第11章　曲线积分与曲面积分

单元自测题

一、曲线积分：

1、对弧长的曲线积分：

设 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$ 则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

2、对坐标的曲线积分：

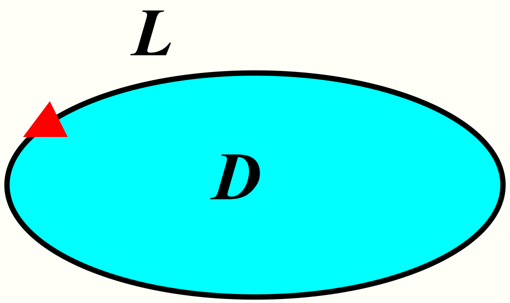
设 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$ 则

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt$$

3、格林公式

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$



其中 L 是 D 的正向边界。

4、平面曲线积分与路径无关的条件

$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在 G 内与路径无关

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

5、对面积的曲面积分

（1）设 $\Sigma: z = z(x, y)$　　$(x, y) \in D_{xy}$ ，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,d\sigma$$

（2）设 $\Sigma: x = x(y, z)$　　$(y, z) \in D_{yz}$ ，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,d\sigma$$

（3）设 $\Sigma: y = y(z, x)$　　$(z, x) \in D_{zx}$ ，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{zx}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\,d\sigma$$

6、对坐标的曲面积分

（1）设 $\Sigma: x = x(y,z)$ $(y,z)\in D_{yz}$ ，则

$$\iint\limits_{\Sigma\,\substack{\text{前侧}\\ \text{后侧}}} P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz.$$

（2）设 $\Sigma: y = y(z,x)$ $(z,x)\in D_{zx}$ ，则

$$\iint\limits_{\Sigma\,\substack{\text{右侧}\\ \text{左侧}}} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)dzdx.$$

（3）设 $\Sigma: z = z(x,y)$ $(x,y)\in D_{xy}$ ，则

$$\iint\limits_{\Sigma\,\substack{\text{上侧}\\ \text{下侧}}} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

7、高斯公式

$$\oiint_{\Sigma\text{外侧}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

曲线积分

- 1. $\int_L f(x,y)ds$ ⟹ 定积分
- 2. $\oint_L Pdx+Qdy$
  - 1) L封闭
    - 格林公式 ⟹ 二重积分
    - 代公式 ⟹ 定积分
  - 2) L不封闭
    - 代公式 ⟹ 定积分
    - 补线，格林公式
  - 3)积分与路径无关,选择简单路径

曲面积分

- 1. $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS \Rightarrow$ 二重积分
- 2. $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$
  - 1) Σ封闭
    - 高斯公式 $\Rightarrow$ 三重积分
    - 代公式 $\Rightarrow$ 二重积分
  - 2) Σ不封闭
    - 代公式 $\Rightarrow$ 二重积分
    - 补面，高斯公式

积分小结

积分类型	引例	和式极限	计算方法	特殊情况
定积分	曲边梯形的面积 变速直线运动的路程	$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$	换元积分 分部积分	$\int_a^b dx=b-a$
二重积分	曲顶柱体的体积 平面薄片的质量	$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$	直角坐标 极坐标	$\iint\limits_D d\sigma=A$
三重积分	空间物体的质量	$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$	直角坐标 球坐标	$\iiint\limits_\Omega dv=V$
对弧长的曲线积分	曲线构件的质量	$\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$	化为定积分	
对坐标的曲线积分	变力做功	$\int_\Gamma Pdx+Qdy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$	化为定积分 格林公式 积分与路径无关	
对面积的曲面积分	曲面块的质量	$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$	化为二重积分	
对坐标的曲面积分	液体的流量	$\iint\limits_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$	化为二重积分 高斯公式	

一、计算下列曲线积分：

1、设 L 为单位圆周的上半部分，求 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds.$

解 曲线 L 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le \pi)$$

所以，

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_0^{\pi} e^{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}\sqrt{[(\cos t)']^2+[(\sin t)']^2}dt$$

$$= \int_0^{\pi} edt = e\pi.$$

2、计算 $\int_L xyds$, 其中 L 为由 x 轴,单位圆, y 轴围成第一象限扇形的整个边界。

解 曲线 L 的可分为三部分，参数方程分别为：

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \le x \le 1)$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$$

$$\Gamma_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases} \quad (0 \le y \le 1)$$

