一、多元函数的定义、极限及连续性

二、多元函数的偏导数

1、偏导数：定义，计算

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

2、二阶偏导数

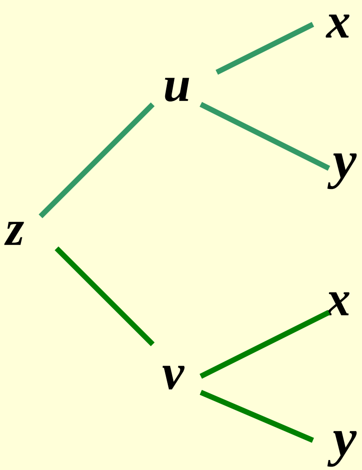
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

3、多元复合函数求导法：链锁规则

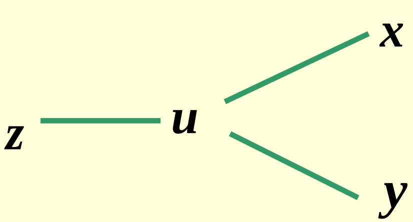
(1) 设 $z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$



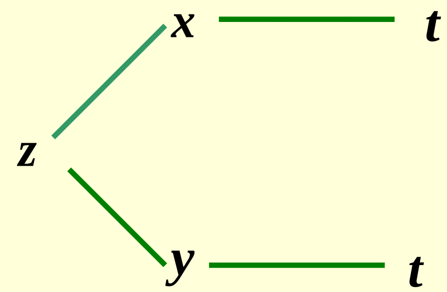
(2) 设 $z = f(u), u = \varphi(x, y)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{dz}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{dz}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$



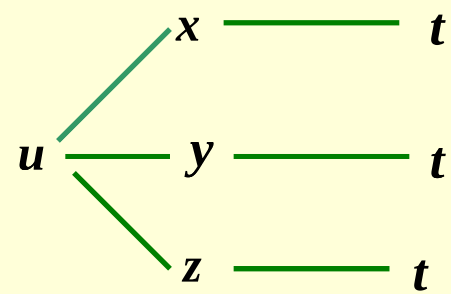
(3) 设 $z = f(x, y),\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, 则

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$



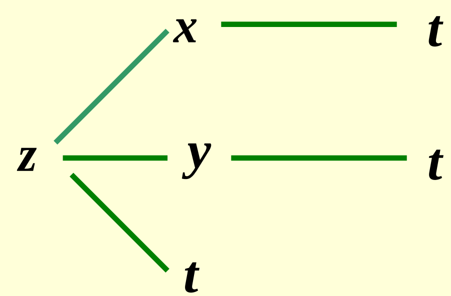
(4)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$



(5)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}$$



4、二元隐函数求导法

（1）设 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$.

（2）设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$.

三、全微分：概念，计算

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

四、多元函数微分学在几何学中的应用

1、空间曲线的切线与法平面

关键是求切向量：

$$\tau = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}.$$

（1）切线：

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

（2）法平面：

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

2、空间曲面的切平面与法线

关键是求**法向量**：

$$\boldsymbol{n}=\{F_x,F_y,F_z\}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}.$$

（1）切平面：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

（2）法线：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

（3）特殊情况：

$$\Sigma: \quad z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D$$

此时，设 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ ，则

$$\vec{n} = \{ f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \}$$

切平面：

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

法线： $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

五、方向导数及梯度

1、方向导数的概念与计算：

$z=f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数为：

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是 l 的方向余弦

2、梯度的概念：

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\} = \nabla f(x_0, y_0).$$

$$= f_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j}$$

3、方向导数与梯度的关系：

函数在 P_0 点处沿梯度方向的方向导数取得最大值，

最大值为梯度的模 $|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)|$. 函数增加最快。

沿梯度反方向函数减少的最快。

六、多元函数极值

1、极值的概念

2、极值的判定：可能极值点 — 驻点 / 偏导数不存在的点

（1）求驻点：

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Longrightarrow \text{驻点：}(x_0,y_0)\in D$$

（2）求二阶偏导数：

$$f_{xx},\ f_{yy},\ f_{xy}$$

（3）求

$$K=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2,$$

判定：

$$K\begin{cases} >0,\ \text{极值}\begin{cases} f_{xx}>0,\ \text{极小值} \\ f_{xx}<0,\ \text{极大值} \end{cases} \\ <0,\ \text{不是极值} \\ =0,\ \text{无法确定} \end{cases}$$

3、二元函数的最值

4、条件极值：拉格朗日乘数法

1）根据实际问题，建立目标函数及约束条件

$$\begin{cases} \max & z = f(x,y) \\ \text{s.t.} & \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \min & z = f(x,y) \\ \text{s.t.} & \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

2）引进函数 $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$.

