

Проецирование

Быковских Дмитрий Александрович

04.10.2025

Общая информация

Проецирование — преобразование, ставящее точки трехмерного пространства в соответствие точки на плоскости.

$$f : R^3 \rightarrow R^2$$

Виды проецирования

- параллельные;
- перспективные.

2025-10-10

Проецирование

└ Математический взгляд

└ Общая информация

Общая информация

Проецирование — преобразование, ставящее точки трехмерного пространства в соответствие точки на плоскости.

$$f : R^3 \rightarrow R^2$$

Виды проецирования

- параллельные;
- перспективные.

Параллельное проектирование

Плоскость проекции

$$P: n \cdot M + d = 0$$

Лучи проектирования

$$r = r_0 + tl$$

Должно выполняться условие

$$n \cdot l \neq 0$$

Найдем точки пересечения

$$n \cdot (r_0 + tl) + d = 0$$

$$t = -\frac{n \cdot r_0 + d}{n \cdot l}$$

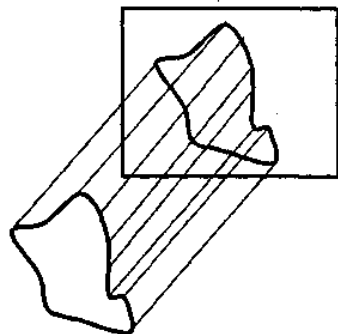


Рис. 1: Схема параллельного проектирования

2025-10-10

Проецирование

└ Математический взгляд

└ Параллельное проектирование

Параллельное проектирование
Плоскость проекции
 $P: n \cdot M + d = 0$
Лучи проектирования
 $r = r_0 + tl$
Должно выполняться условие
 $n \cdot l \neq 0$
Найдем точки пересечения
 $n \cdot (r_0 + tl) + d = 0$
 $t = \frac{n \cdot r_0 + d}{n \cdot l}$



Рис. 1: Схема параллельного проектирования

$$P: n \cdot (M - M_0) = 0$$

Откуда следует, что $d = -n \cdot M_0$

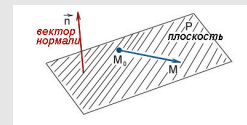


Рис. 2: Уравнение плоскости

Векторное параметрическое уравнение прямой

$$r = r_0 + tl$$

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + tl_x \\ y = y_0 + tl_y \\ z = z_0 + tl_z \end{cases}$$

Перспективное проецирование

Плоскость проекции

$$P : n \cdot M + d = 0$$

Лучи проецирования

$$r = (1 - t)r_c + tr_0$$

Найдем точки пересечения

$$n \cdot [r_c + t(r_0 - r_c)] + d = 0$$

$$t = -\frac{n \cdot r_c + d}{n \cdot r_0 - n \cdot r_c}$$

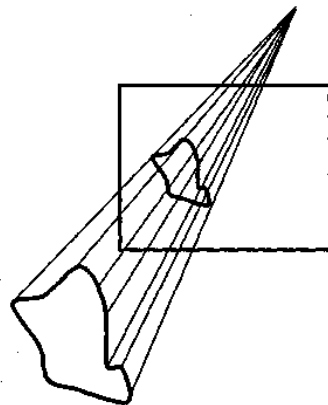


Рис. 3: Схема перспективного проецирования

2025-10-10

Проецирование

└ Математический взгляд

└ Перспективное проецирование

Перспективное проецирование

Плоскость проекции

$$P : n \cdot M + d = 0$$

Лучи проецирования

$$r = (1 - t)r_c + tr_0$$

Найдем точки пересечения

$$n \cdot [r_c + t(r_0 - r_c)] + d = 0$$

$$t = -\frac{n \cdot r_c + d}{n \cdot r_0 - n \cdot r_c}$$

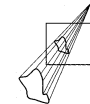


Рис. 3: Схема перспективного проецирования

Проецирование называется перспективным, если проецирующие лучи, с помощью которых строится проекция предмета, исходят из одной точки.

