Сплайновые представления

Быковских Дмитрий Александрович

11.11.2023

Сплайны

2023-11-13

Сплайновые представления

Быковских Дмитрий Александрович

11.11.2023

Введение

Мотивация построения собственного вида функций

Входные данные

- ограниченное количество;
- полностью известны.

Особенность входных данных

- Табличные данные;
- Сложная функция;

Примечание. Неточность результатов эксперимента.
Приближенные решения

1. Аппроксимация
2. Интерполяция
3. Экстраполяция
4. Ретрополяция

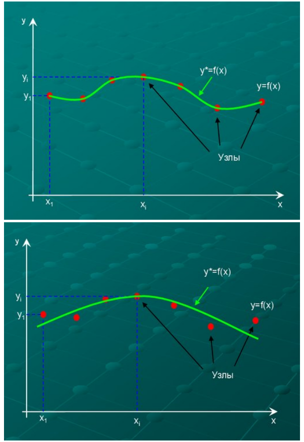


Рис. 1: Аппроксимация и интерполяция

Основное различие между этими методами заключается в том, где и как они применяются относительно существующего набора данных:

1. интерполяция работает внутри диапазона,
2. аппроксимация стремится к общему соответствию,
3. экстраполяция и ретрополяция идут за пределы известного диапазона.

Сплайн

Слово сплайн (англ. "spline") использовалось для обозначения гибких, изогнутых листов дерева или металла, которые могли использоваться в различных инженерных и строительных приложениях.

Сплайн

Слово сплайн (англ. "spline") использовалось для обозначения гибких, изогнутых листов дерева или металла, которые могли использоваться в различных инженерных и строительных приложениях.

Слово "сплайн"произошло от английского термина "spline". Этот термин, вероятно, образован от слова "сплен"(spline) в шотландском диалекте, которое означает "планка"или "листок дерева". В начале 20 века в англоязычной литературе оно использовалось для обозначения гибких, изогнутых листов дерева или металла, которые могли использоваться в различных инженерных и строительных приложениях.
Слово "сплайн" было впервые введено в математике и компьютерной графике для обозначения методов интерполяции и аппроксимации кривых, которые используют гладкие сегменты, напоминающие изогнутые листы. Эти методы стали называться "сплайнами" из-за аналогии с гибкими листами или планками, которые могли быть использованы для создания гладких кривых.

Общее описание

Кусочно-гладкая полиномиальная система — параметрическая система уравнений.
Контрольный граф (характеристический многоугольник) — ломанная линия, соединяющая последовательности точек сплайновой кривой.
Параметры сплайна

- степень полинома;
- положение узловых (или опорных) точек

Методы определения сплайна:

- матрица, характеризующая сплайн;
- набор базисных функций (стыковочных);
- набор граничных условий.

Общее описание

Кусочно-гладкая полиномиальная система — параметрическая система уравнений.
Контрольный граф (характеристический многоугольник) — ломанная линия, соединяющая последовательности точек сплайновой кривой.
Параметры сплайна

- степень полинома;
- положение узловых (или опорных) точек

Методы определения сплайна:

- матрица, характеризующая сплайн;
- набор базисных функций (стыковочных);
- набор граничных условий.

Способы задания и представления

Явное

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

Значения новых переменных y, z определяется x

Неявное

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Одну из переменных x, y, z не всегда удается выразить.

Параметрическое

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

вводится новая переменная t.

Матрица, характеризующая сплайн

$$P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d = UC$$

$$\begin{cases} P_x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x \\ P_y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y \\ P_z(u) = a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z \end{cases},$$

где $u \in [0, 1]$.

