# Поверхности

Быковских Дмитрий Александрович

02.11.2024



Сплайны

2024-11-01

Поверхности

Быковских Дмитрий Александрович

02.11.2024

# Введение

Традиционный способ построения/представления объемной модели с помощью ортогональной проекции.
Ортогональная проекция — сеть ортогональных кривых, используемых для изображения трехмерных объектов на плоскости.
Такую модель удобно исследовать с целью получения различных "физических" характеристик: размер, объем, площадь поверхности, угол кривизны и др.
Причины

- Создание объемных моделей с нуля в соответствии с концептуальными и дизайнерскими требованиями.
- Реконструкция трехмерной модели может потребоваться на основе данных, полученных из сканирования реальных объектов (медицина);





Введение

Традиционный способ построения/представления объемной модели с помощью ортогональной проекции.
Ортогональная проекция — сеть ортогональных кривых, используемых для изображения трехмерных объектов на плоскости.
Такую модель удобно исследовать с целью получения различных "физических" характеристик: размер, объем, площадь поверхности, угол кривизны и др.
Причины
- Создание объемных моделей с нуля в соответствии с концептуальными и дизайнерскими требованиями.
- Реконструкция трехмерной модели может потребоваться на основе данных, полученных из сканирования реальных объектов (медицина);

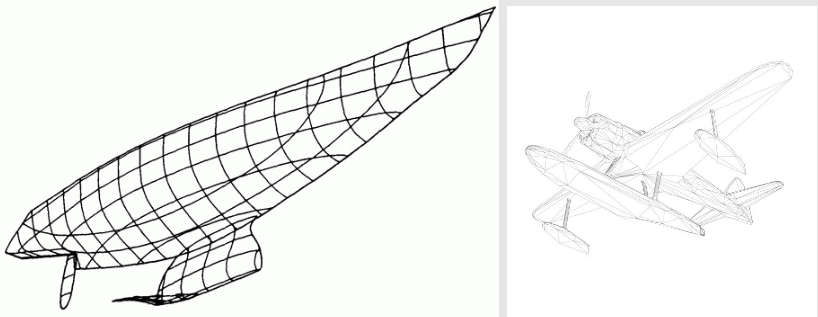

Рис. 1: Представление каркасных моделей: с помощью ортогональных проекций (слева); с помощью триангуляции (справа)

# Отображение параметрических поверхностей

Поверхность удобнее отображать из параметрического двумерного пространства $uv$ в трехмерное объективное пространство $xyz$.
Параметры $(u, v) \to (x, y, z)$, где $u, v \in [0, 1]$.
Задача.
Построить поверхность согласно его параметрическому представлению.

$$\begin{cases} x(u,v) = 3u + v \\ y(u,v) = 2u + 3v + uv \\ z(u,v) = 0 \end{cases}$$





Отображение параметрических поверхностей
Поверхность удобнее отображать из параметрического двумерного пространства $uv$ в трехмерное объективное пространство $xyz$.
Параметры $(u, v) \to (x, y, z)$, где $u, v \in [0, 1]$.
Задача.
Построить поверхность согласно его параметрическому представлению.
$$\begin{cases} x(u,v) = 3u + v \\ y(u,v) = 2u + 3v + uv \\ z(u,v) = 0 \end{cases}$$

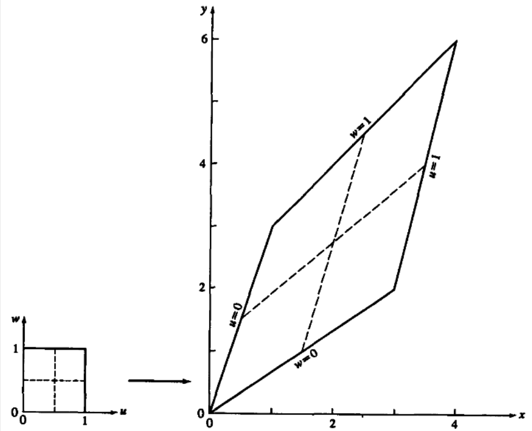


Рис. 2: Иллюстрация к примеру: параметрическое пространство (слева) и объектное пространство (справа)

## Билинейная поверхность

Билинейная поверхность конструируется из 4х угловых точек: $P(0,0)$, $P(1,0)$, $P(0,1)$, $P(1,1)$.
Любая точка поверхности $S(u,v)$ определяется линейной интерполяцией между противоположными границами единичного квадрата.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix},$$

где $u, v \in [0,1]$.





