《离散数学》期末考试题(B)参考答案

一、1. $\{\{a, b\}, a, b, \varnothing\}$， $\{\{a, b\}, a, b\}$，16.

2. 2^9, 27.

3. $P(x) \to Q(x)$，$Q(y) \wedge \neg P(y)$.

4. 2, 4, 6, 12.

5. ≤ 4，奇数.

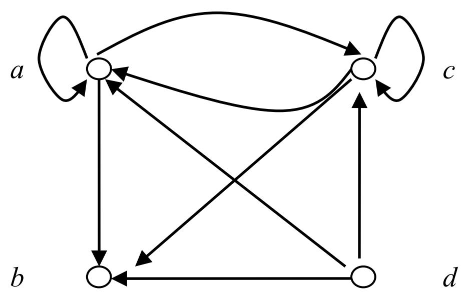
二、1(B); 2(D); 3(C); 4(B); 5(C).

三、1(×); 2(√); 3(×); 4(×); 5(×).

四、**证** 对于任意 $x, y \in A$，若 $f(x) = f(y)$，则 $g(f(x)) = g(f(y))$，即 $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$. 由于 $f \circ g$ 是单射，因此 $x = y$，于是 f 是单射.

例如取 $A = \{a,b\}, B = (1,2,3\}, C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$，令 $f = \{(a,1),(b,2)\}$，$g = \{(1,\alpha),(2,\beta),(3,\beta)\}$，这时 $f \circ g = \{(a,\alpha),(b,\beta)\}$ 是单射，而 g 不是单射.

五、**解** 1. R 的关系图 G_R 如下：



2.(1)由于 $(b,b) \notin R$，所以 R 不是自反的.

(2)由于 $(a,a) \in R$，所以 R 不是反自反的.

(3)因为 $(d,b) \in R$，而 $(b,d) \notin R$，因此 R 不是对称的.

(4)因 $(a,c),(c,a) \in R$，于是 R 不是反对称的.

(5)经计算知 $R \circ R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,a),(d,c)\} \subseteq R$，进而 R 是传递的.

综上所述，所给 R 是传递的.

3. R 的关系矩阵 $M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$.

六、**解** 命题公式 $A=(p\to(q\to r))\leftrightarrow(r\to(q\to p))$ 的真值表如下:

p,q,r	$p\to(q\to r)$	$r\to(q\to p)$	A
1, 1, 1	1	1	1
1, 1, 0	0	1	0
1, 0, 1	1	1	1
1, 0, 0	1	1	1
0, 1, 1	1	0	0
0, 1, 0	1	1	1
0, 0, 1	1	1	1
0, 0, 0	1	1	1

由表可知，$A=(p\to(q\to r))\leftrightarrow(r\to(q\to p))$ 的主析取范式为

$$A=(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$
$$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r).$$

A 的主合取范式为 $A=(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$.

七、**证** 不妨设 G 的阶数 $n\geq 3$，否则结论是显然的. 根据推论 1 知，$m\leq 3n-6$. 若 G 的任意节点 v 的度数均有 $\deg(v)\geq 5$，由握手定理知

$$2m=\sum_v \deg(v)\geq 5n.$$

于是 $n\leq\frac{2}{5}m$，进而 $m\leq 3n-6\leq 3\cdot\frac{2}{5}m-6$. 因此 $m\geq 30$，与已知矛盾. 所以必存在节点 v 使得 $\deg(v)\leq 4$.

八、**解** 设满足要求的 r 位数的个数有 a_r 种，$r=0$，1，2，…，则排列计数生成函数

$$E(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)$$
$$=1+3x+4x^2+\frac{19}{6}x^3+\frac{19}{12}x^4+\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{12}x^6,$$

因而 $a_4=\frac{19}{12}\cdot 4!=38$.