Матрица, характеризующая сплайн

$$P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d = UC$$

$$\begin{cases} P_x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x \\ P_y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y \\ P_z(u) = a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z \end{cases},$$

где $u \in [0, 1]$.

$$x(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix} \quad y(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \\ d_y \end{bmatrix} \quad z(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_z \\ b_z \\ c_z \\ d_z \end{bmatrix}$$

$$P(u) = UC$$

Граничные условия

Параметрические условия непрерывности

- 0-го порядка C^0
  одинаковые координаты в граничных точках
  $P_j(1) = P_{j+1}(0)$
- 1-го порядка C^1
  первые производные пропорциональны в т. пересечения
  $P_j^{(1)}(1) = P_{j+1}^{(1)}(0)$
- 2-го порядка C^2
  вторые производные пропорциональны в т. пересечения
  $P_j^{(2)}(1) = P_{j+1}^{(2)}(0)$

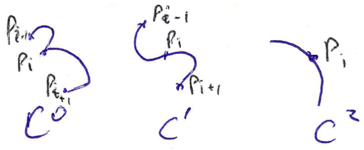
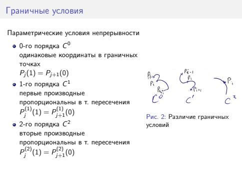


Рис. 2: Различие граничных условий



Условия геометрической непрерывности

- 0-го порядка G^0
  одинаковые координаты в граничных точках
  $P_j(1) = P_{j+1}(0)$
- 1-го порядка G^1
  первые производные пропорциональны в т. пересечения
  $\mathrm{sign}\left(P_j^{(1)}(1)\right) = \mathrm{sign}\left(P_{j+1}^{(1)}(0)\right)$
- 2-го порядка G^2
  второе производные пропорциональны в т. пересечения
  $\mathrm{sign}\left(P_j^{(2)}(1)\right) = \mathrm{sign}\left(P_{j+1}^{(2)}(0)\right)$

Сплайн

Пространственные кривые

Классификация

1. Построение кривых, проходящих через заданные точки
   1. Естественный сплайн;
   2. Эрмитов сплайн;
2. Построение кривых, заданных направлением изгиба
   1. кривая Безье;
   2. B-сплайн.

Сплайн
Пространственные кривые
Классификация
1. Построение кривых, проходящих через заданные точки
1. Естественный сплайн;
2. Эрмитов сплайн;
2. Построение кривых, заданных направлением изгиба
1. кривая Безье;
2. B-сплайн.

Высокая степень полинома приводит к тому, что можно получить сильные колебания (осцилляции)

Естественный сплайн

Рассмотрим подробнее, как находить коэффициенты вектора C_x.

$$P_x(u) = UC_x$$

$$P_x(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$$

Построим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} P_{x,i} = P_x(0) = a_x 0^3 + b_x 0^2 + c_x 0 + d_x \\ P_{x,i+1} = P_x(1/3) = a_x (1/3)^3 + b_x (1/3)^2 + c_x 1/3 + d_x \\ P_{x,i+2} = P_x(2/3) = a_x (2/3)^3 + b_x (2/3)^2 + c_x 2/3 + d_x \\ P_{x,i+3} = P_x(1) = a_x 1^3 + b_x 1^2 + c_x 1 + d_x \end{cases}$$

$$P_x = AC_x$$

Естественный сплайн
Рассмотрим подробнее, как находить коэффициенты вектора C_x.
$P_x(u) = UC_x$
$P_x(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$
Построим следующую систему уравнений
$\begin{cases} P_{x,i} = P_x(0) = a_x 0^3 + b_x 0^2 + c_x 0 + d_x \\ P_{x,i+1} = P_x(1/3) = a_x (1/3)^3 + b_x (1/3)^2 + c_x 1/3 + d_x \\ P_{x,i+2} = P_x(2/3) = a_x (2/3)^3 + b_x (2/3)^2 + c_x 2/3 + d_x \\ P_{x,i+3} = P_x(1) = a_x 1^3 + b_x 1^2 + c_x 1 + d_x \end{cases}$
$P_x = AC_x$

$$\begin{bmatrix} P_{x,i} \\ P_{x,i+1} \\ P_{x,i+2} \\ P_{x,i+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ (1/3)^3 & (1/3)^2 & 1/3 & 1 \\ (2/3)^3 & (2/3)^2 & 2/3 & 1 \\ 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$$

$$P_x = AC_x$$

$$A^{-1}P_x = A^{-1}AC_x$$

$$A^{-1}P_x = EC_x$$

$$C_x = A^{-1}P_x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ (1/3)^3 & (1/3)^2 & 1/3 & 1 \\ (2/3)^3 & (2/3)^2 & 2/3 & 1 \\ 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{x,i} \\ P_{x,i+1} \\ P_{x,i+2} \\ P_{x,i+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix}$$

