Вводная лекция

Группа — непустое мн-во G, с операцией

$G \times G \to G$, т.с. $x, y \in G \mapsto xy \in G$ при

чем выполняются 3 св-ва:

1) $(xy)z = x(yz)$ ассоциативность

для $\forall x, y, z \in Z$

2) $\exists e \in G : ex = xe = x$ для $\forall x \in G$

существует нейтральный элемент

3) $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

существует обратный элемент

Примечание Будет очень много разных групп

- симметрические группы произвольной размерности
- ортогональные
- псевдоортогональные
- группы Лившица
- унитарные группы
- симплектические группы

) мультипликативные группы

Примеры $\{\mathbb{R}^{>0}, \cdot\}$

$\{\mathbb{Z}, +\}$

Группа отн. операции $+$

$x, y \in G \mapsto x+y \in G$:

1) $(x+y)+z = x+(y+z)$
2) $\exists\, 0 \in G : 0 + x = x$ (нулевой эл-т)
3) $\forall x \in G \;\exists\, (-x) \in G : x + (-x) = 0$ (противоположный эл-т)

Абелева группа – группа с доп. св-вом

4) $x+y = y+x \quad \forall x, y \in G$ (коммутативность)

Кольцо – абелева группа $R\,(+)$, с операцией умножения $R \times R \to R$

$x, y \in R \mapsto x \cdot y \in R$

5) $(x+y)z = xz + yz$

$x(y+z) = xy + xz \quad , \forall x, y, z \in R$

Дополнительные св-ва (кольца):

·) унитальное :

$\exists\, e \in R$ т.ч. $ex = xe = x \quad \forall x \in R$

·) ассоциативное: $(xy)z = x(yz) \;\forall x, y, z \in R$

·) коммутативное : $xy = yx \quad \forall x, y \in R$

.) коммутативное: $xy = yx \quad \forall x, y \in R$

.) тело (кольцо с делением) – унитальное кольцо; $e \neq 0$;
$\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x, \ \forall x \in R$

.) поле – ассоциативное коммутативное кольцо с делением

(Примеры полей: $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ - p-адические)

<u>Пример</u>: тело кватернионов $\mathbb{H}$
Гамильтон 1843 г

$q \in \mathbb{H} \quad q = a + ib + jc + kd$, где
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$,
i, j, k – мнимые единицы

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$
$ij = k = -ji$ антикоммутируют

$\mathbb{H}$ – 4х мерное пр-во, базис и 3 мнимые един.

$\mathbb{R} < \mathbb{C} < \mathbb{H}$ вначале кватернионы Гамильтон изобрел, а потом уже векторы

Если $q \neq 0$, то $\exists q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{q \cdot \bar{q}}$, где

$\bar{q} = a - ib - jc - kd$ – комплексно-сопряженное,
$|q| = \sqrt{q\bar{q}}$

Таким образом, $\forall q$ обратим

Таким образом, $\forall$ q обратим, т.е. тело
a – время, b, c, d – время.

Линейное пр-во (векторное пр-во) V
над полем $\mathbb{F}$ – абелева группа по сложению,
$\mathbb{F} \times V \to V$:

1) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;
2) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
3) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$; где
4) $1 \cdot x = x$;

скаляры
$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ (=\mathbb{R}, \mathbb{C})$
$\forall\ x, y \in V$
векторы

Что такое Алгебра A над полем F –
лин. пр-во V, на котором задана
операция умножения $A \times A \to A$,
$x, y \in A \mapsto xy \in A$:
$(\alpha x + \beta y) z = \alpha(xz) + \beta(yz)$
дистрибутивность и согласованность
линейной структуры.

Доп. условие:
·) унитальная $\exists\, e \in A : ex = xe = x\ \forall x \in A$
·) ассоциативной $(xy)z = x(yz)\ \forall x, y, z \in A$
·) коммутативной $xy = yx$
·) алгебра Ли:
1) $xy + yx = 0$

$$xy + yx = 0$$

2) $$x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$$

(Тождество Якоби)

Операция умн. обознач. $[x, y]$ в ал. Ли