Проецирование

Плоские геометрические проекции

- параллельные
 - ортографические
 - вид спереди
 - вид сверху
 - вид сбоку
 - аксонометрические
 - триметрическая
 - диметрическая
 - изометрическая
 - косоугольные
 - кавалье
 - кабине
- перспективные
 - одноточечная
 - двухточечная
 - трехточечная

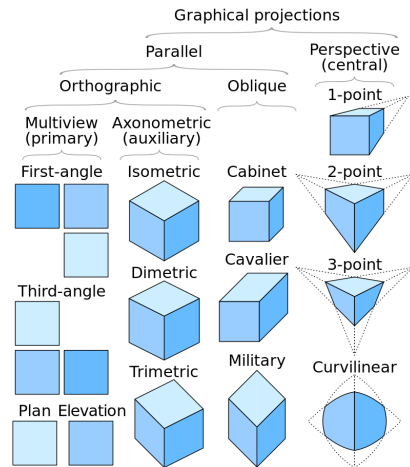


Рис. 4: Виды плоских проекций



2025-10-10

Проецирование

Проецирование

Проецирование

В ортогональных (ортографических и аксонометрических) проекциях направление проецирования является нормалью к проекционной плоскости (ортографическая и аксонометрическая);

В косоугольных проекциях направление проецирования и нормаль к проекционной плоскости не совпадают.



Рис. 4: Виды плоских проекций

Ортографические проекции

Самой простой из параллельных проекций, используемый обычно в инженерных чертежах.

Делится на

- вид спереди (анфас);
- вид сверху (план);
- вид сбоку (профиль).

В этом случае точно изображаются правильные или «истинные» размер и форма одной плоской грани объекта.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2025-10-10

Проецирование

Проецирование

Ортографические проекции

Ортографические проекции

Самой простой из параллельных проекций, используемый обычно в инженерных чертежах.
Делится на

- вид спереди (анфас);
- вид сверху (план);
- вид сбоку (профиль).

В этом случае точно изображаются правильные или «истинные» размер и форма одной плоской грани объекта.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

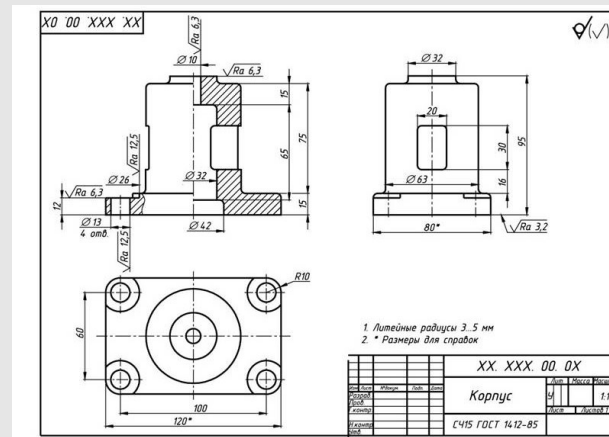


Рис. 5: Пример чертежа

АксонOMETрические проекции

Строятся с помощью матриц поворота (углов Эйлера).

Виды

- Изометрическая проекция.
В плоскости проекции углы между каждой парой осей равны.
- Диметрическая проекция.
В плоскости проекции равны лишь 2 угла между осями.
- Триметрическая проекция.
В плоскости проекции все 3 угла между собой различны.

Примечание:

АксонOMETрия в переводе с греческого означает измерение по осям.

2025-10-10

Проецирование
└ Проецирование

└ АксонOMETрические проекции

АксонOMETрические проекции

Строятся с помощью матриц поворота (углов Эйлера).

Виды

- Изометрическая проекция.
В плоскости проекции углы между каждой парой осей равны.
- Диметрическая проекция.
В плоскости проекции равны лишь 2 угла между осями.
- Триметрическая проекция.
В плоскости проекции все 3 угла между собой различны.

Примечание:

АксонOMETрия в переводе с греческого означает измерение по осям.

Матрица аксонOMETрического проецирования

$$M_{r,y}(\phi)M_{r,x}(\theta)M_t =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Расчет координат вершин после аксонOMETрического проецирования

$$\begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АксонOMETрическое проецирование

Коэффициенты искажения

$$f_i = \sqrt{f_{x,i}^2 + f_{y,i}^2 + f_{z,i}^2},$$

где $i \in \{x, y, z\}$.

