

# Фракталы

Быковских Дмитрий Александрович

21.09.2024

## └ Содержание

- Введение
- Фрактальная размерность
- Виды фракталов
  - Геометрические
  - Алгебраические
  - Стохастические

## Содержание

- Введение
- Фрактальная размерность
- Виды фракталов
  - Геометрические
  - Алгебраические
  - Стохастические



Рис. 1: Объекты живой природы

# Введение



Рис. 1: Объекты живой природы

## Фракталы

2024-10-18

### └ Введение

*Воображение иссякает прежде природы.*

Блез Паскаль

Многие формы природных объектов неправильны и фрагментированы.

Например, облака, горы, деревья и многое др.

Исследование этих объектов и неспособность их описать с помощью простых геометрических объектов привело к появлению фракталов.



Рис. 2: Benoit B. Mandelbrot (Nov. 1924 — Oct. 2010)



## История фракталов

Рис. 2: Benoit B. Mandelbrot (Nov. 1924 — Oct. 2010)

## Фракталы

2024-10-18

### └ История фракталов

Бенуа Б. Мандельброт является создателем термина "фрактал" и "фрактальной геометрии"

Термин "Фрактал" появился 1975 г.

Произошло от лат. слова *fractus* — фрагментированный, дробный, ломанный.

"Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности"

"Все фигуры, которые я исследовал и назвал фракталами, в моем представлении обладали свойством быть нерегулярными, но самоподобными"

Мандельброт Б. "Геометрия природы".

Почему фракталы набрали такую популярность?

## Эффект Ричардсона

## Парадокс береговой линии (1950-е годы)

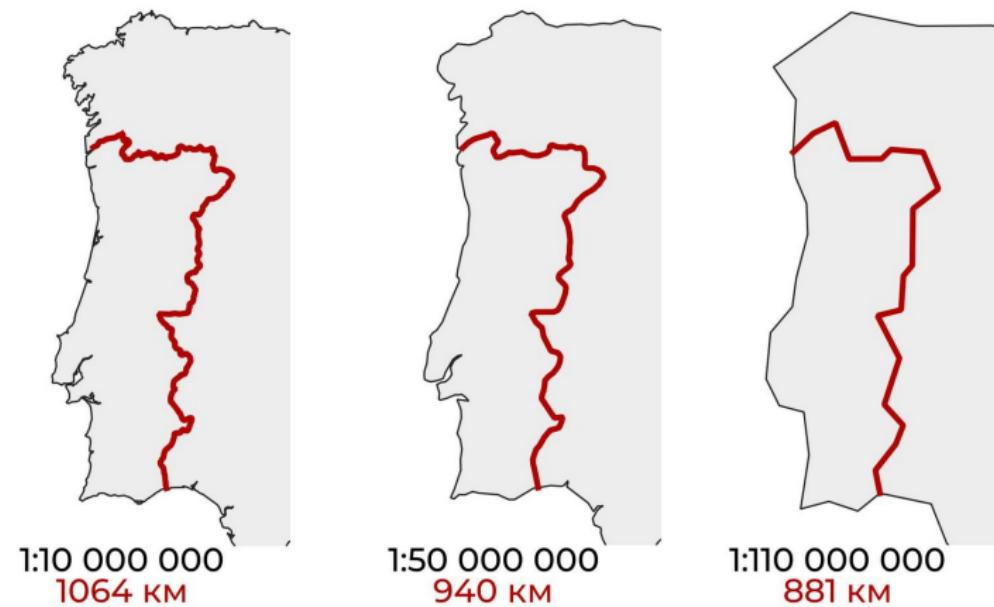


Рис. 3: Способы измерения береговой линии

## └ Эффект Ричардсона

## Как посчитать длину кривой между 2 точками?

$$L \approx IN,$$

где

$L$  — длина кривой, проходящей через две точки;

$l$  — длина шага, с помощью которого приблизительно пытаемся измерить расстояние;

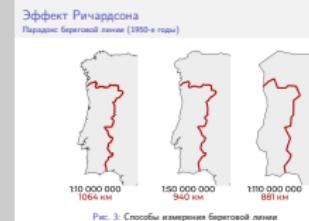
$N$  — количество отрезков;

*IN* — длина ломанного отрезка;

## Выводы:

Отсюда следует, что при  $I \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$

А можно точнее?



