# Поверхности

Быковских Дмитрий Александрович

18.11.2023

Сплайны

2023-11-19

Поверхности

Быновских Дмитрий Александрович

18.11.2023

### Введение

Традиционный способ построения/представления объемной модели с помощью ортогональной проекции.

Ортогональная проекция — сеть ортогональных кривых, используемых для изображения трехмерных объектов на плоскости.

Такую модель удобно исследовать с целью получения различных "физических" характеристик: размер, объем, площадь поверхности, угол кривизны и др.

#### Причины

- Создание объемных моделей с нуля в соответствии с концептуальными и дизайнерскими требованиями.
- Реконструкция трехмерной модели может потребоваться на основе данных, полученных из сканирования реальных объектов (медицина);



 Быковских Д.А.
 Сплайны
 18.11.2023
 2 / 12

Сплайны

2023-

-Введение

дение

помещью оргогомальной прояжими .
Оргогомальная прояжими — сеть ортогомальных кривьог, используемь для изображения трехмереных объектов на плосмости.
Такую морять уробно исслядовать с ценью получения различных к
"физическом" зарактеритик размер, объем, площарь поверхности,

- Создание объемных моделей с нуля в соответствии концептуальными и дизайнерскими тоебованиями.
- Реконструкция трехмерной модели может потребоваться на основе данных, полученных из сканерования реальных объекто (медицина);

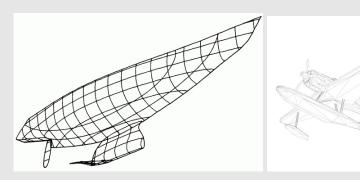


Рис. 1: Каркасные модели

## Отображение параметрических поверхностей

Поверхность удобнее отображать из параметрического двумерного пространства uv в трехмерное объективное пространство xyz. Параметры  $(u,v) \to (x,y,z)$ , где  $u,v \in [0,1]$ . Пример

$$\begin{cases} x(u, v) = 3u + v \\ y(u, v) = 2u + 3v + uv \\ z(u, v) = 0 \end{cases}$$

3/12

Сплайны

2023-

Отображение параметрических поверхностей

Повероность удобнее отображать на параметрического двумерного пространства uv в трехнерное объективное пространство xyz. Правметры  $(u,v) \to (x,y,z)$ , где  $u,v \in [0,1]$ .

Отображение параметрических поверхностей

 $\begin{cases}
x(u, v) = 3u + v \\
y(u, v) = 2u + 3v + uv \\
z(u, v) = 0
\end{cases}$ 

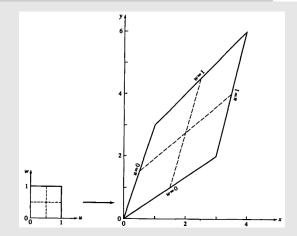


Рис. 2: Параметрическое пространство (слева) и объектное пространство (справа)

#### Билинейная поверхность

Билинейная поверхность конструируется из 4x угловых точек: P(0,0), P(1,0), P(0,1), P(1,1).

Любая точка поверхности S(u,v) определяется линейной интерполяцией между противоположными границами единичного квадрата.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix},$$

Сплайны

где  $u, v \in [0, 1]$ .

Быковских Д.А

4 / 12

18.11.2023

Сплайны Билинейная поверхность 2023-1

 $\begin{bmatrix} 1 - u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - v \\ v \end{bmatrix}$ 

$$S(u,v) = P(0,0)(1-u)(1-v) + P(0,1)(1-u)v + P(1,0)u(1-v) + P(1,1)uv$$

Примечание.

Легко проверить, подставив значения в параметры u, v.

-Билинейная поверхность

При этом координаты точек P можно задавать произвольным обра-30M.

### Билинейная поверхность

Пример

Задача.

Найти т. P(0.5,0.5) билинейной поверхности, заданной координатами:  $P(0,0)=[0\ 0\ 1],\ P(0,1)=[1\ 1\ 1],\ P(1,0)=[1\ 0\ 0],\ P(1,1)=[0\ 1\ 0].$  Решение:

$$S(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = (1-u)v + u(1-v) \\ y(u,v) = (1-u)v + uv \\ z(u,v) = (1-u)(1-v) + (1-u)v \end{cases}$$

Ответ:

$$P(0.5, 0.5) = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]$$

(ロ) (目) (目) (目) (目)

2023-1

 Сплайны
 Билинейная поверхность

 Аздача.
 Найч к. Р(0.5.0.5) белинейнай поверхносте, заданной чоокринетами.

