第一部分　专项同步练习

第一章　行列式

一、单项选择题

1． 下列排列是 5 阶偶排列的是（　　　）.

(A) 24315　　(B) 14325　　(C) 41523　　(D)24351

2．如果 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数是 k，则排列 $j_n\cdots j_2j_1$ 的逆序数是(　　　).

(A) k　　(B) $n-k$　　(C) $\dfrac{n!}{2}-k$　　(D) $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$

3. n 阶行列式的展开式中含 $a_{11}a_{12}$ 的项共有(　　　)项.

(A) 0　　(B) $n-2$　　(C) $(n-2)!$　　(D) $(n-1)!$

4． $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ (　　　).

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

5. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ (　　　).

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

6． 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & -1 & 1 \\ -1 & -x & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数是(　　　).

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

7. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$，则 $D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}-2a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}-2a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}-2a_{32} \end{vmatrix}=$ (　　　).

(A) 4　　　(B) -4　　　(C) 2　　　(D) -2

8. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a$，则 $\begin{vmatrix} a_{12} & ka_{22} \\ a_{11} & ka_{21} \end{vmatrix}=$ (　　　).

(A) ka　　　(B) $-ka$　　　(C) k^2a　　　(D) $-k^2a$

9. 已知4阶行列式中第1行元依次是 $-4,0,1,3$，第3行元的余子式依次为 $-2,5,1,x$，则 $x=$(　　　).

(A) 0　　　(B) -3　　　(C) 3　　　(D) 2

10. 若 $D=\begin{vmatrix} -8 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$，则 D 中第一行元的代数余子式的和为(　　　).

(A) -1　　　(B) -2　　　(C) -3　　　(D) 0

11. 若 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则 D 中第四行元的余子式的和为(　　　).

(A) -1　　　(B) -2　　　(C) -3　　　(D) 0

12. k 等于下列选项中哪个值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=0 \\ x_1+kx_2+x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

(　　　)

(A) -1　　　(B) -2　　　(C) -3　　　(D) 0

二、填空题

1. $2n$ 阶排列 $24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$ 的逆序数是______.

2. 在六阶行列式中项 $a_{32}a_{54}a_{41}a_{65}a_{13}a_{26}$ 所带的符号是______.

3. 四阶行列式中包含 $a_{22}a_{43}$ 且带正号的项是______.

4. 若一个 n 阶行列式中至少有 n^2-n+1 个元素等于 0，则这个行列式的值等于______.

5. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ ______ .

6. 行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$ ______ .

7. 行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ______ .

8. 如果$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M$，则$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}-3a_{12} & 3a_{12} \\ a_{21} & a_{23}-3a_{22} & 3a_{22} \\ a_{31} & a_{33}-3a_{32} & 3a_{32} \end{vmatrix} =$ ______ .

9. 已知某 5 阶行列式的值为 5，将其第一行与第 5 行交换并转置，再用 2 乘所有元素，则所得的新行列式的值为______ .

10. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ______ .

11. n阶行列式$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} =$ ______ .

12. 已知三阶行列式中第二列元素依次为 1,2,3, 其对应的余子式依次为 3,2,1，则该行列式的值为______ .

13. 设行列式$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$，$A_{4j}\ (j = 1, 2, 3, 4)$为 D 中第四行元的代数余子式，

则$4A_{41} + 3A_{42} + 2A_{43} + A_{44} =$ ______ .

14. 已知$D=\begin{vmatrix} a & b & c & a \\ c & b & a & b \\ b & a & c & c \\ a & c & b & d \end{vmatrix}$， D 中第四列元的代数余子式的和为______.

15. 设行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-6$， A_{4j}为$a_{4j}(j=1,2,3,4)$的代数余子式，则$A_{41}+A_{42}=$______，$A_{43}+A_{44}=$______.

16. 已知行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，D 中第一行元的代数余子式的和为______.

17. 齐次线性方程组$\begin{cases} kx_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+kx_2 \qquad =0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$仅有零解的充要条件是______.

18. 若齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ \qquad 2x_2+5x_3=0 \\ -3x_1-2x_2+kx_3=0 \end{cases}$有非零解，则$k=$______.

三、计算题

1. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}$； **2.** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

3. 解方程$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$； **4.** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$；

5. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} (a_j \neq 1, j = 0,1,\cdots,n)$;

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1-b & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-b & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-b \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ & \cdots & \cdots & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

11. $D = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

四、证明题

1. 设 $abcd=1$，证明：$\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}=0$.

2. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ & \cdots & \cdots & \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$.

5. 设 a,b,c 两两不等，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $a+b+c=0$.

参考答案

一．单项选择题

A D A C C D A B C D B B

二．填空题

1. n； 2. "$-$"； 3. $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$； 4. 0； 5. 0； 6. $(-1)^{n-1}n!$； 7. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$；
8. $-3M$； 9. -160； 10. x^4； 11. $(\lambda+n)\lambda^{n-1}$； 12. -2； 13. 0； 14. 0； 15. $12,-9$；
16. $n!(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})$； 17. $k\neq -2,3$； 18. $k=7$

三．计算题

1. $-(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$； 2. $-2(x^3+y^3)$；

3. $x=-2,0,1$；

4. $\prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)$

5. $\prod_{k=0}^{n}(a_k-1)(1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k-1})$；

6. $-(2+b)(1-b)\cdots((n-2)-b)$；

7. $(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$；

8. $(x+\sum_{k=1}^{n}a_k)\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$；

9. $1+\sum_{k=1}^{n}x_k$；

10. $n+1$；

11. $(1-a)(1+a^2+a^4)$.

四．证明题 (略)

第二章　　矩阵

一、单项选择题

1. A、B 为 n 阶方阵，则下列各式中成立的是(　　)。

(a) $\left|A^2\right| = |A|^2$ (b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ (c) $(A-B)A = A^2 - AB$ (d) $(AB)^T = A^T B^T$

2. 设方阵 A、B、C 满足 AB=AC，当 A 满足(　　)时，B=C。

(a) AB =BA　(b) $|A| \neq 0$　(c) 方程组 AX=0 有非零解　(d) B、C 可逆

3. 若 A 为 n 阶方阵，k 为非零常数，则 $|kA| =$ (　　)。

(a) $k|A|$　(b) $|k||A|$　(c) $k^n|A|$　(d) $|k|^n|A|$

4. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A| = 0$，则(　　)。

(a) A 中两行(列)对应元素成比例　(b) A 中任意一行为其它行的线性组合

(c) A 中至少有一行元素全为零　(d) A 中必有一行为其它行的线性组合

5. 设 A，B 为 n 阶可逆矩阵，下面各式恒正确的是(　　)。

(a) $\left|(A+B)^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right| + \left|B^{-1}\right|$　(b) $\left|(AB)^T\right| = |A||B|$

(c) $\left|(A^{-1}+B)^T\right| = \left|A^{-1}\right| + |B|$　(d) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

6. 设 A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则(　　)。

(a) (a) $\left|A^*\right| = \left|A^{-1}\right|$　(b) $\left|A^*\right| = |A|$　(c) $\left|A^*\right| = |A|^{n+1}$　(d) $\left|A^*\right| = |A|^{n-1}$

7. 设 A 为 3 阶方阵，行列式 $|A| = 1$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则行列式 $\left|(2A)^{-1} - 2A^*\right| =$ (　　)。

(a) $-\dfrac{27}{8}$　(b) $-\dfrac{8}{27}$　(c) $\dfrac{27}{8}$　(d) $\dfrac{8}{27}$

8. 设 A，B 为 n 阶方矩阵，$A^2 = B^2$，则下列各式成立的是(　　)。

(a) $A = B$　(b) $A = -B$　(c) $|A| = |B|$　(d) $|A|^2 = |B|^2$

9. 设 A，B 均为 n 阶方矩阵，则必有(　　)。

(a) $|A+B| = |A| + |B|$　(b) $AB = BA$　(c) $|AB| = |BA|$　(d) $|A|^2 = |B|^2$

10. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则下面各式恒正确的是（　　）。

（a）$|2A| = 2\left|A^T\right|$　(b) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

(c) $[(A^{-1})^{-1}]^T = [(A^T)^T]^{-1}$　(d) $[(A^T)^T]^{-1} = [(A^{-1})^T]^T$

11. 如果 $A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，则 $A =$（　　）。

（a）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$ （b）$\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ （c）$\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ （d）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$

12. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&2&0\\3&1&1\end{pmatrix}$，则（　　）。

（a）$A^T=A$　　　（b）$A^{-1}=A^*$

（c）$A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$　　　（d）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$

13. 设 A,B,C,I 为同阶方阵，I 为单位矩阵，若 $ABC=I$，则（　　）。

（a）$ACB=I$　（b）$CAB=I$　（c）$CBA=I$　（d）$BAC=I$

14. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|\neq 0$，则（　　）。

（a）A 经列初等变换可变为单位阵 I

（b）由 $AX=BA$，可得 $X=B$

（c）当 $(A|I)$ 经有限次初等变换变为 $(I|B)$ 时，有 $A^{-1}=B$

（d）以上（a）、（b）、（c）都不对

15. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，秩 $(A)=r<m<n$，则（　　）。

（a）A 中 r 阶子式不全为零　　　（b）A 中阶数小于 r 的子式全为零

（c）A 经行初等变换可化为 $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$　（d）A 为满秩矩阵

16. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，C 为 n 阶可逆矩阵，$B=AC$，则（　　）。

(a) 秩（A）> 秩（B）　　　(b) 秩（A）= 秩（B）

(c) 秩（A）< 秩（B）　　　(d) 秩（A）与秩（B）的关系依 C 而定

17. A，B 为 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则秩（A）和秩（B）（　　）。

(a) 有一个等于零　(b) 都为 n　(c) 都小于 n　(d) 一个小于 n，一个等于 n

18. n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是（　　）。

(a) $r(A)=r<n$　　　(b) A 的列秩为 n

(c) A 的每一个行向量都是非零向量　　　(d) 伴随矩阵存在

19. n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是（　　）。

(a) A 的每个行向量都是非零向量

(b) A 中任意两个行向量都不成比例

(c) A 的行向量中有一个向量可由其它向量线性表示

(d) 对任何 n 维非零向量 X，均有 $AX\neq 0$

二、填空题

1. 设 A 为 n 阶方阵, I 为 n 阶单位阵, 且 $A^2=I$, 则行列式 $|A|=$_______

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=$_______

3. 设 $2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则行列式 $\left|(A+3I)^{-1}(A^2-9I)\right|$ 的值为_______

4. 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，且已知 $A^6=I$，则行列式 $\left|A^{11}\right|=$_______

5. 设 A 为 5 阶方阵，A^* 是其伴随矩阵，且 $|A|=3$，则 $\left|A^*\right|=$_______

6. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为_______

7. 非零矩阵 $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$ 的秩为________

8. 设 A 为 100 阶矩阵，且对任何 100 维非零列向量 X，均有 $AX\neq 0$，则 A 的秩为

____

9. 若 $A=(a_{ij})$ 为 15 阶矩阵，则 A^TA 的第 4 行第 8 列的元素是_______

10. 若方阵 A 与 $4I$ 相似，则 $A=$ _______

11. $\lim\limits_{K\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2^K} & \frac{2K}{K+1} \\ \frac{1}{K} & \frac{1}{3^K} \end{pmatrix}=$_______

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^n=$_______

三、计算题

1. 解下列矩阵方程(X 为未知矩阵).

1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$； 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；

3） $X(I-B^{-1}C)^T B^T = I$，其中 $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&0&4\\4&2&2\end{pmatrix}$； $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$；

4） $AX = A^2 + X - I$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$；

5） $AX = A+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$；

2. 设 A 为 n 阶对称阵，且 $A^2=0$，求 A.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，求 $(A+2I)(A^2-4I)^{-1}$.

4. 设 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$，求一秩为 2 的方阵 B，使 $AB=0$.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求非奇异矩阵 C，使 $A=C^TBC$.

7. 求非奇异矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

1） $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 2） $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-3&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$

8. 已知三阶方阵 A 的三个特征根为 1, 1, 2，其相应的特征向量依次为 $(0,0,1)^T,(-1,1,0)^T,(-2,1,1)^T$，求矩阵 A.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix}$，求 A^{100}.

