

## Проектирование

Быковских Дмитрий Александрович

07.10.2023

# Преобразования и наблюдения

Преобразование моделирования	Модельные координаты (МК)
Преобразование наблюдения	Внешние координаты (ВК)
Преобразование проектирования	Координаты наблюдения (КН)
Преобразование нормировки и отсечение	Координаты проекции (КП)
Преобразование поля просмотра	Нормированные координаты (НК)
	Координаты устройства (КУ)

2023-10-11

Проектирование

└─ Преобразования и наблюдения

Преобразования и наблюдения

	Модельные координаты (МК)
Преобразование моделирования	Внешние координаты (ВК)
Преобразование наблюдения	Координаты наблюдения (КН)
Преобразование проектирования	Координаты проекции (КП)
Преобразование нормировки и отсечение	Нормированные координаты (НК)
Преобразование поля просмотра	Координаты устройства (КУ)

# Общая информация

Проектирование — преобразование, ставящее точки трехмерного пространства в соответствие точки на плоскости.

$$f : R^3 \rightarrow R^2$$

Виды проектирования

- параллельные;
- перспективные.

2023-10-11

Проектирование

└ Математический взгляд

└ Общая информация

Общая информация

Проектирование — преобразование, ставящее точки трехмерного пространства в соответствие точки на плоскости.

$$f : R^3 \rightarrow R^2$$

Виды проектирования

- параллельные;
- перспективные.

# Параллельное проектирование

Плоскость проекции

$$P: \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} + d = 0$$

Лучи проектирования

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}$$

Должно выполняться условие

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \neq 0$$

Найдем точки пересечения

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}) + d = 0$$

$$t = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + d}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}$$

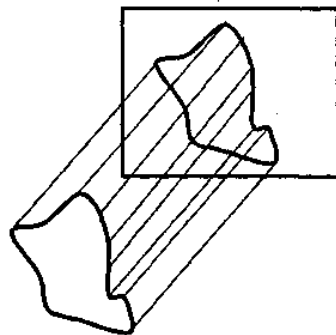


Рис. 1: Схема параллельного проецирования

2023-10-11

Проектирование

└ Математический взгляд

└ Параллельное проектирование

Параллельное проектирование  
Плоскость проекции  
 $P: \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} + d = 0$   
Лучи проектирования  
 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}$   
Должно выполняться условие  
 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \neq 0$   
Найдем точки пересечения  
 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}) + d = 0$   
 $t = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + d}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}$



Рис. 1: Схема параллельного проецирования

$$P: \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) = 0$$

Откуда следует, что  $d = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_0$

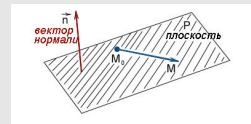


Рис. 2: Уравнение плоскости

Векторное параметрическое уравнение прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}$$

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + l_x t \\ y = y_0 + l_y t \\ z = z_0 + l_z t \end{cases}$$

# Перспективное проектирование

Плоскость проекции

$$P : \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} + d = 0$$

Лучи проектирования

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_c + t\mathbf{r}_0$$

Найдем точки пересечения

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{r}_c + t(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c)] + d = 0$$

$$t = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_c + d}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_c}$$

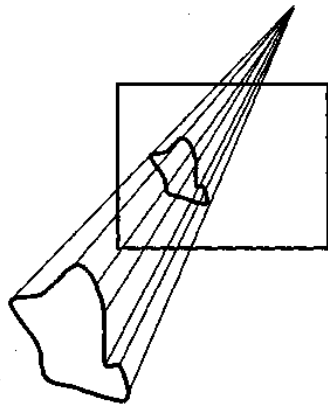


Рис. 3: Схема перспективного проецирования

2023-10-11

Проектирование

└ Математический взгляд

└ Перспективное проектирование

Перспективное проектирование

Плоскость проекции

$$P : \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} + d = 0$$

Лучи проектирования

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_c + t\mathbf{r}_0$$

Найдем точки пересечения

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{r}_c + t(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c)] + d = 0$$

$$t = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_c + d}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_c}$$

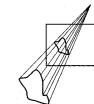


Рис. 3: Схема перспективного проецирования

Проецирование называется перспективным, если проецирующие лучи, с помощью которых строится проекция предмета, исходят из одной точки.