3）解方程组

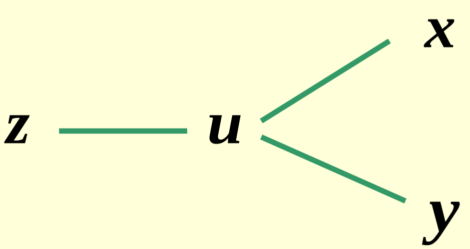
$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x_0, y_0)$$

4）根据实际背景，判定 (x_0, y_0) 是否为极值点。

一、填空题

1、设 $z = 3^{xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \underline{\; y 3^{xy} \ln 3 \;}$

分析 设 $z = 3^{u}, u = xy$，则



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 3^{u} \ln 3 \cdot y = y 3^{xy} \ln 3 .$$

2、设 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，则 $f_y(1,3)=\underline{-\dfrac{3}{50}}$

分析

$$f_y(x,y)=-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$\Longrightarrow$

$$f_y(1,3)=\left[-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right]\Bigg|_{(1,3)}=-\frac{6}{100}=-\frac{3}{50}.$$

3、方程式 $xy+yz+zx=1$ 确定 z 是 x,y 的函数，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{-\dfrac{y+z}{x+y}}$

分析 设 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-1$，则

$$F_x=y+z,\qquad F_z=y+x$$

所以，$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{y+z}{x+y}.$$

3、方程式 $xy + yz + zx = 1$ 确定 z 是 x, y 的函数，

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y+z}{x+y}$

显化

解法二 由方程解得 $z = \dfrac{1-xy}{x+y}$,

所以,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(-y)(x+y)-(1-xy)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{-1-y^2}{(x+y)^2}.$$

4、 $z = y\sin e^{x}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{e^{x}\cos e^{x}}$

分析

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos e^{x} \cdot e^{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\cos e^{x} \cdot e^{x}\right) = e^{x}\cos e^{x}.$$

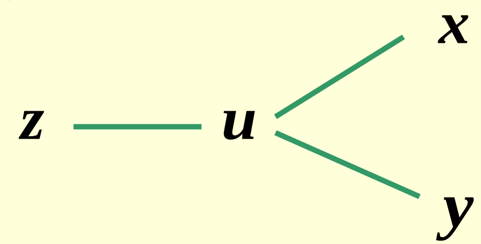
5、 $z=\frac{1}{2}\ln(1+x^2+y^2)$，则 $dz\Big|_{(1,1)}=\underline{\frac{1}{3}dx+\frac{1}{3}dy}$

分析

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2+y^2}=\frac{x}{1+x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{1+x^2+y^2}=\frac{y}{1+x^2+y^2},$$

$$\Rightarrow dz\,\Big|_{(1,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}dy$$



$$=\frac{x}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}dx+\frac{y}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}dy$$

$$=\frac{1}{3}dx+\frac{1}{3}dy.$$

6、设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xy^3 dx + ax^2 y^2 dy$，

则常数 $a = \underline{3}$

分析　由 $dz = 2xy^3 dx + ax^2 y^2 dy$ 知

$$f_x(x, y) = 2xy^3, \quad f_y(x, y) = ax^2 y^2,$$

$$z = f(x, y) = x^2 y^3,$$

于是 $f_y(x, y) = 3x^2 y^2 \Rightarrow a = 3.$

7、函数 $z = 3x^4 + xy + y^3$ 在点A(1, 2)处沿从点A到B(2, 1)方向的方向导数等于 $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

分析

由 $\overrightarrow{AB} = \{1,-1\}$ 知, 与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为 $\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\}$.