四、证明题

1. 设 A、B 均为 n 阶非奇异阵，求证 AB 可逆.

2. 设 $A^k = 0$（k 为整数），求证 $I - A$ 可逆.

3. 设 $a_1 . a_2, \cdots, a_k$ 为实数，且如果 $a_k \neq 0$，如果方阵 A 满足 $A^k + a_1 A^{k-1} + \cdots + a_{k-1} A + a_k I = 0$, 求证 A 是非奇异阵.

4. 设 n 阶方阵 A 与 B 中有一个是非奇异的, 求证矩阵 AB 相似于 BA.

5. 证明可逆的对称矩阵的逆也是对称矩阵.

6. 证明两个矩阵和的秩小于这两个矩阵秩的和.

7. 证明两个矩阵乘积的秩不大于这两个矩阵的秩中较小者.

8. 证明可逆矩阵的伴随矩阵也可逆，且伴随矩阵的逆等于该矩阵的逆矩阵的伴随矩阵.

9. 证明不可逆矩阵的伴随矩阵的逆不大于 1.

10. 证明每一个方阵均可表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。

第二章参考答案

一：1. a；2. b；3. c；4. d；5. b；6. d；7. a；8. d；9. c；10. d；11. b；12. c；13. b；14. a；15. a；16. b；17. c；18. b；19. d.

二. 1. 1 或-1；2. 0；3. -4；4. 1；5. 81；6. 0；7. 1；8. 100；9. $\sum_{i=1}^{15} a_{i4} a_{i8}$；

10. I；12. 0；11. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

三、1. 1)、$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -13 & -2 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$；2)、$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$；3)、$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$；4)、$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；

5)、$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix}$. 2. 0；3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

5. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$不唯一；6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；7. 1)、$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2)、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$；

8. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；9. $\begin{pmatrix} 3^{100}+2(2^{100}-1) & 2-2^{100}-3^{100} & 3^{100}-1 \\ 2(2^{100}+3^{100})-4 & 4-2^{100}-2(3^{100}) & 2(3^{100}-1) \\ 2(3^{100}-1) & 2(1-3^{100}) & 2(3^{100})-1 \end{pmatrix}$.

第三章　　向量

一、单项选择题

1. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，　β_1,β_2都是四维列向量，且四阶行列式

$\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta_1\right| = m$, $\left|\alpha_1 \quad \beta_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2\right| = n$,则行列式

$\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta_1+\beta_2\right| = (\quad)$

$(a)m+n$　　$(b)m-n$　　$(c)-m+n$　　$(d)-m-n$

2. 设A为n阶方阵，且$|A|=0$,则（　）。

$(a)A$中两行（列）对应元素成比例

(b)A中任意一行为其它行的线性组合

$(c)A$中至少有一行元素全为零

(d)A中必有一行为其它行的线性组合

3. 设A为n阶方阵，$r(A)=r<n$，则在A的n个行向量中（　）。

(a)必有r个行向量线性无关

(b)任意r个行向量线性无关

(c)任意r个行向量都构成极大线性无关组

(d)任意一个行向量都能被其它r个行向量线性表示

4. n阶方阵A可逆的充分必要条件是（　）

$(a)r(A)=r<n$

$(b)A$的列秩为n

（c）A的每一个行向量都是非零向量

（d）A的伴随矩阵存在

5. n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关的充分条件是(　)

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$都不是零向量

(b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任一向量均不能由其它向量线性表示

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任意两个向量都不成比例

(d) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中有一个部分组线性无关

6. n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$线性相关的充要条件是(　)

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中至少有一个零向量

$(b)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中至少有两个向量成比例

$(c)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任意两个向量不成比例

$(d)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中至少有一向量可由其它向量线性表示

7. n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s(3\leq s\leq n)$线性无关的充要条件是(　)

(a)存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s\neq 0$

$(b)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任意两个向量都线性无关

$(c)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中存在一个向量,它不能被其余向量线性表示

$(d)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任一部分组线性无关

8. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$的秩为$r$,则(　　)

$(a)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中至少有一个由$r$个向量组成的部分组线性无关

$(b)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中存在由$r+1$个向量组成的部分组线性无关

$(c)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中由$r$个向量组成的部分组都线性无关

$(d)\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中个数小于$r$的任意部分组都线性无关

9. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$均为$n$维向量,那么下列结论正确的是(　　)

(a)若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s=0$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关

(b)若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$,都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s\neq 0$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关

(c)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关,则对任意不全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$,都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s=0$

(d)若$0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots\cdots 0\alpha_s=0$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关

10. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则向量组（　　）

$(a)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性无关

$(b)\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关

$(c)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关

$(d)\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关

11. 若向量β可被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性表示，则（　　）

(a)存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s$

(b)存在一组全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s$

(c)存在一组数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s$

(d)对β的表达式唯一

12. 下列说法正确的是（　　）

(a)若有不全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s=0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关

(b)若有不全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关

(c)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关，则其中每个向量均可由其余向量线性表示

(d)任何$n+1$个n维向量必线性相关

13. 设β是向量组$\alpha_1=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\alpha_2=(0,\ 1,\ 0)^T$的线性组合，则$\beta=$（　　）

$(a)(0,\ 3,\ 0)^T$　　$(b)(2,\ 0,\ 1)^T$　　$(c)(0,\ 0,\ 1)^T$　　$(d)(0,\ 2,\ 1)^T$

14. 设有向量组$\alpha_1=(1,\ -1,\ 2,\ 4)^T$，$\alpha_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)^T$，$\alpha_3=(3,\ 0,\ 7,\ 14)^T$，$\alpha_4=(1,\ -2,\ 2,\ 0)^T$，$\alpha_5=(2,\ 1,\ 5,\ 10)^T$，则该向量组的极大线性无关组为（　　）

$(a)\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$　　　　$(b)\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4$

$(c)\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_5$　　　　　$(d)\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_5$

15. 设$\alpha=(a_1,\ a_2,\ a_3)^T$，$\beta=(b_1,\ b_2,\ b_3)^T$，$\alpha_1=(a_1,\ a_2)^T$，$\beta_1=(b_1,\ b_2)^T$，下列正确的是（　　）

(a)若α,β线性相关，则α_1,β_1也线性相关;

(b)若α,β线性无关，则 $\alpha_1,\ \beta_1$也线性无关；

(c)若α_1,β_1线性相关，则α,β也线性相关；

(d)以上都不对

二、填空题

1. 若$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_3=(1,\ 3,\ t)^T$线性相关，则 t=______。

2. n 维零向量一定线性______关。

3. 向量α线性无关的充要条件是______。

4. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s\ (s>3)$线性______关。

5. n 维单位向量组一定线性______。

6. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$的秩为 r, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任意 r 个______的向量都是它的极大线性无关组。

7. 设向量$\alpha_1=(1,\ 0,\ 1)^T$与$\alpha_2=(1,\ 1,\ a)^T$正交，则$a=$______。

8. 正交向量组一定线性______。

9. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t$等价，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$的秩与$\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t$的秩______。

10. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t$线性表示，则$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s)$______$r(\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t)$。

11. 向量组$\alpha_1=(a_1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$，$\alpha_2=(a_2,\ 1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_3=(a_3,\ 1,\ 1,\ 1)^T$的线性关系是______。

12. 设 n 阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$,则$|A|=$______.

13. 设$\alpha_1=(0,\ y,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$，$\alpha_2=(x,\ 0,\ 0)^T$，若$\alpha$和$\beta$是标准正交向量，则 x 和 y 的值______.

14. 两向量线性相关的充要条件是______.

三、计算题

1. 设$\alpha_1=(1+\lambda,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1+\lambda,\ 1)^T$，$\alpha_3=(1,\ 1,\ 1+\lambda)^T$，$\beta=(0,\ \lambda,\ \lambda^2)^T$，问

（1）λ为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示？

（2）λ为何值时，β能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表达式不唯一？

（3）λ为何值时，β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

2. 设$\alpha_1=(1,\quad 0,\quad 2,\quad 3)^T$，$\alpha_2=(1,\quad 1,\quad 3,\quad 5)^T$，$\alpha_3=(1,\quad 1,\quad a+2,\quad 1)^T$，$\alpha_4=(1,\quad 2,\quad 4,\quad a+8)^T$，$\beta=(1,\quad 1,\quad b+3,\quad 5)^T$问：

（1）a,b为何值时，β不能表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合？

（2）a,b为何值时，β能唯一地表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合？

3. 求向量组$\alpha_1=(1,\quad -1,\quad 0,\quad 4)^T$，$\alpha_2=(2,\quad 1,\quad 5,\quad 6)^T$，$\alpha_3=(1,\quad 2,\quad 5,\quad 2)^T$，$\alpha_4=(1,\quad -1,\quad -2,\quad 0)^T$，$\alpha_5=(3,\quad 0,\quad 7,\quad 14)^T$的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

4. 设$\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 1)^T$，$\alpha_2=(1,\quad 2,\quad 3)^T$，$\alpha_3=(1,\quad 3,\quad t)^T$，t 为何值时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，t 为何值时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关？

5. 将向量组$\alpha_1=(1,\quad 2,\quad 0)^T$，$\alpha_2=(-1,\quad 0,\quad 2)^T$，$\alpha_3=(0,\quad 1,\quad 2)^T$标准正交化。

四、证明题

1. 设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=3\alpha_2-\alpha_1,\beta_3=2\alpha_1-\alpha_2$，试证$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关。

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots\cdots,\alpha_n+\alpha_1$在 n 为奇数时线性无关；在 n 为偶数时线性相关。

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关，证明$\beta$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性表示且表示式唯一。

4. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，求证$\alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

5. 证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s\,(s\geq 2)$线性相关的充要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合。

6. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中$\alpha_1\neq 0$，并且每一个$\alpha_i$都不能由前$i-1$个向量线性表示$(i=2,3,\cdots,s)$，求证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

7. 证明：如果向量组中有一个部分组线性相关，则整个向量组线性相关。

8.设$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是线性无关向量组，证明向量组$\alpha_0,\alpha_0+\alpha_1,\alpha_0+\alpha_2,\cdots,\alpha_0+\alpha_s$也线性无关。

第三章向量参考答案

一、　单项选择

1.b　2.d　3.a　4.b　5.b　6.d　7.d　8.a　9.b　10.c　11.c　12.d　13.a　14.b　15. a

二、填空题

1.　5　2.相关　3.　$\alpha \neq 0$　4.相关　5.无关　6.线性无关　7.　-1

8.无关　9.相等　10.　$\leq$　11.线性无关　12.　0　13.　$x=\pm 1, y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

14.对应分量成比例

三、解答题

1. 解：设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

则对应方程组为 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2\end{cases}$

其系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3)$

（1）当 $\lambda \neq 0, \lambda \neq -3$ 时，$|A| \neq 0$，方程组有唯一解，所以 β 可由 $\alpha_1, \alpha_{2,}\alpha_3$ 唯一地线性表示;

（2）当 $\lambda = 0$ 时，方程组的增广阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$，方程组有无穷多解，所以 β 可由 $\alpha_1, \alpha_{2,}\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一;

（3）当 $\lambda = -3$ 时，方程组的增广阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$，

$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解，所以 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_{2,}\alpha_3$ 线性表示。

2.解:以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 为列构造矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{a+1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1-a^2}{4} & b \end{pmatrix}$$

（1）当 $a = \pm 1$ 且 $b \neq 0$ 时，β 不能表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合；

（2）当 $a \neq \pm 1, b$ 任意时，β 能唯一地表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合。

3.解：$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\-1&1&2&-1&0\\0&5&5&-2&7\\4&6&2&0&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为一个极大无关组，且$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$， $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$

4.解：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5$，

当$t=5$时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，当$t\neq5$时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

5.解：先正交化：

令$\beta_1=\alpha_1=(1,\ \ 2,\ \ 0)^T$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1=\left(-\frac{4}{5},\ \ \frac{2}{5},\ \ 2\right)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\ \beta_2]}{[\beta_2,\ \beta_2]}\beta_2=\left(\frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{6},\ \ \frac{1}{6}\right)^T$$