Эрмитова интерполяция

Charles Hermite

Эрмитов сплайн — вид кусочно-полиномиальной кривой, которая задается точками данных и значениями производных в этих точках. Рассмотрим подробнее, как находить коэффициенты вектора C_y.

$$P_y(u) = u^3 a_y + u^2 b_y + u c_y + d_y$$

$$(P_y)'_u(u) = P'_y(u) = 3u^2 a_y + 2u b_y + c_y + 0$$

$$\begin{cases} P_y(0) = P_{y,k} = 0^3 a_y + 0^2 b_y + 0 c_y + d_y \\ P_y(1) = P_{y,k+1} = 1^3 a_y + 1^2 b_y + 1 c_y + d_y \\ P'_y(0) = P'_{y,k} = 3 \cdot 0^2 a_y + 2 \cdot 0 b_y + c_y \\ P'_y(1) = P'_{y,k+1} = 3 \cdot 1^2 a_y + 2 \cdot 1 b_y + c_y \end{cases}$$

Эрмитова интерполяция
Charles Hermite

Эрмитов сплайн — вид кусочно-полиномиальной кривой, которая задается точками данных и значениями производных в этих точках. Рассмотрим подробнее, как находить коэффициенты вектора C_y.

$$P_y(u) = u^3 a_y + u^2 b_y + u c_y + d_y$$

$$(P_y)'_u(u) = P'_y(u) = 3u^2 a_y + 2u b_y + c_y + 0$$

$$\begin{cases} P_y(0) = P_{y,k} = 0^3 a_y + 0^2 b_y + 0 c_y + d_y \\ P_y(1) = P_{y,k+1} = 1^3 a_y + 1^2 b_y + 1 c_y + d_y \\ P'_y(0) = P'_{y,k} = 3 \cdot 0^2 a_y + 2 \cdot 0 b_y + c_y \\ P'_y(1) = P'_{y,k+1} = 3 \cdot 1^2 a_y + 2 \cdot 1 b_y + c_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} P_{y,k} \\ P_{y,k+1} \\ P'_{y,k} \\ P'_{y,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \\ d_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{y,k} \\ P_{y,k+1} \\ P'_{y,k} \\ P'_{y,k+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{y,k} \\ P_{y,k+1} \\ P'_{y,k} \\ P'_{y,k+1} \end{bmatrix}$$

Сплайновые кривые Безье

Pierre Bezier

Кривая Безье — это математическое представление кривой, определенной с использованием параметрических уравнений.

$$P_n(u) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_k(u),$$

где
$B_k(u)$ — глобальный базис;
P_k — узловые точки;
n — степень полинома;
$u \in [0, 1]$.

$$B_k(u) = C_n^k u^k (1-u)^{n-k}$$

Примечание.
Формула основана на биноме Ньютона

Сплайновые кривые Безье
Pierre Bezier
Кривая Безье — это математическое представление кривой, определенной с использованием параметрических уравнений.
$$P_n(u) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_k(u),$$
где
$B_k(u)$ — глобальный базис;
P_k — узловые точки;
n — степень полинома;
$u \in [0, 1]$.
$$B_k(u) = C_n^k u^k (1-u)^{n-k}$$
Примечание.
Формула основана на биноме Ньютона