2、计算 $\int_L xyds$, 其中 L 为由 x 轴,单位圆, y 轴围成第一象限扇形的整个边界。

解　所以,

$$\int_L xyds = \int_{\Gamma_1} xyds + \int_{\Gamma_2} xyds + \int_{\Gamma_3} xyds$$

$$= \int_0^1 0dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t \sqrt{[(\cos t)']^2 + [(\sin t)']^2} dt + \int_0^1 0dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin tdt = \frac{1}{2}\sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

3、计算$\int_{\Gamma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$,其中$\Gamma$是螺线

$x=2\cos t, y=2\sin t, z=3t$ 的第一圈（$0\le t\le 2\pi$）

解 $\int_{\Gamma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2\cos t)^2+(2\sin t)^2+(3t)^2}\sqrt{[(2\cos t)']^2+[(2\sin t)']^2+[(3t)']^2}\,dt$$

$$=\sqrt{13}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+9t^2}dt=\frac{\sqrt{13}}{6}(\arctan\frac{3t}{2})\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{6}\arctan 3\pi.$$

4、计算 $\int_L ydx + xydy$，其中 L 为

(1)上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上从点(1,0)到点(-1,0)的一段弧.

解

(1) $L:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le \pi)$

$$\int_L ydx + xydy = \int_0^{\pi}[\sin t\cdot(\cos t)' + \sin t\cdot\cos t\cdot(\sin t)']dt$$

$$=\int_0^{\pi}(-\sin^2 t + \sin t\cdot\cos^2 t)dt$$

$$=\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}.$$

4、计算 $\int_L ydx + xydy$，其中 L 为

(2)从点(1,0)到点(-1,0)的直线段.

解

(2) $L: y = 0 \quad (-1 \le x \le 1)$

$$\int_L ydx + xydy = \int_1^{-1} [0 + x \cdot 0 \cdot (0)']dx = 0.$$

4、计算 $\int_L ydx + xydy$，其中 L 为

(3)从点(1,0)到(0,1)再沿直线到点(-1,0)的折线.

解

(3) 曲线 L 可分为 L_1 和 L_2 两段，其中

$$L_1: y = 1 - x \quad (0 \le x \le 1)$$

$$\int_{L_1} ydx + xydy = \int_1^0 [(1-x) + x\cdot(1-x)\cdot(1-x)']dx$$

$$= -\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

4、计算 $\int_L ydx + xydy$，其中 L 为

(3)从点(1,0)到(0,1)再沿直线到点(-1,0)的折线.

解

(3) 曲线 L 可分为 L_1 和 L_2 两段，其中

$$L_2: y = x+1 \quad (-1 \le x \le 0)$$

$$\int_{L_2} ydx + xydy = \int_0^{-1} [(x+1) + x\cdot(x+1)\cdot(x+1)']dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{1}{3}.$$

所以，$\int_L (x+y)dx + (y-x)dy = (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}.$

5、利用格林公式计算 $\oint_L (x+3y)dx+(x^2y+3x)dy$, 其中 L是由曲线 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 所围成区域的正向边界。

解 曲线 L 所围成的区域 D 可表示为 $\begin{cases} x^2 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

所以，$\oint_L (x+3y)dx+(x^2y+3x)dy$

$$=\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+3x)-\frac{\partial}{\partial y}(x+3y)\right]d\sigma$$

$$=2\iint_D xyd\sigma=2\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xydy\right]dx=\int_0^1\left[\left(xy^2\right)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\right]dx$$

$$=\int_0^1(x^2-x^5)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

6、证明曲线积分 $\int_L (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$ 在整个 xOy 平面上与路径无关,并计算 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$ 的值。

解 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2+3x^2y)=2xy+3x^2.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+x^3)=2xy+3x^2,$$

所以，积分与路径无关。

6、证明曲线积分 $\int_L (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$ 在整个 xOy 平面上与路径无关,并计算 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$ 的值。