# Фрактальная размерность

Фрактальная размерность  $d$  рассчитывается с помощью следующей формулы:

$$d = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}$$

Понятие размерности связано с количеством пространственных измерений или степенью многомерности.

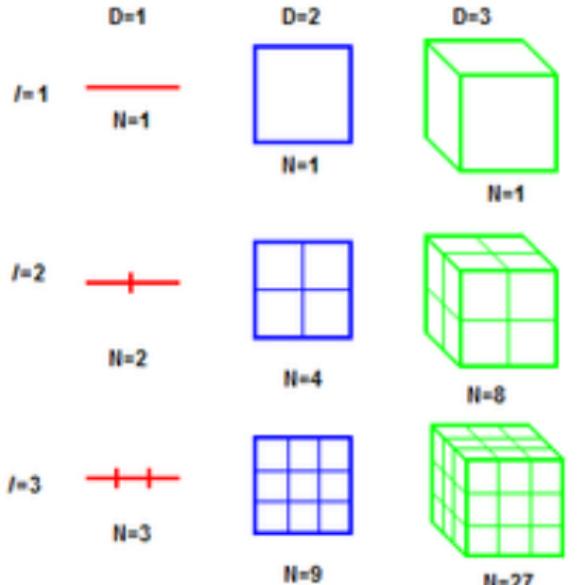


Рис. 4: Определение размерности и масштабирования

## Фракталы

2024-10-18

### Фрактальная размерность

Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$\frac{1}{l^d} \approx N(l)$$

$$l^d \approx \frac{1}{N(l)}$$

$$d = \log_l l^d \approx \log_l \frac{1}{N(l)} = \frac{\ln \frac{1}{N(l)}}{\ln l} = \frac{\ln N(l)^{-1}}{\ln l} = -\frac{\ln N(l)}{\ln l}$$

$$d = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}$$

Примечание. Если  $d = \{1, 2, 3 \dots\}$ , т.е.  $d \in \mathbb{N}$ , то величина  $d$  характеризует евклидову размерность.  
Но что будет, если величина  $l$  имеет не только целую часть, но и дробную, т.е.  $d \in \mathbb{Q}$ ?

## Фрактальная размерность

Фрактальная размерность  $d$  рассчитывается с помощью следующей формулы:

$$d = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}$$

Понятие размерности связано с количеством пространственных измерений или степенью многомерности.

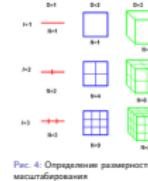


Рис. 4: Определение размерности и масштабирования

- Структуры построения и представления фракталов:
- Система рекуррентных функций в  $n$ -мерном пространстве;
  - Стохастический алгоритм;
  - Итеративная система функций;
  - L-система (формальная грамматика);
  - Странный аттрактор (динамические системы);
  - Конечное правило разделения (рекурсивный способ деления двумерных фигур на меньшие части).

# Способы задания фракталов

Структуры построения и представления фракталов:

- Система рекуррентных функций в  $n$ -мерном пространстве;
- Стохастический алгоритм;
- Итеративная система функций;
- L-система (формальная грамматика);
- Странный аттрактор (динамические системы);
- Конечное правило разделения (рекурсивный способ деления двумерных фигур на меньшие части).

2024-10-18

## Способы задания фракталов

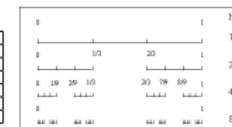


Рис. 5: Схема построения множества Кантора

## Канторово множество

(канторов дисконтиум, канторова пыль)

$k$	$I$	$N(I)$
0	1	1
1	$1/3$	2
2	$1/9$	4
3	$3^{-3}$	$2^3$
$\dots$		
$n$	$3^{-n}$	$2^n$

