单元自测题12章：无穷级数

一、填空题：

1、函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的幂级数展开式是 $\underline{\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad}$

2、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 在（-1,1]上的和函数是________________

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x x^{n-1}dx=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=ln(1+x)$$

3、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域为 $\underline{\quad [0,6) \quad}$

二、选择题：

1、若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ B

(A)收敛;（B)发散；（C)条件收敛;（D）绝对收敛.

2、下列级数发散的是 D

$(A)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;（B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$;

（C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$;（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$.

3、下列级数绝对收敛的　是　A

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{n}};\ (B)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n};$$

$$(C)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n};\ (D)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n^{2}}}.$$

4、下列级数收敛的是　B

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)};\ (B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln(1+n)};$$

$$(C)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{2n+1};\ (D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}.$$

5、下列级数中条件收敛的是 **B**

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{3})^n;(B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}};$$

$$(C)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1};(D)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5n^3}}.$$

6、如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列结论不成 立的是

B

$$(A)\lim_{n\to\infty}u_n=0;(B)\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\text{收敛};$$

$$(C)\sum_{n=1}^{\infty}ku_n(k\text{为常数})\text{收敛};(D)\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})\text{收敛}.$$

7、交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ C

(A)绝对收敛;(B)发散;

(C)条件收敛;(D）敛散性不能判定.

8、设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在$x=2$处收敛，则在$x=-1$处

(A)绝对收敛;(B)发散;

(C)条件收敛;(D）敛散性不能判定.

A

(定理：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在$x=x_0$点收敛，

则对满足 $|x|<|x_0|$ 的x 幂级数绝对收敛.）

9、$f(x)=x^2e^{x^2}$在（$-\infty,+\infty$）内展开成 x的幂级数是　　C

$$(A)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};\ (B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!};$$

$$(C)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{n!};\ (D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

三、判断下列正项级数收敛或发散。

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$; 发散

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n+3)}$; 发散

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$; 收敛

4、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^{n}}{2^{n}}$. 收敛

四、判断以下任意项级 数的敛散性，收敛时要 说明条件收敛或绝对收敛；（要写出 详细的判断过程）

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{n}{2^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n}=\frac{1}{2}<1,$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$收敛，从而原级数绝对 收敛。

2、$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\cdots$

解　该级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$，加绝对值后级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$发散。原级数为交错级数　,且

$$u_n=\frac{n}{n^2+1}\geq\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^2}>\frac{n+1}{(n+1)^2+1}=u_{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$，由莱布尼兹判别法，级数为条件收敛。

五、求下列幂级数的收敛半径和收敛域

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^n$；解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{3^n}=3\Rightarrow R=\frac{1}{3}$

当$x=\frac{1}{3}$时级数发散 ;当$x=-\frac{1}{3}$时级数收敛 ,$\therefore$ 收敛域为$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

2、$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^n}$;

解：$\because\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0\Rightarrow R=\infty$ $\therefore$收敛域为$(-\infty,+\infty)$

3、$\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$. 解：$\because R=0$,$\therefore$收敛域为 $\{x\mid x=0\}$

六、将函数 $f(x)=-2x$，$(-\pi \le x \le \pi)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶级数.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

解: 由于 $f(x)=-2x$ 是奇函数, 故 $a_n=0$, $n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-2x)\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\left(x\cos nx-\frac{1}{n}\sin x\right)\right]_{-\pi}^{\pi}=(-1)^n\frac{4}{n}$$

$$\therefore f(x)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$$