Билинейная поверхность

Билинейная поверхность конструируется из 4х угловых точек: $P(0,0)$, $P(1,0)$, $P(0,1)$, $P(1,1)$.
Любая точка поверхности $S(u,v)$ определяется линейной интерполяцией между противоположными границами единичного квадрата.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix},$$

где $u, v \in [0,1]$.

$$S(u,v) = P(0,0)(1-u)(1-v) + P(0,1)(1-u)v + P(1,0)u(1-v) + P(1,1)uv$$

Примечание.
Легко проверить, подставив значения в параметры $u, v$.
При этом координаты точек $P$ можно задавать произвольным образом.

# Билинейная поверхность
## Пример

Задача.
Найти т. $P(0.5, 0.5)$ билинейной поверхности, заданной координатами:
$P(0,0) = [0\ 0\ 1]$, $P(0,1) = [1\ 1\ 1]$, $P(1,0) = [1\ 0\ 0]$, $P(1,1) = [0\ 1\ 0]$.
Решение:

$$S(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = (1-u)v + u(1-v) \\ y(u,v) = (1-u)v + uv \\ z(u,v) = (1-u)(1-v) + (1-u)v \end{cases}$$

Ответ:

$$P(0.5, 0.5) = [0.5\ 0.5\ 0.5]$$





Билинейная поверхность
Пример
Задача.
Найти т. $P(0.5, 0.5)$ билинейной поверхности, заданной координатами:
$P(0,0) = [0\ 0\ 1]$, $P(0,1) = [1\ 1\ 1]$, $P(1,0) = [1\ 0\ 0]$, $P(1,1) = [0\ 1\ 0]$.
Решение:
$$S(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = (1-u)v + u(1-v) \\ y(u,v) = (1-u)v + uv \\ z(u,v) = (1-u)(1-v) + (1-u)v \end{cases}$$
Ответ:
$$P(0.5, 0.5) = [0.5\ 0.5\ 0.5]$$

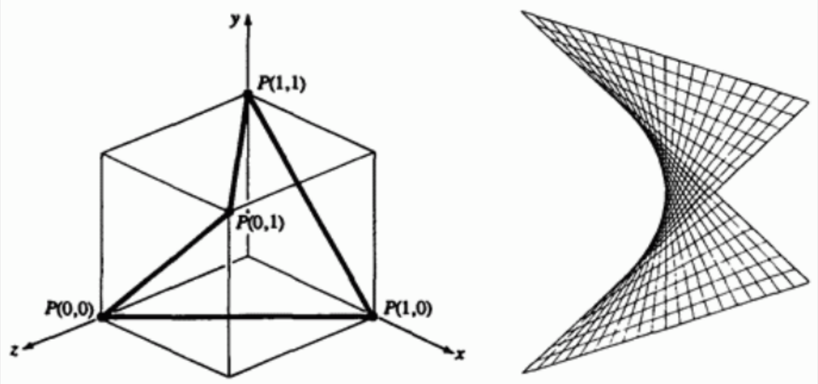


Рис. 3: Билинейная поверхность: определяющие угловые точки (слева); поверхность (справа)

# Линейчатые поверхности

Линейчатая поверхность — поверхность, образованная движением прямой линии.
Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими.
Каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие, называется направляющей кривой.
Линейчатая поверхность образуется при движении прямой линии вдоль направляющей с одной стороны степенью свободы.

- Линейчатые поверхности:
  плоскость, конусы, цилиндры.
- Двулинейчатые поверхности:
  однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид.

Такие поверхности важны в промышленности, при построении техники.





Линейчатые поверхности
Линейчатая поверхность — поверхность, образованная движением прямой линии.
Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими.
Каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие, называется направляющей кривой.
Линейчатая поверхность образуется при движении прямой линии вдоль направляющей с одной стороны степенью свободы.
Линейчатые поверхности: плоскость, конусы, цилиндры.
Двулинейчатые поверхности: однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид.
Такие поверхности важны в промышленности, при построении техники.