再单位化：

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt5},\ \ \frac{2}{\sqrt5},\ \ 0\right)^T,\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{30}},\ \ \frac{1}{\sqrt{30}},\ \ \frac{5}{\sqrt{30}}\right)^T,$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\left(\frac{2}{\sqrt6},\ \ -\frac{1}{\sqrt6},\ \ \frac{1}{\sqrt6}\right)^T$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为标准正交向量组。

四、证明题

1.证：$\because 3(\beta_1+\beta_2)-4(2\beta_1-\beta_3)=0$

$\therefore -5\beta_1+3\beta_2+4\beta_3=0$

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关

2.证：设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$

则$(k_1+k_n)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots(k_{n-1}+k_n)\alpha_n=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$线性无关

$$\therefore\begin{cases}k_1+k_n=0\\k_1+k_2=0\\\quad\cdots\cdots\\k_{n-1}+k_n=0\end{cases}$$

其系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{n+1} = \begin{cases} 2, n\text{为奇数} \\ 0, n\text{为偶数} \end{cases}$

∴当 n 为奇数时，$k_1, k_2, \cdots\cdots, k_n$ 只能为零，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 线性无关；

当 n 为偶数时，$k_1, k_2, \cdots\cdots, k_n$ 可以不全为零，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 线性相关。

3.证：∵ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关

∴存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s, k$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots\cdots + k_s\alpha_s + k\beta = 0$

若 $k=0$，则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots\cdots + k_s\alpha_s = 0$，（$k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s$ 不全为零）

与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_s$ 线性无关矛盾

所以 $k \neq 0$

于是 $\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots\cdots - \frac{k_s}{k}\alpha_s$

∴ β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_s$ 线性表示。

设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots\cdots + k_s\alpha_s$　　①

$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots\cdots + l_s\alpha_s$　　②

则①−②得 $(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots\cdots + (k_s - l_s)\alpha_s = 0$

∵ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_s$ 线性无关

∴ $k_i - l_i = 0, (i = 1, 2, \cdots, s)$

∴ $k_i = l_i, (i = 1, 2, \cdots, s)$　　即表示法唯一

4.证：假设 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

∵ $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，∴ α_2, α_3 线性无关

∵ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，∴ α_1 可由 α_2, α_3 线性表示，

∴ α_4 能由 α_2, α_3 线性表示，从而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，矛盾

∴ α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

5.证：必要性

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_s$ 线性相关

则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots\cdots + k_s\alpha_s = 0$

不妨设 $k_s \neq 0$，则 $\alpha_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots\cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$，

即至少有一个向量是其余向量的线性组合。

充分性

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_s$ 中至少有一个向量是其余向量的线性组合

不妨设 $\alpha_s = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots\cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1}$

则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}-\alpha_s=0$，

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关。

6.证：用数学归纳法

当 s=1 时，$\alpha_1\neq 0$，线性无关，

当 s=2 时，∵α_2不能由α_1线性表示，∴α_1,α_2线性无关，

设 s=i-1 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{i-1}$线性无关

则 s=i 时，假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_i$线性相关，∵$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$线性无关，$\alpha_i$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{i-1}$线性表示，矛盾，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_i$线性无关。得证

7.证：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中有一部分组线性相关，不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r$（r<s）线性相关，则存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_r$,使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_r\alpha_r=0$

于是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_s=0$

因为$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_r,0$，----，0 不全为零

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关。

8.证：设$k_0\alpha_0+k_1(\alpha_0+\alpha_1)+k_2(\alpha_0+\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_0+\alpha_s)=0$

则$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

因$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，

所以$\begin{cases} k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s=0 \\ k_1=0 \\ k_2=0 \\ \cdots \\ k_s=0 \end{cases}$ 解得$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

所以向量组$\alpha_0,\alpha_0+\alpha_1,\alpha_0+\alpha_2,\cdots,\alpha_0+\alpha_s$线性无关。

第四章　线性方程组

一、单项选择题

1． 设n元齐次线性方程组$AX=0$的系数矩阵的秩为r，则$AX=0$有非零解的充分必要条件是（　　）

(A) $r=n$　　(B) $r<n$

(C) $r\geq n$　　(D) $r>n$

2． 设A是$m\times n$矩阵，则线性方程组$AX=b$有无穷解的充要条件是（　）

(A) $r(A)<m$　　(B) $r(A)<n$

(C) $r(Ab)=r(A)<m$　　(D) $r(Ab)=r(A)<n$

3． 设A是$m\times n$矩阵，非齐次线性方程组$AX=b$的导出组为$AX=0$，若$m<n$，则（　）

(A) $AX=b$必有无穷多解　　(B) $AX=b$必有唯一解

(C) $AX=0$必有非零解　　(D) $AX=0$必有唯一解

4． 方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_2+2x_3=2 \\ (\lambda-2)x_3=-(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-1) \end{cases}$ 无解的充分条件是$\lambda=$（　　）

(A)　1　　(B)　2　　(C)　3　　(D)　4

5． 方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\lambda-1 \\ 2x_2-x_3=\lambda-2 \\ x_3=\lambda-4 \\ (\lambda-1)x_3=-(\lambda-3))(\lambda-1)) \end{cases}$ 有唯一解的充分条件是$\lambda=$（　）

(A)　1　　(B)　2　　(C)　3　　(D)　4

6． 方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=\lambda-1 \\ 3x_2-x_3=\lambda-2 \\ \lambda x_2-x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)+(\lambda-2) \end{cases}$ 有无穷解的充分条件是$\lambda=$（　）

(A)　1　　(B)　2　　(C)　3　　(D)　4

7． 已知β_1,β_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个不同的解，α_1,α_2是导出组$AX=0$的基本解系，k_1,k_2为任意常数，则$AX=b$的通解是（　）

(A)　$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　(B)　$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C)　$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　(D)　$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

8． 设A为$m\times n$矩阵，则下列结论正确的是（　）

(A)　若$AX=0$仅有零解，则$AX=b$有唯一解

(B)　若$AX=0$有非零解，则$AX=b$有无穷多解

(C)　若$AX=b$有无穷多解，则$AX=0$仅有零解

(D) 若 $AX=b$ 有无穷多解 ，则 $AX=0$ 有非零解

9．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 仅有零解的充要条件为（　）

(A) A 的列向量线性无关　　(B) A 的列向量线性相关

(C) A 的行向量线性无关　　(D) A 的行向量线性相关

10．线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+10x_3=1 \end{cases}$ （　）

(A) 无解　(B) 有唯一解　(C) 有无穷多解　(D) 其导出组只有零解

二、填空题

1. 设 A 为 100 阶矩阵，且对任意 100 维的非零列向量 X，均有 $AX\neq 0$，则 A 的秩为____.

2. 线性方程组 $\begin{cases} kx_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+kx_2=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 仅有零解的充分必要条件是____.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots X_s$ 和 $c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_sX_s$ 均为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解（$c_1,c_2,\cdots c_s$ 为常数），则 $c_1+c_2+\cdots+c_s=$____.

4. 若线性方程组 $AX=b$ 的导出组与 $BX=0(r(B)=r)$ 有相同的基础解系，则 $r(A)=$____.

5. 若线性方程组 $A_{m\times n}X=b$ 的系数矩阵的秩为 m，则其增广矩阵的秩为____.

6. 设 10×15 矩阵的秩为 8，则 $AX=0$ 的解向量组的秩为____.

7. 如果 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=n-1$，则线性方程组 $AX=0$ 的通解为____.

8. 若 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 有 n 个线性无关的解向量，则 $A=$____.

9. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，若齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解，则 $a=$____.

10. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，若线性方程组 $AX=b$ 无解，则 $a=$____.

11. n 阶方阵 A，对于 $AX=0$，若每个 n 维向量都是解，则 $r(A)=$____.

12. 设 5×4 矩阵 A 的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个不同的解向量，若 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=(2,0,0,0)^T, 3\alpha_1+\alpha_2=(2,4,6,8)^T$，则 $AX=b$ 的通解为____.

13. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r<\min(m,n)$，则 $AX=0$ 有____个解，有____个线性

无关的解.

三、计算题

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，问 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是否是该方程组的一个基础解系？为什么？

2. 设 $A=\begin{bmatrix}5&4&3&3&-1\\0&1&2&2&6\\3&2&1&1&-3\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&-2&0&1&0\\5&-6&0&0&1\\1&-2&1&0&0\\1&-2&3&-2&0\end{bmatrix}$，已知 B 的行向量都是线性方程组 $AX=0$ 的解，试问 B 的四个行向量能否构成该方程组的基础解系？为什么？

3. 设四元齐次线性方程组为 （I）：$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$

1）求（I）的一个基础解系

2）如果 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$ 是某齐次线性方程组（II）的通解，问方程组（I）和（II）是否有非零的公共解？若有，求出其全部非零公共解；若无，说明理由。

4. 问 a,b 为何值时，下列方程组无解？有唯一解？有无穷解？在有解时求出全部解（用基础解系表示全部解）。

1）$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=a\\ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$　　2）$\begin{cases}x_1+x_2+bx_3=4\\-x_1+bx_2+x_3=b^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$

5. 求一个非齐次线性方程组，使它的全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}.(c_1,c_2\text{为任意实数})$$

6. 设 $A=\begin{bmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{bmatrix}$，求 4×2 一个矩阵 B，使得 $AB=0$，且 $r(B)=2$。

参考答案

一、单项选择题

1. B　2. D　3. C　4. B　5. A　6. C　7. B　8. D　9. A　10. C

二、填空题

1. 100　2. $k \neq -2且k \neq 3$　3. 1　4. r　5. m　6. 7

7. $k(1,1,\cdots,1)^T$ （k 为任意实数）　8. 0　9. $a \neq -1或3$　10. $a=-1$　11. 0

12. $(\frac{1}{2},0,0,0)^T + k(0,2,3,4)^T, k任意实数$　13. 无穷，$n-r$

三、计算题

1. 是　2. 不能

3. 1）$v_1=(0,0,1,0)^T, v_2=(-1,1,0,1)^T$　2）$k(-1,1,1,1)^T(其中k为任意非零常数)$

4. 1）当 $a=-2$ 时，无解；当 $a \neq -2且a \neq 1$ 时有唯一解：$(-\frac{1+a}{2+a},\frac{1}{2+a},\frac{(1+a)^2}{2+a})^T$；当 $a=1$ 时有无穷多解：$c_1(-1,1,0)^T + c_2(-1,0,1)^T + (1,0,0)^T(其中c_1,c_2为任意常数)$

2）当 $b=-1$ 时，无解；当 $b \neq -1且b \neq 4$ 时有唯一解：$(\frac{b(b+2)}{b+1},\frac{b^2+2b+4}{b+1},-\frac{2b}{b+1})^T$；当 $b=4$ 时有无穷多解：$c(-3,-1,1)^T + (0,4,0)^T(其中c为任意常数)$

5. $9x_1+5x_2-3x_3=-5$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 11/2 & 1/2 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

第五章　特征值与特征向量

一、单项选择题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, 则 A 的特征值是(　　)。

(a) −1, 1, 1　　(b) 0, 1, 1　　(c) −1, 1, 2　　(d) 1, 1, 2

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 A 的特征值是(　　)。

(a) 0, 1, 1　　(b) 1, 1, 2　　(c) −1, 1, 2　　(d) −1, 1, 1

3. 设 A 为 n 阶方阵, $A^2=I$, 则(　　)。

(a) $|A|=1$ (b) A 的特征根都是 1 (c) $r(A)=n$ (d) A 一定是对称阵

4. 若 x_1,x_2 分别是方阵 A 的两个不同的特征值对应的特征向量, 则 $k_1x_1+k_2x_2$ 也是 A 的特征向量的充分条件是(　　)。

(a) $k_1=0且k_2=0$ (b) $k_1\neq 0且k_2\neq 0$ (c) $k_1k_2=0$ (d) $k_1\neq 0且k_2=0$

5. 若 n 阶方阵 A,B 的特征值相同, 则(　　)。

(a) $A=B$　(b) $|A|=|B|$　(c) A 与 B 相似　(d) A 与 B 合同

6. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, λ 是 A 的特征值, 则 A^* 的特征根之一是(　　)。

