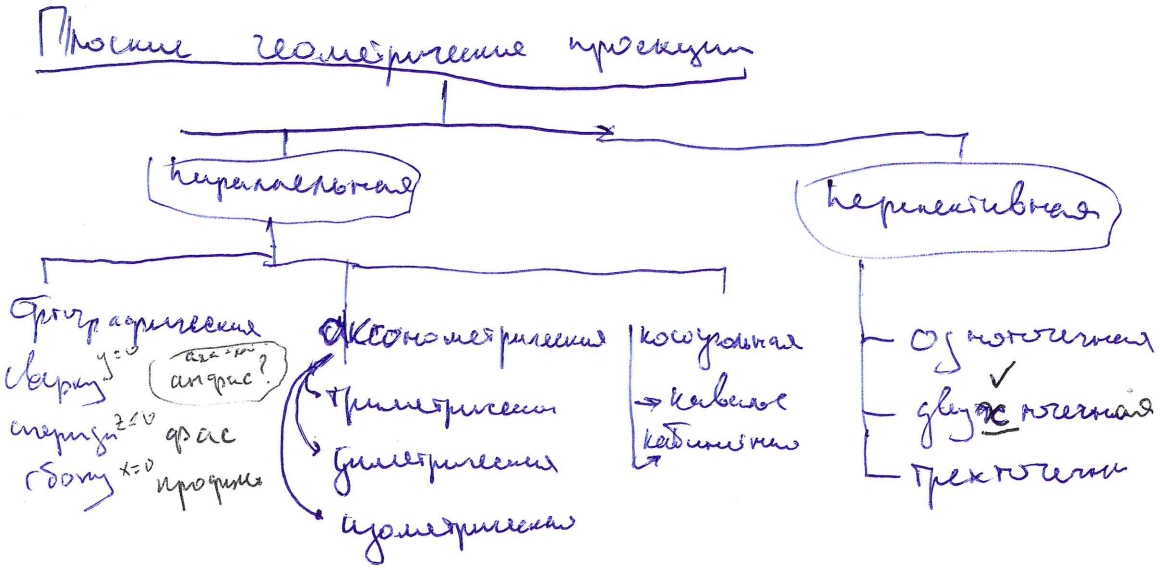
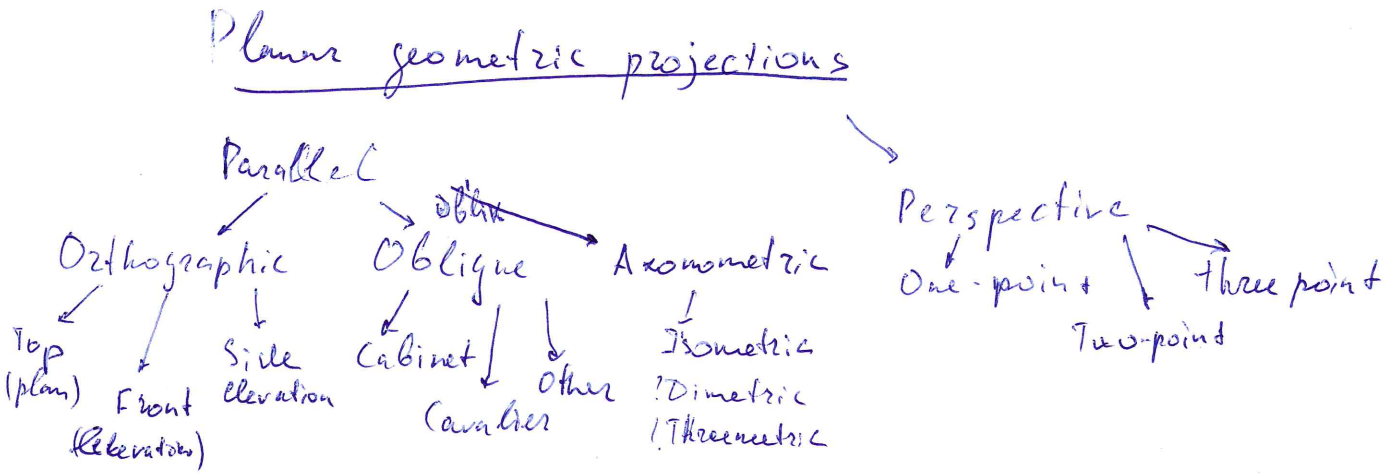