Система уравнений, состоящая из коэффициентов искажения

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

2025-10-10

Проецирование
└ Проецирование

└ Аксонометрическое проецирование

АксонOMETрическое проецирование

Коэффициенты искажения

$$f_i = \sqrt{f_{x,i}^2 + f_{y,i}^2 + f_{z,i}^2},$$

где $i \in \{x, y, z\}$.

Система уравнений, состоящая из коэффициентов искажения

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

Для триметрической проекции

$$f_x^2 \neq f_y^2 \neq f_z^2$$

Для диметрической проекции

$$f_x^2 = f_y^2 \neq f_z^2$$

Для изометрической проекции

$$f_x^2 = f_y^2 = f_z^2$$

Геометрическая интерпретация

Коэффициенты искажения возникают из-за того, что трёхмерная система координат поворачивается в пространстве перед проецированием на плоскость. Это приводит к сокращению видимых длин всех осей.

АксонOMETрическое проецирование

Нахождение углов Эйлера

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

Изометрия

$$f_x^2 = f_y^2 = f_z^2 \quad \begin{cases} f_x^2 = f_y^2 \\ f_y^2 = f_z^2 \end{cases}$$

$$\sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$



Рис. 6: Fallout

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{3} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{2}$$

2025-10-10

Проецирование

Проецирование

АксонOMETрическое проецирование

АксонOMETрическое проецирование

Нахождение углов Эйлера

$$\begin{cases} f_x^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \\ f_y^2 = \cos^2 \theta \\ f_z^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \end{cases}$$

Изометрия

$$f_x^2 = f_y^2 = f_z^2 \quad \begin{cases} f_x^2 = f_y^2 \\ f_y^2 = f_z^2 \end{cases}$$

$$\sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{3} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{2}$$

Рис. 6: Fallout



$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$(1 - \sin^2 \phi) + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\sin^2 \theta - \sin^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta = 0$$

$$\sin^2 \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

Теперь

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \phi + (1 - \sin^2 \phi) \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \phi (1 - \sin^2 \theta) = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

После подстановки

$$\sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$$

Косоугольное проецирование

Проекция, где проецирующие прямые образуют с плоскостью проекции угол отличный от 90° . Поскольку проекционная плоскость перпендикулярна главной координатной оси, то сторона объекта, параллельная этой плоскости, проецируется так, что можно измерить углы и расстояния. При этом проецирование других сторон объекта также допускает проведение линейных измерений вдоль главных осей (но не угловых).



Рис. 7: Postal

2025-10-10

Проецирование
└ Проецирование

└ Косоугольное проецирование

Косоугольное проецирование

Проекция, где проецирующие прямые образуют с плоскостью проекции угол отличный от 90° . Поскольку проекционная плоскость перпендикулярна главной координатной оси, то сторона объекта, параллельная этой плоскости, проецируется так, что можно измерить углы и расстояния. При этом проецирование других сторон объекта также допускает проведение линейных измерений вдоль главных осей (но не угловых).



Рис. 7: Postal

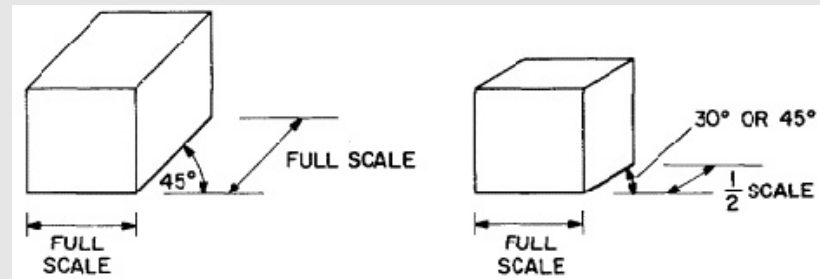


Рис. 8: Косоугольные проекции: кавалье (слева); кабине (справа)

Косоугольное проецирование

Матрица косоугольной проекции имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l \cos \alpha & -l \sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

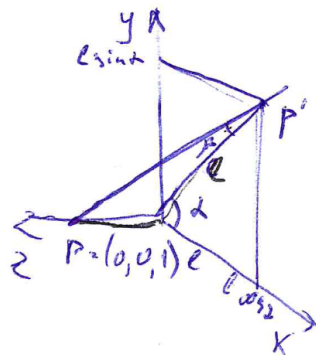


Рис. 9: Схема построения косоугольной проекции

2025-10-10

Проецирование
└ Проецирование

└ Косоугольное проецирование

Косоугольное проецирование

Матрица косоугольной проекции имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l \cos \alpha & -l \sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Рис. 9: Схема построения косоугольной проекции