又因为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = (12x^3 + y)\big|_{(1,2)} = 14$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = (x + 3y^2)\big|_{(1,2)} = 13,$$

所以, $\dfrac{\partial z}{\partial l} = 14 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 13 \times (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8、函数 $u = xy + yz + zx$ 在点 (1, 2, 3) 处的梯度

$$\nabla u(1,2,3) = \underline{5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}}$$

分析

$$\nabla u(1,2,3) = \{u_x, u_y, u_z\}\Big|_{(1,2,3)}$$

$$= \{y + z, x + z, y + x\}\Big|_{(1,2,3)}$$

$$= \{5,4,3\}.$$

二、选择题

1、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (B)

(A) 连续，但偏导数不存在； (B) 不连续，但偏导数存在；

(C) 连续，且偏导数存在； (D) 不连续，且偏导数不存在.

分析 由于当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在，故其在该点处不连续.

二、选择题

1、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (B)

(A) 连续，但偏导数不存在；　(B) 不连续，但偏导数存在；

(C) 连续，且偏导数存在；　(D) 不连续，且偏导数不存在.

分析

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

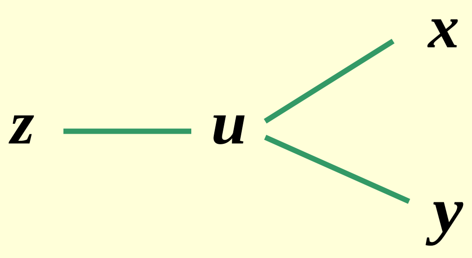
所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在.

2、设 $z = \ln(2e^x - e^y)$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = (\mathrm{D})$

(A) 1;　　(B) -1;　　(C) 2;　　(D) -2.

分析

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2e^x - e^y}\cdot 2e^x = \frac{2e^x}{2e^x - e^y},$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2e^x}{2e^x - e^y}\right)$$

$$= \frac{2e^x(2e^x - e^y) - 2e^x\cdot 2e^x}{(2e^x - e^y)^2} = -\frac{2e^x e^y}{(2e^x - e^y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = -2.$$

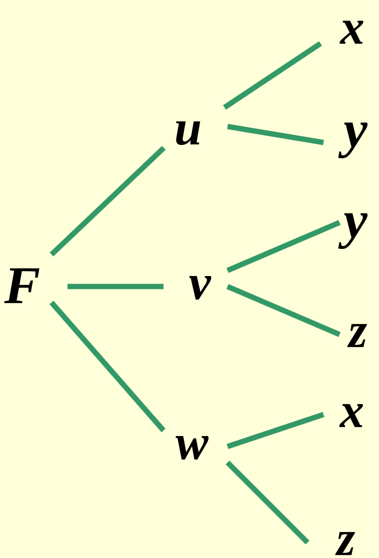
3.设方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定 z 是 x,y 的函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ (C)

(A) $\dfrac{F_1'-F_2'}{F_2'-F_3'}$;　(B) $\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$;　(C) $\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$;　(D) $\dfrac{F_3'-F_1'}{F_2'-F_3'}$.

分析 设 $F(u,v,w)=0, u=x-y, v=y-z, w=z-x$，则

$$F_x=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=F_1'-F_3',$$

$$F_z=\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=-F_2'+F_3',$$



于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$.

4、函数 $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ 的全微分 $dz=$ (D)

(A) $\dfrac{2(xdx-ydy)}{(x-y)^2}$; (B) $\dfrac{2(ydy-xdx)}{(x-y)^2}$;

(C) $\dfrac{2(ydx-xdy)}{(x-y)^2}$; (D) $\dfrac{2(xdy-ydx)}{(x-y)^2}$.

