一、定积分的应用

1. 定积分的元素法

设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且$f(x) \geq 0$,求以曲线$y=f(x)$为曲边、底为$[a,b]$的曲边梯形的面积A，把这个面积A表示为**定积分$A=\int_a^b f(x)dx$** 的**步骤**：

(1)选取积分变量，并确定它的变化区间$[a,b]$；

(2)把区间$[a,b]$分成n个小区间，求出相应于这个小区间的部分量ΔU的近似值。**如果ΔU能近似表示为$[a,b]$上一连续函数在x处的值$f(x)$与$\mathrm{d}x$的乘积，就把$f(x)\mathrm{d}x$称为量U的元素且记作$\mathrm{d}U$，即$\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x$**；

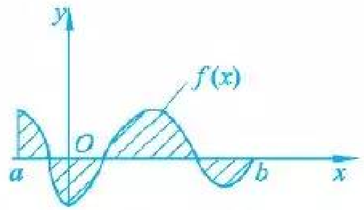
(3)以所求量U的元素$f(x)\mathrm{d}x$为被积表达式，在区间[a,b]上作定积分，得$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

2. 定积分在几何上的应用

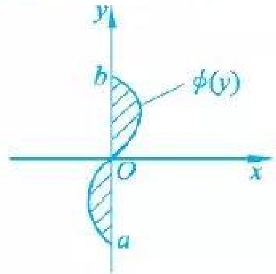
(1)平面图形的面积

直角坐标：

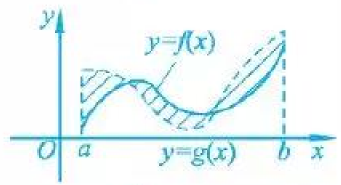
① 由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a, x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形面积 $A=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$



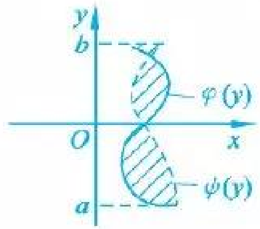
② 由曲线 $x=\varphi(y)$ 及直线 $y=a, y=b(a<b)$ 与 y 轴所围成的曲边梯形面积 $A=\int_a^b|\varphi(y)|\mathrm{d}y$



③ 由曲线 $y=f(x), y=g(x)$ 及直线 $x=a, x=b(a<b)$ 所围成的曲边梯形面积 $A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$

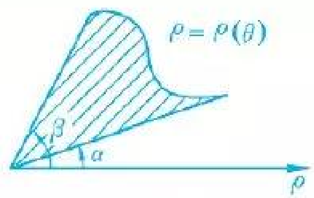


④ 由曲线 $x=\varphi(y), x=\psi(y)$ 及直线 $y=a, y=b(a<b)$ 所围成的曲边图形面积 $A=\int_a^b|\psi(y)-\varphi(y)|\mathrm{d}y$

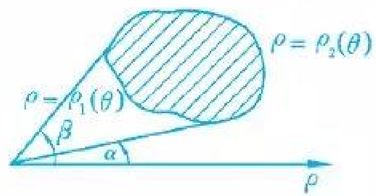


极坐标：

① 由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 所围成的曲边扇形面积 $A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$



② 由曲线 $\rho_1=\rho_1(\theta),\rho_2=\rho_2(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta(\alpha<\beta)$ 所围成的平面图形面积 $A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$

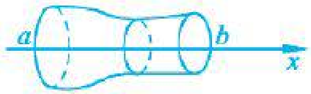


(2) 体积

平行截面面积已知的立体的体积：

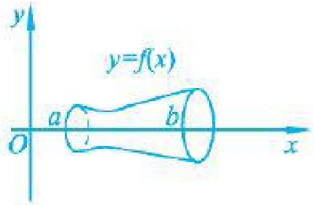
物体位于 $x=a, x=b(a<b)$ 之间，任一个垂直于 x 轴的平面与立体相交的截面积为 $A(x)$，$A(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，立体体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

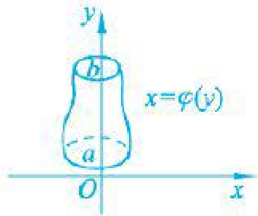


旋转体：

① $y=f(x)$ 为 $[a,b]$ 上单值连续函数，$a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$，曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$



