осям. Самоаффинные множества характеризуются двумя значениями фрактальной размерности — локальной и глобальной.

Для анализа самоподобия временных рядов используются также другие методы. Наиболее часто используется  $R/S$  метод, называемый также методом нормированного размаха [Федер, 1991]. Этот метод, предложенный Бенуа Мандельбротом и базирующийся на исследованиях английского ученого Хёрста, основан на анализе размаха случайной величины (наибольшего и наименьшего значения на изучаемом отрезке) и ее среднеквадратичного отклонения.

Пусть мы имеем последовательность измерений какой-либо величины  $\xi(t)$ . Тогда среднее значение этой величины за время  $\tau$  равно

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau} \xi(t),$$

а накопившееся отклонение от среднего

$$X(t, \tau) = \sum_{k=0}^{t \leq \tau} (\xi(k) - \langle \xi \rangle_\tau),$$

Разность максимального и минимального накопленного отклонения  $X$  назовем размахом:

$$R(\tau) = \max X(t, \tau) - \min X(t, \tau).$$

Вычислим стандартное отклонение (квадратный корень из дисперсии) для исследуемого сигнала  $\xi(t)$  как:

$$\langle \xi \rangle_\tau = \left( \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau} (\xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормируя  $R$  на стандартное отклонение  $S$  — получим безразмерное отношение  $R/S$ . Если длительность всего исследуемого процесса равна  $T$ , то выбор фрагмента или разбиение данных на фрагменты длительностью  $\tau$  можно осуществить  $T - \tau + 1$  способами. Описанная выше процедура должна применяться для каждого разбиения и затем полученный набор величин усредняется по совокупности всех результатов. Если же нас интересует диагностика некоторого случайного

процесса, то мы можем рассматривать величину  $T$  как ширину окна, применяемого для анализа процесса.

Изучая динамику разливов Нила, Хёрст экспериментально показал, что наблюдаемый нормированный размах  $R/S$  хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$\frac{R}{S} \sim \tau^{Hu}, \quad (3.1)$$

где  $Hu$  — показатель Хёрста, причем  $Hu \neq 0, 5$ .

Этот факт вызывает интерес потому, что при отсутствии долговременной статистической зависимости отношение  $R/S$  ведёт себя в соответствии с асимптотикой  $R/S \sim \tau^{1/2}$ , если временной ряд изменений генерируется случайным процессом с независимыми приращениями и конечной дисперсией.

Впоследствии оказалось, что и многие другие природные явления хорошо описываются этим законом. Временные последовательности измерений таких величин, как температура, сток рек, количество осадков, толщина колец деревьев или высота морских волн можно исследовать методом нормированного размаха или методом Хёрста.

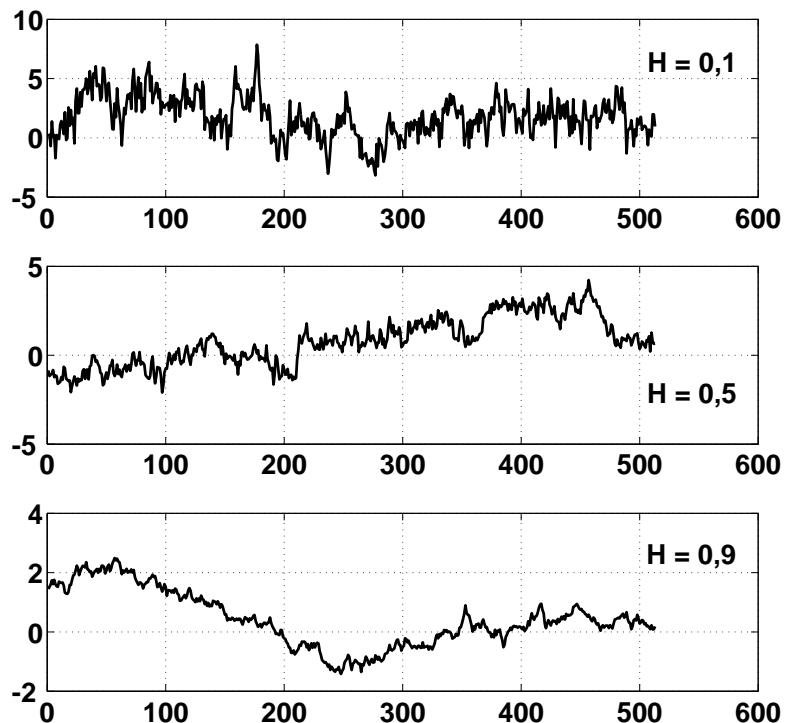
Значения показателя  $Hu$ , превышающие 0,5, при достаточно длительной последовательности измерений указывают на поддерживающиеся тенденции (перsistентность) в данном временном ряду. Если приращения были положительными в течение некоторого времени в прошлом, то есть происходило увеличение значений процесса  $\xi(t)$ , то с большой вероятностью и впредь в среднем будет происходить увеличение. Таким образом, для процесса  $0,5 < Hu < 1$  тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем. И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает, в среднем, продолжение уменьшения в будущем. Чем больше  $Hu$  тем сильнее тенденция.

При  $Hu = 0,5$  корреляция прошлых и будущих приращений процесса отсутствует на любых временных масштабах, как и должно быть для случайного процесса с независимыми приращениями.

При  $0 < Hu < 0,5$  ряд является антиперсистентным. В этом случае рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем. И чем меньше  $Hu$ , тем больше эта вероятность. В таких процессах после возрастания переменной обычно происходит её уменьшение, а после уменьшения — возрастание. Наличие изломов в зависимости  $R/S(\tau)$  свидетельствует о наличие характерных временных масштабов и/или периодичностей.

Понятие показателя Хёрста позволяет достаточно просто определить обобщенное броуновское движение как случайный процесс, при котором в (3.1)  $0 < Hu < 1$  [Федер, 1991, с.170]. Для обычного броуновского движения  $Hu = 0,5$ . Используются также другие названия: случайный процесс с  $Hu = 0,5$  называют коричневым шумом (от brown (англ.) — коричневый), персистентный — «розовый» шум, антиперсистентный — «чёрный» шум.

Реализация описанного алгоритма (см. раздел D Дополнения) в одномерном случае представлена на рис. 3.1 для трех различных значений показателя Хёрста. Видно, что с уменьшением показателя Хёрста увеличивается доля резких перепадов в поведении случайного процесса.



**Рис. 3.1.** Реализации обобщенных броуновских процессов с различными показателями Хёрста

Показатель Хёрста связан с фрактальной размерностью (локальной размерностью) соотношением  $D = E - Hu$ , где  $E$  — евклидова размерность задачи. Для броуновской кривой  $D = 2 - 0,5 = 1,5$ . Показатель Хёрста может быть получен также другими, в ряде случаев более эффективными, методами: по показателю спектра мощности, методом «первого возвращения». В частности, показатель спектра мощности  $\beta$  и показатель Хёрста  $Hu$  для самоаффинных временных рядов связаны соотношением:

$$\beta \approx 2Hu + 1 \quad \text{при} \quad 1 < \beta < 3. \quad (3.2)$$

Значения показателя Хёрста и фрактальные характеристики шумов разного типа приведены в табл. 3.1.

**Таблица 3.1.** Соотношение между характеристиками обобщенного броуновского движения (ОБД)

Показатель спектра мощности, $\beta$	Показатель Хёрста, $Hu$	Фрактальная размерность графика, $D$	Описание
$\beta = 0$	—	$D = 2$	Белый шум
$0 < \beta < 1$	—	$D = 2$	Цветной шум
$\beta = 1$	$Hu = 1$	$D = 2$	$1/f$ - шум
$1 < \beta < 2$	$0 < Hu < 0,5$	$1,5 < D < 2$	Антисистемное ОБД
$\beta = 2$	$Hu = 0,5$	$D = 1,5$	Броуновское движение
$2 < \beta < 3$	$0,5 < Hu < 1$	$1 < D < 1,5$	Персистентное ОБД

Отметим также, что при интегрировании шума также получается случайный процесс (шум) с показателем спектра мощности на 2 больше, чем для исходного шума. Например, интегрирование белого шума приводит к случайному процессу типа неперсистентного (обычного) броуновского движения.

## 3.2. Фрактальные поверхности

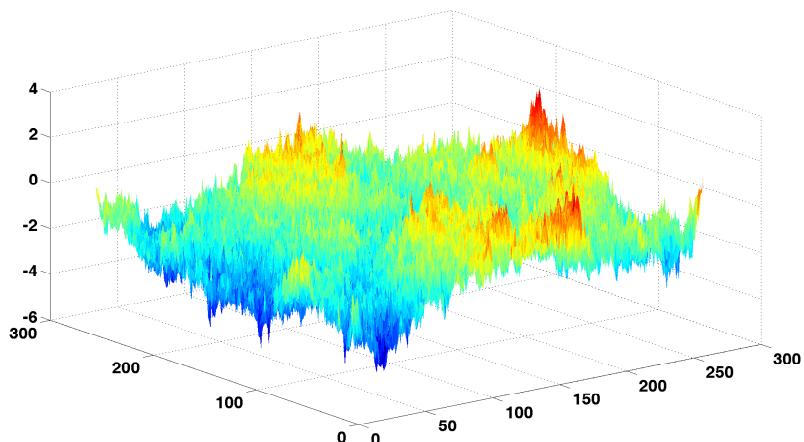
В инженерной практике очень часто имеют дело с поверхностями или поверхностными свойствами в самом широком спектре контекстов. В некоторых случаях уже исходная цель состоит в том, чтобы произвести поверхность с заданными физическими или химическими свойствами, но чаще всего поверхности возникают как неотъемлемое проявление определенных индустриальных и естественных процессов. Вообще, процессы формирования поверхностей можно отнести к трем основным типам:

1. Процессы, в которых рост поверхности обусловлен потоками вещества. Примеры включают кристаллический рост, осаждение атомного пучка или паров химических соединений, отложение осадка, гальванопокрытие, напыление, рост биологических организмов типа колоний бактерий и опухолей.
2. Процессы, в которых материал растворяется или удаляется с поверхности. Примерами могут служить химическое растворение, коррозия, эрозия, выветривание, шлифовка, многие виды полировки.
3. Процессы, которые ведут к спонтанному формированию поверхностей и границ раздела. Примеры включают: трещинообразование и разрушение, сгорание и распространение пламени, турбулентность, смачивание, впитывание, инвазию и формирование фазовых границ между различными состояниями вещества.

Из-за общности и важности этих процессов сегодня чрезвычайно востребо-

вано развитие эффективных подходов к описанию поверхностных структур и их динамики. В последнее время заметный прогресс в понимании поверхностных явлений был осуществлен благодаря использованию идей фрактальной геометрии [44] и развитию теории динамического скейлинга [19, 63]. Динамический скейлинг стал стандартным инструментом для характеристики и количественного анализа морфологии и развития поверхностей и интерфейсов, и этот инструмент стал использоваться как в теоретическом так и в модельном и экспериментальном исследовании поверхностей.

Здесь мы рассмотрим модель формирования фрактальных поверхностей, которая связана с реализацией пространственного броуновского движения. Поверхность в этом случае имеет характер горного ландшафта и может быть промоделирована пространственным распределением, называемым обобщенным броуновским распределением. Характерный броуновский рельеф на плоской модельной решетке показан на рис. 3.2. Для формирования обобщенного броуновского пейзажа над простой квадратной решеткой, мы используем двухмерный вариант алгоритма Фосса [70, 176].



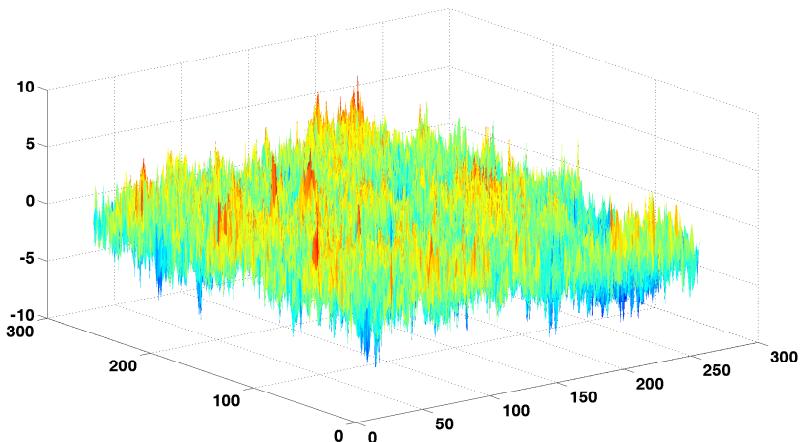
**Рис. 3.2.** Генерация броуновского рельефа на квадратной решетке  $257 \times 257$

Координаты ячеек модельной решетки задаются двумя целыми числами, изменяющимися в интервале от единицы до  $N = 2^n + 1$ , где  $n$  фиксированное целое число. В численном моделировании линейные размеры модельного квадрата составили  $N = 129$  при  $n = 7$ . На первом шаге процедуры четырем ячейкам в вершинах модельного поля с координатами  $(1, 1)$ ;  $(1, N)$ ;  $(N, 1)$ ;  $(N, N)$  присваиваются случайные числа, выбранные из нормального распределения, с нулевым средним и единичной дисперсией. Значения величины  $h$  в пяти ячейках, имеющих координаты  $(1, 2^{n-1} + 1)$ ;  $(2^{n-1} + 1, 1)$ ;  $(2^{n-1} + 1, N)$ ;  $(N, 2^{n-1} + 1)$ ;

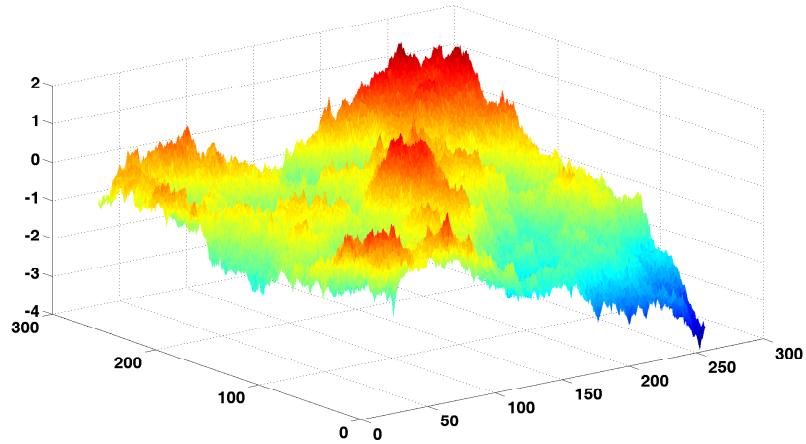
$(2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 1)$  и содержащих середины сторон и центр исходного квадрата, вычисляются методом линейной интерполяции. Например, центральной ячейке присваивается значение  $h$ , равное среднему арифметическому значений  $h$  в вершинах:  $h(2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 1) = \frac{1}{2}(h(1, 1) + \dots + h(N, N))$ .

Ячейки в вершинах модельного квадрата и упомянутые пять ячеек, содержащие середины его сторон и центр, формируют решетку из четырех одинаковых квадратов с линейными размерами, равными  $2^{n-1} + 1$ . На следующем шаге к значениям величины  $h$  во всех девяти вершинах полученной решетки добавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения, с нулевым средним и уменьшенной дисперсией  $\sigma_2^2 = (1/2)^{2Hu}\sigma_1^2$ , где  $Hu$  любое действительное число из интервала  $0 < Hu < 1$ . Далее снова выполняется интерполяция значений величины  $h$  в ячейках, содержащих середины сторон и центр уже каждого из полученных квадратов. На  $k$ -ом шаге процедуры к  $(2k - 1)^2$  вершинам промежуточной сверхрешетки добавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_k^2 = (1/2)^{2Hk}\sigma_1^2$ . Процедура заканчивается, когда все  $N^2$  ячеек исходной модельной решетки заполнены случайными числами. Полное число шагов процедуры равно  $2^{n-1} + 1$ . Генерируемый таким образом рельеф характеризуется пространственным ростом дисперсии распределения потенциала. При этом значение  $Hu = 0,5$  соответствует броуновскому потенциальному рельефу, а значения показателя  $Hu$ , отличающиеся от 0,5 — обобщенному броуновскому рельефу.

Перsistентные ( $Hu = 1$ ) и антиpersistентные ( $Hu = 0$ ) потенциальные рельефы показаны соответственно на рисунках 3.3 и 3.4.



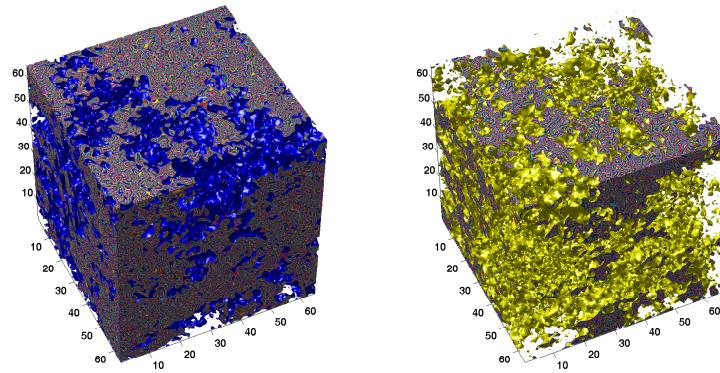
**Рис. 3.3.** Генерация обобщенного броуновского рельефа на квадратной решетке  $257 \times 257$  с показателем  $Hu = 0,01$



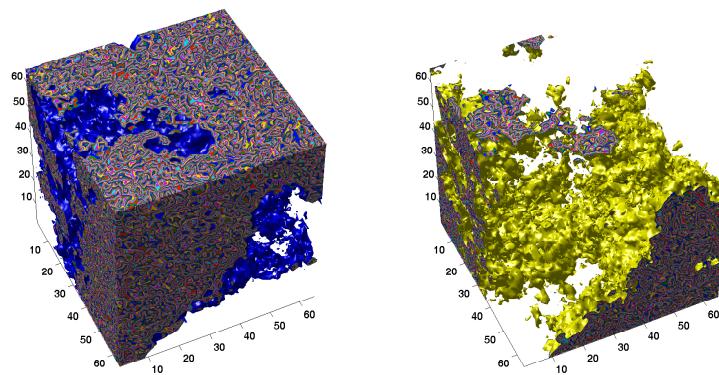
**Рис. 3.4.** Генерация обобщенного броуновского рельефа на квадратной решетке  $257 \times 257$  с показателем  $Hu = 1$

В разделе D дополнения приведен программный код двумерного алгоритма сложений Фосса, результат работы которого представлен на рис. 3.2, 3.3 и 3.4.

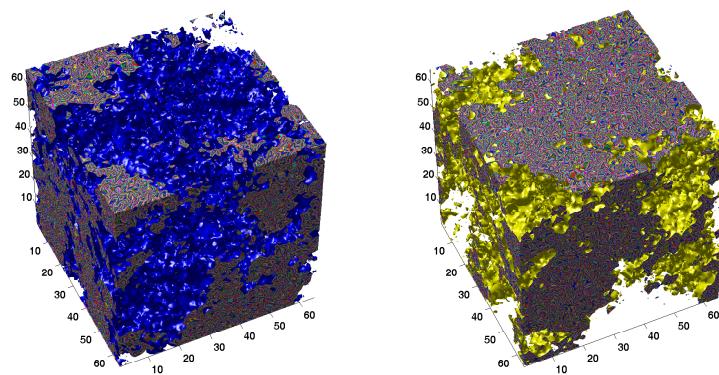
Для представления реализации алгоритма Фосса в трехмерном случае мы приводим эквидиотенциальные поверхности на кубической решетке  $65 \times 65 \times 65$  для показателей  $Hu = 0$   $Hu = 1$   $Hu = 0,5$  (рис. 3.5, 3.6, 3.7). Ярким примером



**Рис. 3.5.** Генерация обобщенного броуновского рельефа на кубической решетке  $65 \times 65 \times 65$  с показателем  $Hu = 0$



**Рис. 3.6.** Генерация обобщенного броуновского рельефа на кубической решетке  $65 \times 65 \times 65$  с показателем  $Hu = 1$



**Рис. 3.7.** Генерация обобщенного броуновского рельефа на кубической решетке  $65 \times 65 \times 65$  с показателем  $Hu = 0,5$

трехмерного броуновского распределения является квазиэлектростатическое распределение электрического потенциала заряженного аэрозоля.

Аэрозоли – дисперсные системы, состоящие из мелких твердых или жидким частиц, взвешенных в газовой среде (обычно в воздухе), чрезвычайно распространены в природе и технике. Естественные аэрозоли образуются вследствие природных явлений, прежде всего атмосферных (грозы, смерчи, песчаные бури), а

также при вулканических извержениях и масштабных лесных пожарах, выбрасывающих облака пепла и дыма. Искусственные аэрозоли образуются в результате хозяйственной деятельности человека, в частности, при абразивоструйной обработке поверхностей, камерном напылении или, например, при ядерных взрывах.

Практически все перечисленные выше естественные и технологические процессы, приводящие к возникновению аэрозольных систем, сопровождаются их интенсивной электризацией с последующей инициацией электрического пробоя атмосферного воздуха [11, 29, 71, 119].

Будем предполагать, что распределение заряда на частицах имеет нормальный вид

$$P(q) = \frac{1}{Q\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{Q}\right)^2\right], \quad (3.3)$$

где  $Q$  – некая характерная абсолютная величина заряда частиц, которая, в свою очередь, зависит от функции распределения частиц по размерам. Для выбранного нами распределения выполняются следующие очевидные соотношения:  $\bar{q} = 0$  и  $\bar{q^2} = Q^2$ <sup>†</sup>.

Предположим также, что частицы случайно-однородно распределены в объеме облака, и объемная плотность заряда  $\rho(\mathbf{r})$  представляет собой пространственный белый шум, удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = 0; \langle \rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2) \rangle = Q^2 n \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (3.4)$$

где  $n$  – концентрация облачных частиц и  $\delta(\mathbf{r})$  – делта-функция Дирака (произведение  $Q^2 n$  характеризует интенсивность источника пространственного белого шума).

Приведём квазиэлектростатическое описание ансамбля внутриоблачных зарядов, основанное на выполнении следующих условий:

$$Q \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)^{-1} \gg \frac{L}{c} \quad \text{и} \quad \frac{n^{-1/3}}{u} \gg \frac{L}{c}, \quad (3.5)$$

где  $L$  – линейные размеры грозовой ячейки,  $u$  – характерная скорость частиц и  $c$  – скорость света.

Потенциал электростатического поля системы зарядов с пространственной плотностью  $\rho(\mathbf{r})$  определяется решением уравнения Пуассона

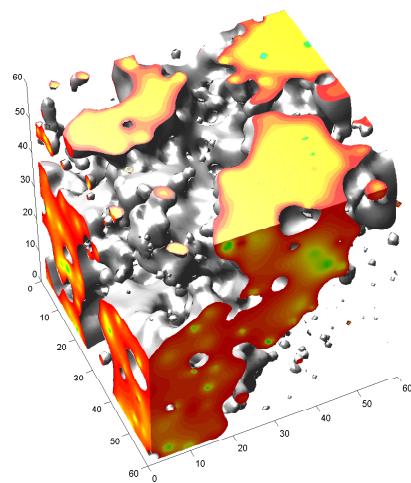
$$\Delta\varphi = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (3.6)$$

На рис. 3.8 и 3.9 представлено распределение электрического потенциала в системе из 3000 точечных зарядов. При этом рис. 3.8 отвечает положительным значениям потенциала, ограниченным нулевой эквипотенциальной поверхностью, а

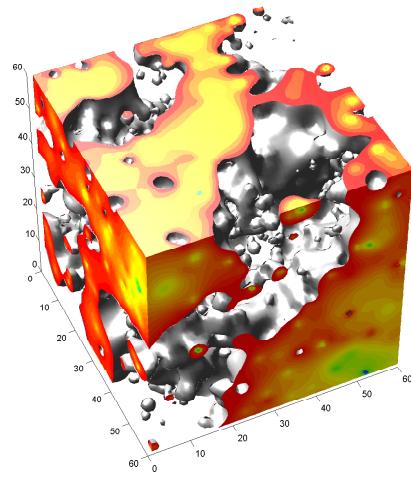
---

<sup>†</sup>Этот же результат можно обнаружить и для однородного  $P(q) = \frac{1}{2\sqrt{3}Q} - \sqrt{3}Q < q < \sqrt{3}Q$ , и для бинарного  $P(q) = \frac{1}{2}\delta(q+Q) + \frac{1}{2}\delta(q-Q)$  распределений заряда

рис. 3.9 демонстрирует ограниченную той же нулевой эквипотенциалю область отрицательного потенциала. На рис. 3.8 и 3.9 вариации цвета на сечениях модельного куба отвечают перепадам положительных и отрицательных значений электрического потенциала соответственно. Очевидно, что пространственные структуры на рис. 3.8 и 3.9 комплиментарны.



**Рис. 3.8.** Распределение положительных значений электрического потенциала в системе из 3000 точечных зарядов



**Рис. 3.9.** Распределение отрицательных значений электрического потенциала в системе из 3000 точечных зарядов

Решение (3.6) для произвольного распределения пространственной плотности заряда записывается в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.7)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  представляет собой функцию Грина уравнения Пуассона.

Первый момент потенциала обращается в ноль:

$$\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \int \langle d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \rangle \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} = 0.$$

Второй момент:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \rangle &= \int \int \langle d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) \rangle \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{y}|} = \\ &= \int \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} q^2 n \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{y}|} = \\ &= Q^2 n \cdot \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{x}|}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(\mathbf{r}) \rangle &= Q^2 n \cdot \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^2} = \\ &= Q^2 n \cdot \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{r^2} = 4\pi Q^2 n \cdot r. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\langle \varphi^2(\mathbf{r}) \rangle^{1/2} = 2Q\sqrt{\pi nr}. \quad (3.8)$$

Из соотношения (3.8) следует, что квазиэлектростатическое поле, создаваемое заряженным аэрозолем, характеризуется значительными пространственными флуктуациями и обладает свойством масштабной инвариантности [28]. При этом среднеквадратичные флуктуации разности потенциалов между пространственно разнесенными областями системы пропорциональны корню квадратному из ее линейных размеров и могут достигать значительных величин даже в отсутствие регулярного поля. При этом интенсивность флуктуаций пропорциональна концентрации аэрозоля и квадрату характерной абсолютной величины заряда составляющих его частиц.

Рассмотренные нами потенциальные рельефы являются самоаффинными гиперповерхностями [70]. Самоаффинность структуры рельефа подразумевает существование показателя  $Hu < 1$  (совпадающего в нашем случае с параметром  $Hu$  процедуры Фосса), такого, что преобразование  $\mathbf{r} \rightarrow \lambda\mathbf{r}$ ,  $u \rightarrow \lambda Hu$  оставляет поверхность рельефа статистически инвариантной. В отличие от самоподобного

случая самоаффинная структура характеризуется двумя различными размерностями — глобальной и локальной. Локальная фрактальная размерность связана с размерностью евклидова пространства простым соотношением  $d_f = d - Hu$ . В двумерном случае фрактальная поверхность представляет собой фрактальную кривую, например, при  $Hu = 1/2$  мы имеем график броуновской частицы с фрактальной размерностью  $d_f = 3/2$ .

Глобальная размерность характеризует структуру рельефа в асимптотике глобальных масштабов и равна просто размерности радиус-вектора, в нашем случае это  $d - 1$ . Это означает, что на больших расстояниях самоаффинный фрактал выглядит совершенно гладким (с ростом масштаба отношение ширины поверхности к ее линейному масштабу простирации стремится к нулю).

Мандельброт впервые обратил внимание на тот факт, что реальные поверхности являются фрактальными объектами [44]. Это в свою очередь вызвало развитие приближения динамического скейлинга [19] для того, чтобы описать не только морфологию, но также и динамику фрактальных поверхностей. При этом в  $d$ -мерном пространстве рассматривается эволюция во времени растущей поверхности, стартующей из плоского состояния в момент времени  $t = 0$ . Пусть нас интересует часть поверхности, имеющая протяженность  $L$  в  $d - 1$ -мерном подпространстве перпендикулярном направлению роста.

Поверхность может быть описана функцией  $h(\mathbf{r}, t)$ , которая задает высоту (или глубину при  $h < 0$ ) простирации поверхности в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$  исходной  $d - 1$ -мерной гиперплоскости. Введем основные характеристики случайной гиперповерхности. Средняя «высота» рельефа  $\langle h \rangle$ , в момент времени  $t$  определяется как

$$\langle h \rangle = \bar{h} = \frac{\sum_{\mathbf{r}} h(\mathbf{r}, t)}{L^{d-1}}, \quad (3.9)$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по пространству  $\mathbf{r}$ . Точки поверхности флюктуируют относительно этой средней величины и среднеквадратичное отклонение этих флюктуаций является количественной мерой ширины поверхности, которое может быть отождествлено с поперечной корреляционной длиной  $\xi_{\perp}$  рельефа,

$$\xi_{\perp}(L, t) = \langle (h(\mathbf{r}, t) - \langle h(\mathbf{r}, t) \rangle)^2 \rangle^{1/2} = (\langle h^2(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle h(\mathbf{r}, t) \rangle^2)^{1/2}. \quad (3.10)$$

В основе концепции динамического скейлинга лежит утверждение о том, что в процессе эволюции поверхности ее неровность или шероховатость возрастает по степенному закону:

$$\xi_{\perp}(L, t) \sim t^{\nu_{\perp}}, \quad (3.11)$$

где показатель  $\nu_{\perp}$  описывает рост флюктуаций высоты поверхности во времени. Линейный размер системы или длина простирации рассматриваемой поверхности  $L$  является максимальным пространственным масштабом, который и ограничивает продольные размеры растущих флюктуаций высоты в  $d - 1$  измерении.

ях вдоль поверхности. Размеры растущих флюктуаций вдоль гиперповерхности (вдоль уровня моря) контролируются продольной корреляционной длиной  $\xi_{\parallel}(L, t)$ . Как только поперечный размер флюктуаций достигает линейных масштабов системы  $L$ , дальнейший рост корреляционной длины  $\xi_{\parallel}(L, t)$  становится уже невозможным, и эволюция поверхности переходит в стационарный режим, характеризующийся постоянным значением ширины  $\xi_{\perp}(L, t)$ . На малых временах, когда еще  $\xi_{\parallel}(L, t) \ll L$  продольная корреляционная длина также меняется во времени по степенному закону:

$$\xi_{\parallel}(L, t) \sim t^{1/z}, \quad (3.12)$$

причем, как это видно из сопоставления (3.11) и (3.12), продольная и поперечная корреляционные длины связаны между собой следующим соотношением:

$$\xi_{\perp}(L, t) \sim \xi_{\parallel}(L, t)^{\nu_{\perp} z}. \quad (3.13)$$

Еще раз подчеркнем, что соотношения (3.11) и (3.12) справедливы на *коротких* временах, меньших *времени кроссовера*  $\tau$ , когда продольная корреляционная длина достигает линейных масштабов системы  $\xi_{\parallel}(L, \tau) = L$ . Стоит заметить, что на практике состояние большинства поверхностей, с которыми нам приходится сталкиваться, соответствует именно этим коротким временам.

Флюктуирующая поверхность является масштабно-инвариантным объектом и поэтому поперечный масштаб, соответствующий насыщению ширины поверхности на больших временах  $\xi_{\perp}(L, t \rightarrow \infty)$ , согласно скейлинговой гипотезе, должен иметь степенную зависимость от  $L$ :

$$\xi_{\perp}(L, t \rightarrow \infty) \sim L^{\alpha}, \quad (3.14)$$

с характеристическим показателем  $\alpha$ . В установившемся режиме роста поверхность является самоаффинным фракталом и именно показатель  $\alpha$  характеризует количественно ее морфологию. Ниже мы увидим, что показатель  $\alpha$  эквивалентен введенному Мандельбротом показателю Хёрста  $Hu$ .

