目 录

一、高等数学……1
(一) 函数、极限、连续……1
(二) 一元函数微分学……5
(三)一元函数积分学……13
(四) 向量代数和空间解析几何……20
(五)多元函数微分学……30
(六)多元函数积分学……36
(七)无穷级数……41
(八)常微分方程……48
二、线性代数……53
(一) 行列式……53
(二)矩阵……55
(三) 向量……58
(四)线性方程组……61
(五)矩阵的特征值和特征向量……63
(六)二次型……64
三、概率论与数理统计……67
(一)随机事件和概率……67
(二)随机变量及其概率分布……71
(三)多维随机变量及其分布……73
(四)随机变量的数字特征……76
(五)大数定律和中心极限定理……79
(六)数理统计的基本概念……80
(七)参数估计……82
(八)假设检验……85
经常用到的初等数学公式……87
平面几何……92

一、高等数学

(一) 函数、极限、连续

考试内容	公式、定理、概念
函数和隐函数	函数：设有两个变量 x 和 y，变量 x 的定义域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作：$y=f(x)$
基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立：	基本初等函数包括五类函数: 1 幂函数: $y=x^{\mu}(\mu\in R)$; 2 指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$); 3 对数函数: $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$); 4 三角函数:如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等; 5 反三角函数:如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等. 初等函数：由常数 C 和基本初等函数经过有限次四则运算与有限此复合步骤所构成，并可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.
数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限	1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$ 2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0)=A+a(x)$, 其中 $\lim\limits_{x\to x_0} a(x)=0$ **3(保号定理)**

与右极限	设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 又$A>0$(或$A<0$), 则∃一个$\delta>0$， 当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 且$x\neq x_0$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$)
无穷小和无穷大的概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较	设$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$ (1)若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 则$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小， 记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$. (2)若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, 则$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小， (3)若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq 0)$, 则$\alpha(x)$与$\beta(x)$ **是同阶无穷小，** (4)若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 则$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价的无穷小， 记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$ (5)若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c(c\neq 0),k>0$, 则$\alpha(x)$是$\beta(x)$的k阶无穷小 常用的等阶无穷小：当$x\to 0$时 $\left.\begin{array}{l}\sin x\\ \arcsin x\\ \tan x\\ \arctan x\\ \ln(1+x)\\ e^x-1\end{array}\right\}\sim x,$ $\quad 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ $\quad (1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}x$ 无穷小的性质 （1） 有限个无穷小的代数和为无穷小 （2） 有限个无穷小的乘积为无穷小 （3） 无穷小乘以有界变量为无穷小 Th 在同一变化趋势下，无穷大的倒数为无穷小；非零的

	无穷小的倒数为无穷大
极限的四则运算	$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$.则 (1) $\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B$； (2) $\lim f(x)g(x)=A\bullet B$； (3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$
极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：	1(夹逼定理）设在x_0的邻域内，恒有$\varphi(x)\leq f(x)\leq\phi(x)$, 且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=A$, 则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ **2 单调有界定理：单调有界的数列必有极限** **3 两个重要极限：** (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ **重要公式：** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=m\\0,n<m\\\infty,n>m\end{cases}$ 4 几个常用极限特例 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,　　$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$　　$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arc}\cot x=0$,

	$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$　　$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=\infty,$　　$\lim\limits_{x\to+0^{+}}x^{x}=1,$
函数连续的概念：函数间断点的类型：初等函数的连续性：闭区间上连续函数的性质	连续函数在闭区间上的性质： (1) (连续函数的有界性)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,即∃常数 $M>0$，对任意的 $x\in[a,b]$,恒有 $\lvert f(x)\rvert\le M$. (2) (最值定理)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 至少取得最大值与最小值各一次,即 $\exists\xi,\eta$ 使得: $f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\},\quad \xi\in[a,b]$； $f(\eta)=\min\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\},\quad \eta\in[a,b]$. (3) (介值定理)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ (或最大值 M 与最小值 m)之间的任一实数,则在 $[a,b]$ 上至少∃一个 ξ ,使得 $f(\xi)=\mu.\quad(a\le\xi\le b)$ (4) (零点定理或根的存在性定理)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在 (a,b) 内至少∃一个 ξ ,使得

	$f(\xi)=0.\ (a<\xi<b)$

(二) 一元函数微分学

考试内容	对应公式、定理、概念
导数和微分的概念 左右导数 导数的几何意义和物理意义	1 导数定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ （1） 或 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ （2） 2 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为： 左导数： $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},(x=x_0+\Delta x)$ 右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
函数的可导性与连续性之间的关系，平面曲线的切线和法线	Th1：函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导 Th2：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，反之则不成立.即函数连续不一定可导. Th3：$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ 设函数$f(x)$在$x=x_0$处可导，则$f(x)$在$M(x_0,y_0)$处的 切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ 法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),f'(x_0)\neq 0.$
导数和微分的四则运算，初	四则运算法则:设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 可导则 (1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ $\quad d(u\pm v)=du\pm dv$ (2) $(uv)'=uv'+vu'$ $\quad d(uv)=udv+vdu$

等函数的导数，	(3) $(\frac{u}{v})'=\frac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq 0)$ $d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$ 基本导数与微分表 (1) $y=c$（常数） $y'=0$ $dy=0$ (2) $y=x^\alpha(\alpha$ 为实数$)$ $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ $dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$ (3) $y=a^x$ $y'=a^x\ln a$ $dy=a^x\ln adx$ 特例 $(e^x)'=e^x$ $d(e^x)=e^xdx$ (4) $y'=\frac{1}{x\ln a}$ $dy=\frac{1}{x\ln a}dx$ 特例 $y=\ln x$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$ (5) $y=\sin x$ $y'=\cos x$ $d(\sin x)=\cos xdx$ (6) $y=\cos x$ $y'=-\sin x$ $d(\cos x)=-\sin xdx$ (7) $y=\tan x$ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ $d(\tan x)=\sec^2 xdx$ (8) $y=\cot x$ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$ $d(\cot x)=-\csc^2 xdx$ (9) $y=\sec x$ $y'=\sec x\tan x$ $d(\sec x)=\sec x\tan xdx$ (10) $y=\csc x$ $y'=-\csc x\cot x$ $d(\csc x)=-\csc x\cot xdx$ (11) $y=\arcsin x$ $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (12) $y=\arccos x$ $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (13) $y=\arctan x$ $y'=\frac{1}{1+x^2}$ $d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$ (14) $y=\mathrm{arccot}\, x$ $y'=-\frac{1}{1+x^2}$ $d(\mathrm{arccot}\, x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

	(15) $y = shx$ $y' = chx$ $d(shx) = chxdx$ (16) $y = chx$ $y' = shx$ $d(chx) = shxdx$
复合函数，反函数，隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法，	1 反函数的运算法则：设 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f'(x) \neq 0$，则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 2 复合函数的运算法则:若 $\mu = \varphi(x)$ 在点 x 可导,而 $y = f(\mu)$ 在对应点 μ ($\mu = \varphi(x)$)可导,则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导,且 $y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)$ 3 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法： (1)方程两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，则 y 的函数是 x 的复合函数.例如 $\frac{1}{y}$， y^2， $\ln y$， e^y 等均是 x 的复合函数.对 x 求导应按复合函数连锁法则做. (2)公式法.由 $F(x,y) = 0$ 知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$,其中， $F_x'(x,y)$， $F_y'(x,y)$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数 (3)利用微分形式不变性
高阶导数，一阶微分形式的不变性，	常用高阶导数公式 （1） $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$ $(e^x)^{(n)} = e^x$ （2） $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$ （3） $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$

	（4）$(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ （5）$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ （6）莱布尼兹公式：若$u(x),v(x)$均n阶可导，则 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}c_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}$，其中$u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$
微分中值定理，必达法则，泰勒公式	Th1(费马定理)若函数$f(x)$满足条件： (1)函数$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x)\le f(x_0)$或$f(x)\ge f(x_0)$， (2) $f(x)$在x_0处可导,则有 $f'(x_0)=0$ Th2 (罗尔定理) 设函数$f(x)$满足条件： (1)在闭区间$[a,b]$上连续； (2)在(a,b)内可导，则在(a,b)内$\exists$一个ξ，使 $f'(\xi)=0$ Th3 (拉格朗日中值定理) 设函数$f(x)$满足条件： (1)在$[a,b]$上连续；(2)在(a,b)内可导；则在(a,b)内$\exists$一个 ξ，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ Th4 (柯西中值定理) 设函数$f(x)$，$g(x)$满足条件： (1)在$[a,b]$上连续；(2)在(a,b)内可导且$f'(x)$，$g'(x)$均存在， 且$g'(x)\neq 0$则在(a,b)内$\exists$一个ξ，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 洛必达法则： 法则Ⅰ ($\dfrac{0}{0}$型)设函数$f(x),g(x)$满足条件： $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；$f(x),g(x)$在$x_0$的邻域内可导

(在 x_0 处可除外)且 $g'(x)\neq 0$；$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则I′ ($\dfrac{0}{0}$ 型)设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$；$\exists$一个 $X>0$，当 $|x|>X$

时, $f(x),g(x)$ 可导,且 $g'(x)\neq 0$；$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则II ($\dfrac{\infty}{\infty}$ 型) 设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$； $f(x),g(x)$ 在 x_0 的邻域内可

导(在 x_0 处可除外)且 $g'(x)\neq 0$；$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞).则

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. 同理法则II′ ($\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)仿法则I′ 可写出

泰勒公式: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x，在 x_0 与 x 之间至少 $\exists$ 一个 ξ，使得

	$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$ $$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$ 其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒余项.令 $x_0=0$，则 n 阶泰勒公式 $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$ ……(1) 其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 在 0 与 x 之间.(1)式称为麦克劳林公式 常用五种函数在 $x_0=0$ 处的泰勒公式 $$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$ 或 $=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$ $$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)$$ 或 $=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$ $$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)$$

	或 $=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+o(x^n)$ $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$ 或 $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$ $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$ $+\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$ 或 $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$ $+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$
函数单调性的判别，函数的极值，函数的图形的凹凸性，拐点及渐近线，用函数图形描绘函数最大值和最小值，	1 函数单调性的判断： Th1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间内可导，如果对 $\forall x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的（或单调减少） Th2（取极值的必要条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取极值，则 $f'(x_0)=0$. Th3 （取极值的第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微，且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在 x_0 处连续，但 $f'(x_0)$ 不存在.） (1)若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由“+”变“-”，则 $f(x_0)$ 为极大值； (2)若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由“-”变“+”，则 $f(x_0)$ 为极小值；

(3)若 $f'(x)$ 经过 $x=x_0$ 的两侧不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值.

Th4 (取极值的第二充分条件)设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；

当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

注：如果 $f''(x_0)=0$，此方法失效.

2 渐近线的求法：

(1)水平渐近线　若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 称为函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(2)铅直渐近线　若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 称为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

(3)斜渐近线　若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则 $y=ax+b$ 称为 $y=f(x)$ 的斜渐近线

3 函数凹凸性的判断：

Th1 (凹凸性的判别定理）若在 I 上 $f''(x)<0$（或 $f''(x)>0$），则 $f(x)$ 在 I 上是凸的（或凹的）.