② $x=\varphi(y)$ 为 $[a,b]$ 上单值连续函数，$a\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant x\leqslant\varphi(y)$ 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积 $V_y=\pi\int_a^b \varphi^2(y)\mathrm{d}y$



(3)平面曲线的弧长

直角坐标： 设 $y=f(x)$ 为光滑曲线，则在 $[a,b]$ 上弧长 $s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$

极坐标： 设 $\rho=\rho(\theta)$ 为光滑曲线，在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则曲线弧长为 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$

参数方程：

若光滑曲线由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 组成，$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$，则曲线弧长为

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

(4)旋转体的侧面积

直角坐标：

① 光滑曲线 $y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，绕 x 轴旋转所成旋转体的侧面积

$$A_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

② 光滑曲线 $x=\varphi(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 绕 y 轴旋转所成旋转体的侧面积

$$A_y=2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,\mathrm{d}y$$

极坐标：

光滑曲线 $\rho=\rho(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，绕极轴旋转所成旋转体的侧面积

$$A=2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\theta)\sin\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

参数方程：

光滑曲线 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 绕 x 轴旋转所成旋转体的侧面积

$$A_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

1. 微分方程基本概念

(1)微分方程：含有自变量、未知函数及未知函数的导数的方程称为微分方程；未知函数为一元函数的方程称为常微分方程。

(2)方程的特解：若函数$y=\varphi(x)$满足方程，即将$\varphi(x)$代入方程能使方程成为恒等式，则函数 $y=\varphi(x)$称为方程的一个特解。

(3)方程的通解：若方程中含有独立的任意常数，且任意常数的个数与方程的阶数相同，则这样的解称为方程的通解。

2. 可分离变量的微分方程

(1)定义：形如$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$的方程称为可分离变量的方程。

(2)解法：分离变量法$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)\,dx$。（有些方程需要变量代换后再利用分离变量法求解）

注意：可分离变量方程的通解形式为$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)\,dx$，由于将$g(y)$作为分母，故若$g(y)=0$有解，则方程还有特解。故注意在分离变量的同时，经常在两边要同除以某一函数，此时往往会遗漏该函数的某些特解，这些特解通常不能由通解得到，因此要及时补全。

【例 1】 求解下列微分方程：

(1) $xyy'=(x+a)(y+b)$； (2) $1+y'=e^y$.

解：(1) 用 $x(y+b)$ 去除方程，有$\frac{y}{y+b}dy=\frac{x+a}{x}dx$，积分得 $y-b\ln|y+b|=x+a\ln|x|+C_1$.

故通解为 $x^a(y+b)^b=Ce^{y-x}$（C 为任意常数），特解 $y=-b$ 包含在通解之中.

(2) $\frac{dy}{dx}=e^y-1$，分离变量得$\frac{dy}{e^y-1}=dx$，积分得，$\int\frac{dy}{e^y-1}=\int dx$.

$$\int\left(\frac{1}{e^y-1}-\frac{1}{e^y}\right)de^y=\int dx,\ \ln\left|\frac{e^y-1}{e^y}\right|=x+\ln C_1,$$

则通解为 $\ln|1-e^{-y}|=x+\ln C_1$，即 $1-e^{-y}=Ce^x$（C 为任意常数）.

3. 齐次方程

(1)定义：形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$的一阶方程称为齐次方程。

(2)解法：作变换$z=\frac{y}{x}$，化为变量可分离方程$\frac{\mathrm{d}z}{g(z)-z}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$。

疑难解惑：对于微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$的转化：

a. 当$c_1=c_2=0$时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$转化为齐次方程。

b. 当$a_1b_2=a_2b_1$，即$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=g(a_2x+b_2y)$，令

$a_2x+b_2y=u$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2g(u)$转化为变量可分离方程。

c. 当$a_1b_2\neq a_2b_1$，且c_1，c_2不全为 0 时，解方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$，求交点$(\alpha,\beta)$，

令$x=X+\alpha,y=Y+\beta$,则原方程化为$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$即为齐次方程。

【例 2】 求解微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+4y+2}$.