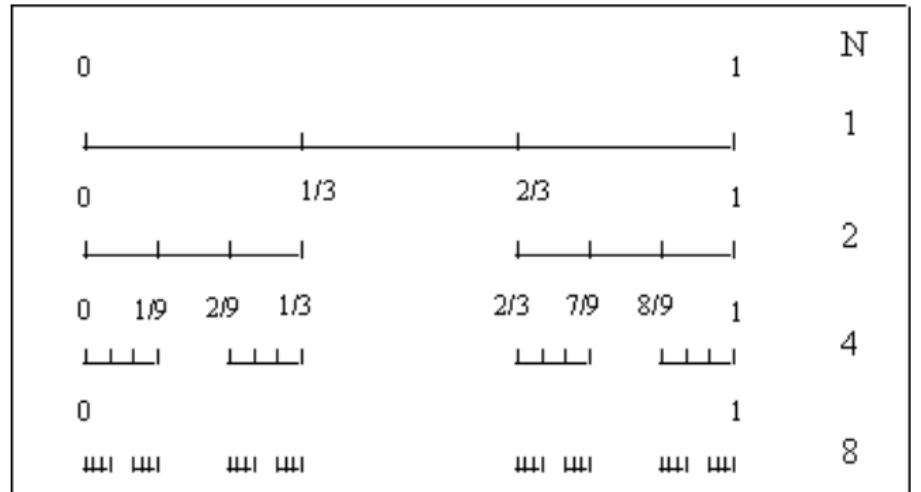


Рис. 5: Схема построения множества Кантора

## Фракталы

2024-10-18

## └ Канторово множество

Множество было описано Георгом Кантором в 1833 году.

Пусть

$$E_0 = [0, 1]$$

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

...

Таким образом, множество Кантора строится пересечение отрезков

$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

Получается  $N = 2^n$  сегментов, где  $I_i = \frac{1}{3^n}$ .

Мера множества после удаления всех отрезков из исходного

$$L = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0$$

Фрактальная размерность

$$d = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{3^n}} = \log_3 2 \approx 0.6309 < 1$$

## Фракталы

2024-10-18

### └ Канторово множество

Рассмотрим последовательность

$$S_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$$

Эта последовательность является геометрической. Тогда сумму ряда можно вычислить по следующей формуле.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Видно, что  $b_1 = 1$ ,  $q = \frac{2}{3}$ . Тогда сумма ряда равняется

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

## Канторово множество

Лекция 10

### Мера множества после удаления всех отрезков из исходного

$$L = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0$$

### Фрактальная размерность

$$d = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{3^n}} = \log_3 2 \approx 0.6309 < 1$$

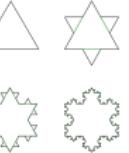


Рис. 6: Схема построения снежинки Коха

$k$	$I$	$N(I)$
0	1	3
1	$1/3$	12
2	$1/9$	48
$\dots$		
$n$	$3^{-n}$	$3 \cdot 4^n$

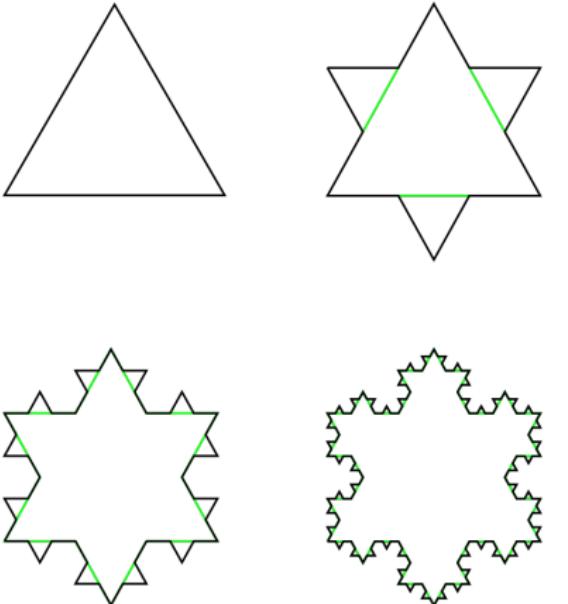


Рис. 6: Схема построения снежинки Коха

## Фракталы

2024-10-18

## Снежинка Коха

Множество было описано Кохом (Helge von Koch) в 1904 году.  
**Фрактальная размерность**

$$\begin{aligned}
 d &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln \frac{1}{3^n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3}{\ln 3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{\ln 4}{\ln 3} = \\
 &= \log_3 4 \approx 1.26186 > 1
 \end{aligned}$$



Рис. 7: Схема построения салфетки Серпинского

## Фракталы

2024-10-18

## └ Салфетка Серпинского (треугольник Серпинского)

Множество было описано Серпинским в 1916 году.

