Théorie des jeux

Sébastien Hémon
LRDE – EPITA

Septembre 2006

1 Introduction

1.1 Du célèbre *Dieu joue-t-il aux dés ?*

La théorie des jeux existe depuis très longtemps. Son essor est dû principalement à John Von Neumann qui a présenté l'intérêt que l'on pouvait avoir à étudier certaines situations en tant que jeu. Le concept de jeu est très simple : les joueurs (ou agents) doivent prendre des décisions (les stratégies). En fonction des choix de tous, on calcule des gains (les utilités).

Les différentes interprétations que l'on peut avoir de ces notions sont vastes et multiples : si vos agents sont les représentants d'espèces animales, que les gains sont les proportions de survivants et que les stratégies sont les comportements possibles, vous obtenez un modèle de la propagation de l'espèce en fonction de ses concurrentes.

Si vos agents sont boursiers, les stratégies leurs ventes/achats d'actions et les utilités les gains, on obtient un modèle du marché boursier.

On peut aussi se contenter de choisir pour agents des joueurs, pour stratégies les différents choix possibles et pour gains les célèbres “gagné”, “perdu” et “match nul” pour obtenir la modélisation d'un jeu au sens commun.

Si il semble facile de présenter cela comme ça, il n'en reste pas moins difficile de construire les-dits modèles et de trouver les réponses aux questions que l'on se pose.

1.2 Tenants et aboutissants

Quelles sont les profits que l'on peut tirer de la théorie des jeux ? En réalité, la théorie des jeux est vague et il serait difficile de bien fixer sa frontière. Les principaux intérêts sont cependant les suivants :

- Un jeu est-il profitable ou non pour un joueur fixé ? Autrement dit, a-t-il intérêt à jouer ?
- Comment tirer profit de mes stratégies ? Donc, quelles stratégies dois-je viser ?
- Comment construire une bonne stratégie ? On peut s'intéresser à la manière dont la stratégie doit être “calculée”.

- Le jeu est-il complexe ? Suis-je capable d'en connaître concrètement tous les aspects ?

  On distingue aussi de nombreux types de jeux : algorithmiques, probabilistes, contre la nature, sémantiques, combinatoires etc ...

  C'est exactement pourquoi il n'existe pas de définition rigoureuse d'un jeu. Il n'est donné que des définitions de leurs différentes représentations possibles, chacune dédiée à l'étude d'un aspect bien déterminé du jeu.

2 Formes et représentations des jeux

2.1 Les éléments des jeux

Les trois principaux critères de jeux sont donc les joueurs, leurs stratégies et leurs gains.

On notera généralement $\mathcal{P}$ l'ensemble des joueurs. A l'exception de quelques modélisations pathologiques en macroéconomie, cet ensemble est généralement fini. En tout cas, nous l'assumerons, sauf mention expresse du contraire. On peut munir cet ensemble d'un ordre total dans le cas où nos joueurs doivent jouer à tour de rôle. Si $\mathcal{P}$ n'est pas ordonné, on dira que le jeu est *simultané*.

Il faut faire attention aux définitions données aux stratégies : dans un jeu, la stratégie est généralement la donnée complète de ce qu'effectue un joueur durant le jeu et non pas l'une des actions d'un coup donné. Ceci implique qu'en termes mathématiques, une stratégie est une fonction qui, étant donné un historique de la partie, renvoie le coup suivant. Il est parfaitement possible de suggérer qu'un joueur possède pour stratégie un enchaînement de coups déterminé aléatoirement, mais nous verrons plus tard ce genre de modélisation. Pour simplifier l'état actuel des choses, on notera $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des stratégies de $p \in \mathcal{P}$.

Le gain d'un joueur est déterminé à l'issue d'un jeu. Il s'agit d'une donnée spécifique à chaque joueur qui renvoie le montant des gains en fonction de la partie jouée.

Ainsi, en notant $u_p : \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{S}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dite d'*utilité* du joueur p, on obtient que si $s = (s_1, \dots, s_n)$ est un élément de $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{S}_p$, appelé *profil stratégique*, on a alors que $u_p(s)$ est le gain de p pour la partie dans laquelle chaque joueur p_i a joué la stratégie s_i.

Pour les cas particuliers de jeu type *victoire, nul ou défaite*, on prendra pour convention que u_p sera à valeurs dans $\{-1; 0; 1\}$ pour chaque joueur p et on interprétera les symboles *victoire, nul, défaite* par les valeurs $1,\ 0,\ -1$ respectivement.

2.2 Jeux sous forme extensive

La forme extensive d'un jeu est un arbre dans lequel on décrit les phases successives du jeu en énonçant tous les choix possibles pour chaque joueur à partir de chaque situation. On pourra potentiellement étiqueter chaque noeud par une valeur de gain, un nom de stratégie ou de joueur afin d'accommoder le graphe d'informations utiles à l'étude réalisée.

On commencera par redonner la définition d'un arbre :

Definition 2.2.1 (Arbre)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. G est un arbre si, et seulement si, G est connexe et le degré entrant de tout sommet est exactement 1, à l'exception d'un unique élément, appelé racine ou sommet, dont le degré entrant est 0.*

On pourrait vérifier, mais on le sait déjà, qu'un arbre est le graphe associé à une relation d'ordre partiel possédant un plus petit élément (à savoir la racine). En réalité, tout ordre partiel ayant un plus petit élément admet pour graphe un arbre, ce qui en fait des notions équivalentes.

Cette structure d'ordre permet de définir une fonction $pred$ qui à tout sommet autre que la racine associe l'unique sommet qui le précède au sens de l'ordre associé. On peut aussi construire des ensembles $succ(x)$ pour tout sommet x qui constitue l'ensemble des successeurs de x.

On appelle *chemin* d'un arbre une liste ordonnée finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de sommets telle que :

$$\forall i \leq n \;\; x_{i+1} \in succ(x_i)$$

et x_0 est la racine de l'arbre. Parfois, on se contentera d'écrire $\pi = x_0 x_1 \ldots x_n$ pour décrire un chemin d'arbre.

Ces notions rappelées, revenons à la théorie des jeux :

Definition 2.2.2. *Un jeu sous forme extensive est un arbre fini, d'ensemble de noeuds N appelés les* états du jeu*, dont T est le sous-ensemble (non vide) des éléments terminaux, muni des données suivantes :*

- *Une fonction $P : N/T \longrightarrow \mathcal{P}$ qui indique pour le noeud x le joueur qui joue.*
- *Un ensemble d'actions $\mathcal{A}$.*
- *Pour chaque noeud $x \in N$, une fonction d'actions $A_x : succ(x) \longrightarrow \mathcal{A}$ injective. Ainsi, si t est un successeur de x dans l'arbre, $A_x(t)$ est l'action effectuée par $P(x)$ en x pour que le jeu prenne l'état t.*

Remarque : On pourrait aussi définir une fonction d'action A_x comme étant la fonction qui, étant donnée une action renvoie le noeud obtenu lorsque $P(x)$ joue cette action. Il faudrait simplement ajouter un symbole $\perp$ pour exprimer le fait qu'une action n'est pas forcément jouable. Ces deux données sont équivalentes.