# Проектирование

## Плоские геометрические проекции

- параллельные
  - ортографические
    - вид спереди
    - вид сверху
    - вид сбоку
  - аксонометрические
    - триметрическая
    - диметрическая
    - изометрическая
  - косоугольные
    - кавалье
    - кабине
- перспективные
  - одноточечная
  - двухточечная
  - трехточечная

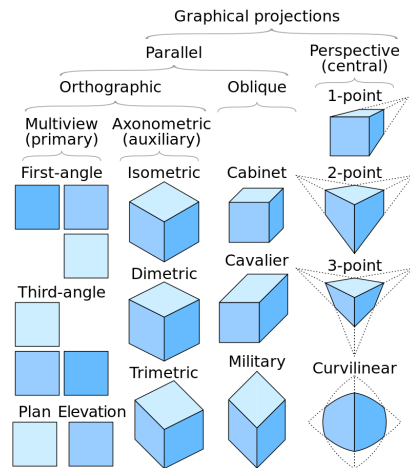


Рис. 4: Виды плоских проекций

2023-10-11

Проектирование  
└ Проектирование

└ Проектирование

В ортогональных (ортографических и аксонометрических) проекциях направление проецирования является нормалью к проекционной плоскости (ортографическая и аксонометрическая);

В косоугольных проекциях направление проецирования и нормаль к проекционной плоскости не совпадают.

Проектирование

Плоские геометрические проекции



Рис. 4: Виды плоских проекций

# Ортографические проекции

Самой простой из параллельных проекций, используемый обычно в инженерных чертежах.

Делится на

- вид спереди (анфас);
- вид сверху (план);
- вид сбоку (профиль).

В этом случае точно изображаются правильные или «истинные» размер и форма одной плоской грани объекта.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2023-10-11

## Проектирование

### Проектирование

### Ортографические проекции

#### Ортографические проекции

Самой простой из параллельных проекций, используемый обычно в инженерных чертежах.

Делится на

- вид спереди (анфас);
- вид сверху (план);
- вид сбоку (профиль);

В этом случае точно изображаются правильные или «истинные» размер и форма одной плоской грани объекта.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

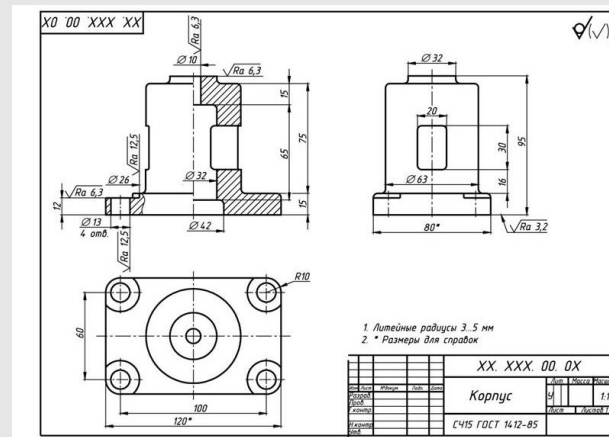


Рис. 5: Пример чертежа

## Аксонметрические проекции

Строятся с помощью матриц поворота (углов Эйлера).

Виды

- Изометрическая проекция.  
В плоскости проекции углы между каждой парой осей равны.
- Диметрическая проекция.  
В плоскости проекции равны лишь 2 угла между осями.
- Триметрическая проекция.  
В плоскости проекции все 3 угла между собой различны.

2023-10-11

Проектирование  
└ Проектирование

└ Аксонометрические проекции

Аксонметрические проекции

Строятся с помощью матриц поворота (углов Эйлера).

Виды

- Изометрическая проекция.  
В плоскости проекции углы между каждой парой осей равны.
- Диметрическая проекция.  
В плоскости проекции равны лишь 2 угла между осями.
- Триметрическая проекция.  
В плоскости проекции все 3 угла между собой различны.

