1. 向量的概念：

(1)向量是既有大小又有方向的量；

(2)向量的大小称为向量的模；

(3)向量的坐标表示：

①设向量的起点为$A(x_1,y_1,z_1)$,终点为$B(x_2,y_2,z_2)$,则向量$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$(终点减起点)；

②以原点为起点的向量$\overline{OA}=(x_1,y_1,z_1)$；

(4)向量的方向角和方向余弦：

①非零向量$\boldsymbol{a}$与坐标轴的三个夹角α、β、γ称为向量$\boldsymbol{a}$的方向角；

②$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦；

③以向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦为坐标的向量就是与$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}}$，故

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

若$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

(5)向量在数轴上的投影：

①设向量$\boldsymbol{a}$与数轴u的夹角为φ，则$|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$称为向量$\boldsymbol{a}$在$u$轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$或$(\boldsymbol{a})_u$，

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi，\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2，\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}；$$

②向量在与其同方向的轴上的投影为向量的模$|\boldsymbol{a}|$；

③在空间直角坐标系中，向量$\boldsymbol{a}$可以表示为分量形式$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。

2. 向量的运算及其性质

(1)加减法运算(直角坐标计算)：(向量加法运算服从平行四边形法则或三角形法则)

设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2);$$

(2)数乘运算：向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记为$\lambda\boldsymbol{a}$，即若$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$；

(3)性质：

①$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;　　②$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

③$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;　　④$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

⑤$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;　　⑥设$\boldsymbol{a}$是以非零向量，则$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ 存在唯一实数λ，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

(1)数量积： (积是一个数)

①定义：设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是两个给定的向量，它们的数量积为

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，其中$\theta$是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角。

②运算公式：在空间直角坐标系下，若$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$。

③运算规律：交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中$\lambda$为实数。

(2)向量积：(积是一个向量)

①定义：两向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的向量积是一个新的向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其模为$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，方向垂直于$\boldsymbol{a}$且垂直于$\boldsymbol{b}$，并且$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$可构成右手系。

②运算公式：设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}。$$

③运算规律：不具备交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，其中$\lambda$为实数。

(3)混合积：(共面问题常用到)

①定义：三向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的混合乘法运算$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$称为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的混合积，记为$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$。

②运算公式：在空间直角坐标系下，设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$，

则$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$。

③运算规律：混合积的交换法则：

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],$$

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]。$$

(1)两向量平行(共线)： $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$；

【例 1】设未知向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$共线，且满足$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = -18$，求$\boldsymbol{x}$。

解：由于$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{a}$共线，故设$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} = (2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$，又因为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = (2, -1, 2) \cdot (2\lambda, -\lambda, 2\lambda) = -18,$$

则$\lambda = -2$，故$\boldsymbol{x} = (-4, 2, -4)$。

(2)两向量垂直： $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$。

【例2】设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-4,5)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，问 λ 为何值时，$|\boldsymbol{c}|$ 最小?并证明：当 $|\boldsymbol{c}|$ 最小时，$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$.

解：$|\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\lambda^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\lambda+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$，

所以当 $\lambda=-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=-\dfrac{12}{50}=-\dfrac{6}{25}$ 时 $|\boldsymbol{c}|$ 最小，此时

二次函数最小值问题.

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\left(-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}\right)(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=0$，

所以 $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$.

(3)三向量共面：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面 $\Leftrightarrow$ 存在λ，μ，使$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b} \Leftrightarrow [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0。$$

【例 3】设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为 3 个不共面的向量，并设 $\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ 共面，则 $k=$ ________.

解：
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma} &= [(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}) \\ &= [3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})-10(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(3k+7)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})+(k-21)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})- \\ &\quad 7k(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}) \\ &= (k-21)(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(3k+7)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}+30(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \\ &= (k-21-3k-7+30)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(2-2k)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\because \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为 3 个不共面的向量，$\therefore (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq 0$，$\therefore 2-2k=0$，$\therefore k=1$.