Th2 (拐点的判别定理 1)若在 x_0 处 $f''(x)=0$，（或 $f''(x)$ 不存在），当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

Th3 (拐点的判别定理 2)设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶导数，且 $f''(x)=0$，$f'''(x)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点

弧微分，曲率的概念，曲率半径	1. 弧微分： $dS=\sqrt{1+y'^2}dx.$ 2. 曲率：曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的曲率 $k=\dfrac{\lvert y''\rvert}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 对于参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$, $k=\dfrac{\lvert\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)\rvert}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$. 3.曲率半径：曲线在点 M 处的曲率 $k(k\neq0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系： $\rho=\dfrac{1}{k}$.

(三)一元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质	基本性质 1 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （ $k\neq0$ 为常数） 2 $\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_k(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\pm\cdots\pm\int f_k(x)dx$ 3 求导： $[\int f(x)dx]'=f(x)$ 或微分： $d\int f(x)dx=f(x)dx$ 4 $\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$ （ C 是任意常数）
基本积分公式	$\int x^k dx=\dfrac{1}{k+1}x^{k+1}+C$ （ $k\neq-1$ ） $\int\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}+C$ $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$

	$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,a\neq 1) \qquad \int e^x dx=e^x+C$ $\int \cos x dx=\sin x+C \qquad \int \sin x dx=-\cos x+C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\int \sec^2 x dx=\tan x+C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=\int \csc^2 x dx=-\cot x+C$ $\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \csc x dx=\ln\lvert\csc x-\cot x\rvert+C$ $\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \sec x dx=\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert+C$ $\int \sec x\tan x dx=\sec x+C \qquad \int \csc x\cot x dx=-\csc x+C$ $\int \tan x dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C \qquad \int \cot x dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$ $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C \qquad \int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$ **重要公式** (1)设$f(x)$在$[-l,l]$上连续，则 $\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_0^l[f(x)+f(-x)]dx$

<table>
<tr><td></td><td>

$$=\begin{cases}0,当f(x)为奇函数\\2\int_0^l f(x)dx,当f(x)为偶函数\end{cases}$$

(2) 设$f(x)$是以T为周期的连续函数，a为任意实数，

$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$

$(3)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi a^2$

$$(4)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},当n为偶数\\\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1,当n为奇数\end{cases}$$

$$(5)\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx=\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mxdx=\begin{cases}\pi,n=m\\0,n\neq m\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx=\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mxdx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mxdx=0=\begin{cases}\pi,n=m\\0,n\neq m\end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>定积分的
概念和基
本性质，
定积分中
值定理</td><td>

1. 定积分的基本性质

(1)定积分只与被积函数和积分限有关，而与积分变量无关，即

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\cdots$

$(2)\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$(3)\int_a^b dx=b-a$

$(4)\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

(5) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$（$k$为常数）

(6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(7)比较定理：设$f(x) \le g(x), x \in [a,b]$，则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

推论：1. 当$f(x) \ge 0, x \in [a,b]$时，$\int_a^b f(x)dx \ge 0$;

2. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

(8)估值定理：设$m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$，其中$m, M$为常数，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

(9)积分中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少∃一个ξ，使$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$

$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ -----平均值公式

</td></tr>
<tr><td>积分上限的函数及其导数，牛顿——莱布尼兹公式</td><td>

Th1

设函数$f(x)$ 在$[a, b]$上连续，$x \in [a, b]$，则变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$对x可导

且有 $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = f(x)$

推论1　设$F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$，则$F'(x) = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$.

推论2　$(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt)_x' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)] \cdot \phi'(x)$

推论3　$(\int_a^{\varphi(x)} f(t)g(x)dt)_x' = (g(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt)_x'$

</td></tr>
</table>

	$=g'(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt+g(x)f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ **Th2** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^x f(x)dt$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数 **Th3** 牛顿-莱布尼茨公式:设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$ 是$f(x)$的原函数，则$\int_a^b f(x)dx=F(x)\|_a^b=F(b)-F(a)$
不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法	**1 不定积分：** **分部积分法：** $\int udv=uv-\int vdu$ 选择 u，dv 的原则：积分容易者选作 dv，求导简单者选为 u **换元积分法：** 设$\int f(u)du=F(u)+C$， 则$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$ 设$u=\varphi(x)$ $\int f(u)du=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C$ **2. 定积分** **换元法:** 设函数$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若$x=\varphi(t)$ 满足: (1) $\varphi(t)$在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，且$\varphi'(t)\neq 0$. (2)$\varphi(\alpha)=a\cdot\varphi(\beta)=b$.并且当$t$在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，$\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$ **分部积分公式**

设$u(x)$，$v(x)$ 在 [a, b] 上具有连续导函数$u'(x),v'(x)$,则

$$\int_b^a u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_b^a - \int_b^a v(x)u'(x)dx$$

3. 定积分不等式证明中常用的不等式

(1)$a^2+b^2 \ge 2ab$　　　　(2)$a>0, a+\frac{1}{a} \ge 2$

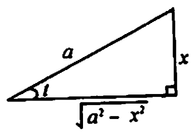
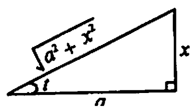
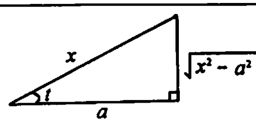
(3)柯西不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right),$$

其中$f(x)$，$g(x)$ 在 [a, b] 上连续

有理函数，三角函数的有理式和简单无理函数的积分，广义积分和定积分的应用

1. 三角函数代换

函数 $f(x)$ 含根式	所作代换	三角形示意图
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$	

有理函数积分

(1)$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$

(2)$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C(n\ne 1)$

$$(3)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}]^n}\xleftrightarrow[\frac{4q-p^2}{4}=a^2]{\text{令}x+\frac{p}{2}=u}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}$$

$$(4)\int\frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+(a-\frac{p}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

（$p^2-4q<0$）

4. 广义积分

（1） 无穷限的广义积分（无穷积分）

设$f(x)$ 连续，则 $1.\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

$2.\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$3.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_c^{+\infty}f(x)dx$

（2） 无界函数的广义积分（瑕积分）

$1.\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$,(当$x\to b^-$时，$f(x)\to\infty$)

$2.\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$,(当 $x\to a^+$时， $f(x)\to\infty$)

$3.\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\eta\to0^+}\int_{c+\eta}^{b}f(x)dx$

(当$x\to c$时，$f(x)\to\infty$)

(四) 向量代数和空间解析几何

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念，向量的线性运算，	1.向量：既有大小又有方向的量，又称矢量. 2.向量的模：向量 $\bar{a}$ 的大小.记为 $\lvert\bar{a}\rvert$. 3.向量的坐标表示：若向量用坐标表示 $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=\{x,y,z\}$，则 $\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 4 向量的运算法则： Ⅰ加减运算　设有矢量 $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\bar{a}\pm\bar{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$. Ⅱ.数乘运算　数乘运算 $\triangleq$ 矢量 $\bar{a}$ 与一数量 λ 之积 $\lambda\bar{a}$， $\lambda\bar{a}=\begin{cases}\lvert\lambda\bar{a}\rvert\overline{a^0} & \lambda>0,\text{即与}\bar{a}\text{同向}\\ \bar{0} & \lambda=0,\text{即为零矢量}\\ -\lvert\lambda\bar{a}\rvert\overline{a^0} & \lambda<0,\text{即与}\bar{a}\text{反向}\end{cases}$　设 $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，则 $\lambda\bar{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$.
向量的数量积和向量积，向量的混合积，	1 矢量的数积（点积，内积）： 矢量 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的数量积 $\bar{a}\cdot\bar{b}=\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$. 设 $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. 2 矢量的向量积（叉积，外积）：设有两个向量 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$，若∃

	一个矢量$\vec{c}$，满足如下条件 （1）$\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin(\vec{a},\vec{b})$； （2）$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$，即$\vec{c}$垂直于$\vec{a}$，$\vec{b}$所确定的平面； （3）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$成右手系.则称矢量$\vec{c}$为矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的矢量积，记$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. 设$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$ 3 混合积：设有三个矢量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，若先作$\vec{a}$，$\vec{b}$的叉积$\vec{a}\times\vec{b}$，再与$\vec{c}$作点积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，则这样的数积称为矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$的混合积，记为$(a,b,c)$，即$(a,b,c)=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$ 设$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$， 则$(a,b,c)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$
两向量垂直、平行的条件，两向量的夹角，向	1 向量之间的位置关系及结论 设$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

量的坐标表达式及其运算，单位向量，方向数与方向余弦，	（1）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$； （2）$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$； 其中 x_2,y_2,z_2 之中有一个为“0”，如 $x_2=0$，应理解为 $x_1=0$； （3）$\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow\exists$ 不全为零的数 λ,μ 使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$； （4）矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，可由下式求出 $\cos(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$； （5）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow\exists$ 不全为零的数 λ,μ,ν，使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$ 或者 $(a,b,c)=0$ 2 单位向量：模为 1 的向量．向量 $\vec{a}$ 的单位向量记作 $\overline{a^0}$， $\overline{a^0}=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$. 3 向量的方向余弦： $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

	其中α,β,γ为向量$\bar{a}$与各坐标轴正向的夹角. 4 单位向量的方向余弦：显然$\overline{a^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
曲面方程和空间曲线方程的概念，平面方程，直线方程，平面与平面、平面与直线、直线与直线的以及平行、垂直的条件，点到平面和点到直线的距离	1 平面方程 (1)一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$，法矢量$\vec{n}=\{A,B,C\}$， 若方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴， 例如 平面$Ax+Cz+D=0//y$轴 (2)平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $M(x_0,y_0,z_0)$为平面上已知点，$\vec{n}=\{A,B,C\}$为法矢量 (3)三点式方程 $\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}$ $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$为平面上的三个点 (4)截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a,b,c$分别为平面上坐标轴上 的截距，即平面通过三点 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$ 2 直线方程 一般式方程(两平面交线)：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1x+D_1=0 & 平面\pi_1\\ A_2x+B_2y+C_2x+D_2=0 & 平面\pi_2\end{cases}$ 平面π_1与平面π_2的法矢量分别为$\overline{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$，

$\overline{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ ， 直线的方向矢量为$\vec{s}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$

(2)标准式方程

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ $M(x_0,y_0,z_0)$为直线上已知点，

$\vec{s}=\{l,m,n\}$为直线的方向矢量

(3)两点式方程 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

其中$M_1(x_1,y_1,z_1)$， $M_2(x_2,y_2,z_2)$为直线上的两点

(4)参数式方程$\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$ $M(x_0,y_0,z_0)$为直线上已知