 Рим. — Билинейная поверхность
 (ξ(x, y) = √(x, y) = (1 - 1) + (1 - 1

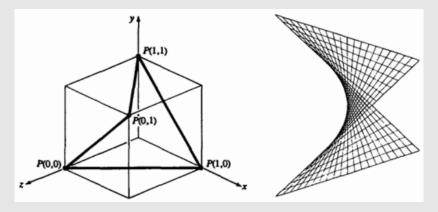


Рис. 3: Билинейная поверхность. Определяющие угловые точки (слева). поверхность (справа)

#### Линейчатые поверхности

Линейчатая поверхность — поверхность, образованная движением прямой линии.

Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими.

Каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие, называется направляющей кривой.

Линейчатая поверхность образуется при движении прямой линии вдоль направляющей с одной стороны степенью свободы.

• Линейчатые поверхности: плоскость, конусы, цилиндры.

Быковских Д.А

• Двулинейчатые поверхности: однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид.

Такие поверхности важны в промышленности, при построении техники.

Сплайны

4 D F 4 B F 4 B F B F 18.11.2023 6/12

Сплайны

2023-

–Линейчатые поверхности

нейчатая поверхность образуется при движении прямой лини

оль направляющей с одной стороны степенью свободь

Пицейчатые плаетирости

днополостный гиперболомд, гиперболический параболом

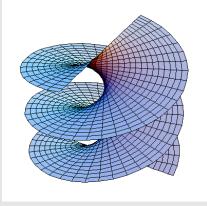




Рис. 4: Геликоид (слева) и однополостный гиперболоид (справа)

### Линейчатые поверхности

$$S(u,v)=egin{bmatrix}1-v\v\end{bmatrix}^Tegin{bmatrix}P(u,0)\P(u,1)\end{bmatrix}=P(u,0)(1-v)+P(u,1)v,$$
где  $P(u,0)=f(u),\,P(u,1)=g(u).$ 

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,v) \\ P(1,v) \end{bmatrix} = P(0,v)(1-u) + P(1,v)u,$$

где 
$$P(0, v) = f(v), P(1, v) = g(v).$$

Сплайны

2023-11-19

∟Линейчатые поверхности

Линейчатые поверхности

 $S(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u, 0) \\ P(u, 1) \end{bmatrix} = P(u, 0)(1 - v) + P(u, 1)v,$ rge P(u, 0) = f(u), P(u, 1) = g(u).

 $S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,v) \\ P(1,v) \end{bmatrix} = P(0,v)(1-u) + P(1,v)u,$ the P(0,v) = f(v), P(1,v) = g(v).

 Быковских Д.А.
 Сплайны
 18.11.2023
 7 / 12

## Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус Пример

 $S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$ 

где

$$P(u,0) = [\cos(u-\varphi) \sin(u-\varphi) - 1],$$

$$P(u,1) = [\cos(u+\varphi) \sin(u+\varphi) 1].$$

В основе лежат две окружности (направляющие).

В зависимости от дополнительного параметра  $\varphi$  получаются следующие типы поверхностей:

- при  $\varphi = 0$  получается цилиндр  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- при  $\varphi = \pi/2$  получается конус  $x^2 + y^2 = z^2$ ;
- при  $0 < \varphi < \pi/2$  получается однополостный гиперболоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ , где  $a = \cos \varphi$ ,  $c = \cot \varphi$ .