1.平面的方程

(1)**点法式方程**: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

其中$P(x_0,y_0,z_0)$为平面上给定的已知点，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量。

(2)**一般式方程**：$Ax+By+Cz+D=0$

其中$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量，$D=0$ 时平面过原点。

(3)**截距式方程**：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$，其中$a,b,c$分别为平面在$x,y,z$轴上的截距。

解题技巧：①在求解平面问题时，要注意利用方程系数的特殊性简化运算。**例如**，一般式方程中$B=D=0$,则平面过 y 轴，方程$Ax+Cz=0$，只需知道另外一点就可确定方程了。

②截距式方程中由于a,b,c的非零要求，故平面并不总能表示成这种形式。

【例1】 设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解：记点$A(6,-3,2)$，则$\overrightarrow{OA}=(6,-3,2)$. 平面$4x-y+2z=8$的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(4,-1,2)$.

由题意，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$且$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OA}$，

$$\therefore\ \boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-1&2\\6&-3&2\end{vmatrix}=(4,4,-6).$$

$\therefore$ 由点法式方程，所求平面为$4(x-0)+4(y-0)-6(z-0)=0$. 即$2x+2y-3z=0$.

2. 两平面间的关系

前提： 两平面的夹角就是两平面法向量的夹角，给定两个平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2}\cdot\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}}$$

①当$\theta=0$时，两平面平行(或重合)：$\pi_1\parallel\pi_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$；

②当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，两平面垂直：$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

3. 点到平面的距离：

设给定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$及平面π：$Ax+By+Cz+D=0$，则P_0到平面π的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}。$$

【例2】 设平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，证明：

$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$（其中 d 为原点到平面的距离）.

证明：平面的一般式为$\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z-1=0$，

∴ 原点到平面的距离为 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$，

∴ $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

方法点击：求平面方程常用的方法：

(1) **点法式**：使用次方法关键的是确定平面上的一个已知点和平面的法向量。

(2) **一般式**：利用一般式求平面方程关键的是用解方程组的方法将各系数确定下来。

(3) **平面相交**：若题设条件中有两个相交的平面，则用平面束方程处理较为便捷。

(4) **与已知直线垂直**：已知直线的方向向量便是所求平面的法向量，只要再加一个条件即可。

1. 直线方程

(1)交面式方程(一般方程)： $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

此方程将直线表示为两个平面的交线，直线的方向向量为$\boldsymbol{s} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$。

(2)对称式方程(点向式方程)： $\dfrac{x - x_0}{m} + \dfrac{y - y_0}{n} + \dfrac{z - z_0}{p} = 0$

其中$P(x_0, y_0, z_0)$为直线上给定的已知点，$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$为直线的方向向量。

(3)参数式方程： $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbf{R}, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$

其中$P(x_0, y_0, z_0)$为直线上给定的已知点，$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$为直线的方向向量。

(4)两点式方程： $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$,

其中$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$是直线上两个定点，直线的方向向量为$\overrightarrow{P_1P_2}$。

【例 3】 求与已知直线 l_1：$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{1}$ 和 l_2：$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ 都相交，且与 l_3：$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$ 平行的直线方程.

解：将 l_1 和 l_2 化为参数方程 l_1：$\begin{cases}x=2t-3,\\y=t+5,\\z=t,\end{cases}$ l_2：$\begin{cases}x=t+3,\\y=4t-1,\\z=t.\end{cases}$

设 l 与 l_1 和 l_2 的交点分别对应参数 t_1 和 t_2，则知交点分别为 $P(2t_1-3,t_1+5,t_1)$，$Q(t_2+3,4t_2-1,t_2)$，由于 $\overrightarrow{PQ}\parallel \boldsymbol{s}$，故 $\frac{(2t_1-3)-(t_2+3)}{3}=\frac{(t_1+5)-(4t_2-1)}{2}=\frac{t_1-t_2}{1}$，整理成方程组 $\begin{cases}t_1-2t_2=-6,\\t_1+2t_2=6,\end{cases}$ 解出 $t_1=0,t_2=3$.