Плоские геометрические проекции
параллельные
перспективные
ортографические
вид спереди
вид сверху
вид сбоку
аксонометрические
прямоугольная
косоугольная
косые
кабинетные
одноточечная
двухточечная
трехточечная


Plane geometric projections
Parallel
Perspective
Orthographic
Oblique
Axonometric
Top (plan)
Front (Elevation)
Side elevation
Cabinet
Cavalier
Other
Isometric
Dimetric
Trimetric
One-point
Two-point
three point

Борисов

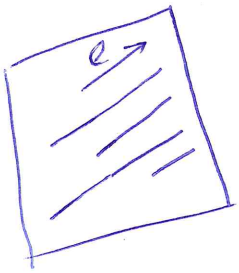
Проектирование

преобразование, ставящее т. $\in \mathbb{R}^3$ в соответствие точки на нек. плоскости, называют картиной

Два вида параллельное
перспективное

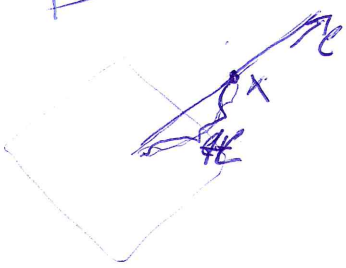
Параллельное

$S: (n,x)+d=0$ — уравнение плоскости $\in \mathbb{R}^3$ $\quad S: (n,x)+d=0$



l → вектор вдоль к-ого осущ. проектирование

$(l,n) \neq 0$ $\quad$ X → проект. точки в пространстве

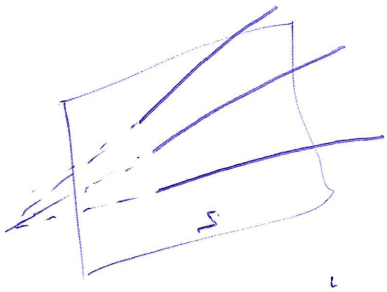


$(X+tl,n)+d=0$ → уравнение плоскости, куда проект.

$t = -\dfrac{d+(x,n)}{(l,n)}$ ← как вычислить t

$y = x+tl$ $\qquad$ $X = X_0 + lt$

Перспективное проектирование

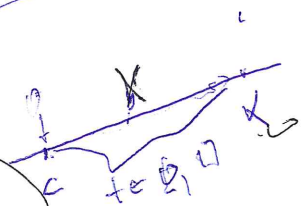


$S: (n,x)+d=0$

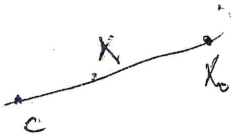
∇. c → центр проектирования.

$X = (1-t)X_c + tX_0,\ t \in [0,1]$

$t = -\dfrac{d+(X_c,n)}{(X,n)-(X_c,n)}$



$X = (1-t)X_c + tX_0$
или
$X = X_0 + (c-X_0)t$



$X_0 + (X_c - X_0)t$

X_c

аксонометрич. проекции

$[R_y]$ ~~~~ по часовой ~~~~ против часовой стрел

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

коэфф. искажения

$$f_x^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \sin^2\theta$$

$$f_y^2 = \cos^2\theta$$

$$f_z^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\theta$$

$$\overbrace{\cos^2\varphi}^{1-\sin^2\varphi} + \sin^2\varphi \sin^2\theta = \overbrace{\cos^2\theta}^{1-\sin^2\theta}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

~~$\sin^2\theta + (1-\sin^2\theta)(1-\sin^2\varphi)\sin^2\theta = 0$~~

~~$f_z^2 = 0$~~ $(1-\sin^2\theta)(1-\sin^2\varphi) = 0$

~~$\cos^2\theta \cos^2\varphi = f_z^2$~~

$$\cos^2\varphi \cdot \cos^2\theta = 1$$

$\frac{1}{2}$? $\frac{1}{3}$.