点， $\vec{s}=\{l,m,n\}$为直线的方向矢量

3 平面间的关系

设有两个平面：平面π_1： $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$平面π_2：

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

(1)平面π_1 // 平面π_2 $\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

(2)平面$\pi_1\perp$平面π_2 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

(3)平面π_1与平面π_2的夹角θ，由下式确定

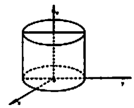
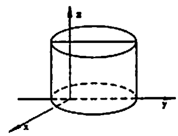
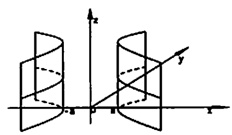
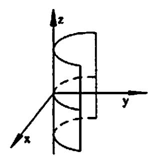
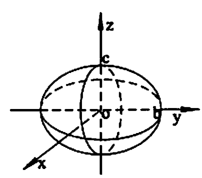
$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

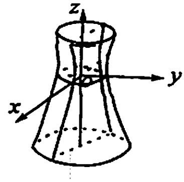
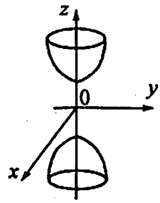
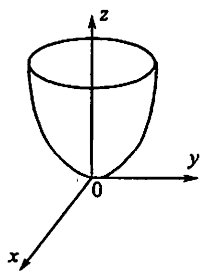
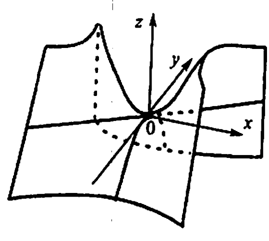
4 平面与直线间关系

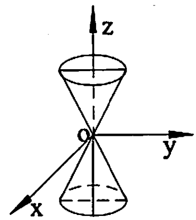
	直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 平面 π_1： $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (1) $L // \pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$ (2) $L\perp\pi \Leftrightarrow \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$ (3) L 与 π 的夹角 θ，由下式确定 $\sin\theta=\dfrac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ 5 直线间关系 设有两直线：直线 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ 直线 $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ (1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ (2) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ (3)直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ，由下式确定 $\cos\theta=\dfrac{\lvert l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\rvert}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$ 6 点到平面的距离： $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 $d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 7 点到直线的距离： $M(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ 距离为

	$$d = \frac{\left\lvert \overrightarrow{M_1M_0} \times \overrightarrow{M_1P} \right\rvert}{\overrightarrow{M_1P}} = \frac{\left\lVert \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{matrix} \right\rVert}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

球面，母线平行于坐标轴的柱面，旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程，	准线为各种形式的柱面方程的求法 (1) 准线为$\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z\quad\quad=0 \end{cases}$,母线$//z$轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$, 准线为$\Gamma:\begin{cases} \varphi(x,z)=0 \\ y\quad\quad=0 \end{cases}$,母线$//y$轴的柱面方程为 $\varphi(x,z)=0$, 准线为$\Gamma:\begin{cases} \psi(y,z)=0 \\ x\quad\quad=0 \end{cases}$,母线$//x$轴的柱面方程为 $\psi(y,z)=0$. (2) 准线为$\Gamma:\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$,母线的方向矢量为$\{l,m,n\}$ 的柱面方程的求法 首先,在准线上任取一点(x,y,z),则过点(x,y,z)的母线方程 为$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}$ 其中X,Y,Z为母线上任一点的流动坐标,消去方程组 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \\ \frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n} \end{cases}$

<table>
<tr><td rowspan="12">常用的二次曲面方程及其图形，空间曲线的参数方程和一般方程，空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.</td><td colspan="3">常见的柱面方程</td></tr>
<tr><td>名称</td><td>方程</td><td>图形</td></tr>
<tr><td>圆柱面</td><td>$x^2+y^2=R^2$</td><td></td></tr>
<tr><td>椭圆柱面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td></td></tr>
<tr><td>双曲柱面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td></td></tr>
<tr><td>抛物柱面</td><td>$x^2=2py,(p>0)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">标准二次方程及其图形</td></tr>
<tr><td>名称</td><td>方程</td><td>图形</td></tr>
<tr><td>椭球面</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
(a,b,c 均为正数)</td><td></td></tr>
</table>

	单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (a,b,c 均为正数)	
	双叶双曲面	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (a,b,c 均为正数)	
	椭圆的抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (a,b,p 为正数)	
	双曲抛物面 (又名马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (a,b,p 均为正数)	

	二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (a,b,c 为正数)	

(五)多元函数微分学

考试内容	对应公式、定理、概念
多元函数的概念，二元函数的几何意义，二元函数的极限和连续的概念，	二元函数 $z=f(x,y)$ 连续，可导（两偏导存在）与可微三者的关系如下： 可导 $\leftarrow$ 可微 $\rightarrow$ 函数连续“$\leftarrow$ $\rightarrow$”表示可推出 用全微分定义验证一个可导函数的可微性，只需验证： $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{\Delta z-f_x'(x,y)\Delta x-f_y'(x,y)\Delta y}{\rho}$ 是否为0
有界闭区域上多元连续函数的性质，多元函数偏导数和全微分，全微分存在的必要条件和充	**基本原理** $Th1$(求偏导与次序无关定理) 设$z=f(x,y)$的两个混合偏导数$f_{xy}''(x,y),f_{yx}''(x,y)$ 在区域D内连续,则有$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)$ $Th2$(可微与偏导存在的关系定理)若$z=f(x,y)$在$P(x,y)$ 点处可微,则在该点处$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$必存在,且有$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

分条件，	$Th3$(偏导存在与可微的关系定理) 若$z=f(x,y)$的两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在$P(x,y)$上的某领域内存在，且在$P(x,y)$连续； 则$z=f(x,y)$在$P(x,y)$点处可微
多元复合函数、隐函数的求导法，二阶偏导数，方向导数和梯度，	**1 复合函数微分法** (1)设$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$, 则$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ (2)设$z=f(u,v),u=\varphi(x),v=\phi(x)$, 则$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$,称之为$z$的全导数 (3)设$z=f(x,u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$, 则$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ **注**：复合函数一定要设中间变量，抽象函数的高阶偏导数，其中间变量用数字 1，2，3……表示更简洁. **2 隐函数微分法** (1)设$F(x,y)=0$,则$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ (2)$F(x,y,z)=0$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$ (3)设由方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$确定的隐函数$y=y(x),z=z(x)$,

	则$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$可通过 解关于$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$的线性方程组 $:\begin{cases} F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\cdot\frac{dz}{dy}=0 \\ G'_x+G'_y\frac{dy}{dx}+G'_z\frac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=-F'_x, \\ G'_y\frac{dy}{dx}+G'_z\frac{dz}{dx}=-G'_x \end{cases}$ 来求解 方向导数和梯度 Th1 设 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 存在方向导数且 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$ 在平面上 l 除了用方向角表示外也可用极角表示： $l=(\cos\theta,\sin\theta)$， θ是l的极角，$\theta\in[0,2\pi]$ 此时相应的方向导数的计算公式为 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\theta$ Th2 设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 存在方向导数且有 $\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma$ 梯度： $z=f(x,y)$ 在点 M_0 的方向导数计算公式可改写成 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$ $=grad(f(x_0,y_0))\cdot l=\lvert gradf(x_0,y_0)\rvert\cos\langle grad(f(x_0,y_0)),l\rangle$

<table>
<tr><td></td><td>这里向量 $gradf(x_0,y_0)=(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})$ 成为
$z=f(x,y)$ 在点 M_0 的梯度(向量)
$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$ 随 l 而变化 $l=\frac{grad(f(x_0,y_0)}{\lvert grad(f(x_0,y_0)\rvert}$ 即沿梯度方向时，方向导数取最大值 $\lvert grad\, f(x_0,y_0)\rvert$</td></tr>
<tr><td>空间曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线，</td><td>1. 曲线的切线及法平面方程
(1)曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\text{在}(x_0,y_0,z_0)\leftrightarrow t=t_0\\ z=z(t)\end{cases}$
处的切线方程: $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$
法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$
(2)空间曲线Γ的一般式方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$
则在曲线Γ的 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的
切线方程: $\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right\rvert_p}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right\rvert_p}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\rvert_p}$
法线方程:
$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right\rvert_p(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right\rvert_p(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\rvert_p(z-z_0)=0$
2. 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程</td></tr>
</table>

	(1)设曲面$\sum$为显示方程$z=f(x,y)$,则在$\sum$上一点$P(x_0,y_0,z_0)$处的 切平面方程:$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_p(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_p(y-y_0)-(z-z_0)=0.$ 法线方程:$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_p}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_p}=\frac{z-z_0}{-1}$ (2)设曲面$\sum$为隐式方程$F(x,y,z)=0$,则在$\sum$上一点$P(x_0,y_0,z_0)$的 切平面方程：$F'_x\|(x-x_0)+F'_y\|_p(y-y_0)+F'_z\|_p(z-z_0)=0$ 法线方程:$\frac{x-x_0}{F'_x\|_p}=\frac{y-y_0}{F'_y\|_p}=\frac{z-z_0}{F'_z\|_p}$
二元函数的二阶泰勒公式，多元函数的极值和条件极值，多元函数的最大值、最小值及其简单应用	**1 多元函数的极值** **定义:** 设函数$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$的某邻域内有定义,**若对于该邻域** **内异于** $P(x_0,y_0)$ 点的任一 点$Q(x,y)$ 恒有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$(或$<f(x_0,y_0)$) 则称$f(x_0,y_0)$为$f(x,y)$ 的极小值 **(极大值)** $Th1$(取极值的必要条件) 设$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点的一阶偏导数存在，且 $P(x_0,y_0)$是$z=f(x,y)$的极值点，则$\begin{cases}f_x'(x_0,y_0)=0\\f_y'(x_0,y_0)=0\end{cases}$

$Th2$（函数取极值的充分条件）

设$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点的某邻域内有

连续的二阶偏导数，且$f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$

$[f''_{xy}(x_0,y_0)]^2-f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f''_{y^2}(x_0,y_0)<0$

则$P(x_0,y_0)$是$z=f(x,y)$的一个极值点

(1)若$f''_{x^2}(x_0,y_0)>0$(或$f''_{y^2}(x_0,y_0)>0$)，则$P(x_0,y_0)$为极小值点。

(2)若$f''_{x^2}(x_0,y_0)<0$(或$f''_{y^2}(x_0,y_0)<0$)，则$P(x_0,y_0)$为极大值点。

2 无条件极值

解题程序：

(1)求出$z=f(x,y)$的驻点（x_0,y_0）；

(2)用$Th2$判别(x_0,y_0)是否为极值点；是，则$f(x_0,y_0)$为

$z=f(x,y)$ 的极值。

3 条件极值（拉格朗日乘数法）

1）由条件$\varphi(x,y)=0$，求$z=f(x,y)$的极值

解题程序:

令$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$；

	解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ 求驻点(x_0,y_0); $f(x_0,y_0)$即为$f(x,y)$的极值（存在的话） 2）由条件φ(x, y, z)=0, 求$u=f(x,y,z)$的极值。解题程序: 令$F(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$; 解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)=0 \\ f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)=0 \\ f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$ 若（$x_{0,}y_{0,}z_0$)为其解$f(x_{0,}y_0,z_0)$即为$f(x,y,z)$的极值（若存在的话） 3）由条件$\varphi_1(x,y,z)=0.\varphi_2(x,y,z)=0$求函数$u=f(x,y,z)$的极值 解题程序: 令$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$ 以下仿 1）,2）