∴ P 的坐标为 $(-3,5,0)$. 故所求直线方程为 $\frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{1}$.

2. 点、线、面之间的关系

(1) 两直线间的关系

前提：设两直线$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，对应的方向向量为$\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，

则两直线的夹角为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}\quad\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)。$$

①两直线平行(或重合)：$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \parallel \boldsymbol{s}_2$；

②两直线垂直：$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2$;

③两直线共面：l_1、l_2共面 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=\boldsymbol{0}$;

④两直线异面：l_1、l_2异面 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\neq\boldsymbol{0}$。

(2)直线与平面的关系

前提：给定平面π：$Ax+By+Cz+D=0$，直线l:$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，相应的平面的法向量为$\boldsymbol{n}$，直线的方向向量为$\boldsymbol{s}$，则直线与平面的夹角为

$$\sin\theta=\frac{|s\cdot n|}{|s|\cdot|n|}\ \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)。$$

①直线与平面垂直：$l\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

②直线与平面平行：$l\parallel\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 且$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$；

③直线在平面上：l在π上 $\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 且$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$；

④直线与平面相交：l与π相交 $\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\neq0\Leftrightarrow Am+Bn+Cp\neq0$。

(3)距离公式

①**点到直线的距离**：给定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$及直线l:$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$，直线过定点$P_1(x_1,y_1,z_1)$且方向向量为$\boldsymbol{s}$，则点到直线的距离为$d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$。

②**两直线间的距离**：设直线l_1过P_1点，方向向量为$\boldsymbol{s}_1$，直线l_2过P_2点，方向向量为$\boldsymbol{s}_2$且$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\neq\mathbf{0}$，则$l_1$与$l_2$的距离为$d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$。

【例 4】 判定下列各组平面与直线间的位置关系.

(1) l_1:$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与 π: $4x-2y-2z=3$;

(2) l_2:$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 与 π: $x-y+z=1$.

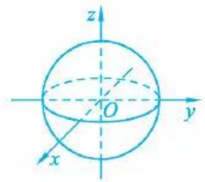
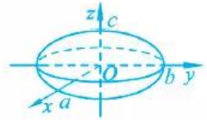
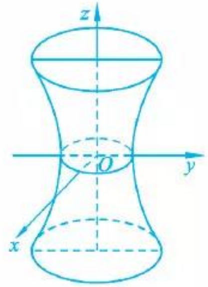
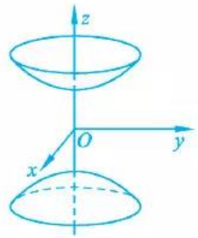
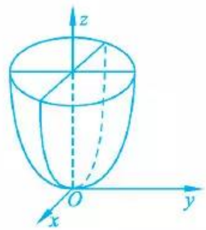
解:(1) l_1 的方向向量$\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$,π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$,

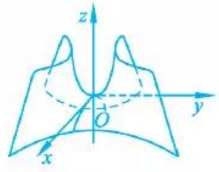
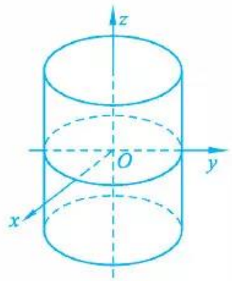
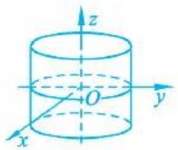
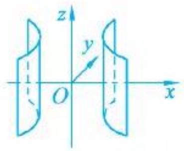
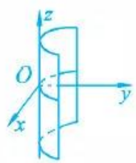
$\because \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=(-2)\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$,$\therefore l_1 // \pi$.

将直线 l_1 上的定点 $P(-3,-4,0)$ 代入平面方程不成立,即 P 点不在平面 π 上. 因此,直线平行于平面,但不在平面上.