диметрия $f_x^2 = f_y^2$

изометр. $f_y^2 = f_z^2$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1}{3}$$

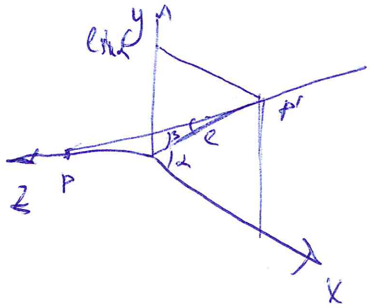
$$\cos^2\theta = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \sin^2\theta$$

$$1-\sin^2\theta = \sin^2\varphi + (1-\sin^2\varphi)\cdot\sin^2\theta$$

$$1-2\sin^2\theta = \sin^2\varphi(1-\sin^2\theta)$$

$$1-2\sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}(1-\sin^2\theta)$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{3}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

$a = f\cos\alpha$
$b = f\sin\alpha$
$\beta = \operatorname{arcctg}(f)$

$a = l\cos\alpha$
$b = l\sin\alpha$
$\beta = \operatorname{arcctg}(l)$

$$|x\ y\ z| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{vmatrix}$$

$a = l\cdot\cos\alpha$
$b = l\sin\alpha$

$\frac{l}{z} = \operatorname{ctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

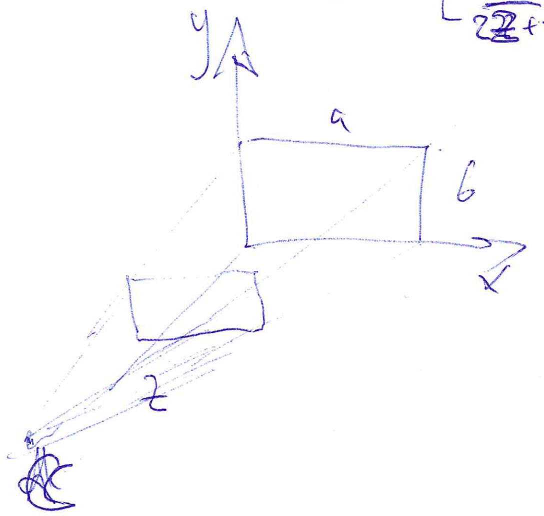
Перспективная проекция

$$[x\ y\ z\ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x\ \ y\ \ 0\ \ 2z+1]$$

$$\left[\frac{x}{2z+1}\ \ \frac{y}{2z+1}\ \ 0\ \ 1\right]$$

7.10. $z = -0,1$

7.5 $z = -0,2$



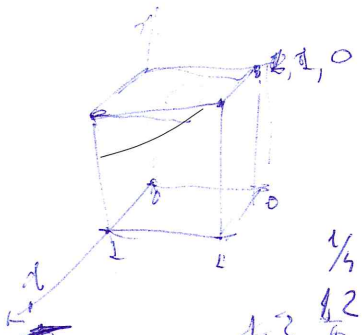
$$[1\ \ 1\ \ 0\ \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1\ \ 1\ \ 0\ \ (-0,1+1)] = \left[\frac{1}{0,9}\ \ \frac{1}{0,9}\ \ 0\ \ 1\right]$$

$0,9$; $1,1$ $1,1$

$t = 1,0 \Rightarrow z = 0,1$

1 , 2 , 3 ○



$\frac{4}{5} \cdot 9$

$\frac{1}{4} + 1 = 1,25$

$1,2 \quad \frac{12}{10} \quad \frac{3}{5}$

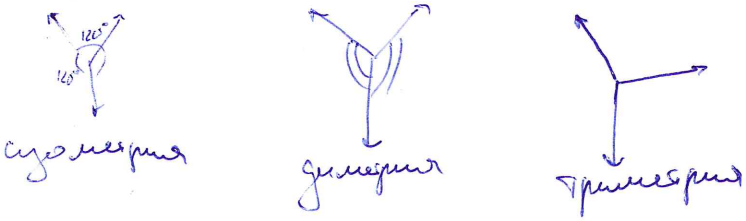
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 & 1 & +0,2+1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 1,1 & 1 & 1,2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,8 & 0,8 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Аксонометрические проекции



триметрия диметрия изометрия

$\varphi \Rightarrow y$ – вращение относительно

$\Theta \Rightarrow x$ осей

$$\underset{[R_y]}{\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{[R_x]}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & +\sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{[P_z]}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{matrix} x_i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} y_i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\Theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & 0 & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Коэфф. искажения $f_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$