Зависимости ширины самоаффинной поверхности  $\xi_{\perp}(L, t)$  от  $t$  и  $L$ , представленные соответственно соотношениями (3.11) и (3.14), можно объединить в одно выражение, представляющее идею динамического скейлинга [96]:

$$\xi_{\perp}(L, t) = L^{\alpha} f(t/L^{\alpha/\nu_{\perp}}), \quad (3.15)$$

где скейлинговая функция  $f(x) \sim x^{\nu_{\perp}}$  для  $x \ll 1$ . На больших временах величина  $\xi_{\perp}(L, t)$  становится независимой от времени, достигая некоторого постоянного значения. В этом пределе  $\xi_{\perp}(L, t)$  изменяется в соответствии с уравнением (3.14) и скейлинговая функция  $f(x) = \text{const}$  при  $x \gg 1$ . Выражение динамического скейлинга (3.15) заключает в себе тот факт, что графики зависимости произведения  $\xi_{\perp}(L, t)L^{-\alpha}$  от величины  $tL^{-\alpha/\nu_{\perp}}$  для различных значений  $L$  все схлопываются в одну кривую.

Показатели  $\alpha$  и  $\nu_{\perp}$ , характеризующие поверхность, могут быть определены из рассмотрения различных типов поверхностных корреляционных функций. Возьмем, например, функцию  $C(r, t)$ , описывающую корреляции отклонений значений высоты поверхности от среднего в различных точках подстилающей гиперплоскости и в различные моменты времени:

$$C(r, t) = \left\langle (\tilde{h}(\mathbf{r}', t') - \bar{h}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t'))^2 \right\rangle_{r', t'}, \quad (3.16)$$

где  $\tilde{h} = h - \bar{h}$  и  $\langle \dots \rangle_{r', t'}$  означает усреднение по всем  $r'$  и  $t'$ . Тот факт, что  $C(r, t)$  зависит только от  $r$  связан с изотропностью фрактальной поверхности вдоль  $d-1$ -мерного пространства перпендикулярного направлению роста. Для  $C(r, t)$  выполняются следующие скейлинговые соотношения: одно в фиксированном момент времени:

$$C(r, 0) \sim r^{2\alpha}, \text{ при } r \ll L, \quad (3.17)$$

второе при фиксированном  $r$ :

$$C(0, t) \sim t^{2\nu_{\perp}}, \text{ при } t \ll \tau \sim L^{\alpha/\nu_{\perp}}. \quad (3.18)$$

### 3.3. Ранговые распределения

Ранг в систематике — это уровень в иерархически организованном множестве элементов. Ранговые распределения используют при анализе сложных многокомпонентных систем самой различной природы: социальных систем (табель о рангах), систем живых организмов (виды, классы, отряды, семейства), техноценозов (номенклатура изделий) и т.д. и т.п. Ранги в систематике упорядочены значениями натурального ряда и определяют разбиение системы на компоненты, характеризующиеся определенным статусом (доходом, распространённостью, стоимостью, потреблением электроэнергии и т.п.) [2, 3, 8, 14, 41, 42, 81, 82].

Каждому рангу отвечает определенная численность его представителей, что позволяет говорить о представленности того или иного ранга как функции соответствующего ему статуса. В любой системе существуют компоненты, сравнительно немногочисленные, но обладающие, в определенном смысле, высоким статусом, и сравнительно многочисленные компоненты с низким статусом, причём по мере понижения статуса число соответствующих рангов увеличивается. Ценотическая парадигма утверждает, что зависимость эта носит обычно гиперболический характер

$$P_i = \frac{P_1}{i^{\beta}}, \quad (3.19)$$

где  $i$  — номер ранга,  $P_1$  — представленность первого ранга.

Соотношение (3.19) с  $\beta = 1$  впервые было получено на лингвистическом материале и известно в литературе как закон Ципфа [54]. Популярное в экономической

статистике распределение Парето, описывающее доходы населения, в ранговой форме также имеет гиперболический вид:

$$P_i = (P_1 - b) \left( \frac{a+1}{a+i} \right)^\beta + b, \quad (3.20)$$

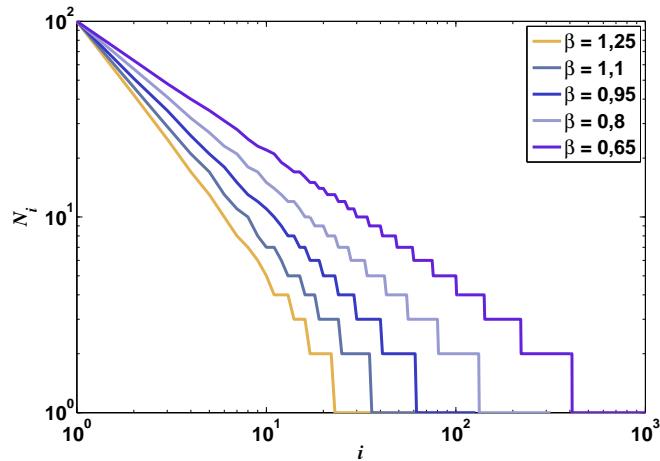
где  $a$  и  $b$  – параметры распределения. При  $b = 0$  соотношение (3.20) называют формулой Мандельброта [57].

Гиперболическая ранговая параметризация сложных иерархических структур принципиально связана с их самоподобием. Мы попытаемся пролить свет на эту связь, используя инструментарий мультифрактального формализма. Для наглядности будем использовать экологическую фразеологию, отождествляя ранги с «видовым богатством» некоторого «ценоза» [45, 49, 50, 78, 79, 80].

Возьмем для определенности гиперболическую модель и будем рассматривать не представленности рангов  $P_i$ , а их абсолютные численности  $N_i$ , связанные с представленностями очевидным образом:  $N_i = P_i N$ , где  $N$  – полная численность «ценоза». Тогда соотношение (3.19) следует переписать в следующем виде:

$$N_i = \left[ \frac{N_1}{i^\beta} \right], \quad (3.21)$$

где квадратные скобки означают взятие целой части числа (абсолютная численность может принимать только целые значения), а параметр  $\beta$  меняется от бесконечности при «супердоминировании» до 0 при полной выравненности. Примеры ранговых распределений представлены на рис. 3.10.



**Рис. 3.10.** Гиперболические ранговые распределения в билогарифмическом масштабе при фиксированном  $N_1$  и различных  $\beta$

Принципиально важной при использовании фрактального анализа видового разнообразия является возможность изменения мощности выборки, представляющей исследуемое сообщество. Поэтому для проведения желаемого сопоставления фрактального описания видового разнообразия с традиционным подходом, основанным на ранговых распределениях, мы должны иметь дело с целым семейством распределений с фиксированным параметром  $\beta$ , но с переменным  $N_1$ . При этом расчет полной численности  $N$  модельного сообщества осуществляется по следующей очевидной формуле:

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{N_1}{i^\beta} \right]. \quad (3.22)$$

Ясно, что в сумму (3.22) дадут вклад только члены с ненулевой целой частью. Именно количество ненулевых рангов и будет соответствовать обнаруженному числу видов  $S$ .

Далее необходимо воспользоваться идеями раздела 1.7. и по аналогии с (1.33) рассмотреть моменты распределения «особей» по «видам»:

$$M_q(N) = \sum_{i=1}^{S(N)} p_i^q, \quad (3.23)$$

где непрерывно меняющаяся величина  $-\infty \leq q \leq \infty$  – называется порядком момента. Мы интересуемся асимптотическим поведением моментов в области больших численностей  $N$ :

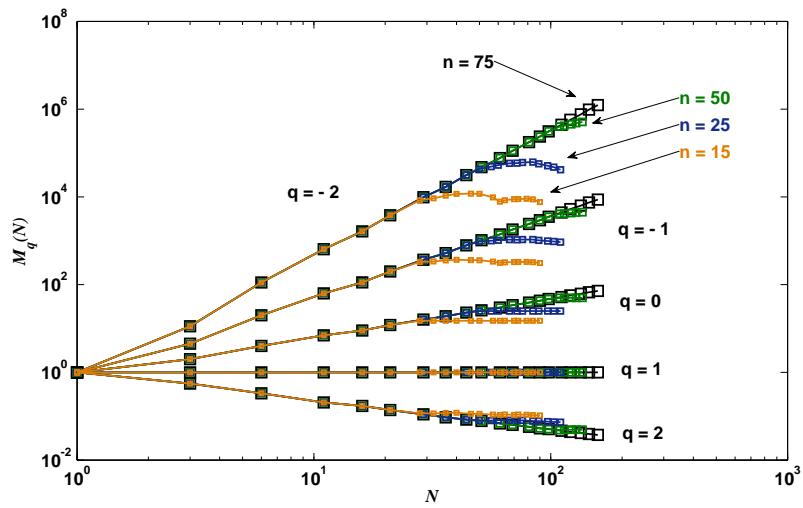
$$M_q(N) = \sum_{i=1}^{S(N)} p_i^q \propto N^{\tau(q)}. \quad (3.24)$$

Другими словами, показатель

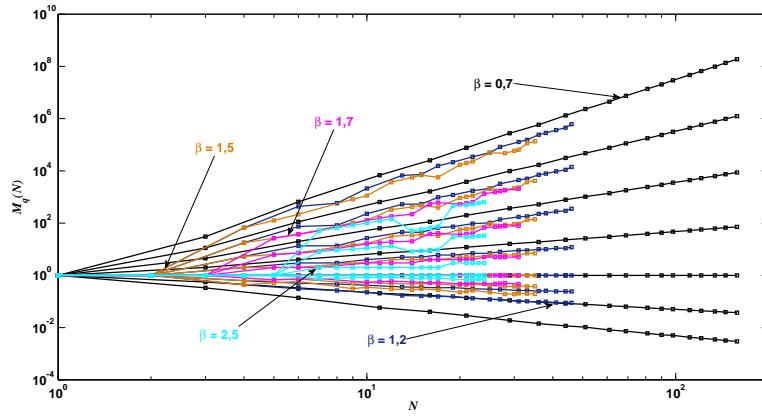
$$\tau(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln M_q(N)}{\ln N} \quad (3.25)$$

характеризует скорость изменения соответствующего момента при увеличении размера выборки  $N$ . Поведение моментов  $M_q$  для различных  $\beta$  и  $q$  представлено на рис. 3.11. Рис. 3.11 демонстрирует эффекты, связанные с ограничением количества ненулевых рангов или, что то же, числа обнаруженных видов. Видно, что кажущееся «насыщение» в поведении моментов распределения «особей» по «видам»  $M_q$  обусловлено искусственным ограничением видового реестра.

Исследователь может встретиться на практике и с другой аномалией в поведении моментов [31]. Ее иллюстрирует рис. 3.12, где поведение моментов распределения «особей» по «видам»  $M_q$  показано при различных  $\beta$ . Видно, что в маленьких выборках все или почти все особи-экземпляры принадлежат одному виду. Видовая «бедность» малых выборочных усилий становится все более выраженной с ростом  $\beta$ .



**Рис. 3.11.** Поведение моментов распределения «особей» по «видам»  $M_q$  для различных  $\beta$  и  $q$



**Рис. 3.12.** Эффекты, связанные с сильно выраженным доминированием

Заметим, что в случае равнопредставленности видов, когда все  $p_i$  равны между собой  $p_i = 1/S$ , асимптотическое поведение моментов при различных  $q$  описывается очень простой формулой:

$$M_q(N) = S(N)^{1-q}. \quad (3.26)$$

Асимптотическое поведение числа видов  $S$  описывается формулой Марагале-фо:

$$S = N^{\tau(0)}. \quad (3.27)$$

Используя (3.27) для показателя  $\tau(q)$  в случае равнопредставленности получим

$$\tau(q) = k(1 - q). \quad (3.28)$$

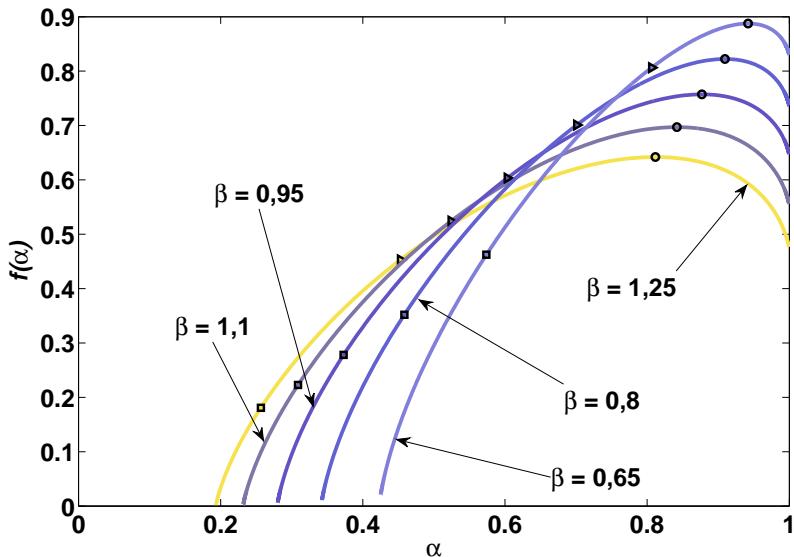
Линейный характер зависимости (3.28) утрачивается для реальных сообществ. Зависимость показателя  $\tau(q)$  от порядка момента становится существенно нелинейной. Для выявления степени отклонения от линейности функции  $\tau(q)$  в теории мультифракталов используют аппарат обобщенных размерностей, рассмотренный нами в разделе 1.7.

Мы видим, что гиперболическая модель вполне соответствует гипотезе Маргалефа

$$S = N^k. \quad (3.29)$$

Причем показатель Маргалефа  $k = \tau(0)$  стремится к единице при уменьшении показателя  $\beta$  до нуля (музейная экспозиция или Ноев ковчег) и, наоборот,  $k = 0$  при  $\beta \rightarrow \infty$  (человек).

Используя семейство ранговых распределений с фиксированным  $\beta$  можно построить и мультифрактальное описание модельного сообщества. Соответствующие мультифрактальные спектры представлены на рис. 3.13.



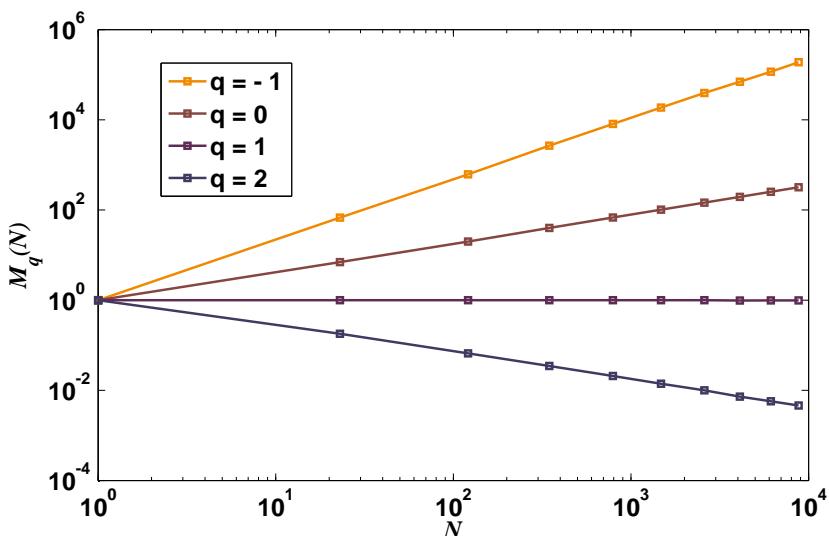
**Рис. 3.13.** Мультифрактальные спектры ранговых распределений с  $\beta = 0, 65$

Рассмотрим теперь многокомпонентную параметризацию рангового распределения на примере логнормального распределения числа видов:

$$s(n) = \left[ s_0 \exp \left\{ - \frac{(\ln(n) - \ln(n_0))^2}{2\sigma^2} \right\} \right], \quad (3.30)$$

где  $s(n)$  – число видов с численностью  $n$ ,  $s_0$  – максимальное значение  $s(n)$  при  $n = n_0$ ,  $\sigma$  – стандартное отклонение, квадратные скобки подразумевают взятие целой части значения выражения. При этом полное число видов и численность сообщества определяются следующими соотношениями:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} s(n); \quad N = \sum_{n=1}^{\infty} ns(n). \quad (3.31)$$



**Рис. 3.14.** Зависимость моментов  $M_q$  от численности  $N$  в билогарифмическом масштабе для логнормального распределения при линейном увеличении параметров распределения. Поведение нулевого момента  $q = 0$  соответствует зависимости числа видов  $S$  от численности  $N$

В соответствии с центральной предельной теоремой логнормальное распределение наблюдается всегда, когда относительная значимость видов управляет большим числом независимых факторов. При этом рост численности сообщества при сохранении логнормальной формы распределения по видам можно моделировать, увеличивая параметры  $s_0$  и  $n_0$  распределения. На рис. 3.14 представлены результаты расчета зависимости момента  $M_q$  от численности для логнормального распределения при линейном увеличении параметров распределения  $s_0$  и  $n_0$  от 1 до 10. Нулевой момент  $M_0$ , как следует из (3.23), соответствует числу видов  $S$ . С отклонением, не превышающим десятой доли процента, полученная зависимость числа видов от численности аппроксимируется степенным законом:

$$S = N^{0,62}. \quad (3.32)$$

### 3.4. Перколяция в дисперсных системах

Как уже подчеркивалось в предыдущей главе, тот факт, что перколяционный переход является критическим явлением, подразумевает степенной характер поведения связанных с ним физических величин: они меняются как степени параметра  $|p - p_c|$ . Это утверждение сохраняет свою силу и для динамических свойств перколяирующих объектов [161]. Первое экспериментальное свидетельство степенного поведения экстенсивной динамической характеристики перколяющей системы было дано в 1971 году Ластом и Таулесом [138] при исследовании проводимости разбавленной двумерной системы. Анализ полученных ими экспериментальных данных показал, что выше порога  $p_c \simeq 0,6$ , в критической зоне проводимость  $\sigma$  ведет себя как

$$\sigma \sim (p - p_c)^\mu \quad (3.33)$$

с показателем  $\mu$  больше 1.

Обсудим результаты экспериментальной проверки выводов континуальной теории протекания для фильтрационных течений в дисперсных средах с переменной пористостью [36]. Основное утверждение теории о том, что вблизи порога протекания активная пористость и проницаемость системы изменяются по скейлинговому закону, было подтверждено в серии экспериментов [27, 36], где полная пористость модельной среды изменялась под действием одноосного сжатия в цилиндрическом стакане. Экспериментально исследовалась зависимость порога протекания от корреляционных свойств пространственного распределения пор. В экспериментах с монодисперсными ансамблями измерялась скорость распространения фронта возмущения, вызванного резким включением градиента давления в системе. В заключение раздела обсуждаются перспективы неоднородного обобщения перколяционной проблемы в дисперсных системах [76, 165].

В описании явлений переноса в дисперсных средах методы стохастической геометрии находят естественное применение. Так, в последние годы появились модели нефтяных и газовых коллекторов, основанные на решеточных задачах теории протекания [70, 87]. Эти модели хорошо приспособлены для компьютерного моделирования и дают качественное представление о типичных режимах фильтрации. Однако они не могут претендовать на количественное соответствие реальным процессам, поскольку фигурирующие в них параметры носят феноменологический характер и не связаны с физически измеримыми величинами. Количественные сопоставления возможны в континуальных моделях протекания, где критическим параметром является полная пористость системы, а активная пористость естественно интерпретируется как параметр порядка перколяционного перехода. Таким образом, идеология континуальной теории протекания позволяет с единой точки зрения рассмотреть непрерывный набор сред, различающихся между собой величиной критического параметра. При этом набору различных сред сопоставляется одна обобщенная система с переменной пористостью. Основное

утверждение теории заключается в том, что вблизи порога протекания активная пористость и проницаемость обобщенной системы изменяются по скейлинговому закону.

Переформулируем решеточную задачу теории протекания из раздела 2.1. следующим образом. Рассмотрим (см. рис. 2.1) квадратную решетку (двумерная решетка рассматривается из соображений наглядности), каждый узел которой изображает либо элемент порового пространства с вероятностью  $x$ , либо элемент твердой матрицы с вероятностью  $1 - x$ . Будем считать, что на рис. 2.1 черные квадратики соответствуют порам, а жёлтые – элементам твердой матрицы). Очевидно, что в такой постановке величина  $x$  соответствует полной пористости системы.

Предположим далее, что фильтрационный поток может течь только между ближайшими черными квадратами, имеющими общую сторону. Очевидно, что при малых концентрациях  $x \ll 1$  поры либо изолированы друг от друга, либо формируют небольшие группы — кластеры ближайших соседей. Два черных узла принадлежат одному кластеру в том, и только том случае, когда они связаны цепочкой ближайших соседей, являющихся порами. Максимальный кластер на рис. 2.1 изображен синими пикселями. При  $x \ll 1$  (см. рис. 2.2, 2.3) система непрозрачна для фильтрационных потоков, поскольку не существует больших кластеров соединяющих противоположные стороны нашей решетки. Наоборот, при  $x \sim 1$  (см. рис. 2.5, 2.7) прозрачной для фильтрации оказывается подавляющая доля пространства решетки, синие узлы формируют кластер, соединяющий две противоположные стороны решетки и обеспечивающий прохождение фильтрационного потока с одной стороны системы на другую.

Как было уже упомянуто, появление в системе бесконечного кластера связанных элементов можно рассматривать как геометрический фазовый переход: критическая концентрация  $x = x_c$  отделяет фазу конечных кластеров  $x < x_c$  от фазы  $x > x_c$ , где уже существует бесконечный кластер. Заметим, что вклад в полную пористость дают все конечные кластеры, в то время как активная пористость представлена лишь элементами бесконечного кластера и той незначительной частью конечных кластеров, что выходят на свободную поверхность образца. Доля последних линейно убывает с ростом размера системы. Действительно, число пор, связанных с поверхностью образца, растет как площадь этой поверхности, а полное число пор изменяется пропорционально объему. Таким образом, ниже порога перколяции в фазе конечных кластеров  $x < x_c$  активная пористость преnбрежимо мала и заметно проявляется лишь выше порога в фазе  $x > x_c$ , где уже существует бесконечный кластер.

В работах [27, 36] обсуждаются результаты экспериментального исследования фильтрации в среде с изменяющейся пористостью. Схема экспериментальной установки показана на рис. 3.15. Пористая среда представлена неправильными кубиками полиуретана, занимающими объем цилиндрического стакана между

проницаемой перегородкой  $E$  и проницаемым поршнем  $F$ . При диаметре цилиндра 0,2 м размеры частичек полиуретана в различных экспериментах составляли 0,7 и 5 мм.

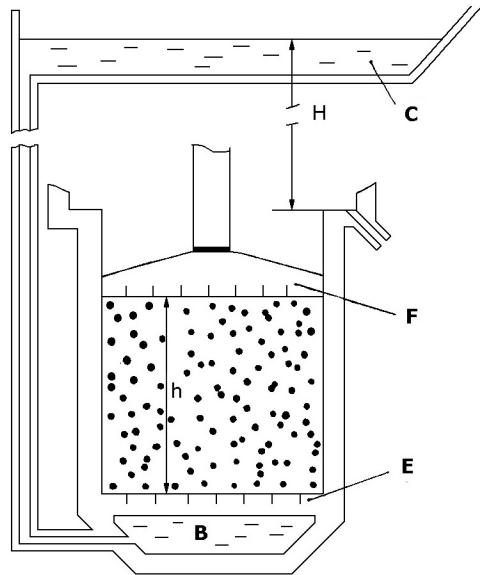


Рис. 3.15. Схема экспериментальной установки

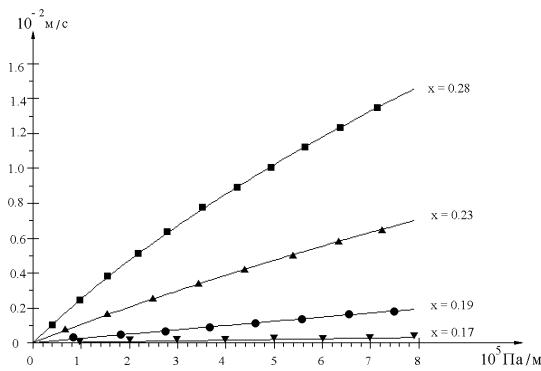
Изменение полной пористости достигается перемещением поршня  $F$  относительно перегородки  $E$ :  $x = 1 - \frac{M}{\rho S h}$ , где  $M$  — полная масса полиуретановых кубиков в стакане,  $\rho$  — плотность полиуретана,  $h$  — расстояние между  $F$  и  $E$ ,  $S$  — площадь сечения стакана. Поддон  $B$  сообщается с сосудом  $C$ , поднятым на высоту  $H$  относительно уровня стока, так, что перепад давления, вызывающий фильтрацию в установке, описывается соотношением

$$\nabla p - \rho_0 \mathbf{g} = \rho_0 g \frac{H}{h}, \quad (3.34)$$

где  $p$  — давление в воде,  $\rho_0$  — плотность воды,  $\vec{g}$  — ускорение свободного падения. В одномерной геометрии эксперимента скорость фильтрации определяется расходом  $\theta$ :  $u = \theta/S$ . При каждом фиксированном значении пористости (фиксированное значение  $h$ ) градиент давления в системе изменялся от нуля до величины порядка  $10^5$  Па/м. Соответствующие экспериментальные зависимости скорости фильтрации от величины перепада давления для различных значений пористости представлены на рис. 3.16. Экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретические зависимости, полученные с помощью двухчленного закона фильтрации [5]:

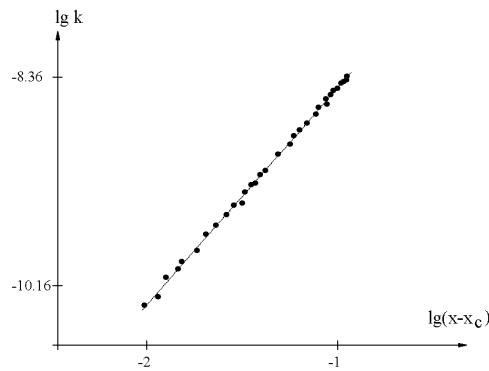
$$-\frac{k}{\mu} \rho_0 \mathbf{g} \frac{H}{h} = \vec{u} (1 + \text{Re}), \quad (3.35)$$

где  $Re = \frac{\rho_0 d_0 u}{\mu}$  — число Рейнольдса для фильтрационного течения,  $\mu$  — вязкость воды,  $k$  — проницаемость,  $d_0$  — параметр с размерностью длины, характеризующий мелкомасштабную структуру побрового пространства.



**Рис. 3.16.** Экспериментальные зависимости скорости фильтрации от величины перепада давления для различных значений пористости

В экспериментах с монодисперсными ансамблями кубиков с разными характерными размерами (относительные вариации размеров в каждом ансамбле не превышали 20%) система становилась непрозрачной для фильтрационного течения при одном и том же критическом значении полной пористости  $x_c = 0,16 \pm 0,1$ . На рис. 3.17 проницаемость как функция полной пористости представлена в двойном логарифмическом масштабе.



**Рис. 3.17.** Проницаемость как функция полной пористости

Полученные в эксперименте значения проницаемости хорошо аппроксимируются степенной зависимостью

$$k = k_0(x - x_c)^{1,7 \pm 0,1}, \quad (3.36)$$

где  $x_c$  — критическое значение пористости,  $t = 1,7 \pm 0,1$  — критический индекс проницаемости. Величина  $k_0$  пропорциональна квадрату размеров частичек в ансамбле, причем в пределах экспериментальной точности  $k_0 = d_0^2$ . Величина  $d_0$  не меняется сколько-нибудь заметно при изменении пористости вблизи порога. Это связано с тем, что инерционные эффекты, приводящие к отклонению от линейного закона Дарси, определяются локальными особенностями пбрового пространства и слабо зависят от его крупномасштабной геометрии. В то же время изменение полной пористости оказывается, прежде всего, именно на глобальной структуре пбрового пространства, в меньшей степени затрагивая его локальные геометрические параметры. Поэтому, используя соотношение (3.36) и вспоминая, что активная пористость  $m$  является параметром порядка перколяционного перехода и изменяется вблизи порога по скейлинговому закону, т.е.

$$m \cong (x - x_c)^\beta, \quad (3.37)$$

где  $\beta$  — критический индекс параметра порядка (см. раздел 2.2.), получаем:

$$\text{Re} = \frac{u\rho k^{1/2}}{\mu m^{t/2\beta}}. \quad (3.38)$$

В свое время неоднократно делались попытки выразить число Рейнольдса  $\text{Re}$  (или характерный размер  $d_0$ ) через параметры дисперсной системы таким образом, чтобы процесс фильтрации в пористых средах различной структуры описать единой формулой [5]. Результат (3.38) обеспечивает универсальную форму записи двухчленного закона фильтрации (3.35) для широкого класса дисперсных сред, объединенных общей геологической историей.

Наблюдаемое в эксперименте критическое значение  $x_c = 0,16 \pm 0,1$  является стандартом для трехмерных задач теории протекания, попадающих в один класс универсальности с такими классическими объектами, как задача сфер (см. раздел 2.7.) и трехмерная задача об уровне протекания (см. раздел 2.6.). В этих задачах предполагается случайно однородное распределение в пространстве переколирующих элементов. Сильные корреляции в распределении могут значительно изменить величину порога. Достаточно, например, заменить кубики на шарики, для того чтобы в распределении пор возникли сильные корреляции, обусловленные существованием ближнего порядка в ансамбле сферических частиц. При этом критическое значение понижается до величины порядка 3%, что не сильно отличается от величины теоретического порога для случая регулярной кубической гранецентрированной упаковки шаров [160, 165].

Другим примером резкого понижения порога по сравнению с задачей со случайно однородной функцией распределения могут служить фрактальные структуры, где медленно спадающие корреляции в ансамбле пор обусловлены само подобием системы. Так в работе [27] экспериментально был исследован случай, когда систему образовывали два типа кубиков с сильно различающимися размерами (0,7 и 5 мм).

Структура ансамбля контролируется параметром

$$\wp = \frac{q}{q + Q}, \quad (3.39)$$

где  $q, Q$  — удельные объемы соответственно маленьких и больших кубиков, при этом

$$q + Q = 1 - x. \quad (3.40)$$

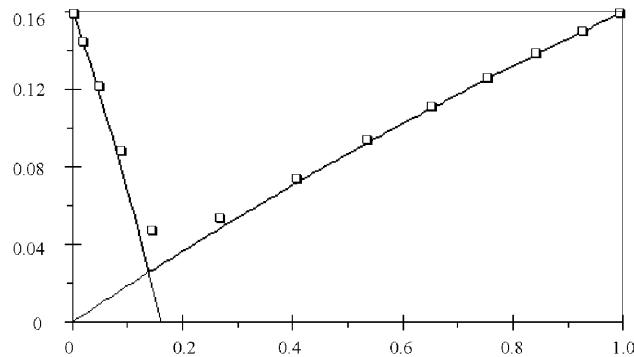
Очевидно, что значения  $\wp = 0, \wp = 1$  соответствуют монодисперсным ансамблям. В пределе сильно различающихся размеров легко получить аналитические выражения для критического значения полной пористости как функции структурного параметра  $\wp$ . Действительно, при значениях  $q \ll 1$  ( $\wp \ll 1$ ) наибольшее количество маленьких кубиков расположено в порах структуры, образованной ансамблем больших кубиков. Очевидно, что в этом случае критическое значение пористости линейно падает с увеличением  $q$ :  $x_c(q) = x_c(0) - q$  или, с использованием (3.39), (3.40)

$$x_c(\wp) = \frac{x_c(0) - \wp}{1 - \wp}. \quad (3.41)$$

Наоборот, когда  $Q \ll 1$  ( $\wp < 1$ ) изменение критического значения полной пористости обусловлено уменьшением размеров системы на величину объема, занимаемого большими кубиками, т.е.  $x_c(Q) = (1 - Q)x_c(0)$ . Используя опять (3.39), (3.40), получаем:

$$x_c(\wp) = \frac{x_c(0) \cdot \wp}{1 + x_c(0)\wp - x_c(0)}. \quad (3.42)$$

Асимптотики (3.41), (3.42) представлены на рис. 3.18 сплошными линиями.