**Площадь объекта**

$$S = 1 - \frac{1}{4}(1 + \frac{3}{4} + \dots) = 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 0$$

**Фрактальная размерность**

$$d = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln \frac{1}{2^n}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} =$$

$$= \log_2 3 \approx 1.58496250072 < 2$$

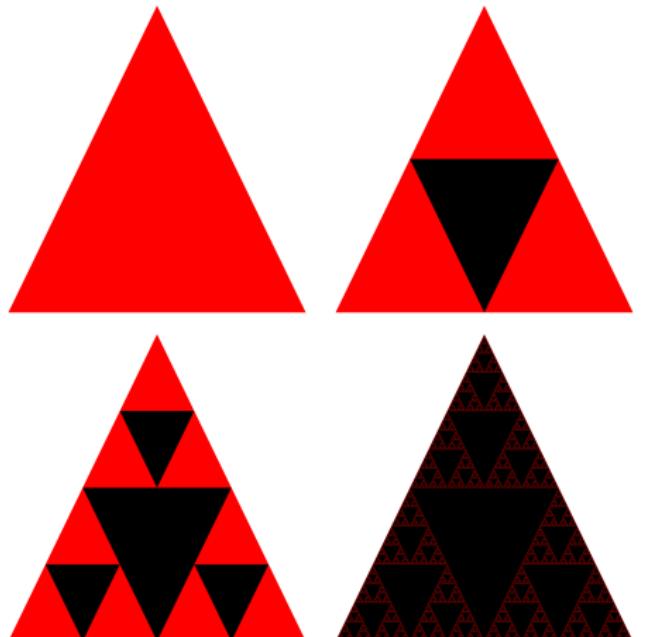


Рис. 7: Схема построения салфетки Серпинского

Пусть задана рекуррентная функция в комплексной плоскости  $z_{n+1} = f(z_n)$ , где  $z_n \in \mathbb{Z}$ .  
Установим некоторое начальное значение  $z_0$  и рассмотрим последовательность вида  $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .  
В зависимости от начальных данных, т.е. от  $z_0$ , последовательность ведет себя по-разному. При  $n \rightarrow \infty$  возможны следующие значения функции:

- ①  $z_n \rightarrow \infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$ ;
- ②  $z_n = A$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ ;
- ③  $z_n = z_{n+\tau}$ , где  $\tau$  — период, т.е.  $z_n$  циклически принимает некоторый ряд значений.

## └ Алгебраические фракталы

Операции над комплексными числами.

Сложение комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$ :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

Произведение комплексных чисел  $a + bi$  и  $c + di$ :

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 = \\ &= (ac + bdi^2) + (bc + ad)i = (ac - bd) + (bc + ad)i, \end{aligned}$$

где  $i^2 = -1$ .

Рассмотрим производную такой функции:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

где  $z = a + ib$ .

Выполним ряд преобразований и в результате получим:

$$f(z + \Delta z) \approx f(z) + \Delta z f'(z).$$

Отсюда следует, что расстояние между точками можно задать через производную. Предположим, что существует неподвижная точка  $\hat{z}$  — корень уравнения функции, тогда

- ❶ если  $|f'(\hat{z})| < 1$ , то  $\hat{z}$  — притягивающая точка;
- ❷ если  $|f'(\hat{z})| > 1$ , то  $\hat{z}$  — отталкивающая точка;
- ❸ если  $|f'(\hat{z})| = 1$ , то  $\hat{z}$  — нейтральная точка.

## Фракталы

2024-10-18

### └ Алгебраические фракталы

Должно выполняться условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial f}{\partial a} + i \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

## Алгебраические фракталы

Рассмотрим производную такой функции:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

где  $z = a + ib$ .

Выполним ряд преобразований и в результате получим:

$$f(z + \Delta z) \approx f(z) + \Delta z f'(z).$$

Отсюда следует, что расстояние между точками можно задать через производную. Предположим, что существует неподвижная точка  $\hat{z}$  — корень уравнения функции, тогда

- ❶ если  $|f'(\hat{z})| < 1$ , то  $\hat{z}$  — притягивающая точка;
- ❷ если  $|f'(\hat{z})| > 1$ , то  $\hat{z}$  — отталкивающая точка;
- ❸ если  $|f'(\hat{z})| = 1$ , то  $\hat{z}$  — нейтральная точка.