解:设 $x=X+2$, $y=Y-1$,则得$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{X+4Y}$.

此方程是齐次型,可设 $Y=vX$,从而得 $v+X\frac{dv}{dX}=\frac{1+v}{1+4v}$,即$\frac{1+4v}{1-4v^2}dv=\frac{dX}{X}$,

又由于$\int\frac{1+4v}{1-4v^2}dv=\frac{1}{4}\int\frac{dv}{\left(\frac{1}{4}\right)-v^2}-\frac{1}{2}\int\frac{-8v}{1-4v^2}dv=\frac{1}{4}\frac{1}{2(1/2)}\ln\frac{\frac{1}{2}+v}{\frac{1}{2}-v}-\frac{1}{2}\ln(1-4v^2)$,

得$\frac{1+2v}{1-2v}\cdot\frac{1}{(1-4v^2)^2}=C_1^4X^4$,即$(1+2v)(1-2v)^3X^4=C\quad(C=1/C_1^4)$.

代入原变量即得$(X+2Y)(X-2Y)^3=C$即$(x+2y)(x-2y-4)^3=C$.

当 $1-4v^2=0$ 即 $v=\pm1/2$ 时,也是原方程的解,而这已包含在通解之中($C=0$)时,故原方程的通解为$(x+2y)(x-2y-4)^3=C$,C 为任意常数.

4. 一阶线性微分方程

(1)定义：形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的一阶方程称为一阶线性方程，当$Q(x)\equiv 0$时，

称之为齐次的，否则称为非齐次的。

(2)解法：可用常数变易法或积分因子法求解，其解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)。$$

(3)伯努利方程：

①定义：形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^k$($k$是不为 0,1 的任意实数)的方程。

②解法：两边同除以y^k，作代换$z=y^{1-k}$，则伯努利方程转化为新的未知函数z

的一阶线性方程$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-k)P(x)z=(1-k)Q(x)$。

【例3】 求方程 $(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 的通解．

解：将方程标准化：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$.

先求解一阶线性齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2x}{x^2-1}y=0$的解. 分离变量为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$

积分得 $\ln y=-\ln(x^2-1)+\ln C$，即 $y(x^2-1)=C$.

再将常数 C 变易成 $C(x)$，将 $y(x^2-1)=C(x)$ 求导，得 $y'(x)=-\dfrac{2xy}{x^2-1}+\dfrac{C'(x)}{x^2-1}$.

将 $y'(x)$ 代入$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$ 中，得 $C'(x)=\cos x$，

从而 $C(x)=\sin x+C$，故原方程通解为 $y=\dfrac{\sin x+C}{x^2-1}$.

【例4】 求微分方程 $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解：方程化为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}x=-\dfrac{2}{y^3}x^2$，两边乘 x^{-2} 得 $x^{-2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}x^{-1}=-\dfrac{2}{y^3}$.

令 $x^{-1}=u$，则 $-x^{-2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，得线性方程$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+\dfrac{2}{y}u=\dfrac{2}{y^3}$.

由公式解得 $u=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[\int\dfrac{2}{y^3}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\dfrac{1}{y^2}\left[\int\dfrac{2}{y}\mathrm{d}y+C\right]=\dfrac{\ln y^2+C}{y^2}$.

故原方程通解为 $x^{-1}=\dfrac{\ln y^2+C}{y^2}$，即 $y^2=x(\ln y^2+C)$.

5. 可降阶的高阶微分方程

(1)方程的类型及解法：

①$y^{(n)}=f(x)$型：$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$，

$y^{(n-2)}=\int[\int f(x)dx+C_1]dx+C_2$，

注意：最后的解中应包含 n 个独立的常数。

$\cdots$共积分n次，即可得通解。

②$y''=f(x,y')$型（不显含y）：令$y'=p$，则$y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，化为一阶微分方程：$p'=f(x,p)$。

③$y''=f(x,y')$型（不显含x）：令$y'=p$，则$y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，化为一阶微分方程：

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)。$$

【例 5】 求微分方程 $y'''-x-e^x=0$ 满足 $y(0)=1,y'(0)=1,y''(0)=2$ 的解.