**Рис. 3.18.** Критическое значение полной пористости как функция структурного параметра

Видно, что при  $\wp_c = \frac{x_c(0)}{1 + x_c(0)}$  происходит своеобразный геометрический фазовый переход от режима (3.41) к режиму (3.42). Минимальное значение критического значения полной пористости составляет величину  $x_c(\wp_c) = x_c^2(0)$ . Результаты экспериментов представлены на рис. 3.18 квадратными маркерами.

Обратимся теперь к результатам экспериментального определения размерности наикратчайшего пути между удаленными точками перколяционного кластера  $d_{\min}$ . Дело в том, что эта размерность тесно связана с другим критическим показателем, имеющим содержательную аналогию в классической термодинамике. Речь идет о показателе критического замедления. Известно, что критическое замедление является неотъемлемым атрибутом любого фазового перехода. Обсудим смысл этого явления для перколяционного превращения и параллельно выясним связь между показателем критического замедления и величиной  $d_{\min}$ .

Пусть имеется некоторое возмущение, которое распространяется следующим образом. Если в момент времени  $t$  возбужден узел  $i$ , то в момент времени  $t+1$  возбуждаются все соседние с  $i$  доступные узлы. Узел, который когда-либо был возбужден, остается возбужденным во все последующие моменты времени. Пусть в момент времени  $t = 0$  мы возбудили узел 0. Фронт возбуждения в момент времени  $t$  представляет собой совокупность узлов, химическое расстояние от которых до узла 0 равно  $t$ .

При  $x < x_c$  возмущение в системе не распространяется. При любом  $x > x_c$  асимптотическое поведение фронта описывается в пределе больших времен некоторой, зависящей от  $x$ , скоростью. При приближении  $x$  к  $x_c$  сверху эта скорость уменьшается: имеет место критическое замедление. При  $x = x_c$  скорость возмущения обращается в 0.

Пусть концентрация доступных узлов равна  $x > x_c$ . Длина корреляции в такой системе равна  $\xi = (x - x_c)^{-\nu}$ . Во фрактальном режиме время, за которое фронт возмущения переместится на расстояние  $R$ , равно  $t \sim R^{d_{\min}}$ , в частности, расстояние  $\xi$  будет преодолено за время  $t_\xi \sim \xi^{d_{\min}} \sim (x - x_c)^{-d_{\min}\nu}$ . На больших масштабах поведение системы становится однородным. При этом  $t/t_\xi = R/\xi$ . Таким образом, за время  $t \gg t_\xi$  фронт возмущения распространится на расстояние  $R \sim (\xi/t_\xi) t$ ; эффективная скорость его распространения  $v \sim \xi/t_\xi \sim (x - x_c)^{(d_{\min}-1)\nu}$ . Показатель  $\psi = (d_{\min} - 1)\nu$  эффективной скорости определяет величину критического замедления. В трехмерном случае  $\psi = 0,31 \pm 0,06$ .

В экспериментах с монодисперсными ансамблями измерялась скорость распространения фронта возмущения, вызванного резким включением градиента давления в системе. При приближении к порогу прозрачности эта скорость стремилась к нулю как степень величины  $x - x_c$ . Соответствующий критический показатель, определяющий величину критического замедления в системе, составил значение  $\psi = 0,31 \pm 0,02$ , которое совпадает с результатами компьютерных экспериментов [62].

В заключение рассмотрим простейшее неоднородное обобщение задачи, которое касается известной ситуации отклонения петрофизических данных, получаемых, например, в процессе бурения скважин, от линии «нормального уплотнения», т.е. возникновения зон, так называемого «аномального давления», см., например, [18, 26]. Обобщением является зависимость критического параметра

от одной пространственной координаты. Именно такая ситуация возникает при фильтрации флюида в пористой среде, испытывающей литостатическое давление [37, 36, 61]. Под действием собственного веса материал изменяет свою пористость, которая на некотором горизонте достигает своего критического значения. Ниже этого горизонта система непроницаема для флюида, причем зоны прозрачности отделены друг от друга флюктуационным фронтом, структура и ширина которого могут быть определены в рамках приближения градиентной перколяции [108, 109, 110].

Более интересная для геофизических приложений модель возникает тогда, когда полная пористость системы является случайной функцией пространственных координат. При этом целесообразно рассматривать не кластеры пор, а перколяцию зон прозрачности. Присутствие в системе градиентов среднего значения полной пористости обеспечивает здесь формирование иерархии флюктуационных фронтов. Заметим, что аналогичные флюктуационные фронты могут возникнуть из-за пространственной неоднородности критического значения полной пористости.

Более того, когда пористость становится динамической переменной, изменения которой во времени обусловлены геохимическими и геофизическими процессами, в системе возникают эффекты, связанные с нелинейностью пористость – проницаемость вблизи порога перколяции [32, 134]. При этом флюктуационный фронт становится активным элементом распределенного стохастического генератора [33, 61], пример которого будет рассмотрен в разделе 3.8.

### 3.5. Фрактальные сети и лабиринты

Фрактальные лабиринты встречаются в природе и технике повсеместно [33, 34]. Это транспортные и коммуникационные сети, фильтрационные каналы, системы сбора и распределения ресурсов и информации, речные системы, системы кровоснабжения, молниевые разряды и т.д. Мы уже знаем, что плотность фрактальных структур уменьшается по степенному закону с ростом их линейных размеров. Благодаря этому, транспортные свойства фрактальных сетей заметно отличаются от регулярного случая. Мы убедимся в этом рассматривая проводимость, случайные блуждания и колебательные возбуждения на самоподобных структурах [24, 25, 33, 74].

**Проводимость.** Начнем с регулярного случая и рассмотрим металлическую решетку размера  $L^d$ , к противоположным граням которой приложено напряжение. При изменении линейных размеров  $L$  системы ее полное сопротивление изменяется следующим образом:

$$\rho \sim \sigma^{-1} \frac{L}{L^{d-1}}, \quad (3.43)$$

где  $\sigma$  – проводимость металла. Поскольку  $\sigma$  не зависит от  $L$ , полное сопротивление решетки меняется при изменении размеров по степенному закону  $\rho \sim L^{2-d} \equiv$

$L^{\tilde{\zeta}}$  с показателем  $\tilde{\zeta} = 2 - d$ . Уравнение (3.43) справедливо для регулярных однородных проводников, когда плотность проводящего материала не зависит от масштаба.

Для фрактальных проводников плотность пропорциональна  $L^{d_f - d}$  и стремится к нулю при  $L \rightarrow \infty$ . Это связано с существованием во фрактальных структурах дыр самых различных масштабов, вплоть до размера самой системы. Увеличивая  $L$ , мы тем самым увеличиваем и размеры непроводящих дыр, что, в свою очередь, уменьшает проводимость. Благодаря самоподобию  $\sigma$  уменьшается на всех масштабах, следуя степенной зависимости:

$$\sigma \sim L^{-\tilde{\mu}}. \quad (3.44)$$

Как следствие (3.44) и (3.43), полное сопротивление ведет себя как

$$\rho \sim L^{\tilde{\zeta}}, \quad (3.45)$$

где критический индекс  $\tilde{\zeta} = 2 - d + \tilde{\mu}$  теперь больше, чем аналогичный показатель  $2 - d$  для однородного проводника. В случае переколяционного кластера показатель  $\tilde{\mu}$ , введенный в (3.44), связан с критическим индексом радиуса корреляции  $\nu$  и показателем  $\mu$ , определенным в (3.33), как  $\tilde{\mu} = \mu/\nu$ .

Вычислим значение показателя  $\tilde{\zeta}$  для салфетки Серпинского (рис. 1.5). Рассмотрим разность потенциалов между верхушкой салфетки и двумя вершинами ее нижнего ребра и сравним полные сопротивления большой салфетки масштаба  $L$  и меньшей салфетки масштаба  $L/2$ . В соответствии с законом Киргофа сопротивление большой структуры  $\rho(L)$  измеренное между двумя вершинами салфетки есть сопротивление маленького резистора  $\rho(L/2)$  плюс сопротивление маленько-го резистора включенного параллельно с другими двумя маленькими резисторами:

$$\rho(L) = \rho(L/2) + \left( \frac{1}{2\rho(L/2)} + \frac{1}{\rho(L/2)} \right)^{-1} = \frac{5}{3}\rho(L/2). \quad (3.46)$$

Используя (3.45), находим для салфетки Серпинского:  $\tilde{\zeta} = \ln(5/3)/\ln 2$ . Для фрактала Мандельброта-Гивена (рис. 2.15) аналогичным образом можно найти:  $\tilde{\zeta} = \ln(11/4)/\ln 3$ .

**Диффузия.** Диффузию моделируют обычно процессом случайных блужданий, когда на каждом шаге модельного времени частица смещается на дистанцию  $a$  в случайно выбранный соседний узел  $d$ -мерной модельной решетки. Предположим, что в момент времени  $t = 0$  частица стартовала из начала координат  $d$ -мерного решеточного пространства. Тогда после некоторого числа  $t$  шагов модельного времени текущая позиция диффундирующей частицы будет описываться вектором смещения:

$$\mathbf{r}(t) = a \sum_{k=1}^t \mathbf{e}_k, \quad (3.47)$$

где  $\mathbf{e}_k$  обозначает единичный вектор в направлении прыжка на  $k$ -м шагу модельного времени.

Характерная дистанция, на которую частица смещается в среднем в процессе случайных блужданий за  $t$  шагов модельного времени, описывается среднеквадратичным смещением  $\langle r^2(t) \rangle^{1/2}$ , где среднее  $\langle \dots \rangle$  понимается как среднее по всевозможным конфигурациям случайных блужданий на решетке. Из (3.47) мы находим

$$\langle r^2(t) \rangle = a^2 \sum_{k,k'=1}^t \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'} \rangle = a^2 t + \sum_{k \neq k'}^t \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'} \rangle.$$

Поскольку прыжки частицы в различные моменты времени  $k$  и  $k'$  некоррелированы друг с другом, мы имеем  $\langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'} \rangle = \delta_{kk'}$ , что приводит нас в результате к закону диффузии Фика:

$$\langle r^2(t) \rangle = a^2 t. \quad (3.48)$$

Заметим, что (3.48) не зависит от размерности  $d$  решетки. В более общем случае, когда частица имеет вероятность остаться на месте, среднеквадратичное смещение описывается формулой  $\langle r^2(t) \rangle = 2dDt$ , где  $D$  — коэффициент диффузии.

Среднеквадратичное смещение можно обнаружить, рассматривая плотность вероятности  $P(r, t)$ , которая есть вероятность найти диффундирующую частицу в пределах радиуса  $r$  от точки старта посредством соотношения  $\langle r^2(t) \rangle = \int dr r^2 P(r, t)$ . Плотность вероятности для случайных блужданий легко может быть найдена для одномерной цепочки узлов, когда частица может совершать прыжки только в двух направлениях. Прыжки вправо или влево совершаются с вероятностью  $p = 1/2$ . Для простоты предположим, что  $a = 1$ . В процессе случайных блужданий за  $t$  шагов модельного времени частица совершит  $m$  прыжков вправо и  $t - m$  прыжков влево, таким образом ее текущей координатой будет  $x = m - (t - m) = 2m - t$ . Вероятность того, что это произойдет описывается биноминальным распределением:

$$P(m, t) = \binom{t}{m} p^m (1-p)^{t-m} = \binom{t}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^t. \quad (3.49)$$

Для больших  $t$ ,  $m$ , и  $t - m$  биноминальные коэффициенты могут быть оценены по формуле Стирлинга:  $t! \simeq (2\pi t)^{1/2} (t/e)^t$  и так далее. Поскольку текущая координата частицы  $x$  много меньше полного числа её прыжков вправо или влево, результирующее выражение может быть разложено в ряд Тейлора по степеням величины  $x/t \ll 1$ , и окончательно мы получим:

$$P(x, t) \simeq \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/2t}. \quad (3.50)$$

Соотношение (3.50) представляет собой распределение Гаусса с шириной  $t$ , которая идентична  $\langle x^2(t) \rangle$ . Поскольку  $P(x, t)$  представляет собой вероятность, то

$\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x, t) = 1$ , что выполняется для (3.50). В более общем случае  $d$ -мерной гиперрешетки (3.47) переходит в следующее выражение:

$$P(r, t) \simeq \frac{1}{\langle r^2(t) \rangle^{d/2}} e^{-(d/2)r^2/\langle r^2(t) \rangle}, \quad (3.51)$$

где  $\langle r^2(t) \rangle = 2dDt$ , и вероятность возвращения частицы в начало координат  $P(0, t)$  через  $t$  шагов модельного времени пропорциональна  $\langle r^2(t) \rangle^{-d/2}$ .

Рассмотрим теперь, что же происходит при блужданиях в самоподобных лабиринтах. Очевидно, что, благодаря большим дырам, перетяжкам и мертвым концам (тупикам) фрактала, движение по нему блуждающей частицы замедляется. Причем, поскольку дыры, перетяжки и мертвые концы обнаруживают себя на всех масштабах, то на всех масштабах осуществляется и замедление. Закон Фика (3.48) утрачивает свою дееспособность, и на смену ему приходит более общая формула для среднеквадратичного смещения:

$$\langle r^2(t) \rangle = t^{2/d_\omega}, \quad (3.52)$$

где новый критический показатель  $d_\omega$  (показатель диффузии – diffusion exponent или фрактальная размерность случайных блужданий – fractal dimension of the random walk) всегда больше 2.

Критический индекс сопротивления  $\tilde{\zeta}$  и показатель диффузии  $d_\omega$  могут быть связаны уравнением Эйнштейна

$$\sigma = \frac{e^2 n}{k_B T} D, \quad (3.53)$$

которое связывает проводимость постоянного тока  $\sigma$  системы с коэффициентом диффузии  $D$ . Здесь  $e$  и  $n$  обозначают соответственно заряд и концентрацию подвижных частиц.

Для нахождения связи показателя  $d_\omega$  с величинами  $\tilde{\zeta}$  и  $\tilde{\mu}$  мы используем обычную скейлинговую аргументацию. Поскольку концентрация частиц  $n$  пропорциональна плотности субстрата ( $n \sim L^{d_f - d}$ ), то правая часть в (3.53) пропорциональна  $L^{d_f - d} t^{2/d_\omega - 1}$ . Левая часть (3.53) пропорциональна  $L^{-\tilde{\mu}}$ . Так как время, затрачиваемое диффундирующей частицей на преодоление дистанции длиной  $L$ , меняется как  $L^{d_\omega}$ , мы окончательно находим, что  $L^{-\tilde{\mu}} \sim L^{d_f - d + 2 - d_\omega}$ , откуда следует искомое соотношение:

$$d_\omega = d_f - d + 2 + \tilde{\mu} = d_f + \tilde{\zeta}. \quad (3.54)$$

Зная, что для салфетки Серпинского  $d_f = \ln 3 / \ln 2$ , а в случае фрактала Мандельброта-Гивена  $d_f = \ln 8 / \ln 3$ , находим для этих структур, соответственно,  $d_\omega = \ln 5 / \ln 2$  и  $d_\omega = \ln 22 / \ln 2$ .

Для случайных фракталов нахождение величины  $d_\omega$  далеко не так просто. Исключением являются топологически линейные фракталы с химической размерностью, равной единице ( $d_l = 1$ ), которые могут быть рассмотрены как непересекающиеся пути. Вдоль такого пути (в химическом или  $l$ -пространстве) диффузия нормальна и, следовательно,  $\langle l^2(t) \rangle = t$ . Поскольку  $l \sim r^{d_f}$ , среднеквадратичное смещение в евклидовом  $r$ -пространстве ведет себя как  $\langle r^2(t) \rangle = t^{1/d_f}$ , что дает нам в этом случае  $d_\omega = 2d_f$ .

Для случая перколяционного фрактального кластера величина  $d_\omega$  не может быть вычислена точно, однако ее нижняя и верхняя оценки довольно близки друг к другу в пространствах размерностью  $d \geq 3$ . Хорошую оценку дает гипотеза Александера — Орбаха [74]:  $d_\omega \simeq 3d_f/2$ .

Для фракталов функция распределения  $\langle P(r, t) \rangle$ , усредненная по всем точкам старта частицы на фрактале, уже не является гауссовой. Для самоизбегающих блужданий можно обнаружить [96], что  $\langle P(r, t) \rangle$  для  $r/\langle r^2 \rangle^{1/2} \gg 1$  описывается растянутым гауссовским распределением:

$$\langle P(r, t) \rangle / \langle P(0, t) \rangle \sim \exp[-\text{const} \cdot (r/\langle r^2 \rangle^{1/2})^u], \quad (3.55)$$

где показатель  $u$  связан с  $d_\omega$  соотношением

$$u = \frac{d_\omega}{d_\omega - 1}. \quad (3.56)$$

Соотношение (3.56) было проверено численно для огромного числа случайных фракталов, включая перколяционные фрактальные кластеры. Для топологически линейных фракталов оно выполняется точно. Поскольку на больших временах каждый элемент фрактальной структуры посещается блуждающей частицей примерно с одинаковой вероятностью, возникающая в (3.55) вероятность возвращения  $\langle P(0, t) \rangle$  обратно пропорциональна числу посещенных узлов  $S(t)$ . Для фракталов  $S(t)$  меняется как  $\langle r^2(t) \rangle^{d_f/2}$  и, таким образом,

$$\langle P(0, t) \rangle \sim (1/\langle r^2(t) \rangle)^{d_f/2} \sim t^{-d_f/d_\omega}. \quad (3.57)$$

**Колебательные возбуждения.** Рассмотрим  $L^d$  частиц, расположенных в узлах регулярной  $d$ -мерной решетки и соединенных пружинами с ближайшими соседями. Частицы могут совершать колебания относительно совпадающих с узлами решетки положений равновесия. В соответствии с трансляционной симметрией колебательные возбуждения решетки представляют собой волны, характеризующиеся вектором обратной решетки  $\mathbf{q}$  и частотой  $\omega(\mathbf{q})$ . Для маленьких величин  $q = |\mathbf{q}|$ , соответствующих большим длинам волн  $\lambda$ , эти возмущения (фононы) представляют собой обычные звуковые волны с дисперсионным соотношением

$$\omega(\mathbf{q}) = cq, \quad (3.58)$$

где  $c$  — скорость звука в решетке.

Из (3.58) мы находим плотность состояний фононов:

$$z(\omega) \sim \omega^{d-1}. \quad (3.59)$$

Величина  $z(\omega)$  может быть связана с Фурье-образом вероятности возвращения в начало координат  $P(0, t)$  в процессе случайных блужданий. Мы используем эту аналогию при рассмотрении  $z(\omega)$  для фракталов.

Обратимся теперь к колебательным возбуждениям фрактальных сетей. Рассмотрим  $N = L^{d_f}$  частиц, расположенных в узлах фрактальной структуры, вложенной в  $d$ -мерную гиперкубическую решетку так, что ближайшие соседи соединены пружинами. Если обозначить матрицу жесткостей пружин, соединяющих ближайших соседей  $i$  и  $j$  как  $k_{ij}^{\alpha\beta}$ , то уравнение движения запишется в виде:

$$\frac{d^2 u_i^\alpha(t)}{dt^2} = \sum_j \sum_\beta k_{ij}^{\alpha\beta} [u_j^\beta(t) - u_i^\beta(t)], \quad (3.60)$$

где  $u_i^\alpha$  – обозначает смещение  $i$ -ой частицы вдоль  $\alpha$ -ой координаты.

Для простоты мы предположим, что матрица связей  $k_{ij}^{\alpha\beta}$  может быть рассмотрена как скалярная величина  $k_{ij}^{\alpha\beta} = k_{ij}\delta_{\alpha\beta}$ . Тогда различные компоненты смещения развязываются и мы получаем одинаковые уравнения для всех компонент  $u_i^\alpha \equiv u_i$ :

$$\frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = \sum_j k_{ij} [u_j(t) - u_i(t)]. \quad (3.61)$$

Это уравнение мало отличается по структуре от уравнения диффузии: достаточно заменить смещение  $u_i(t)$  на вероятность посещения  $i$ -го узла структуры  $P(i, t)$  и заменить вторую производную по времени первой. В диффузионном уравнении матрица связей  $k_{ij} = k_{ji}$  имеет смысл вероятностей переходов между соответствующими узлами и обладает той же симметрией, что и матрица жесткостей пружин. Для решения (3.61) воспользуемся стандартным методом классической механики. Подстановка  $u_i(t) = A_i \exp(-i\omega t)$  приводит нас к однородной системе уравнений для  $N$  неизвестных  $A_i$ , из которой определяются  $N$  собственных значений  $\omega_\alpha^2 \geq 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , и соответствующие собственные вектора  $(A_1^\alpha, \dots, A_N^\alpha)$ . Удобно выбрать ортонормированный базис собственных векторов  $(a_1^\alpha, \dots, a_N^\alpha)$ .

Общее решение (3.61) имеет вид  $u_i(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha a_i^\alpha \exp(-i\omega_\alpha t) \right\}$ , где комплексные константы  $c_\alpha$  должны быть найдены из начальных условий. Если в момент времени  $t = 0$  только  $j$ -ая частица смещена относительно своего положения равновесия, т.е.  $u_i(0) = u_j(0)\delta_{ij}$ , то мы имеем:

$$u_{i+j}(t) = u_j(0) \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N (a_j^\alpha) a_{i+j}^\alpha \exp(-i\omega_\alpha t) \right\}. \quad (3.62)$$

Аналогично выглядит и решение соответствующего диффузионного уравнения

$$P(i+j, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N (a_j^\alpha) a_{i+j}^\alpha \exp(-i\epsilon_\alpha t) \right\}, \quad (3.63)$$

где  $\epsilon_\alpha = \omega_\alpha^2$ . В соответствии с начальным условием  $P(i, 0) = \delta_{ij}$ ,  $P(j, t)$  обозначает вероятность возвращения в исходную точку случайных блужданий. Средняя вероятность  $\langle P(r, t) \rangle$  того, что диффундирующая частица ушла от исходной точки на расстояние  $r$  определяется, во-первых, усреднением по всем узлам  $i+j$ , которые удалены от исходного на дистанцию  $r$ , во-вторых, выбором всех узлов фрактальной структуры в качестве исходной точки  $j$  блужданий и усреднением по ним, то есть:

$$\langle P(r, t) \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N a(r, \alpha) \exp(-\epsilon_\alpha t) \right\}, \quad (3.64)$$

где

$$a(r, \alpha) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N(r)} (a_j^\alpha) a_{i+j}^\alpha \quad (3.65)$$

и внутреннее суммирование в (3.65) осуществляется по всем узлам, удаленным на расстояние от исходного  $j$ -го узла. Для  $r = 0$  мы имеем просто  $a(0, \alpha) = 1/N$  (в силу ортонормированности собственных векторов) и таким образом,

$$\langle P(0, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \exp(-\epsilon_\alpha t). \quad (3.66)$$

В пределе  $N \rightarrow \infty$  сумма по  $\alpha$  может быть заменена интегралом по  $\epsilon$  посредством введения плотности состояний по энергии  $n(\epsilon)$ :

$$\langle P(0, t) \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty d\epsilon n(\epsilon) \exp(-\epsilon t). \quad (3.67)$$

Соответственно, мы можем найти  $n(\epsilon)$ , используя обратное преобразование Лапласа от  $\langle P(r, t) \rangle$ . Легко убедиться в том, что соотношение  $\langle P(0, t) \rangle \sim t^{-d_f/d_\omega}$  (3.57) подразумевает  $n(\epsilon) \sim \epsilon^{d_f/d_\omega - 1}$ . Из  $n(\epsilon)$  мы находим плотность состояний  $z(\omega)$ . Поскольку  $\epsilon_\alpha = \omega_\alpha^2$  и, по определению,  $n(\epsilon)d\epsilon = z(\omega)d\omega$ , мы имеем

$$z(\omega) \sim \omega^{2d_f/d_\omega - 1}. \quad (3.68)$$

Показатель  $d_s \equiv 2d_f/d_\omega$  называется фрактонной или спектральной размерностью (fracton or spectral dimension) и заменяет размерность евклидового пространства  $d$  в выражении (3.59) для плотности состояний фононов. Для переколяционного кластера  $d_s$  близка к  $4/3$  для всех размерностей.

Колебательные возбуждения на фракталах называются фрактонами. В противоположность обычным фононам, фрактоны сильно локализованы в пространстве. Из приведенного выше рассмотрения нетрудно получить:

$$\langle P(r, t) \rangle = \int_0^\infty d\omega z(\omega) \langle a(r, \omega) \rangle \exp(-\omega^2 t), \quad (3.69)$$

где  $z(\omega)$  нормировано к единице. Как и в предыдущем параграфе скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по всевозможным конфигурациям. Для больших расстояний  $r$  обратное преобразование Лапласа от  $\langle P(r, t) \rangle$  может быть выполнено методом наискорейшего спуска, выявляющим доминирующий экспоненциальный член:

$$\langle a(r, \omega) \rangle / \langle a(0, \omega) \rangle \sim \text{Im} \left\{ \exp \left( -\text{const} \cdot c(d_\omega) (r/\lambda(\omega))^{d_\phi} \right) \right\}, \quad (3.70)$$

где

$$d_\phi = \frac{ud_\omega}{u + d_\omega}, \quad (3.71)$$

$$c(d_\omega) = \cos(\pi/d_\omega) + i \sin(\pi/d_\omega), \quad (3.72)$$

и

$$\lambda(\omega)^{-1} \sim \omega^{2/d_\omega}. \quad (3.73)$$

Используя 3.56, находим, что  $d_\phi = 1$ , т.е., что фрактоны являются локализованными колебаниями и затухают экспоненциально на длине  $\lambda(\omega)$ .

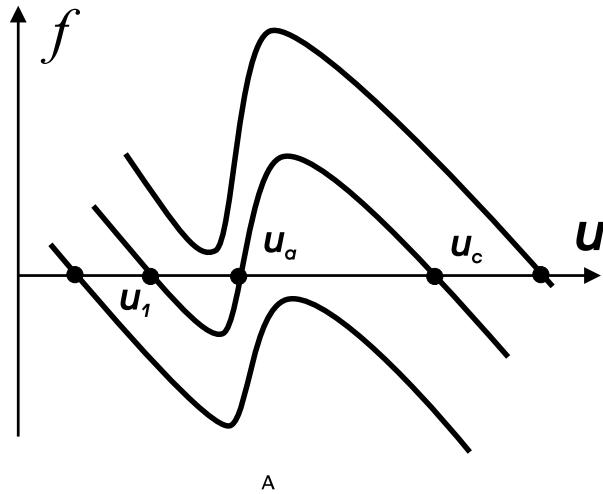
## 3.6. Перколяция в активных средах

Теория перколяции открывает широкие горизонты при исследовании двухфазных сред. Мы убедились в этом при рассмотрении фильтрационных течений в разделе 3.4. Можно привести множество других примеров, когда в определенным образом приготовленных системах перколяция по одной из контрастных по физическим свойствам компонент приводит к содержательным эффектам. Однако более интересная физическая ситуация возникает тогда, когда развитие и взаимопревращение компонент в двухфазной системе обусловлено динамикой самой системы. Естественно, что такие превращения возникают только в активных средах и сопровождаются подводом к системе свободной энергии и диссипацией [72]. При этом ключевую роль начинает играть явление так называемой самоорганизованной критичности (Self-Organized Criticality), когда система автоматически эволюционирует к состоянию динамического равновесия, близкому к порогу перколяции [32, 66, 83, 84, 86, 136].

Простейшей базовой моделью активных бистабильных сред с восстановлением (ингибитором) является система двух уравнений [10, 43, 65, 46]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v) + D\Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\epsilon(v - v_0(u)), \end{aligned} \quad (3.74)$$

где в зависимости от задачи  $u$  может служить локальной разностью потенциала в нервном волокне или грозовом облаке, температурой при распространении фронтов горения, концентрацией химического реагента и т.д. Ингибитор  $v$  характеризует скорость восстановления активной компоненты, причем член  $v_0(u)$  определяет переход системы в исходное (пассивное) состояние по мере «выгорания» активного вещества. В большинстве реальных систем  $\epsilon$  – малый параметр. Для бистабильных сред соответствующая (3.74) точечная система ( $D = 0$ ) представляет собой релаксационную систему с  $N$ -образной характеристикой (левое окно рис. 3.19), которая имеет три состояния равновесия: два устойчивых (пассивное,  $u_1$  и критическое,  $u_c$ ) и одно неустойчивое (активное,  $u_a$ ). Качественно, действие ингибитора  $v$  приводит к перемещению кривой  $f(u, v)$  вдоль вертикальной оси, как это показано в левом окне рис. 3.19. При этом соответствующая (3.74) точечная система может быть как ждущим генератором одиночных импульсов (если минимум кривой  $f(u, v)$  остается в области отрицательных значений, так и автогенератором (если в процессе уменьшения ингибитора  $v$  реализуется случай, соответствующий верхней кривой в левом окне на рис. 3.19).



**Рис. 3.19.** Три возможные ситуации для сосредоточенного активного элемента: нижняя кривая – пассивное состояние, средняя – ждущий или бистабильный режим, верхняя – самовозбуждение и возникновение автоколебаний

Учет диффузионного слагаемого в первом уравнении системы (3.74) приводит к генерации уединенных бегущих импульсов возбуждения в случае ждущего режима, либо незатухающей серии импульсов в случае автоколебаний. Ширина и скорость импульса определяются параметрами  $\epsilon$  и  $D$  ( $|f| \sim 1$ ) [43, 65].

Многочисленные исследования базовой модели (3.74) и ее обобщений, проведенные, в основном, для двухмерного случая, обнаружили разнообразные типы регулярной и нерегулярной динамики в виде плоских, круговых и спиральных

волн возбуждений и их модификаций, возникающих при наличии дислокаций, фазовых корректоров и т.п. Возникает вопрос, найдутся ли условия в этой совокупности взаимодействий для возникновения фрактальных структур? Забегая вперед, можно дать однозначный ответ, что такая фрактальная динамика возникает в определенной области управляющих параметров. Таких параметров в нашей задаче три: это параметр  $\epsilon$ , характеризующий, по-существу, скорость подвода свободной энергии к системе, отношение  $x_c = u_c/u_a$ , определяющее относительное расстояние между устойчивым (критическим) и неустойчивым (точка активации) состояниями равновесия (см. рис. 3.19), и частота  $\xi$  появления внешнего (запускающего) сигнала на входе системы. Параметры  $\epsilon$  и  $\xi$  безразмерные и сравниваются с обратным временем формирования импульса возбуждения. Важную роль играют и характерные пространственные масштабы системы. И, наконец, мы должны учесть пространственно-временные флуктуации при заселении системы активной фазой. Роль этих флуктуаций убывает по закону больших чисел по мере заселения среды, однако они могут оказаться принципиальными при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Исследовать роль указанных факторов в рамках системы (3.74) чрезвычайно сложно, особенно в интересующем нас трехмерном случае, поэтому мы перейдем к более упрощенному описанию динамики (3.74) на языке клеточных автоматов.

Возмущение распространяется в области, где превышен порог активации среды. При медленном по сравнению с релаксацией (временем передачи возбуждения) изменении конфигурации надпороговых областей процесс контролируется перколяционными эффектами.

Мы начнем с простой, но содержательной модели, в которой роль перколяционных элементов играют деревья растущие в узлах квадратной решетки. Критическим параметром геометрической части задачи здесь выступает, очевидно, плотность занятых деревьями узлов. Впервые модель лесных пожаров была предложена Баком, Ченом и Тангом в 1990 году [85] и позднее, в 1992 году была усовершенствована Шваблом и Дросслем [151]. Мы рассмотрим именно этот последний вариант модели.

Итак, будем полагать, что динамика числа деревьев определяется следующими простыми правилами.