On pourra ensuite décrire les stratégies d'un joueur p comme des fonctions partielles σ_p définies sur les chemins de l'arbre.

$$\sigma_p(\pi) = \sigma_p(x_0 x_1 \ldots x_n) = \begin{cases} \perp & \text{si } P(x_n) \neq p \\ a \in A_{x_n}(succ(x_n)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le nombre de stratégies par joueur étant ainsi le nombre de telles fonctions que l'on peut créer de cette manière pour chaque joueur.

Enfin, on peut éventuellement étiqueter les noeuds terminaux de l'arbre par les valeurs des gains obtenus pour chaque joueur lorsque la partie s'achève par cet état. Ainsi, si $x \in T$, on a pour gain de p l'utilité $u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|})$ avec pour condition que le profil stratégique permet d'aboutir à x, c'est-à-dire, en particulier, que $\sigma_{P(pred(x))}(pred(x)) = A_{P(pred(x))}(x)$.

Une construction formelle de ces concepts peut se faire, mais cela est longue et fastidieuse : mieux vaut l'adapter au cas par cas.

exemples: donnés en cours

2.3 Jeux sous forme matricielle

Plus adaptée aux jeux à deux joueurs, mais bien que l'on puisse aussi décrire par ce moyen des jeux de plus de deux joueurs, cette représentation est directement issue des bases de la théorie des jeux. On confond souvent jeux sous forme normale et jeux sous forme matricielle car ils sont très liés à cause des exemples choisis : en général, les jeux sous forme normale s'étudient assez simplement lorsque l'on passe au préalable par la représentation matricielle.

Nous verrons plus tard ce lien. Pour le moment, nous souhaitons simplement parcourir l'ensemble des représentants des jeux en établissant leurs utilités respectives.

Les jeux sous forme matricielle ont pour attrait de permettre de lire rapidement les stratégies dominées, soit celles qu'il est inutile de jouer parce que d'autres fourniront plus de gain à coup sur. Cette représentation permet de lire rapidement ses intérêts ainsi que ceux des adversaires.

Definition 2.3.1 (jeu sous forme matricielle)**.** *Soient A et B deux joueurs, d'ensembles de stratégies respectifs S et T finis. Si u_1 et u_2 sont leurs fonctions d'utilité respectives, alors la matrice $\Gamma = ((u_1(s,t); u_2(s,t)))_{(s,t)\in S\times T}$ est le jeu matriciel associé.*

Remarquons que dans le cas de plus de deux joueurs, la matrice n'est plus représentable autrement que mathématiquement, car il s'agira d'un tableau en forme de cube ou d'hypercube généralisé, dont chaque entrée sera un vecteur de dimension égale au tableau.

exemples: donnés en cours

2.4 Jeux sous forme normale

La forme normale d'un jeu est celle qui permet d'étudier les rapports entre stratégies et gains lorsqu'un même jeu se repète longuement. Contrairement à la représentation sous forme extensive, elle ne permet nullement de comprendre comment construire ses propres stratégies. Cette représentation est très célèbre à cause du théorème qui va avec : le théorème de Nash.

Definition 2.4.1 (Forme normale)**.** *A partir des données $\mathcal{P}$, $(\mathcal{S}_p)_{p\in\mathcal{P}}$ et des fonctions d'utilités $(u_p)_{p\in\mathcal{P}}$ d'un jeu Γ, on crée sa forme normale $\mathcal{N}\Gamma$ ainsi :*

- *L'ensemble des joueurs est inchangé.*

- *L'ensemble des stratégies d'un joueur p est maintenant l'ensemble des distributions de probabilités sur $\mathcal{S}_p$, autrement dit, des fonctions $f : \mathcal{S}_p \longrightarrow [0;1]$ qui vérifient $\int_{\mathcal{S}_p} f = 1$ et $f \geq 0$.*

- *Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|}$ sont les stratégies aléatoires suivant les lois induites par les distributions jouées par chaque joueur, on a que le gain de p est maintenant $\mathbb{E}(u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|}))$, c'est-à-dire l'espérance mathématique des stratégies jouées.*

On a alors le vocabulaire suivant :

On appelle *stratégie pure* les éléments de $\mathcal{S}_p$. Ils seront parfois assimilés aux distributions dégénérées qui valent 1 en un point donné et 0 ailleurs.

On appelle *stratégie mixte* une distribution sur $\mathcal{S}_p$.

On appelle *profil stratégique mixte* un $|\mathcal{P}|$-uplet qui énumère pour chaque joueur p une stratégie mixte de p.

On notera alors plus facilement $u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|})$ le gain (moyen) pour le profil stratégique mixte $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|})$.

Comme annoncé, le très beau résultat de John Nash dit que tout jeu sous forme normale admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes, autrement dit, que pour tout jeu, le jeu sous forme normale associé admet un équilibre de Nash. Pour comprendre cela, il faut définir cette notion, ce que nous ferons ultérieurement.

exemples: donnés en cours

2.5 Jeux sous forme syntaxique

Pour ceux qui n'ont pas fait de théorie des modèles, cela va s'avérer compliqué. Pour les autres, il s'agira simplement de dire succintement ce dont il s'agit.

Etant donné un langage, on peut tout simplement axiomatiser les règles d'un jeu et dire qu'un modèle de la théorie obtenue est une partie. La plupart du temps, la logique classique n'est pas adaptée et on utilise donc une syntaxe différente de celle vue en cours de théorie des modèles. Nous ne nous attarderons pas sur cette catégorie de jeu, sauf si nous avons le temps de présenter les jeux d'Erhenfreucht-Fraisse qui utilisent la logique classique.

3 Notions de jeux utiles

Certaines notions sont redondantes dans plusieurs jeux, bien que non universelles, et ne peuvent donc pas être introduites dans des parties spécifiques de l'étude des jeux. Nous les récapitulons donc ici.

Definition 3.0.1 (stratégie gagnante)**.** *Etant donné un jeu dans lequel les joueurs ne peuvent avoir pour gain que $0, 1$ ou -1 (symbolisant respectivement nul, victoire et perte), on appelle stratégie gagnante pour le joueur p une stratégie σ_p du joueur p, telle que $u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$ quelles que soient les stratégies $\sigma_i \in S_i$ des autres autres joueurs que p.*

En d'autres termes, jouer une stratégie gagnante assure la victoire du joueur qui la joue. Les tentatives des autres joueurs pour la contrecarrer sont vaines.

Definition 3.0.2 (Préférence)**.** *On peut munir l'ensemble des stratégies d'un joueur p d'une relation $\prec_p$. On parle alors de relation de préférence de p.*

On peut effectuer un classement des comportements des joueurs suivant la nature de leur relation de préférence :

Definition 3.0.3. *Une relation de préférence transitive est dite rationnelle.*

Definition 3.0.4 (Rationnalité)**.** *Un joueur est dit* rationnel *si, et seulement si, sa relation de préférence vérifie :*

$$\sigma'_p \prec_p \sigma_p \Leftrightarrow \forall \sigma_1 \ldots \forall \sigma_{|\mathcal{P}|} \ \ u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma'_p, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|}) \leq u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|})$$

Definition 3.0.5 (Fainéantise)**.** *On assimile maintenant les stratégies à des fonctions (calculables ou non). On dit qu'un joueur est* fainénant *lorsque, si $c(\sigma)$ est la complexité de la stratégie σ, on a :*

$$\sigma \prec \sigma' \Leftrightarrow c(\sigma) \geq c(\sigma')$$

On prend pour convention qu'une fonction non calculable admet une complexité qui domine celle de toute fonction calculable.

