**1. 函数定义域**：一元函数定义域是数轴上一条线段上的点的集合；而二元函数的定义域是$x$和$y$取值范围所组成的一个平面区域内的点的集合。

**2. 二元函数的极限**

(1)二元函数极限与一元函数相仿，也满足四则运算法则及符合运算性质。

(2)二元函数求极限常用方法

①利用二元函数极限定义求解；

②利用极限性质求解；

③利用函数特点转化为极坐标形式：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\ (r > 0, 0 \le \theta < 2\pi)$；

④利用不等式(如常用的$x^2 + y^2 \ge 2|xy|, |\sin\theta| \le 1$)及夹逼准则；

⑤当二元函数在$(x_0, y_0)$处连续时，有$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$。



注意：由于缺乏洛必达法则的理论依据(柯西中值定理)，因此洛必达法则不适用于二元函数求极限。

【例1】计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$。

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2-xy)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=0\left(\sqrt{0}+\sqrt{0}\right)=0。$$

**方法点击**：在极限式中，如果分母为无理式，可以用分母有理化进行求极限。

【例2】计算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$。

解：$0\le\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\le\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=x^2+y^2\to0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$。

方法点击：利用不等式及夹逼准则进行求极限。

【例3】证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$ 不存在。

证明：令$y=kx(k\neq-1)$,则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^3+y^3}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x\cdot k^2x^2}{x^3+k^3x^3}=\dfrac{k^2}{1+k^3}$。

这表示沿着不同的直线$y=kx$，当点$(x,y)\to(0,0)$时，极限值与$k$有关，极限值不相同，

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$ 不存在。

方法点击：证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在的有效方法有：

①沿某特殊路径极限不存在；②沿不同路径极限不相等。

**3. 二元函数的连续性**

(1)**一元函数连续性**需要判断函数左右极限是否存在且都等于函数值；

**二元函数连续性**需要判断函数在整个平面任意一方向的极限值是否都相等且等于函数值。

(**2**)**极限存在与连续的关系**：弄清极限存在与连续的关系

①若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$不一定连续；

②若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在，则$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$必定不连续；

③若$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处连续，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 必定存在，且等于$f(x_0,y_0)$。

【例4】 讨论$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)点的连续性。

解：令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则当$(x,y)\to(0,0)$时，有 $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$, 故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0} r^2\ln r^2=0=f(0,0),$$

所以$f(x,y)$在(0,0)点连续。

**方法点击**：当$f(x,y)$的表达式中有$x^2+y^2$时，常作变换$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，这样$x^2+y^2=r^2$且$(x,y)\to(0,0)$变为$r\to 0$。

1. **偏导数**

**(1)计算方法：** ①由偏导数的定义知，偏导数与一元函数的导数运算相仿，也满足四则运算法则。

②关键是弄清楚对哪个变量求偏导数，将其余变量均看作常量，然后按照一元函数求导公式及导数运算法则进行求解。

③求分段函数在分界点处的偏导数只能用定义去求。

【例5】 已知 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解：**方法一：**利用求导公式求 $f_x(x,1)$. 先求出偏导数 $f_x(x,y)$.

$$f_x(x,y)=1+(y-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{y-1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}},$$

$\therefore f_x(x,1)=1.$

**方法二：**利用定义直接求 $f_x(x,1)$.

$$f_x(x,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,1)-f(x,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

【例6】 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^5-y^3}$，求 $f_x(0,0)$.

解：由于 $f_x(x,y)=\frac{1}{3}(x^5-y^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5x^4=\frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5-y^3)^2}}$ 显然上式在 $(0,0)$ 处没有意义，故应按偏导数定义去求 $f_x(0,0)$.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^5}}{\Delta x}=0.$$

**(2)高阶偏导数：①定义：**指二阶及二阶以上的偏导数。

②二阶及二阶以上的高阶混合偏导数在相应高阶偏导数连续的条件下与求导的次序无关。

**2. 全微分**

**(1)全微分存在的必要条件**：如果函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，则该函数在点$(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必定存在，且函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$。

**(2)全微分存在的充分条件**：如果函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续，则函数在该点可微分，且 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$。

**(3)求解方法**：①若$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$为连续函数，则 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$。

②若$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$不连续，则需用定义求解，即 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。

【例 7】 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$,求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$.

