一、定积分的定义

（1）定义：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i .$$

（2）可积的条件：

定理 若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积。

推论 若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，则$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积

（3）几何意义和物理意义。

特别地，$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a.$

二、定积分的简单性质

（1） $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

（2） $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

（3） $\int_a^a f(x)dx = 0$

（4） $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

（5） $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

当 $f(x)$ 是**奇函数**时，$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

当 $f(x)$ 是**偶函数**时 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

（6）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx.$

（7）若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\geqslant 0.$

若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\leqslant 0.$

（8）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx.$$

（9）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\alpha\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b-a).$$ **积分中值定理**

三、微积分基本公式

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \longrightarrow \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

四、定积分的计算：方法与不定积分相似

1.换元积分法

（1）定积分的凑微分法

$$\int_a^b f(\varphi(x))\ \varphi'(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

$$\xlongequal{u=\varphi(x)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

$$= F(u)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

（2）定积分的第二类换元法

令 $\alpha=\varphi(a),\beta=\varphi(b)$，则

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_{a}^{b} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

2.分部积分法

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=\int_a^b u(x)\cdot dv(x)$$

$$=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)\cdot du(x)$$

$$=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx$$

五、积分上限函数的导数

（1）$\left|\int_a^x f(t)dt\right|' = f(x)$

（2）$\dfrac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt = f(u(x))u'(x)$

（3）$\dfrac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

六、反常积分

1、无穷限的反常积分

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}[F(x)\Big|_{a}^{t}] = \lim_{t\to+\infty}[F(t) - F(a)].$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}[F(b) - F(t)] = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

特别地，

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}} = \begin{cases} \text{收敛，} & p>1 \\ \text{发散，} & p\le 1 \end{cases}$$

2、瑕积分

（1）a是 $f(x)$ 的瑕点：$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx.$

（2）b是 $f(x)$ 的瑕点：$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx.$

（3）$c\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的瑕点：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

特别地，

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}=\begin{cases}\text{收敛，} & p<1\\ \text{发散，} & p\geq 1\end{cases}$$

七、定积分的应用（微元法）

1.平面图形的面积;

2.体积：只要求旋转体的体积;

3.弧长。

一、填空题

1. $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx =$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

分析 设 $f(x) = x^4 \sin x$, 则

$$f(-x) = (-x)^4 \sin(-x) = -x^4 \sin x = -f(x).$$

即 $f(x)$ 是奇函数。

2. $\int_0^2 f(x)dx=$ $\underline{\frac{5}{6}}$. 其中$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$.

分析

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 (2-x)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{5}{6}.$$

3.利用定积分的几何意义计算定积分

$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=$ $\underline{\ 2\pi\ }$.

分析

$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ 表示上半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的面积，

即圆 $x^2+y^2=4$ 的面积的一半：

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\pi\cdot 4=2\pi.$$

4.正弦函数 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$ 上与x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积$V=$ $\underline{\quad\dfrac{\pi^2}{2}\quad}$.

分析

$$V=\int_0^{\pi}\pi[\sin x]^2dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}dx-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,d2x$$

$$=\frac{\pi}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

5. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=$ $\underline{\quad\frac{1}{3}\quad}$.

分析

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\Big|_1^{+\infty}=-\frac{1}{3}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}-1\right]=\frac{1}{3}.$$

二、选择题

1.下列说法中正确的是（ B ）

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(B) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(C) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(D)以上说法都不正确。

2.设 $f(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant 1\\ 2x, & x>1\end{cases}$，则 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $[0,2]$ 上的表达式为（ A ）

（A）$\varphi(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2+1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$；（B）$\varphi(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$；

（C）$2x$；　　（D）x^2.