(a) $\lambda^{-1}|A|^n$　(b) $\lambda^{-1}|A|$　(c) $\lambda|A|$　(d) $\lambda|A|^n$

7. 设 2 是非奇异阵 A 的一个特征值, 则 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 至少有一个特征值等于(　　)。

(a) 4/3　(b) 3/4　(c) 1/2　(d) 1/4

8. 设 n 阶方阵 A 的每一行元素之和均为 $a(a\neq 0)$, 则 $2A^{-1}+E$ 有一特征值为(　　)。

(a) a　(b) 2a　(c) 2a+1　(d) $\frac{2}{a}$ +1

9. 矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量（　　）。

(a) 线性相关　(b) 线性无关

(c) 两两相交　(d) 其和仍是特征向量

10. $|A|=|B|$ 是 n 阶矩阵 A 与 B 相似的(　　)。

(a) 充要条件　(b) 充分而非必要条件

(c) 必要而非充分条件　(d) 既不充分也不必要条件

11. n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征根是 A 与对角阵相似的(　　)。

(a) 充要条件　(b) 充分而非必要条件

(c) 必要而非充分条件　(d) 既不充分也不必要条件

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \beta\\ 1 & \beta & 1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 相似, 则 α,β 的值分别为（　　）。

（a） 0, 0　　　（b） 0, 1　　　（c） 1, 0　　　（d） 1, 1

13. 设 A,B 为相似的 n 阶方阵, 则（　　）。

(a)存在非奇异阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$　　　(b)存在对角阵 D, 使 A 与 B 都相似于 D

(c)存在非奇异阵 P, 使 $P^{T}AP=B$　　　(d) A 与 B 有相同的特征向量

14. 若 n 阶方阵 A 与某对角阵相似, 则（　　）。

（a） $r(A)=n$　　　（b） A 有 n 个不同的特征值

（c） A 有 n 个线性无关的特征向量　　　（d） A 必为对称阵

15. 若 A 相似于 B, 则（　　）。

（a） $\lambda I-A=\lambda I-B$　　　（b） $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$

（c） A 及 B 与同一对角阵相似　　　（d） A 和 B 有相同的伴随矩阵

16. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, 则与 A 相似的矩阵是（　　）。

（a） $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　（b） $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　（c） $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　（d） $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

17. 下列说法不妥的是　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(a)因为特征向量是非零向量，所以它所对应的特征向量非零

(b)属于一个特征值的向量也许只有一个

(c)一个特征向量只能属于一个特征值

(d)特征值为零的矩阵未必是零矩阵

18. 若 $A\sim B$，则下列结论错误的是　　　　　　　　（　　　）

(a) $\lambda E-A=\lambda E-B$　　　(b) $|A|=|B|$

（c） 存在可逆矩阵 P， 使 $P^{-1}AP=B$　　　(d) $trA=trB$

二、填空题

1. n 阶零矩阵的全部特征值为_______。
2. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=I$，则 A 的全部特征值为_______。
3. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^m=0$ (m 是自然数)，则 A 的特征值为_______。
4. 若 $A^2=A$，则 A 的全部特征值为_______。
5. 若方阵 A 与 $4I$ 相似，则 $A=$_______。
6. 若 n 阶矩阵 A 有 n 个相应于特征值 λ 的线性无关的特征向量，则 $A=$_______。

7. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为−1, 0, 2, 则行列式 $\left|A^2+A+I\right|=$__________ 。

8. 设二阶矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，则 A 的特征值为_________。

9. 特征值全为 1 的正交阵必是________阵。

10. 若四阶矩阵 A与B 相似， A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则 $\left|B^{-1}-E\right|$=________。

11. 若 $A=\begin{pmatrix}22 & 31\\ y & x\end{pmatrix}$□$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=B$，则 $x=$__________， y=_______。

三、计算题

1. 若 n 阶方阵 A 的每一行元素之和都等于 a , 试求 A 的一个特征值及该特征值对应的一个特征向量.

2. 求非奇异矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

1） $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$　　　　2） $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

3. 已知三阶方阵 A 的三个特征根为 1, 1, 2, 其相应的特征向量依次为 $(0,0,1)^T,(-1,1,0)^T,(-2,1,1)^T$, 求矩阵 A .

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$，有一个特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，求 a,b 的值，并求出对应于 α 的特征值。

5. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ t & -2 & 2\\ 3 & s & -1\end{pmatrix}$，有一个特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$，求 s,t 的值。

6. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，求 x,y 满足的条件。

7. 求正交阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，其中 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$。

8. 设三阶矩阵 A 的特征值为−1, 2, 5，矩阵 $B=3A-A^2$，求

（1） B 的特征值；

（2） B 可否对角化，若可对角化求出与 B 相似的对角阵；

（3）求 $|B|,|A-3E|$.

9. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & y\end{pmatrix}$相似，

（1） 求 y；

（2） 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆阵 P。

10. 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^{100}.

四、证明题

1. 设 A 是非奇异阵， λ 是 A 的任一特征根, 求证 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的一个特征根, 并且 A 关于 λ 的特征向量也是 A^{-1} 关于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量.

2. 设 $A^2=E$, 求证 A 的特征根只能是 ± 1.

3. 设 n 阶方阵 A 与 B 中有一个是非奇异的, 求证矩阵 AB 相似于 BA.

4. 证明:相似矩阵具有相同的特征值.

5. 设 n 阶矩阵 $A \neq E$，如果 $r(A+E)+r(A-E)=n$，证明：−1 是 A 的特征值。

6. 设 $A \sim B$，证明 $A^k \sim B^k$。

7. 设 α_1,α_2 是 n 阶矩阵 A 分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量。

第五章　参考答案

一、单项选择题

1.a　2.c　3.c　4.d　5.b　6.b　7.b　8.d　9.b　10.c　11.b　12.a　13.a　14.c　15.b　16.b　17.a　18.a

二、填空题

1.0　2.1,-1　3.0　4.0,1　5.4I　6. λI　7.7　8.1,2　9. 单 位　10.24　11.-17,-12

三、计算题

1. $a,(1,1,\cdots,1)^T$

2.(1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $a=3, b=0, \lambda=-1$　5. $s=9, t=-2, \lambda=-6$　6. $x+y=0$

7. $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

8.(1)-4,2,-10　(2) $\begin{pmatrix} -4 & & \\ & 2 & \\ & & -10 \end{pmatrix}$,　(3)8

9.（1） $y=6,$（2）特征值 2,2,6； $p=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3^{100}+2(2^{100}-1) & 2-2^{100}-3^{100} & 3^{100}-1 \\ 2(2^{100}+3^{100})-4 & 4-2^{100}-2\cdot 3^{100} & 2(3^{100}-1) \\ 2(3^{100}-1) & 2(1-3^{100}) & 2\cdot 3^{100}-1 \end{pmatrix}$

四. 证明题 (略)

第六章　二次型

一、单项选择题

1． n阶对称矩阵A正定的充分必要条件是（　　）。

(a) $|A|>0$　　(b)存在阶阵 C，使 $A=C^TC$

(c)负惯性指数为零　　(d) 各阶顺序主子式为正

2． 设A为 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　）。

(a)A 必与一对角阵合同

(b)若 A 的所有顺序主子式为正，则 A 正定

(c)若 A 与正定阵 B 合同，则 A 正定

(d) 若 A 与一对角阵相似，则 A 必与一对角阵合同

3． 设 A 为正定矩阵，则下列结论不正确的是（　）。

(a)A 可逆　　(b) A^{-1}正定

(c)A 的所有元素为正　　(d) 任给 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$,均有 $X^TAX>0$

4． 方阵 A 正定的充要条件是（　　）。

(a)A 的各阶顺序主子式为正；　　(b) A^{-1}是正定阵；

(c)A 的所有特征值均大于零；　　(d) $A\ A^T$ 是正定阵。

5． 下列$f(x,y,z)$为二次型的是（　　）。

(a) $ax^2+by^2+cz^2$　　(b) $ax+by^2+cz$

(c) $axy+byz+cxz+dxyz$　　(d) $ax^2+bxy+czx^2$

6． 设 A、B 为 n 阶方阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$且$X^TAX=X^TBX$则 A=B 的充要条件是（　　）。

(a) $r(A)=r(B)$　　(b) $A^T=A$

(c) $B^T=B$　　(d) $A^T=A$，$B^T=B$，

7． 正定二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$的矩阵为 **A**，则(　　)必成立.

(a) **A** 的所有顺序主子式为非负数　　(b) **A** 的所有特征值为非负数

(c) **A** 的所有顺序主子式大于零　　(d) **A** 的所有特征值互不相同

8． 设 A，B 为 n 阶矩阵，若(　　)，则 A 与 B 合同.

(a). 存在 n 阶可逆矩阵P,Q且$PAQ=B$

(b) 存在 n 阶可逆矩阵P，且$P^{-1}AP=B$

(c) 存在 n 阶正交矩阵Q，且$Q^{-1}AQ=B$

(d) 存在 n 阶方阵C,T，且$CAT=B$

9． 下列矩阵中，不是二次型矩阵的为（　　　）

$(a).\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $(b)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$(c)\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&4&6\\-2&6&5\end{pmatrix}$ $(d)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

10．下列矩阵中是正定矩阵的为（　　　）

$(a)\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$　　$(b)\begin{pmatrix}3&4\\2&6\end{pmatrix}$　　$(c)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-3\\0&-3&5\end{pmatrix}$　　$(d)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

11．已知 A 是一个三阶实对称且正定的矩阵，那么 A 的特征值可能是（　　）

(a)3，i, －1;　(b)2, －1, 3;　(c)2, i, 4;　(d)1, 3, 4

二、填空题

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,)=x_1x_2+2x_2x_3+x_3^2$ 的秩为____________。

2．二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2x_2+6x_1x_2+3x_2^2$ 的矩阵为____________。

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则二次型 $f=X^TAX$ 的矩阵为___________。

4．若 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是________。

5．设 A 为 n 阶负定矩阵，则对任何 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$ 均有 X^TAX ___________。

6．任何一个二次型的矩阵都能与一个对角阵_______。

7．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 满足条件______。

8．设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+ax_3^2$ 则当 a 的取值为__________时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的。

9．二次型 $f(x_1,x_2)=x_1x_2$ 的负惯性指数是__________。

10．二次型 $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 的矩阵为_______。

三、计算题

1. 求一个非退化的线性变换，将下列二次型化为标准型。

1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

2） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3$

2． 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求非奇异矩阵 C，使 $A=C^TBC$。

3． 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3$ 为标准形，并写出相应的满秩线性变换

4． 求非奇异矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-3&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$

四、证明题

1. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，

且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(Ⅰ)求矩阵 A ； （**II**）证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

2． 设 A、B 为同阶正定矩阵， λ， $\mu>0$，求证 $\lambda A+\mu B$ 也是正定矩阵。

3． 设 A, B 是同阶正定矩阵，试证 A＋B 也是正定矩阵。

第六章 参考答案

一、单项选择题

1． (d) **2．** (c) **3．** (c) **4．** (b) **5．** (a) **6．** (d) **7．** (c) **8．** (c)
9． (d) 10． (c) 11． (d)

二、填空题

1. 3 2. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ **3．** $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$， **4．** $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

5． <0

6． 合同

7． $a>1$

8． $a>0$

9． 1

10． $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

三、计算题

1．

1）$\begin{cases}x_1 = y_1 - y_2\\ x_2 = y_2 - y_3\\ x_3 = y_3\end{cases}$

2）$\begin{cases}x_1 = y_1 + y_2 + y_3\\ x_2 = y_1 - y_2 + 2y_3\\ x_3 = y_3\end{cases}$

2． $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

3． 解：令$\begin{cases}x_1 = y_1\\ x_2 = y_1 + y_2\\ x_3 = y_3\end{cases}$ 即 $X = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Y = C_1Y$

$$f(x_1,x_2,x_3) = y_1^2 + y_1y_2 + y_1y_3$$

则：

$$= (y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3)^2 - \tfrac{1}{4}(y_2 + y_3)^2$$

