

CAŁKI

Rodzaje całek:

$$\int f(x) \, dx$$

nieoznaczona

$$\int_a^b f(x) \, dx, \quad a \leqslant b$$

oznaczona

$ a < \infty, \, b < \infty$	$ a < \infty, \, b = \infty$	$a = -\infty, \, b < \infty$	$a = -\infty, \, b = \infty$
właściwa	niewłaściwa	niewłaściwa	niewłaściwa

Podstawienie trygonometryczne uniwersalne:

$$t = tg \frac{x}{2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Całka oznaczona w zakresie $\langle a, b \rangle$, gdzie $a > b$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

Średnia wartość funkcji $f(x)$ w zakresie $\langle a, b \rangle$:

$$\acute{S}r = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Całka oznaczona funkcji $f(x)$:

w zakresie $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

w zakresie $\langle a, \infty \rangle$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a)$$

w zakresie $\langle -\infty, \infty \rangle$

$$\int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{\infty} f(x) \, dx$$

$$c \in \mathbb{R}, \, |c| \neq \infty$$

Pole między wykresem funkcji $f(x)$ a osią OX w zakresie $\langle a, b \rangle$:

$$P = \int_a^b f(x) \, dx$$

Długość krzywej funkcji $f(x)$ w zakresie $\langle a, b \rangle$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Pole między wykresami funkcji $f(x)$ i $g(x)$, gdzie $f(x) > g(x)$, w zakresie $\langle a, b \rangle$:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

w przypadku, gdy wyresy funkcji przecinają się w punkcie $c \in \langle a, b \rangle$, zakres należy rozbić na dwa zakresy $\langle a, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$, dla których policzyć całkę dostosowując kolejność odejmowania funkcji.

MACIERZE I WEKTORY

Wyznacznik macierzy odwrotnej:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

Wyznacznik wielokrotności macierzy:

$$n \cdot |A| = |A| \cdot n^{rank(A)}$$

Iloczyn wektorowy:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

Iloczyn skalarny:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Własności wektorów:

wektory są równoległe, gdy:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

lub

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

wektory są prostopadłe, gdy:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH, POCHODNE CZĄSTKOWE

Wyrażenie $f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy$ jest różniczką zupełną wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Pochodna kierunkowa funkcji w pewnym kierunku:

$$\text{jeżeli } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{ct} = n$$

to pochodna kierunkowa jest równa $\frac{n}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot c$