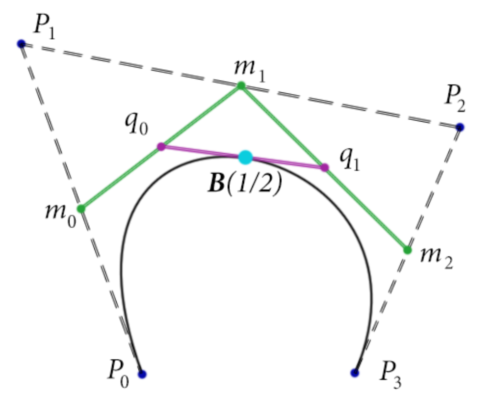


Рис. 3: Схема построения кривой Безье

Сплайновые кривые Безье

Пример

$$n = 1$$

$$P(u) = P_0 C_1^0 u^0 (1-u)^1 + P_1 C_1^1 u^1 (1-u)^0$$

$$P(u) = P_0(1-u) + P_1 u = P_0 + (P_1 - P_0)u$$

$$n = 2$$

$$P(u) = P_0 C_2^0 u^0 (1-u)^2 + P_1 C_2^1 u^1 (1-u)^1 + P_2 C_2^2 u^2 (1-u)^0$$

$$P(u) = P_0(1-u)^2 + 2P_1 u(1-u) + P_2 u^2$$

$$n = 3$$

$$P(u) = P_0(1-u)^3 + P_1 3u(1-u)^2 + P_2 3u^2(1-u) + P_3 u^3$$

$$P(u) = P_0(1-u)^3 + P_1 3u(1-u)^2 + P_2 3u^2(1-u) + P_3 u^3$$

Сплайновые кривые Безье
Пример
$n = 1$
$P(u) = P_0 C_1^0 u^0 (1-u)^1 + P_1 C_1^1 u^1 (1-u)^0$
$P(u) = P_0(1-u) + P_1 u = P_0 + (P_1 - P_0)u$
$n = 2$
$P(u) = P_0 C_2^0 u^0 (1-u)^2 + P_1 C_2^1 u^1 (1-u)^1 + P_2 C_2^2 u^2 (1-u)^0$
$P(u) = P_0(1-u)^2 + 2P_1 u(1-u) + P_2 u^2$
$n = 3$
$P(u) = P_0(1-u)^3 + P_1 3u(1-u)^2 + P_2 3u^2(1-u) + P_3 u^3$
$P(u) = P_0(1-u)^3 + P_1 3u(1-u)^2 + P_2 3u^2(1-u) + P_3 u^3$

Свойства

- Локальный контроль: Изменения в контрольных точках кривой Безье оказывают влияние только на ограниченный сегмент кривой, что делает её легко управляемой.
- Степень кривой: Степень кривой Безье определяется числом контрольных точек минус один. Таким образом, для $n+1$ точек степень кривой будет n.
- Инвариантность относительно линейных преобразований: Кривые Безье сохраняют свою форму при линейных преобразованиях, таких как сжатие, вращение и перенос.
- Выпуклость: Кривые Безье всегда остаются в пределах выпуклой оболочки своих контрольных точек (глобальный базис).
- Касательные в начальной и конечной точках: Касательные к кривой в начальной и конечной точках совпадают с линиями, соединяющими соответствующие контрольные точки.

В-сплайн

B-spline

В-сплайн — кусочно-полиномиальная кривая, определенная с использованием базисных функций.

$$P_k(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t),$$

где $N_{i,k}(t)$ — локальный базис; P_i — узловые точки; k — степень полинома; $t \in [t_{min}; t_{max})$.
Рекуррентные формулы Кокса-де Бура

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [t_i; t_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = N_{i,k-1}(t)\frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} + N_{i+1,k-1}(t)\frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}}$$

В-сплайн
B-spline
В-сплайн — кусочно-полиномиальная кривая, определенная с использованием базисных функций.
$$P_k(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t),$$
где $N_{i,k}(t)$ — локальный базис; P_i — узловые точки; k — степень полинома; $t \in [t_{min}; t_{max})$.
Рекуррентные формулы Кокса-де Бура
$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [t_i; t_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$N_{i,k}(t) = N_{i,k-1}(t)\frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} + N_{i+1,k-1}(t)\frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}}$$

