Пространственные кривые

Классификация

I. Построение кривых и/з заданные точки
1) Естественный сплайн;
2) Эрмитов сплайн;

II Построение кривых, заданных направлением изгиба
1) Кривые Безье;
2) B-сплайн.

Интерполяция vs аппроксимация vs экстраполяция

Способы задания

Способы представления кривых
1) явное;
2) неявное;
3) параметрическое;

Естественный (кубический) сплайн

сильно большая степень приводит к тому

сильно большая степень приводит к тому, что можно получить волну.

$$p(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$$

$$P(u) = \begin{cases} x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x \\ \vdots \end{cases}$$

где $u \in [0, 1]$

Тогда можно переписать в матричном виде

$$x(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix} \qquad y(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \\ d_y \end{bmatrix}$$

Чтобы построить, необходимо реш. с-му

$$x(u) \begin{cases} p_0 = p(0) = a_x 0^3 + b_x 0^2 + c_x 0 + d_x \\ p_1 = p(1/3) = a_x (1/3)^3 + b_x (1/3)^2 + c_x \, 1/3 + d_x \\ p_2 = p(2/3) = a_x (2/3)^3 + b_x (2/3)^2 + c_x \, 1/3 + d_x \\ p_3 = p(1) = a_x 1^3 + b_x 1^2 + c_x 1 + d_x \end{cases}$$

Получаем с-ма $P_x = A C_x$, где

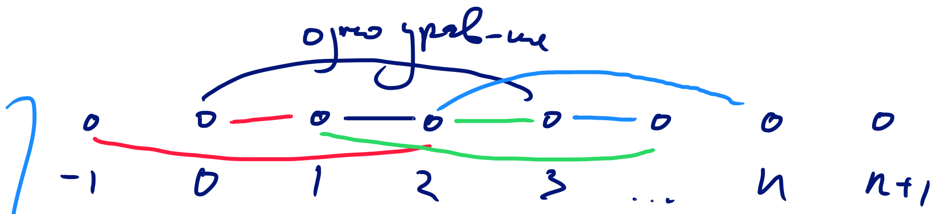
$$P_x = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \cdots \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ (1/3)^3 & (1/3)^2 & 1/3 & 1 \\ (2/3)^3 & (2/3)^2 & 2/3 & \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \quad C_x = \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c \\ \cdots \end{bmatrix}$$

$$P_x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} (2/3)^3 & (2/3)^2 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C_x = \begin{bmatrix} b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$$

$$P_x = A C_x \Rightarrow A^{-1} P_x = A^{-1} A C_x = E C_x = C_x$$

$$A^{-1} P_x = C_x$$

Изменение одной точки влияет



$n+1 \to$ точек

$4n \to$ полиномов

если + 2 точки.

$n+3 \to$ точек

$4(n-1)$ – уравнение

Эрмитова интерполяция (Charles Hermite)

Легко строить

$$\begin{cases} P(0) = P_k \\ P(1) = P_{k+1} \\ P'(0) = D_{p_k} \\ P'(1) = D_{p_k} \end{cases} \qquad \begin{aligned} P(u) &= u^3 a + u^2 b + uc + d \\ P'(u) &= 3u^2 a + 2ub + c \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ D_{p_k} \\ D_{p_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ D_{p_k} \\ D_{p_{k+1}} \end{bmatrix}$$

Построить кривую Безье

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n=3} P_k \, B_k(u) \quad \text{, где } u \in [0,1]$$