$f_x^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\Theta$

$f_y^2 = \cos^2\Theta$

$f_z^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\Theta$

триметрия $f_z^2 \neq f_y^2 \neq f_x^2$

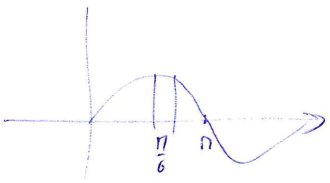
диметрия $f_x^2 = f_y^2 \neq f_z^2$

изометрия $f_x^2 = f_y^2 = f_z^2$

изометрия $30 = \frac{\pi}{6} = \frac{60}{6}$

$120^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



cos

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\Theta = \cos^2\Theta$

$1 - \sin^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\Theta = 1 - \sin^2\Theta$

$\sin^2\Theta - \sin^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\Theta = 0$

~~$\sin^2\varphi = -\sin^2\Theta(1 + \sin^2\varphi)$~~

$\sin^2\varphi = \frac{-\sin^2\Theta}{\sin^2\varphi - 1} \cdot \frac{\sin^2\Theta}{1 - \sin^2\Theta}$

$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\Theta}{1 - \sin^2\Theta}$

$$\begin{cases} \sin^2\varphi = \frac{\sin^2\Theta}{1 - \sin^2\Theta} \\ f_z^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \sin^2\Theta = \cos^2\Theta \end{cases}$$

$\sin^2\varphi \cdot \sin^2\Theta = \sin^2\varphi - \sin^2\Theta$

$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\Theta} - 1$

аксонометрическая проекция

$|P^*_z| = 0$ добиться можно с помощью
аффин. преобразования | матриц поворота (углы Эйлера)

изометрия → в плоскости проекций углы м/у каждой парой осей равны

диметрия → в плоскости проекций равны м/у собой 2 угла м/у осями

триметрия → в пл-сти проек. все 3 угла м/у собой различны.

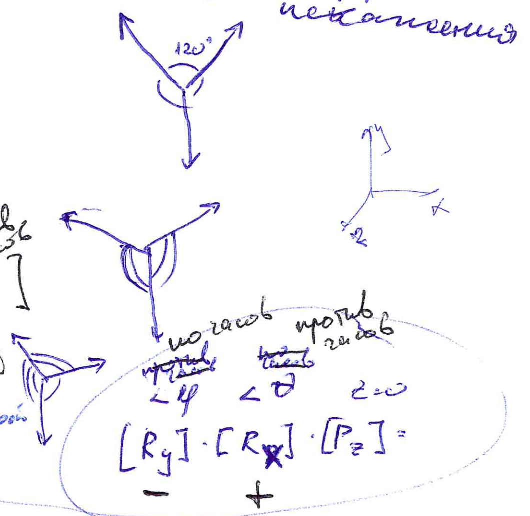
$f_\gamma = \sqrt{x_\gamma^{*2} + y_\gamma^{*2}}$

f_γ → коэффициент искажения

$p' = p[-\sin\varphi]$

M_y φ на y по часовой
M_x θ на x против часовой
P_z пар. проек на пл. $z=0$

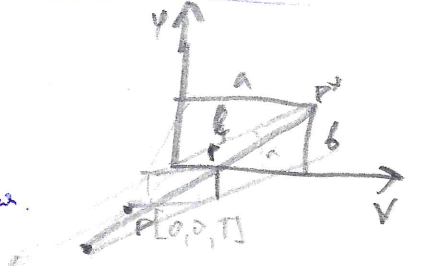
по часов / против часов
$\angle\varphi$ $\angle\theta$ $z=0$
$[R_y]\cdot[R_x]\cdot[P_z] =$
$-$ $+$



Косоугольная проекция

Перспективная проекция (более реалистичная проекция)

вид проекции, где лучи проецирования исходят из одного центра (центр проецирования), размещенного на конечном расстоянии от объектов и плоскости проецирования.



$$[E_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$d_z = -\frac{1}{z}$

$[x\ y\ z\ 1]\cdot[E_z] = [x\ y\ 0\ zz]$

$$p_i' = p_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$z = -0,1 \Rightarrow 10$ $z \neq 0$