Cette notion sert à mesurer l'importance que peut prendre la difficulté à élaborer une bonne stratégie et le fait que l'on doit parfois jouer en temps imparti.

Remarque : La littérature en théorie des jeux est très abondante et les définitions varient autant que certains concepts sont parfois définis ou non. Aucune de nos définitions n'a de valeur absolue à cause du caractère universel de la théorie des jeux. Cette dernière définition est la moins officielle de toutes, car on ne donne généralement pas de nom au joueur qui préfère se simplifier la vie dans un jeu. Les économistes utilisent en revanche énormément l'hypothèse de rationnalité des joueurs (ceci expliquant parfois leurs échecs dans leurs prédictions, car la réalité montre que le comportement de certains agents est plus proche du joueur fainéant que rationnel). L'émergence récente de ces observations, principalement apportée par le développement de l'informatique, fait que cette notion ne saura être trouvée dans la littérature ou dans le vocabulaire d'un théoriste des jeux aguerri.

4 Quelques types de jeu

Ici, nous allons détailler des classes de jeu assez étudiées et voir diverses de leurs applications.

4.1 Poset Games

On écrit Poset pour Partially Ordered Set, ce qui signifie ensemble partiellement ordonné. Commençons par rappeler la notion d'ordre partiel :

Definition 4.1.1. *Soit* $\lhd$ *une relation binaire transitive sur* E*. La relation* $\lhd$ *est un* ordre strict *si elle est anti-réflexive et que l'on ne peut avoir* $x \lhd y$ *et* $y \lhd x$ *simultanément, pour* x, y *des éléments quelconques de* E*. On dit qu'il s'agit d'un* ordre large *si elle est réflexive et anti-symétrique.*

On dira que la relation $\lhd$ *est un ordre si il s'agit d'un ordre strict ou d'un ordre large.*

L'ordre $\lhd$ *est dit* total *si pour tous* x *et* y *de* E*, on a* $x \lhd y$ *ou* $y \lhd x$*. Il est dit* partiel *si il n'est pas total.*

Maintenant que l'on a rappelé ces définitions élémentaires, on peut définir cette classe de jeu :

Definition 4.1.2 (Poset Game)**.** *Un* Poset Game *est un jeu à nombre de joueurs quelconque (généralement, deux) dans lequel les joueurs sont ordonnés et jouent sur un ensemble partiellement ordonné possédant un plus petit élément. Les actions de jeu sont les suivantes :*

-A son tour, un joueur choisit un élément de l'ensemble. Tous les éléments qui lui sont supérieurs au sens de la relation d'ordre partiel sont retirés pour les tours suivants.

-Le joueur qui retire le dernier élément a perdu.

Un plus petit élément est un individu e qui vérifie $e \lhd x$ pour tout x de l'ensemble.

Exemples : Le jeu de Gale, le jeu des diviseurs.

Proposition 4.1.3. *Soient* n *et* p *deux entiers premiers entre eux. Le jeu des diviseurs associé à* n *et* p *est isomorphe au jeu de Gale à taille de jeu fixée.*

Proof. C'est de la réécriture : il suffit de nommer les cases du jeu de Gale et de s'apercevoir que le procédé réciproque convient pour repasser du jeu de Gale au jeu des diviseurs. □

4.1.1 Le jeu des allumettes

Tout le monde se souvient du jeu des allumettes, mais rappellons les règles (généralisées).

Definition 4.1.4 (Jeu des allumettes)**.** *Le jeu des allumettes est un jeu à deux joueurs, non-simultané, dont les gains sont à valeurs dans* $\{-1; 1\}$ *(pas de nul possible) dans lequel on se fixe un entier* N *et une valeur entière* $k < N$*. Sous forme extensive, les états possibles du jeu (pas le nombre de noeuds ! Se sont des étiquettes) sont les éléments de* $\{0; 1; \ldots; N\}$ *et les actions consistent à soustraire une valeur* $1 \leq n \leq k$ *à la valeur d'état actuelle (il y a donc* k *actions). Les noeuds terminaux sont étiquetés par* 0 *et le gain de tout joueur qui mèneà un noeud terminal est* -1*, son adversaire gagnant alors* 1*.*

Proposition 4.1.5. *Le jeu des allumettes n'est pas un Poset Game.*

Proof. L'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égal à N est un ensemble totalement ordonné pour la relation d'ordre usuelle. Or, le jeu consiste à réduire des valeurs dans cet ensemble, au sens de la soustraction usuelle. L'ensemble des états est donc totalement ordonné. □

On appelle aussi les ordres totaux des ordres linéaires (en disposant vos allumettes, vous serez à même de comprendre d'où vient cette expression).

Nous allons maintenant voir un théorème très utile, non spécifique aux Poset Game, mais qui va s'y appliquer.

Théorème 4.1.6 (Zermelo)**.** *Dans tout jeu déterministe à deux joueurs non-simultané pour lequel il n'y a que deux issues : gagner ou perdre (de manière complémentaire pour les deux joueurs), il existe une stratégie gagnante pour un, et un seul, des deux joueurs.*

Ce théorème est très intuitif, mais nous n'effectuerons pas sa démonstration qui provient d'un théorème (aussi de Zermelo) qui affirme que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre. Nous verrons plus tard un théorème qui l'englobe et nous n'aurons plus qu'à l'énoncer comme cas particulier.

Corollary 4.1.7. *Le jeu de Gale admet une stratégie gagnante. Le jeu des allumettes admet une stratégie gagnante.*

Proof. Par le théorème précédant, ces deux jeux admettent une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. □

Théorème 4.1.8 (stratégie gagnante du jeu des allumettes)**.** *Si* $N \equiv 1[k+1]$ *alors le joueur 2 possède une stratégie gagnante au jeu des allumettes. Dans le cas contraire, c'est le premier joueur qui la possède.*

Proof. Soit $N = 1 + q(k+1)$ avec $q \in \mathbb{N}$. On voit tout de suite que si $q = 0$, le joueur 1 perd. Si maintenant on suppose l'assertion vraie pour q fixé, alors lorsque $N = 1 + (q+1)(k+1)$, si le premier joueur joue $1 \leq n_0 \leq k$, il suffit au second joueur de jouer l'entier $k + 1 - n_0$ pour que, après son coup, le joueur 1 se retrouve avec $1 + q(k+1)$ allumettes. Par hypothèse d'induction, le joueur 2 admet alors un stratégie gagnante. Comme il peut se ramener à ce cas quel que soit le choix du joueur 1, le joueur 2. a bien une stratégie gagnante.

Supposons à présent que le nombre d'allumettes est $N = p + 1 + q(k+1)$, avec $1 \leq p \leq k$. Il suffit au premier joueur de jouer l'action p pour que le deuxième joueur se retrouve dans la même situation qu'un premier joueur dans le cas ci-dessus. Dans cette situation, le second joueur admet une stratégie gagnante, mais comme le rôle des joueurs est interverti, on obtient que c'est le joueur 1 qui admet la stratégie gagnante. □

Théorème 4.1.9. *Dans le jeu de Gale, le premier joueur admet une stratégie gagnante.*

Proof. Supposons que le second joueur possède une stratégie gagnante. En tant que joueur 1, jouons le coup qui consiste à n'enlever que le premier carré (le plus grand élément du Poset). A présent, comme par hypothèse, le joueur 2 possède une stratégie gagnante, retenons sa stratégie. Dans une nouvelle partie, jouons maintenant, en tant que joueur 1 la stratégie utilisée par 2. Ceci est possible car quelque soit le coup effectué par le joueur 2 dans la partie précédante, comme le premier carré est l'élément maximal, toute action place le jeu dans un état qui est plus petit et donc accessible directement en le jouant. Ainsi, le joueur 2 devra perdre car le joueur 1 utilise une stratégie gagnante. Ainsi, seul le joueur 1 possède une stratégie gagnante. □

Remarque : Comparez bien les différents caractères des deux preuves effectuées. Pour l'un, la stratégie gagnante est connue et pour l'autre non. Pour cette dernière, elle demeure effectivement inconnue à l'heure actuelle.