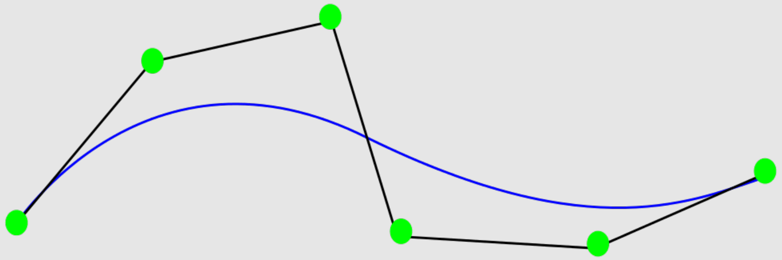


Рис. 4: B-spline

B-сплайн
Пример

Пусть даны три точки P_0, P_1, P_2 и вектор $T = [t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_5]$, где $t_i \leqslant t_{i+1}$.

x	l	2	4
y	l	3	3

$$T = [0, 0, 1, 2, 3, 3]$$

Тогда
$n + 1 = 3$ — число узловых точек;
$m + 1 = 6$ — число элементов вектора T;
$m - (n + 1) = 2$ — степень полинома.
Схема

константы	$N_{i,0}$	$N_{0,0}$		$N_{1,0}$		$N_{2,0}$		$N_{3,0}$		$N_{4,0}$
полином 1-й степени	$N_{i,1}$		$N_{0,1}$		$N_{1,1}$		$N_{2,1}$		$N_{3,1}$	
полином 2-й степени	$N_{i,2}$			$N_{0,2}$		$N_{1,2}$		$N_{2,2}$		

B-сплайн
Пример
Пусть даны три точки P_0, P_1, P_2 и вектор $T = [t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_5]$, где $t_i \leqslant t_{i+1}$.
$T = [0, 0, 1, 2, 3, 3]$
Тогда
$n + 1 = 3$ — число узловых точек;
$m + 1 = 6$ — число элементов вектора T;
$m - (n + 1) = 2$ — степень полинома.
Схема

$$N_{0,0} = 0$$

$$N_{1,0} = 1, t \in [0, 1)$$

$$N_{2,0} = 1, t \in [1, 2)$$

$$N_{3,0} = 1, t \in [2, 3)$$

$$N_{4,0} = 0$$

$$N_{0,1}(t) = N_{0,0}(t)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + N_{1,0}(t)\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} =$$

$$= \begin{cases} 0 \cdot \frac{t}{0}, & t \in [0, 0) \\ 1 \cdot \frac{1-t}{1}, & t \in [0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \in [0, 0) \\ 1 - t, & t \in [0, 1) \end{cases}$$

$$\ldots$$

B-сплайн

Пример

$$P(t) = P_0 N_{0,2}(t) + P_1 N_{1,2}(t) + P_2 N_{2,2}(t)$$

B-сплайн
Пример
$P(t) = P_0 N_{0,2}(t) + P_1 N_{1,2}(t) + P_2 N_{2,2}(t)$

Свойства:

- Сумма $\sum_{n}^{i=0} N_{i,k}(t) \equiv 1$; $N_{i,k}(t) \geqslant 0$ при $\forall t \in [t_{min}, t_{max}]$;
- Перемещение: чтобы применить к кривой любое аффинное преобразование необходимо применить его к вершинном определяющая многоугольника;
- Кусочная гладкость: обеспечивают гладкость на границах сегментов и обеспечивают непрерывность определенного порядка на всей кривой.
- Локальная модификация: Изменения в контрольных точках B-сплайна оказывают влияние только на ограниченный сегмент кривой, что делает их удобными для локальных модификаций.
- Вариативность степени и узлов: могут иметь разные степени и распределение узлов, что позволяет легко адаптировать их к различным требованиям.
- Контроль над кривой: Контроль над формой кривой обеспечивается не только контрольными точками, но и базисными функциями, что делает их более гибкими.