令$\begin{cases} w_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ w_2 = y_2 + y_3 \\ w_3 = y_3 \end{cases}$ 即$Y = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} W = C_2 W$

即 $X = C_1 C_2 W$ 使 $f(x_1, x_2, x_3) = w_1^2 - \frac{1}{4} w_2^2$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

四、证明题

1. 解：由题意 A 的特征值为 1,1,0.且$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$为特征值 0 的特征血量

所以 1 的特征向量若为 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 时有

$$\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3 = 0$$

解方程即得 Q 的前 2 列为$\left(0,1,0\right)^T$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$

$$\therefore Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

真题套卷

《线性代数》课程试卷（A）

题 号	一	二	三	四	五	总分
分 数						
评卷人						
复核人						

1、本卷考试形式为**闭卷，** 考试时间为**两小时。**

2、考生不得将装订成册的试卷拆散，不得将试卷或答题卡带出考场。

3、考生只允许在密封线以外答题，答在密封线以内的将不予评分。

4、考生答题时一律使用蓝色、黑色钢笔或圆珠笔（制图、制表等除外）。

5、考生禁止携带手机、耳麦等通讯器材。否则，视为为作弊。

6、不可以使用普通计算器等计算工具。

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共计 30 分）

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

本题得分	

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

答题要求：（每题只有一个是符合题目要求的，请将所选项填在题后的括号内，错选、多选或未选均无分）

1、设 n 阶方阵 A与B 等价，则必有 （　　）

（A） 当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=a$　　（B） 当$|A|=a(a\neq 0)$时，$|B|=-a$

（C） 当$|A|\neq 0$时，$|B|=0$　　（D） 当$|A|=0$时，$|B|=0$

2、设 A,B 为同阶可逆矩阵，则 （　　）

（A） 矩阵 A 与 B 等价　　（B） 矩阵 A 与 B 相似

（C） 矩阵 A 与 B 合同　　（D） 矩阵 A 与 B 可交换

3、向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$；可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则（　　）

（A）当$r<s$时，向量组Ⅱ必线性相关

（B）当$r>s$时，向量组Ⅰ必线性相关

（C）当$r<s$时，向量组Ⅰ必线性相关

（D）当$r>s$时，向量组Ⅱ必线性相关

4、已知β_1和β_2是非奇次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，α_1,α_2是对应导出组的基础解系，k_1,k_2为任意常数，则方程组$Ax=b$的通解（一般解）为（　　）

（A）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　（B）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

（C）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$　　（D）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

5、若方阵$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则$C$的特征值为　　（　　）

（A）1，0，1　（B）1，1，2　（C）-1，1，2　（D）-1，1，1

本题得分	

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）
答题要求：将正确答案填写在横线上

1、已知α_1，α_2为 2 维列向量，矩阵$A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2),B=(\alpha_1,\alpha_2)$，若行列式$|A|=-6,$则$|B|=$__________。

2、设 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$,则$A$的逆矩阵$A^{-1}=$__________。

3、设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$为三阶单位矩阵，则$B$的行列式$|B|=$__________。

4、设A是3×5阶矩阵，A的秩$r(A)=2$，而$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，则$r(BA)=$__________。

5、已知四阶行列式中第二列元素依次为 1，2，3，4，其对应的余子式依次为 4，3，2，1，则该行列式的值为__________。

6、设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$__________。

7、设四阶矩阵 A 相似于 B，A 的特征值为 2，3，4，5，E 为四阶单位矩阵，则行列式 $|B-E|=$__________。

8、如果 10 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=9$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为__________。

9、若方阵 A 与对角阵相似，且 $A^m=0$，（m 为自然数），则 $A=$_________。

10、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定，则 t 的所属区间为_____________。

本题得分	

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1、解方程 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$

2、求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余的向量。其中 $\alpha_1=$（1，4，0，2）^{T}，$\alpha_2=(-2,-7,1,-4)^T$，$\alpha_3=(1,4,-1,3)^T$

$\alpha_4=$（−4, −4, 3, 1）^{T}，$\alpha_5=(2,5,1,0)^T$。

3、设$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -1 & 2\\ 5 & 3 & \lambda & 6\end{pmatrix}$，求$A$的秩。

4、求矩阵X，使$XA=2XB+C$。其中$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 9\\ 6 & 5 & 7\\ -5 & 3 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$。

本题得分	

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1、已知向量 $\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-5\\12\\11\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\3\end{pmatrix}$，判断向量 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，若能，写出它的一般表示方式；若不能，请说明理由。

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&-8&1\\4&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$， $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

（1）计算二次型 X^TAX，写出该二次型所对应的矩阵；

（2）将二次型 X^TAX 化为标准形，写出所用的可逆线性变换及变换矩阵。

3、设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&&\\&y&\\&&-4\end{pmatrix}$，如果 A,B 相似，求

（1） x,y 的值

（2）相应的正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$。

本题得分	

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，并写清证明过程）

1、设 A 为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵，且 $A^2-2A-4E=0$。试证：$A-3E$ 可逆，并求 $(A-3E)^{-1}$。

2、若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 是否线性相关？说明其理由。

线性代数 课程试卷（A）

本题得分	

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

答题要求：（每题只有一个是符合题目要求的，请将所选项填在题后的括号内，错选、多选或未选均无分）

1．行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中，x^2的系数为 （ ）

(A) -1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2．设A,B为 n 阶非零矩阵，且$AB=0$，则 （ ）

(A) $r(A)+r(B)\le n$ (B) $r(A)=n, r(B)=0$

(C) $r(A)+r(B)<n$ (D) $r(A)+r(B)>n$

3．向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充要条件是 （ ）

(A) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$不含零向量

(B) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意两个线性无关

(C) 向量α_1不能由向量组$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$ 线性表出

(D)任一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$$

4．已知四阶方阵A有特征值 0，1，2，3，则方程组$AX=0$的基础解系所含解向量个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5．n 阶对称阵A为正定矩阵的充分必要条件是 （ ）

(A) $|A|>0$ (B) A等价于单位矩阵E

(C) A的特征值都大于 0 （D） 存在 n 阶矩阵C，使$A=C^TC$

本题得分	

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：将正确答案填写在横线上

1．三阶行列式$\left|a_{ij}\right|$的展开式中，$a_{32}a_{11}a_{23}$前面的符号应是________。

2．设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, A_{ij}为A中元a_{ij}的代数余子式，则

$A_{11}+A_{12}+A_{13}=$ __________。

3．设 n 阶矩阵 A 的秩 $r(A)<n-1$，则 A 的伴随矩阵 A^* 的元素之和

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=$__________。

4．三阶初等矩阵$E(1,2)$的伴随矩阵为 _________。

5．若非齐次线性方程组 $AX=B$ 有唯一解，则其导出组 $AX=0$ 解的情况是____________。

6．若向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$线性相关，则向量组$\alpha_2=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

的线性关系是__________。

7．设矩阵A的特征多项式为$\left|\lambda E-A\right|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，则行列式

$\left|2A^{-1}+A^*-3E\right|=$__________。

8．如果 n 阶方阵A的各行元素之和均为 2，则矩阵A必有特征值 ________。

9．设$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$为正交矩阵，则其逆矩阵$A^{-1}=$_________。

10．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$的正惯性指数为____________。

本题得分	

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1．计算 n 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，(1)用初等变换法求 A^{-1}；（2）将 A^{-1} 表示为初等矩阵之积。

3．设 $A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\1&3&0\\-1&-1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$，且满足 $AX-2X=B$，求 X 。

4．化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形，并写出可逆的线性变换。

本题得分	

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1．当a为何值时，方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=a \end{cases}$$

有无穷多组解？在有无穷多组解时，用导出组的基础解系表示全部解。

2. 判别向量组 $\beta_1=(1,2,5,2)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(3,0,7,14)^T$ 能否由向量组 $\alpha_1=(1，-1，0，4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,1,5,6)^T$，$\alpha_3=(1,-1,-2,0)^T$ 线性表出，并求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组。

3．设 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$ 求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出相应的对角阵。

本题得分	

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，并写清证明过程）

1．设 n 阶方阵 A 有不同的特征值 λ_1,λ_2，相应的特征向量分别是 α_1,α_2，证明：当 k_1,k_2 全不为零时，线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 不是 A 的特征向量。

2. 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，A 为 n 阶方阵，证明：向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关。

附：《线性代数》（A 卷）答案要点及评分标准

一．选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

1．B；　2．A；　3．D；　4．A；　5．C.

二．填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

1．负号；　2．1；　3．0；　4．$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，或 $-E(1,2)$；　5．唯一解（或只有零解）；　6．线性相关；　7．-27；　8．2；　9．$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$；　10．3.

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

1、解：按照第一行展开得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}$$

$$= \begin{cases} 2, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

………8 分

2、解：

（1）$(A \quad E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　………2 分

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

所以　$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$　………5 分

（2） $A^{-1}=E(1,2(-2))E(3,4(-1))E(4,3(-1))E(3(\frac{1}{2}))$ ………8 分

3、解：方法一：由 $AX-2X=B$，得到 $(A-2E)X=B$， ……2 分

$$(A-2E,E)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\-1&-1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&-1&0&-1\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$ ……5 分

所以，$A-2E$ 可逆，$X=(A-2E)^{-1}B=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$. ……8 分

方法二：由 $AX-2X=B$，得到 $(A-2E)X=B$， ……2 分
用初等行变换求 X

$$(A-2E,B)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\1&1&0&0&1\\-1&-1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$ ……6 分

所以，$A-2E$ 可逆，$X=(A-2E)^{-1}B=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$. ……8 分

4、 $f=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

$=(x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2-x_2{}^2$ ………6 分

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_3\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_2\end{cases}$ 即可逆线性变换为

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2-y_3\\x_2=y_3\\x_3=y_3-y_2\end{cases}.$$ ………8 分

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共计 30 分）

1、解：由

$$r(A,b)=\begin{pmatrix}3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&3\\1&1&1&1&1&1\\5&4&3&3&-1&a\end{pmatrix}\to\cdots$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组有无穷多组解，所以$r(A)=r(A,b)=2$，故$a=2$ ……4 分

$$r(A,b)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 原方程组等价于方程组

$$\begin{cases}x_1=-2+x_3+x_4+5x_5\\x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$$

取$x_3=x_4=x_5=0$，得到特解$\eta=(-2,3,0,0,0)^T$ ……7 分

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，分别代入等价方程组的齐次线性方程组中求得基础解系为

$$\xi_1=(1,-2,1,0,0)^T,\quad \xi_2=(1,-2,0,1,0)^T,\quad \xi_3=(5,-6,0,0,1)^T$$

方程组的全部解为

$x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$ 其中k_1,k_2,k_3为任意常数

……10 分

2、解：初等行变换矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$到行最简梯矩阵为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&3\\-1&1&-1&2&0\\0&5&-2&5&7\\4&6&0&2&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&2\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

……6 分

可得到β_1,β_2能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且

$$\beta_1=-\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ……10 分

3、解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-4 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda-2)^2$$ ………4 分

得到矩阵A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=8$

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，由$(2E-A)x=0$得一个基础解系

$\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$

正交化, 单位化$\beta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$， $\beta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^T$ …7 分

当$\lambda_3=8$时，由$(8E-A)x=0$的一个基础解 $\xi_3=(1,1,1)^T$

将其单位化得$\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ ………9 分

则正交阵$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$， 使$P^{-1}AP=B$，

相应的对角阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$ ……10 分

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

1、证明： $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=Ak_1\alpha_1+Ak_2\alpha_2=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2$

因为 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$

$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2$ 而$\lambda_1\neq\lambda_2$

所以 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$不是A的特征向量. ………4 分

2、证明：由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，根据定义，存在不全为 0 的$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，用矩阵$A$左乘等号两边得到$Ak_1\alpha_1+Ak_2\alpha_2+\cdots+Ak_s\alpha_s=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$

k_i不全为 0，根据线性相关的定义

得到向量组$k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\cdots,k_s\alpha_s$线性相关. ………4 分