2024-10-18

## └ Множество Мандельброта. Множество Жюлиа

Определение и название принадлежат французскому математику Адриену Дуади.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

где  $c$  — некоторая константа.

Характеристики множества Мандельброта:

- Кардиоида (периода);
- Иголоподобные антенны.

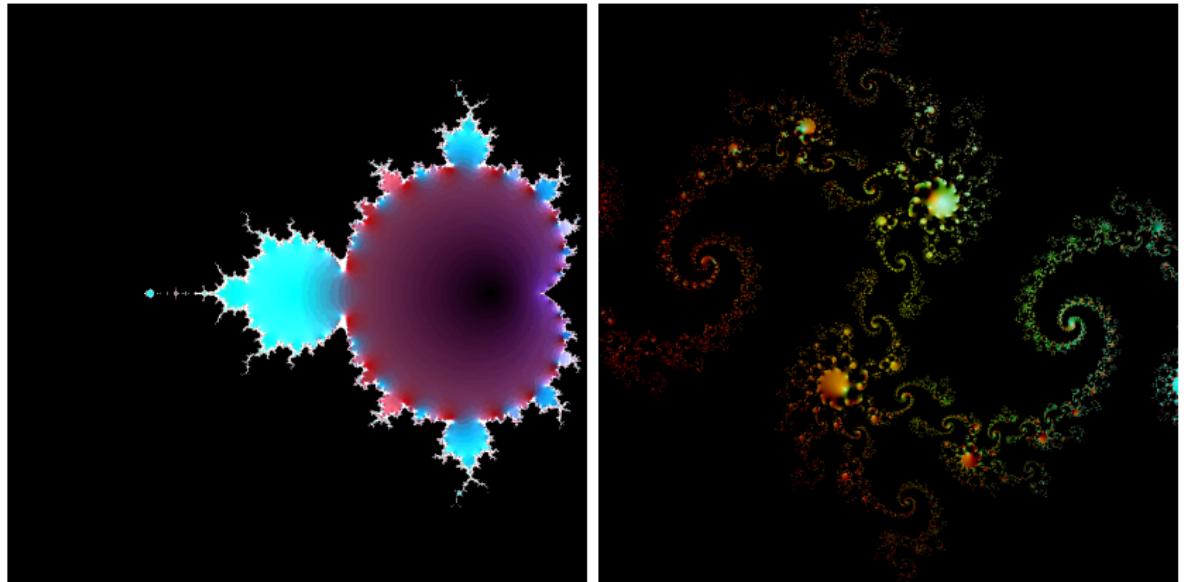


Рис. 8: Множество Мандельброта (слева) и Жюлиа (справа)

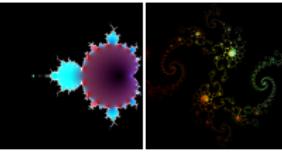


Рис. 8: Множество Мандельброта (слева) и Жюлиа (справа)

L-системы — тип формальной грамматики.  
L-система задается  $G = (V, \omega, P)$ , где

- $V$ (алфавит) — множество символов, содержащих как элементы, которые могут быть заменены (переменные), так и элементы, которые не могут быть заменены ("константы" или "терминальные символы");
- $\omega$  — (старт) строка символов из  $V$ , определяющая начальное состояние системы;
- $P$  — множество правил, определяющих, каким образом переменные могут быть заменены комбинациями констант и других переменных. Порождающее правило состоит из двух строк, прототип и преемник.

## L-systems (L-системы)

Такой способ построения предложил в 1968 г. Аристид Линденмайер, венгерский биолог и ботаник из Уtrechtского университета. Он использовал L-системы для описания поведения клеток растений и моделирования процесса развития растения.

# L-systems (L-системы)

L-системы — тип формальной грамматики.