分析

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2}=-\frac{2y}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}.$$

$$\Rightarrow dz=\frac{-2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy=\frac{2(xdy-ydx)}{(x-y)^2}$$

5、函数 $z = 3x^3 - xy + xy^2$ 在点M(1,2)处沿 $l = \{11, 3\}$ 方向的方向导数（ A ）

（A）最大；(B)最小；(C)等于1；(D)等于0。

分析 函数在点M(1,2)的梯度为

$$\{z_x, z_y\}\Big|_{(1,2)} = \{9x^2 - y + y^2, -x + 2y\}\Big|_{(1,2)} = \{11, 3\}$$

即为 l 的方向。因此，函数在点M处沿 l 方向的方向导数取得最大值，恰为梯度的模：

$$\sqrt{11^2 + 3^2} = \sqrt{130}.$$

6、在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 的所有切线中与平面 $x + 2y + z = 0$ 平行的切线（ B ）

(A) 只有一条；(B) 只有两条；(C) 至少在三条；(D) 不存在.

分析 平面的法向量为 $n = \{1,2,1\}$.

曲线在任意t对应点处的切向量为：

$$\tau = \{x_t, y_t, z_t\} = \{1, 2t, 3t^2\},$$

若切线与平面平行，则 τ 与 n 垂直，因此，

$\tau \cdot n = 0$，即 $1 + 4t + 3t^2 = 0$，

解得 $t = -1, -\dfrac{1}{3}$.

7、 $f(x,y)=x^2-2xy-y^3+4y^2$有(B)个驻点。

(A)1;　　(B)2;　　(C)3;　　(D)4.

分析 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x-2y=0 \\ f_y(x,y)=-2x-3y^2+8y=0 \end{cases}$$

解得两个驻点（0,0),(2,2).

8、对于函数 $z = x^2 - y^2$，原点 $(0,0)$(A)。

(A)是驻点但不是极值点；　　(B)不是驻点；

(C)是极大值点；　　(D)是极小值点。

分析

由 $\begin{cases} f_x(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点（0,0）.

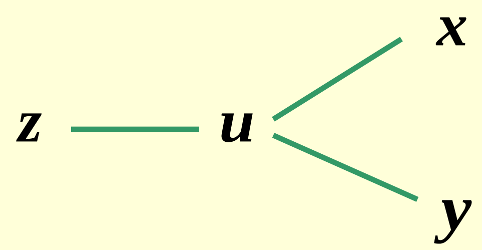
又 $f_{xx}(x,y) = 2$，$f_{xy}(x,y) = 0$，$f_{yy}(x,y) = -2$，

所以，$K = z_{xx} \cdot z_{yy} - [z_{xy}]^2 = -4 < 0.$

因此，(0, 0)不是极值点。

三、解答题

1、设 $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。



解

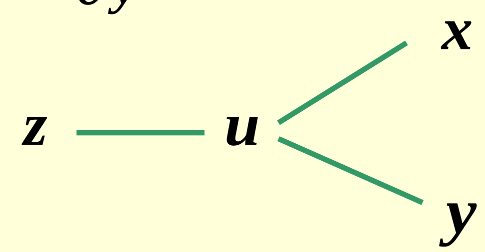
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$$

2、求 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$



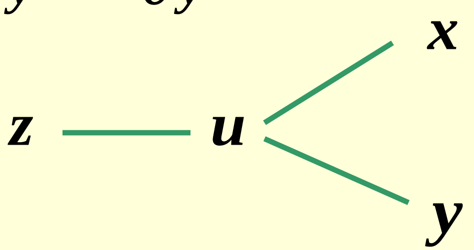
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

2、求 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

解

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\,\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

3、设方程 $x^3+2y^2+z^2-z=0$ 确定 z 是 x,y 的函数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解 设 $F(x,y,z)=x^3+2y^2+z^2-z$ ，则

$$F_x(x,y,z)=3x^2, F_z(x,y,z)=2z-1.$$

所以, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{3x^2}{2z-1}$.

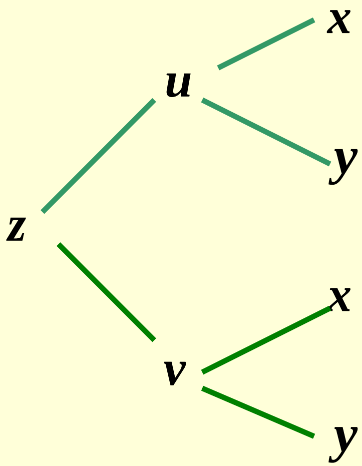
4、设 $z = e^{u-2v}$，而 $u = y\sin x, v = x\cos y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^{u-2v} y\cos x + e^{u-2v}(-2)\cos y$$