本题得分	

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

答题要求：（每题只有一个是符合题目要求的，请将所选项填在题后的括号内，错选、多选或未选均无分）

1. 在 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 展开式中，x^2 的系数为　　　　（　　）

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

2. A 是 m×n 矩阵，$r(A)=r, B$ 是 m 阶可逆矩阵，C 是 m 阶不可逆矩阵，且 $r(C)<r$，则　　　　（　　）

(A) $BAX=O$ 的基础解系由 n-m 个向量组成

(B) $BAX=O$ 的基础解系由 n-r 个向量组成

(C) $CAX=O$ 的基础解系由 n-m 个向量组成

(D) $CAX=O$ 的基础解系由 n-r 个向量组成

3. 设 n 阶矩阵 A,B 有共同的特征值，且各自有 n 个线性无关的特征向量，则（　　）

(A) $A=B$　　(B) $A\neq B$, 但 $|A-B|=0$

(C) A□B　　(D) A 与 B 不一定相似，但 $|A|=|B|$

4. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，且 $AB=BC=CA=E$，其中 E 为 n 阶单位阵，则

$A^2+B^2+C^2=$　　　　（　　）

(A) O　　(B) E　　(C) $2E$　　(D) $3E$

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 A 与 B　　　　（　　）

(A)合同，且相似　　(B)不合同，但相似

(C)合同，但不相似　　(D) 既不合同，又不相似

本题得分	

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：将正确答案填写在横线上

1．已知$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \neq 0$，则$\begin{vmatrix} 2a_1 & b_1+c_1 & 3c_1 \\ 2a_2 & b_2+c_2 & 3c_2 \\ 2a_3 & b_3+c_3 & 3c_3 \end{vmatrix} =$__________。

2．设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，若三阶矩阵$Q$满足$AQ+E=A^2+Q$，则$Q$的第一行的行向量是 __________。

3．已知β为 n 维单位列向量，β^T为β的转置，若$C=\beta\beta^T$，则$C^2=$____________。

4．设α_1,α_2分别是属于实对称矩阵A的两个互异特征值λ_1,λ_2的特征向量，则$\alpha_1^T\alpha_2=$ _________。

5．设A是四阶矩阵，A^*为其伴随矩阵，α_1,α_2是齐次方程组$AX=0$的两个线性无关解，则$r(A^*)=$____________。

6．向量组$\alpha_1=(1,3,0,5,0)^T,\alpha_2=(0,2,4,6,0)^T,\alpha_3=(0,3,0,6,9)^T$的线性关系是__________。

7．已知三阶非零矩阵B的每一列都是方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$的解，则$\lambda=$__________。

8．已知三维向量空间R^3的基底为$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$，则向量$\beta=(2,0,0)^T$在此基底下的坐标是_________。

9．设$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$□$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，则$a=$_________。

10．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$的秩为_________。

本题得分	

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1．试求行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的第四行元素的代数余子式之和.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 $(AB)^{-1}$.

3．设 n 阶方阵 A,B 满足 $A+2B=AB$，已知 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵 A.

4．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$ 中，二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12．（1）求 a,b 的值；（2）用配方法化该二次型为标准形.

本题得分	

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1．当λ为何值时，方程组

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

无解、有唯一解或有无穷多组解？在有无穷多组解时，用导出组的基础解系表示全部解.

2 已知向量组 $\alpha_1=(1,3,2,0)^T$ ，$\alpha_2=(7,0,14,3)^T$ ，$\alpha_3=(2,-1,0,1)^T$ ，$\alpha_4=(5,1,6,2)^T,\alpha_5=(2,-1,4,1)^T$，（1）求向量组的秩；（2）求该向量组的一个极大无关组，并把其余向量分别用该极大无关组线性表示.

3．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$；判断 A 能否对角化，若可对角化，求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出相应的对角矩阵。

本题得分	

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，并写清证明过程）

1．设 α 是 n 阶矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 证明：α 也是 A^5-4A^3+E 的特征向量. 其中 E 为 n 阶单位矩阵.

2. 设 n 维向量组 α,β,γ 线性无关，向量组 α,β,δ 线性相关，证明：δ 必可由 α,β,γ 线性表示.

《线性代数》（A 卷）答案要点及评分标准

一． 选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

1．A；　2．B；　3．C；　4．D；　5．C.

二．填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

1．6m；　2．(2,0,1)；　3．$\beta\beta^T$；　4．0；　5．0；

6．线性无关；　7．1；　8．1,1,-1；　9．1；　10．2.

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

1、解：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ ………4 分

$$=\begin{vmatrix} a & b-a & b-a & b-a \\ b & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(a-b)^3$$ ………8 分

2、解：方法一：$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

………2 分

$$(AB\quad E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -\frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

所以 $$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$ ………8 分

（2）方法二：

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$ ………8 分

3、解：方法一：由 $A+2B=AB$，得到 $A(E-B)=-2B$，……2 分

$$(E-B,E)=\begin{pmatrix}0&-2&0&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&0&-2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ ……5 分

所以，$E-B$ 可逆，$A=-2B(E-B)^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. ……8 分

方法二：由 $A+2B=AB$，得到 $A(E-B)=-2B$， ……2 分

用初等列变换求 A

$$\begin{pmatrix}E-B\\-2B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\1&-1&0\\0&0&-2\\-2&-4&0\\2&-4&0\\0&0&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&-2&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

……6 分

所以， $A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. ……8 分

4、 解：二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$ 根据题意得到

$a+2+(-2)=1,-4a-2b^2=-12 \qquad a=1,b=2$ ………4 分

$f=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3=(x_1+2x_3)^2+2{x_2}^2-6{x_3}^2$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_3\end{cases}$ ，标准形为 ${y_1}^2+2{y_2}^2-6{y_3}^2$. ………8 分

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共计 30 分）

1、解： $|A|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4)$ 由克莱姆法则

当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解； ……2 分

当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时

$$r(A,b)=\begin{pmatrix}2&-\dfrac{4}{5}&-1&1\\-\dfrac{4}{5}&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}10&-4&-5&5\\-4&-5&5&10\\0&0&0&9\end{pmatrix}$$

有 $r(A)\neq r(A,b)$，所以方程组无解； ……4 分

当 $\lambda=1$ 时

$$r(A,b)=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

有 $r(A)=r(A,b)=2<3$，方程组有无穷多组解，原方程组等价于方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

取 $x_3 = 0$，得到特解 $\eta = (1,-1,0)^T$

令 $x_3 = 1$，代入等价方程组的齐次线性方程组中求得基础解系为

$$\xi = (1,0,1)^T$$

方程组的全部解为

$x = \eta + k\xi$　　其中 k 为任意常数　　　　……10 分

2、解：初等行变换矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 到行最简梯矩阵为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

……6 分

可得向量组的秩为 3，

向量组的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，且

$$\alpha_4 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_5 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2$$ ……10 分

3、解： A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)^2$$ ………3 分

得到矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时，由 $(-E-A)x = 0$ 得一个基础解系

$\xi_1 = (-1,1,0)^T, \xi_2 = (-1,0,1)^T$

正交化, 单位化 $\beta_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$， $\beta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^T$

当 $\lambda_3 = 5$ 时，由 $(5E-A)x = 0$ 的一个基础解 $\xi_3 = (1,1,1)^T$

将其单位化得 $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ ………8 分

因此 A 能对角化

且正交阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，

相应的对角阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ……10 分

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

1、证明： 因为 $A\alpha=\lambda\alpha$， 有

$$(A^5-4A^3+E)\alpha=A^5\alpha-4A^3\alpha+\alpha$$
$$=\lambda^5\alpha-4\lambda^3\alpha+\alpha=(\lambda^5-4\lambda^3+1)\alpha$$

根据特征值和特征向量的定义得 α 也是 A^5-4A^3+E 的特征向量.

………4 分

2、证明：由 α,β,γ 线性无关，得到 α,β 线性无关，又 α,β,δ 线性相关，则 δ 可以由 α,β 线性表示，所以 δ 必可由 α,β,γ 线性表示.

………4 分

______线性代数______课程试卷（A）

1、本卷考试形式为**闭卷，**考试时间为**两小时。**

2、考生不得将装订成册的试卷拆散，不得将试卷或答题卡带出考场。

3、考生只允许在密封线以外答题，答在密封线以内的将不予评分。

4、考生答题时一律使用蓝色、黑色钢笔。

5、考生禁止携带手机、耳麦等通讯器材。否则，视为作弊。

6、禁止使用电子翻译工具和字典。

客观题：

一、单项选择题（共 10 题，每题 2 分，共 20 分，1—10 题）

二、判断题　　（共 10 题，每题 1 分，共 10 分，11--20 题）

主观题：

S1：填空题　　（共 5 题，每题 2 分，共 10 分）

S2：计算题(一)　（共 3 题，每题 6 分，共 18 分）

S3：计算题(二)　（共 2 题，每题 8 分，共 16 分）

S4：计算题(三)　（共 2 题，每题 10 分，共 20 分）

S5：证明题　　（共 1 题，每题 6 分，共 6 分）

第一部分　客观题（共 30 分）

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$，则 $\begin{vmatrix} a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$ 等于　(　　　)

(A)　$2d$　　(B)　$3d$　　(C)　$6d$　　(D)　$-6d$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$M_{ij}$ 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的余子式，则 $M_{31}-M_{32}+M_{33}=$（　　　）

(A)　0　　(B)　1　　(C)　2　　(D)　3

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则下列各式恒成立的是（　　　）

(A)　$|2A|=2|A^T|$　　(B)　$(2A)^{-1}=2A^{-1}$

(C)　$|A^*|=|A^{-1}|$　　(D)　$[(A^T)^T]^{-1}=[(A^{-1})^T]^T$

4. 初等矩阵满足（　　）

(A) 任两个之乘积仍是初等矩阵　(B) 任两个之和仍是初等矩阵

(C) 都是可逆矩阵　(D) 所对应的行列式的值为 1

5. 下列不是 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件为（　　）

(A) $|A| \neq 0$　(B) A 可以表示成有限个初等阵的乘积

(C) 伴随矩阵存在　(D) A 的等价标准型为单位矩阵

6. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，C 为 n 阶可逆矩阵，$B = AC$，则 (　　)。

(A) 秩(A)> 秩(B)　(B) 秩(A)= 秩(B)

(C) 秩(A)< 秩(B)　(D) 秩(A)与秩(B)的关系依 C 而定

7. 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,则下列结论中正确的是（　　）

(A) 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots k_s$，使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 成立

(B) 存在一组全为零的数 $k_1, k_2, \cdots k_s$，使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 成立

(C) 存在一组数 $k_1, k_2, \cdots k_s$，使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$ 成立

(D) 对 β 的线性表达式唯一

8. 设 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解，η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解，则（　　）

(A) $2\xi_1 + \eta_1$ 为 $AX = 0$ 的解　(B) $\eta_1 + \eta_2$ 为 $AX = b$ 的解

(C) $\xi_1 + \xi_2$ 为 $AX = 0$ 的解　(D) $\eta_1 - \eta_2$ 为 $AX = b$ 的解

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的特征值是（　　）。

(A) $0,1,1$　(B) $1,1,2$　(C) $-1,1,2$　(D) $-1,1,1$

10. 若 n 阶方阵 A 与某对角阵相似，则 (　　)。

(A) $r(A) = n$　(B) A 有 n 个互不相同的特征值

(C) A 有 n 个线性无关的特征向量　(D) A 必为对称矩阵

二、判断题（共 10 小题，每小题 1 分，共 10 分 ）注：正确选择 A, 错误选择 B.

11. 设 A 和 B 为 n 阶方阵，则有 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$。（　　）

12. 当 n 为奇数时，n 阶反对称矩阵 A 是奇异矩阵。（　　）

13. 设 A, B, C 为同阶方阵，$AB = AC$，则 $B = C$。（　　）

14. 若矩阵A有一个r阶子式$D\neq 0$，且A中有一个含有D的$r+1$阶子式等于零，则A的秩等于r。（　　）

15. 若非齐次线性方程组$AX=b$有无穷多解，则其导出组$AX=0$一定有非零解。（　　）

16 若向量组$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$线性无关。（　　）

17. 等价的向量组的秩相等。（　　）

18. 设A与B都是n阶正交矩阵，则$A+B$也是正交矩阵。（　　）

19. 矩阵A不同特征值对应的特征向量必线性无关。（　　）

20. 两个相似的方阵必等价，两个合同的方阵也必等价。（　　）

第二部分　主观题（共 70 分）

题 号	得 分
$s1$	

三、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1． 在5阶行列式中，$a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$的符号是________

2．若A为 3 阶方阵，A^{-1}为A的逆矩阵且$A^{-1}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，则$A=$________.

