《离散数学》期末考试题(I)参考答案

一、1. 1,3,5,7,11,13,17,19.

2. 平行.

3. 010, 100, 101, 110, 111.

4. 2.

5. 3.

二、1(B); 2(A); 3(D); 4(C); 5(A).

三、1(√); 2(×); 3(×); 4(√); 5(√).

四、(1) **证** 任意 $(x_1, y_1),(x_2, y_2) \in$ **R** × **R**, 若 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$，则 $(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$，进而 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ 且 $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$，于是 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$，从而 f 是单射.

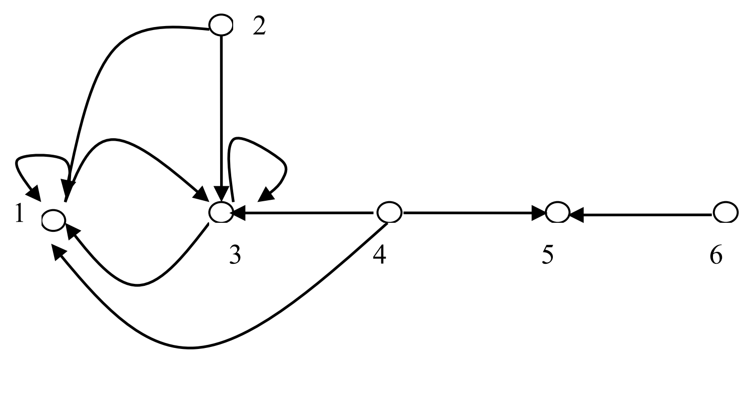
任意 $(p,q) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, 取 $\begin{cases} x = \dfrac{p+q}{2} \\ y = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$，通过计算易知 $f(x,y) = (p,q)$，因此 f 是满射. 故 f 是双射.

(2) **解** 由上面的证明知，f 存在逆函数且 $f^{-1}(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$.

又 $\left(f^{-1} \circ f\right)(x,y) = f\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right) = (x,y)$，即 $f^{-1} \circ f = I_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}}$, 而

$$\left(f \circ f\right)(x,y) = f\left(x+y, x+y\right) = ((x+y)+(x-y),(x+y)-(x-y)) = (2x,2y).$$

五、**解** R 的传递闭包 $t(R)$ 的关系图如下：



于是，有 $t(R)$ = {(1, 3), (3, 1), (2, 3), (4, 3), (4, 5), (6, 5), (1, 1), (3, 3)，(2,1)，(4,1)}.

六、**解** 首先写出命题公式 $A = \left(p \to (q \to r)\right) \leftrightarrow \left(r \to (q \to p)\right)$ 的真值表如下：

p	q	r	$p\to(q\to r)$	$r\to(q\to p)$	A
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

从真值表可得命题公式 A 的主析取范式为：

$$A=(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee$$

$$(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r).$$

命题公式 A 的主合取范式为：

$$A=(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r).$$

七、**证** 对于任意 $x,y\in \mathrm{Z}_m$，显然 $x+_m y\in Z_m$，即 Z_m 关于 $+_m$ 运算封闭.

对于任意 $x,y,z\in \mathrm{Z}_m$，由于

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$

即 Z_m 关于 $+_m$ 是可结合的.

由于 $0\in \mathrm{Z}_m$ 且对于任意 $x\in \mathrm{Z}_m$，有 $x+_m 0=0+_m x=x$，因此，0 是 Z_m 关于 $+_m$ 的幺元.

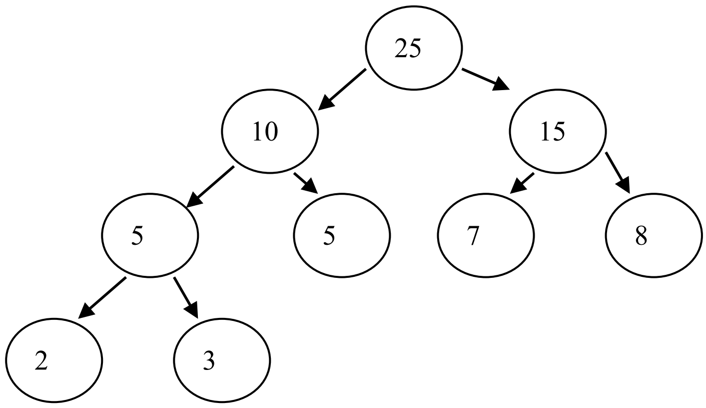
由于 $0\in \mathrm{Z}_m$ 是幺元，所以其关于 $+_m$ 运算的逆元为 0. 对于任意 $0\neq x\in \mathrm{Z}_m$，由于 $m-x\in \mathrm{Z}_m$ 且 $x+_m(m-x)=(m-x)+_m x=0$，于是 $m-x$ 是 Z_m 关于 $+_m$ 的逆元.

故$(\mathrm{Z}_m, +_m)$是群.

八、**解** 对于 2, 3, 5, 7, 8，先组合两个最小的权 2+3 = 5，得 5, 5, 7, 8；在所得到的序列中再组合 5+5 = 10，重新排列后为 7, 8, 10；再组合 7+8 =15，得 10, 15；最后组合 10+15 = 25.

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{2} & \underline{3} & 5 & 7 & 8\\
 & \underline{5} & \underline{5} & 7 & 8\\
 & & 10 & \underline{7} & \underline{8}\\
 & & \underline{10} & & \underline{15}\\
 & & & & 25
\end{array}$$

所求的最优 2 叉树树如下：


25
10
15
5
5
7
8
2
3