(六)多元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用	**1 二重积分:** $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, 其中$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$, d_i为$\Delta\sigma_i$的直径（$i=1,2,\cdots n$) **几何意义:** 当$z=f(x,y)\ge 0,(x,y)\in D$时，而二重积分I表示以$z=f(x,y)$为曲顶，以D为底的柱体体积。

	2 三重积分： $I=\iiint_D F(x,y,z)dv=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\Delta v_i$，其中$d=\max_{1\le i\le n}\{d_i\}$， d_i为Δv_i的直径（$i=1,2,\cdots n$） **物理意义：** 三重积分I表示体密度为$\mu=f(x,y,z)$的空间形体Ω的质量。 **3 性质(只叙述二重积分的性质，三重积分类似)** **(1)** $\iint_D kf(x,y)\,d\sigma=k\iint_D f(x,y)d\sigma$，$k$为常数 **(2)** $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma=\iint_D f(x,y)d\sigma\pm g(x,y)d\sigma$ **(3)** $\iint_D f(x,y)d\sigma=\sum_{i=1}^{n}\iint_{D_i} f(x,y)d\sigma$，其中$D_i$为 D 的构成子域且任 两个子域没有重迭部分（$i=1,2,\cdots,m$） (4)$\iint_D d\sigma=A$，其中A为D的面积。 **(5)（比较定理）** 若在D上恒有$f(x,y)\le g(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma$ (6)(估值定理）设M,m分别为$f(x,y)$在闭域D上的最大与最小值， A为D的面积，则 $mA\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le MA$

(7)(中值定理）若$f(x, y)$在闭域D上连续，A为D的面积，则在D上至少∃一点（ξ，η），使$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)A$

(8)二重积分的对称性原理

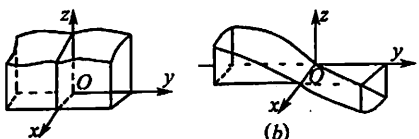
1）如果积分域D关于x轴对称，$f(x,y)$为y的奇偶函数，

则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\begin{cases} 0, f\text{关于}y\text{为奇函数，即}f(x,-y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, f\text{关于y为偶函数，即}f(x,-y)=f(x,y), \end{cases}$$

D_1为D在上半平面部分

这个性质的几何意义见图(a)、(b)



(a) (b)

2）如果积分域D关于y轴对称，$f(x,y)$为x的奇偶函数，

则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\begin{cases} 0, f\text{关于}x\text{的奇函数，即}f(-x,y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma, f\text{关于}x\text{为偶函数，即}f(-x,y)=f(x,y), \end{cases}$$

D_2为D在右半平面部分

3）如果D关于原点对称，$f(x,y)$同时为x,y的奇偶函数，

	则二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ $=\begin{cases}0, f关于x, y的奇函数，即f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma, f关于x，y为偶函数，即f(-x,-y)=f(x,y),\end{cases}$ D_1为D在上半平面部分 4）如果D关于直线$y=x$对称，则$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ **注：**注意到二重积分积分域D的对称性及被积函数$f(x,y)$的奇偶性，一方面可减少计算量，另一方面可避免出差错，要特别注意的是仅当积分域D的对称性与被积函数$f(x,y)$的奇偶性两者兼得时才能用性质8.
两类曲线积分的概念、性质及计算，两类曲线积分的关系，格林公式，平面曲线积分与路径无关的条件，	**1 平面曲线积分与路径无关的四个等价条件** 设函数$P(x,y),Q(x,y)$在单连通区域D上具有一阶连续偏导数，则$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)\in D$ $\Leftrightarrow \oint_L Pdx+Qdy=0, L$为一简单分段光滑封闭曲线 $\Leftrightarrow$存在函数$u(x,y),(x,y)\in D$使$du(x,y)=Pdx+Qdy$, 且 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ 2 格林公式：设平面上的有界闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在有D连续的一阶偏导数，则有 $\iint\limits_{D}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

	或者 $\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx-Qdy$
二元函数全微分的原函数，两类曲面积分的概念、性质及计算，两类曲面积分的关系，高斯公式，斯托克斯公式，	1 高斯(Gauss)公式 设Ω是空间中的有界闭区域，由分块光滑的曲面所 S 围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在Ω由连续的一阶偏导数，则 $\iiint\limits_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 或 $\iiint\limits_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$ 这里 S 是 Ω 的整个边界的外侧(即取外法向)，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 上点 (x,y,z) 处的外法向量的方向余弦. 2 斯托克斯公式 设Γ为分段光滑的又向闭曲线，S 是以Γ为边界的分块光滑有向曲面，Γ的正向与 S 的侧(即法向量的指向)符合右手法则，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域内有连续的一阶偏导数，则有 $\iint\limits_S (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_\Gamma Pdx+Qdy$ $(\iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz)$ 或 $\iint\limits_S (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma$ $=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$
散度和旋	1 散度的计算公式

度的概念及计算，曲线积分和曲面积分的应用	设 $\overline{A}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$;$P,Q,R$ 均可导，则 $\overline{A}$ 在 $P(x,y,z)$ 点处的散度为 $div\overline{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 2 旋度的计算公式 设有矢量场 $\overline{A}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$ ，其中 P,Q,R 均有连续的一阶偏导数，则旋度 $rot\overline{A}$ 为： $rot\overline{A}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

(七)无穷级数

考试内容	对应公式、定理、概念
常数项级数的收敛与发散的概念，收敛级数的和的概念级数的基本性质与收敛的必要条件	**1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的性质：** (1)设 $c\neq 0$的常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$有相同敛散性 （2）设有两个数级 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s,\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=s\pm\sigma$. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$发散.

	若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 敛散性不定. 注：添加或去消有限项不影响一个级数的敛散性. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对其各项任意加括号后所得新级数仍收敛于原级数的和
几何级数与 p 级数以及他们的收敛性，正项级数收敛性的判别法，	**正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ （$u_n \geq 0$）的判敛法** (1)比较判敛法：设 $0 \leq u_n \leq v_n$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛　　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 (2)比较法的极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A (v_n \neq 0)$ 1.若 $0 \leq A < +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 2.若 $0 < A \leq +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 两个常用的比较级数 $i)$ 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, \lvert r \rvert < 1 \\ \text{发散}, \lvert r \rvert \geq 1 \end{cases}$ $ii)$ $p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛，} p > 1\text{时} \\ \text{发散，} p \leq 1\text{时} \end{cases}$

	(3)**比值判别法**（达朗贝尔准则）（适用于通项u_n中含有 n!或关于 n 的若干连乘积形式） 设$u_n \geq 0, n = 1,2\cdots$对于$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$来讲 若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho > 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n\text{发散} \\ \rho = 1\text{时，方法失效} \\ \rho < 1\text{时}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n\text{收敛} \end{cases}$
交错级数与莱布尼兹定理，任意项级数的绝对收敛与条件收敛，	**1． 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,(u_n > 0)$ 的判敛法** **莱布尼兹准则：** 若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,(u_n > 0)$满足条件： (1)$u_n \geq u_{n+1},(n = 1,2,\cdots\cdots)$; (2)$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 则交错级数收敛，其和$S \leq u_1$，其 n 项余和的绝对值$\lvert R_n \rvert \leq u_{n+1}$.
函数项级数的收敛域与和函数的概念，幂级数及其收敛半径，收敛区间(指开区间)和收敛域，幂级数的和	**1 幂级数：** $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 收敛半径，若$\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = \rho$, 则$R = \frac{1}{\rho}$. **2． 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛域的求法步骤：** (1)用比值（或根值）法求$\rho(x)$，即 $\lim_{n\to\infty}\frac{\lvert u_{n+1}(x)\rvert}{\lvert u_n(x)\rvert} = \rho(x)$(或$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert u_n(x)\rvert} = \rho(x)$);

函数，	(2)解不等式方程$\rho(x)<1$，求出$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛区间$(a,b)$; (3)考察$x=a$（或$x=b$）时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$（或$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$）的敛散性 (4) 写出$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域
幂级数在其收敛区间内的基本性质，简单幂级数的和函数的求法，初等幂级数展开式	1 幂级数的四则运算性质： 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x),\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=g(x)$,其收敛半径分别为 $R_1,R_2,R=\min(R_1,R_2)$，则对$\forall x\in(-R,R)$,有 (1)$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=f(x)\pm g(x)$，且在（-R，R）内绝对收敛 (2)$(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n$ $=f(x)g(x)$ (3)设$b_0\neq0$,则在$x=0$的足够小邻域内 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots}=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots$ 利用多项式的长除法可得：$C_0=\frac{a_0}{b_0},C_1=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2},\cdots$ 2 幂级数的分析性质： 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，则在（$-R$，$R$）内有 (1)$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$f(x)$是连续的。

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$可逐项微分，且$f_x' = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$可逐项积分，且$\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^x a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

3 函数的幂级数展开

泰勒级数　设$f(x)$在$x = x_0$的某一邻域内具有任意阶导数，

级数：$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

称为$f(x)$在$x = x_0$处的泰勒级数。

当$x_0 = 0$时，级数化为$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

称为麦克劳林级数

	Th设$f(x)$在$x=x_0$某领域内具有任意阶导数， 则泰勒级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 收敛于$f(x)$的充分条件$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 其中$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)^{n+1},0<\theta<1.$ 4 常见的幂级数展开式: (1) $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n,(-1,1)$ (2) $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^n u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n,(-1,1)$ (3) $e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!},(-\infty,+\infty)$ (4) $\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!},(-\infty,+\infty)$ (5) $\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!},(-\infty,+\infty)$ (6) $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+\cdots\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1},(-1,1)$ (7) $(1+u)^a=1+au+\frac{a(a-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}u^n\cdots$ (随 a 的不同而不同，但在(-1，1)总有意义)
函数的傅立叶系数与傅立叶	1设$f(x)$是以2π为周期的函数，且在$[-\pi，\pi]$或$[0,2\pi]$上可积，则

<table>
<tr>
<td>级数，狄利克雷定理，函数在 $[-l,l]$ 上的傅立叶级数</td>
<td>

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nxdx,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,\cdots)$$

称为$f(x)$的傅立叶系数

2 $f(x)$的傅立叶系数为系数的三角级数$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

称为$f(x)$的傅立叶级数，记为$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

3 设$f(x)$是以$2l$为周期的函数，且在$[-l,l]$上可积，则以

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2\cdots)$$

为系数的三角级数$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$

称为$f(x)$的傅立叶级数，记为$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$.