3.线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\2x_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$ 仅有零解的充要条件是________.

4.已知三阶矩阵A的特征值为$1,2,3$，则$\left|A^3-5A^2+7A\right|=$________.

5．实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+tx_2^2+3x_3^2$，当$t=$_____时，其秩为 2.。

题 号	得 分
$s2$	

四、计算题（一）（共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

2. 已知向量组 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 2,1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 0,0,\ 2)^T$，$\alpha_3=(-1,\ -4,\ -8,k)^T$ 线性相关，求 k.

3. 设 $\alpha_1=(1,-2,2)^T$， $\alpha_2=(-1,0,-1)^T$， $\alpha_3=(5,-3,-7)^T$ ，用施密特正交化法将该向量组正交化。

题 号	得 分
$s3$	

五、计算题（二）（共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ ，$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ ，若矩阵 X 满足 $AX-X=B$，求 X 。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ，问 a 为何值时，矩阵 A 能对角化？

题 号	得 分
$s4$	

六、计算题（三）（共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1.当 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=\lambda \end{cases}$$

有解？在有解的情况下，求其全部解（若有无穷解，用其导出组的基础解系表示）。

2. 求向量组 $\alpha_1=(2,1,4,3)^T$ 、$\alpha_2=(-1,1,-6,6)^T$ 、$\alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T$ 、$\alpha_4=(1,1,-2,7)^T$ 、$\alpha_5=(2,4,4,9)^T$ 的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示。

题 号	得 分
$s5$	

七、证明题（共 1 小题，每题 6 分，共计 6 分）

设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2，证明 p_1+p_2 不是 A 的特征向量。

线性代数 课程试卷（A）及答案

本题得分	

一、单项选择题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：请将正确选项前的字母填在题后的括号内

1. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1| = m$，$|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3| = n$，则四阶行列式 $|\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1\ (\beta_1+\beta_2)| = (C)$

   (A)m+n　　(B)-(m+n)　　(C)n-m　　(D)m-n

2. 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2-a & 3 \\ 2 & 6 & 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ b & 6 & c-8 \end{pmatrix}$，则（B）

   (A) $a=1\quad b=-2\quad c=2$　　(B) $a=1\quad b=2\quad c=-2$

   (C) $a=-1\quad b=-2\quad c=2$　　(D) $a=-1\quad b=2\quad c=-2$

3. 若 A、B 均为非零方阵，且 AB=0，则有 A、B（D）

   (A)都可逆　(B)至少有一个可逆　(C)r(A)=r(B)　(D)都不可逆

4. 下列向量中，可由 $\alpha_1=(0,1,0)^T$ 与 $\alpha_2=(1,0,0)^T$ 线性表示的是（B）

   (A) $(0,0,1)^T$　　(B) $(0,3,0)^T$　　(C) $(0,2,1)^T$　　(D) $(2,0,1)^T$

5. 设矩阵 A 满足 $A^2+4A-5E=0$，则（A）

   (A)A 与 A+4E 同时可逆　　(B)A+5E 一定可逆

   (C)齐次线性方程组 $(A+5E)X=0$ 有非零解　　(D)A-E 一定可逆

6. 若 n 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=1$，则 A 的秩为（D）

   (A)1　　(B)0　　(C)n-1　　(D)n

7. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，有（C）

   (A)A 中必有两行（列）元素对应成比例

   (B)A 中至少有一行（列）元素全为零

   (C)A 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

   (D)A 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

8. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 AX=0 仅有零解的充要条件是（D）

   (A)A 的行向量线性相关　　(B)A 的列向量线性相关

   (C)A 的行向量线性无关　　(D)A 的列向量线性无关

9. 可逆矩阵 A 与矩阵（A）有相同的特征值

   (A) A^T　　(B) A^{-1}　　(C) A^2　　(D)A+E

10. α_1 与 α_2 分别是 n 阶方阵 A 的属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 α_1 与 α_2（B）

   (A)线性相关　　(B)线性无关　　(C)相等　　(D)正交

本题得分	

二、判断题（共 10 小题，每题 1 分，共计 10 分）

答题要求：判断正误，正确选择 A，错误选择 B

11. 若方阵 A^T 可逆，则 A^* 也可逆 （A）
12. 设 A、B 均为 n 阶方阵，则 $|A+B|=|A|+|B|$ （B）
13. 对任意 n 阶方阵（n>1）A 与 B，都有 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ （B）
14. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价，则 $s=t$ （B）
15. 若齐次线性方程组 AX=0 存在基础解系，则方程组 AX=b（b≠0）有无穷多解 (B)
16. 若同阶矩阵 A 与 B 的秩相等，则 A 可经过有限次的初等变换化成 B （A）
17. 若 λ 是方阵 A 的特征值，则 λ^n 是 A^n 的特征值（其中 n 为自然数）（A）
18. 若 n 阶方阵 A 相似于对角矩阵，则 A 有 n 个互异特征值 （B）
19. 设 X_1 与 X_2 是 A 的任意两个特征向量，则 X_1+X_2 也是其特征向量 （B）
20. 若 A 为正交矩阵，则 $|A|=\pm1$ （A）

本题得分	

三、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：请将最终答案直接填在题中横线上.

21. 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $|3A|=$ 54
22. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，则 $(A+E)^{-1}(A^2-E)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$
23. 设矩阵 A 可逆，则其伴随矩阵 A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$
24. 如果 4×5 阶矩阵 A 的行向量组线性无关，则齐次线性方程组 AX=0 的基础解系中含有 1 个向量
25. 若向量组中含有零向量，则此向量组线性相关
26. 若 $\alpha_1=(1,2,k,4)^T$ 与 $\alpha_2=(4,3,2,-2)^T$ 正交，则 $k=-1$
27. 设 A 为正交矩阵，则 $|A^TA|=1$
28. 设三阶矩阵 A 的特征值为−2、1、4，则 $|A|=-8$
29. 已知−5 是方阵 A 的特征值，则 A−2E 一定有一个特征值 −7
30. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为非齐次线性方程组 AX=b 的一组解，如果 $c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$ 也是该方程组的一个解，则 $\sum_{i=1}^{s}c_i=1$

本题得分	

S1：计算题一（共 2 小题，每题 8 分，共 16 分）

答题要求：写出文字说明和主要验算步骤

1．计算四阶行列式$\begin{vmatrix}3&-1&-1&0\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\1&0&1&2\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}3&-1&-1&0\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\1&0&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1&2\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\3&-1&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&2&2&2\\0&2&-1&3\\0&-1&-4&-6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&2&-1&3\\0&1&4&6\end{vmatrix}$

$=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&0&6\end{vmatrix}=-36$

2. 解矩阵方程$(E-A)X=B$，其中$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&3\end{pmatrix}$

解：$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$

$(E-A,B)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&2&2\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\qquad\therefore X=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}$

本题得分	

S2：计算题二（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：写出文字说明和主要验算步骤

1. 给定向量组$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,3,1,3)^T$，$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$，求该向量组的秩，并确定一个极大无关组，将其余向量用该极大无关组线性表示。

解：
$$(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&3&-1\\1&1&1&-1\\1&-1&3&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&2&-2\\0&0&0&-2\\0&-2&2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
所以：$r(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大无关组，且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$

2. 用其导出组的基础解系表示下面方程组的全部解
$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1-x_2-x_3+x_4=1\\3x_1+x_2-2x_3-x_4=1\end{cases}$$
解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\2&-1&-1&1&1\\3&1&-2&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\0&-5&1&5&1\\0&-5&1&5&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\0&-5&1&5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&0&3&1\\0&-5&1&5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\therefore\begin{cases}x_1=1-3x_4+3x_2\\x_3=1-5x_4+5x_2\end{cases}$$
令 $x_2=x_4=0$，得线性方程组的一个特解 $\gamma_0=(1,0,1,0)^T$

其导出组的一般解为：$\begin{cases}x_1=3x_4+3x_2\\x_3=5x_4+5x_2\end{cases}$

令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}$ 分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

得导出组的基础解系为：$\xi_1=\begin{pmatrix}3\\1\\5\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\-5\\1\end{pmatrix}$

所以，方程组的全部解为：$\gamma_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2$　　（c_1,c_2为任意实数）

3.已知$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$的特征值为−1, 2，5，求正交矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵。

解：当$\lambda_1=-1$时，由$(-E-A)X=O$，得基础解系为$p_1=(2,2,1)^T$

当$\lambda_2=2$时，由$(2E-A)X=O$，得基础解系为$p_2=(2,-1,-2)^T$

当$\lambda_3=5$时，由$(5E-A)X=O$，得基础解系为$p_3=(1,-2,2)^T$

不难验证p_1,p_2,p_3是正交向量组，把p_1,p_2,p_3单位化，得

$\eta_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=(2/3,\quad 2/3,\quad 1/3)^T$；$\eta_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=(2/3,\quad -1/3,\quad -2/3)^T$

$\eta_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=(1/3,\quad -2/3,\quad 2/3)^T$

取$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$,有$P^{-1}AP=\Lambda=diag(-1,2,5)$

本题得分	

S3：证明题（共 1 小题，共计 4 分）

答题要求：应写出文字说明

1. 已知 n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

证明：$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=O$

整理得：$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=O$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

$\therefore\begin{cases}k_1+k_3=0\\ k_1+k_2=0\\ k_2+k_3=0\end{cases}$

解得：$k_1=k_2=k_3=0$

所以，向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

第一部分 选择题 (共 28 分)

一、单项选择题（本大题共 14 小题，每小题 2 分，共 28 分）在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填在题后的括号内。错选或未选均无分。

1.设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=m，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$=n，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于（　　）

A. m+n　　B. –(m+n)

C. n–m　　D. m–n

2.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 等于（　　）

A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^*$是 **A** 的伴随矩阵，则 $\mathbf{A}^*$中位于（1，2）的元素是（　　）

A. –6　　B. 6

C. 2　　D. –2

4.设 **A** 是方阵，如有矩阵关系式 **AB=AC**，则必有（　　）

A. **A** =**0**　　B. $\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$ 时 **A=0**

C. $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ 时 **B=C**　　D. $|\mathbf{A}|\neq\mathbf{0}$ 时 **B=C**

5.已知 3×4 矩阵 **A** 的行向量组线性无关，则秩（$\mathbf{A}^T$）等于（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6.设两个向量组 α_1，α_2，…，α_s 和 β_1，β_2，…，β_s 均线性相关，则（　　）

A.有不全为 0 的数 λ_1，λ_2，…，λ_s 使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$ 和 $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots\lambda_s\beta_s=0$

B.有不全为 0 的数 λ_1，λ_2，…，λ_s 使 $\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_s(\alpha_s+\beta_s)=0$

C.有不全为 0 的数 λ_1，λ_2，…，λ_s 使 $\lambda_1(\alpha_1-\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+\lambda_s(\alpha_s-\beta_s)=0$

D.有不全为 0 的数 λ_1，λ_2，…，λ_s 和不全为 0 的数 μ_1，μ_2，…，μ_s 使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$ 和 $\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2+\cdots+\mu_s\beta_s=0$

7.设矩阵 **A** 的秩为 r，则 **A** 中（　　）

A.所有 r–1 阶子式都不为 0　　B.所有 r–1 阶子式全为 0

C.至少有一个 r 阶子式不等于 0　　D.所有 r 阶子式都不为 0

8.设 **Ax=b** 是一非齐次线性方程组，η_1，η_2 是其任意 2 个解，则下列结论错误的是（　　）

A. $\eta_1+\eta_2$ 是 **Ax=0** 的一个解　　B. $\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_2$ 是 **Ax=b** 的一个解

C. $\eta_1-\eta_2$ 是 **Ax=0** 的一个解　　D. $2\eta_1-\eta_2$ 是 **Ax=b** 的一个解

9.设 n 阶方阵 **A** 不可逆，则必有（　　）

A.秩($\mathbf{A}$)<n　　B.秩($\mathbf{A}$)=n−1

C.$\mathbf{A=0}$　　D.方程组 $\mathbf{Ax=0}$ 只有零解

10.设 A 是一个 n(⩾3)阶方阵，下列陈述中正确的是（　　）

A.如存在数 λ 和向量 α 使 $\mathbf{A}\alpha=\lambda\alpha$，则 α 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量