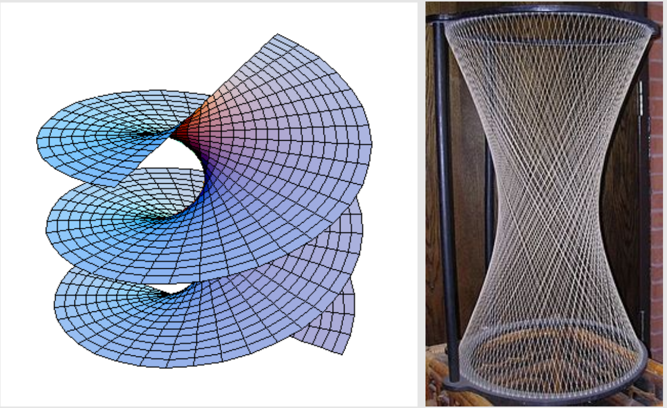

Рис. 4: Линейчатые поверхности: геликоид (слева); однополостный гиперболоид (справа)

# Линейчатые поверхности

Один способ представления линейчатой поверхности.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$$

где $P(u,0) = f(u)$, $P(u,1) = g(u)$.
Другой способ представления линейчатой поверхности.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,v) \\ P(1,v) \end{bmatrix} = P(0,v)(1-u) + P(1,v)u,$$

где $P(0,v) = f(v)$, $P(1,v) = g(v)$.





Линейчатые поверхности

Один способ представления линейчатой поверхности.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$$

где $P(u,0) = f(u)$, $P(u,1) = g(u)$.
Другой способ представления линейчатой поверхности.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,v) \\ P(1,v) \end{bmatrix} = P(0,v)(1-u) + P(1,v)u,$$

где $P(0,v) = f(v)$, $P(1,v) = g(v)$.

# Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус
## Пример

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$$

где
$P(u,0) = [\cos(u-\varphi)\ \ \sin(u-\varphi)\ \ -1]$,
$P(u,1) = [\cos(u+\varphi)\ \ \sin(u+\varphi)\ \ 1]$.
В основе лежат две окружности (направляющие).
В зависимости от дополнительного параметра $\varphi$ получаются следующие типы поверхностей:

- при $\varphi = 0$ получается цилиндр $x^2 + y^2 = 1$;
- при $\varphi = \pi/2$ получается конус $x^2 + y^2 = z^2$;
- при $0 < \varphi < \pi/2$ получается однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, где $a = \cos\varphi$ , $c = \cot\varphi$.





Однополостный гиперболоид, цилиндр, конус
Пример
$S(u,v) = \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(u,0) \\ P(u,1) \end{bmatrix} = P(u,0)(1-v) + P(u,1)v,$
где
$P(u,0) = [\cos(u-\varphi)\ \ \sin(u-\varphi)\ \ -1]$,
$P(u,1) = [\cos(u+\varphi)\ \ \sin(u+\varphi)\ \ 1]$.
В основе лежат две окружности (направляющие).
В зависимости от дополнительного параметра $\varphi$ получаются следующие типы поверхностей:
- при $\varphi = 0$ получается цилиндр $x^2 + y^2 = 1$;
- при $\varphi = \pi/2$ получается конус $x^2 + y^2 = z^2$;
- при $0 < \varphi < \pi/2$ получается однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, где $a = \cos\varphi$ , $c = \cot\varphi$.

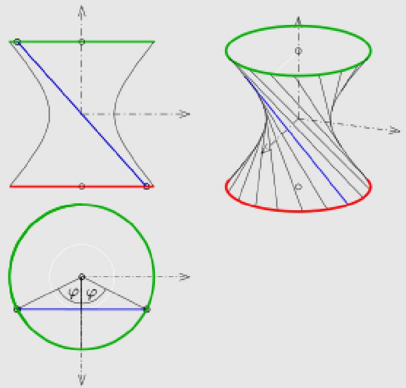


Рис. 5: Однополостный гиперболоид, где $\varphi = \pi/3$

# Бикубическая поверхность Кунса

В основе лежит кубическое уравнение, описывающие поведение граничной кривой

$$P(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3,$$

где $t \in [0, 1]$.
Каждая из четырех граничных кривых $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, v)$, $P(1, v)$ задается следующим образом:

$$P(t) = [T][N][G] = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P'_0 \\ P'_1 \end{bmatrix},$$

где $t \in [0, 1]$ (т.е. $t$ — это $u$, $v$), а $P_0$, $P_1$, $P'_0$, $P'_1$ — координатные и касательные векторы.