3 狄里赫莱收敛定理：设函数f(x)在$[-\pi,\pi]$上满足条件：
(1)除有限个第一类间断点外都连续。
(2) 只有有限个极值点，则$f(x)$的傅立叶级数在$[-\pi$，$\pi]$上收敛，且有

</td>
</tr>
</table>

	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos x+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), x\text{为}f(x)\text{的连续点;} \\ \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)], x_0\text{为}f(x)\text{ 的第一类间断点;} \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi_0+0)], x=\pm\pi. \end{cases}$
函数在 $[0,l]$ 上的正弦级数与余弦级数.	1 $f(x)$ 为 $[0,l]$ 上的非周期函数，令： $F(x)=\begin{cases} f(x), 0\le x\le l \\ f(-x), -l\le x<0 \end{cases}$ 则 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$（余弦级数），其中：$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$（n=0，1，2，……） 2 $f(x)$ 为 $[0,l]$ 上的非周期函数，令： $F(x)=\begin{cases} f(x), 0\le x\le l \\ -f(-x), -l\le x<0 \end{cases}$ 则 $F(x)$ 除 x=0 外在区间 $[-\pi,\pi]$ 上为奇函数则 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$（正弦级数），其中： $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$（n=1，2，……）

(八)常微分方程

考试内容	对应公式、定理、概念

常微分方程的基本概念，变量可分离的微分方程	1 常微分方程　含有自变量、未知函数及未知函数的某些导数的方程式称微分方程，而当未知函数是一元函数时称为常微分方程. 2 可分离变量方程 $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ 解法：两边同除 $g_1(y)f_2(x)\neq 0$，得 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0$ $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C$
奇次微分方程，一阶线性微分方程，伯努利方程，全微分方程，	1 齐次方程 $y'=f(\frac{y}{x})$ 解法：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$y'=u+x\frac{du}{dx}$ 于是， 原方程 $\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=f(u)\Rightarrow\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln x+C$ 2 可化为齐次型的方程 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 解法：(1)当 $c_1=c_2=0$ 时 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g(\frac{y}{x})$ 属于(2) (2). $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$, 即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$ 则

	$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=g(a_2x+b_2y)$ 令 $a_2x+b_2y=u$，则 $\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$ 属于（1） (3). $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, c_1, c_2$ 不全为 0　解方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ 求交点 (α,β) 令 $x=X+\alpha, y=Y+\beta$, 则原方程 $\Rightarrow \frac{dy}{dX}=\varphi(\frac{X}{Y})$ 属于（2） 3 一阶线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 解法：用常数变易法求 (1)求对应齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的通解 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ (2)令原方程的解为 $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$ (3)代入原方程整理得 $C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)\Rightarrow C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}$ (4)原方程通解　$y=[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}]e^{-\int p(x)dx}$ 4 贝努里方程 $y'+p(x)y=q(x)y^n$，其中 $n\neq 0,1$ 解法：令 $Z=y^{1-n}$，则方程 $\Rightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$， $\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$ 属于 3 5 全微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 为全微分方程

	$\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.通解为$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy=C$
可用简单的变量代换求解的某些微分方程，可降阶的高阶微分方程，线性微分方程解的性质及解的结构定理	注：这里只限于讨论二阶线性方程，其结论可推广到更高阶的方程，二阶线性方程的一般形式为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ (8.1)其中 $p(x),q(x),f(x)$ 均为连续函数，当右端项$f(x)\equiv 0$时，称为二阶线性齐次方程，否则称为非齐次方程. 解的性质与结构(以下性质可推广到任意高阶的线性方程)分以下几种： 1 若 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (8.2)的两个特解，则其线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍为(8.2)的解，特别地，若 $y_1(x),y_2(x)$ 线性无关(即$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\lambda$(常数))，则(8.2)的通解为 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 2 设 $y_1(x),y_2(x)$ 为非线性方程(8.1)的两个特解，则其差 $y_1(x)-y_2(x)$ 为相应齐次方程(8.2)的特解 3 设 $y^*(x)$ 为非齐次方程(8.1)的一个特解，$y(x)$ 为齐次方程(8.2)的任意特解，则其和 $y^*(x)+y(x)$ 为(8.1)的解，特别地，若 $y_1(x),y_2(x)$ 为(8.2)两个线性无关的特解，则(8.1)的通解为 $y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.
二阶常系数奇次线性微分方	1 二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$ (1) 其中 p,q 均为常数

程，高于二阶的某些常系数奇次线性微分方程	解法：特征方程：$\lambda^2+p\lambda+q=0$ （I）当 λ_1,λ_2 为相异的特征根时，方程(1)通解为 $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ （II）当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，通解为 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$ （III）当 $\lambda=\alpha\pm i\beta$（复根）时，通解为 $y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 2 n 阶常系数齐次线性方程 此种方程的一般形式为 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_ny=0$（*），其中 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数，相应的特征方程为 $\lambda^n+p_1\lambda^{(n-1)}+p_2\lambda^{(n-2)}+\cdots+p_n=0$ 特征根与通解的关系同二阶方程的情形相类似，具体结果为： (1)若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是个 n 相异实根，则方程(*)的通解为 $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}$ (2)若 $\lambda=\lambda_0$ 为特征方程的 $k(k\le n)$ 重实根，则(*)的通解中含有：$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda_0 x}$ (3)若 $\alpha+i\beta$ 为特征方程的 $k(2k\le n)$ 重共轭复根，则(*)的通解中含有：

	$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$ 由于我们不能求出一般的三次以上代数方程的根，也就是说对于三次以上的特征方程一般不能得到齐特征根，自然也就不能求出三阶以上常系数齐次线性微分方程的通解，能够求出的只是某些特殊情形
简单的二阶常系数非奇次线性微分方程，欧拉方程，微分方程简单应用	1 二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ (2)其中 p,q 均为常数 解法：通解的求法程序 (1). 求对应齐次方程的通解 $Y(x)$ (2). 求出(2)的特解 $y^*(x)$ (3). 方程(2)的通解 $y=Y(x)+y^*(x)$ 方程(2)特解 $y^*(x)$ 的求法有三种：微分算子法、常数变易法、待定系数法. 2 形如 $x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=0$ 的方程成为欧拉方程.

二、线性代数

(一) 行列式

考试内容	对应公式、定理、概念

<table>
<tr>
<td>行列式的概念和基本性质、行列式按行（列）展开定理</td>
<td>
行列式按行（列）展开定理
(1) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$
或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$
即　$AA^*=A^*A=|A|E$, 其中
$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\cdots & A_{n1}\\A_{12} & A_{22}\cdots & A_{n2}\\\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\A_{1n} & A_{2n}\cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=(A_{ji})=(A_{ij})^T$
(2)设 A,B 为 n 阶方阵，则$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$
但$|A\pm B|=|A|\pm|B|$不一定成立
(3) $|kA|=k^n|A|$, A为n阶方阵
(4) 设A为n阶方阵，则$|A^T|=|A|$;$|A^{-1}|=|A|^{-1}$(若A可逆)$|A^*|=|A|^{n-1}$ $(n\geq 2)$
(5) $\begin{vmatrix}A & O\\O & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\O & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & O\\C & B\end{vmatrix}=|A||B|$，$A,B$为方阵，
但$\begin{vmatrix}O & A_{m\times m}\\B_{n\times n} & O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\cdot|A||B|$.
</td>
</tr>
</table>

	(6)范德蒙行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$ 设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_i(i=1,2\cdots,n)$ 是 A 的 n 个特征值，则 $\|A\|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$

(二)矩阵

考试内容	对应公式、定理、概念
矩阵的概念，矩阵的线性运算，矩阵的乘法，	矩阵：$m\times n$个数a_{ij}排成m行n列的表格 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ 称为矩阵，简记为 A,或$(a_{ij})_{m\times n}$.若$m=n$,则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶方阵. 矩阵的线性运算 1 矩阵的加法 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})=a_{ij}+b_{ij}$ 称为矩阵 A 与 B 的和，记为 $A+B=C$ 2 矩阵的数乘 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的数乘，记为 kA.

<table>
<tr><td></td><td>3 矩阵的乘法 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times s$ 矩阵，
那么 $m\times s$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中
$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 称为 A与B的乘积 的乘积，记为 $C=AB$</td></tr>
<tr><td>方阵的幂，方阵乘积的行列式，矩阵的转置，逆矩阵的概念和性质，矩阵可逆的充要条件，伴随矩阵，</td><td>1 A^T、A^{-1}、A^* 三者之间的关系
1)$(A^T)^T=A,(AB)^T=B^TA^T,(kA)^T=kA^T,(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$
2)$(A^{-1})^{-1}=A,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$, 但
$(A\pm B)^{-1}=A^{-1}\pm B^{-1}$ 不一定成立，
3)$(A^*)^*=|A|^{n-2}A(n\geq 3)$，$(AB)^*=B^*A^*$,
$(kA)^*=k^{n-1}A^*(n\geq 2)$. 但 $(A\pm B)^*=A^*\pm B^*$ 不一定成立
4)$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1},(A^{-1})^*=(A^*)^{-1},(A^*)^T=(A^T)^*$
2 有关 A*的结论
1)$AA^*=A^*A=|A|E$
2)$|A^*|=|A|^{n-1}(n\geq 2),(kA)^*=k^{n-1}A^*,(A^*)^*=|A|^{n-2}A(n\geq 3)$
3)若 A 可逆，则 $A^*=|A|A^{-1},(A^*)^*=\frac{1}{|A|}A$
4)若 A 为 n 阶方阵，则 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1\end{cases}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

3 有关 A^{-1} 的结论

A可逆 $\Leftrightarrow AB=E;\Leftrightarrow|A|\neq 0;\Leftrightarrow r(A)=n;$
$\Leftrightarrow A$可以表示为初等矩阵的乘积；
$\Leftrightarrow A$无零特征值；$\Leftrightarrow Ax=0$只有零解

</td></tr>
<tr><td>矩阵的初等变换，初等矩阵，矩阵的秩，矩阵等价，分块矩阵及其运算</td><td>

1 有关矩阵秩的结论

1）秩 r（A）=行秩=列秩；
2） $r(A_{m\times n})\leq \min(m,n);$
3） $A\neq 0\Rightarrow r(A)\geq 1$；
4） $r(A\pm B)\leq r(A)+r(B);$
5）初等变换不改变矩阵的秩
6） $r(A)+r(B)-n\leq r(AB)\leq \min(r(A),r(B)),$ 特别若 $AB=O$ 则 $r(A)+r(B)\leq n$
7）若 A^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB)=r(B);$ 若 B^{-1} 存在 $\Rightarrow r(AB)=r(A);$
若 $r(A_{m\times n})=n\Rightarrow r(AB)=r(B);$
若 $r(A_{m\times s})=n\Rightarrow r(AB)=r(A);$
8） $r(A_{m\times s})=n\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解

2 分块求逆公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

</td></tr>
</table>

	$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$； $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ 这里 A，B 均为可逆方阵

(三) 向量

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念，向量的线性组合和线性表示，向量的线性相关与线性无关	**1 有关向量组的线性表示** **(1)** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量线性表示. (2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 惟一线性表示. (3) β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$ **2 有关向量组的线性相关性** (1)部分相关，整体相关；整体无关，部分无关. (2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow \vert[\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_n]\vert\neq 0$， n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow \vert[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\vert=0$， ② n+1 个 n 维向量线性相关.