Аксонметрия в переводе с греческого обозначает измерение по осям.

$$\begin{aligned}
 & M_{r,y}(\phi) M_{r,x}(\theta) M_t = \\
 & = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



# АксонOMETрическое проектирование

Коэффициенты искажения

$$f_i = \sqrt{f_{i,x}^2 + f_{i,y}^2 + f_{i,z}^2}$$

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

Для триметрической проекции

$$f_x^2 \neq f_y^2 \neq f_z^2$$

Для диметрической проекции

$$f_x^2 = f_y^2 \neq f_z^2$$

Для изометрической проекции

$$f_x^2 = f_y^2 = f_z^2$$

2023-10-11

Проектирование  
└ Проектирование

└ Аксонометрическое проектирование

коэффициенты сдвига

АксонOMETрическое проектирование

Коэффициенты искажения

$$f_i = \sqrt{f_{i,x}^2 + f_{i,y}^2 + f_{i,z}^2}$$

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

Для триметрической проекции:  $f_x^2 \neq f_y^2 \neq f_z^2$

Для диметрической проекции:  $f_x^2 = f_y^2 \neq f_z^2$

Для изометрической проекции:  $f_x^2 = f_y^2 = f_z^2$

## АксонOMETрическое проектирование

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

Изометрия

$$f_x^2 = f_y^2 = f_z^2 \quad \begin{cases} f_x^2 = f_y^2 \\ f_y^2 = f_z^2 \end{cases}$$

$$\sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{3} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{2}$$



Рис. 6: Fallout

2023-10-11

Проектирование  
└ Проектирование

└ Аксонометрическое проектирование

АксонOMETрическое проектирование

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

Изометрия

$$f_x^2 = f_y^2 = f_z^2 \quad \begin{cases} f_x^2 = f_y^2 \\ f_y^2 = f_z^2 \end{cases}$$

$$\sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{3} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{2}$$



Рис. 6: Fallout

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$(1 - \sin^2 \phi) + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\sin^2 \theta - \sin^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = 0$$

$$\sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

Теперь

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \phi + (1 - \sin^2 \phi) \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \phi (1 - \sin^2 \theta) = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

После подстановки

$$\sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$$

# Косоугольное проектирование

Проекция, где проектирующие прямые образуют с плоскостью проекции угол отличный от  $90^\circ$ . Поскольку проекционная плоскость перпендикулярна главной координатной оси, то сторона объекта, параллельная этой плоскости, проецируется так, что можно измерить углы и расстояния. При этом проецирование других сторон объекта также допускает проведение линейных измерений вдоль главных осей (но не угловых).



Рис. 7: Postal

2023-10-11

Проектирование  
└ Проектирование

└ Косоугольное проектирование

Косоугольное проектирование

Проекция, где проектирующие прямые образуют с плоскостью проекции угол отличный от  $90^\circ$ . Поскольку проекционная плоскость перпендикулярна главной координатной оси, то сторона объекта, параллельная этой плоскости, проецируется так, что можно измерить углы и расстояния. При этом проецирование других сторон объекта также допускает проведение линейных измерений вдоль главных осей (но не угловых).



Рис. 7: Postal

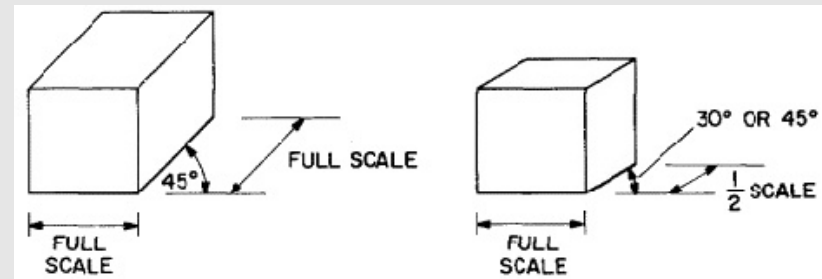


Рис. 8: Косоугольные проекции: кавалье (слева); кабине (справа)