1. С вероятностью  $\epsilon$  в единицу времени деревья появляются в узлах решетки. Мы, таким образом, не фиксируем рост деревьев в деталях, а предлагаем бинарную схему роста: с некоторого момента времени содержимое узла становится деревом, а до этого момента узел считается пустым.
2. С вероятностью  $\theta$  в единицу времени молния ударяет в узел решетки. Если узел содержит дерево, то это дерево загорается. В противном случае состояние узла не меняется.
3. Если ближайшие соседи узла, содержащего загоревшееся дерево, содержат деревья, то с вероятностью единица эти деревья загораются на следующем

шаге модельного времени. Ближайшими соседями узла мы считаем четырех его смежных соседей.

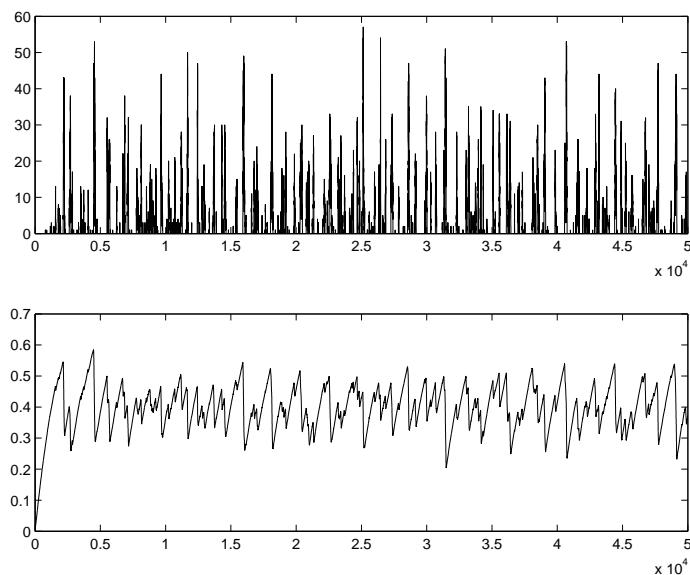
4. На следующем шаге модельного времени узел, содержащий загоревшееся дерево, становится пустым.

Перколяционные эффекты в этой задаче становятся существенными при выполнении двойного предела

$$\epsilon \rightarrow 0, \quad \theta/\epsilon \rightarrow 0. \quad (3.75)$$

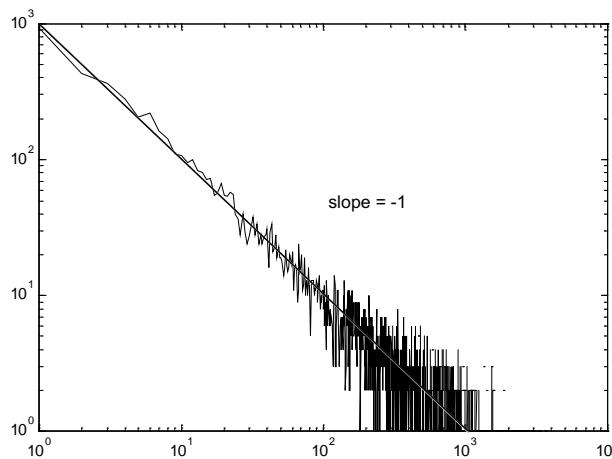
При этом система самостоятельно выходит на стационарный уровень заполнения деревьями  $p \lesssim p_c$  с широким распределением кластеров по размерам. В отсутствие молний кластеры медленно растут и коагулируют. Бросая редкие молнии, мы выжигаем незначительную часть этих кластеров, практически не изменения свойственного статической перколяции распределения кластеров по размерам. При выполнении соотношения (3.75) характерное время выгорания крупного кластера уступает характерной величине интервала между появлениями новых деревьев.

На верхней панели рис. 3.20 показана эволюция числа горящих деревьев; там же на нижней панели отражена зависимость от времени удельного числа растущих деревьев. Видно, что удельное число деревьев флюктуирует вблизи порогового уровня  $p_c \simeq 0,58$ , не превышая его. Этот критический уровень определяется равновесием между процессами роста деревьев и их уничтожением при возникновении пожаров.



**Рис. 3.20.** Эволюция удельного числа сгоревших деревьев

На рис. 3.21 частота появления пожаров охватывающих определенное число деревьев представлена как функция этого числа в билогарифмическом масштабе. Очевиден степенной характер зависимости, указывающий на самоподобие пространственно-временной динамики пожаров — отсутствие в широком диапазоне значений характерных размеров кластеров и характерных частот их появления.



**Рис. 3.21.** Частота появления пожаров как функция их размеров в билогарифмическом масштабе

Скейлинговый режим ограничен с одной стороны размерами системы и временем счета, с другой — размером кластера, состоящего из единственного дерева, и обратной частотой появления этих минимальных пожаров. Характерный интервал между частыми мелкими событиями составляет сотни шагов модельного времени.

Динамика рассмотренной модели примечательна в двух аспектах. Во-первых, она происходит в критическом режиме сильных флюктуаций: заранее не известно в какой кластер, большой или маленький, угодит следующая молния. При этом сами кластеры имеют фрактальную перколяционную структуру и, следовательно, такой же структурой обладают паттерны происходящих пожаров. Другими словами, критический характер динамики — отсутствие характерных пространственно-временных масштабов — непосредственно связан здесь с фрактальностью реальных конфигураций системы. Во-вторых, мы имеем дело с самоорганизованной динамикой: при выполнении соотношений (3.75) система самостоятельно из исходного состояния с  $p = 0$  выходит на уровень генерации фрактальных диссипативных структур  $p \lesssim p_c$ . Такое нетривиальное соединение критичности и самоорганизации нашло свое отражение в названии активно развивающейся сегодня парадигмы самоорганизованной критичности [86, 136].

Сейчас мы рассмотрим физически более содержательный аналог модели лесных пожаров и увидим, что перколяционный фазовый переход может обеспечивать нетривиальный флуктуационный механизм подавления роста неустойчивостей в активных средах. Представим возбудимую среду, образованную трехмерной решеткой клеточных автоматов. Каждому узлу решетки поставлена в соответствие зависящая от времени скалярная величина  $u$ , характеризующая величину электрического потенциала. Эволюция потенциального рельефа на решетке определяется в рамках модели случайного роста. Именно на каждом шаге модельного времени происходит распределение по узлам решетки нормально распределенных случайных добавок к величине скалярного поля. При этом каждый узел совершает независимое от соседей брауновское движение в пространстве значений скалярного потенциала. Рост потенциального рельефа ограничен некоторым критическим значением разности потенциалов  $u_c$  между соседними узлами, по достижении которого происходит пробой — выравнивание потенциала между соседями. Предполагается, что на следующем шаге модельного времени возникший пробой может инициировать пробои соседних связей (инфицировать соседей), если приложенная к ним разность потенциалов превышает некоторый фиксированный уровень — уровень активации  $u_a$ , значение которого меньше критического.

Выясним общие критерии, обеспечивающие появление критической динамики. Численный эксперимент, например, обнаружил существование критического уровня заселенности, флуктуации вблизи которого обладают скейлинговыми свойствами. Кроме того, в эксперименте была выявлена зависимость этого уровня от числа ближайших соседей для заданной решетки автоматов, т.е. от ее координационного числа  $z$ . Чем большее число элементов находится в контакте с зараженным, тем выше вероятность размножения инфекции и тем, следовательно, ниже критический уровень заселенности. Координационное число возрастает с увеличением размерности решетки. В пределе высоких координационных чисел для расчета критического уровня заселенности может быть использовано приближение среднего поля. Введем функцию распределения связей по абсолютной величине перепада потенциала на них  $f(u)$ . Величина  $f(u)du$  определяет долю связей с абсолютной величиной разности потенциалов в интервале  $[u, u + du]$ . В любой фиксированный момент времени все связи в системе можно отнести к трем типам: 1) активные, их удельное число  $p = \int_{u_a}^{u_c} f(u)du$ ; 2) пассивные, с удельным числом  $q = \int_0^{u_a} f(u)du$ ; и 3) "горячие", т.е. те, что возвращаются за время  $\tau$  из активного состояния в пассивное с нулевой разностью потенциалов.

Эволюция функции распределения связей по величине разности потенциалов на их концах описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + I - \Omega f, \quad (3.76)$$

где коэффициент  $D$  играет роль коэффициента диффузии связей по величине разности потенциалов, а декремент  $\Omega$  определяется соотношением:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & 0 \leq u \leq u_a \\ \text{const} & u_a \leq u \leq u_c. \end{cases} \quad (3.77)$$

Последний диссипативный член в (3.77) характеризует обусловленный микропробоями механизм ограничения роста. Понятно, что диссипация в уравнении (3.76) носит формальный характер: все связи, вырванные из процесса роста в интервале между уровнем активации и критическим уровнем, возвращаются через время  $\tau$  в точку с нулевой разностью потенциалов:

$$I = \begin{cases} m\delta(0) & 0 \leq u \leq u_a \\ 0 & u_a \leq u \leq u_c, \end{cases} \quad (3.78)$$

где  $\delta(u)$  – дельта функция Дирака,

$$m = -D \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=u_c} + \Omega p. \quad (3.79)$$

Здесь величина  $s = -D \frac{\partial f}{\partial u}$  характеризует плотность потока связей в пространстве разностей потенциалов. Первое слагаемое в правой части (3.79) соответствует удельному числу связей, достигших в единицу времени критического значения  $u_c$  разности потенциалов. Второе слагаемое соответствует доле связей, выводимых из процесса роста благодаря механизму активации. Оба слагаемых в сумме характеризуют скорость появления связей в точке  $u = 0$ .

При отсутствии последних двух членов это уравнение представляет собой уравнение Фоккера–Планка, которое описывает диффузионное расширение функции распределения в пространстве разностей потенциалов в процессе роста.

Справедливо условие сохранения числа связей в системе:

$$p + q + m\tau = 1. \quad (3.80)$$

При этом функция распределения учитывает только активные и пассивные связи и, следовательно:

$$\int_0^{u_c} f(u)du = 1 - m\tau. \quad (3.81)$$

Введем новые переменные и обозначения:  $T = u_a^2/D$ ;  $\tilde{t} = t/T$ ;  $x = u/u_a$ ;  $x_c = u_c/u_a$ , тогда (3.76) перепишется в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{t}} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \tilde{I} - \alpha f, \quad (3.82)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ \Omega T & 1 \leq x \leq x_c \end{cases}, \quad \tilde{I} = \begin{cases} mT\delta(0)/ & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq x_c \end{cases}. \quad (3.83)$$

Стационарное решение уравнения (3.82) имеет вид:

$$f = \begin{cases} C_2 - C_1 x & 0 \leq x < 1 \\ (C_2 - C_1) \exp \sqrt{\alpha}(1-x) & 1 \leq x \leq x_c \end{cases}. \quad (3.84)$$

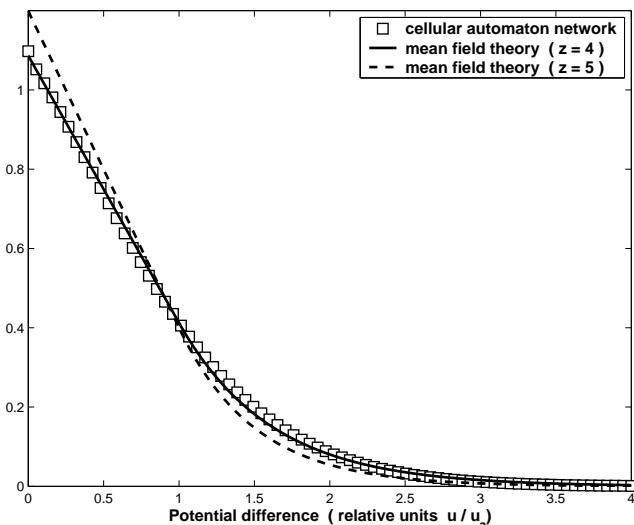
Используя непрерывность потока в точке  $x = 1$  и условие нормировки (3.80) получаем:

$$C_2 = C_1 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right), \quad C_1 = \left( \frac{1 - \exp \sqrt{\alpha}(1 - x_c)}{\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\tau}{T} \right)^{-1}. \quad (3.85)$$

Компактные выражения для  $p$  и  $m$  имеют вид:

$$p = C_1 \left\{ 1 - \exp [\sqrt{\alpha}(1 - x_c)] \right\} / \alpha, \quad m = C_1 / T. \quad (3.86)$$

Характерный вид функции распределения связей по величине перепада потенциала на них представлен на рис. 3.22.



**Рис. 3.22.** Функция распределения связей по величине перепада потенциала для  $x_c = 4$ . Сплошная линия соответствует теоретической зависимости с  $z = 4$ . Для простой кубической решетки число исходящих связей  $z = 5$ . Соответствующая кривая проведена пунктиром. Квадраты соответствуют численному эксперименту

Возвращаясь к дискретной модели, заметим, что величина коэффициента диффузии  $D$  пропорциональна дисперсии  $\tilde{\delta}$  нормально распределенных порций потенциала, добавляемых к изменяющемуся рельефу на каждом шаге модельного времени:  $D = \tilde{\delta}/\tau$ . Таким образом,  $T = u_a^2/\tilde{\delta}\tau$ . В счете мы выбирали время релаксации  $\tau$  равным шагу модельного времени:  $\tau = 1$ .

Коэффициент  $\Omega$ , характеризующий диссипацию, можно связать с координационным числом дискретной модели  $z$ . Действительно, интегрируя уравнение (3.76) по  $u$  в интервале от  $u_a$  до  $u_c$ , получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = s(u_c) - s(u_a) - \Omega p. \quad (3.87)$$

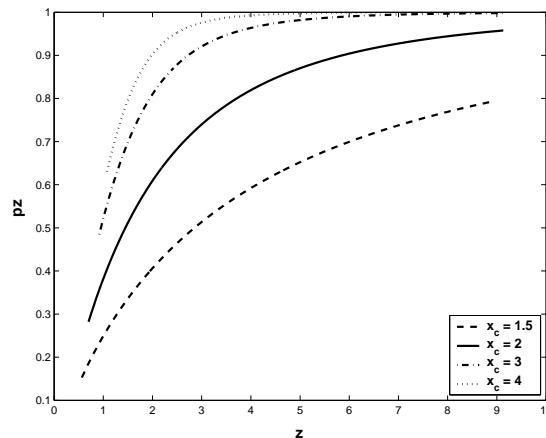
Уравнение (3.87) описывает изменение числа активированных связей. Последний член в уравнении соответствует индуцированному выгоранию связей и равен произведению удельного числа выгорающих в единицу времени связей  $m$  на число их ближайших активированных соседей  $pz$ . Следовательно:

$$\Omega = mz \quad (3.88)$$

или

$$z = \alpha/C_1. \quad (3.89)$$

С увеличением числа ближайших соседей роль диссипации усиливается. При этом экспоненциальный член в (3.86) убывает и значение  $p$  асимптотически стремится к  $1/z$ . Ситуация здесь полностью эквивалентна перколяционному распространению инфекции на решетках с большим числом измерений, где величина  $1/z$  соответствует порогу протекания. В пространствах с актуальной размерностью сильные флуктуации нарушают среднеполевую асимптотику. Тем не менее, вид решения (3.84) сохраняется и для малых размерностей пространства. На рис. 3.23 показана зависимость параметра  $pz$  от  $z$ .



**Рис. 3.23.** Зависимость параметра  $pz$  от величины  $z$  при различных соотношениях критического уровня и уровня активации

Если в начальный момент времени рельеф отсутствовал:  $f(u, 0) = \delta(0)$ , то до появления первой критической пары в системе распределение связей в простран-

стве разностей потенциалов будет гауссовским:

$$f(u, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{\delta} t / \tau}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2 \tilde{\delta} t / \tau} \right\}, \quad t < T_c. \quad (3.90)$$

Здесь характерный интервал времени  $T_c$  до появления первой критической пары зависит от размеров системы и может быть рассчитан из следующего соотношения:

$$\int_{u_c}^{\infty} f(u, T_c) du = 1/M, \quad (3.91)$$

где  $M$  – число связей в системе (для простой кубической решетки, имеющей  $N^3$  узлов,  $M = 3(N^3 + 2N - 1)$ ). Соотношение (3.91) подразумевает появление хотя бы одной критической связи в ограниченной системе. Заметим, что в термодинамическом пределе, когда мы имеем дело с безграничной системой, интервал времени  $T_c$  стремится к нулю: критические пары мгновенно появляются с началом процесса роста. Представляем интеграл в левой части (3.91) через интеграл вероятности:

$$\int_{u_c}^{\infty} f(u, T_c) du = 1 - \int_0^{u_c} f(u, T_c) du = 1 - \operatorname{erf}(y)/2, \quad (3.92)$$

где

$$y = \frac{u_c}{\sqrt{\tilde{\delta} T_c / \tau}}, \quad (3.93)$$

и, используя известную асимптотику для интеграла вероятности при больших аргументах

$$1 - \operatorname{erf}(y)/2 \approx \frac{\exp(-y)}{\sqrt{\pi} y} \left(1 - \frac{1}{2y^2}\right), \quad (3.94)$$

получаем выражение для оценки времени  $T_c$ :

$$\frac{1}{M} \approx \frac{\exp(-y)}{\sqrt{\pi} y} \left(1 - \frac{1}{2y^2}\right). \quad (3.95)$$

Для кубической решетки, имеющей миллион узлов,  $M = 300597$ . Выбирая параметр  $u_c^2/\tilde{\delta} = 2,5 \cdot 10^5$  и используя (3.93) и (3.95), мы находим  $T_c \approx 100\tau$ . Влияние размеров системы на характер динамики оказывается не существенным при условии, что к моменту первого пробоя удельное число активированных связей в системе не превышает порога протекания для задачи узлов на соответствующей решетке:

$$\int_{u_c}^{\infty} f(u, T_c) du = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf}(y) - \operatorname{erf}(yu_a/u_c) \right\} \lesssim p_c, \quad (3.96)$$

Из последнего выражения мы получаем минимально допустимую величину отношения  $u_a/u_c$ . Для выбранных выше значений параметров минимально допустимая величина отношения  $u_a/u_c \simeq 0,25$ . Если же условие (3.96) не выполнено, в

системе появляется ряд новых динамических режимов: возникновение периодических и стохастических автоколебаний, распространение незатухающих фронтов горения при периодических граничных условиях и т.д. Упомянутые эффекты связаны исключительно с ограниченностью системы и, следовательно, отсутствуют в термодинамическом пределе.

### 3.7. Самоорганизующиеся дренажные системы

В предыдущем разделе мы выяснили, что появление фрактальных структур в конфигурационном пространстве активных систем требует резкого контраста относительно малого времени внутренней релаксации на фоне продолжительного интервала характерных изменений внешнего воздействия. В модели лесных пожаров, например, время выгорания отдельного «кластера» деревьев существенно меньше характерного времени роста деревьев. При этом уровень заполнения модельной решётки деревьями представляет собой критический параметр переколяционного перехода. В этом разделе мы снова обратимся к анализу ситуации, когда критический параметр переколяционного перехода сам становится внутренней динамической переменной системы.

Самоорганизующиеся дренажные системы возникают из переколирующих сетей и лабиринтов при наличии внешнего поля и по своим структурным свойствам очень напоминают дренажные системы бассейнов крупных рек. Поэтому мы начнем с принятого в гидрологии описания стационарной структуры потоков дренажных систем речных бассейнов, которое опирается на совокупность эмпирических законов Хака, Хортонса и Токунаги. Сразу подчеркнем, что существенным отличием самоорганизующихся дренажных сетей от стационарной структуры речных потоков является динамический характер их существования.

**Законы гидрологии.** Дренажные системы являются универсальным свойством земных ландшафтов. Маленькие потоки, сливаясь, образуют более крупные потоки; крупные потоки, сливаясь, образуют реки и так далее. Территория, с которой река собирает потоки воды и уносит их в конечном счете в океан, собственно и образует пойму или бассейн реки. Характеристиками бассейна являются его площадь (или объем — в более общей ситуации)  $V$ , длина основного потока  $l$  и его габариты  $L_{\parallel}, L_{\perp}$ . Известно несколько скейлинговых соотношений — эмпирических законов, связывающих между собой эти величины. Наиболее известным из них является закон Хака, который утверждает, что длина основного потока  $l$  меняется с увеличением площади бассейна как

$$l \sim V^h, \quad (3.97)$$

где  $h$  именуется обычно показателем Хака. Помимо (3.97) известен еще целый ряд соотношений, связывающих площадь бассейна  $V$ , длину его основного потока  $l$

и его поперечные габариты  $L_{\perp}$  с характерным продольным размером дренажной системы бассейна  $L (= L_{\parallel})$ :

$$V \sim L^D, \quad l \sim L^{Dh}, \quad L_{\perp} \sim L^{d_{\perp}}. \quad (3.98)$$

Кроме того было обнаружено, что гистограммы площадей бассейнов и длин основных потоков для каждого отдельного ландшафта имеют степенное распределение.

Еще задолго до появления фрактальной парадигмы количественное описание упорядоченной системы потоков было введено Хортоном и Стралером. Представленные на стандартной топографической карте потоки, не имеющие притоков в направлении против течения, определяются как потоки первого порядка ( $i = 1$ ). Когда два потока первого порядка соединяются, они образуют поток второго порядка ( $i = 2$ ). Когда два потока второго порядка соединяются, они образуют поток третьего порядка ( $i = 3$ ) и т.д. Кроме того, потоки первого порядка ( $i = 1$ ) могут влияться в потоки второго ( $i = 2$ ), третьего ( $i = 3$ ) порядка и любые другие потоки более высокого порядка. Аналогично потоки второго порядка ( $i = 2$ ) могут соединяться с потоками третьего порядка и т.д. Суммируя сформулированные выше правила, можно констатировать, что, когда поток порядка  $i_1$  сливаются с потоком порядка  $i_2$ , результирующий поток имеет порядок

$$i = \max(i_1, i_2) + \delta_{i_1, i_2}, \quad (3.99)$$

где  $\delta$  — символ Кронекера. Другими словами, порядок увеличивается только при слиянии двух равнозначных потоков.

Хортон определил бифуркационный коэффициент  $R_b$  и коэффициент упорядочения длин  $R_r$  как отношения:

$$R_b = \frac{N_i}{N_{i+1}}, \quad R_r = \frac{r_{i+1}}{r_i}, \quad (3.100)$$

где  $N_i$  — число потоков порядка  $i$ ,  $r_i$  — средняя длина потока  $i$ -го порядка.

Анализ реальных гидрологических данных обнаружил приблизительное постоянство коэффициентов  $R_b$  и  $R_r$  при изменении порядка потоков в любой дренажной системе. Эти эмпирические факты называют законами Хортона. Используя итерационное определение фрактальной размерности

$$d_f = \frac{\ln(N_i/N_{i+1})}{\ln(r_{i+1}/r_i)} \quad (3.101)$$

и подставляя в него соотношения (3.100) получаем выражение для фрактальной размерности дренажной системы:

$$d_f = \frac{\ln R_b}{\ln R_r}. \quad (3.102)$$

Другими словами, справедливость законов Хортона означает, что дренажные сети являются фрактальными деревьями.

### Динамическое обобщение законов Хака

В основе предлагаемого динамического обобщения законов (3.97), (3.98) лежит фундаментальный факт скейлинговой зависимости времени жизни фрагмента дренажной системы от его характерных пространственных размеров. По существу, речь идет о расширении и перенесении свойства самоаффинности с пространственного континуума на пространственно-временной. Соотношения (3.97), (3.98) должны быть дополнены скейлинговой зависимостью времени жизни дренажной системы от продольного размера  $L (= L_{\parallel})$ :

$$T_L \sim L^{-d_T}. \quad (3.103)$$

По аналогии с гидрологическими параметрами мы можем ввести коэффициент упорядочения времени жизни по формуле:

$$R_{\tau} = \left( \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} \right)^{\delta_{\tau}}, \quad (3.104)$$

где  $\tau_i$  — среднее время жизни потока  $i$ -го порядка, а  $\delta_{\tau}$  — показатель, вообще говоря, отличный от единицы.

Анализ показал, что коэффициент упорядочения времени жизни, при соответствующем подборе  $\delta_{\tau}$ , демонстрирует приблизительное постоянство при изменении порядка потоков.

Выше мы уже подчеркивали, что для построения непротиворечивого алгоритма формирования иерархической системы токов необходимо рассматривать векторную активацию. При этом возникающие в системе проводящие связи характеризуются еще и направлением текущего по ним тока. С точки зрения теории графов возникающие в нашей модели проводящие кластеры представляют собой взвешенные ориентированные деревья, т. е. графы, ребра которых имеют определенную ориентацию — направление от одной вершины к другой и характеризуются величиной протекающего вдоль этого направления тока.

Каждой вершине поставим в соответствие пару чисел  $(a, b)$ , равных соответственно числу входящих и исходящих ребер. Величина  $a + b - 1$  совпадает, очевидно, с индексом ветвления. Вся периферия при этом разделится на две группы: вершины типа  $(1, 0)$  и типа  $(0, 1)$ . Возникновению критической пары соответствует рождение пары смежных вершин, одна из которых относится к типу  $(1, 0)$ , а другая к типу  $(0, 1)$ . Далее, в случае векторной активации, состояние активной периферийной вершины типа  $(1, 0)$  переходит в состояние типа  $(1, n)$ , где  $n$  — число вновь активированных соседей рассматриваемой вершины. Аналогично состояние активной периферийной вершины типа  $(0, 1)$  переходит в состояние типа  $(n, 1)$ . Таким образом, вся совокупность вершин эволюционирующей структуры распределяется между типами  $(1, n)$  и  $(n, 1)$  с целыми неотрицательными  $n$ .

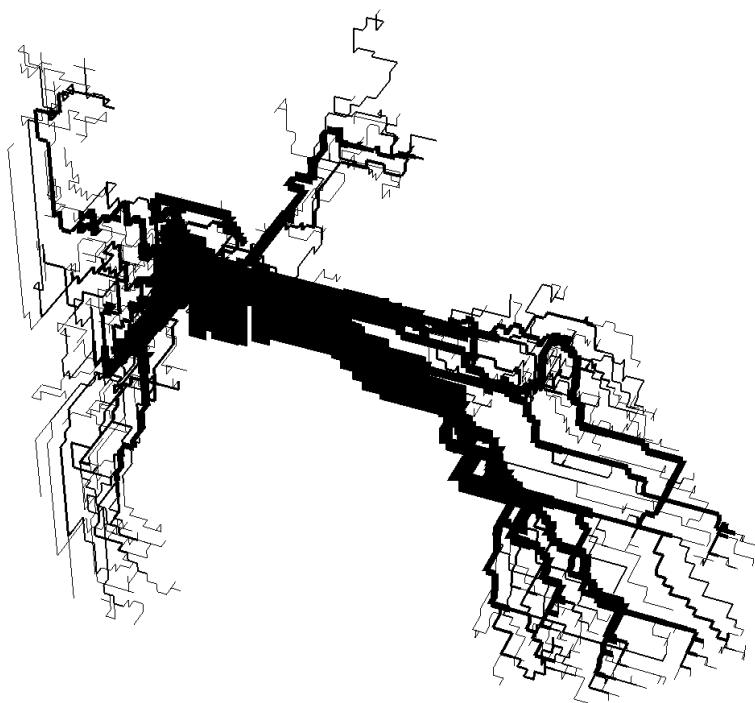
При векторном характере активации исходная критическая пара вершин почти всегда остается в составе ствола формирующегося кластера. Стволом называет-

ся неразветвленная центральная часть структуры, представляющая собой ориентированную цепь, состоящую из вершин типа  $(1,1)$  и инцидентных этим вершинам ребер. Ствол заканчивается парой вершин, одна из которых относится к типу  $(1, n)$ , а другая к типу  $(n, 1)$ . Вершины типа  $(1, n)$  с  $n \geq 2$  и инцидентные им ребра формируют корону ориентированного дерева, а вершины типа  $(n, 1)$  и инцидентные им ребра формируют корень.

Очевидно, что не все структурные элементы формирующегося проводящего кластера равнозначны с точки зрения проходящего по ним тока. Например, ток в стволе кластера существенно превосходит токи на периферии, причем, по мере движения от периферийных элементов к стволу растет не только сила тока, но и время его жизни. Существенно и обратное влияние токов на геометрию формирующегося кластера. Самосогласованный учет этого влияния целесообразно проводить в терминах иерархии системы токов. Введем следующие правила построения иерархии.

1. Рассматриваем корону ориентированной структуры (тип  $(1, n)$ ). Всем ребрам короны присваиваем уровень иерархии равный единице:  $h = 1$ .
2. Движемся от выбранной на периферии вершины к стволу. Пропускаем все вершины с  $n = 1$ . Останавливаемся на вершинах с индексом ветвления  $r \geq 2$ .
3. Повторяем предыдущий шаг для всех периферийных вершин, принадлежащих короне (тип  $(1, 0)$ ).
4. Отсекаем пройденные ребра, а точки остановки объявляем новой периферией (ренормализация). Уровень иерархии оставшихся ребер короны увеличивается на единицу.
5. Повторяем предыдущие три шага процедуры до тех пор, пока не дойдем до ствола.
6. Запоминаем уровень иерархии ствола  $h_t^- = \max(h)$ . Знак минус означает здесь, что вычисления относятся к элементам короны.
7. Повторяем все предшествующие шаги для корня структуры и на последнем этапе запоминаем уровень иерархии ствола  $h_t^+ = \max(h)$ , вычисленный по элементам корня структуры.
8. Присваиваем стволу уровень иерархии, соответствующий максимальному из значений  $h_t^-$  и  $h_t^+$ .
9. Если  $h_t^- > h_t^+$ , уровни иерархии всех элементов корня увеличиваем на  $h_t^- - h_t^+$ . При выполнении противоположного условия уровни иерархии всех элементов короны увеличиваем на  $h_t^+ - h_t^-$ .

Суть последнего шага процедуры заключается в том, что иерархическая значимость ствола полностью определяется весом максимальной из опирающихся на него конструкций (корня или кроны). Рецессивная часть структуры может попросту отсутствовать (разряд на землю). Этот шаг не выполняется при  $h_t^- = h_t^+$ , т. е. в случае иерархической симметрии между кроной и корнем. Характерная конфигурация проводящего дерева, толщина ребер которого пропорциональна величине проходящего по ним тока, показана на рис. 3.24. Моделирование проводилось на кубической решетке  $65 \times 65 \times 65$ .



**Рис. 3.24.** Мгновенная 3D конфигурация модельного дерева, толщина ребер которого пропорциональна величине проходящего по ним тока

Уровень иерархии связей является дополнительным параметром, который расширяет возможности рассмотренной выше базовой модели. Изменим прежде всего правило, по которому исчезают проводящие фрагменты кластера. Если периферийная вершина не находит активированных соседей и инцидентное ей ребро имеет минимальный уровень иерархии  $h = 1$ , то она отмирает вместе с соответствующим ей проводящим ребром, передавая роль периферии ближайшей своей предшественнице, если эта последняя не является точкой ветвления. Если же уровень иерархии инцидентного рассматриваемой вершине ребра  $h \geq 2$ , активные свойства периферийной вершины (т. е. способность инициировать соседей) сохраняются.

Благодаря описанной модернизации при возникновении асимметрии появляется интересный эффект: элементы рецессивной субструктуры становятся долгожителями — они не могут исчезнуть, пока соответствующий им уровень иерархии превышает единицу. Конец этому может положить только деградация доминантной субструктуры до уровня рецессивной.

### 3.8. Перколяционный механизм гравитационной дифференциации

В этом разделе фрактальная динамика двухкомпонентной распределенной системы рассматривается на примере сейсмогенеза [37, 38, 40, 61]. Роль двухкомпонентной среды играет в данном случае субстрат литосфера, представленный пре-сыщенным раствором легкой подвижной фракции в тяжелом вязком растворитеle. Мы увидим, что при достижении порога перколяции по легкой компоненте субстрат теряет устойчивость в гравитационном поле. Обсуждаемый здесь механизм активности литосферного субстрата проявляется, в частности, при перемещении связной области трещин в твердой литосфере Земли.