Сплайны

2023-1

-Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус

Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус

 $P(u,0) = [\cos(u - \varphi) \sin(u - \varphi) - 1]$ 

при  $\omega = 0$  получается цилиндр  $x^2 + y^2 = 1$ 

о при  $\varphi = \pi/2$  получается конус  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $4^{2} + 4^{2} - 4^{2} = 1$ , rae  $a = \cos \omega$ ,  $c = \cot \omega$ 

при 0 < c < т/2 получается однополостный гипеоболом.</li>

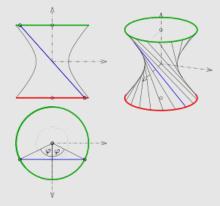


Рис. 5: Однополостный гиперболоид, где  $\varphi = \pi/3$ 

Быковских Д.А Сплайны 18.11.2023 8 / 12

### Бикубическая поверхность Кунса

В основе лежит кубическое уравнение, описывающие поведение граничной кривой

$$P(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3,$$

где  $t \in [0, 1]$ .

Каждая из четырех граничных кривых P(u,0), P(u,1), P(0,v), P(1,v)задается следующим образом:

$$P(t) = [T][N][G] = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P'_0 \\ P'_1 \end{bmatrix},$$

где  $t \in [0,1]$  (т.е. t- это u, v), а  $P_0, P_1, P_0', P_1'-$  координатные и касательные векторы.

Сплайны

2023-1

Бикубическая поверхность Кунса

Бикубическая поверхность Кунса

 $P(t) = B_0 + B_1t + B_2t^2 + B_3t^3$ ,

Тогда смешивающие функции имеют вид:

$$[F] = [T][N] = \begin{bmatrix} F_0(t) \\ F_1(t) \\ F_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Быковских Д.А.

Сплайны

18.11.2023

9/12

## Бикубическая поверхность Кунса

$$S(u, v) = [U][N][P][N]^{T}[W],$$

где 
$$u = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T$$
 ,  $v = \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}^T$  .

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} F_0(u) \\ F_1(u) \\ F_2(u) \\ F_3(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{bmatrix}$$

где  $u, v \in [0, 1]$ .

$$[P] = egin{bmatrix} {\sf угловые} & {\sf координатные} & {\sf векторы} & {\sf v-касательныe} & {\sf векторы} & {\sf векторы} & {\sf кручения} & {\sf sektopu} & {\sf sekto$$

Сплайны

2023-1

-Бикубическая поверхность Кунса



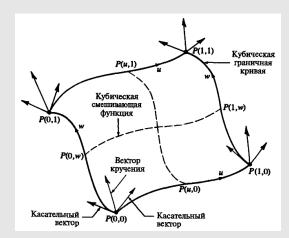


Рис. 6: Геометрия для куска бикубической поверхности Кунса

Быковских Д.А

Сплайны

18.11.2023

10 / 12

## Поверхность Безье

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} B_{n,i}(u) K_{m,j}(v),$$

где глобальные базисные функции (многочлены Бернштейна) имеют вид

$$B_{n,i}(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}$$
  
 $K_{m,j}(v) = C_m^j v^j (1-v)^{m-j}$ 

Сплайны — Поверхность Безье Ποσεριστός το, δείδος  $S(u,v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij} B_{ij}(u) K_{nj}(v),$  τρε εποδιστώνε δείδος και δείδος δείδος δείδος το συνάτη  $B_{nj}(u) = C_{nj}^{ij}(1-u)^{n-j}$   $K_{nj}(u) = C_{nj}^{ij}(1-u)^{n-j}$ 

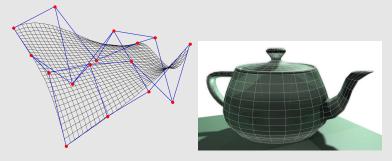


Рис. 7: Поверхность Безье: модель при n=m=3 (слева), чайник из Юты(справа)

2023-1

## В-сплайн поверхность

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} N_{i,k}(u) K_{j,l}(v),$$

где  $N_{i,k}(u)K_{j,l}(v)$  локальные базисные функции, основанные на рекуррентных формулах Кокса-де Бура.

Сплайны

2023-11-19

∟В-сплайн поверхность

 $S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} F_{i,j} N_{i,k}(u) K_{j,j}(v),$   $N_{i,k}(u) K_{j,j}(v)$  локальные базесные функция, основанные н уррвенных формулах Кокса-да Бура.

В-сплайн поверхность

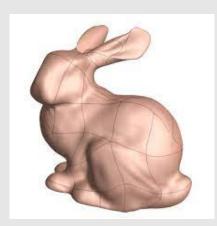


Рис. 8: В-сплайн поверхность