L-система задается  $G = (V, \omega, P)$ , где

- $V$ (алфавит) — множество символов, содержащих как элементы, которые могут быть заменены (переменные), так и элементы, которые не могут быть заменены ("константы" или "терминальные символы");
- $\omega$  — (старт) строка символов из  $V$ , определяющая начальное состояние системы;
- $P$  — множество правил, определяющих, каким образом переменные могут быть заменены комбинациями констант и других переменных. Порождающее правило состоит из двух строк, прототип и преемник.

2024-10-18

## └ L-systems (L-системы)

Пример. Множество Кантора

- переменные: A, B
- константы: нет
- старт: A
- правила:  $(A \rightarrow ABA), (B \rightarrow BBB)$

Пусть A означает «рисуем отрезок», а B означает «движемся».

Такая грамматика порождает знаменитое канторово фрактальное множество на вещественной оси R.

Шаг 0.

A

Шаг 1.

ABA

Шаг 2.

ABABBABA

## L-systems (L-системы)

Пример. Множество Кантора

- переменные: A, B
- константы: нет
- старт: A
- правила:  $(A \rightarrow ABA), (B \rightarrow BBB)$

Пусть A означает «рисуем отрезок», а B означает «движемся».

Пример. Треугольник Серпинского

- переменные:  $F, G$
  - константы:  $+, -$
  - старт:  $F - G - G$
  - правила:  $(F \rightarrow F - G + F + G - F), (G \rightarrow GG)$
  - угол:  $120^\circ$
- Здесь  $F$  и  $G$  означают «рисуем отрезок»,  $+$  означает «поворнуть вправо на угол», а  $-$  означает «поворнуть влево на угол».

2024-10-18

## L-systems (L-системы)

Такая грамматика порождает знаменитое канторово фрактальное множество на вещественной оси  $R$ .

Шаг 0.

$$F - G - G$$

Шаг 1.

$$F - G + F + G - F - GG - GG$$

Шаг 2.

$$\begin{aligned} & F - G + F + G - F - GG + F - G + F + G - F + GG - F - G + F + \\ & G - F - GGGG - GGGG \end{aligned}$$

## L-systems (L-системы)

Пример. Треугольник Серпинского

- переменные:  $F, G$
- константы:  $+, -$
- старт:  $F - G - G$
- правила:  $(F \rightarrow F - G + F + G - F), (G \rightarrow GG)$
- угол:  $120^\circ$

Здесь  $F$  и  $G$  означают «рисуем отрезок»,  $+$  означает «поворнуть вправо на угол», а  $-$  означает «поворнуть влево на угол».

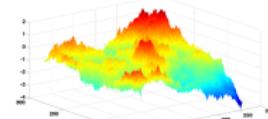


Рис. 9: Генерация обобщенного броуновского рельефа

## Фракталы

2024-10-18

## └ Стохастические фракталы

Стохастические фракталы являются известным классом фракталов. Они нашли широкое применение в области создания природных несимметричных объектов, таких как ландшафты, деревья и облака. Способы построения

- алгоритм случайного блуждания;
- алгоритм Diamond-square.