分析 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 2dt=2x.$

当 $1<x\leqslant 2$ 时，

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$$

$$=\int_0^1 2dt+\int_1^x 2tdt=2+t^2\Big|_1^x=x^2+1.$$

3.设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x)=x+x^2\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$（ B ）

(A) $\frac{3}{4}x+x^2$ (B) $x+\frac{3}{4}x^2$ (C) $\frac{3}{2}x+x^2$ (D) $x+\frac{3}{2}x^2$

分析 两边同时积分

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_0^1 x^2\left[\int_0^1 f(x)dx\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\int_0^1 x^2dx\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)dx.$$

解得 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{4}$，所以，$f(x)=x+\frac{3}{4}x^2$.

4.设 $f(u)$ 连续，且 $\int_0^2 xf(x)dx \neq 0$，若 $k\int_0^1 xf(2x)dx = \int_0^2 xf(x)dx$，则 $k=$（ D ）

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）1；　　（C）2；　　（D）4。

分析

$$k\int_0^1 xf(2x)dx \xlongequal{u=2x} k\int_0^2 \frac{u}{2} f(u)d\frac{u}{2} = \frac{k}{4}\int_0^2 uf(u)du$$

$$= \frac{k}{4}\int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 xf(x)dx,$$

解得 $k=4$.

5.下列反常积分中收敛的是（ D ）

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$；　　(B) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$；

(C) $\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2}dx$；　　(D) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$。

分析

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\leqslant 1\end{cases}$;

(2) $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}\begin{cases}收敛, & p<1\\ 发散, & p\geqslant 1\end{cases}$.

三、计算题

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

解

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \cos x dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) d\sin x$$

$$= 2(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

2. $\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx.$

解　令 $x=2\sin t$，则 $dx=2\cos t\,dt$ 且

当 $x=0$ 时 $t=0$；当 $x=2$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$.

所以，

$$\int_0^2 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-1)\cdot\cos^2 t\,d\cos t$$

$$=32\left(\frac{1}{5}\cos^5 t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{64}{15}.$$

3. $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx.$

解

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx=[x\ln(1+x^2)]\Big|_0^1-\int_0^1 x d\ln(1+x^2)$$

$$=\ln 2-2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\ln 2-2\int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=\ln 2-2(x-\arctan x)\Big|_0^1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x \cos x dx.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x d\sin x$

$\underline{\underline{u=\sin x}} \int_0^1 e^u u du = \int_0^1 u de^u$

$= (ue^u)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^u du = e - e^u\Big|_0^1 = 1.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\,e^{-t^2}dt}{x^3\sin x}$.

解

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\,e^{-t^2}dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\int_0^{x^2} t\,e^{-t^2}dt\right]'}{(x^4)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\,e^{-(x^2)^2}\cdot(x^2)'}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^4}\cdot 2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$.

四、应用题

1.求由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x, x=2$ 所围成平面图形的面积。

解 由 $\begin{cases} y=x \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ 知，两曲线的交点为 $(-1,-1),(1,1)$.

所以，

$$A=\int_1^2 (x-\frac{1}{x})dx=(\frac{x^2}{2}-\ln|x|)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

2.求由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解 由 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$ 知，两曲线的交点为 $(0,0),(1,1)$.

所以，

$$V=\int_0^1 \pi [x]^2 dx-\int_0^1 \pi [x^2]^2 dx$$

$$=\left[\pi \cdot \frac{1}{3}x^3-\pi \cdot \frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{2}{15}\pi.$$

3.求由曲线 $r=4\cos\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ 所围成平面图形的面积.

解 $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(4\cos\theta)^2d\theta=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$

$$=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=4(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4\pi.$$

4.求曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上相应于 x 从0 到1 的一段弧的长度的面积.

解 由题意知，$s=\int_0^1\sqrt{1+[(\frac{x^2}{2})']^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx,$

令 $x=\tan t$, 则 $dx=\sec^2 t dt$,

且当 $x=0$ 时, $t=0$ ；当 $x=1$ 时 $t=\frac{\pi}{4}$,

所以, $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 t}\sec^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 t dt$

$$=\frac{1}{2}(\sec t\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$