解: $$f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}},f_x(x,y,z)=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{yz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1},$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1},f_z(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right),$$

因此,在函数有定义的区域内,$f_x$、$f_y$、$f_z$ 为连续函数,故 $\mathrm{d}f=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z$.

$\because$ $f_x(1,1,1)=1,f_y(1,1,1)=-1,f_z(1,1,1)=0,\therefore$ $\mathrm{d}f(1,1,1)=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

**多元函数的极限存在、连续性、偏导数、可微分之间的关系**

$$\begin{tikzcd}
\text{偏导数连续} \arrow[r, Rightarrow, shift left] & \text{可微分} \arrow[l, Rightarrow, "/" marking, shift left] \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & \text{连续} \arrow[l, Rightarrow, "/" marking, shift left] \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, "/" marking, shift left] & \text{极限存在} \arrow[l, Rightarrow, "/" marking, shift left] \arrow[dl, Rightarrow, "/" marking, shift left] \\
 & & \text{偏导数存在} \arrow[ul, Rightarrow, "/" marking, shift left] \arrow[u, Rightarrow, "/" marking, shift left] \arrow[ur, Rightarrow, "/" marking, shift left] &
\end{tikzcd}$$

【例 8】 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续，

② $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数连续，

③ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微，

④ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 $P$ 推出性质 $Q$，则有（　　）.

(A) ②⇒③⇒①　　(B) ③⇒②⇒①　　(C) ③⇒④⇒①　　(D) ③⇒①⇒④

【思路探索】 四个性质之间的关系如下图所示：

$$\begin{array}{ccccc} \text{偏导数连续} & \Rightarrow & \text{可微} & \Rightarrow & \text{偏导数存在} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{连续} & & \end{array}$$



解：正确答案为(A).

**1. 链式法则：**①若函数$\mu=\varphi(t)$及$v=\psi(t)$在点$t$可导，函数$z=f(\mu,v)$具有连续偏导数，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

②若函数$\mu=\varphi(x,y)$及$v=\psi(x,y)$在点$(x,y)$可偏导，函数$z=f(\mu,v)$具有连续偏导数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

③若函数$\mu=\varphi(x,y)$在点$(x,y)$有偏导数，$v=\psi(y)$在点$y$可导，函数$z=f(\mu,v)$具有连续偏导数，则

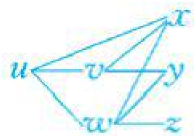
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

**2. 全微分形式不变性**：函数$z = f(\mu, v)$具有连续偏导数，则全微分为 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial \mu}\mathrm{d}\mu + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$，如果$\mu, v$为中间变量，$\mu = \varphi(x, y)$及$v = \psi(x, y)$且有连续偏导数，则$z = f\big(\varphi(x, y), \psi(x, y)\big)$的全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

【例 9】 设 $u = f(x, xy, xyz)$，$f(x, y, z)$ 有连续偏导数，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

【思路探索】 令 $v = xy, w = xyz$，则 $u = f(x, v, w)$，这里 $x$ 既是自变量，又是中间变量. $u$ 与 $x$ 之间有三条路径，$u$ 与 $y$ 之间有两条路径，$u$ 与 $z$ 之间只有一条路径.




解：令 $v = xy, w = xyz$，则 $u = f(x, v, w)$，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = f_x + f_v \cdot y + f_w \cdot yz = f'_1 + f'_2 y + f'_3 yz.$$

[记 $f'_1 = f_x(x, v, w), f'_2 = f_v(x, v, w), f'_3 = f_w(x, v, w)$]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = f'_2 x + f'_3 xz, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = xyf'_3.$$

1. 隐函数存在定理 1, 2, 3（见教材）

**2. 求$z$对$x, y$偏导的方法**$(z=z(x,y)$由$F(x,y,z)=0$ 确定$)$：

①**公式法**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$；

②**直接法**：分别将$F(x,y,z)=0$ 两边对$x,y$求导，得到含有$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$的两个方程，解方程即可；

③**全微分法**：对方程两边求微分 $\mathrm{d}z=\mu(x,y,z)\mathrm{d}x+v(x,y,z)\mathrm{d}y$，则 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$的系数便是$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

【例10】 设 $xy+\ln y+\ln x=0$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【思路探索】 本题为一个方程的情形的隐函数求导问题.运用隐函数存在定理1代入公式求解,也可用直接法或微分法求解.