Известная из элементарного курса геофизики оценка максимальной высоты гор на планетах основана на том, что давление в основании не должно превосходить сдвиговой прочности материала  $\sigma_0$ :

$$h_{max} = \frac{3\sigma_0}{\rho g}, \quad (3.105)$$

где  $\rho$  — их плотность,  $g$  — абсолютная величина ускорения свободного падения. Эта простая оценка хорошо подтверждается данными наблюдений для планет земной группы, что хорошо видно из таблицы 3.2.

**Таблица 3.2.** Максимальные высоты гор на планетах земной группы

Планеты	Параметры		
	$g$ , м/с <sup>2</sup>	$h_{max}$ , км	Высота гор, км
Земля	9,78	11	Эверест – 9
Венера	8,69	13	Вулк. Максвелл – 12
Марс	3,72	30	Вулк. Олимп – 24 Вулк. Арсия – 27

Очевидно, что аналогичное ограничение остается в силе и для максимального размера каверн в литосферах планет. Для каверны заполненной жидкостью или газом максимальный размер оценивается величиной [129]:

$$R_g \approx \frac{\sigma_c}{\Delta\rho g}, \quad (3.106)$$

где  $\sigma_c$  – минимальная величина из значений прочности материала на разрыв и на сдвиг,  $\Delta\rho$  - разность плотности материала и плотности флюида, заполняющего каверну. Разность плотностей сред приводит к различию распределения гидростатических давлений по высоте каверны. (Роль каверны, в частности, может играть связная сеть трещин в литосфере.) При этом, если исторически каверна или сеть трещин образовывалась под воздействием заполняющего их в данный момент флюида, то среднее давление в каверне должно совпадать с давлением в окружающем материале. Различие распределения гидростатического давления по высоте при меньшей, по сравнению с твердой матрицей, плотности флюида приводит к тому, что давление в верхней части каверны (или сети трещин) оказывается больше давления в окружающем массиве, а давление в нижней части каверны соответственно меньше окружающего давления. При достаточной высоте каверны возможно либо превышение разницей давлений в верхней части величины предельной прочности материала на разрыв, либо превышение разницей давлений в нижней части величины сдвиговой прочности материала. В зависимости от того, в какой части каверны выполнилось условие критерия (3.106), произойдет либо раскрытие трещин в верхней части каверны, либо разрушение материала и закрытие трещин («заличивание») в нижней части каверны. При этом открытие трещин в верхней части приводит к постепенному перетеканию туда флюида и понижению давления в нижней части, что в конечном итоге приведет к закрытию трещин в нижней части и повышению давления во флюиде. Если же первоначально происходит заличивание трещин в нижней части каверны, то общее давление флюида повышается, что приводит к выполнению критерия раскрытия трещин в верхней части.

Таким образом, если размер каверны или зоны связной трещиноватости в литосфере превышает критерий (3.106), каверна не сможет оставаться статичной: будет происходить либо ее «всплытие» до приповерхностной области связной пористости, либо изменение ее конфигурации и нарушение связности, отменяющее выполнение критерия (3.106).

Критерий (3.106) может быть получен и из энергетических соображений подобно классическому критерию Гриффита образования сферической трещины. Идея оценки основана на законе сохранения энергии. Когда к образцу приложена нагрузка в нем запасается потенциальная упругая энергия. Часть этой энергии освобождается при образовании или росте трещины. С другой стороны формирование и рост трещины способствуют созданию новых свободных поверхностей. Так что трещина растет только тогда, когда выход потенциальной упругой энергии равен или превышает энергетические затраты на создание новых свободных поверхностей. Это и есть концепция энергетического баланса Гриффита, формальная запись которой дается в соответствии с требованием равновесия:

$$\frac{dU}{dr} = 0,$$

где свободная энергия  $U = \Lambda r^2 - \frac{\sigma_c^2}{\hat{E}} r^3$ ,  $\Lambda$  – плотность поверхностной энергии,  $\hat{E}$  – модуль Юнга. Но этот критерий теряет свою силу для глобальных масштабов.

Дело в том, что в присутствии гравитации зарождение трещин требует источника энергии, необходимого не только для создания новых поверхностей, но и, главным образом, для переноса массы в поле тяжести. Модифицированный критерий Гриффита (гравитационный критерий Гриффита) может быть записан в форме:

$$\frac{dU}{dr} = 0, \quad U = \Lambda r^2 - \frac{\sigma_c^2}{\hat{E}} r^3 + \Delta \rho g r^4. \quad (3.107)$$

Когда характерный масштаб  $r$  трещины увеличивается, последний член в уравнении (3.107) полностью подавляет другие, и мы получаем соответствующую оценку для критического радиуса  $R_s \sim \frac{\sigma_c^2}{\hat{E} \Delta \rho g} \sim \frac{\sigma_c}{\hat{E}} R_g$ .

Для литосферы нашей планеты  $\Delta \rho \sim 2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma_c \sim 10^8$  Па и критический вертикальный размер оценивается величиной  $R_g \sim 5$  км. Мы получили важную оценку: в литосфере Земли не могут статически существовать каверны или зоны связной пористости с характерным вертикальным размером более 5 км. Данная оценка была получена для оливина, для осадочных пород величина  $\sigma_c$  на порядок меньше. Поэтому вертикальный размер области связной пористости в осадочных породах не превосходит 500 м. Подчеркнем еще раз, что рассматриваемый критерий практически не зависит от формы каверны, существенны лишь ее вертикальные размеры. Так, связная система пор или трещин, прозрачная для фильтрационных течений жидкости или газа, оказывается неустойчивой в гравитационном поле, если ее вертикальные размеры превышают величину  $R_g$  [61, 129, 131]. Например, связная система трещин, выходящая на дневную поверхность, не может простираться на глубины, превышающие  $R_g$ . При этом реальный объем внутрипорового пространства может составлять величину чрезвычайно малую по сравнению с  $R_g^3$ .

Итак, критический уровень пористости обеспечивает появление зон прозрачности – макроскопических зон геометрической связности порового пространства – кластеров газовой компоненты. Нижняя часть области прозрачности характеризуется дефицитом порового давления по сравнению с литостатическим. С другой стороны, верхняя часть области включает зоны с избыточным поровым давлением. Перепады внутрипорового давления пропорциональны размерам зоны прозрачности и компенсируются прочностью твердой матрицы. При некотором критическом размере кластеров газовой компоненты уровень флуктуаций внутрипорового давления превышает прочность пород — твердая матрица разрушается. Газ перемещается в верхние горизонты, где избыточное поровое давление провоцирует дальнейшее разрушение твердой матрицы. Процесс дегазации, таким образом, превращает литосферу в распределенный сейсмический генератор, источником энергии которого является потенциальная энергия недифференциро-

ванного материала литосферы в поле тяжести планеты. Обсуждаемый перколоационный механизм обеспечивает прямое преобразование потенциальной гравитационной энергии в энергию разрушения.

Изложенным выше качественным соображениям можно придать вполне конкретные количественные очертания, используя представления теории перколоции [70, 96, 131, 169]. Предположим, что в объеме твердого субстрата случайно однородно распределены зоны, прозрачные для фильтрационных течений. Нас не интересуют детали конкретной морфологии пород: прозрачность может быть обеспечена либо трещиноватостью, либо пористостью, либо их комбинацией. Система моделирует малую часть литосферы с размерами, существенно превышающими критический масштаб, но, одновременно, много меньшими радиуса планеты ( $L \ll R_{\odot}$ ) и может рассматриваться как плоскопараллельный слой в однородном гравитационном поле. Пусть характерный размер  $a$  зон прозрачности существенно уступает критическому масштабу  $R_g$ :  $a \ll R_g$ . Введем случайную функцию координат  $\xi(\mathbf{r})$ , принимающую значение 1 для зон прозрачности и 0 в противном случае. Соответствующая функция распределения представляет собой сумму двух дельта функций:

$$f(\xi) = q\delta(0) + p\delta(1), \quad (3.108)$$

где  $p$  и  $q$  представляют собой объемные доли зон прозрачности и непрозрачности соответственно. Очевидно, что  $p + q = 1$ . Заметим, что введенное понятие прозрачности среды, конечно же, связано с пористостью и трещиноватостью, однако зависимость не прямая. Так, при достаточно большой, но не связной пористости, прозрачность равна нулю. При той же или меньшей, но связной пористости (трещиноватости) прозрачность будет отлична от нуля. Глобальная прозрачность системы в целом определяется средним значением  $\langle \xi(\mathbf{r}) \rangle$ , т. е. долей пространства занятого зонами прозрачности. При малых значениях  $p$  отдельные зоны прозрачности либо изолированы друг от друга, либо формируют непротяженные кластеры соприкасающихся зон. При  $p \ll 1$  глобальная прозрачность отсутствует, поскольку не существует достаточно длинных цепей соприкасающихся зон прозрачности, соединяющих противоположные стороны системы. Наоборот, при  $p \sim 1$  прозрачной оказывается подавляющая доля пространства, зоны прозрачности формируют гигантский кластер, обеспечивающий прохождение фильтрационных потоков газа с одной стороны системы на другую. Существует некоторое критическое значение  $p = p_c$ , при котором происходит переход макросистемы из непрозрачного состояния (при  $p < p_c$ ) в прозрачное (при  $p > p_c$ ). Критическое значение  $p = p_c$  называется порогом протекания (перколоции). В трехмерном случае для широкого класса случайных полей, автокорреляционная функция которых спадает быстрее чем  $1/r^3$ , порог протекания составляет величину  $p_c \simeq 0,16$ .

Рассмотрим теперь вопрос о механической устойчивости ансамбля зон прозрачности в гравитационном поле. Будем интересоваться той частью механиче-

ских напряжений в материале, которая возникает в гравитационном поле благодаря разности плотностей газа и твердой матрицы. Если вертикальный размер кластера прозрачности составляет величину  $H$ , то в его верхней части давление газа превышает среднее литостатическое давление на величину  $\Delta P = \Delta\rho g H/2$ , а в нижней ее части, напротив, давление газа на ту же величину  $\Delta P$  уступает литостатическому давлению. Заметим, что для кластеров прозрачности, выходящих на дневную поверхность, дефицит внутрипорового давления в нижней их части вдвое превышает соответствующий перепад для изолированных кластеров<sup>†</sup>.

Дисбаланс внутрипорового давления компенсируется прочностью пород до тех пор, пока величина  $\Delta P$  не достигнет значений, сопоставимых с пределом этой прочности. Это происходит тогда, когда вертикальные размеры кластера прозрачности вырастают до величин порядка  $R_g$ . Это означает, что в литосфере планеты устойчиво могут существовать лишь кластеры прозрачности с размерами, не превышающими критический масштаб  $R_g$  и, следовательно, устойчивым в гравитационном поле может быть только докритический ансамбль зон прозрачности с занимаемым ими удельным объемом  $p < p_g$ , где  $p_g = p_c - (R_g/a)^{-1/\nu}$ . Если  $x$  – есть характерный уровень пористости в зонах прозрачности, то реальный объем пустот в кластере с размерами, близкими к критическому радиусу, составляет величину  $xa^3(R_g/a)^{d_f}$ .

Заметим, что рассматриваемая неустойчивость подобна неустойчивости композитов типа «металл – диэлектрик» по отношению к электрическому пробою во внешнем поле [91]. Когда доля объема, занимаемая проводящими элементами, близка к порогу протекания, критическое поле для композита становится чрезвычайно низким. Это связано с усилением локальных флуктуаций электрического поля вблизи кластеров проводящих элементов, которые действуют как эквипотенциальные объемы для приложенного статического электрического поля. Для данного приложенного поля  $E_0$ , локальные флуктуации расходятся как  $\delta E \simeq E_0(p_c - p)^{-s}$ , где  $s \gtrsim \nu$ .

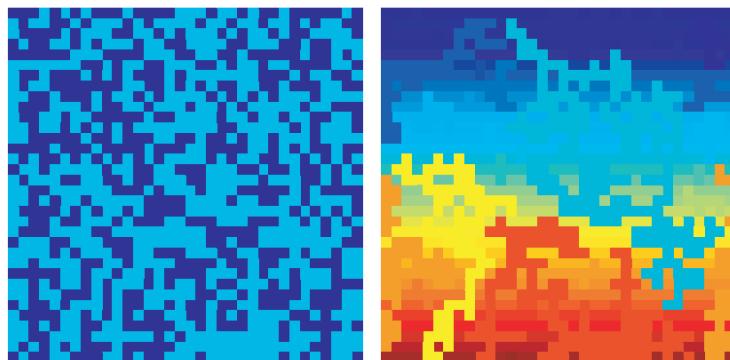
По аналогии с электростатикой для материала литосферы можно рассмотреть скалярный потенциал  $\Psi$ :

$$\Psi = \frac{1}{3}Sp\hat{\sigma}(\mathbf{r}) + \rho_f(\mathbf{gr}), \quad (3.109)$$

где  $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$  является тензором реальных напряжений в среде;  $Sp\hat{\sigma}(\mathbf{r}) = \sum_i \hat{\sigma}_{ii}$ ;  $\rho_f$  – плотность газа;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор с началом на дневной поверхности. (Принято, что горизонтальные перепады давления малы по сравнению с  $\rho g$ , где  $\rho$  – средняя плотность в системе.) Потенциал  $\Psi$  характеризует перепады давления газа при переходе от одного кластера прозрачности к другому, и каждый кластер прозрачности является эквипотенциальным объемом для скалярного поля  $\Psi$ . На рис. 3.25 слева показана характерная конфигурация зон прозрачности для двумерной клеточной модели вблизи порога перколяции. Каждая ячейка квадратной решетки с

<sup>†</sup>Это обстоятельство выделяет горизонт с глубиной залегания  $z \simeq R_g$ .

вероятностью  $p$  может находиться в прозрачном состоянии (светлые ячейки) и с вероятностью  $1 - p$  в непрозрачном (темные ячейки). Соответствующее распределение скалярного потенциала  $\Psi$  отображено справа. Изменение оттенков ячеек сверху вниз отображает рост потенциала  $\Psi$ , средняя величина которого совпадает с литостатическим давлением. В рамках отдельного кластера (зоны эквипотенциальности для  $\Psi$ ) цвет ячеек не меняется в соответствии с определением (3.109).



**Рис. 3.25.** Конфигурация кластеров прозрачности на квадратной решетке  $35 \times 35$ . Слева показано случайно однородное распределение зон прозрачности. Доля прозрачных ячеек близка к порогу перколяции для задачи узлов на квадратной решетке  $p \simeq 0,58$ . Соответствующее распределение скалярного потенциала  $\Psi$  отображено справа.

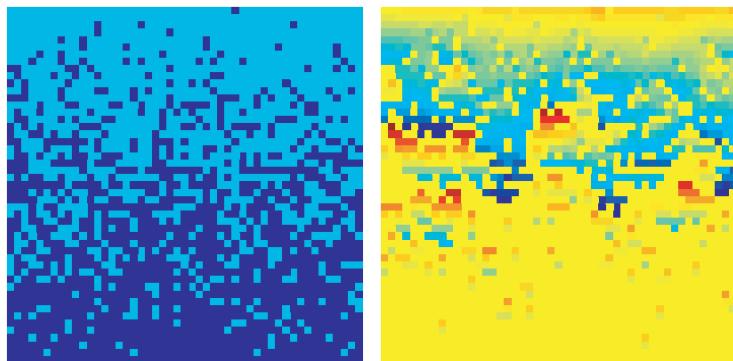
Характерные перепады давления между соседними кластерами прозрачности растут по мере приближения к порогу перколяции вместе с корреляционным радиусом:

$$\delta\Psi \simeq \Delta\rho g \xi \approx \Delta\rho g a |p - p_c|^{-\nu}. \quad (3.110)$$

Для двумерной клеточной модели величина  $a$  просто совпадает с размером ячейки и градиент потенциала  $\nabla\Psi \simeq \delta\Psi/a$ , приложенный к непрозрачной ячейке, разделяющей соседние кластеры, может существенно превышать градиент литостатического давления  $\rho g$ .

Очевидно, что самое слабое место в системе ассоциировано с максимальным кластером, размеры которого близки к критическому масштабу  $R_g$ . Для перколяционного перехода вероятность обнаружения кластера с размером  $l$  пропорциональна  $\exp(-l/\xi)$  [70, 96, 62]. Тогда максимальный размер кластера  $l_{\max}$ , который можно обнаружить в системе с объемом  $L^d$  должен удовлетворять условию  $L^d \exp(-l/\xi) \approx 1$ . Таким образом,  $l_{\max} \approx \xi \ln(L^d) = \xi d \ln(L)$ , что при фиксированном  $l_{\max} \simeq R_g$  означает логарифмическое падение устойчивости пористой среды в гравитационном поле с ростом ее характерных размеров.

Поскольку гравитация существенно стратифицирует параметры литосферы, целесообразно рассмотреть следующее простейшее обобщение рассмотренной выше перколяционной картины. Будем полагать, что параметр прозрачности  $p$  монотонно убывает с глубиной  $z$  от некоторого надкритического значения на поверхности планеты до нуля на глубинах  $z_{\max}$  порядка сотен километров ( $z_{\max} \simeq \simeq \hat{E}/\rho g$ , где  $\hat{E}$  – средняя, напомним, величина модуля Юнга в литосфере). В этом случае говорят о градиентной перколяции [70, 96]. Характерная конфигурация зон прозрачности для градиентной перколяции на двумерной клеточной модели показана на рис. 3.26. На левой панели рис. 3.26 представлено градиентное распределение зон прозрачности на квадратной решетке, причём доля прозрачных ячеек меняется от величины, близкой к единице, в верхней части решётки до нуля внизу. Соответствующее распределение внутриворового давления  $\Psi = \rho_f(\mathbf{gr})$  отображено на правой панели рис. 3.26



**Рис. 3.26.** Слева представлено градиентное распределение зон прозрачности на квадратной решетке. Соответствующее распределение внутриворового давления отображено справа

Видно, что максимальные флюктуации внутриворового давления соответствуют крупным кластерам прозрачности, образующимся вблизи средней границы зоны связной пористости ( $z_c$  – глубина зоны связной пористости).

Будем называть область  $z \leq z_c$  – зоной связной пористости, а область с  $z > z_c$  – зоной несвязной пористости. Граница между этими областями, как видно из рис. 3.26, имеет фрактальную структуру и называется фронтом прозрачности. С точки зрения геометрии фронт прозрачности идентичен рассмотренному нами в разделе 2.8. диффузионному фронту в теории перколяции и его среднее положение  $z = z_c$  соответствует порогу протекания:  $p(z_c) = p_c$ . Средняя ширина  $h_f$  фронта прозрачности связана со значением градиента параметра прозрачности  $p$  вблизи  $z_c$  выражением (2.47). Мы видим на рис. 3.26, что кластеры прозрачности и непрозрачности чрезвычайно малы вдали от фронта, с другой стороны,

вблизи фронта их размеры соизмеримы с шириной  $h_f$ . Кластеры прозрачности соответствуют конечным кластерам перколяционной системы, а кластеры непрозрачности — ограниченным непроницаемым объёмам. По мере приближения к фронту и те и другие растут как корреляционная длина  $\xi$  в соответствии с (2.4). Однако, благодаря конечному градиенту  $p(z)$ , размеры кластеров прозрачности и непрозрачности остаются конечными даже при  $z = z_c$ . Их максимальный размер не превышает ширины фронта  $h_f$ , которая и является единственным характерным масштабом задачи. Согласно сформулированному нами критерию устойчивости кластеров прозрачности, ширина фронта перколяционного перехода не может превышать критического масштаба  $R_g$ . Более того, переход от глобальной прозрачности  $p > p_c$  в приповерхностном слое к глобальной непрозрачности  $p < p_c$  на больших глубинах должен наблюдаться на горизонтах с глубиной залегания также не превышающей критического масштаба  $R_g$ .

Мы рассмотрели статическую систему зон прозрачности и выяснили критерии ее устойчивости. Следующий принципиальный шаг, который необходимо сделать, заключается в обобщении развитой схемы на случай зависящей от времени конфигурации зон прозрачности. Это отвечает условиям реальной литосфера, когда прозрачность пород и содержание газа в них являются динамическими переменными [27]. Речь, например, может идти о дегазации пресыщенного твердого раствора. В этой ситуации зоны прозрачности возникают, растут, объединяются, «всплывают» и исчезают. Рассматривая процесс медленной эволюции зон прозрачности, можно обнаружить, что некоторые мелкомасштабные события (появление или исчезновение отдельной зоны прозрачности) производят заметные изменения конфигурации фронта (приобретение или потеря фронтом больших кластеров). Можно, например, наблюдать объединение двух кластеров прозрачности докритических размеров в один надкритический с последующим разрушением образовавшегося надкритического кластера.

Разрушению предшествует процесс выравнивания давления в объединившихся кластерах. Грубую оценку времени выравнивания можно получить, используя уравнение Дарси для скорости фильтрации  $u$ :

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla P. \quad (3.111)$$

Полагая, что  $u\tau \simeq R_g$ , получаем:

$$\tau \simeq \frac{\mu R_g}{\rho g k}. \quad (3.112)$$

Для характерных значений вязкости и проницаемости величина времени выравнивания давления в критическом кластере составляет  $10^5 \div 10^7$  секунд.

Каждое изменение конфигурации кластеров, в особенности, их объединение, вызывает перераспределение внутриворового давления и сопровождается миграцией газа из нижних горизонтов в верхние. Мы, таким образом, получаем нетривиальный механизм дифференциации вещества в поле тяжести. Этот механизм,

назовем его перколяционным, может служить альтернативой седиментационной конвекции в условиях высокой вязкости.

Чтобы описать процесс миграции газа в рамках одного кластера прозрачности запишем уравнение фильтрации сжимаемого газа в связной системе пор. Пусть скорость фильтрации определяется законом Дарси (3.111). Закон изменения массы газа в кластере имеет вид:

$$\frac{\partial(x\rho_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(x\rho_f \vec{u}) = \Upsilon, \quad (3.113)$$

где  $x$  – пористость,  $\rho_f$  – плотность газа,  $\Upsilon$  – скорость рождения массы газа в единице объема в результате дегазации литосферы и возможных механохимических реакций при разрушении пород. Предполагая газ и пористую среду малосжимаемыми и подставляя уравнение (3.111) в (3.113), получим:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \Lambda \Delta P, \quad (3.114)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\Lambda = \frac{k}{x\mu} \left( \frac{1}{K_x} + \frac{1}{K_\rho} \right)^{-1}$  – коэффициент пьезопроводности,  $\frac{d\rho_f}{dP} = \frac{\bar{\rho}_f}{K_\rho}$ ,  $\frac{dx}{dP} = \frac{\bar{x}}{K_x}$  для характерных значений  $\bar{x}$ ,  $\bar{\rho}$ . Представляя давление в форме  $P = -\Psi + \rho_f g z$ , получим такое же уравнение для потенциала  $\Psi$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Lambda \Delta \Psi. \quad (3.115)$$

Уравнение (3.115) описывает процесс выравнивания потенциала  $\Psi$  в кластере в результате фильтрации.

Решение уравнения диффузии потенциала  $\Psi$  для отдельных кластеров должно быть дополнено сценарием смены конфигурации связных зон прозрачности при взаимодействии аномалий внутриворового давления с прочностью твердой матрицы. При моделировании динамики дегазации на сети клеточных автоматов мы использовали следующие правила игры. Зоны прозрачности с некоторой малой вероятностью могут появляться на каждом шаге модельного времени. Сначала их концентрация монотонно увеличивается, возникают кластеры прозрачности, размеры которых постепенно растут. Скорость, с которой появляются прозрачные ячейки, характеризует интенсивность внешних источников, например, скорость дегазации литосферы. Для кластеров, состоящих из двух и более ячеек, на каждом шаге модельного времени мы производили выравнивание потенциала  $\Psi$  в соответствии с уравнением (3.115). Предполагается, что скорость выравнивания давления существенно превышает скорость дегазации. Далее мы учли возможность появления новых зон прозрачности вблизи уже существующих за счет избыточного внутриворового давления в последних. Вероятность перехода непрозрачной ячейки в прозрачное состояние определяется следующей формулой

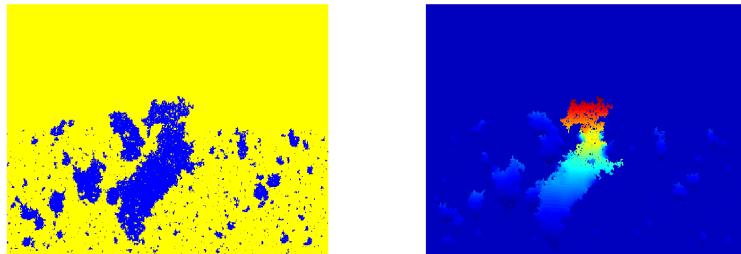
Вейбулла [178]:

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \Psi_2 \leq \Psi_1 \\ 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\sigma_1} \right)^m \right\}, & \Psi_2 \geq \Psi_1 \end{cases}, \quad (3.116)$$

где  $\Psi_1$  – значение потенциала (3.109) в рассматриваемой ячейке, а  $\Psi_2$  – значение потенциала в ее прозрачном соседе,  $m$  – модуль Вейбулла,  $\sigma_1$  – прочность материала на разрыв. Процесс появления новых зон прозрачности компенсируется исчезновением прозрачности в ячейках в условиях сильного дефицита внутриворовского давления в них. При этом вероятность перехода в непрозрачное состояние определяется формулой, аналогичной (3.116):

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \Psi_2 \leq \Psi_1 \\ 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\sigma_2} \right)^m \right\}, & \Psi_2 \geq \Psi_1 \end{cases}, \quad (3.117)$$

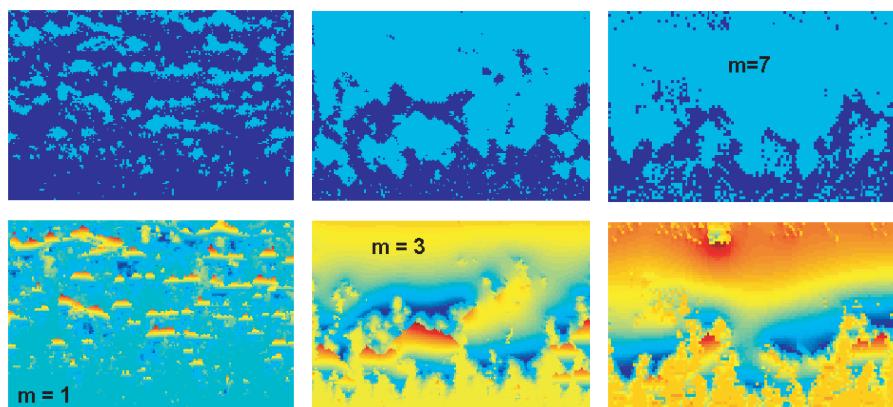
где  $\sigma_2$  – сдвиговая прочность,  $\Psi_1$  – значение потенциала (3.109) в рассматриваемой ячейке, а  $\Psi_2$  – среднее арифметическое скалярного потенциала  $\Psi$  по всем ее ближайшим соседям, т.е.  $\Psi_2 = 1/4 \sum_i \Psi_i$ . На рис. 3.27 представлен модельный процесс формирования кластеров прозрачности с учетом миграции в них флюида по закону (3.115). В левом окне рис. 3.27 показана конфигурация прозрачных (синий цвет) и непрозрачных (желтый цвет) ячеек. В правом окне рис. 3.27 отображено соответствующее распределение контраста внутрипорового давления по сравнению с литостатическим  $\Psi - \rho(\text{gr})$ .



**Рис. 3.27.** Модельная дифференциация вещества в поле тяжести. В левом окне показана конфигурация прозрачных и непрозрачных ячеек. Соответствующее распределение внутрипорового давления отображено справа

В модельной системе критическому радиусу  $R_g$  соответствует целое число ячеек, на котором перепад потенциала  $\Psi$  в вертикальном направлении достигает величин, сопоставимых с  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в формулах (3.116) и (3.117). При открытии новой ячейки прозрачности потенциал в ней полагается равным  $\Psi = \rho(\text{gr})$ , а

при закрытии ячейки к потенциалам соседних с ней прозрачных элементов прибавляется величина  $\delta\Psi = \rho_0(\mathbf{gr})/n$ , где  $n$  – число прозрачных соседей. Такая модель учитывает перераспределение флюида при открытии или закрытии ячеек прозрачности. Если прочность материала на разрыв доминирует, то крупные кластеры прозрачности имеют тенденцию к потере связных компонент, так что их размеры не превышают критического. В противоположной ситуации кластеры прозрачности имеют тенденцию к росту, что и обеспечивает их эффективное всплытие и выход на дневную поверхность или объединение с приповерхностным слоем связной прозрачности. Типичная конфигурация зон прозрачности и соответствующие аномалии внутриворового давления  $\Psi - \rho_f(\mathbf{gr})$  для различных значений модуля Вейбулла представлены на рис. 3.28.

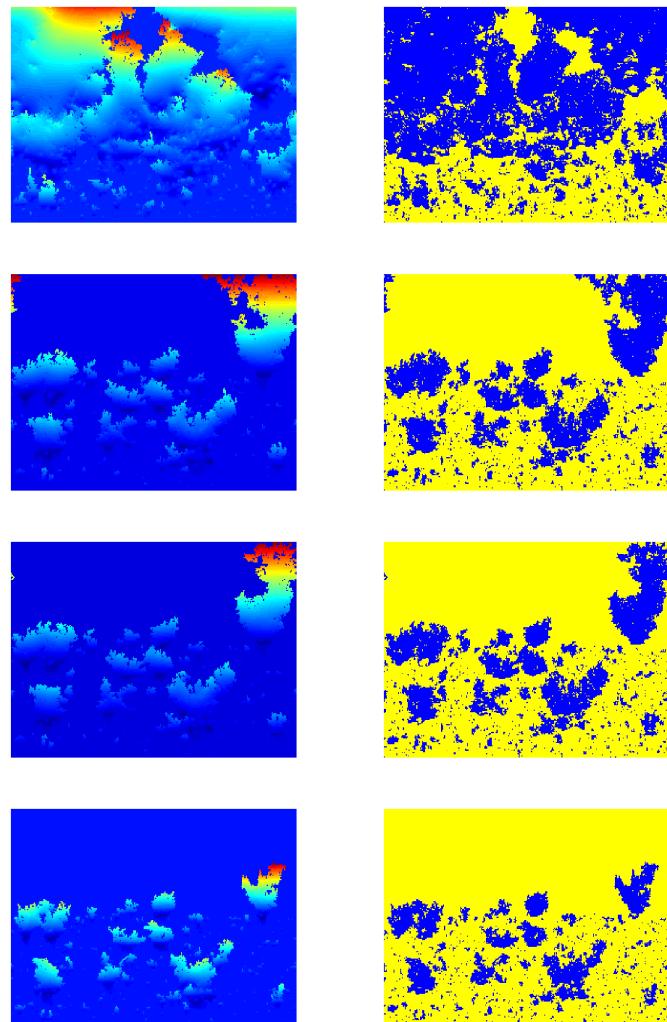


**Рис. 3.28.** Дегазации на квадратной решетке. В верхних окнах представлены распределения зон прозрачности в модели при значениях модуля Вейбулла  $m = 1, m = 3, m = 7$  слева направо. Соответствующее распределение внутриворового давления отображено в нижних окнах рисунка

Очевидно, что самые драматические события должны происходить на периферии зон прозрачности (в нижних окнах рис. 3.28 им соответствуют участки с резким переходом от светлого тона к темному). Именно здесь следует ожидать аномально высоких скоростей разрушения пород с последующим стремительным транспортом подвижной легкой компоненты (флюида) в верхние горизонты. Рис. 3.29 воспроизводит несколько чередующихся мгновений эволюционного развития модельной системы.

Стремительная или взрывная дегазация уже не вписывается в рамки предложенной выше модели, она требует значительной модификации: учета зависимости коэффициента диффузии в (3.115) от масштаба зоны прозрачности и соответствующего измельчения шага модельного времени при использовании (3.116) и (3.117). Оставляя проведение этой нетривиальной модификации до лучших врем-

мен, мы, тем не менее, готовы предложить несложную феноменологическую модель взрывной дегазации.