	③若 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_S$ 线性无关，则添加分量后仍线性无关；或一组向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关
向量组的极大线性无关组，等价向量组，向量组的秩	**1 有关向量组的线性表示** **(1)** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量线性表示. (2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 惟一线性表示. (3) β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$
向量组的秩与矩阵的秩之间的关系，向量空间及相关概念	1 设 $r(A_{m\times n})=r$，则 A 的秩 $r(A)$ 与 A 的行列向量组的线性相关性关系为： (1)若 $r(A_{m\times n})=r=m$，则 A 的行向量组线性无关. (2)若 $r(A_{m\times n})=r<m$，则 A 的行向量组线性相关. (3)若 $r(A_{m\times n})=r=n$，则 A 的列向量组线性无关. (4)若 $r(A_{m\times n})=r<n$，则 A 的列向量组线性相关
n 维向量空间的基变换和坐标变换，过渡矩阵	1 基变换公式及过渡矩阵 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是向量空间 V 的两组基，则基变换公式为

	$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$ 其中 C 是可逆矩阵，称为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 2 坐标变换公式 若向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的坐标分别是 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 即 $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$，则向量坐标变换公式为 $X=CY$ 或 $Y=C^{-1}X$ 其中 C 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵
向量的内积，线性无关向量组的正交规范化方法	内积：$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$ Schmidt 正交化 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则可构造 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 使其两两正交，且 β_i 仅是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 的线性组合 $(i=1,2,\cdots,n)$，再把 β_i 单位化，记 $\gamma_i=\dfrac{\beta_i}{\lvert\beta_i\rvert}$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_i$ 是规范正交向量组.其中

	$\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$ $\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$ ……………………………… $\beta_s=\alpha_s-\dfrac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\dfrac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$
规范正交基，正交矩阵及其性质	1 正交基及规范正交基 向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为规范正交基

(四)线性方程组

考试内容	对应公式、定理、概念
线性方程组的克莱姆法则，奇次线性方程组有非零解的充分必要条件	1 克莱姆法则 线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$，如果系数行列式 $D=\lvert A\rvert\neq0$，则方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$，其中 D_j 是把 D 中第 j 列元素换

<table>
<tr><td></td><td>成方程组右端的常数列所得的行列式.
2　n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解. $\Leftrightarrow \forall b, Ax=b$ 总有唯一解，一般地，
$r(A_{m\times n})=n \Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解.</td></tr>
<tr><td>非奇次线性方程组有解的充分必要条件，线性方程组解的性质和解的结构</td><td>1 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A_{m\times n})=m$，则对 $Ax=b$ 而言必有 $r(A)=r(A\vdots b)=m$, 从而 $Ax=b$ 有解.
2 设 $x_1,x_2,\cdots x_s$ 为 $Ax=b$ 的解，则 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$ 当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时仍为 $Ax=b$ 的解；但当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时，则为 $Ax=0$ 的解.特别 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的解；$2x_3-(x_1+x_2)$ 为 $Ax=0$ 的解.
3 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(\overline{A}) \Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.</td></tr>
<tr><td>奇次线性方程组的基础解系和通解，解空间，非奇次线性方程组的通解.</td><td>1 齐次方程组 $Ax=0$ 恒有解(必有零解).当有非零解时，由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量，因此 $Ax=0$ 的全体解向量构成一个向量空间，称为该方程组的解空间，解空间的维数是 $n-r(A)$，解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系.
2　$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即
(1)　$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解；
(2)　$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；
(3)　$Ax=0$ 的任一解都可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出.
$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的通解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是任意常数.</td></tr>
</table>

(五)矩阵的特征值和特征向量

考试内容	对应公式、定理、概念
矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，	1 设λ是A的一个特征值，则 $kA,aA+bE,A^2,A^m,f(A),A^T,A^{-1},A^*$有一个特征值分别为 $k\lambda,a\lambda+b,\lambda^2,\lambda^m,f(\lambda),\lambda,\lambda^{-1},\frac{\|A\|}{\lambda},$且对应特征向量相同（$A^T$例外）. 2 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的n个特征值，则$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\|A\|$ 从而$\|A\|\neq 0\Leftrightarrow A$没有特征值. 3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$为$A$的s个特征值，对应特征向量为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，则 $A^n\alpha=k_1A^n\alpha_1+k_2A^n\alpha_2+\cdots+k_sA^n\alpha_s=k_1\lambda_1^n\alpha_1+k_2\lambda_2^n\alpha_2+\cdots k_s\lambda_s^n\alpha_s$
相似变换、相似矩阵的概念及性质，	1 若$A\sim B$，则 (1) $A^T\sim B^T,A^{-1}\sim B^{-1},A^*\sim B^*$. (2) $\|A\|=\|B\|,\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii},r(A)=r(B)$ (3) $\|\lambda E-A\|=\|\lambda E-B\|$，对$\forall\lambda$成立
矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵，	1 设A为n阶方阵，则A可对角化$\Leftrightarrow$对每个k_i重根特征值λ_i，有$n-r(\lambda_iE-A)=k_i$ 2 设A可对角化，则由$P^{-1}AP=\Lambda$，有$A=P\Lambda P^{-1}$，从而$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

	3 重要结论 (1)若 $A\sim B,C\sim D$，则$\begin{bmatrix}A&O\\O&C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B&O\\O&D\end{bmatrix}$. (2)若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B),\lvert f(A)\rvert\sim\lvert f(B)\rvert$，其中 $f(A)$ 为关于 n 阶方阵 A 的多项式. (3)若 A 为可对角化矩阵，则其非零特征值的个数(重根重复计算)＝秩(A)
实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角阵	1 相似矩阵：设 A,B 为两个 n 阶方阵，如果存在一个可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$ 成立，则称矩阵 A与B 相似，记为 $A\sim B$. 2 相似矩阵的性质 如果 $A\sim B$ 则有 (1) $A^T\sim B^T$ (2) $A^{-1}\sim B^{-1}$ (若A，B均可逆) (3) $A^k\sim B^k$ (k为正整数) (4) $\lvert\lambda E-A\rvert=\lvert\lambda E-B\rvert$,从而$A,B$有相同的特征值 (5) $\lvert A\rvert=\lvert B\rvert$,从而$A,B$同时可逆或同时不可逆 (6) 秩 $(A)=$ 秩$(B),\lvert\lambda E-A\rvert=\lvert\lambda E-B\rvert$,$A$、$B$不一定相似

(六)二次型

考试内容	对应公式、定理、概念
二次型及	1 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

其矩阵表示，合同变换与合同矩阵，二次型的秩	$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$ ，其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ ，称为 n 元二次型，简称二次型. 若令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$, 这二次型 f 可改写成矩阵 向量形式 $f=x^TAx$.其中 A 称为二次型矩阵，因为 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ ，所以二次型矩阵均为对称矩阵，且二次型与对称矩阵一一对应，并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩.
惯性定理，二次型的标准形和规范形	1 惯性定理 对于任一二次型，不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准型，其正负惯性指数与所选变换无关，这就是所谓的惯性定理. 2 标准形 二次型 $f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 经过合同变换 $x=Cy$ 化为 $f=x^TAx=y^TC^TACy=\sum_{i=1}^{r}d_iy_i^2$ 称为 f $(r\le n)$ 的标准形.在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，与所作的合同变换有关，但系数不为零的平方项的个数由 $r(A$的秩$)$ 唯一确定. 3 规范形

	任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形 $f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$，其中 r为A 的秩，p 为正惯性指数，$r-p$ 为负惯性指数，且规范型唯一.
用正交变换和配方法化二次型为标准形，二次型及其矩阵的正定性	1 设 A 正定 $\Rightarrow kA(k>0),A^T,A^{-1},A^*$ 正定；$\lvert A\rvert>0$, A 可逆； $a_{ii}>0$，且 $\lvert A_{ii}\rvert>0$ 2 A，B 正定 $\Rightarrow$ A+B 正定，但 AB，BA 不一定正定 3 A 正定 $\Leftrightarrow f(x)=x^TAx>0,\forall x\neq 0$ $\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式全大于零 $\Leftrightarrow$ A 的所有特征值大于零 $\Leftrightarrow$ A 的正惯性指数为 n $\Leftrightarrow$ $\exists$ 可逆阵 P 使 $A=P^TP$ $\Leftrightarrow$ 存在正交矩阵 Q，使 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$， 其中 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n.$ 正定 $\Rightarrow kA(k>0),A^T,A^{-1},A^*$ 正定； $\lvert A\rvert>0$, A 可逆；$a_{ii}>0$，且 $\lvert A_{ii}\rvert>0$

三、概率论与数理统计

(一)随机事件和概率

考试内容	对应概念、定理、公式
随机事件与样本空间，事件的关系与运算，完全事件组	1 事件的关系与运算 (1)子事件：$A\subset B$，若 A 发生，则 B 发生. (2)相等事件：A=B，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$. (3)和事件：$A\bigcup B$（或 A+B），A 与 B 中至少有一个发生. (4)差事件：A-B，A 发生但 B 不发生. (5)积事件：$A\bigcap B$（或 AB），A 与 B 同时发生. (6)互斥事件（互不相容）：$A\bigcap B=\varnothing$. (7)互逆事件（对立事件）： $A\cap B=\varnothing,且A\cup B=\Omega,记A=\bar{B}或B=\bar{A}$ 2 运算律： (1)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$ (2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$； $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ 3 德•摩根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ 4 完全事件组：A_1，$A_2\cdots$，A_n，两两互斥，且和事件为必然事件，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$，i ≠ j，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}=\Omega$。
概率的概念，概率的基本性	1 概率：事件发生的可能性大小的度量，其严格定义如下： 概率 $P(\bullet)$ 为定义在事件集合上的满足下面3个条件的函数：

质，古典概率，几何型概率	(1)对任何事件 A， $P(A)\geq 0$; (2)对必然事件 Ω ， $P(\Omega)=1$; (3)对 A_1, $A_2,\cdots$, $A_n,\cdots$,若$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,则$P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A)$. 2 概率的基本性质 (1) $P(\overline{A})=1-P(A)$; (2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$; (3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$; 特别， 当 $B\subset A$ 时， $P(A-B)=P(A)-P(B)$ 且 $P(B)\leq P(A)$; $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$ $-P(AC)+P(ABC)$; (4)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}(P(A_i)$. 3 古典型概率：实验的所有结果只有有限个， 且每个结果发生的可能性相同，其概率计算公式： $P(A)=\dfrac{事件A发生的基本事件数}{基本事件总数}$ 4 几何型概率：样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域， 且每个样本点的出现具有等可能性，其概率计算公式：

	$P(A)=\dfrac{A\text{的度量（长度、面积、体积）}}{\Omega\text{的度量（长度、面积、体积）}}$
概率的基本公式，事件的独立性，独立重复试验	1 概率的基本公式: (1)条件概率: $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，表示$A$发生的条件下，$B$发生的概率 (2)全概率公式: $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i),B_iB_j=\varnothing,i\neq j,\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega.$ (3) Bayes 公式：$P(B_j\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_j)P(B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i)},j=1,2,\cdots,n$ 注：上述公式中事件B_i的个数可为可列个. (4)乘法公式: $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=P(A_2)P(A_1\mid A_2)$ $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$ 2 事件的独立性 (1)A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$ (2)A，B，C 两两独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$;　　$P(BC)=P(B)P(C)$; $P(AC)=P(A)P(C)$; (3)A，B，C 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$;　　$P(BC)=P(B)P(C)$; $P(AC)=P(A)P(C)$;　　$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$. 3 独立重复试验: 将某试验独立重复 n 次，若每次实验中事件 A 发生的概率为 p，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为:

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

4 重要公式与结论

(1)$P(\overline{A})=1-P(A)$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$$
$$-P(AC)+P(ABC)$$

(3)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(4)$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB), P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$$

(5)条件概率 $P(\cdot|B)$ 满足概率的所有性质，

例如：. $P(\overline{A}_1|B)=1-P(A_1|B)$

$$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$$
$$P(A_1A_2|B)=P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$$

(6)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

(7)互斥、互逆与独立性之间的关系：

A 与 B 互逆$\Rightarrow$A 与 B 互斥，但反之不成立，A 与 B 互斥（或互逆）且均非零概率事件$\Rightarrow$A 与 B 不独立.