$$B_k = C_n^k \, u^k (1-u)^{n-k}$$

$n=1$

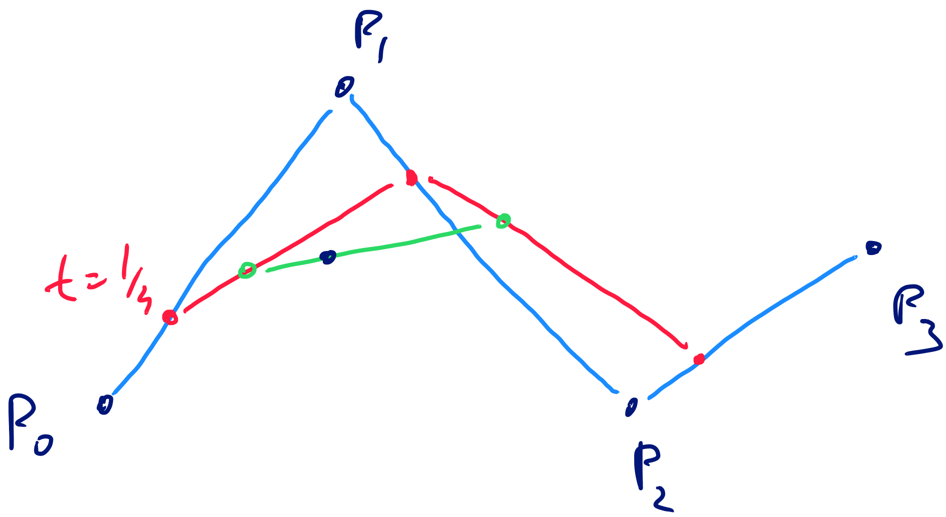
$$C_1^0 u^0 (1-u)^1 + C_1^1 u^1 (1-u)^0$$

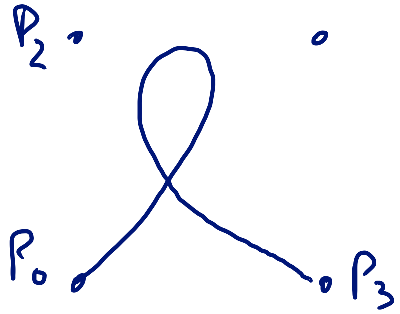
$n=2$

$$C_2^0 u^0 (1-u)^2 + C_1^1 u^1 (1-u)^1 + C_2^2 u^2 (1-u)^0$$

$n=3$

$$p(u) = p_0 (1-u)^3 + 3 p_1 u (1-u)^2 + \\ + 3 p_2 u^2 (1-u) + p_3 u^3$$





B-сплайн

$$P_n(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t), \quad t_{min} \le t \le t_{max}$$

Рекуррентные ф-лы Кокса-де Бура
Гордана-Ризенфельда

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \cdot N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

Пример

Дано

	P_0	P_1	P_2
x	1	2	4
y	1	3	3

$$T = [\overset{t_0}{0}, \overset{t_1}{0}, \overset{t_2}{1}, \overset{t_3}{2}, \overset{t_4}{3}, \overset{t_5}{3}]$$

$n+1 = 3$ - число точек

$m = 6$ - число узловых эл-тов

$m-(n+2) = 2$ - степень полинома

Схема

$$\begin{array}{lccccc} N_{i,0} & N_{0,0} & N_{1,0} & N_{2,0} & N_{3,0} & N_{4,0} \\ N_{i,1} & N_{0,1} & N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & \\ N_{i,2} & N_{0,2} & N_{1,2} & N_{2,2} & & \end{array}$$

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

$$0 \quad \overset{t\in[0,1)}{1} \quad \overset{t\in[1,2)}{1} \quad \overset{t\in[2,3)}{1} \quad 0$$

$$N_{0,1} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \cdot N_{0,0}(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} N_{1,0}(t) =$$

$$= \frac{t}{0} \cdot 0 + \frac{1-t}{1} \cdot 1 = \begin{cases} 0, & t \in [0,0) \\ 1-t, & t \in [0,1) \end{cases}$$

$$\frac{\quad}{0}\cdot 0 + \quad 1 \qquad \{\ 1-t,\ t\in[0,1)$$

$$N_{0,2} = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,0}(t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{t-0}{1-0}\cdot 1, & t\in[0,1) \\ \frac{2-t}{2-1}\cdot 1, & t\in[1,2) \end{cases} = \begin{cases} t, & t\in[0,1) \\ 2-t, & t\in[1,2) \end{cases}$$