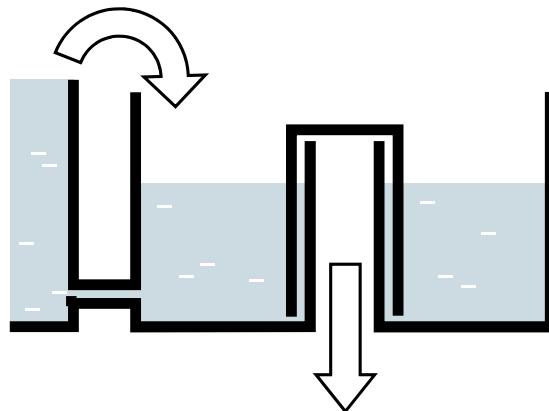


**Рис. 3.29.** Эволюция модельной системы при значениях модуля Вейбулла  $m = 1$ . Эквидистантные отсчеты времени растут снизу вверх

В основе феноменологического подхода лежит идея разбиения модельного объема на элементарные ячейки с размерами порядка  $R_g$ . Каждая такая ячейка работает как релаксационный генератор: медленное накопление газовой компоненты по достижении перколяционного перехода приводит к практически мгновенной релаксации запасенной гравитационной энергии. Эта быстрая стадия сопровождается выбросом газа, который, попадая в расположенные выше ячейки,

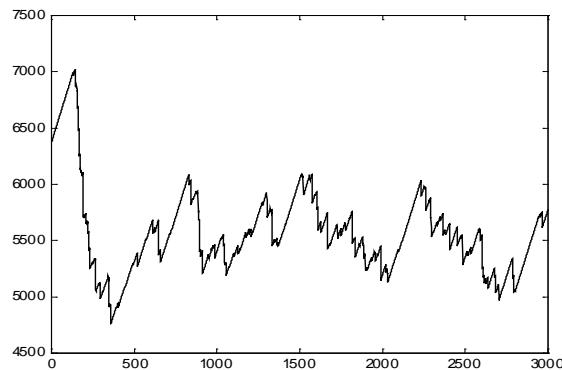
может, в свою очередь, вызвать их срабатывание. Так может возникнуть цепная реакция передачи возмущения, лавинообразно распространяющаяся по системе.

Для наглядности в качестве элементарного релаксационного генератора удобно рассмотреть заполняемый из резервуара сосуд с сифоном (сосуд Дьюара). Последний схематически изображен на рис. 3.30 и представляет собой релаксационный генератор пилообразных колебаний.



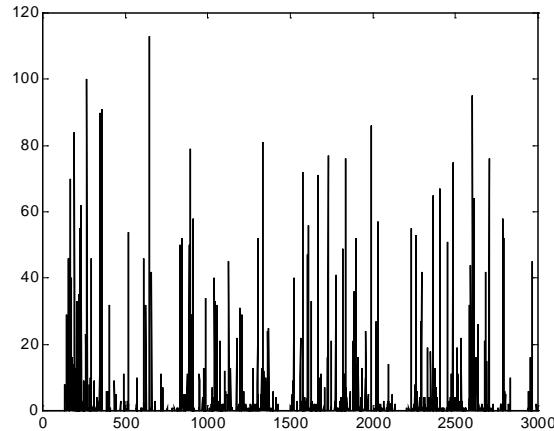
**Рис. 3.30.** Сосуд Дьюара

Используя сеть подобных генераторов, можно воспроизвести динамику процесса дегазации, полагая, что локальное нарушение устойчивости (срабатывание отдельного сифона) порождает целую лавину событий. Каждая такая лавина сопровождается флуктуациями объема запасенного системой флюида, см. график на рис. 3.31.



**Рис. 3.31.** Эволюция объема запасенного системой флюида. По оси абсцисс отложено число шагов модельного времени

Соответствующие размеры лавин — число участвовавших в событии сифонов — показаны на рис. 3.32. Статистика событий адекватно воспроизводит скейлинговые свойства процесса дегазации.



**Рис. 3.32.** Соответствующая рис. 3.31 эволюция числа сработавших сифонов

Процесс дегазации можно рассматривать как кинетический переход типа заселения среды. Традиционный подход к описанию кинетического перехода предполагает пространственно-временную локальность нелинейного механизма подавления роста населения (в нашем случае уровень запасенного флюида). Менее изученной является ситуация, когда нелинейный механизм запорогового ограничения является существенно нелокальным в пространстве и(или) во времени. При этом поле диссипации в системе имеет чрезвычайно сложную стохастическую структуру, и ограничение роста охватывает пространственно-временные области самых различных конфигураций и размеров. Природа устроена таким образом, что очень часто эти сложные диссипативные структуры являются физическими фракталами, т.е. демонстрируют скейлинговые свойства в широком диапазоне пространственных и временных масштабов [83, 86]. Пространственно-временной скейлинг характеризуется сильными, спадающими по степенному закону, корреляциями, которые типичны для критических явлений. Поэтому качественно динамика подобных систем производит впечатление самоорганизованного и самонастраивающегося критического режима. Квазистационарные условия дегазации определены равновесием между медленным процессом роста пористости за счет диффузии и ее быстрым уменьшением при вертикальной миграции макроскопических порций освободившегося газа.

Идея моделирования распределенной сейсмичности сетью связанных релаксационных генераторов была предложена еще в 1967 году и затем интерес к этой

модели вновь усилился в 90-е годы в связи с обсуждением феномена самоорганизованной критичности. Однако, в модификациях этой знаменитой «stick-slip» модели элементарным релаксационным генератором является лежащий на движущейся транспортерной ленте и удерживаемый пружиной брускок. Это тоже генератор пилы, но в нем накапливается и релаксирует упругая энергия растянутой пружины. В русле традиционного понимания сейсмогенеза речь здесь идет о накоплении и релаксации упругой энергии в деформируемых элементах литосферы.

Напротив, в случае с дегазацией речь идет о гравитационной потенциальной энергии, освобождающейся при дифференциации вещества в поле тяжести планеты. Действительно, «всплытие» зоны связной пористости диаметром  $R$  на высоту порядка ее линейных размеров, сопровождающееся изменением полной пористости на величину  $\Delta q$ , приводит к выделению энергии порядка  $\Sigma \simeq \Delta q \Delta \rho g R^4$ . Например, если при дегазации куба со стороной 5 км его пористость уменьшилась на  $10^{-3}$ , а разность плотностей твердой матрицы и флюида составляет  $\Delta \rho = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , то выделившаяся при этом энергия составит  $10^{16} \text{ Дж}$ .

Традиционная теория сейсмической активности связывает разрушение литосферы с механическим действием тектонических сил и отождествляет картину деформирования гигантских объектов с результатами миниатюрных лабораторных испытаний, которые полностью игнорируют силу тяжести. Кроме того, лабораторные исследования производятся обычно на сухих, гомогенных и однородных образцах, в то время как литосферный субстрат – по существу гетерогенная и многофазная субстанция. «Сухие» модели очага сталкиваются с множеством трудностей, которые выходят за рамки лабораторных моделей. В самом начале семидесятых казалось, что эти трудности могут быть разрешены посредством учета влияния воды [163, 171]. Было установлено, что сейсмическое разрушение обычно приурочено к зонам избыточного внутриводного давления флюидов [168, 127, 171, 180]. Однако источник и величина избыточного давления оставались неопределенными.

В последнее время становится ясным, что целый ряд особенностей сейсмического процесса, являющихся реальным вызовом для традиционного подхода, тесно связан с дегазацией Земли. В течение долгого времени поверхностный выход газов рассматривался как один из наиболее важных предвестников землетрясения [157, 177, 137, 128], и только недавно была высказана мысль о фундаментальной роли газа в процессе подготовки очага [106, 129]. Именно насыщенность горной породы флюидами при участии гравитации обеспечивает уникальные свойства литосферы, которые не могут быть полностью воспроизведены в лабораторных условиях.

Рассматривая субстрат литосферы, как двухкомпонентную двухфазную систему, состоящую из перенасыщенного твердого раствора и выделяющегося из него газа, мы обнаружили уникальную возможность саморазрушения горной породы в поле тяжести. Физику процесса определяет специфический механизм дифферен-

циации вещества в гравитационном поле, обусловленный неустойчивостью многофазной среды по отношению к перколяционному переходу. Было показано, что этот механизм, в частности, обеспечивает всплытие связной области трещин в твердой литосфере планеты. Эффективность процесса всплытия зависит от вертикальных размеров связной системы трещин. Формула (3.106) дает оценку критического размера зоны прозрачности, при котором она теряет устойчивость в поле тяжести. Мы построили двумерную модель, удовлетворительно описывающую рост и перемещение зон прозрачности в поле тяжести. Рост зон прозрачности описывается в рамках теории перколяции и в реальности может быть обусловлен, например, дегазацией субстрата литосферы или механохимическими реакциями. Появление новых зон прозрачности уравновешивается их постоянным уходом из системы за счет процесса всплытия. Характер всплытия определяется взаимодействием процессов раскрытия новых трещин в верхней части зоны прозрачности и их закрытием («заливанием») в нижней части. Разнообразие режимов поведения системы обеспечивается варьированием небольшого числа параметров, важнейшими из которых являются сдвиговая прочность и прочность материала на разрыв. Численный эксперимент показал, что вблизи дневной поверхности образуется приповерхностная зона прозрачности с глубиной порядка критического радиуса  $R_g \sim 5$  км. При подходе к этому слою возрастают перепады внутриворового давления, что может повлечь за собой катастрофические разрушения. Заметим, что глубины порядка и более критического радиуса соответствуют максимуму в распределении гипоцентров по глубине [164].

Важной особенностью обсуждаемого механизма является эффективность его энергетики: он осуществляет прямую трансформацию потенциальной гравитационной энергии в энергию разрушения. При этом энергия очага пропорциональна четвертой степени его линейных размеров и может многократно превосходить запасы упругой энергии материала, пропорциональной третьей степени линейных размеров очага.

Растягивающие напряжения вызванные вращением планеты и приливным воздействием Луны и Солнца безусловно способствуют выделению легких компонент в недрах литосферы. В этом смысле дегазация как сейсмогенный процесс хорошо коррелирует с таким важным аспектом распределенной сейсмичности как ее широтное распределение [40].

Исходя из аналогии с теорией дренажных бассейнов рек, мы обнаружили, что основные черты и структурные особенности динамической дренажной системы определяются ее масштабом (см. раздел 3.7.). Подобный подход может быть реализован и в случае процесса дегазации литосферы. Сопоставим движение флюида из недр планеты с квазистационарной системой каналов, эффективный транспорт через которую соответствует необходимому уровню дегазации сейсмоактивного региона. Отдельные сейсмические события ассоциируются при таком подходе с флуктуациями дренажной системы в различных ее масштабах. Катастро-

фические землетрясения соответствуют самым крупным структурным флюктуациям дренажной системы каналов, «ствол» которой совпадает с зоной разлома. Подобно тому, как последовательные удары молнии приурочены к фиксированному участку промежутка облако – земля, катастрофические события сейсмогенеза привязаны к зоне определенного разлома.

Уход флюида из некоторой области литосферы приводит к понижению порового давления в этом ее участке. В то же время в соседних зонах могут быть реализованы условия избыточного порового давления. Если возникающие при этом напряжения превышают прочность твердой матрицы, происходит землетрясение. В целом разрез литосферы в сейсмоактивном регионе представляет собой мозаичную картину «плюсов» и «минусов» (зон избыточного и недостаточного давлений). Динамика этих зон — движение «минусов» вниз, всплытие «плюсов» и нейтрализация «минусов» и «плюсов» — определяет особенности сейсмического режима региона.

Необходимо подчеркнуть особую роль горизонта, расположенного на глубине порядка  $R_g$  от дневной поверхности. Выше этого горизонта материал литосферы может достаточно долго находиться в состоянии «прозрачном» для флюида: соответствующие перегрузки на твердую матрицу не превышают предела ее прочности. При этом давление флюида в порах и трещинах стремится к величине, соизмеримой с давлением флюида на дневной поверхности, то есть к атмосферному давлению. Таким образом, почти вся зона, расположенная выше горизонта  $R_g$ , является зоной прозрачности для флюида. Причем наиболее прозрачной является зона разлома. Там эффективное понижение порового давления достигает самых низких возможных горизонтов.

В то же время давление в зонах, расположенных ниже  $R_g$ , достигает величин порядка и больше литостатического давления на соответствующем горизонте. Поэтому горизонтом с глубиной залегания порядка  $R_g$  соответствуют максимальные перепады давления, а значит и максимальные нагрузки на твердый скелет. Вот почему очаги наиболее разрушительных землетрясений располагаются преимущественно на глубине порядка  $R_g$  и тяготеют к зонам разломов.

Важно то, что нелинейная динамика субстрата литосферы при его дегазации оказывается самосогласованной: каждое движение является следствием предыдущих событий и одновременно причиной последующих. В свете развивающегося подхода становятся понятными такие эффекты как миграция очагов землетрясений вверх, рои землетрясений, воздействие ядерных взрывов на сейсмический режим и т. д. Фрактальная структура дренажной системы отвечает именно самосогласованному процессу дегазации литосферы.

Возникающая при перколяции дренажная система легкой компоненты является фрактальной структурой, и, следовательно, обладает фундаментальным свойством самоподобия. Это означает, в частности, что отношение среднего числа  $N(R_1)$  событий масштаба  $R_1$  к числу  $N(R_2)$  событий масштаба  $R_2$  в том же объ-

еме за тот же период времени определяется выражением:

$$\frac{N(R_1)}{N(R_2)} = \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{-d_f}, \quad (3.118)$$

где  $d_f$  — хаусдорфова размерность фрактальной структуры.

Величина фрактальной размерности существенно зависит от режима агрегации. В нашем случае имеет место кластер — кластерная ассоциация монодисперсных элементов и хаусдорфова размерность фрактальной структуры близка к двум:  $d_f \lesssim 2$  [179].

Полная энергия, выделяемая в очаге крупного события, пропорциональна четвертой степени его размеров. Поэтому, сопоставляя (3.107) и (3.118), мы получаем:

$$N(R) = E^{d_f/4}. \quad (3.119)$$

Совершенно иная зависимость обнаруживается наблюдателем сейсмической активности, который способен оценить  $E_c$  — энергию излучаемых очагом упругих волн. При прочих равных условиях (расстояние до эпицентра, глубина гипоцентра), акустическая энергия главного толчка, оцениваемая в точке наблюдения, пропорциональна объему очага. Следовательно, наблюдатель обнаружит зависимость:

$$N(R) \approx E_c^{d_f/3}. \quad (3.120)$$

Используя определение магнетуды [35]

$$\lg E_c(\text{Дж}) = 4,8 + 1,5 M \quad (3.121)$$

совместно с (3.118) и (3.120), мы получаем:

$$\lg \frac{N(R_1)}{N(R_2)} = 0,5 d_f (M_2 - M_1). \quad (3.122)$$

Последнее соотношение при  $d_f = 1,8$  совпадает с эмпирическим законом повторяемости Гуттенберга – Рихтера [35]. Закон (3.122) является следствием масштабной инвариантности процесса кластеризации легкой фазы. Однако, динамика разрушения очага, обусловленная гравитацией, такой инвариантностью не обладает.

Подчеркнем, что в рамках предлагаемой концепции находят свое естественное объяснение многочисленные экспериментальные данные о предвестниках грядущих событий. Так, сейсмоскоростная аномалия обусловлена уменьшением сжимаемости субстрата, геохимические изменения — транспортом легкой компоненты, электромагнитные — ионизацией газа и т. д. При этом легко обнаруживается формальное сходство с делатантно-диффузационной моделью [56]. Это связано с тем, что, если в качестве элементарного размера задачи вместо радиуса пузыря рассматривать гриффитовский радиус, то мы получим своеобразную

конфигурационную аналогию с процессом перколяции микротрещин в континуальной механике.

Поскольку обсуждаемый механизм сейсмической активности принципиально связан с процессами дегазации планеты, то представляется чрезвычайно важным оценить необходимую, с точки зрения сейсмогенеза, величину эффективной скорости дегазации в расчете на единицу площади поверхности и сравнить это значение с данными, наблюдаемыми в эксперименте.

Определим скорость дегазации на фиксированном горизонте  $z = g \mathbf{R}$  как число литров газа, пересекающих один квадратный метр поверхности горизонта в год:

$$Y(g \mathbf{R}) = \frac{\partial^2(v)}{\partial A \partial t}(g \mathbf{R}), \quad (3.123)$$

где  $v$  — объем флюида,  $A$  — площадь горизонта,  $t$  — время. Тогда величина связанной с дегазацией потенциальной гравитационной энергии, высвобождающейся в сейсмоактивном регионе площадью порядка  $A = 10^6$  км<sup>2</sup> за характерный период сейсмического режима  $T \simeq 1000$  лет, оценивается величиной:

$$\mathcal{E} \simeq AT \int_{-L}^0 \Delta\rho Y(z) dz \simeq \Delta\rho g Y(0) LAT, \quad (3.124)$$

где  $L \simeq 10^3$  км — характерная глубина активной зоны. По определению, за период сейсмического режима в рассматриваемом регионе происходит одно катастрофическое землетрясение с энергией очага порядка  $\mathcal{E} = 10^{20}$  Дж, что соответствует  $10^5$  Мт тринитротолуола. Поскольку энергия других сейсмических событий в регионе пренебрежимо мала по сравнению с энергией катастрофического землетрясения, мы воспользуемся для оценок именно этой величиной. Таким образом, для минимально необходимой скорости дегазации на дневной поверхности получаем:

$$Y(0) \simeq \frac{\mathcal{E}}{\Delta\rho g TV}, \quad (3.125)$$

где  $V = LA$  — объем активной среды. Подставляя в (3.125) характерные значения параметров, имеем:

$$Y(0) \simeq 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{год}}.$$

Экспериментально наблюдаемый уровень дегазации [55] в сотни раз превышает полученную оценку. Это говорит о том, что обсуждаемый механизм сейсмической активности может быть обеспечен геохимическими процессами с большим запасом «прочности».

Конечно, приведенное сопоставление носит иллюстративный характер. Детальное рассмотрение, кроме учета зависимости всех величин, входящих в (3.124), от глубины горизонта, потребует привлечения целого ряда геофизических и геохимических данных. В частности, большой интерес представляют процессы минералообразования и рудоотложения, которые также нуждаются в источнике силового воздействия при сопутствующем массопереносе.

### 3.9. Векторное протекание и нейрональные сети

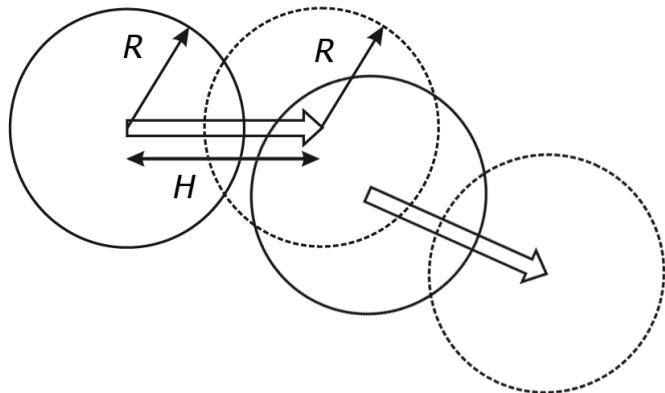
Рассмотрим теперь перколяционную задачу, в которой элементом системы выступает пара окружностей, центры которых соединены отрезком длины  $H$ . Здесь возможны две ситуации. Первая, когда окружности в паре равноправны, и процессы передачи тока, возбуждения или информации могут протекать как в направлении от первой окружности ко второй, так и в противоположном направлении. При этом перколяция пар окружностей носит скалярный характер — в связных компонентах отсутствуют выделенные направления обхода. Вторая ситуация возникает тогда, когда роли окружностей в паре дифференцированы, например, одна является "входом", а другая "выходом". Формально это обстоятельство сводится к тому, что центры парных окружностей соединены вектором. При этом перколяция пар окружностей носит векторный характер — в связных компонентах "выход" одной пары должен касаться "входа" другой. Обе ситуации характеризуются новым безразмерным параметром  $\Gamma = \frac{H}{R}$ . Очевидно, что при  $H = 0$  и скалярная, и векторная задача сводятся к уже рассмотренной проблеме окружностей.

Рассмотрим основные особенности векторного обобщения задачи окружностей на примере информационной динамики нейрональной сети [34]. Каждый из элементов сети (нейронов), распределенных случайным образом на двумерной подложке, получает входные импульсные сигналы из некоторой окрестности и в случае превышения порога генерирует выходной сигнал, который распространяется на определенное расстояние, попадая в поле входных воздействий других нейронов. У каждого нейрона в сети есть множество его адресантов, в котором можно выделить подмножество реципиентов и подмножество трансмиттеров. В общем случае эти подмножества не совпадают, хотя и могут иметь непустое пересечение. Ограничимся рассмотрением нейрональной сети в культуре на плоской подложке, предполагая что:

- 1) центры нейронов случайно-однородно распределены по плоской области;
- 2) каждый нейрон сети имеет изотропное распределение дендритов, покрывающих круговую область радиуса  $R$ . (см. рис. 3.33);
- 3) имеется изотропное распределение направлений от сомы до единственного синаптического терминала на конце аксона, причем расстояние от сомы до терминала характеризуется длиной  $H$  (характерная длина аксона).

В рамках сделанных предположений трансмиттеры изотропно распределены вокруг выбранного нейрона, а реципиенты изотропно распределены вокруг пре-синаптического терминала его аксона. Размеры всей сети существенно превосходят и радиус дендритной зоны, и характерную длину аксона. В рамках развивающейся модели целесообразно исследовать следующие два случая. Первый — когда вероятность постсинаптического контакта с произвольным нейроном имеет

постоянное значение  $p$  в круге радиуса  $R$  и равна нулю за его пределами. Другими словами, потенциал действия, достигший синаптического терминала на конце аксона, с вероятностью  $p$  переходит на возбудимую мембрану любого другого нейрона — реципиента, расстояние до центра сомы которого от рассматриваемого терминала не превышает  $R$ . Таким образом, каждый нейрон в этом случае может быть представлен направленной парой окружностей радиуса  $R$  и вектором длины  $H$ , соединяющим их центры. Задача сводится здесь к проблеме переколяции в ансамбле направленных пар окружностей. Второй случай соответствует более реалистичной ситуации, когда вероятность постсинаптического контакта (синаптическая эффективность) экспоненциально падает с ростом дистанции  $r$  от синаптического терминала на конце аксона до центра сомы реципиента  $p = p_0 \exp\left(-\frac{r}{R}\right)$ . Ниже будет показано, что и этот важный случай сводится к решению переколяционной проблемы в ансамбле направленных пар окружностей.



**Рис. 3.33.** Геометрическая схема модельного нейрона и одного из его ближайших соседей

При  $p = 1$  исследование возможности спайковой активности в сети сводится к векторной переколяционной задаче на ансамбле введенных нами направленных пар (см. рис. 3.35). Топология связей в сети при фиксированном параметре  $\Gamma$ , равном отношению характерной длины аксона к радиусу дендритной зоны, контролируется безразмерным параметром  $B = Sn$ , где  $n$  — концентрация нейронов на подложке, а  $S$  — площадь занимаемая парой связанных кругов радиуса  $R$  при расстоянии  $H$  между их центрами. Эта площадь определяется следующим выражением:

$$S = \begin{cases} 2R_c^2(\pi + (H/2R)\sqrt{(1 - (H/2R)^2)} - \arccos(H/2R)) & H < 2R \\ 2\pi R^2 & H \geq 2R \end{cases}$$

Очевидно, что при малых значениях параметра  $B \ll 1$  протяженные связные компоненты в сети модельных нейронов отсутствуют, и любое спонтанное или вынужденное возмущение в сети распространяться не сможет. Наоборот, при  $B \gg 1$  подавляющая часть элементов сети принадлежит единственной связной компоненте, простирающейся на всё модельное поле. Для каждого фиксированного значения  $\Gamma$  существует критическое значение параметра  $B_c$ , при котором впервые в системе появляется цепочка связанных нейронов, способная передать возбуждение через всю модельную сеть. При этом, если  $H = 0$ , рассматриваемая перколяционная проблема сводится к классической задаче окружностей (сфер). На рис. 3.34 показана зависимость порогового значения  $B_c$  от величины параметра  $\Gamma$ . Видно, что при малых значениях параметра  $\Gamma$  происходит значительное увеличение порога протекания.

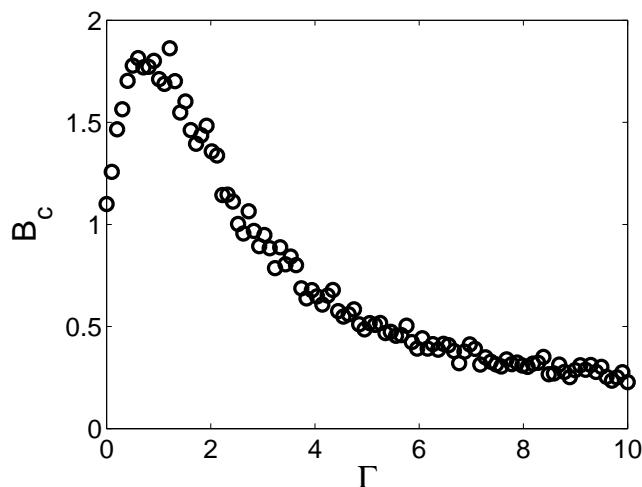
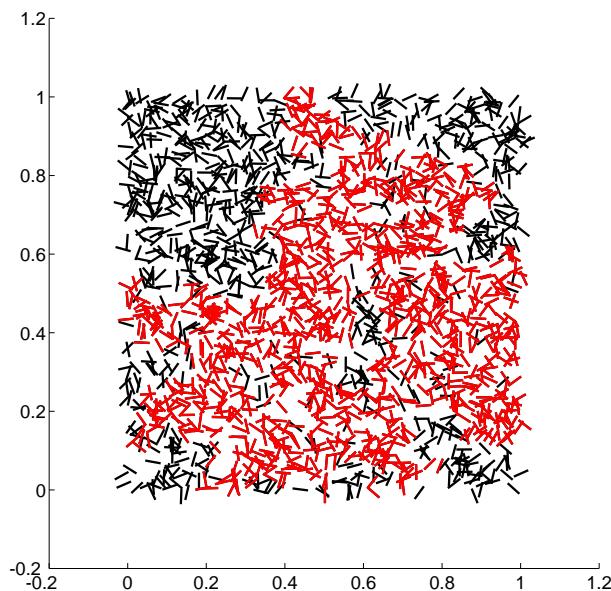


Рис. 3.34. Зависимость критического значения  $B_c$  от величины параметра  $\Gamma$

На рис. 3.35 нейроны представлены отрезками длины  $H$ , перколяционный кластер выделен красным цветом. Важно подчеркнуть, что интегральная синаптическая проводимость сети определяется именно перколяционным кластером как максимальной связной компонентой. Если входное возмущение сети не затрагивает элементов перколяционного кластера, оно не сможет «пробежать» через все модельное поле.

Появление перколяционного перехода в ансамбле нейронов является необходимым, но не достаточным условием появления незатухающей спайковой активности сети. Таким достаточным условием является образование крупномасштабных ориентированных циклов из цепочек связанных нейронов. Заметим, что как при перколяционном переходе, так и при формировании циклов учитываются только обычные нейроны. При этом совокупность тормозных нейронов рас-

сматривается как отдельная компонента, роль которой существенно зависит от её относительной доли в полном ансамбле. Выше были рассмотрены результаты перколяционного подхода при достоверной передаче возбуждения между связанными нейронами. При  $p < 1$  проблема сводится к смешанной задаче перколяции, полное решение которой выходит за рамки настоящего рассмотрения.



**Рис. 3.35.** Модельная нейрональная сеть вблизи порога векторной перколяции. Перколяционный кластер выделен красным цветом

Мы ограничимся более реалистичным сильным условием  $p \ll 1$ , когда осуществляется переход к модели динамической перколяции [95]. Действительно, предположим, что, если в данный момент времени нейрон находится в возбужденном состоянии, то в следующий (дискретный) момент времени он возвращается в исходное состояние покоя, но может при этом с вероятностью  $p$  возбудить своих рецептиентов. Ясно, что когда вероятность передачи возбуждения очень мала, число возбужденных нейронов будет убывать со временем. В обратном пределе, когда вероятность передачи возбуждения близка к единице, число возбужденных элементов сети неограниченно возрастает во времени. Критическое значение вероятности передачи возбуждения  $p_c$ , при котором появляется конечная вероятность роста спайковой активности при единственном возбужденном нейроне в начальный момент, соответствует перколяционному порогу. Величина порога направленного протекания существенно зависит от числа ближайших соседей для

рассматриваемой сети, т.е. от её координационного числа  $z$ . Чем больше число трансмиттеров  $z$  у каждого элемента сети, тем выше вероятность развития спайковой активности. Согласно приближению среднего поля, рассмотренному нами в разделе 2.9., порог перколяции при  $z \gg 1$  определяется соотношением:

$$p_c = \frac{1}{z}. \quad (3.126)$$

При уменьшении координационного числа приближение среднего поля теряет применимость. В этом случае становятся существенными флуктуационные эффекты.

Теперь несколько слов о ситуации, когда вероятность постсинаптического контакта (синаптическая эффективность) экспоненциально падает с ростом дистанции  $r$  от синаптического терминала на конце аксона до центра сомы реципиента  $p = p_0 \exp\left(-\frac{r}{R}\right)$ . Зафиксируем величину  $r \ll R$  и будем учитывать только те связи в сети, которые имеют вероятность  $p > p_0 \exp\left(-\frac{r}{R}\right)$ , а остальные связи будем считать отсутствующими. Тогда мы получим уже рассмотренную нами перколяционную проблему с радиусом дендритной зоны, равным  $r$ . Постепенно увеличивая  $r$ , мы достигнем порога протекания  $r = r_c$ , соответствующего критическому значению  $B_c$ . Именно это пороговое значение и будет определять интегральную синаптическую проводимость сети  $p_c = p_0 \exp\left(-\frac{r_c}{R}\right)$ , поскольку все остальные неучтенные нами связи, шунтирующие перколяционный кластер, оказываются экспоненциально более слабыми.

## 3.10. Эстафетная передача информации

Важное значение геометрических флуктуаций, связанных с направленной перколяцией, очень выпукло проявляется в задачах нелинейной динамики. Мы рассмотрим флуктуационные эффекты на примере распределенной системы со случайнym размножением и распадом.

Сосредоточенная система со случайнym размножением и распадом описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\dot{n} = -\alpha n + f(t)n, \quad (3.127)$$

в котором  $\alpha$  – постоянная скорость распада, а  $f(t)$  – случайно меняющаяся во времени скорость размножения с заданными статистическими характеристиками. Принято говорить [47], что для системы (3.127) превышен порог взрывной неустойчивости, если средняя по ансамблю реализаций плотность вещества  $\langle n(t) \rangle$  неограниченно возрастает со временем.

Добавление в уравнение (3.127) диффузионного члена обобщает модель на случай распределенных систем, в которых возможны процессы распада, размножения и диффузии некоторого вещества. Предполагается, что скорость распада однородна в пространстве и во времени, а размножение происходит лишь внутри определенных центров размножения, которые случайно возникают во времени в случайных точках среды, но имеют одинаковую форму, интенсивность и продолжительность жизни. Соответствующей математической моделью является уравнение [47]:

$$\dot{n} = -\alpha n + f(\mathbf{r}, t)n + D\Delta n, \quad (3.128)$$

где  $n$  – плотность вещества,  $D$  – коэффициент его диффузии. Флуктуирующее поле  $f(\mathbf{r}, t)$  задается суммой расположенных в случайных точках  $(\mathbf{r}_i, t_i)$  одинаковых импульсов  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ :

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_i \vartheta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i; t - t_i). \quad (3.129)$$

Среднее число импульсов, приходящихся в единицу времени на единицу объема, постоянно и равно  $m$ . Функция  $\vartheta(\mathbf{r}, t)$  имеет вид:

$$\vartheta(\mathbf{r}, t) = J\chi(\mathbf{r})\phi(t), \quad (3.130)$$

где  $J$  – характеризует интенсивность центра размножения,  $\chi(\mathbf{r}) = 1$  при  $r \leq r_0$  и  $\chi(\mathbf{r}) = 0$  при  $r > r_0$ ;  $\phi(t) = 1$  при  $0 < t < \tau_0$  и  $\phi(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $t > \tau_0$ , так что  $r_0$  и  $\tau_0$  дают соответственно характерный пространственный размер отдельного центра и время его жизни.

