

《离散数学》期末考试题(C)

一、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 $|A| = m, |B| = n$, 则 $|A \times B| = (\quad)$, A 到 B 的 2 元关系共有 (\quad) 个, A 上的 2 元关系共有 (\quad) 个.
2. 设 $A = \{1, 2, 3\}, f = \{(1,1), (2,1), (3, 1)\}, g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ 和 $h = \{(1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$, 则 (\quad) 是单射, (\quad) 是满射, (\quad) 是双射.
3. 下列 5 个命题公式中, 是永真式的有 (\quad) (选择正确答案的番号).
 - (1) $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$;
 - (2) $p \rightarrow (p \vee q)$;
 - (3) $p \rightarrow (p \wedge q)$;
 - (4) $\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$;
 - (5) $(p \rightarrow q) \rightarrow q$.
4. 设 D_{24} 是 24 的所有正因数组成的集合, “|” 是其上的整除关系, 则 3 的补元 (\quad) , 4 的补元 (\quad) , 6 的补元 (\quad) .
5. 设 G 是 $(7, 15)$ 简单平面图, 则 G 一定是 (\quad) 图, 且其每个面恰由 (\quad) 条边围成, G 的面数为 (\quad) .

二、单选题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 A, B, C 是集合, 则下述论断正确的是 (\quad) .
 - (A) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \in C$.
 - (B) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \subseteq C$.
 - (C) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \in C$.
 - (D) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.
2. 设 $R \subseteq A \times A, S \subseteq A \times A$, 则下述结论正确的是 (\quad) .
 - (A) 若 R 和 S 是自反的, 则 $R \cap S$ 是自反的.
 - (B) 若 R 和 S 是对称的, 则 $R \circ S$ 是对称的.
 - (C) 若 R 和 S 是反对称的, 则 $R \circ S$ 是反对称的.
 - (D) 若 R 和 S 是传递的, 则 $R \cup S$ 是传递的.
3. 在谓词逻辑中, 下列各式中不正确的是 (\quad) .
 - (A) $\forall x(A(x) \vee B(x)) = \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

$$(B) \forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$(C) \exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

$$(D) \forall x \exists y A(x, y) = \exists y \forall x A(x, y)$$

4. 域与整环的关系为().

(A)整环是域 (B)域是整环 (C)整环不是域 (D) 域不是整环

5. 设 G 是 (n, m) 图, 且 G 中每个节点的度数不是 k 就是 $k+1$, 则 G 中度数为 k 的节点个数为().

$$(A) \frac{n}{2}. \quad (B) n(n+1). \quad (C) nk. \quad (D) n(k+1) - 2m.$$

三、判断题(每小题 3 分, 共 15 分): 正确打“√”, 错误打“×”.

1. 设 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(x) = |x| - 2x$, 则 f 是单射. ()

2. 设 φ 是群 G_1 到群 G_2 的同态映射, 若 G_1 是 Abel 群, 则 G_2 是 Abel 群. ()

3. 设 (L, \leq) 是格, 对于 $x, y, z \in L$, 若 $x \cdot y = x \cdot z$ 且 $x + y = x + z$, 则 $y = z$. ()

4. 元素个数相同的有限布尔代数都是同构的. ()

5. 设 G 是 n ($n \geq 11$) 阶简单图, 则 G 或 \overline{G} 是非平面图. ()

四、(15 分) 设 A 和 B 是集合, 使下列各式 (1) $A \cap B = A$; (2) $A - B = B - A$;

(3) $(A - B) \cup (B - A) = A$ 成立的充要条件是什么, 并给出理由.

五、(10 分) 设 S 是实数集合 \mathbf{R} 上的关系, 其定义如下

$$S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \text{ 且是 } \frac{x-y}{3} \text{ 是整数}\},$$

证明: S 是 \mathbf{R} 上的等价关系.

六、(10 分) 求谓词公式 $\exists x A(x) \rightarrow (B(y) \rightarrow \neg(\exists y C(y) \rightarrow \forall x D(x)))$ 的前束范式.

七、(10 分) 若 n 个人, 每个人恰有 3 个朋友, 则 n 必为偶数, 试证明之.

八、(10 分) 利用生成函数求解递归关系
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}.$$