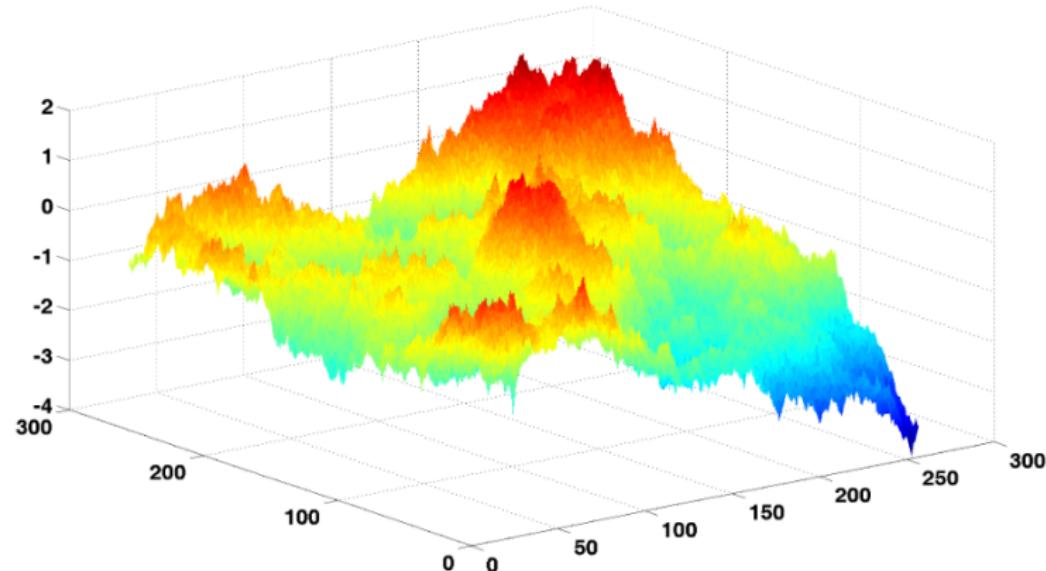


Рис. 9: Генерация обобщенного броуновского рельефа

# Построение салфетки Серпинского с помощью метода случайных итераций

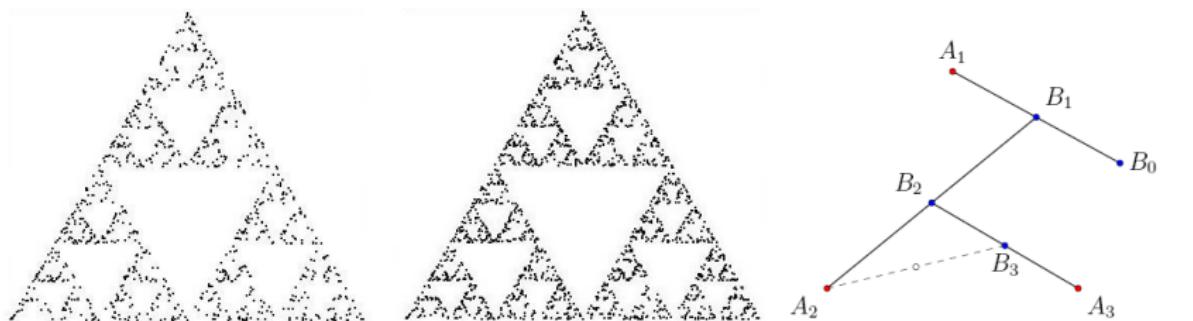


Рис. 10: Игра "Хаос"(слева) и алгоритм построения (справа)

## Фракталы

2024-10-18

### └ Построение салфетки Серпинского с помощью метода случайных итераций

Получается в результате случайного блуждания точки на плоскости. Этот способ называется «игрой Хаос». С его помощью можно построить и некоторые другие фракталы.  
Суть «игры» такова.

На плоскости зафиксирован правильный треугольник  $A_1A_2A_3$ . Отмечают любую начальную точку  $B_0$ . Затем случайным образом выбирают одну из трех вершин треугольника и отмечают точку  $B_1$  — середину отрезка с концами в этой вершине и в  $B_0$  (на рисунке справа случайно выбралась вершина  $A_1$ ).

Затем повторяют с точкой  $B_1$ , чтобы получить  $B_2$ . Потом получают точки  $B_3, B_4$ , и т. д.

Важно, чтобы точка «прыгала» случайным образом, то есть чтобы каждый раз вершина треугольника выбиралась случайно, независимо от того, что было выбрано в предыдущие шаги.

Удивительно, что если отмечать точки из последовательности  $B_i$ , то вскоре начнет проступать треугольник Серпинского.

Построение салфетки Серпинского с помощью метода случайных итераций



Рис. 10: Игра "Хаос"(слева) и алгоритм построения (справа)

## Алгоритм Diamond-square

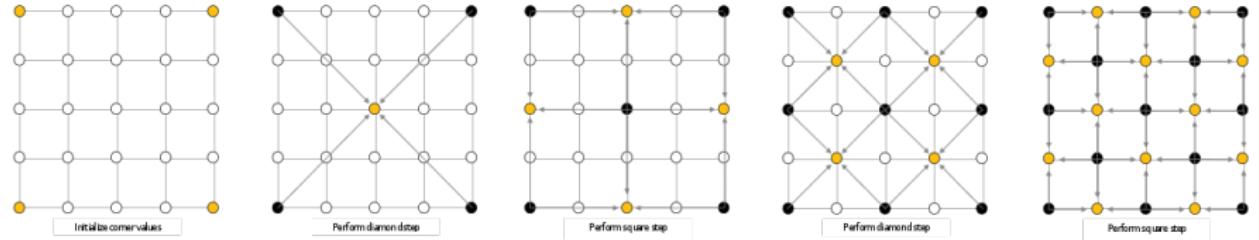


Рис. 11: Схема алгоритма Diamond-square

## └ Алгоритм Diamond-square

Описание алгоритма было впервые представлено в 1982 г. (by Fournier, Fussell and Carpenter at SIGGRAPH).