B.如存在数 λ 和非零向量 α，使$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\alpha=\mathbf{0}$，则 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值

C.$\mathbf{A}$ 的 2 个不同的特征值可以有同一个特征向量

D.如 λ_1，λ_2，λ_3 是 $\mathbf{A}$ 的 3 个互不相同的特征值，α_1，α_2，α_3 依次是 $\mathbf{A}$ 的属于 λ_1，λ_2，λ_3 的特征向量，则 α_1，α_2，α_3 有可能线性相关

11.设 λ_0 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程的 3 重根，$\mathbf{A}$ 的属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数为 k，则必有（　　）

A. k⩽3　　B. k<3

C. k=3　　D. k>3

12.设 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，则下列结论错误的是（　　）

A.$|\mathbf{A}|^2$ 必为 1　　B.$|\mathbf{A}|$必为 1

C.$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{T}$　　D.$\mathbf{A}$ 的行（列）向量组是正交单位向量组

13.设 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，$\mathbf{C}$ 是实可逆矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{C}^{T}\mathbf{AC}$.则（　　）

A.$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似

B. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 不等价

C. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 有相同的特征值

D. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同

14.下列矩阵中是正定矩阵的为（　　）

A.$\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$　　B.$\begin{pmatrix}3&4\\2&6\end{pmatrix}$

C.$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-3\\0&-3&5\end{pmatrix}$　　D.$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

第二部分　非选择题（共 72 分）

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）不写解答过程，将正确的答案写在每小题的空格内。错填或不填均无分。

15.$\begin{vmatrix}1&1&1\\3&5&6\\9&25&36\end{vmatrix}=$__________.

16.设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\end{pmatrix}$.则 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}$=________.

17.设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{3\times3}$，$|\mathbf{A}|=2$，$\mathbf{A}_{ij}$ 表示 $|\mathbf{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式（i,j=1,2,3），则 $(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})^2+(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})^2+(a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23})^2$=________.

18.设向量（2，-3，5）与向量（-4，6，a）线性相关，则 a=________.

19.设 **A** 是 3×4 矩阵，其秩为 3，若 η_1，η_2 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax=b}$ 的 2 个不同的解，则它的通解为________.

20.设 **A** 是 m×n 矩阵，**A** 的秩为 r(<n)，则齐次线性方程组 $\mathbf{Ax=0}$ 的一个基础解系中含有解的个数为________.

21.设向量 α、β 的长度依次为 2 和 3，则向量 α＋β 与 α－β 的内积（α＋β，α－β）=______.

22.设 3 阶矩阵 A 的行列式 $|\mathbf{A}|=8$，已知 **A** 有 2 个特征值−1 和 4，则另一特征值为_______.

23.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&10&6\\1&-3&-3\\-2&10&8\end{pmatrix}$，已知 $\alpha=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ 是它的一个特征向量，则 α 所对应的特征值为_________.

24.设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ 的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范形为_______.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

25.设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\end{pmatrix}$.求（1）$\mathbf{AB}^T$；（2）$|4\mathbf{A}|$.

26.试计算行列式 $\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

27.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求矩阵 **B** 使其满足矩阵方程 $\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$.

28.给定向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\9\end{pmatrix}$.

试判断 α_4 是否为 α_1，α_2，α_3 的线性组合；若是，则求出组合系数。

29.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

求：（1）秩（**A**）；

（2）**A** 的列向量组的一个最大线性无关组。

30.设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ 的全部特征值为 1，1 和−8.求正交矩阵 **T** 和对角矩阵 **D**，使 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}=\mathbf{D}$.

31.试用配方法化下列二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3,$$

并写出所用的满秩线性变换。

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

32.设方阵 **A** 满足 $\mathbf{A}^3=\mathbf{0}$，试证明 **E**−**A** 可逆，且 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2$.

33.设 η_0 是非齐次线性方程组 **Ax=b** 的一个特解，ξ_1，ξ_2 是其导出组 **Ax=0** 的一个基础解系.试证明

（1）$\eta_1=\eta_0+\xi_1$，$\eta_2=\eta_0+\xi_2$ 均是 **Ax=b** 的解；

（2）η_0，η_1，η_2 线性无关。

答案：

一、单项选择题（本大题共 14 小题，每小题 2 分，共 28 分）

1.D	2.B	3.B	4.D	5.C
6.D	7.C	8.A	9.A	10.B
11.A	12.B	13.D	14.C	

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

15. 6

16. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

17. 4

18. –10

19. $\eta_1+c(\eta_2-\eta_1)$（或 $\eta_2+c(\eta_2-\eta_1)$），c 为任意常数

20. n–r

21. –5

22. –2

23. 1

24. $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

25.解（1）$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 18 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

（2）$|4\mathbf{A}|=4^3|\mathbf{A}|=64|\mathbf{A}|$，而

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2.$$

所以$|4\mathbf{A}|=64\cdot(-2)=-128$

26.解 $\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=30+10=40.$

27.解 **AB**=**A**+2**B** 即（**A**−2**E**）**B**=**A**，而

（**A**−2**E**）$^{-1}$=$\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}.$

所以 **B**=(**A**−2**E**)$^{-1}$**A**=$\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}.$

28.解一 $\begin{pmatrix}-2&1&3&0\\1&-3&0&-1\\0&2&2&4\\3&4&-1&9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&-5&3&-2\\1&-3&0&-1\\0&1&1&2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$

所以 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，组合系数为（2，1，1）.

解二 考虑 $\alpha_4=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，

即 $\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1-3x_2=-1 \\ 2x_2+2x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-x_3=9. \end{cases}$

方程组有唯一解 $(2,1,1)^T$，组合系数为（2，1，1）.

29.解 对矩阵 **A** 施行初等行变换

$$\mathbf{A}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{B}.$$

（1）秩（**B**）=3，所以秩（**A**）=秩（**B**）=3.

（2）由于 **A** 与 B 的列向量组有相同的线性关系，而 **B** 是阶梯形，**B** 的第 1、2、4 列是 **B** 的列向量组的一个最大线性无关组，故 **A** 的第 1、2、4 列是 **A** 的列向量组的一个最大线性无关组。

（**A** 的第 1、2、5 列或 1、3、4 列，或 1、3、5 列也是）

30.解 **A** 的属于特征值 $\lambda=1$ 的 2 个线性无关的特征向量为

$\xi_1=(2,-1,0)^T$，　　$\xi_2=(2,0,1)^T$.

经正交标准化，得 $\eta_1=\begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 \\ -\sqrt{5}/5 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/15 \\ 4\sqrt{5}/15 \\ \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}$.

$\lambda=-8$ 的一个特征向量为

$\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$，经单位化得 $\eta_3=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

所求正交矩阵为 $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{15}/15 & 1/3 \\ -\sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15 & 2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

对角矩阵 $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$.

（也可取 $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}2\sqrt{5}/5&2\sqrt{15}/15&1/3\\0&-\sqrt{5}/3&2/3\\\sqrt{5}/5&-4\sqrt{5}/15&-2/3\end{pmatrix}$.）

31.解　$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2x_2^2+4x_2x_3-7x_3^2$

$$=(x_1+2x_2-2x_3)^2-2(x_2-x_3)^2-5x_3^2.$$

设 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2-2x_3\\y_2=\qquad\quad x_2-x_3\\y_3=\qquad\qquad\quad x_3\end{cases}$，　即 $\begin{cases}x_1=y_1-2y_2\\x_2=\qquad y_2+y_3\\x_3=\qquad\quad y_3\end{cases}$，

因其系数矩阵 $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 可逆，故此线性变换满秩。

经此变换即得 $f(x_1,x_2,x_3)$的标准形

$$y_1^2-2y_2^2-5y_3^2.$$

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

32.证　由于 $(\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2)=\mathbf{E}-\mathbf{A}^3=\mathbf{E}$，

所以 $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆，且

$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2$.

33.证　由假设 $\mathbf{A}\eta_0=\mathbf{b}$，$\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{0}$，$\mathbf{A}\xi_2=\mathbf{0}$.

（1）$\mathbf{A}\eta_1=\mathbf{A}(\eta_0+\xi_1)=\mathbf{A}\eta_0+\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{b}$，同理 $\mathbf{A}\eta_2=\mathbf{b}$，

所以 η_1，η_2 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的 2 个解。

（2）考虑 $l_0\eta_0+l_1\eta_1+l_2\eta_2=\mathbf{0}$，

即　$(l_0+l_1+l_2)\eta_0+l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$.

则 $l_0+l_1+l_2=0$，否则 η_0 将是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，矛盾。所以

$l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$.

又由假设，ξ_1，ξ_2 线性无关，所以 $l_1=0$，$l_2=0$，从而　$l_0=0$.

所以 η_0，η_1，η_2 线性无关。

2019-2020 学年第二学期期末综合大作业

《线性代数 B》（A 套题）

（2019 级电子信息工程学院、计算机学院、工商管理学院、旅游学院、药学与食品工程学院、航空工程学院各专业、2018 级机械工程学院机械设计制造及其自动化专业和 2017 级药学与食品科学学院制药工程专业）

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，则 $A_{11} + 3A_{21} + 5A_{31} + 7A_{41} =$________________.

2、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{2021} =$________________.

3、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$，则秩数 $R(A) =$_________.

4、设向量组 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$线性无关，则 t 应满足的条件为_____________.

5、若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + bx_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 b 应满足的条件为_______________.

二、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1、设 A 与 B 是 n 阶方阵，满足 $AB = O$，则下列结论中正确的是（　　　）.

（A） $A=O$ 或 $B=O$；（B） $|A|=0$ 或 $|B|=0$；（C） $A+B=O$；（D） $|A|+|B|=0$.

2、设 A 与 B 是 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　　　）.

（A） $AB = BA$；（B）$(AB)^T = A^T B^T$；（C）$|AB| = |BA|$；（D）$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

3、设向量组$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\a\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$线性相关，则$a=$（　　　）.

（A）0；　　　　（B）1；　　　　（C）2；　　　　（D）3.

4、设A是3阶方阵，$R(A)=2$，且$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$是$AX=b(b\neq 0)$的两个解向量，则$AX=b$的通解为(　　)，其中$k$，$k_1$，$k_2$是任意常数.

（A）$k\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$；　　（B）$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$；　　（C）$k\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$；　　（D）$k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

5、设A为n阶方阵，齐次线性方程组$Ax=0$只有零解，则下列说法**错误**的是（　　　）.

（A）矩阵A的行列式不为零；　　　　（B）矩阵A为可逆矩阵；

（C）矩阵A的列向量组线性无关；　　（D）矩阵A不是满秩矩阵.

三、（15分）计算行列式$D=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}$.

四、（15分）设$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&3\\0&1&1\end{pmatrix}$，**求**$A^{-1}$.

五、(10分)设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\\2\end{pmatrix}$，

（1）求该向量组的一个极大无关组和秩；

（2）将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、（10分）判断线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-5\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=-7\end{cases}$ **是否有解？若**

有解，求其解.

七、(10 分)已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\\lambda\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-1\\1-\lambda\\2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\2\end{pmatrix}$，

问：（1）当λ为何值时β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$唯一线性表示？写出线性表示式；

（2）当λ为何值时β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$无穷多种线性表示？写出线性表示式.

八、（10 分）综合题：《线性代数 B》这门课程要求学习《线性代数》这本书的前四章共 13 节内容，每一章都可以做为一个独立的内容.

请阐述：

(1) 所学四章的每一章所要解决的问题；

(2) 各章之间的关系.

要求：语言简洁，层次分明，逻辑清晰，结论准确.