## Косоугольное проецирование

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l \cos \alpha & -l \sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

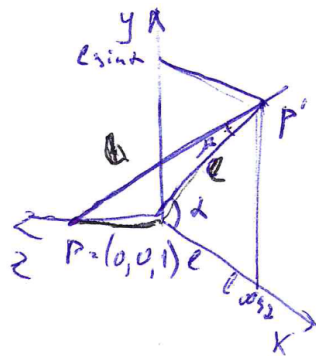


Рис. 9: Схема построения косоугольной проекции

2023-10-11

Проектирование  
└ Проектирование

└ Косоугольное проецирование

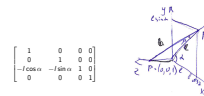


Рис. 9: Схема построения косоугольной проекции

# Перспективное проецирование

Вид проекции, где лучи проектирования исходят из точки (центр проектирования), размещенной на конечном расстоянии от объектов и плоскости проектирования.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

В этом случае точки фокуса имеют координаты:  
 $c_x = (-\frac{1}{p}, 0, 0), c_y = (0, -\frac{1}{q}, 0),$   
 $c_z = (0, 0, -\frac{1}{r})$

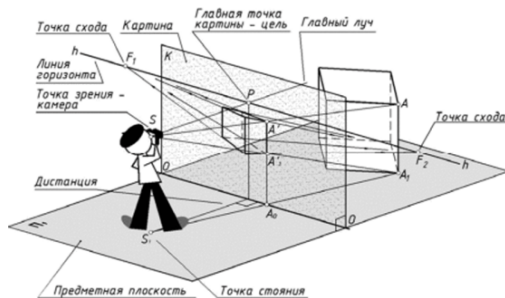


Рис. 10: Перспективная проекция

2023-10-11

## Проектирование

### Перспективное проецирование

Перспективное проецирование

Вид проекции, где лучи проектирования исходят из точки (центр проектирования), размещенной на конечном расстоянии от объектов и плоскости проектирования.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В этом случае точки фокуса имеют координаты:  
 $c_x = (-\frac{1}{p}, 0, 0), c_y = (0, -\frac{1}{q}, 0),$   
 $c_z = (0, 0, -\frac{1}{r})$

Рис. 10: Перспективная проекция

$$\begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T \neq \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ p_z \cdot r + 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \frac{p_x}{p_z \cdot r + 1} \\ \frac{p_y}{p_z \cdot r + 1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p_x}{p_x \cdot p + p_y \cdot q + p_z \cdot r + 1} \\ \frac{p_y}{p_x \cdot p + p_y \cdot q + p_z \cdot r + 1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

# Перспективное проецирование

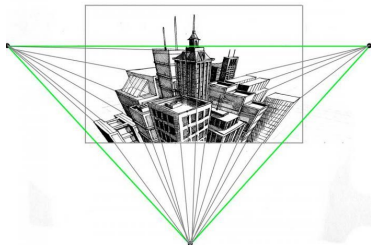
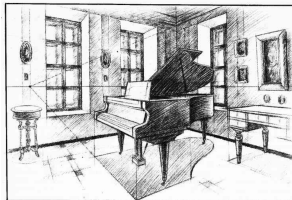


Рис. 11: Виды перспективных проекций: одноточечная (фронтальная), двухточечная (угловая), трехточечная (вертикальная)

2023-10-11

Проектирование  
└ Проектирование

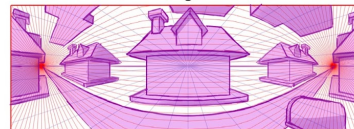
└ Перспективное проецирование

Перспективное проецирование



Рис. 11: Виды перспективных проекций: одноточечная (фронтальная), двухточечная (угловая), трехточечная (вертикальная)

⑦ Draw the big shape first on the grid



This is called a banana pan. These kinds of backgrounds are often used for a horizontal pan. A pan is when the camera horizontally moves from one

point to another (I'll explain more later about camera movement)

⑧ sketch on top of those shapes and add shadow



Рис. 12: Виды перспективных проекций: другие (мультиточечная)