(8)若 $A_1,A_2,\cdots,A_m,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 相互独立，则 $f(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 与 $g(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ 也相互独立，其中 $f(\cdot),g(\cdot)$ 分别表示对相应

	事件做任意事件运算后所得的事件，另外，概率为 1（或 0）的事件与任何事件相互独立.

(二)随机变量及其概率分布

考试内容	对应公式、概念、定理
随机变量，随机变量的分部函数的概念及其性质	1 随机变量及概率分布：取值带有随机性的变量，严格地说是定义在样本空间上，取值于实数的函数称为随机变量，概率分布通常指分布函数或分布律 2 分布函数的概念与性质 定义：$F(x)=P(X\le x),-\infty<x<+\infty$ 性质：(1) $0\le F(x)\le 1$ (2) $F(x)$ 单调不减 (3)右连续 $F(x+0)=F(x)$ (4) $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$
离散型随机变量的概率分布，连续型随机变量的概率密度性质	1 离散型随机变量的概率分布 $P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n,\cdots$ $p_i\ge 0,\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$ 2 连续型随机变量的概率密度 概率密度 $f(x)$;非负可积，且 (1) $f(x)\ge 0$, (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ (3) x为$f(x)$的连续点，则$f(x)=F'(x)$分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$
常见随机变量的概率分布，随机变量函数的概	**1 常见分布** **(1)** 0-1 分布：$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$ (2) 二项分布 $B(n,p)$：

率分布	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$ (3) Poisson 分布 $p(\lambda)$: $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda>0,k=0,1,2\cdots$ (4) 均匀分布 U（a，b）: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b\\0,其他\end{cases}$ (5) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<+\infty$ (6)指数分布 $E(\lambda)$: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0,\lambda>0\\0,其他\end{cases}$ (7)几何分布 $G(p):P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,0<p<1,k=1,2,\cdots$. (8)超几何分布 $H(N,M,n):P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,1,\cdots,\min(n,M)$ 2 随机变量函数的概率分布 (1)离散型：$P(X=x_1)=p_i,Y=g(X)$ 则 $P(Y=y_j)=\sum_{g(x_i)=y_i}P(X=x_i)$ (2)连续型：$X\sim f_X(x),Y=g(x)$ 则 $F_y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y}f_x(x)dx$， $f_Y(y)=F'_Y(y)$

	3 重要公式与结论 (1)$X \sim N(0,1) \Rightarrow \varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Phi(0)=\frac{1}{2}$, $\Phi(-a)=P(X \le -a)=1-\Phi(a)$ (2)$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 且 $P(X \le a)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ (3)$X \sim E(\lambda) \Rightarrow P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$ (4)$X \sim G(p) \Rightarrow P(X=m+k \mid X>m)=P(X=k)$ (5)离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数；连续型随机变量的分布函数为连续函数，但不一定为处处可导函数. (6)存在既非离散也非连续型随机变量.

(三)多维随机变量及其分布

考试内容	**对应公式、概念、定理**
多维随机变量及其分布，二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布	1 二维随机变量及其联合分布 由两个随机变量构成的随机向量（X，Y）， 联合分布为 $F(x,y)=P(X \le x, Y \le y)$ 2 二维离散型随机变量的联合概率分布、边缘分布、条件分布(1)联合概率分布律 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}; i,j=1,2,\cdots$ (2) 边缘分布律 $p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i=1,2,\cdots$ $p_{\cdot j}=\sum_{i}^{\infty} p_{ij}, j=1,2,\cdots$ (3) 条件分布律

	$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$
二维连续性随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度	1 联合概率密度 $f(x,y)$： (1) $f(x,y)\ge 0$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ 2 分布函数：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$ 3 边缘概率密度： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ 4 条件概率密度：$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_{Y\mid X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$
随机变量的独立性和不相关性，常用二维随机变量的分布	1 常见二维随机变量的联合分布 (1)二维均匀分布：$(x,y)\sim U(D)$ ，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)},(x,y)\in D\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ (2)二维正态分布：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ $\cdot\exp\left\{\dfrac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$ 2 随机变量的独立性和相关性

	X 和 Y 的相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$， $\Leftrightarrow p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$(离散型）$\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$(连续型） X 和 Y 的相关性：相关系数 $\rho_{XY}=0$ 时，称 X 和 Y 不相关，否则称 X 和 Y 相关
两个及两个以上随机变量简单函数的分布	1 两个随机变量简单函数的概率分布 (1)离散型： $P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij},Z=g(X,Y)$则 $P(Z=z_k)=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum\limits_{g(x_i,y_i)=z_k}P(X=x_i,Y=y_j)$ (2)连续型： $(X,Y)\sim f(x,y),Z=g(X,Y)$则 $F_z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy$，$f_z(z)=F'_z(z)$ 2 重要公式与结论 (1) 边缘密度公式： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$ (2) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (3)若（X，Y）服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则有 ① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$ ②X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$，即 X 与 Y 不相关.

	③ $C_1X+C_2Y \sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2, C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2C_1C_2\sigma_1\sigma_2\rho)$. ④X 关于 Y=y 的条件分布为： $N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$. ⑤Y 关于 X=x 的条件分布为： $N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$. (4)若 X 与 Y 独立，且分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_1,\sigma_2^2)$, 则 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$, $C_1X+C_2Y \sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2, C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2)$. (5)若 X 与 Y 相互独立，$f(x)$和$g(x)$ 为连续函数， 则 $f(X)$与$g(Y)$ 也相互独立.

(四)随机变量的数字特征

考试内容	对应概念、定义、定理、公式
随机变量的数学期望（均值)、方差和标准差及其性质	1 数学期望 离散型：$P\{X=x_i\}=p_i, E(X)=\sum_i x_ip_i$ ；连续型： $X\sim f(x), E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 性质： (1) $E(C)=C, E[E(X)]=E(X)$ (2) $E(C_1X+C_2Y)=C_1E(X)+C_2E(Y)$

	(3)若 X 和 Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$ (4) $[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$ 2 方差：$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$ 3 标准差：$\sqrt{D(X)}$， 4 离散型：$D(X)=\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_i$ 5 连续型：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$ 性质： (1) $D(C)=0, D[E(X)]=0, D[D(X)]=0$ (2)X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ (3) $D(C_1X+C_2)=C_1^2D(X)$ (4)一般有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$ (5) $D(X)<E(X-C)^2, C\ne E(X)$ (6) $D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=C\}=1$
随机变量函数的数学期望，矩、协方差，相关系数的数	1 随机变量函数的数学期望 (1)对于函数 $Y=g(x)$ X 为离散型：$P\{X=x_i\}=p_i, E(Y)=\sum_i g(x_i)p_i$；$X$ 为连续型：$X\sim f(x), E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

字特征	(2) $Z=g(X,Y)$；$(X,Y)\sim P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$； $E(Z)=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ $(X,Y)\sim f(x,y)$；$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$ 2 协方差 $Cov(X,Y)=E\left[(X-E(X)(Y-E(Y))\right]$ 3 相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,k 阶原点矩 $E(X^k)$； k 阶中心矩 $E\left\{[X-E(X)]^k\right\}$ 性质： (1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ (2) $Cov(aX,bY)=abCov(Y,X)$ (3) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$ (4) $\lvert\rho(X,Y)\rvert\le 1$ (5) $\rho(X,Y)=1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1$, 其中$a>0$ $\rho(X,Y)=-1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1$, 其中$a<0$ **4 重要公式与结论** （1） $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ （2） $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ （3） $\lvert\rho(X,Y)\rvert\le 1$, 且

	$\rho(X,Y)=1 \Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1,$ 其中$a>0$ $\rho(X,Y)=-1 \Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1,$ 其中$a<0$ （4）下面 5 个条件互为充要条件： $\rho(X,Y)=0$ $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$ $\Leftrightarrow E(X,Y)=E(X)E(Y)$ $\Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ $\Leftrightarrow D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ 注：X 与 Y 独立为上述 5 个条件中任何一个成立的充分条件，但非必要条件.

(五)大数定律和中心极限定理

考试内容	对应概念、定理、重要公式
切比雪夫（Chebyshev）不等式，切比雪夫大数定律	1 切比雪夫不等式：$P\{\|X-E(X)\|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 或 $P\{\|X-E(X)\|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 2 切比雪夫大数定律：设 $X_1,X_2\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2(i=1,2,\cdots),$ 则对于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\|<\varepsilon\right\}=1$
伯努利大数定律，辛钦	1 伯努利大数定律 设 $X_1,X_2\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，同 0-1 分布 $B(1,p)$，则对任意

（Khinchine）大数定律	正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - p\right\| < \varepsilon\right\} = 1$ 2 辛钦大数定律 设 $X_1, X_2 \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，$EX_i = \mu, i = 1,2,$ 则对于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \mu\right\| < \varepsilon\right\} = 1$
隶莫弗—拉普拉斯（De Movire-Laplace）定理，列维—林德伯格（Levy-Undbe）定理	1 棣莫弗---拉普斯定理 设 $\eta_n \sim B(n,p)$,（即 $X_1, X_2 \cdots, X_n$, 相互独立且同服从 0-1 分布 $\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ）则有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 2 列维---林德伯格定理 设 $X_1, X_2 \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立分布， $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (\sigma \ne 0) i = 1,2,\cdots,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

(六)数理统计的基本概念

考试内容	对应公式、概念、定理
总体，个体，简单	总体：研究对象的全体，它是一个随机变量，用 X 表示 个体：组成总体的每个基本元素

随机样本，统计量，样本均值，样本方差和样本矩	简单随机样本：来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量 $X_1,X_2\cdots,X_n$，称为容量为 n 的简单随机样本，简称样本 统计量：设 $X_1,X_2\cdots,X_n$，是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1,X_2\cdots,X_n)$ ）是样本的连续函数，且 $g(\bullet)$ 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1,X_2\cdots,X_n)$ 为统计量 样本均值：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 样本矩：样本 k 阶原点矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\cdots$ 样本 k 阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k,k=1,2,\cdots$
χ^2 分布，t 分布，F 分布，分位数	χ^2 分布：$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$，其中 $X_1,X_2\cdots,X_n$，相互独立，且同服从 $N(0,1)$ t 分布：$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$ 其中 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，且 X，Y 相互独立 F 分布：$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，其中 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X，Y 相互独立 分位数：若 $P(X\le x_\alpha)=\alpha$，则称 x_α 为 X 的 α 分位数
正态总体的常用样本分布	1 设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

	$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 则 (1) $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$或$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$ (3) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$ (4) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ **重要公式与结论** （1）对于 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，有 $E(\chi^2(n))=n, D(\chi^2(n))=2n;$ （2）对于$T\sim t(n)$，有 $E(T)=0, D(T)=\frac{n}{n-2}(n>2)$； （3）对于$F\sim F(m,n)$，有 $\frac{1}{F}\sim F(n,m), F_{a/2}(m,n)=\frac{1}{F_{1-a/2}(n,m)};$ （4）对于任意总体X，有 $E(\bar{X})=E(X), E(S^2)=D(X), D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}$

(七)参数估计

考试内容	对应公式、概念、定理
点估计的概	1 $\hat{\theta}$为θ的矩估计，g（x）为连续函数，则 g（$\hat{\theta}$）为 g（θ）的

<table>
<tr><td>念，估计量与估计值，矩估计法，最大似然估计法</td><td colspan="4">矩估计.