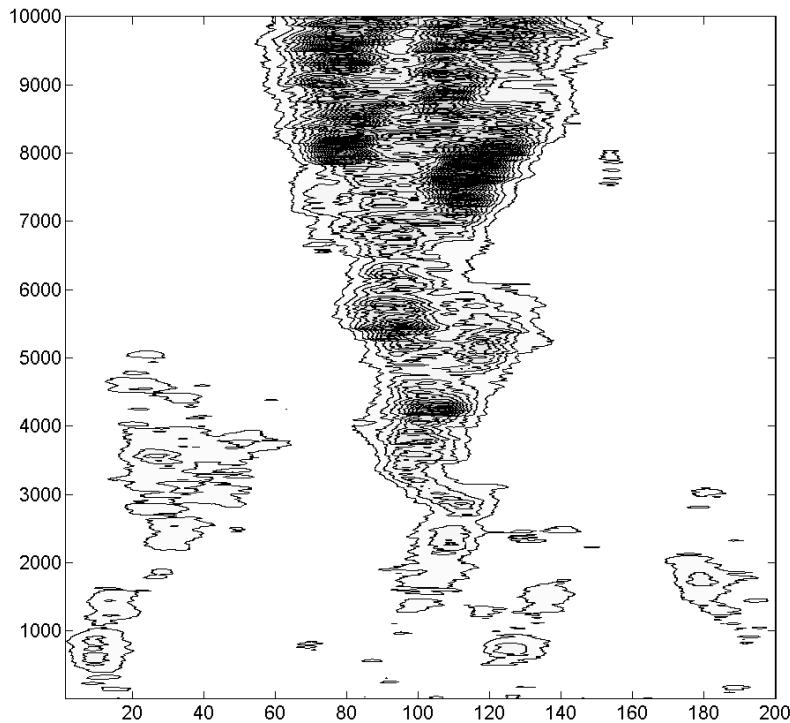
Существенным параметром задачи является безразмерная пространственно-временная концентрация центров размножения  $c$ , определяемая как

$$c = mr_0^d\tau_0, \quad (3.131)$$

где  $d$  – размерность среды.

Когда параметр  $c$  мал ( $c \ll 1$ ), различные центры размножения действуют независимо друг от друга и расчет порога взрывной неустойчивости осуществляется в рамках стандартного анализа в приближении среднего поля [47]. По мере роста  $c$  различные центры размножения начинают перекрываться в пространственно-временном континууме и их взаимное влияние становится существенным: последующие центры начинают действовать на фоне пятен населенности оставленных предыдущими центрами. Появляются пространственно-временные цепочки центров размножения — кластеры размножающегося вещества, эволюционирующие на фоне практически нулевой населенности.

Пространственно-временные масштабы этих кластеров расходятся при стремлении параметра  $c$  к некоторому критическому значению, соответствующему порогу направленной перколяции. Характерная критическая динамика модельной системы в одномерном случае представлена на рис. 3.36, где ось времени направлена вертикально вверх.



**Рис. 3.36.** Одномерная динамика, ось времени направлена вертикально вверх, цвет отображает уровень населенности

При численном моделировании уравнения (3.128) в одномерном случае оно было дополнено слабой постоянной накачкой, поддерживающей населенность на уровне шума и нелинейным диссипативным членом, обеспечивающим механизм запорогового ограничения роста населения:

$$\dot{n} = \varepsilon - \alpha n + f(\mathbf{r}, t)n + D\Delta n - \beta n^2. \quad (3.132)$$

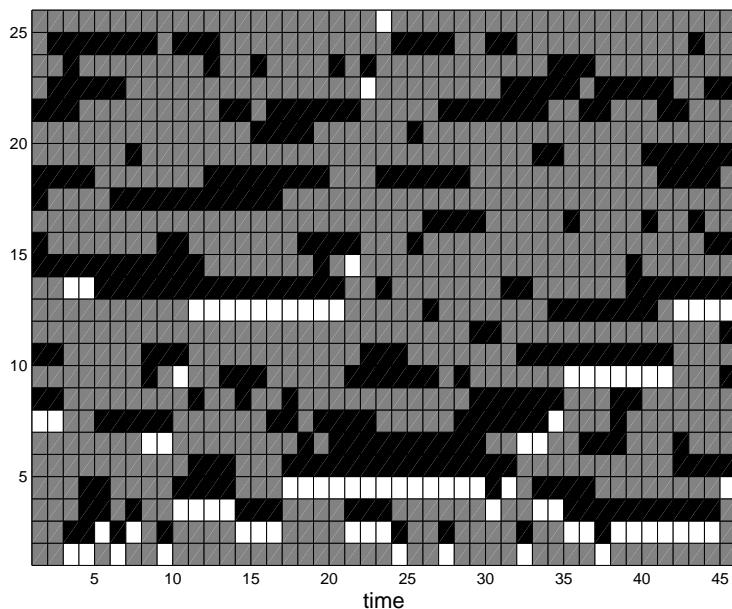
Близкой дискретной иллюстрацией конструктивной роли геометрических флуктуаций при направленной перколяции может служить передача информации по одномерному информационному каналу. Рассмотрим одномерную цепочку клеточных автоматов, каждый из которых может либо блокировать, либо пропускать проходящую через него информацию. Цепочка характеризуется удельным числом  $r$  элементов, прозрачных для сигнала. Изображенная на рис. 3.37 цепочка автоматов длины  $L = 12$  соединяет расположенный слева источник информации  $A$  с приемником  $B$ . Черный цвет соответствует блокирующими ячейкам,

серый — прозрачным, белый — прозрачным ячейкам, содержащим информацию. Пусть в каждый момент дискретного времени источник  $A$  подает на вход системы один бит информации. Этот бит может беспрепятственно перемещаться вправо только до ближайшего блокирующего узла. Очевидно, таким образом, что статическая цепь способна передавать информацию приемнику  $B$  только при значении  $p = 1$ .



**Рис. 3.37.** Одномерная цепочка клеточных автоматов. Черный цвет соответствует блокирующим ячейкам, серый — прозрачным, белый — прозрачным ячейкам, содержащим информацию

Рис. 3.38 воспроизводит фрагмент расширенного конфигурационного пространства рассматриваемой цепочки клеточных автоматов.



**Рис. 3.38.** Информация передается снизу вверх, время увеличивается слева направо

Зависимость количества переданной информации как функция уровня прозрачности флюктуирующего канала при трех различных значениях параметра  $q$  представлена на рис. 3.39 и 3.40 в обычном и билогарифмическом (справа) масштабах.

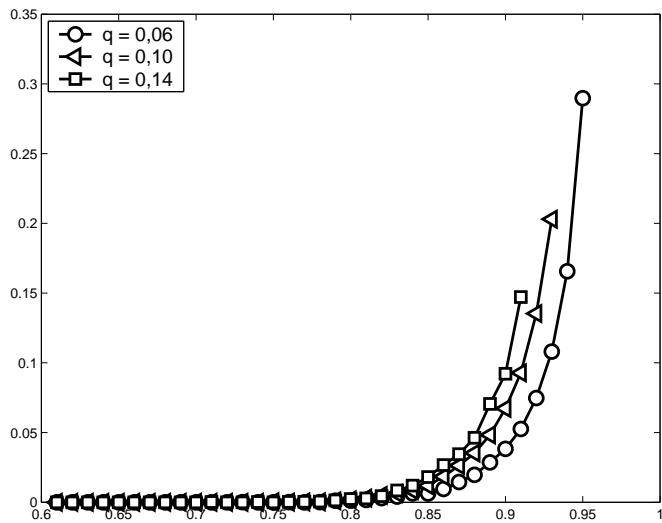
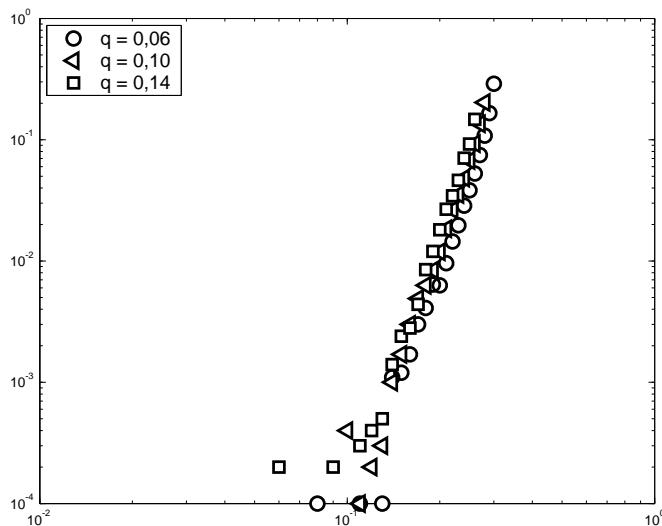
Рис. 3.39. Зависимость пропускной способности канала от уровня прозрачности  $p$ 

Рис. 3.40. То же, что на рис. 3.39 в билогарифмическом масштабе при различной доле обновляемых на одном шаге автоматов

Предположим, что элементы сети могут с течением времени изменять свое состояние так, что за один шаг дискретного времени некоторое число  $s$  прозрачных элементов становятся непрозрачными, и, наоборот,  $s$  непрозрачных элементов сети становятся прозрачными ( $s$  – параметр обновления сети). При этом уровень прозрачности  $p$  остается постоянным, а доля обновляемых за один шаг автоматов составляет величину  $q = 2s/L$  – удельный параметр обновления.

Исследуем возможность передачи информации по такой флюктуирующей цепи при условии, что информация способна сохраняться на прозрачных ячейках, и пропадает только при изменении статуса ячейки. На каждом шаге модельного времени поступившая на вход системы информация передвигается вправо до ближайшего блокирующего узла. Предполагается, что информация передается через прозрачные ячейки за время, малое по сравнению с длиной шага модельного времени, так что бит информации всегда занимает крайнее правое из доступных ему положений. На каждом шаге модельного времени у бита информации, сохранившегося в прозрачной ячейке перед некоторым блокирующим узлом, существует три возможности:

- 1) он может продвинуться вперед с вероятностью  $q(1 - q)$ , равной произведению вероятностей двух независимых событий: первое – изменение статуса соседней ячейки справа с непрозрачного на прозрачный (вероятность  $q$ ) и второе – сохранение прозрачности самой ячейки, содержащей рассматриваемый бит информации (вероятность  $1 - q$ );
- 2) может остаться на месте с вероятностью  $(1 - q)^2$  и, наконец,
- 3) может диссипировать с вероятностью  $q$ , где  $q = 2s/L$  – вероятность смены статуса ячейки в единицу времени.

Для дальнейшего продвижения информации к потребителю необходимо выполнение следующих двух условий: во-первых, блокирующий узел, задерживающий движение информации, должен превратиться в прозрачный элемент и, во-вторых, прозрачный элемент, содержащий информацию, должен оставаться прозрачным вплоть до момента снятия блокировки. Очевидно, что при низком уровне прозрачности  $p \ll 1$  вероятность одновременного выполнения этих условий чрезвычайно мала и информация не достигает потребителя. Напротив, при уровне прозрачности близком к единице  $p \simeq 1$  информация передается потребителю со скоростью близкой к максимально возможной. Существует некоторое критическое значение уровня прозрачности  $p = p_c$ , при котором появляется отличная от нуля вероятность прохождения информации через систему. При этом скорость передачи информации стремиться к нулю вблизи порога. Рис. 3.38 демонстрирует эволюцию во времени цепочки автоматов длиной  $L = 25$  при  $q = 0,16$  для уровня прозрачности  $p = 0,72$ .

# ПРИЛОЖЕНИЕ.

## ПРОГРАММНЫЕ КОДЫ

### A. Система итерируемых функций для салфетки Серпинского

Представленный ниже код осуществляет построение системы итерируемых функций для салфетки Серпинского в системе MATLAB. Рис. 1.6 является результатом работы этого кода. Детали построения обсуждаются в разделе 1.3.

```
%=====PROGRAM START=====
T = 10^5; %==== dots number ====
A = [0 .5 1; 0 .5*sqrt(3) 0]; %== position data ==
x = .5; y = 0; a = .5; b = 0;
for t = 1:15000
    ss = 10*rand(1);
    if ss < 8
        s = 1;
    elseif ss < 9
        s = 2;
    else
        s = 3;
    end
    a = .5*(a + A(1,s)); b = .5*(b + A(2,s));
    x = cat(2,x,a); y = cat(2,y,b);
end
plot(x,y,'k.'), axis equal
save('MySG', 'x', 'y')
%=====EOF=====
```

## B. Одномерная цепочка взаимодействующих бистабильных элементов

В разделе 1.8. нами была рассмотрена одномерная цепочка взаимодействующих бистабильных элементов как иллюстрация самоподобия структуры состояний системы в её расширенном конфигурационном пространстве. Ниже приведен программный код в системе MATLAB, соответствующий поэтапному построению конфигурации, представленной на рис. 1.20.

```
%=====PROGRAM START=====
N=128; A=zeros(N+1,2*N); A(1,N)=1; x=[];
%=====Film=====
aviobj = avifile('MySpin.avi','compression','None','fps',5);
%=====
for k=2:N
    p=find(A(k-1,:)==1); x(k-1)=length(p);
    for kk=1:length(p)
        A(k,p(kk)-1)=mod(A(k,p(kk)-1)+1,2);
        A(k,p(kk)+1)=mod(A(k,p(kk)+1)+1,2);
    end
    pcolor(mod(A+1,2));
    colormap([1 1 0; 0 0 1]); shading flat;
    pause(0)
%=====film=====
    frame = getframe;
    aviobj = addframe(aviobj,frame);
end
figure(1), pcolor(mod(A+1,2));
colormap([1 1 0; 0 0 1]); shading flat;
figure(2), plot(x,'-ks')
%=====film=====
aviobj = close(aviobj);
%=====EOF=====
```

Представленная программа обеспечивает запись анимационного фильма в файл 'MySpin.avi'.

## C. Градиентная перколоция

Представленный ниже программный код описывает динамику флукутаций диффузионного фронта, рассмотренного в разделе 2.8.

```
%=====PROGRAM START=====
%=====MAIN PROGRAM=====
```

```

global B N
N=120; a=linspace(N-N/4,N/4,N); a=a/N; a=a';
lev = repmat(a,1,N); A=rand(N); T = 1;
[K,L]=find(A(:,:)>=lev(:,:)); B=zeros(N,N,2);
for t=1:length(K)
    B(K(t),L(t),1)=1;
end
%=====Film=====
aviobj = avifile('MyPercolGrad.avi','compression','None');
%=====
for t = 1:T
    [I,J]=find(B(:,:,1)==1); col=2; s=0; x=[ ]; t
    for k=1:length(I)
        if B(I(k),J(k),2)==0
            s=s+1; y(s)=col; x(s)=artist(I(k),J(k),col);
            col=col+1;
        end
    end
    kk=find(max(x)-x==0); kk = kk(1);
    [P,Q]=find(B(:,:,2)==y(kk));
    for h=1:length(P)
        B(P(h),Q(h),1)=1.4;
    end
    B(N,N,1)=1.6; B(:,:,2) = zeros(N,N,1);
    MyMap = [1 1 0; 0 0 0; 0 0 1];
    Mytext=['grad(p) = ', num2str(1/(2*N))];
    pcolor(B(:,:,1)); shading flat;
    colormap(MyMap);
    xlabel(Mytext,'FontSize',14);

    for k=1:length(I)
        B(I(k),J(k),1)=1;
    end
    for tt = 1:20
        x1 = ceil((N-1)*rand); x2 = ceil((N-1)*rand);
        num1 = B(x1,x2,1); B(x1,x2,1) = B(x1,x2+1,1);
        B(x1,x2+1,1) = num1;
    end
    %=====
    %film
    frame = getframe;
    aviobj = addframe(aviobj,frame);
end
aviobj = close(aviobj);
%=====EOF=====

```

```
%=====SUBPROGRAM=====
function x = artist(i,j,c)
global B N
B(i,j,2) = c; x = 1;
set(0,'RecursionLimit',3000)
if i>1 & B(i-1,j,2)==0 & B(i-1,j,1)==1
    x=x+artist(i-1,j,c); B(i-1,j,2)=c;
end
if j>1 & B(i,j-1,2)==0 & B(i,j-1,1)==1
    x=x+artist(i,j-1,c); B(i,j-1,2)=c;
end
if i<N & B(i+1,j,2)==0 & B(i+1,j,1)==1
    x=x+artist(i+1,j,c); B(i+1,j,2)=c;
end
if j<N & B(i,j+1,2)==0 & B(i,j+1,1)==1
    x=x+artist(i,j+1,c); B(i,j+1,2)=c;
end
```

## D. Обобщенные броуновские пейзажи. Алгоритм сложений Фосса

В одномерном случае обобщенный броуновский пейзаж представляет собой реализацию обобщенных броуновских процессов с различными показателями Хёрста. Ниже приведен программный код одномерного алгоритма сложений Фосса, результат работы которого представлен на рис. 3.1. Детали работы алгоритма описаны в разделе 3.1.

```
%=====PROGRAM START=====
%Generalised Brownian Relief Generator D1
H = [.1 .5 .9]; %Hurst exponents
for kk = 1:3
    R = normrnd(0,1,1,2); k = 9; N = 2^k + 1;
    x = [1 N];
    sigma = 1; h = H(kk);
    for t = 1:k
        n = 2^t + 1; xi = linspace(1,N,n);
        yi = interp1(x,R,xi); sigma = sigma*sqrt(2)^(-h);
        R = yi + normrnd(0,sigma,1,n); x = xi;
    end
    subplot(3,1,kk); plot(R,'k-'), hold on
end
%=====EOF=====
```

Реализация алгоритма Фосса в двумерном случае описана в разделе 3.2. и представлена на рис. 3.2, 3.3 и 3.4. Полученные поверхности являются результатом работы следующего кода в среде MATLAB:

```
%=====PROGRAM START=====
%Generalised Brownian Relief Generator 2D
H = .5; %Hurst exponents
for kk = 1:1
    R = normrnd(0,1,2); k = 8; N = 2^k + 1;
    x = [1 N];
    sigma = 1; h = H(kk);
    for t = 1:k
        n = 2^t + 1; [X,Y] = meshgrid(x);
        xi = linspace(1,N,n); [XI,YI] = meshgrid(xi);
        ZI = interp2(X,Y,R,XI,YI);
        sigma = sigma*sqrt(2)^(-h);
        R = ZI + normrnd(0,sigma,n); x = xi;
    end
    %subplot(3,1,kk);
    surf(R), shading flat, colormap jet
    %camlight(-45,45);
    %view(-40,55)
end
%=====EOF=====
```

Рис. 3.5, 3.6 и 3.7 иллюстрируют работу алгоритма Фосса в трехмерном случае. Соответствующий код приведен ниже. Читатель самостоятельно может менять величину показателя Хёрста 'H' и уровень сечения 'lev'.

```
%=====PROGRAM START=====
%Generalised Brownian Relief Generator 3D
H = 0.75;
R = normrnd(0,1,2,2,2); k = 5; N = 2^k + 1; x = [1 N];
sigma = 1; h = H; lev = .05;
for t = 1:k
    n = 2^t + 1; [X,Y,Z] = meshgrid(x);
    xi = linspace(1,N,n); [XI,YI,ZI] = meshgrid(xi);
    VI = interp3(X,Y,Z,R,XI,YI,ZI);
    sigma = sigma*sqrt(2)^(-h);
    R = VI + normrnd(0,sigma,n,n,n); x = xi;
end
y = x; z = x;
figure(1), subplot(1,2,1), hiso = patch(isosurface(x,y,z,R,lev));
isonormals(x,y,z,R,hiso)
set(hiso,'FaceColor','blue','EdgeColor','none');
%==
```

```

hcap = patch(isocaps(x,y,z,R,lev),...
    'FaceColor','interp',...
    'EdgeColor','none');
colormap lines; daspect([1,1,1]);
camproj perspective
view(65,45); camlight(-45,45);
set(gcf,'Renderer','zbuffer'); lighting phong
set(hcap,'AmbientStrength',.6); axis tight
%=====
subplot(1,2,2), hiso = patch(isosurface(x,y,z,-R,-lev));
isonormals(x,y,z,-R,hiso)
set(hiso,'FaceColor','yellow','EdgeColor','none');
%===
hcap = patch(isocaps(x,y,z,-R,-lev),...
    'FaceColor','interp',...
    'EdgeColor','none');
colormap lines; daspect([1,1,1]);
camproj perspective
view(65,45); camlight(-45,45);
set(gcf,'Renderer','zbuffer'); lighting phong
set(hcap,'AmbientStrength',.6); axis tight
%=====EOF=====

```

## E. Модель лесных пожаров

В разделе 3.6. мы рассмотрели классическую модель лесных пожаров, в которой роль переклирующих элементов играют деревья, растущие в узлах квадратной решетки. В рамках этой модели удельное число деревьев флюктуирует вблизи порогового уровня  $p_c \simeq 0,58$ , не превышая его. Этот критический уровень определяется равновесием между процессами роста деревьев и их уничтожением при возникновении пожаров. Ниже приведен программный код модели лесных пожаров. Детали работы алгоритма описаны в разделе 3.6.

```

%=====PROGRAM START=====
%=====MAIN PROGRAM=====
global B; global N; global count;
hFig1 = figure( 'Name','Forest Fire')
hAxes1=axes( 'Parent',hFig1,'Color',[1 1 1],...
    'Units','pixels','Position',[ 12 52 256 256 ] );
hAxes2=axes( 'Parent',hFig1,'Color',[1 1 1],...
    'Units','pixels','Position',[ 280 52 256 256 ] );
uicontrol(hFig1,'Style','text','Position',[12,16,460,24],...
    'BackgroundColor','white',...
    'HorizontalAlignment','center','String',...

```

```

'specific number of trees ( percentage wise )','FontSize',14);
hText=uicontrol(hFig1,'Style','text','Position',[500,16,36,24],...
'BackgroundColor','white',...
'HorizontalAlignment','center','FontSize',14);
N=128; T=10^3; B=zeros(N,N,2); x=zeros(1,T); s=.2;
teta=25;
aviobj = avifile('MyForestFire.avi','compression','None','fps',30);
for t=1:T
    A=rand(N); [q,p]=find(A(:,:,1)<teta/N^2); count=0;
    for k=1:length(p)
        B(q(k),p(k),1)=1;
    end
    v=rand; psi=.06;
    num=length(find(B(:,:,1)==1));
    if v<psi
        ii=ceil(N*rand); jj=ceil(N*rand);
        if B(ii,jj,1)==1
            B(ii,jj,2)=1;
        end
    end
    [q1,p1]=find(B(:,:,2)==1-s); counter(s); x(t)=count; t
    B(N,N,1)=1.5; B(:,:,2)=B(:,:,2)-s*B(:,:,2);
    B(N,N,2)=1.5;
    str = int2str(100*num/N^2);
    set(hText,'String',str)
    axes(hAxes2); pcolor(B(:,:,2)); shading flat; axis off
    axes(hAxes1); pcolor(B(:,:,1)); shading flat; axis off
    pause(0)

    frame = getframe(hFig1,[0,0,548,320]);
    aviobj = addframe(aviobj,frame);
end
aviobj = close(aviobj);
figure(1); plot(x)
for kk=1:max(x)
    G2(kk)=length(find(x==kk));
end
figure(2);loglog(G2)
xlabel('lg( cluster size )');
ylabel('lg( frequency of event )');
%=====EOF=====
%=====SUBPROGRAM=====
function counter(s);
global B; global N; global count;
[q1,p1]=find(B(:,:,2)==1-s);

```

```
for k1=1:length(p1)
    B(q1(k1),p1(k1),1)=0; count=count+1;
    a=q1(k1)+1; b=p1(k1)+1; c=q1(k1)-1; d=p1(k1)-1;
    if a<=N & B(a,p1(k1),1)==1
        B(a,p1(k1),2)=1;
    end
    if b<=N & B(q1(k1),b,1)==1
        B(q1(k1),b,2)=1;
    end
    if c>=1 & B(c,p1(k1),1)==1
        B(c,p1(k1),2)=1;
    end
    if d>=1 & B(q1(k1),d,1)==1
        B(q1(k1),d,2)=1;
    end

    if a==N+1 & B(1,p1(k1),1)==1
        B(1,p1(k1),2)=1;
    end
    if b==N+1 & B(q1(k1),1,1)==1
        B(q1(k1),1,2)=1;
    end
    if c==0 & B(N,p1(k1),1)==1
        B(N,p1(k1),2)=1;
    end
    if d==0 & B(q1(k1),N,1)==1
        B(q1(k1),N,2)=1;
    end
end
%=====EOF=====
```

# Литература

- [1] Абдуллаев, С. С. Классическая нелинейная динамика и хаос лучей в задачах распространения волн в неоднородных средах / С. С. Абдуллаев, Г. М. Заславский // УФН. – 1991. – Т. 161. – №8. – С. 1–43.
- [2] Азовский, А. И. Анализ пространственной организации сообществ и фрактальная структура литорального бентоса / А. И. Азовский, М. В. Чертопруд // Докл. АН. – 1997. – Т. 356. – №5. – С. 713–715.
- [3] Азовский, А. И. Масштабно-ориентированный подход к анализу пространственной структуры сообществ / А. И. Азовский, М. В. Чертопруд // Журн. общ. биол. - 1998. – Т. 59. – С. 117–136.
- [4] Алексеев, В.В. Физическое и математическое моделирование экосистем / В.В. Алексеев, И.И. Крышев, Т.Г. Сазыкина. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. – 368 с.
- [5] Барентблatt Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984. 211с.
- [6] Батунин, А. В. Фрактальный анализ и универсальность Фейнгенбаума в физике адронов / А. В. Батунин // УФН. – 1995. – Т. 165. – №6. – С. 645–660.
- [7] Бершадский, А. Г. Крупномасштабные фрактальные структуры в лабораторной турбулентности, океане и астрофизике// УФН. – 1990. – Т. 160. – №12. – С. 189–194.
- [8] Бигон, М. Экология: Особи, популяции, сообщества: В 2 т. Т. 2. / М. Бигон, Дж. Харпер, К. М. Таунсенд. – М. : Мир, 1989. – 447 с.
- [9] Божокин, С. В. Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск, 2001. – 128 с.
- [10] Васильев, В.А. Автоволновые процессы / В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно. – М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. (Соврем. пробл. физики), 1987. - 240 с.

- [11] Висман, Г. Свойства лапласовских фракталов при пробое диэлектриков в двух и трех измерениях / Г. Висман, Л. Пьетронеро // Фракталы в физике. Под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. - М. : Мир, 1988.
- [12] Встовский, Г. В. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов / Г. В. Встовский, А. Г. Колмаков, И. Ж. Бунин. – М. – Ижевск, 2001. – 116 с.
- [13] Гарднер, М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам / М. Гарднер ; Пер. с англ. - М. : Мир, 1993. – С. 416.
- [14] Гелашвили, Д. Б. Степенной закон и принцип самоподобия в описании видовой структуры сообществ / Д. Б. Гелашвили, Д. И. Иудин, Г. С. Розенберг, В. Н. Якимов, Г. В. Шурганова // Поволжский экол. журн. – 2004. – №3. – С. 227-245.
- [15] Гиляров, А. М. Связь биоразнообразия продуктивностью – наука и политика / А. М. Гиляров // Природа. – 2001. – №2. – С. 20–24.
- [16] Гипмор, Р. Прикладная теория катастроф: В 2 т. / Р. Гипмор ; Пер с англ.; Под ред. Ю.П. Гупало и А.А. Пионтковского. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 350с. – Т. 2. – 285 с.
- [17] Джиллер, П. Структура сообществ и экологическая ниша / П. Джиллер. – М. : Мир, 1988. – 184 с.
- [18] Добрынин В.М. Методы прогнозирования аномальных высоких пластовых давлений / В.М. Добрынин, В.А. Серебряков // М.: Недра, 1978. 232с.
- [19] Жен, П.-Ж. де. Идеи скейлинга в физике полимеров / П.-Ж. де. Жен ; Пер с англ.; Под ред. И. М. Лифшица. - М.: Мир, 1982. – 368 с.
- [20] Животовский, Л. А. Показатели внутрипопуляционного разнообразия / Л. А. Животовский // Журн. общ. биол. – 1980. – Т. 41. – С. 828–836.
- [21] Жиков, В.В. Фракталы / В.В. Жиков // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – №12. – С. 109–117.
- [22] Зеленый, Л.М. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории переколяции к проблемам космической электродинамики / Л.М. Зеленый, А.В. Милованов // УФН. – 2004. – Т. 174. – №8.
- [23] Зельдович, Я. Б. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика / Я. Б. Зельдович, Д. Д. Соколов // УФН. – 1985. – Т. 146. – №3. – С. 493–506.
- [24] Зосимов, В. В. Фракталы и скейлинг в акустике / В. В. Зосимов, Л. М. Ля-мшев //Акуст.журн. – 1994. – Т. 40. – №5. – С. 709–737.

- [25] Зосимов, В. В. Фракталы в волновых процессах / В. В. Зосимов, Л. М. Ля-мшев // УФН. – 1995. – Т. 165. – №4. – С. 361–402.
- [26] Итон Б. Использование получаемых в процессе бурения петрофизических данных для оценки перспектив / Б. Итон // Нефтегазовые технологии. 1993. № 3. С.15–25.
- [27] Иудин, Д. И. Фильтрационное течение в среде с переменной пористостью / Д. И. Иудин, Д. А. Касьянов, Г. М. Шалашов // Доклады РАН. – 1999. – Т. 2. – С. 257–259.
- [28] Иудин, Д. И. Фрактальная динамика заряда в грозовом облаке / Д. И. Иудин, В. Ю. Трахтенгерц // Известия АН. Физика атмосферы и океана. – 2000. – Т. 36. – №5. – С. 650–662
- [29] Иудин, Д. И. Нелинейная динамика грозового облака / Д. И. Иудин, В.Ю. Трахтенгерц // Изв. Вузов. Радиофизика. – 2001. – 44(5-6). – С. 419–438.
- [30] Иудин, Д. И. Применение мультифрактального анализа структуры биотических сообществ в экологическом мониторинге / Д. И. Иудин, Д. Б. Гелашвили // Проблемы регионального экологического мониторинга: Матер. научн. конфер. – Н. Новгород. – 2002. – С. 49–52.
- [31] Иудин, Д. И. Мультифрактальный анализ структуры биотических сообществ / Д. И. Иудин, Д. Б. Гелашвили, Г. С. Розенберг // Докл. АН. – 2003. – Т. 389. – №2. – С. 279–282.
- [32] Иудин, Д. И. Динамическая перколяция в активных средах / Д. И. Иудин, В. Ю. Трахтенгерц // 'Нелинейные Волны' 2004; Отв. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Н. Новгород: ИПФ РАН, – 2005. – С. 217–242.
- [33] Иудин, Д. И. Фрактальные лабиринты: структурная динамика / Д. И. Иудин, В. Ю. Трахтенгерц // 'Нелинейные Волны' 2006; Отв. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Н. Новгород: ИПФ РАН, – 2007. – С. 360–377.
- [34] Иудин, Д. И. Перколяционные эффекты в биоэкологических системах / Д. И. Иудин, Д. Б. Гелашвили // 'Нелинейные Волны' 2010; Отв. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Н. Новгород: ИПФ РАН, - 2011. – С. 412–434.
- [35] Касахара К. Механика землетрясений / К. Касахара // – М.: Мир, 1985.
- [36] Копосов Е.В. Универсальная форма нелинейного закона фильтрации в дисперсных грунтах / Е.В. Копосов, Д.И. Иудин, А.А. Панютин // Поволжский научный журнал – 2007. №4. – С. 108 – 114.