4.2 Jeux probabilistes et déterministes

L'apparition du hasard est fréquente dans les jeux. Le déterminisme est l'appellation de ce qui ne dépend pas du hasard. En théorie des probabilités, le déterminisme est un cas dégénéré de hasard : il coïncide avec des distributions de type spin. Nous ne nous attarderons pas là-dessus, mais simplement cette distinction permet de voir les jeux déterministes comme cas particuliers de jeux probabilistes dans de nombreuses situations où la généralité s'impose.

Definition 4.2.1. *un jeu est dit* probabiliste *dès que l'une des données fonctions d'utilités ou stratégies est aléatoire.*

Cette définition se formalise au moyen d'espace probabilisé. Mettons plutôt en avant les points suivants :

- Les joueurs n'ont pas toujours accès aux mêmes stratégies car elles sont accessibles uniquement en fonction des résultats du hasard.
- Les gains dépendant des stratégies accessibles, on n'a pas forcément besoin de probabiliser (sinon, voir forme normale d'un jeu) dès que les stratégies sont aléatoires.
- Réciproquement, on n'a pas besoin de probabiliser les stratégies si les gains le sont déjà (penser à la roulette).
- Sous forme extensive, les ensembles d'actions peuvent être probabilisés.

En fait, dès qu'un paramètre du jeu peut être probabilisé, on aura affaire à un jeu probabiliste.

Il faut cependant éviter des pièges.

exemples : Pierre-feuille-ciseaux n'est pas probabilisé. Le poker l'est. Plus facilement, la roulette l'est. Le 421 est aussi un bon exemple.

question: Qu'en est-il des jeux suivants ?

- Belote
- Scrabble
- Jeux vidéo (tous)
- Stratego

4.2.1 Stratégies probabilistes

Il faut bien faire attention au fait que les stratégies probabilistes peuvent à la fois être données par des évènements aléatoires du jeu aussi bien que par un joueur qui décide de se comporter de façon aléatoire (comme dans le cas des jeu sous forme normale). Dans le cas où le hasard ne provient que de la stratégie d'un joueur qui l'a introduit volontairement, le jeu n'est pas considéré comme probabiliste.

Ainsi, si vous décidez de lancer un dé pour savoir quelle pièce bouger aux échecs à votre tour, vous ne rendez pas le jeu probabiliste. Par contre, vous pouvez dérouter votre adversaire (bien que dans le cas général, une telle stratégie vous mène à la défaite).

Dans certains cas de jeux non probabilistes, il peut s'avérer que jouer une stratégie probabiliste soit la meilleure chose à effectuer. Nous verrons des cas très concrets de cette assertion.

4.3 Information dans les jeux

On distingue deux catégorisation d'information : la complétude et la perfection.

4.3.1 Jeux à information complète et incomplète

Definition 4.3.1. *Un jeu est dit à* information complète *lorsque tous les joueurs ont connaissance de toutes les données du jeu et que leurs décisions peuvent être prises en usant de ces connaissances.*

Dans le cas contraire, on dit que le jeu est à information incomplète.

Attention à ne pas confondre données du jeu et prise de décision ! Si je connais toutes les stratégies possibles d'un joueur, je ne connais pas pour autant celle qu'il va jouer. Ce problème peut apparaître dans les jeux simultanés où les décisions sont prises en même temps.

exemples : Donnés en cours

Ainsi, dans un jeu à information incomplète, il faut pallier au manque d'information. Tant que l'on possède l'ensemble des états possibles, on peut envisager une stratégie. Dans le cas contraire, on tend à plonger l'ensemble dans un ensemble plus vaste dont on est sûr qu'il suffira.

exemple : En économie, on est souvent confronté à des problèmes d'information incomplète. Par exemple, lorsque l'on entre en concurrence avec une autre société. On ne connaît pas *a priori* ses capacités pécunières. On peut envisager alors de supposer qu'il s'agit d'une valeur réelle, que l'on peut borner si l'on dispose d'informations, ou d'une variable aléatoire réelle avec une loi donnée par des séries statistiques relatives au domaine de compétence. Il arrive alors fréquemment que l'on réagisse au moyen de stratégies probabilistes car on assimile jeu à information incomplète à un jeu probabiliste et on prend une décision dans ce modèle. D'un point de vue du jeu, on devient alors probabiliste en tant que joueur.

exemple Que jouer à pierre-feuille-ciseaux lorsque votre adversaire rajoute le puit et que vous ne connaissez pas cette figure ?

4.3.2 Jeux à information parfaite et imparfaite

Definition 4.3.2. *Un jeu est dit à* information parfaite *lorsque tous les joueurs ont connaissance des actions des joueurs et de leurs conséquences.*

Dans le cas contraire, on dit que le jeu est à information imparfaite.

A moins de se prévenir à l'avance de son coup, les jeux simultanés ne sont pas à information parfaite.

Les exemples typiques sont le dilemne du prisonnier et le jeu de pierre-feuille-ciseaux. Pour le premier, l'existence unique d'un équilibre de Nash pur tend à réduire l'impact de cette propriété négative. Mais on peut définir un dilemne des prisonniers accentué qui fait reprendre un peu plus de valeur à cette problématique engendrée par l'imperfection de l'information :

Definition 4.3.3. *Le dilemne des prisonniers accentué est donné sous forme normale par :*

$$\begin{array}{r} \textit{Coopérer} \\ \textit{Trahir} \end{array} \begin{pmatrix} (-10;-10) & (-\infty;0) \\ (0;-\infty) & (-\infty;-\infty) \end{pmatrix}$$

En interprétant $-\infty$ par la peine de mort dans le cadre des prisonniers, que faire ?

4.4 Jeux à somme nulle

Il s'agit là d'une partie très importante des jeux, puisque l'on peut la retrouver dans de très nombreux exemples.

Definition 4.4.1. *Un jeu à somme nulle est un jeu tel que, sous forme matricielle, la somme des gains de chaque joueur dans chaque entrée de la matrice est 0. Cela peut se dire de façon équivalente par : la somme des gains de chaque joueur est 0 pour tout profil stratégique :*

$$\forall(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|}) \in \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{S}_p \quad \sum_{p\in\mathcal{P}} u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|}) = 0$$

Nous allons maintenant voir des propriétés très intéressantes de ces jeux. Pour cela, montrons la chose suivante :

Théorème 4.4.2 (minimax)**.** *Quelle que soit l'ensemble de familles $(F_i)_{i\in I}$ d'éléments $\{x^i_j;\ j \in J\}$ d'un ensemble E ordonné, si E possède la propriété de la borne supérieure et inférieure, alors on a :*

$$\sup_{i\in I}(\inf(F_i)) \leq_E \inf_{j\in J}(\sup(\{x^i_j;\ i \in I\}))$$

Proof. Les hypothèses sur les bornes supérieures et inférieures sont effetuées pour s'assurer du bien-fondé de l'énoncé.