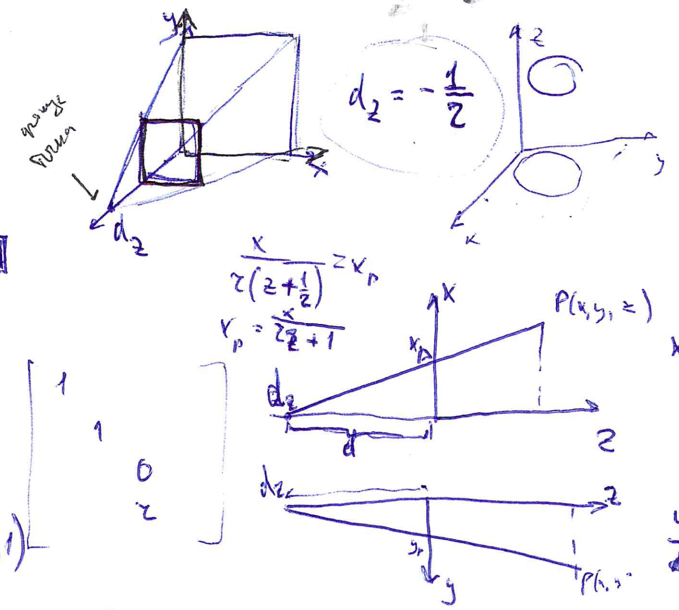
$$(x^*, y^*, z^*, 1) = \left(\frac{x}{px + qy + zz + 1}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}, 1\right)$$

$\frac{x}{z(z+\frac{1}{z})} = x_p$

$x_p = \frac{x}{zz+1}$

$x_p = \frac{x}{zz+1}$

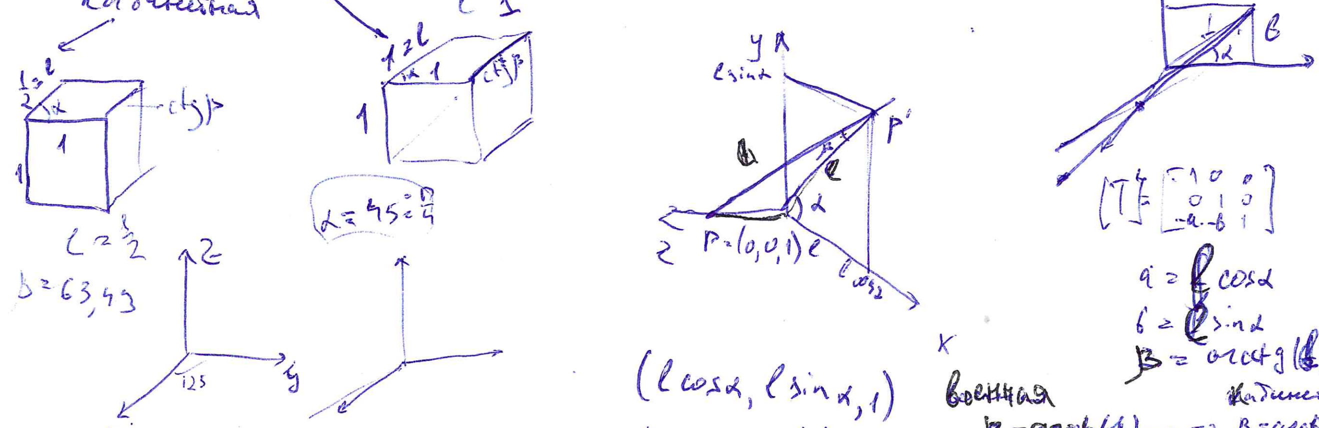
$y_p = \frac{y}{zz+d}$



Косоугольная → проекция, проектирующие прямые образуют с плоскостью проекции угол отл. от $90°$

cavalier (свободная) военная
кабинетная

$\alpha = 30°$
$\alpha = 45°$



$l = \frac{1}{2}$
$\beta = 63,43$

$\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$

$(l\cos\alpha, l\sin\alpha, 1)$
$\beta = \operatorname{arcctg}(l)$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

$a = l\cos\alpha$
$b = l\sin\alpha$
$\beta = \operatorname{arcctg}(l) =$

военная $\beta = \operatorname{arcctg}(1) = 45°$
кабинетная $\beta = \operatorname{arcctg}(\frac{1}{2}) = 63,4$