解：将方程改写为 $y'''=x+e^x$，积分之，得

$$y''=\int_0^x(x+e^x)\mathrm{d}x+y''(0)=\left(\frac{1}{2}x^2+e^x\right)\Big|_0^x+2=\frac{1}{2}x^2+e^x+1,$$

$$y'=\int_0^x\left(\frac{1}{2}x^2+e^x+1\right)\mathrm{d}x+y'(0)=\frac{1}{6}x^3+e^x+x,$$

故所求的解为 $y=\int_0^x\left(\frac{1}{6}x^3+e^x+x\right)\mathrm{d}x+y(0)=\frac{1}{24}x^4+e^x+\frac{1}{2}x^2.$

6. 高阶线性微分方程

(1) 定义：方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$称为$n$阶线性方程。

当$f(x)\equiv 0$时，称方程为齐次的；当$f(x)$不恒等于0时，称方程为非齐次的。

(2) 解的结构：

①齐次方程解的结构：

1° 若 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程 ② 的两个解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是 ② 的解，其中 C_1,C_2 为任意常数.

2° 若 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程 ② 的两个线性无关的解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\,(C_1,C_2\text{ 为任意常数}),$$

是方程 ② 的通解.

②非齐次方程解的结构：

1° 若 $y^*(x)$ 是 ① 的特解，$Y(x)$ 是 ② 的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是方程 ① 的通解.

2° 若 $y_1^*(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 的特解，$y_2^*(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

【例6】 已知齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为 $Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$，求非齐次方程 $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ 的通解.

解：由常数变易法设 $y_1=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-x}$ 为方程的一个特解.

则有方程组 $\begin{cases} C'_1(x)e^x+C'_2(x)e^{-x}=0, \\ C'_1(x)e^x-C'_2(x)e^{-x}=\dfrac{2e^x}{e^x-1}, \end{cases}$

解之得 $C'_1(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$，$C'_2(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$，

故 $C_1(x)=\ln|e^x-1|-x$，$C_2(x)=-e^x-\ln|e^x-1|$.

故所求非齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x-e^{-x})\ln|e^x-1|-xe^x-1$.

7. 常系数线性微分方程

(1) 二阶常系数齐次线性方程：

①定义： 方程$y''+py'+qy=0$(p,q为常数)称为二阶常系数线性齐次方程，对应的代数方程

$r^2+pr+q=0$称为方程的特征方程。

②解法：

1° 当代数方程 $r^2+pr+q=0$ 有两个不相等的实根 r_1,r_2 时，① 的通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

2° 当代数方程 $r^2+pr+q=0$ 有两个相等的实根 $r_1=r_2=r$ 时，① 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$.

3° 当代数方程 $r^2+pr+q=0$ 有一对共轭复根 $\alpha\pm i\beta$ 时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

(2) **n阶常系数齐次线性微分方程：**

①**定义：**n阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为：

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0,$$

其中$p_i(i=1,2,\cdots,n)$为常数，则$k^n+p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}+\cdots+p_{n-1}k+p_n=0$为其特征方程，特征根所对应的微分方程的解如下表所示：

特征方程的根 k_i	微分方程通解中的对应项
① 单实根 k_i	给出一项：$C_ie^{k_ix}$
② 一对单复根 $\alpha\pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
③r重实根 k	给出 r 项：$e^{kx}(C_1+C_2x+\cdots+C_rx^{r-1})$
④ 一对 r 重复根 $\alpha\pm i\beta$	给出 $2r$ 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_rx^{r-1})\cos\beta x+(B_1+B_2x+\cdots+B_rx^{r-1})\sin\beta x]$

【例 7】 求下列微分方程的通解：

(1) $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$； (2) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

解：(1) 特征方程为 $r^3 - 6r^2 + 3r + 10 = 0$.

解得 $r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = 5$ 均为单重根，

故原方程通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}$.

(2) 特征方程为 $r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0$，即 $(r-1)^2(r^2+1) = 0$.

得二重实根 1，单重共轭复根 $\pm i$，

故方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.