Nous allons effectuer une démonstration qui semble ne fonctionner que pour des cas finis, mais il suffit d'interpréter les symboles relatifs aux nombres entiers par des ordinaux transfinis pour obtenir une démonstration valable (avec axiome du choix). Comme la démonstration est syntaxiquement identique, le résultat annoncé (plus général) est vérifié, mais ceux qui ne connaissent pas les ordinaux transfinis auront toujours une démonstration dans le cas fini (qui sera le cas le plus étudié dans nos exemples).

Sans problème, on voit que $x_j^i \leq_E \sup(\{x_j^i;\ i \in I\})$, pour tout $i \in I$. Par procédé analogue, on obtient que, pour tout $i \in I$,

$$\inf(F_i) \leq_E \inf_{j \in J}(\sup(\{x_j^i;\ i \in I\}))$$

. Ceci permet alors de conclure que :

$$\sup_{i \in I}(\inf(F_i)) \leq_E \inf_{j \in J}(\sup(\{x_j^i;\ i \in I\}))$$

□

remarque : Il est vrai que $\sup_{i \in I}(\inf(F_i)) \leq_E \inf_{i \in I}(\sup(F_i))$ mais ce n'est pas ceci qui va nous intéresser. Cette dernière inégalité vous dit qu'il est mieux d'être dernier des premiers que premier des derniers.

4.4.1 Stratégie de prudence

Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, il y a alors une conséquence importante au résultat précédent. Tout joueur peut effectuer ce que l'on appelle une stratégie prudente, qui consiste à jouer la stratégie qui lui assure la moindre perte (autrement dit, le *maximin*). Mais alors, par dualité du jeu, le profil stratégique qui le réalise est un *minimax* pour l'adversaire (ce qui lui confère donc un meilleur gain.)

Théorème 4.4.3. *Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, si pour un joueur, le maximin est égal au minimax, alors le profil stratégique qui le réalise est un équilibre de Nash.*

Il est plus que temps de définir un équilibre de Nash formellement :

Definition 4.4.4 (Equlibre de Nash). *On dit que le profil stratégique $\sigma = (\sigma_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est un équilibre de Nash lorsque pour tout joueur p on a :*

$$\forall \sigma_p' \in \mathcal{S}_p \;\; u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_p', \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|}) \leq u_p(\sigma_1, \ldots, \sigma_{|\mathcal{P}|})$$

On peut à présent prouver notre théorème :

Proof. Supposons, sans nuire à la généralité, que :

$$\max_{i \leq n}(\min_{j \leq m}(u_1(\sigma_i; \tau_j)) = \min_{j \leq m}(\max_{i \leq n}(u_1(\sigma_i; \tau_j)))$$

Considérons alors $(i_0; j_0)$ un couple d'indices pour lequel l'égalité est atteinte (non nécessairement unique). On a alors que $u_1(\sigma_{i_0}; \tau_{j_0}) = \max_{i \leq n}(u_1(\sigma_i; \tau_{j_0}))$ ce qui signifie :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_1 \;\; u_1(\sigma; \tau_{j_0}) \leq u_1(\sigma_{i_0}; \tau_{j_0})$$

Par ailleurs, on a de plus que $u_1(\sigma_{i_0};\tau_{j_0}) = \min_{j\leq m}(u_1(\sigma_{i_0};\tau_j))$. Comme $u_1 = -u_2$ par hypothèse, on en déduit que $u_2(\sigma_{i_0};\tau_{j_0}) = \max_{j\leq m}(u_2(\sigma_{i_0};\tau_j))$ d'où :

$$\forall \tau \in \mathcal{S}_2 \;\; u_2(\sigma_{i_0};\tau_j) \leq u_2(\sigma_{i_0};\tau_{j_0})$$

Ce qui fournit, par définition, un équilibre de Nash. □

Question : Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, si les deux joueurs utilisent une stratégie prudente, aboutit-on à un équilibre de Nash (à supposer qu'il existe) ?

Pour cela, il faudrait démontrer la réciproque.

Théorème 4.4.5. *Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, un équilibre de Nash est induit par une égalité* minimax - maximin.

Proof. Supposons que le profil stratégique $(\sigma;\tau)$ soit un équilibre de Nash. Alors on a que $u_1(\sigma;\tau) = \max_{i\leq n}(u_1(\sigma_i;\tau))$ et $u_2(\sigma;\tau) = \max_{j\leq m}(u_2(\sigma;\tau_j))$ ce qui fournit $u_1(\sigma;\tau) = \min_{j\leq m}(u_1(\sigma;\tau_j))$. Ainsi, le profil désigné réalise le gain minimum possible du premier joueur lorsqu'il joue σ, main le gain maximum lorsque son adversaire joue τ.

Désignons par m_i le gain minimum possible du joueur 1 lorsqu'il joue la stratégie σ_i. Formellement, $m_i = \min_{j\leq m}(u_1(\sigma_i;\tau_j))$. Supposons à présent qu'il existe $i \leq n$ tel que $m_i > u_1(\sigma;\tau)$. On aurait alors que, m_i étant le minimum sur la stratégie σ_i, $u_1(\sigma_i;\tau) \geq m_i > u_1(\sigma;\tau)$. Ceci contredit le fait que $(\sigma;\tau)$ est un équilibre de Nash. □

Corollary 4.4.6. *Si dans un jeu à somme nulle à deux joueurs, les deux joueurs emploient une stratégie prudente, les deux joueurs tomberont dans un équilibre de Nash s'il existe.*

Voyons enfin ce dernier résultat, du lien entre rationnalité et équilibre de Nash.

Proposition 4.4.7. *Si un joueur est rationnel, il recherchera nécessairement un équilibre de Nash*

Proof. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors soit $(\sigma_p)_{p\in\mathcal{P}}$ le profil supposé préféré pour chaque joueur. Comme ce n'est pas un équilibre de Nash, il existe un joueur p qui peut améliorer son gain en changeant de stratégie. Appelons σ'_p cette nouvelle stratégie et notons $\prec_p$ sa relation de préférence. On a alors $\sigma'_p \prec_p \sigma_p$ tandis que le gain en σ_p est inférieur pour p qu'en σ'_p, sans changer les autres. Contradiction manifeste. □

Conséquence : Dans un jeu à somme nulle, mieux vaut jouer $maximin$ au lieu de $minimax$, même pour un joueur rationnel alors que $maximin \leq minimax$!

Nous allons maintenant voir pourquoi il peut être intéressant d'étudier le cas particulier des jeux à sommes nulles.

Proposition 4.4.8. *Tout jeu peut être perçu comme un jeu à somme nulle*

Proof. Soit G un jeu à n joueurs. Ajoutons à ce jeu un joueur dit fictif n'ayant qu'une stratégie, notée ε. Dans ce nouveau jeu, on note ${}^G u_p$ les fonctions d'utilités des joueurs. Pour chacun des anciens joueurs, on prolonge sa fonction : ${}^G u_p(\sigma; \varepsilon) = u_p(\sigma)$ pour σ un profil stratégique du jeu initial. La fonction d'utilité du nouveau joueur est définie par ${}^G u_{n+1}(\sigma; \varepsilon) = -\sum_{p \in \mathcal{P}} u_p(\sigma)$.

