

《高等数学》单元自测题

第三章 微分中值定理与导数的应用

专业_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一、填空题:

1. $f(x) = x\sqrt{3-x}$ 在 $[0,3]$ 上是否满足罗尔定理条件_____, 若满足, 则 $\xi =$ _____.

2. $f(x) = x^4$ 在 $[1,2]$ 上是否满足拉格朗日中值定理条件_____, 若满足, 则 $\xi =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x-2} = 8$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

4. 已知点 $(2,5)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

二、单项选择题

1. 罗尔定理的三个条件: 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a) = f(b)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$ 的().

(A) 必要条件; (B) 充分条件; (C) 充分必要条件; (D) 既非充分也非必要条件.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$ ()

(A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) 不存在.

3. $y = x^2 + 12x + 1$ 在区间 $(-6, +\infty)$ 内().

(A) 凸增; (B) 凸减; (C) 凹增; (D) 凹减.

4. 曲线 $y = 4 - \sqrt[3]{x-1}$ 的拐点是().

(A) $(1, 4)$; (B) $(2, 3)$; (C) $(9, 2)$; (D) $(0, 5)$.

5. 下面结论正确的是().

(A) 驻点一定是极值点; (B) 可导函数的极值点一定是驻点;

(C) 函数的不可导点一定是极值点; (D) 函数的极大值一定大于极小值.

三、计算下列各题:

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x \sin^2 x}$ 。

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}]$ 。

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x$ 。

4. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctan x)^x$ 。

四、应用题：

1. 确定函数 $y = 2x^2 e^{-x}$ 的单调区间.

2. 求曲线 $y = x^2 \ln x$ 的凹、凸区间与拐点.

3. 求 $y = x^3 - 12x + 5$ 在 $[0, 5]$ 上的最大值和最小值.

4. 欲做一个容积为 72 m^3 的长方体带盖箱子, 箱子底长 $x\text{ m}$ 与宽 $y\text{ m}$ 的比为 $1:2$, 问长方体带盖箱子底长 x 、宽 y 及高 h 各为多少时, 才能使箱子用料最省?

五、证明题：

1. 设 $b > a > 0$ ，证明：
$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}。$$

2. 证明：当 $x > 0$ 时，
$$\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2。$$

3. 证明：方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根。