解　设 $\Gamma_1:\begin{cases} x=x \\ y=2 \end{cases}\ (1\le x\le 3)$　$\Gamma_2:\begin{cases} x=3 \\ y=y \end{cases}\ (2\le y\le 4)$ 则

$$\int_{\Gamma_1} (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$$

$$=\int_1^3 (4x+6x^2)dx=(2x^2+2x^3)\Big|_1^3=68.$$

6、证明曲线积分 $\int_L (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$ 在整个 xOy 平面上与路径无关,并计算 $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$ 的值。

解 设 $\Gamma_1:\begin{cases} x=x \\ y=2 \end{cases}\ (1\le x\le 3)$ $\Gamma_2:\begin{cases} x=3 \\ y=y \end{cases}\ (2\le y\le 4)$ 则

$$\int_{\Gamma_2} (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy$$

$$=\int_2^4 (9y+27)dy=\left(\frac{9}{2}y^2+27y\right)\Big|_2^4=108.$$

$$\Rightarrow \int_{(1,2)}^{(3,4)} (xy^2+3x^2y)dx+(x^2y+x^3)dy=68+108=176.$$

二、计算下列曲曲积分

1.计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$, 其中$\Sigma$是抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 及平面 $z=2$ 所围成的区域的整个边界曲面.

解 曲面 Σ 可分为Σ_1和Σ_2两部分:

$$\Sigma_1: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2);\ \ \Sigma_2: z=2;\ \ (x,y)\in D_{xy}$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$

还可表示为 $D_{xy}:\begin{cases}0\leq r\leq 2\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}$

二、计算下列曲曲积分

1.计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$, 其中$\Sigma$是抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 及平面 $z=2$ 所围成的区域的整个边界曲面.

解 (1) $\Sigma_1: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$;

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sqrt{1+r^2}\cdot rdr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 r^2\sqrt{1+r^2}\,d(r^2)=2\pi\left(\frac{10\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{15}\right).$$

二、计算下列曲曲积分

1.计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$, 其中$\Sigma$是抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 及平面 $z=2$ 所围成的区域的整个边界曲面.

解　(2)　$\Sigma_2: z=2;$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=8\pi.$$

$$\Rightarrow\ \iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\frac{2\pi(50\sqrt{5}+2)}{15}+8\pi.$$

2.计算$\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx$, 其中$\Sigma$是长方体

$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$

整个表面的外侧.

解　将有向曲面分成6部分:

$\Sigma_1 : z = 1 \quad (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$ 的上侧;

$\Sigma_2 : z = 0 \quad (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$ 的下侧;

$\Sigma_3 : x = 1 \quad (0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1)$ 的前侧;

$\Sigma_4 : x = 0 \quad (0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1)$ 的后侧;

$\Sigma_5 : y = 1 \quad (0 \le x \le 1, 0 \le z \le 1)$ 的右侧;

$\Sigma_6 : y = 0 \quad (0 \le x \le 1, 0 \le z \le 1)$ 的左侧;

2.计算$\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx$, 其中$\Sigma$是长方体

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

整个表面的外侧.

解 $$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} zdxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} 1dxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} 0dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} 1dxdy = 1$$

同理, $\iint\limits_{\Sigma} xdydz = 1, \iint\limits_{\Sigma} ydzdx = 1.$

从而, $\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx = 3.$

2.计算$\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx$, 其中$\Sigma$是长方体

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

整个表面的外侧.

解法二

$$\oiint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} \right] dv$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 3dv = 3V = 3 \times (1 \times 1 \times 1) = 3.$$

3.利用高斯公式计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$,

其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

解 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy =$

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(x^3)}{\partial x}+\frac{\partial(y^3)}{\partial y}+\frac{\partial(z^3)}{\partial z}\right]dv = \iiint\limits_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)dv$$

选用球坐标计算三重积分,其中Ω可表示为:

$$\Omega:\begin{cases}0 \le r \le 1,\\ 0 \le \theta \le 2\pi,\\ 0 \le \varphi \le \pi\end{cases}$$

3.利用高斯公式计算 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$,
其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

解

$$\iiint\limits_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 3r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$= 2\pi \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{3}{5} r^5 \Big|_0^1 = \frac{12\pi}{5}.$$