Vérifier que ce jeu est à somme nulle n'est alors pas très compliquée. □

Remarquez que cela demande d'ajouter un joueur. Ainsi, comme résoudre un jeu à somme nulle nécessite moins de ressources, l'ajout d'un nouveau joueur compense le gain, car le nombre de joueurs influe énormément la complexité du jeu. Pour généraliser nos résultats sur des jeux finis, nous allons passer à une construction des plus utiles et largement utilisée à l'heure actuelle.

5 Calculs effectifs

Pour certains jeux, des techniques de calcul sont connues et appliquées fréquemment. Elles permettront, pour ce cours, de lever le voile de l'abstraction et de voir comment procéder à l'étude effective de certains de leurs aspects.

5.1 Liens entre jeux sous forme normale et matriciels

L'usage que l'on fait des jeux sous forme normale actuellement tend à confondre, dans la littérature, les notions de jeux sous forme normale et matricielle. Nous allons voir ce qui justifie cette identification pour les jeux finis ($i.e.$ dont le nombre de stratégies pour chaque joueur est fini.)

Definition 5.1.1. *On appelle* simplexe *de dimension n l'ensemble*

$$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 1 \ \wedge \forall i \leq n \ \ x_i \geq 0\}$$

Proposition 5.1.2. *Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini et $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des distributions de probabilités sur A. Alors $\{x \in \mathbb{R}^n | \exists f \in \mathcal{D}(A) \ \forall i \leq n \ \ x_i = f(a_i)\}$ est un simplexe.*

Proof. Remarquons que $x = (x_i)_{i \leq n} = (f(a_i))_{i \leq n}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ pour toute $f \in \mathcal{D}(A)$ qui vérifie $\sum x_i = 1$ et $\forall i \leq n \ \ x_i \leq 0$ par définition des distributions de probabilités. Il suffit maintenant de voir que, réciproquement, pour tout vecteur du simplexe de dimension n, disons $\sum \lambda_i e_i$, on associe une distibution f de la façon suivante : $f(a_i) := \lambda_i$. La fonction ainsi définie est bien une distribution sur A par définition d'un simplexe. □

Considérons maintenant un jeu à deux joueurs I et II sous forme matricielle G. Appelons $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ l'ensemble des stratégie du joueur I et $\mathcal{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ l'ensemble des stratégies du joueur II. Si A et B sont les matrices de gains des joueurs I et II respectivement, on a que A et B dont des éléments de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Proposition 5.1.3. *Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{f_1, \ldots, f_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$.*

Le gain du joueur I (resp. II) pour le profil stratégique $(\sigma_i; \tau_j)$ est donné par ${}^t e_i A f_j$ (resp. ${}^t e_i B f_j$).

Proof. Commençons par rappeler que, par définition, $A_{ij} = u_I(\sigma_i; \tau_j)$ et $B_{ij} = u_{II}(\sigma_i; \tau_j)$. Observons à présent que ${}^t e_i A = A_{i\star}$, la i^{eme} ligne de A et que le produit scalaire $({}^t e_i A).f_j$ ne fait que renvoyer la j^{eme} coordonnée de $A_{i\star}$. Il s'agit donc de A_{ij}. On procèderait de façon analogue avec B. $\square$

Théorème 5.1.4. *Si λ et μ sont des stratégies mixtes de I et II respectivement dans le jeu sous forme normale $\mathcal{N}G$ associé à G, alors, en écrivant :*

$$\lambda(\sigma_i) = \lambda_i \quad ; \quad \vec{\lambda} = (\lambda_i)_{i \leq n} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mu(\tau_i) = \mu_i \quad ; \quad \vec{\mu} = (\mu_i)_{i \leq m} \in \mathbb{R}^m$$

on a que ${}^{\mathcal{N}G}u_I(\lambda; \mu) = {}^t\vec{\lambda} A \vec{\mu}$ *et* ${}^{\mathcal{N}G}u_{II}(\lambda; \mu) = {}^t\vec{\lambda} B \vec{\mu}$

Proof. Principalement, il s'agit d'utiliser la linéarité de l'espérance et de décomposer les distributions en diracs (un dirac est une fonction qui faut 1 en un point singulier et 0 partout ailleurs). Les détails précis ont été donnés en cours. $\square$

Ce théorème est la clef de la théorie des jeux sous forme normale de jeux matriciels. Il permet une caractérisation élégante d'un équilibre de Nash. Nous pourrons maintenant confondre les stratégies mixtes λ et μ avec leurs représentants dans le simplexe $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$.

Définissons à présent le concept suivant :

Definition 5.1.5. *Soit μ une stratégie mixte de II (resp. λ une stratégie mixte de I). On appelle meilleure réponse à μ (resp. λ) toute stratégie λ de I (resp. μ de II) qui vérifie :*

$$\forall x \in \Delta_n \ \ {}^t x A \mu \leq {}^t \lambda A \mu$$

respectivement,

$$\forall y \in \Delta_m \ \ {}^t \lambda B \mu \leq {}^t \lambda B \mu$$

On note à présent $br(\mu)$ l'ensemble des meilleures réponses contre μ et $br(\lambda)$ l'ensemble des meilleures réponses contre λ. br est une fonction bien définie car la meilleure réponse existe toujours (voir ci-après).

Proposition 5.1.6. $(\lambda; \mu)$, *profil de stratégie mixtes, est un équilibre de Nash si, et seulement si :*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ {}^t x A \vec{\mu} \leq {}^t \vec{\lambda} A \vec{\mu} \\ \forall y \in \mathbb{R}^m \ \ {}^t \vec{\lambda} B y \leq {}^t \vec{\lambda} B \vec{\mu} \end{cases}$$

Proof. Il suffit de le voir à partir du théorème 5.1.4 qui traduit les gains en termes de formes bilinéaires. On dit en réalité que toute stratégie mixte de I qui n'est pas λ ne peut que réduire ses gains contre μ et réciproquement, que toute stratégie mixte de II qui n'est pas μ ne peut que réduire les gains contre λ. Il s'agit bien d'un équilibre de Nash. $\square$

Corollary 5.1.7. *Le profil en stratégies mixtes* $(\lambda; \mu)$ *est un équilibre de Nash si, et seulement si,* λ *est meilleure réponse contre* μ *et* μ *est meilleure réponse contre* λ

Théorème 5.1.8 (Nash, 1954)**.** *Tout jeu sous forme normale possède un équilibre de Nash (en stratégies mixtes).*

Proof. La démonstration originale de John Nash ne sera pas abordée car elle utilise des arguments topologiques et des théorèmes de points fixes (qui rentrent parfaitement dans le cadre de la topologie). Une version plus accessible est donnée par X.Caruso : elle est lisible sur la page suivante :

http://boumbo.toonywood.org/xavier/maths/nash.pdf

□

Nous nous proposons donc de considérer un algorithme de calcul d'équilibres de Nash, qui fut proposé par Lemke et Howson. Pour cela, nous avons besoin de quelques outils connus de le programmation linéaire. Ceci fera le lien avec la construction que nous venons d'abordé en l'utilisant explicitement.

Proposition 5.1.9. *Chercher un équilibre de Nash revient à résoudre un problème de programmation linéaire avec conditions quadratiques.*

Plutôt que de présenter une démonstration, nous allons présenter des méthodes de calculs bien connues. Nous commencerons avec les jeux à somme nulle.