2 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似数估计，g（x）为单调函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的极大似然估计

3 $E(\overline{X})=E(X),E(S^2)=D(X)$, 即 $\overline{X}$， S^2 分别为总体 $E(X)$, $D(X)$ 的无偏估计量.

4 由大数定律易知 $\overline{X}$， S^2 也分别是 $E(X)$, $D(X)$ 的一致估量.

5 若 $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})\to 0(n\to\infty)$ 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计.</td></tr>
<tr><td>估计量的评选标准区间估计的概念</td><td colspan="4">1 估计量的选取标准：无偏性、有效性、相合性

2 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间，g（x）为单调增加（或单调减少）函数，则 $(g(\hat{\theta}_1),g(\hat{\theta}_2)$ 或 $g(\hat{\theta}_2)$，$g(\hat{\theta}_1))$ 为 $g(\theta)$ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间</td></tr>
<tr><td rowspan="3">单个正态总体的均值和方差</td><td colspan="4">正态总体均值与方差的置信区间</td></tr>
<tr><td colspan="2">待估参数</td><td>抽样分布</td><td>双侧置信区间</td></tr>
<tr><td>μ</td><td>σ^2 已知</td><td>$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$</td><td>$(\overline{X}-\mu_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\mu_{\frac{\alpha}{2}})$
$P\{|\mu|\ge\mu_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$</td></tr>
</table>

的区间估计，两个正态总体的均值差和方差比的区间估计		σ^2 未知	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}})$ $P\{\lvert T\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$
	σ^2	μ 已知	$W'=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ $\sim\chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$ $P\{W'\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}=$ $P\{W'\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\}=\frac{\alpha}{2}$
		μ 未知	$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$U=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\sim N(0,1)$	$\left((\overline{X}_1-\overline{X}_2)-\mu_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\right.$ $\left.(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+\mu_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$ $P\{\lvert U\rvert\ge\mu_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$
		已知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但 σ^2 未知	$T=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ $S^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\left((\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$ $\left.(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$ $P\{\lvert T\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$

		$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$F=\dfrac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_2^2}}{\dfrac{S_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\right.$ $\left.F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right)$ $P\{F\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}=\dfrac{\alpha}{2}$ $P\{\dfrac{1}{F}\geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\}=\dfrac{\alpha}{2}$

(八)假设检验

考试内容	对应公式、概念、定理
显著性检验，假设检验的两类错误	1 假设检验的一般步骤 (1)确定所要检验的基本假设 H_0； (2)选择检验的统计量，并要求知道其在一定条件下的分布； (3)对确定的显著性水平 α，查相应的概率分布，得临界值，从而确定否定域； (4)由样本计算统计量，并判断其是否落入否定域，从而对假设 H_0 作出拒绝还是接受的判断 2 假设检验的两类错误 统计推断是由样本推断总体，所作的结论不能保证绝对不犯错误，而只能以较大概率来保证其可靠性. 第一类错误是否定了真实的假设，即假设本来成立，但被错误地否认了，成为“弃真”，检验水平 α 就是犯第一类错误的概率的最大允许值.

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">第二类错误是把本来不成立的假设错误地接受了，称为“存伪”. 犯这类错误的大小一般用 β 表示，它的大小要视具体情况而定.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验</td><td></td><td>原假设 H_0</td><td>H_0下的检验统计量及分布</td><td>H_0的拒绝域</td></tr>
<tr><td rowspan="4">一个正态总体</td><td>$\mu=\mu_0$ （σ^2已知）</td><td>$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$</td><td>$|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$</td></tr>
<tr><td>$\mu=\mu_0$ （σ^2未知）</td><td>$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$</td><td>$|t|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$</td></tr>
<tr><td>$\sigma^2=\sigma_0^2$ （μ 已知）</td><td>$W=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$</td><td>$w=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $w\leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$</td></tr>
<tr><td>$\sigma^2=\sigma_0^2$ （μ 未知）</td><td>$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$</td><td>$w=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $w\leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$</td></tr>
<tr><td>两个正</td><td>$\mu_1-\mu_2=\delta$ （σ_1^2,σ_2^2 已知）</td><td>$U=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$</td><td>$|u|=\left|\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$</td></tr>
</table>

	态 总 体	$\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2未知 但$\sigma_1^2=\sigma_2^2$)	$T=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $\sim t(n_1+n_2-2)$ $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-\delta}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right\rvert$ $\geq t_{\frac{a}{2}}(n_1+n_2-2)$
		$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ （μ_1，μ_2 未知）	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ $\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$f=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\geq F_{\frac{a}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或$f\leq F_{\frac{a}{2}}^{-1}(n_2-1,n_1-1)$

经常用到的初等数学公式

初等代数

1．乘法公式与因式分解

$(1)(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(2)(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(3)a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$(4)(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$(5)a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$(6)a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

2. 比例 ($\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$)

(1)合比定理 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(2)分比定理 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(3)合分比定理 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

(4)若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,则令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=t$.于是 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

(5)若y与x成正比，则$y=kx$（k为比例系数）

(6)若y与x成反比，则$y=\frac{k}{x}$（k为比例系数）

3. 不等式

(1) 设$a>b>0,n>0$，则$a^n>b^n$

(2) 设$a>b>0,n$为正整数，则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

(3)设 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,则 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

(4)非负数的算术平均值不小于其几何平均值，即

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$,

$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$,

$\frac{a_1+a_2+a_3\cdots\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$

(5)绝对值不等式

1) $|a+b| \le |a|+|b|$

2) $|a-b| \le |a|+|b|$

3) $|a-b| \ge |a|-|b|$

4) $-|a| \le a \le |a|$

4．二次方程 $ax^2+bx+c=0$

(1)根：$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2)韦达定理：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

(3)判别式$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}>0,\text{方程有两不等实根}\\=0,\text{方程有两相等实根}\\<0,\text{方程有两共轭虚根}\end{cases}$

5．一元三次方程的韦达定理：

若$x^3+px^2+qx+r=0$的三个根分别为x_1,x_2,x_3，则

$x_1+x_2+x_3=-p$

$x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3+x_3\cdot x_1=q$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-r$

6. 指数

(1)$a^m \bullet a^n=a^{m+n}$

(2)$a^m \div a^n=a^{m-n}$

(3)$(a^m)^n=a^{mn}$

$(4)(ab)^n = a^n b^n$

$(5)(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

$(6)a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

7．对数 $\log_a N, (a > 0, a \neq 1, N > 0)$

(1)对数恒等式$N = a^{\log_a N}$,更常用$N = e^{\ln N}$

$(2)\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

$(3)\log_a(\frac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$

$(4)\log_a(M^n) = n\log_a M$

$(5)\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$

(6)换底公式$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

$(7)\log_a 1 = 0$

$(8)\log_a a = 1$

8．数列

（1）等差数列

设　a_1----首项，　　　　a_n----通项

d----公差，　　　　　　S_n----前 n 项和

1)$a_n = a_1 + (n-1)d$

2)$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$

3)设a, b, c成等差数列, 则等差中项$b = \frac{1}{2}(a + c)$

（2）等比数列

设 a_1----首项，　q----公比，　a_n----通项，　则

1)通项$a_n = a_1 q^{n-1}$

2)前n项和$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$

（3）常用的几种数列的和

1)$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

2)$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

3)$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [\frac{1}{2} n(n+1)]^2$

4)$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

4)$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

9．排列、组合与二项式定理

（1）排列

$P_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots [n-(m-1)]$

（2）全排列

$$P_n^n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

（3）组合

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质：

$1)C_n^m = C_n^{n-m}$　　　　$2)C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

（4）二项式定理

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

平面几何

1、图形面积

（1）任意三角形

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{其中} s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

平行四边形

$$S = bh = ab\sin\varphi$$

（2）梯形 S=中位线×高

（3）扇形 $S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r^2\theta$

2、旋转体

（1）圆拄

设 R----底圆半径，H----拄高，则

1）侧面积 $S_{侧} = 2\pi RH$，

2）全面积 $S_{全}=2\pi R(H+R)$

3）体积 $V=\pi R^2 H$

（2）圆锥 （$l=\sqrt{R^2+H^2}$母线）

1）侧面积 $S_{侧}=\pi Rl$

2）全面积 $S_{全}=\pi R(l+R)$

3）体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$

（3）球

设 R----半径， d----直径，则

1）全面积 $S_{全}=4\pi R^2$

2）体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

（4） 球缺（球被一个平面所截而得到的部分）

1） 面积 $S=2\pi Rh$(不包括底面)

2） 体积 $V=\pi h^2(R-\frac{h}{3})$

3．棱拄及棱锥

设 S----底面积，H----高：

（1）棱拄体积 $V=SH$

（2）棱锥体积 $V=\frac{1}{3}SH$

（3）正棱锥侧面积 $A=\frac{1}{2}\times$母线$\times$底周长

三、平面三角

1．三角函数间的关系

（1）$\sin\alpha\csc\alpha=1$

（2）$\cos\alpha\sec\alpha=1$

（3）$\tan\alpha\cot\alpha=1$

（4）$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

（5）$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

（6）$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

（7）$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

（8）$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2 倍角三角函数

(1)$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2)$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

(3)$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(4)$\cot 2\alpha=\dfrac{1-\cot^2\alpha}{2\cot\alpha}$

(5)$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

(6)$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

3．三角函数的和差化积与积化和差公式

(1)$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(2)$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(3)$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(4)$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(5)$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

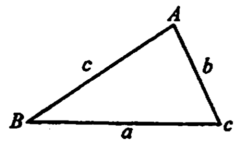
$$(6)\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$(7)\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$(8)\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

4．边角关系

（1）正弦定理



$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，R 为外接圆半径

（2）　余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5．反三角函数

恒等式

$$(1)\arcsin x\pm\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1+y^2}\pm y\sqrt{1-x^2})$$

$$(2)\arccos x\pm\arccos y=\arccos(xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$$

$$(3)\arctan x\pm\arctan y=\arctan(\frac{x\pm y}{1\mp xy})$$

$$(4)\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$(5)\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}$$