$$= e^{y\sin x - 2x\cos y}(y\cos x - 2\cos y).$$



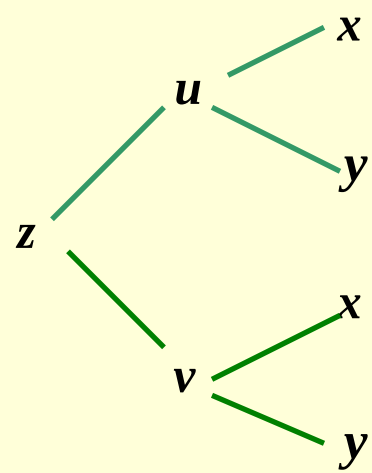
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= e^{u-2v}\sin x + e^{u-2v}(-2)x(-\sin y)$$

$$= e^{y\sin x - 2x\cos y}(\sin x + 2x\sin y).$$

5、设 $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，$f$具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 设 $z=f(u,v),u=xy,v=\dfrac{y}{x}$,则



$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'-\frac{y}{x^2}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}\left(xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)$$

$$=f_1'-\frac{1}{x^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''.$$

6、求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解　令 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{或} x=-3 \\ y=0 \text{或} y=2 \end{cases}$

得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

又 $f_{xx}(x,y)=6x+6$, $f_{xy}(x,y)=0$, $f_{yy}(x,y)=-6y+6$,

（1）在点（1，0）处，

$$f_{xx}\cdot f_{yy}-[f_{xy}]^2=12\cdot 6=72>0,$$

且 $f_{xx}=12>0$,

所以，$f(1,0)=-5$ 为函数的极小值。

6、求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值。

解 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1\text{或}\ x=-3 \\ y=0\text{或}\ y=2 \end{cases}$

得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

又 $f_{xx}(x,y)=6x+6$, $f_{xy}(x,y)=0$, $f_{yy}(x,y)=-6y+6$,

（2）在点（1，2）处，

$$f_{xx}\cdot f_{yy}-[f_{xy}]^2=12\cdot(-6)=-72<0,$$

所以，$f(1,2)$不是函数的极值。

6、求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{或} x=-3 \\ y=0 \text{或} y=2 \end{cases}$

得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2).$

又 $f_{xx}(x,y)=6x+6$, $f_{xy}(x,y)=0$, $f_{yy}(x,y)=-6y+6$,

（3）在点（−3，0）处，

$$f_{xx}\cdot f_{yy}-[f_{xy}]^2=-12\cdot 6=-72<0,$$

所以，$f(-3,0)$ 不是函数的极值。

6、求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{或} x=-3 \\ y=0 \text{或} y=2 \end{cases}$

得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

又 $f_{xx}(x,y)=6x+6$, $f_{xy}(x,y)=0$, $f_{yy}(x,y)=-6y+6$,

（4）在点（−3, 2）处，

$$f_{xx}\cdot f_{yy}-[f_{xy}]^2=-12\cdot(-6)=72>0,$$

且 $f_{xx}=-12<0$,

所以，$f(-3,2)=31$ 为函数的极大值。

7、求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点(1, 2, 3)处的切平面和法线方程。

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，则

$$n\big|_{(1,2,3)}=\{F_x,F_y,F_z\}\big|_{(1,2,3)}=\{2x,2y,2z\}\big|_{(1,2,3)}=\{2,4,6\}$$

所以，切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$$

即 $x+2y+3z-14=0.$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}.$

8、要做一个容积为 $2m^3$ 的无盖长方体水箱，问怎样选取长，宽，高，才能使得用料最省。

解 设长，宽，高为 x, y, z ，表面积为 S，则

由题设知 $2 = xyz$ ， $\Longrightarrow$ $z = \dfrac{2}{xy}$

因此，$S = S(x, y) = xy + 2(x + y)z = xy + 4\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

令 $\begin{cases} S_x = y - \dfrac{4}{x^2} = 0, \\ S_y = x - \dfrac{4}{y^2} = 0, \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $x = y = \sqrt[3]{4}.$

此时， $z = \dfrac{V}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}.$ 用料最省。