Theorem 5.1.10. *Soit* G *un jeu à deux joueurs fini de forme matricielle* $(A; B) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *et* Γ *sa forme normale. On a :*

$$\min_{y\in\Delta_m} \max_{x\in\Delta_n} {}^t xAy \;=\; \max_{x\in\Delta_n} \min_{y\in\Delta_m} {}^t xAy$$

Vous remarquerez l'amélioration obtenue par rapport au théorème 4.4.2.

Il est important de noter que cette progression est due à l'arrivée de la forme normale. Après tout, le théorème de Nash ne fait que ramener les observations de la section 4.4.1. à de la généralité.

Proof. Nous allon utiliser quelques lemmes (non démontrés) :

Lemme 5.1.1. *Soit* $B \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble fermé (avec sa bordure), convexe (si deux points sont dans l'ensemble, le segment qui les relie y est inclu). Pour tout vecteur* x *de* $\mathbb{R}^n \backslash B$*, on a l'existence de* $v \in \mathbb{R}^n$ *et de* $p \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\begin{aligned} v.x &= p \\ v.y &> p \text{ pour tout } y \in B \end{aligned}$$

Ce lemme permet alors de montrer que :

Lemme 5.1.2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$*. L'une des deux assertions est vérifiée :*

i) le vecteur $\mathbb{O} \in conv\{\ M_{*j}, e_i\ ;\ i \leq n, j \leq m\} \subset \mathbb{R}^n$

ii) il existe $x \in \Delta_n$ *vérifiant* $\forall j \leq m \quad {}^t M_{*j}.x > 0$

Considérons maintenant notre jeu bimatriciel. Rappelons que $B = -A$ parce que nous supposons le jeu à somme nulle. Raisonnons donc sur A et appliquons le second lemme : soit le vecteur nul $\mathbb{O}$ est combinaison linéaire convexe (*i.e.* à coeffcients dans $[0;1]$ dont la somme vaut 1) des vecteurs de base et des vecteurs colonnes de A, soit il existe $x \in \Delta_n$ (une stratégie mixte du premier joueur) tel que ${}^t A_{*j}.x = {}^t x.A_{*j} > 0$ pour tout $j \leq m$.

Si l'on suppose que la première assertion est vérifiée, alors on peut écrire que pour une certaine famille $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ d'éléments de $[0,1]$:

$$\sum_{i \leq n} \lambda_i e_i \ + \sum_{i \leq n} \left(\sum_{j \leq m} \mu_j a_{ij} \right) e_i = \mathbb{O}$$

avec $\sum \lambda_i + \sum \mu_j = 1$.

Il vient que l'un au moins des μ_j est strictement positif car sinon, on aurait que $\mathbb{O} \in conv(\{e_i, i \leq n\}) = \Delta_n$ ce qui est absurde. Ainsi, $\sum \mu_j > 0$ et on peut donc poser

$$y = \frac{1}{\sum \mu_k} \mu = \frac{1}{\sum \mu_k} (\mu_j)_{j \leq m}$$

.

Le y ainsi défini est dans Δ_m. Par ailleurs, pour tout $i \leq n$, on a alors :

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = \frac{1}{\sum \mu_k} (-\lambda_i) \leq 0$$

Il vient alors que ${}^t xAy \leq 0$ pour tout $x \in \Delta_n$ et donc $\min_y \max_x {}^t xAy \leq 0$.

Dans le deuxième cas, on obtient directement que $\exists x \in \Delta_n \quad {}^t xA_{*j} > 0$ et donc $\max_x \min_y {}^t xAy > 0$.

Logiquement, il devient impossible que l'encadrement $maximin \leq 0 < minimax$ soit vérfié. En considérant $A + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$, et en appliquant le même résultat à cette nouvelle matrice, on obtient alors l'impossibilité de $maximinA + \varepsilon < 0 < minimaxA + \varepsilon$ et donc l'impossibilité de $maximinA < -\varepsilon < minimaxA$. En faisant tendre ε vers 0, il devient impossible que $maximin < 0 < minimax$ et donc, par le fait que $maximin \leq minimax$, on a

$$minimax = maximin$$

$\square$

L'algorithme dit du $minimax$ est alors un algorithme qui construit le couple de vecteurs qui réalise cette valeur. Il est important de savoir que cet algorithme est correct grâce au théorème précédant.

5.1.1 Minimax sous forme extensive

On peut étendre cette notion aux jeux sous forme extensive. L'algorithme MiniMax associé, dû à Von Neumann, est très simple : on visite l'arbre de jeu pour faire remonter à la racine une valeur qui est calculée récursivement de la façon suivante pour le joueur I :

- $MiniMax(p) = G(p)$ si p est une position terminale et G la fonction de gain.
- $MiniMax(p) = max(MiniMax(o_1), \ldots, MiniMax(o_n))$ si p est une position de I avec fils $o_1, \ldots, o_n$
- $MiniMax(p) = min(MiniMax(j_1), \ldots, MiniMax(j_m))$ si p est une position de II avec fils $j_1, \ldots, j_m$

On peut vérifier que MiniMax(p) est la meilleure valeur possible à partir de la position p, si l'opposant joue de façon optimale.

La visite alpha-beta L'algorithme alpha-beta est une optimisation du MiniMax, qui coupe des sousarbres dès que leur valeur devient inintéressante aux fins du calcul de la valeur MiniMax du jeu. Cette optimisation permet souvant de diviser par deux le temps de calcul. On se passera de la description détaillée de cet algorithme.

5.1.2 Cas simples

Ici nous exposons au moyen d'exemples la recherche d'équilibres de Nash dans des jeux de petite taille. Nous mettons notemment en évidence l'élminination des stratégies dominées (que nous définissons).

Nous utilisons pour cela une interprétation géométrique. Nous en profiterons pour voir l'invariance des équilibres de Nash par translation quelconque et dilatation positive (stricte).

Ceci est traité en cours.

5.2 Le graphe de Shapley

Une dernière méthode que nous allons exposer est celle de Shapley. Elle est reliée à l'algorithme de Lemke-Howson au sens où elle traduit le chemin de l'algorithme en terme de graphe.

Definition 5.2.1 (coloriage de Shapley)**.** *Soit G un jeu bimatriciel sous forme normale. Le coloriage de Shapley consiste en un étiquetage des stratégies mixtes de la façon suivante :*

- *On se donne $n + m$ couleurs : une par stratégie pure de chaque joueur. Nous les noterons de la même façon que les stratégies elle-mêmes : $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ et $\tau_1, \ldots, \tau_m$.*
- *Pour chaque $x \in \Delta_n$, on considère $\mathcal{E}(x)$, l'ensemble des étiquettes de x comme étant les stratégies pures σ_i de I telles que $x_i = 0$ et les stratégies pures τ_j de II telles que $\tau_j \in br(x)$.*

- *Pour chaque $y \in \Delta_n$, on considère $\mathcal{E}(y)$, l'ensemble des étiquettes de y comme étant les stratégies pures τ_j de II telles que $y_j = 0$ et les stratégies pures σ_i de I telles que $\sigma_j \in br(y)$.*

La propriété de ce coloriage, très intéressante, est la suivante :

Proposition 5.2.2. *le profil stratégique $(\lambda; \mu)$ est un équilibre de Nash si, et seulement si, $\mathcal{E}(\lambda) \cup \mathcal{E}(\mu)$ est égal à $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$*

N'allez pas identifier les ensembles des deux réunions deux à deux : ce n'est pas vrai dans le cas général. Cela est néanmoins possible sur les jeux dont tous les équilibres font appel à toutes les stratégies pures.