- [37] Копосов Е.В. Перколяционный механизм гравитационной неустойчивости дисперсных систем / Е.В. Копосов, Д.И. Иудин // Поволжский научный журнал – 2008. №1. – С. 102 – 109.
- [38] Копосов Е.В. Мультифрактальный анализ пространственного распределения карстовых явлений / Е.В. Копосов, Д.И. Иудин // Поволжский научный журнал – 2009. №1. – С. 140 – 147.
- [39] Кузнецов, С. П. Динамический хаос (курс лекций) / С. П. Кузнецов. – М: Физматлит, 2001. – 296 с.
- [40] Левин Б.В. Ядро Земли – дирижер сейсмической активности? / Б.В. Левин // Земля и вселенная, №3. – С. 12–19. – 2002.
- [41] Левич, А. П. Структура экологических сообществ / А. П. Левич. – М. : МГУ, 1980. - 181 с.
- [42] Лихачева, Н. Е. О количественной обработке проб фитопланктона. Ранговые распределения численности фитопланктона пролива Вилькицкого / Н. Е. Лихачева, А. П. Левич, Т. И. Кольцова // Биологические науки. – 1979. – №9. – С. 102–106.
- [43] Лоскутов, А.Ю. Введение в синергетику / А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов. – М. : Наука, 1990. – 272 с.
- [44] Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
- [45] Маргалеф, Р. Облик биосферы / Р. Маргалеф. – М. : Наука, 1992. – 254 с.
- [46] Медвинский, А. Б. Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействия популяций планктона и рыбы / А. Б. Медвинский, С. В. Петровский, И. А. Тихонова, Д. А. Тихонов // УФН. – 2002. – Т. 172. – №1. – С. 31–66.
- [47] Михайлов, А.С. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией / А.С. Михайлов, И.В. Упоров // УФН. – 1984. – Т.144(1). – С.79
- [48] Морозов, А. Д. Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. – М.– Ижевск: ИКИ, 2002. – С. 160.
- [49] Мэгарран, Э. Экологическое разнообразие и его измерение / Э. Мэгарран. – М. : Мир, 1992. – С. 181.
- [50] Одум, Ю. Основы экологии / Ю. Одум. – М. : Мир, 1975. – С. 740.

- [51] Пайтген, Х.-О. Красота фракталов / Х.-О. Пайтген, П. Х Рихтер ; Пер. с англ.; Под ред. А.Н. Шарковского. – М: Мир, 1993. – С. 176.
- [52] Песин, Я. Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения / Я. Б. Песин. - М.-Ижевск: ИКИ, 2002. – С. 404.
- [53] Песин, Я. Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения / Я. Б. Песин. – М.-Ижевск: ИКИ, 2002. – С. 404.
- [54] Поздняков, А.А. Значение правила Виллиса для таксономии / А.А. Поздняков // Журн. общ. биологии. – 2005. – Т. 66. – № 4. – С.326–335.
- [55] Пономарев А.С. Теплогазодинамическая модель коровых землетрясений / А.С. Пономарев // Физика Земли. 1990. №10. С. 100.
- [56] Райс Дж. Механика очага землетрясений / Дж. Райс // – М.: Мир, 1983.
- [57] Розенберг, Г.С. Экология. Элементы теоретических конструкций современной экологии / Г.С. Розенберг, Д.П. Мозговой, Д.Б. Гелашвили. – Самадра: Самарский научный центр РАН, 1999. - С. 396.
- [58] Смирнов, Б. М. Фрактальные кластеры / Б. М. Смирнов // УФН. – 1986. – Т. 149. – №2. – С. 177–219.
- [59] Смирнов, Б. М. Фрактальный клубок – новое состояние вещества / Б. М. Смирнов // УФН. – 1991. – Т. 161. – №8. – С. 141–153.
- [60] Смирнов, Б. М. Физика фрактальных кластеров / Б. М. Смирнов. – М. : Наука, 1991. – С. 134.
- [61] Смирнов, Н.Н. Перколяционный механизм гравитационной дифференциации как модель сейсмической активности / Н.Н. Смирнов, Д. И. Иудин // ВЕСТ. МОСК. УН-ТА. - 2003. – Т.2. – С.31–39.
- [62] Соколов, И.М. Размерности и другие геометрические показатели в теории протекания / И.М. Соколов // УФН. – 1986. – Т. 150. – №2. – С. 221–255.
- [63] Стенли, Г. Фазовые переходы и критические явления / Г. Стенли // М.: Мир, 1973. – С. 419.
- [64] Тарасевич, Ю.Ю. Перколяция: Теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие. Изд. 2-е / Ю.Ю. Тарасевич. – М. : Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2012. – 112 с.,
- [65] Трубецков Д.И. След вдохновений и трудов упорных / Д.И. Трубецков. – Саратов: Изд-во Гос.УНЦ "Колледж", 2001. – С. 13.

- [66] Трахтенгерц, В.Ю. О фрактальной динамике активных сред / В.Ю. Трахтенгерц, Д.И. Иудин, А.Н. Григорьев, // 'Нелинейные Волны' 2006; Отв. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. Н. Новгород: ИПФ РАН, – 2007. – С. 287–302.
- [67] Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф ; Пер. с нем. – М. – Л.: ОНТИ, 1937. – С.304
- [68] Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные законы / М. Шредер. – Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – С. 528.
- [69] Шустер, Г. Детерминированный хаос / Г. Шустер ; Пер. с англ.; Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича. – М.: Мир, 1988. – С.240.
- [70] Федер, Е. Фракталы / Е. Федер ; Пер. с англ. – М. : Мир, 1991. – 254 с., ил.
- [71] Фракталы в физике; Пер. с англ.; Под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти – М. : Мир, 1988. – 671 с., ил.
- [72] Эткинс, П. Порядок и беспорядок в природе / П. Эткинс. – М. : Мир, 1987.
- [73] Эфрос, А.Л. Физика и геометрия беспорядка / А.Л. Эфрос. – М. : Наука, 1982.
- [74] Alexander, S. and Orbach, R. // J. Phys. Lett. 1982. 43:L625
- [75] Anderson, A. N. Soil aggregates as mass fractals / A. N. Anderson, A. B. McBratney // Australian Journal of Soil Research. – 1995. – V. 33. – P. 757-772.
- [76] Armstrong, A. C. On the fractal dimensions of some transient soil properties / A. C. Armstrong // Journal of Soil Science. – 1986. – V. 37. – P. 641-652.
- [77] Ashour-Abdalla, M. The mosaic structure of plasma bulk flows in the Earth's magnetotail / M. Ashour-Abdalla, L.M. Zelenyi, V. Peroomian [et al.] // J. Geophys. Res. 1995. V. 100. P. 19191–19210. DOI: 10.1029/95JA00902.
- [78] Arrhenius, O. On the relation between species and area: a reply / O. Arrhenius // Ecology. - 1923. – V. 4. – P. 68-73.
- [79] Arrhenius, O. Species and area / O. Arrhenius // Journal of Ecology. – 1921. – V. 9. – P. 95-99.
- [80] Arrhenius, O. Statistical investigations in the constitution of plant associations / O. Arrhenius // Ecology. – 1923. – V. 4. – P. 68-73.
- [81] Azovsky, A. I. Size-dependent species-area relationships in benthos: is the world more diverse for microbes? / A. I. Azovsky // Ecography. – 2002. – V. 25. – P. 273-282.

- [82] Fractal properties of spatial distribution of intertidal benthic communities / A. I. Azovsky, M. V. Chertoprod, N. V. Kucheruk et al. // Marine Biology. – 2000. – V. 136. – P. 581-590.
- [83] Bak, P. Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/f Noise / P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld // Phys. Rev. Letters. – 1987. – Vol. 59. – P.381.
- [84] Bak, P. Self-organized criticality / P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld // Phys. Rev. A. - 1988. – V. 38. – P. 364-374.
- [85] Bak, P. A forest-fire model and some thoughts on turbulence / P. Bak, K. Chen // Physics Letters. – 1990. – A 147(5,6). – P.297–300.
- [86] Bak, P. How Nature Works (The Science of Self-organized Criticality) / P. Bak // Oxford Univ. Press, 1997.
- [87] Bakurov V.G., Gusev V.I., Izmailov A.F., Kessel L.R. // J. Phys. 1990. V.A23. P.250–257.
- [88] Balberg, I. Recent developments in continuum percolation / I. Balberg // Philosophical Magazine B 56(6). – 1987. – P.991 - 1003.
- [89] Barnsley M. Fractals Everywhere. – Boston: Academic Press, 1988. – 394 p.
- [90] Beale Paul, D. Theory of dielectric breakdown in metal-loaded dielectrics. / D. Beale Paul, P.M. Duxbury // Physical Review B 37(6). – 1988. – P.2785 - 2791.
- [91] Bowman, B. Dielectric breakdown in metal-insulator composite / Bowman, B., Stroud // Phys. Rev. B, vol. 40, – 1989. – 4641.
- [92] Bradbury, R. H. Fractal dimension of a coral reef at ecological scales / R. H. Bradbury, R. E. Reichelt // Marine Ecology Progress Series. – 1983. – V. 10. – P. 169-171.
- [93] Broadbent, S.R. Percolation processes. I. Crystals and mazes, Proc. Camb. / S.R. Broadbent, J.M. Hammersley // Phil. Soc. – 1957. – Vol. 53. – P. 629–641.
- [94] Browne, R. A. Lakes as islands: biogeographic distributions, turnover rates, and the species composition in the lakes of central, New York / R. A. Browne // J. Biogeography. – 1981. – V. 8. – P. 75–83.
- [95] Bunde, A. Fractals in Science / A. Bunde, S. Halvin. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 298 p.
- [96] Bunde, A. Fractals and Disordered Systems / A. Bunde, S. Halvin. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 408 p.

- [97] Davaney, R. L. Chaos, Fractals and Dynamics / R. L. Davaney. – N. Y. : Addison-Wesley, 1990.
- [98] Debierre, Jean-Marc. Hull of percolation clusters in three dimensions. In Y. Rabin and R. Bruinsma, editors, Soft Order in Physical Systems pages 159–162. Plenum Press, New York, 1994.
- [99] Elam, W.T. Critical properties of the void percolation problem for spheres / W.T. Elam, A.R. Kerstein, J.J. Rehr // Physical Review Letters. – 1984. – Vol. 52(17). P.1516 – 1519.
- [100] Falconer, K. J. The Geometry of Fractal Sets / K. J. Falconer. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, – 1985.
- [101] Flory P.J. Principles of Polymer Chemistry // P.J. Flory – Cornell University, New York 1971.
- [102] M. E. Fisher and F. R. J. Burford. Non. Phys. Rev. 156:583, – 1967.
- [103] Fleischmann, M. Fractals in the Natural Sciences / M. Fleischmann, D. J. Tildesley, R. C. Ball. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.
- [104] C. Domb. Non. Adv. Chem. Phys. 15:229, 1969.
- [105] Gautestad, A.O. Are home ranges fractals? / A.O. Gautestad, I. Mysterud // Landscape Ecology. – 1994. – V. 9. – P. 143–146.
- [106] Gold T., Vogel J. E. Hydraulic-elastomeric mount displacement decoupler / T. Gold, J.E. Vogel // The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 83, Issue 2, February, – 1988. – p. 844.
- [107] Goltz, C. Fractal and Chaotic Properties of Earthquakes. / C. Goltz. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 77 p.
- [108] Gouet, J.F. Invasion noise during drainage in porous media / J.F. Gouet // Physica A. – 1990. – V.168. – P.581.
- [109] Gouet, J.F. Structura of noise generated on diffusion fronts / J.F. Gouet, B. Sapoval, Y. Boughaleb, M. Rosso // Physica A. – 1990. – V.157. – P.620.
- [110] Gouyet, J.-F. Dynamics of diffusion and invasion fronts: on the disconnection-reconnection exponents of percolation clusters / J.-F. Gouyet // In Rabin and Bruinsma [98] pages 163–166.
- [111] Grassberger, P. Measuring the Strangeness of Strange Attractors / P. Grassberger, I. Procaccia // Physica D. – 1983. – V. 9, No 1–2. – P. 189–208.

- [112] Gunnarsson B. Fractal dimension of plants and body size distribution in spiders // Functional Ecology. 1992. V. 6. – P. 636–641.
- [113] Halley J. M., Hartley S., Kallimanis A. S., Kunin W. E., Lennon J. J. , Sgardelis S. P. Uses and abuses of fractal methodology in ecology // Ecology Letters. 2004. – V. 7. – P. 254–271.
- [114] Harte J., Blackburn T., Ostling A. Self-Similarity and the relationship between Abundance and Range Size // American Naturalist. 2001. – V. 157. – P. 374–386.
- [115] Harte J., Kinzig A. P., Green J. Self-similarity in the distribution and abundance of species // Science. 1999. – V. 284. – P. 334–336.
- [116] Hartley S., Kunin W. E., Lennon J. J., Pocock M. J. O. Coherence and discontinuity in the scaling of species' distribution patterns // Proc. R. Soc. Lond. B. 2004. – V. 271. – P. 81–88.
- [117] Haslett J. R. Community structure and the fractal dimensions of mountain habitats // Journal of Theoretical Biology. 1994. – V. 167. – P. 407–411.
- [118] Hayakawa M., T. Nakamura, D. Iudin, K. Michimoto, T. Suzuki, T. Hanada and T. Shimura, On the fine structure of thunderclouds leading to the generation of sprites and elves fractal analysis, J. Geophys. Res., Vol.110, No.D6, D06104, 101029/2004JD004545, 2005.
- [119] Hayakawa, M., D. I. Iudin, and V. Y. Trakhtengerts, Modeling of thundercloud VHF/UHF radiation on the lightning preliminary breakdown stage, J. Atmos. Solar-terr. Phys., vol. 70, 1660-1668, doi:10.1016/j.jastp.2008.06.011, 2008.
- [120] Gunnarsson, B. Fractal dimension of plants and body size distribution in spiders / B. Gunnarsson // Functional Ecology. – 1992. – V. 6. – P. 636–641.
- [121] Halley J. M. Uses and abuses of fractal methodology in ecology / J. M. Halley, S. Hartley, A. S. Kallimanis et al. // Ecology Letters. – 2004. – V. 7. – P. 254–271.
- [122] Harte, J. Self-Similarity and the relationship between Abundance and Range Size / J. Harte, T. Blackburn, A. Ostling // American Naturalist. – 2001. – V. 157. – P. 374–386.
- [123] Harte, J. Self-similarity in the distribution and abundance of species / J. Harte, A. P. Kinzig, J. Green // Science. - 1999. – V. 284. – P. 334–336.
- [124] Hartley, S. Coherence and discontinuity in the scaling of species' distribution patterns / S. Hartley, W. E. Kunin, J. J. Lennon, M. J. O. Pocock // Proc. R. Soc. Lond. B. – 2004. – V. 271. – P. 81–88.

- [125] Haslett, J. R. Community structure and the fractal dimensions of mountain habitats / J. R. Haslett // Journal of Theoretical Biology. – 1994. – V. 167. – P. 407–411.
- [126] Hayakawa M. On the fine structure of thunderclouds leading to the generation of sprites and elves fractal analysis / M. Hayakawa, T. Nakamura, D. Iudin, K. Michimoto, T. Suzuki, T. Hanada and T. Shimura // J. Geophys. Res., Vol.110, No.D6, D06104, 101029/2004JD004545, 2005
- [127] Hickman, S., R. H. Sibson, and R. Bruhn, 1995, Introduction to special section: mechanical involvement of fluids in faulting, J. Geophys. Res., 100, 12, 831–12,840.
- [128] Igarashi, G., S. Saeki, N. Takahata, K. Sumikawa, S. Tasaka, Y. Sakaki, M. Takahashi, Y. Sano, Ground water radon anomaly before the Kobe earthquake in Japan, Science, 269, 60–61, 1995.
- [129] Iudin D. I. and D. A. Kas'yanov. Percolation Model of Seismic Activity. In: Atmospheric and Ionospheric Electromagnetic Phenomena Associated with Earthquakes, edited by M. Hayakawa pp.911-917. Terra Scientific Publishing Company, Tokyo, 1999.
- [130] Iudin, D.I. Electric charge fractal dynamic in thundercloud / D.I. Iudin. - Nizhny Novgorod : Proc. Inst. Appl. Phys., 2000. – P.461–480.
- [131] Iudin D. I., N. V. Korovkin, O.A. Molchanov, V.V. Surkov, and M. Hayakawa, Model of earthquake triggering due to gas-fluid "bubble" upward migration I. Physical Rationale, In: Seismo Electromagnetics. Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere Coupling Ed. by M. Hayakawa and O. A. Molchanov, pp.177-185. TERRAPUB, Tokyo, 2002.
- [132] Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y., and A.N. Grigoriev, Thundercloud cellular automaton model, Elsevier NI & MIPR A 502 (2003) 526–528.
- [133] Iudin, D. I. Multifractality in ecological monitoring / D. I. Iudin, D. B. Gelashvily // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. – 2003. – V. 502. – P. 799-801.
- [134] Iudin D.I., A.N. Grigoriev, Cellular automaton model of lithosphere degassing, Elsevier NI & MIPR A 502. – 2003. – P. 736–738.
- [135] Iudin D. I. Fractal dynamics of electric discharges in a thundercloud / D. I. Iudin, V. Yu. Trakhtengerts, and M. Hayakawa // Phys. Rev. E 68, 016601 – 2003.
- [136] Jensen H.J. Self-Organized Criticality / H.J. Jensen // Cambridge university press, 1998. – p. 153.

- [137] King, C-Y. Gas geochemistry applied to earthquake prediction: An overview, *J. Geophys. Res.*, 91, 12,269–12,281, 1986
- [138] Last B. J. and Thouless D. J. *Non. Phys. Rev. Lett.* 27:1719, 1971.
- [139] Lauwerier, H. *Fractals* / H. Lauwerier . - Amsterdam: Aramith Uitgevers, 1987.
- [140] Loehle, C. Home range: A fractal approach / C. Loehle // *Landscape Ecology*. - 1990. – V. 5. – P. 39–52.
- [141] Loehle, C. Statistical properties of ecological and geologic fractals / C. Loehle, B.-L. Li // *Ecological Modelling*. – 1996. – V. 85. – P. 271-284.
- [142] Lovejoy, S. Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain / S. Lovejoy, D. Schertzer // *Water Resour. Res.*, V. 21. – 1985. – P. 1233–1250
- [143] Mandelbrot, B. B. Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence / B. B. Mandelbrot // *Statistical models and turbulence. Lecture notes in physics* 12. Eds. M. Rosenblatt and C. Van Atta. New York. – 1972. – P. 333-351.
- [144] Mandelbrot, B. B. *Fractals: Forme, Chance and Dimension* / B. B. Mandelbrot. - San-Francisco: Freeman, 1977. – 365 p.
- [145] Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*/ B. B. Mandelbrot. – N. Y.: Freeman, 1982. – 468 p.
- [146] Mandelbrot, B. B. Physical Properties of a New Fractal Model of Percolation Cluster / B. B. Mandelbrot, J.A. Given // *Phys. Rev. Lett.* - 1984. – P. 1853–1856.
- [147] Mandelbrot, B. B. Fractals / B. B. Mandelbrot // *Encyclopedia of Physical Science and Technology*. – N. Y.: Academic Press. – 1987. – V. 5. – P. 579-593.
- [148] Mandelbrot, B. B. *Multifractals and Lacunarity*/ B. B. Mandelbrot. – N. Y.: Springer-Verlag, 1998.
- [149] Mareev E. A., Iudin D. I., and O.A. Molchanov, Mosaic source of internal gravity waves associated with seismic activity, In: *Seismo Electromagnetics. Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere Coupling* Ed. by M. Hayakawa and O. A. Molchanov, pp.335-342. TERRAPUB, Tokyo, 2002.
- [150] Margalef, R. La teoria de la informacion en ecologia / R. Margalef // *Mem. Real. Acad. Cienc. Artes Barcelona*. – 1957. – V. 32. – P. 373-449.
- [151] Mozner, W.K. Computer simulations of the forest-fire model / W.K. Mozner, B. Drossel, F. Schwabl // *Physica A*. – 1992. – Vol. 190. – P. 205–217.

- [152] Niemeyer, L. Fractal Dimension of Dielectric Breakdown / L. Niemeyer, L. Pietronero, H. J. Wiesmann //Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52, No 12. – P. 1033-1036.
- [153] Nickolaenko, A.P. Hurst exponent derived for natural terrestrial radio noise in Schumann resonance band / A.P Nickolaenko, C. Price, D.I. Iudin // Geophys. Res. Lett. – 2000. - Vol. 27. – P. 3185-3188.
- [154] Odum, E. P. Ecology. A Bridge Between Science and Society / E. P. Odum. - Sunderland, Massachusetts (U.S.A.): Sinauer Ass., Inc., 1998.
- [155] Ostling, A. A community-level fractal property produces power-law species-area relationships / A. Ostling, J. Harte // Oikos. – 2003. – V. 103. – P. 218–224.
- [156] Ostling, A. Self-Similarity, the Power Law Form of the Species-Area Relationship, and a Probability Rule: A Reply to Maddux / A. Ostling, J. Harte, J. L. Green, A. P. Kinzig // Am. Nat. – 2004. – Vol. 163. – P. 627-633.
- [157] Ozima M., Podosek F. A. Noble gas geochemistry. Cambridge etc., Cambridge Univ. Press, 1983.
- [158] Petersen, D., M. Bailey, W.H. Beasley, and J Hallett. A brief review of the problem of lightning initiation and a hypothesis of initial lightning leader formation, Journal of Geophysical Research, vol. 113, D17205, doi:10.1029/2007JD009036, 2008.
- [159] Renyi, A. On measures of entropy and information / A. Renyi // Neyman J. (ed.) 4th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. Berkeley. – 1961. – P. 547-561.
- [160] Roberts, J.N. Crain consolidation and electrical conductivity in porous media / J.N. Roberts, L.M. Schwartz // Phys. Rev. B. 1985. V.31. N9. P.5990.
- [161] Sahimi, M. Applications of Percolation Theory / M. Sahimi – London: Taylor & Francis, 1992 – 347 p.
- [162] Sapoval, B. The fractal nature of a diffusion front and relation to percolation / B. Sapoval, M. Rosso, J.F. Gouyet // J. Physique Lett. (Paris), – 1985. L 149.
- [163] Scholz, C. H., L.R. Sykes and J. P. Aggarwal, EQ prediction: a physical basic, Science, 1981, 803–809, 1973.
- [164] Scholz, C. H., The mechanics of earthquakes and faulting. Cambridge Univ. Press, – 1997.
- [165] Schwartz L.M. Calculation of eletrical transport in continuum system by diffusin simulation / L.M. Schwartz, J.R. Banavar // Phys. A. – 1989. V.157. N9. – P.230.

- [166] Shannon, C. E. A mathematical theory of communication / C. E. Shannon // Bell System Technical Journal. – 1948. – V. 27. – P. 379–423.
- [167] Shannon, C. The mathematical theory of communication / C. Shannon, W. Weaver. - Urbara, 1949. – 117 p.
- [168] Sibson, R.H., 1990, Rupture nucleation on unfavorably oriented faults, Bull. Seismol. Soc. Am., 80, 1580–1604.
- [169] Stauffer, D. Introduction to Percolation Theory / D. Stauffer. – L.: Taylor & Francis, 1985. – 382 p.
- [170] Stauffer, D. Introduction to Percolation Theory / D. Stauffer, A. Aharony. – L.: Taylor & Francis, 1992. – 420 p.
- [171] Streit, J.E. Low frictional strength of upper crustal faults: a model / J.E. Streit // J. Geophys. Res. – 1997. – 102, 24, 619–24, 626.
- [172] Tokens, F. Detecting Strange Attractors in Turbulence / F. Tokens // Dynamical Systems and Turbulence. – Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer-Verlag. - 1981. – V. 898. – P. 366–381.
- [173] Turcotte D.L. Fractals and chaos in geology and geophysics / D.L. Turcotte // Cambridge university press, 1997. – p. 398.
- [174] Vespignani, A. How self-organized criticality works: A unified mean-field picture / A. Vespignani, S. Zapperi // Phys. Rev. E. - 1998. - Vol. 57, No 6. – P. 6345–6362.
- [175] Vicsek, T. Fractal Growth Phenomena / T. Vicsek. – L.: World Scientific, 1989.
- [176] Voss R.F., Random fractals: Characterization and measurement. – In: Scaling Phenomena in Disordered Systems (eds. R. Pynn & A. Skjeltorp), Plenum Press, New York, pp. 1 – 11, 1985.
- [177] Wakita H., Fujii N., Matsuno S., Nagao K., Takaoka N., "Helium spots" caused by a diapiric magma from the upper mantle. – Science, 200, 1978, 430–2.
- [178] Weibull W., J. Appl. Mech., 18, 293, 1951
- [179] Witten T. A., Sander L. M. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1400.
- [180] Yamashita, T., Mechanical effect of fluid migration on the complexity of seismicity, J. Geophys. Res., 102, 17, 797–17, 806, 1997.
- [181] Zelenyi, L.M. Matresha-model of multilayered current sheet / L.M. Zelenyi [et al.] // Geophys. Res. Lett. 2006. V. 33. P. 5105.

# Предметный указатель

## А

алгоритм Фосса, 86  
антиперсистентность, 83  
аффинное преобразование, 16, 20

## Б

белый шум, 85  
бифуркационный коэффициент, 126  
бронновский рельеф, 86  
бронновское движение, 19  
обобщенное, 83

## В

видовое богатство, 96  
видовое разнообразие, 97  
выравненность, 96

## Г

гиперболическая модель, 96  
гиперболическая ранговая параметризация, 96  
гиперрешетка, 111  
гипотеза Александера — Орбаха, 112  
гипотеза Маргалефа, 99

## Д

динамический скейлинг, 86  
дренажная сеть, 126  
дренажные системы, 125

## З

закон Фика, 111  
закон Ципфа, 95  
закон фильтрации, 103  
законы Хортона, 126

## И

игра в хаос, 16  
иерархия связей, 129  
индекс Шеннона, 34  
индекс сингулярности, 36

## К

канторовское множество, 11  
клеточная размерность, 26  
ковёр Серпинского, 16  
колебательные возбуждения, 112  
континуальная перколяция, 71  
континуальное протекание, 101  
коричневый шум, 83  
корреляционная длина, 53  
коэффициент упорядочения  
времени жизни, 127  
коэффициент упорядочения длин, 126  
краевой индекс, 14  
кривая Коха, 12  
критерий Гриффита  
гравитационный, 132  
классический, 131  
критическая температура, 49  
критический уровень, 118  
пористости, 132  
кроссовер, 53

## Л

логнормальное распределение, 100

## М

мертвый конец, 111

- минимальная фрактальная размерность, 55, 56
- мультиплекативный процесс, 29
- Н**
- нормированный размах, 83
- О**
- обобщенный броуновский пейзаж, 86
- остров Коха, 13
- П**
- перколяционная сеть, 47
- перколяционный кластер, 45, 46
- перколяционный переход, 46
- персистентность, 83
- показатель Липшица-Гельдера, 36
- показатель Маргалафеа, 99
- показатель Хёрста, 83
- показатель Хака, 125
- показатель критического замедления, 107
- поперечная корреляционная длина, 93
- порог перколяции, 115
- порог протекания, 45
- потенциальный рельеф, 87
- представленность рангов, 96
- преобразование Лежандра, 36
- пространственное броуновское движение, 86
- Р**
- равнопредставленность, 98
- размах случайной величины, 82
- размерность, 9
- Евклида, 84
- Минковского, 23
- Ренни, 32
- Хаусдорфа, 23, 37
- глобальная, 93
- информационная, 35
- конструктивных фракталов, 24
- корреляционная, 36
- локальная, 84
- обобщенная, 32
- спектральная, 114
- фрактонная, 114
- ранг, 95
- ранговые распределения, 95
- релаксационный генератор, 141
- решетка
- гиперкубическая, 113
- розовый шум, 83
- С**
- салфетка Серпинского, 15, 39
- самоаффинная гиперповерхность, 92
- самоизбегающие блуждания, 112
- самоорганизованная критичность, 115
- случайная гиперповерхность, 93
- сосуд Дьюара, 142
- спектр
- мультифрактальный, 36
- сингулярностей мультифрактала, 36
- спектр размерностей Ренни, 33
- спектр сингулярностей, 36
- стандартное отклонение, 82
- Т**
- теорема Такенса, 38
- трансляционная симметрия, 112
- У**
- уравнение Эйнштейна, 111
- уровень иерархии, 129
- Ф**
- фононы, 112
- формула Мандельброта, 96
- формула Марагалефа, 98
- формула Стирлинга, 110
- фрактал, 8
- конструктивный, 16

случайный, 18  
топологически линейный, 112  
фрактал Мандельброта-Гивена, 57  
фрактальная  
    граница, 13  
    динамика, 117  
    парадигма, 126  
    размерность, 10, 26, 27, 39, 55,  
        56, 126  
    ковра Серпинского, 16  
    канторовского множества, 12  
    кривой Коха, 12  
    салфетки Серпинского, 15  
    структура, 26, 38, 117, 119  
фрактальная динамика, 130  
фрактальные временные ряды, 82  
фрактальные деревья, 126  
фрактальные лабиринты, 108  
фрактальные сети, 113  
фрактоны, 115

**Х**

химическая размерность, 27, 56  
химическое расстояние, 26, 27, 56

**Ц**

ценотическая парадигма, 95

**Ч**

чёрный шум, 83

**Э**

энтропия фрактального множества, 34

**Иудин Дмитрий Игоревич  
Копосов Евгений Васильевич**

**ФРАКТАЛЫ: ОТ ПРОСТОГО К СЛОЖНОМУ**

Редактор *С.А. Елизарова*  
Компьютерная верстка *Д.И. Иудин*  
Обложка и шмидтитулы: дизайн-студия «Деловая тактика»  
Художник обложки *Д.И. Иудин*

Подписано в печать 08.08.2012. Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная. Печать  
цифровая. Уч. изд. л. 11,5. Усл. печ. л. 11,8. Тираж 500 экз. Заказ №216  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»  
603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65.  
Отпечатано в типографии ГК «Деловая тактика»  
603105, Н. Новгород, ул. Агрономическая, 134.

**ISBN 978-5-87941-829-3**



9 785879 418293



## **Иудин Дмитрий Игоревич:**

ведущий научный сотрудник Института прикладной физики РАН, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского радиофизического института, профессор кафедры ЮНЕСКО ННГАСУ, профессор кафедры экологии ННГУ им. Н.И. Лобачевского, доктор физико-математических наук, доктор биологических наук.



## **Копосов Евгений Васильевич:**

ректор Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета, заведующий кафедрой ЮНЕСКО ННГАСУ, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РААСН, почетный работник высшего профессионального образования РФ, почетный строитель РФ, лауреат премии Правительства Российской Федерации в области образования, почетный сенатор Университета прикладных наук г. Кёльна (Германия).

Предлагаемая книга является введением в мир скейлинга. Руководствуясь принципом от простого к сложному, авторы начинают изложение с основ фрактальной геометрии. В первой главе даны определения базовых понятий и рассмотрены простейшие примеры как регулярных, так и стохастических фракталов. Затем вторая глава знакомит читателя с фрактальными структурами, возникающими при геометрических фазовых переходах. Применения фрактальной геометрии и теории перколяции к описанию сложных систем составляют содержание третьей главы книги. В дополнении заинтересованный читатель сможет найти примеры программных кодов фрактальных и перколяционных моделей, реализованных в системе MATLAB на сетях клеточных автоматов. Книга адресована широкому кругу научных работников, аспирантов и студентов, желающих ознакомиться с основами фрактальной геометрии, теории перколяции и методами их применения при описании различных явлений окружающего мира.

ISBN 978-5-87941-829-3



9 785879 418293