解:方法一:用公式法.

令 $F(x,y)=xy+\ln y+\ln x$,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{y}}=-\frac{xy^2+y}{x^2y+x}$.

方法二:用直接法.

方程确定 $y=y(x)$,等式两边对 $x$ 求导,得 $y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}=0$,

解得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{y}}=-\frac{xy^2+y}{x^2y+x}$.

方法三:用微分法.

等式两边求微分,得 $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$,解得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{xy^2+y}{x^2y+x}$.

- 几何应用
  - 一元向量值函数及其导数
  - 空间曲线的切线与法平面
    - 第一种类型
      - 曲线方程$\Gamma$: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$
      - 切线方程:
        $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$
      - 法平面方程:
        $$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$
    - 第二种类型
      - 曲线方程$\Gamma$: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
      - 切向量: $T=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$
        $$\varphi'(x_0)=\frac{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M},\ \psi'(x_0)=\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M}$$
      - 切线方程:
        $$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M}$$
      - 法平面方程:
        $$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M(z-z_0)=0$$
  - 曲面的切平面与法线
    - 曲面方程由隐式给出
      - 曲面方程: $F(x,y,z)=0$
      - 切平面方程:
        $$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$
      - 法线方程:
        $$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$
    - 曲面方程由显式给出
      - 曲面方程: $z=f(x,y)$
        - 令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$
      - 法向量: $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)$
      - 切平面方程:
        $$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$
      - 法线方程:
        $$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$$

方向导数与梯度

- 方向导数
  - 存在条件定理
  - 二元函数
    - 方向 $e_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$
    - 方向导数：
      $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{(x_0,\ y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$
  - 三元函数
    - 方向 $e_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$
    - 方向导数：
      $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$
- 关系 →
  $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{(x_0,\ y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$
  $=$
  $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)\cdot \boldsymbol{e_l}=|\mathbf{grad}f(x_0,y_0)|\cos\theta$
- 梯度
  - 二元函数：$\mathbf{grad}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$
  - 三元函数：
    $\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$

- 极值及其求法
  - 无条件极值
    - 极值的必要条件
      - 具有偏导数的函数的极值点必定是驻点
    - 极值的充分条件
      - **函数**：$z=f(x,y)$
      - **条件**：$f_x(x_0,y_0)=0, f_x(x_0,y_0)=0$；
        $A=f_{xx}(x_0,y_0), B=f_{xy}(x_0,y_0), C=f_{yy}(x_0,y_0)$
      - **判断**
        - 有极值：$AC-B^2>0$
          - 极小值 $A>0$
          - 极大值 $A<0$
        - 无极值：$AC-B^2<0$
        - 另作讨论：$AC-B^2=0$
  - 条件极值的求法
    - 方法一：化为无条件极值
    - 方法二：拉格朗日乘数法
      - 构造函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

详细步骤参考
“燎原高数”系列辅导书

【例 1】 求$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$在$(-1,1,2)$处的切线方程.

解:方程组两边对 $x$ 求导,得$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \end{cases}$ 解得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-x}{y}$,$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$.

$\therefore$ 在$(-1,1,2)$处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{(-1,1,2)}=(1,1,0)$,

$\therefore$ 切线方程为$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$.

【例 2】 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.（考研题）

【思路探索】 可能极值点是两个一阶偏导数为零的点，先求出一阶偏导，再令其为零确定极值点即可，然后用二阶偏导确定是极大值还是极小值，并求出相应的极值.

解：因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，所以 $2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$，

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得 $\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$

由于 $2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

所以 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6}$，$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$，故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=\frac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6}$，$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}$，可知，$AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，从而点 $(-9,-3,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.