## Алгоритм Diamond-square

1. Инициализация угловых точек. Присваивание им значений высот (например, выбором случайных чисел).
  2. Шаг diamond. Нахождение срединной точки, присваивание ей значения на основе среднего от угловых, плюс случайное число.
  3. Шаг square. Нахождение срединных точек для ромбов отмеченных черными точками (на этом шаге, по одной точке каждого ромба выходят за пределы массива). Плюс случайное число.

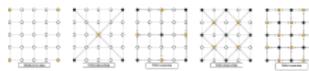


Рис. 11: Схема алгоритма Diamond-square

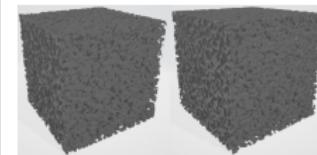


Рис. 12: Построение пористой среды с помощью шума Перлина (слева) газового фрактала (справа)

## Фракталы

2024-10-18

## └ Стохастические фракталы

В качестве цифровых моделей пористых сред были использованы фрактальные пористые структуры, созданные на основе стохастических фракталов: шум Перлина и газовое облако на основе алгоритма Octahedron and Cube.

## Стохастические фракталы

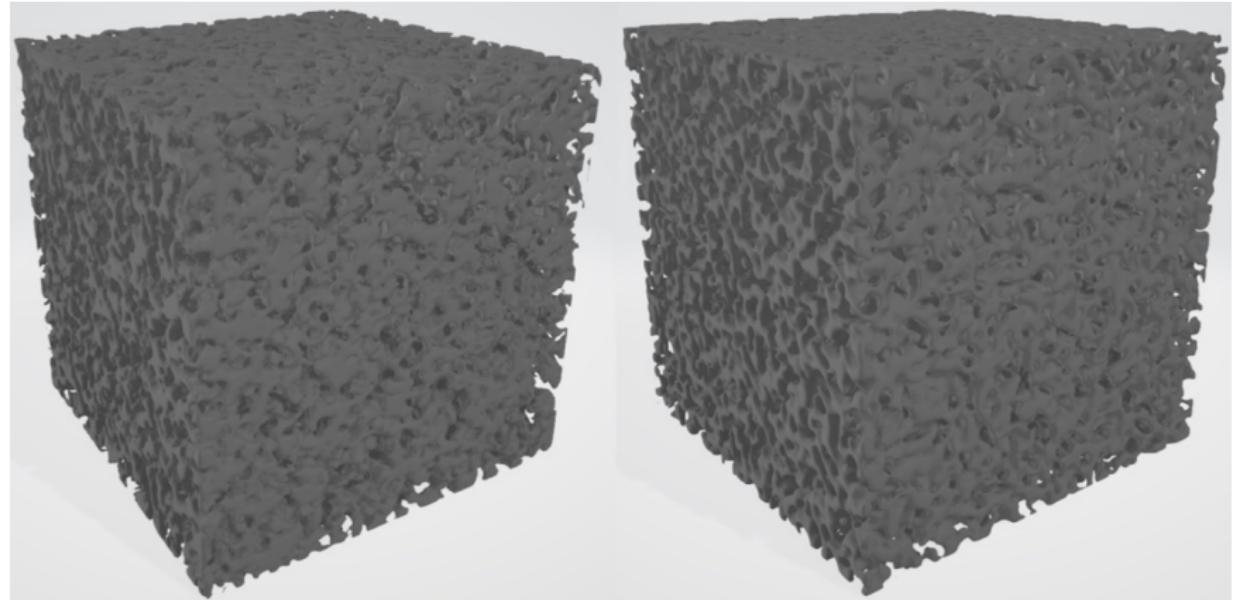


Рис. 12: Построение пористой среды с помощью шума Перлина (слева) газового фрактала (справа)