Proof. Considérons les ensembles suivants :

– $X(\sigma_i) = \{x \in \Delta_n \mid x_i = 0\}$

– $X(\tau_j) = \{x \in \Delta_n \, |\tau_j \in br(x)\}$

– $Y(\sigma_i) = \{y \in \Delta_m \mid \sigma_i \in br(y)\}$

– $Y(\tau_j) = \{y \in \Delta_m \mid y_j = 0\}$

Nous commençons par une première étape :

Lemme 5.2.1. *Le profil mixte $(\lambda; \mu)$ est un équilibe de Nash si, et seulement si :*

$$\forall str \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \;\; \lambda \in X(str) \vee \mu \in Y(str)$$

Proof. De ce que nous avons déjà vu, nous pouvons écrire que les profils $(x; y)$ qui satisfont $\forall (\sigma_i; \tau_j) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} \;\; x_i > 0 \Rightarrow \sigma_i \in br(y) \wedge y_j > 0 \Rightarrow \tau_j \in br(x)$ sont des équilibes de Nash (et réciproquement). Cela vient des faits 5.1.6 et 5.1.8.

Supposons que $(x; y)$ soit un équilibre de Nash et fixons $str = \sigma_i \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$. Deux cas se présentent alors : soit $x_i = 0$ et donc $x \in X(str)$, soit $x_i > 0$ et par hypothèse (et la remarque plus haute), $\sigma_i \in br(y)$ donc $y \in Y(str)$. En prenant $str = \tau_j \in \mathcal{T}$, on obtiendrait la même chose par raisonnement symétrique.

Supposons à présent que $\forall str \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \;\; x \in X(str) \vee y \in Y(str)$, et fixons $\sigma_i \in \mathcal{S}$ pour laquelle $x_i > 0$. Si l'on suppose que $\sigma_i \notin br(y)$, alors on obtient que $y \notin Y(\sigma_i)$. Mais nous avons aussi $x \notin X(\sigma_i)$, ce qui contredit manifestement notre hypothèse. □

Nous allons reconstruire maintenant le coloriage de Shapley en fonction des ensembles ainsi définis :

– Les étiquettes de $x \in \Delta_n$ sont données par $\mathcal{E}(x) = \{str \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \mid x \in X(str)\}$

– Les étiquettes de $y \in \Delta_m$ sont données par $\mathcal{E}(x) = \{str \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \mid y \in Y(str)\}$

Il ne reste plus qu'à voir que si $str \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y)$, alors par construction on a $x \in X(str)$ ou $y \in Y(str)$ et donc le profil $(x; y)$ est un équilibre de Nash par le lemme précédant. Réciproquement, si $(x; y)$ est un équilibre de Nash, on a $x \in X(str)$ ou $y \in Y(str)$ pour toute $str \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$, ce qui signifie que $str \in \mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y)$. D'où l'on tire $\mathcal{S} \cup \mathcal{T} \subset \mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y)$. Mais les étiquetages sont construits de sorte que $\mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y) \subset \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$. On en déduit l'égalité. □

Nous allons voir maintenant comment tirer parti de ce coloriage en construisant un graphe étiqueté.

Definition 5.2.3 (Graphe de Shapley)**.** *(1974)*
Le graphe de Shapley de G, jeu bimatriciel, noté $S(G)$ est construit ainsi :

- *Les sommets sont les couples $(x; y) \in \Delta_n \times \Delta_m$ qui vérifient $|\mathcal{E}(x)| = n$ et $|\mathcal{E}(y)| = m$. On ajoute le sommet factice $(0; 0)$ qui servira à l'initialisation de l'algorithme.*
- *Les arêtes du graphe sont les couples (de couples) de la forme $((x, y); (x', y'))$ de sommets de $S(G)$ qui vérifient x et x' diffèrent d'une étiquette et $y = y'$ ou bien y et y' diffèrent d'une étiquette et $x = x'$. Cela s'écrit formellement :*

  $$((x, y); (x'; y')) \in S(G) \Leftrightarrow [(|\mathcal{E}(x) \cap \mathcal{E}(x')| = n-1 \wedge y = y') \vee (|\mathcal{E}(y) \cap \mathcal{E}(y')| = m-1 \wedge x = x')]$$

Nous allons avoir également besoin de la notion suivante :

Definition 5.2.4. *Pour $str \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$, on dit que $(x; y)$ est* presque-str étiquetée *lorsque l'on a :*

$$\forall egy \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \backslash \{str\} \;\; egy \in \mathcal{E}(x) \cup \mathcal{E}(y)$$

.

On peut maintenant décrire l'algorithme de Shapley qui interprète, en terme de graphe, l'algorithme de Lemke-Howson :

Theorem 5.2.5 (algorithme de Shapley)**.** *L'algorithme de parcourt du graphe de Shapley suivant :*

1) *Initialisation : point $(x_0; y_0) = (0; 0)$.*
2) *Prendre $l_0 = str$ une étiquette (stratégie pure) arbitraire.*
3) *Choisir pour nouvelle position, à partir de k fixé, $(x_{k+1}; y_{k+1})$ le point adjacent à $(x_k; y_k)$ qui est presque-str étiqueté. Soit l_{k+1} une étiquette commune à x_{k+1} et à y_{k+1}.*
4) *Répéter 3) jusqu'à aboutir à une position $(x_k; y_n)$ sans étiquette dupliquée.*

termine et s'arrête sur un équilibre de Nash.

Proof. Il est simple de voir pourquoi on ajoute $(0; 0)$: le fait que $x_i = 0$ (resp. $y_j = 0$) pour tout $i \leq n$ (resp. $j \leq m$) permet de colorier les stratégies factices par toutes les stratégies pures du joueur concerné. Il n'est pas besoin de parler de meilleures réponses puisqu'il n'y a aucun gain.

Il n'est pas dur de voir que le graphe de Shapley est fini. Ensuite, si l'on nomme *support* de la stratégie mixte x l'ensemble $supp(x) = \{\sigma \in \mathcal{S} \mid x(\sigma) > 0\}$ (et analogue pour y), on a que le chemin tracé satisfait la propriété que $supp(x)$ et $supp(y)$ sont de cardinalités croissantes (au sens large cependant). Mais cet algorithme ne parcourt pas deux fois le même sommet durant son exécution : il suffit de voir que l'on parcourt une triangulation du simplexe en cherchant à remplacer une étiquette de stratégie pure d'un joueur par celle (d'une meilleure réponse) d'une pure de l'autre joueur : ceci va donc augmenter le support. Ceci est toujours possible, donc on ne peut pas boucler.

Il vient que la position d'arrêt peut toujours être atteinte et que cette dernière vérifie la propriété 5.2.2 du graphe de Shapley. □

Précisons qu'il n'est pas interdit de parcourt une fois chaque point de la triangulation : bien qu'il ait fallu attendre 30 ans pour le savoir, ce résultat peut être trouvé dans *Exponentially Many Steps for Finding a Nash Equilibrium in a Bimatrix Game. Rahul Savani and Bernhard von Stengel.*, FOCS 2004

6 Jeux itérés : entre forme normale et extensive

Dans cette section, nous allons aborder un intéressant problème : celui des jeux itérés.

(description en cours)