(2) l_2 的方向向量$\boldsymbol{s}=(3,1,2)$,π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,则$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=3\times1+1\times(-1)+2\times1=4\neq0$,故 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不垂直,又显然,$\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不平行. 故 l_2 与 π 斜交.

名　称	方　程	说　明
一般方程	$F(x,y,z)=0$	
旋转曲面	$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转的曲面方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.	同理，曲线绕 y 轴旋转得旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.
柱面方程	母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x,y)=0$.	同理，母线平行于 x 轴、y 轴的柱面方程分别为 $F(y,z)=0$ 及 $F(x,z)=0$.

曲面名称	方　程	图　例
球　面	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$， 其中$(x_0,y_0,z_0)$是球心，$R>0$是半径.	 $x^2+y^2+z^2=R^2$
椭 球 面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（$a,b,c$ 均为正数）	 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
单叶双曲面 （纸篓面）	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ （a,b,c 为正数）	 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ （a,b,c 为正数）	 $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
椭圆抛物面	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 或 $y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 或 $x=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ （a,b,c 为正数）	 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

曲面名称	方　程	图　例
双曲抛物面（马鞍面）	$z=\pm\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 或 $y=\pm\left(\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ 或 $x=\pm\left(\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$ （a,b,c 为正数）	 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$
圆柱面	$x^2+y^2=R^2$ 或 $y^2+z^2=R^2$ 或 $x^2+z^2=R^2$	 $x^2+y^2=R^2$
椭圆柱面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ （a,b,c 均为正数）	 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
双曲柱面	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$ 或 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\pm1$ 或 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\pm1$ （a,b,c 均为正数）	 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
抛物柱面	$x^2=2py$ 或 $y^2=2px$ $x^2=2pz$ 或 $z^2=2px$ $y^2=2pz$ 或 $z^2=2py$ p 为非零实数	 $x^2=2py$

【例 1】 试求到球面 $\Sigma_1:(x-4)^2+y^2+z^2=9$ 与 $\Sigma_2:(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$ 的距离比为 $3:2$ 的点的轨迹，并指出曲面的类型.

解：设所求曲面上的动点为 $M(x,y,z)$. 点 M 到 Σ_1 的球心$(4,0,0)$ 的距离为 $d_1=\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}$；

点 M 到 Σ_2 的球心$(-1,-1,-1)$ 的距离为 $d_2=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2}$. 则点 M 到 Σ_1 的球面距离为 $d_1-3=\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}-3$；

点 M 到 Σ_2 的球面距离为 $d_2-2=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2}-2$，

由已知 $\dfrac{d_1-3}{d_2-2}=\dfrac{3}{2}$，得 $2d_1=3d_2$.

两边平方得 $4[(x-4)^2+y^2+z^2]=9[(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2]$，

化简得 $5(x^2+y^2+z^2)+50x+18y+18z-37=0$，

即 $(x+5)^2+\left(y+\dfrac{9}{5}\right)^2+\left(z+\dfrac{9}{5}\right)^2=38\dfrac{22}{25}$，这是一个球面方程.

名　称	方　　程	说　　明
一般方程	$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$	两曲面的交线.
参数方程	$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$	曲线上的点随参数因子改变而改变.
投影曲线方程	由 $L: \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$ 此曲线即为 L 在 xOy 面上的投影曲线	同理可得曲线 L 在 xOz，yOz 面上的投影曲线.

【例 2】 将空间曲线方程$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x+y=0 \end{cases}$化为参数方程.

解:将 $x=-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=4$,得 $2x^2+z^2=4$ 或$\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{z^2}{2^2}=1$.

按椭圆参数式的选取得$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ z=2\sin\theta, \end{cases}\theta\in[0,2\pi]$.

所以得到原曲线的参数方程$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=-\sqrt{2}\cos\theta, \theta\in[0,2\pi]. \\ z=2\sin\theta, \end{cases}$