《离散数学》期末考试题(G)参考答案

一、1.自反性、对称性和传递性.

2. 2, 1.

3. 6.

4. 封闭性和结合性.

5. 不含圈的连通.

二、1(A); 2(C); 3(B); 4(D); 5(C); 6(B); 7(C); 8(A); 9(B); 10(A).

三、1(×); 2(√); 3(√); 4(√); 5(√).

四、**证** 对于任意$a,b\in A$，假定$f(a)=f(b)$. 由于$\le$是偏序，于是$a\le a$，所以$a\in f(a)$，进而$a\in f(b)$，根据定义知$a\le b$. 同理可证，$b\le a$. 根据偏序的反对称性有$a=b$，因此f是单射.

当$a\le b$时，对于任意$x\in f(a)$，于是$x\le a$. 根据偏序的传递性有$x\le b$，即$x\in f(b)$，故$f(a)\subseteq f(b)$.

五、**证** (1) 与非联结词“↑”的运算表如下：

p　q	$p\uparrow q$
1　1	0
1　0	1
0　1	1
0　0	1

(2)$\neg p=\neg(p\wedge p)=p\uparrow p$.

$p\wedge q=\neg(\neg(p\wedge q))=\neg(p\uparrow q)=(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$.

$p\vee q=\neg(\neg p\wedge\neg q)=(\neg p)\uparrow(\neg q)=(p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)$.

六、**解** $\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\exists uQ(x,u)\to\exists vQ(y,v)))$

$=\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\neg\exists uQ(x,u)\vee\exists vQ(y,v)))$

$=\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\forall u\neg Q(x,u)\vee\exists vQ(y,v)))$

$=\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge\forall u\exists v(\neg Q(x,u)\vee Q(y,v)))$

$=\forall x\forall y\exists z\forall u\exists v(P(x,y,z)\wedge(\neg Q(x,u)\vee Q(y,v)))$

七、**证** 首先，x 和 x^{-1} 的阶数相同. 其次，当$|x| >2$ 时，$x \neq x^{-1}$.

令 $f: G \to G$，$f(x) = x^{-1}$，容易验证 f 是双射. 于是阶数大于 2 的元素成对出现，故其个数为偶数.

八、**证** (1)根据 Euler 公式，有 $r = m - n + 2$.

(2) $\dfrac{5(m-n+2)}{2} \leq m \Rightarrow m \leq \dfrac{5n-10}{3}$.

(3) 若 Petersen 图是平面图，由于其每个面至少 5 条边围成，于是由(2)知 $m \leq \dfrac{5n-10}{3}$. 因为在 Petersen 图中，$m = 15, n = 10$, 于是 $15 \leq \dfrac{5 \cdot 10 - 10}{3}$，矛盾.