Бикубическая поверхность Кунса
В основе лежит кубическое уравнение, описывающие поведение граничной кривой
$$P(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3,$$
где $t \in [0, 1]$.
Каждая из четырех граничных кривых $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, v)$, $P(1, v)$ задается следующим образом:
$$P(t) = [T][N][G] = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P'_0 \\ P'_1 \end{bmatrix},$$
где $t \in [0, 1]$ (т.е. $t$ — это $u$, $v$), а $P_0$, $P_1$, $P'_0$, $P'_1$ — координатные и касательные векторы.

Тогда смешивающие функции имеют вид:

$$[F] = [T][N] = \begin{bmatrix} F_0(t) \\ F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Бикубическая поверхность Кунса

$$S(u,v) = [U][N][P][N]^T[V],$$

где $u = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T$, $v = \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}^T$.

$$S(u,v) = \begin{bmatrix} F_0(u) \\ F_1(u) \\ F_2(u) \\ F_3(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{bmatrix},$$

где $u, v \in [0,1]$.

$$[P] = \begin{bmatrix} \text{угловые координатные векторы} & v\text{-касательные векторы} \\ u\text{-касательные векторы} & \text{векторы кручения} \end{bmatrix}$$





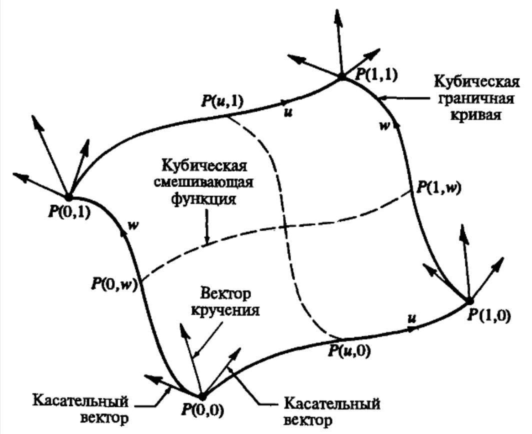


Рис. 6: Геометрия для куска бикубической поверхности Кунса

# Поверхность Безье

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j} B_{n,i}(u) K_{m,j}(v),$$

где глобальные базисные функции (многочлены Бернштейна) имеют вид

$$B_{n,i}(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}$$

$$K_{m,j}(v) = C_m^j v^j (1-v)^{m-j}$$





Поверхность Безье

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j} B_{n,i}(u) K_{m,j}(v),$$

где глобальные базисные функции (многочлены Бернштейна) имеют вид

$$B_{n,i}(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}$$

$$K_{m,j}(v) = C_m^j v^j (1-v)^{m-j}$$

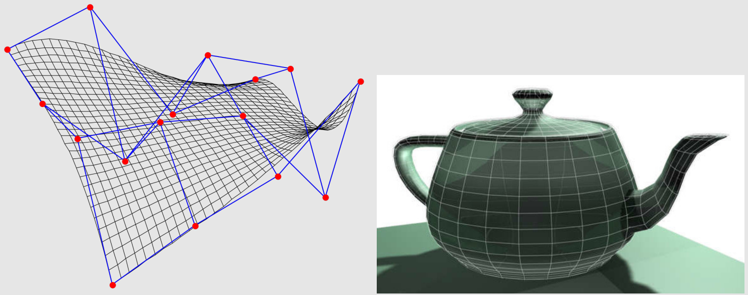

Рис. 7: Поверхность Безье: модель при $n = m = 3$ (слева); чайник из Юты (справа)

# B-сплайн поверхность

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} N_{i,k}(u) K_{j,l}(v),$$

где $N_{i,k}(u)K_{j,l}(v)$ локальные базисные функции, основанные на рекуррентных формулах Кокса-де Бура.





B-сплайн поверхность

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} N_{i,k}(u) K_{j,l}(v),$$

где $N_{i,k}(u)K_{j,l}(v)$ локальные базисные функции, основанные на рекуррентных формулах Кокса-де Бура.

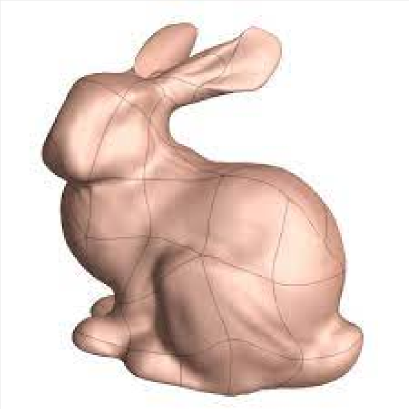

Рис. 8: B-сплайн поверхность