Смещение координат вершин на плоскости проекции

$$\begin{cases} p_x^* = p_x + t_x p_z \\ p_y^* = p_y + t_y p_z \\ p_z^* = 0 \end{cases}$$

Цепочка преобразований

$$\begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_x & t_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + t_x p_z \\ p_y + t_y p_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

Перспективное проецирование

Вид проекции, где лучи проецирования исходят из точки (центр проецирования), размещенной на конечном расстоянии от объектов и плоскости проецирования.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

В этом случае точки фокуса имеют координаты:
 $c_x = (-\frac{1}{p}, 0, 0)$, $c_y = (0, -\frac{1}{q}, 0)$,
 $c_z = (0, 0, -\frac{1}{r})$

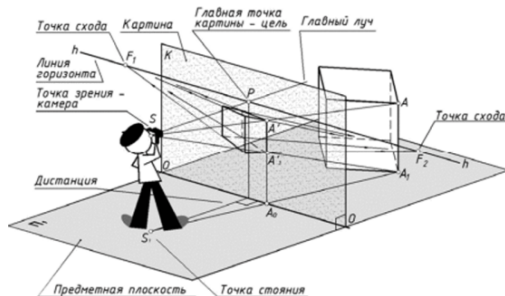


Рис. 10: Перспективная проекция

2025-10-10

Проецирование

Проецирование

Перспективное проецирование

Перспективное проецирование

Вид проекции, где лучи проецирования исходят из точки (центр проецирования), размещенной на конечном расстоянии от объектов и плоскости проецирования.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В этом случае точки фокуса имеют координаты:
 $c_x = (-\frac{1}{p}, 0, 0)$, $c_y = (0, -\frac{1}{q}, 0)$,
 $c_z = (0, 0, -\frac{1}{r})$

Рис. 10: Перспективная проекция

Цепочка преобразований

$$\begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T \neq \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ p_z \cdot r + 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \frac{p_x}{p_z \cdot r + 1} \\ \frac{p_y}{p_z \cdot r + 1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p_x}{p_x \cdot p + p_y \cdot q + p_z \cdot r + 1} \\ \frac{p_y}{p_x \cdot p + p_y \cdot q + p_z \cdot r + 1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

Перспективное проецирование

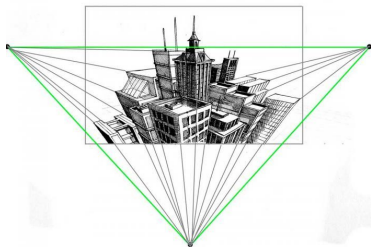
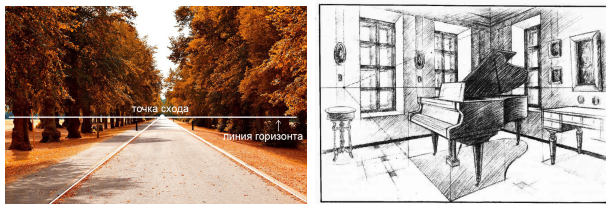


Рис. 11: Виды перспективных проекций: одноточечная (фронтальная), двухточечная (угловая), трехточечная (вертикальная)

2025-10-10

Проецирование
└ Проецирование

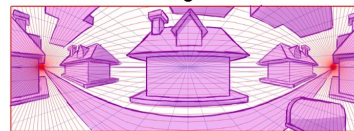
└ Перспективное проецирование

Перспективное проецирование



Рис. 11: Виды перспективных проекций: одноточечная (фронтальная), двухточечная (угловая), трехточечная (вертикальная)

⑦ Draw the big shape first on the grid



This is called a banana pan. These kinds of backgrounds are often used for a horizontal pan. A pan is when the camera horizontally moves from one

point to another (I'll explain more later about camera movement)

⑧ sketch on top of those shapes and add shadow



Рис. 12: Виды перспективных проекций: другие (мультиточечная)