基本等值式

1.双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

2.幂等律 $A \Leftrightarrow A \vee A$, $A \Leftrightarrow A \wedge A$

3.交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

4.结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

5.分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ （∨对∧的分配律）

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ （∧对∨的分配律）

6.德·摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

7.吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

8.零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

9.同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$，$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

10.排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

11.矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

12.蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

13.等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

14.假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

15.等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

16.归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

求给定公式范式的步骤

(1)消去联结词→、↔(若存在)。

(2)否定号的消去(利用双重否定律)或内移(利用德摩根律)。

(3)利用分配律：利用∧对∨的分配律求析取范式，∨对∧的分配律求合取范式。

推理定律--重言蕴含式

(1) $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律

(2) $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律

(3) $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理

(4) $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

(5) $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

(6) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ 假言三段论

(7) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论

(8) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (A \vee \neg A) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)

(9) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

设个体域为有限集 D={a1,a2,…,an},则有

（1）$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a1)\wedge A(a2)\wedge\ldots\wedge A(an)$

（2）$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a1)\vee A(a2)\vee\ldots\vee A(an)$

设 A(x)是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，则

（1）$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

（2）$\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

设 A(x)是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，B 中不含 x 的出现，则

（1） $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

$\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

$\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

（2） $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

$\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

$\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

设 A(x)，B(x)是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，则

（1）$\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

（2）$\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee \exists xB(x)$

全称量词“∀”对“∨”无分配律。

存在量词“∃”对“∧”无分配律。

UI 规则。 $\dfrac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)}$ 或 $\dfrac{\forall xA(x)}{\therefore A(c)}$

UG 规则。 $\dfrac{A(y)}{\therefore \forall xA(x)}$

EG 规则。 $\dfrac{A(c)}{\therefore \exists xA(x)}$

EI 规则。 $\dfrac{\exists xA(x)}{\therefore A(c)}$

$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$ 、

$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$

幂集　$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$

对称差集　$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

绝对补集　$\sim A=\{x|x\notin A\}$

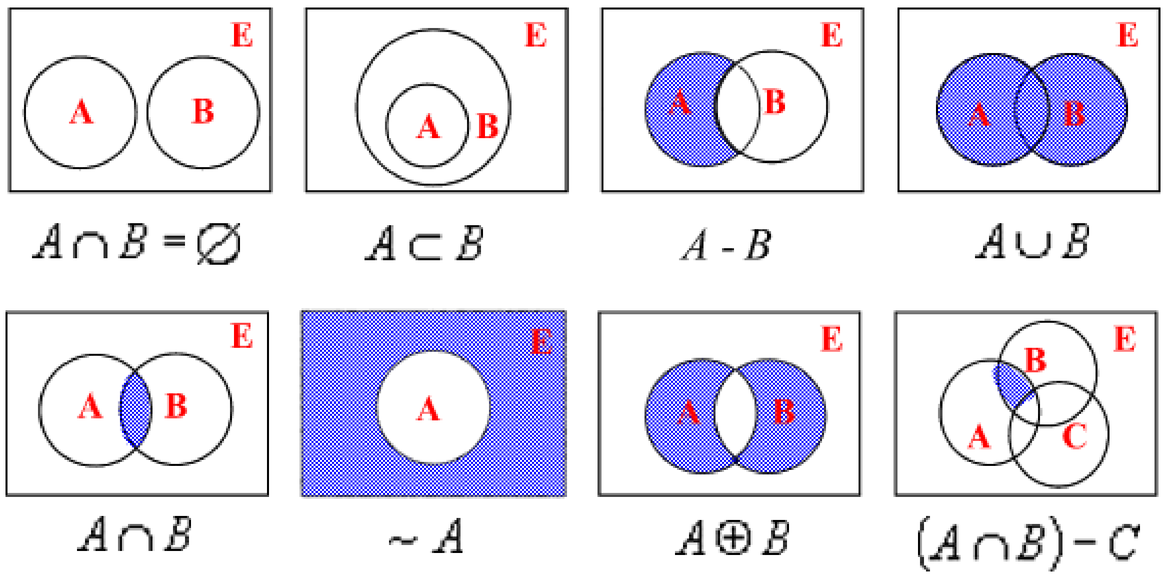


图6.2

广义并　$\cup A=\{x\mid\exists z(z\in A\wedge x\in z)\}$　　广义交　$\cap A=\{x\mid\forall z(z\in A\rightarrow x\in z)\}$

设　$A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,e,f\}\}$　　$B=\{\{a\}\}$　　$C=\{a,\{c,d\}\}$

则　$\cup A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$\cup B=\{a\}$

$\cup C=a\cup\{c,d\}$

$\cup\varnothing=\varnothing$

$\cap A=\{a\}$

$\cap B=\{a\}$

$\cap C=a\cap\{c,d\}$

集合恒等式

幂等律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交换律	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
零律	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$

排中律 $A\cup\sim A=E$

矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$　　$A\cap(A\cup B)=A$

德摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$　　$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$　　$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$

$\sim\varnothing=E$　　$\sim E=\varnothing$

双重否定律 $\sim(\sim A)=A$

集合运算性质的一些重要结果

$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$

$A-B\subseteq A$

$A-B=A\cap\sim B$

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$A\oplus B=B\oplus A$

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

$A\varnothing\oplus=A$

$A\oplus A=\varnothing$

$A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

对偶(dual)式：一个集合表达式，如果只含有∩、∪、～、∅、E、=、⊆、⊇，那么同时把∩与∪互换，把∅与E互换，把⊆与⊇互换，得到式子称为原式的对偶式。

有序对<x,y>具有以下性质：（1）当 $x\neq y$ 时，$<x,y>\neq<y,x>$。

（2）$<x,y>=<u,v>$ 的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$。

笛卡儿积的符号化表示为 $A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$

如果 $|A|=m,|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$。

笛卡儿积的运算性质

(1)对任意集合A，根据定义有

$A\times\varnothing=\varnothing,\ \varnothing\times A=\varnothing$

(2)一般的说，笛卡儿积运算不满足交换律，即

$A\times B\neq B\times A$　　(当 $A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B$ 时)

(3)笛卡儿积运算不满足结合律，即

$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$　(当 $A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing$ 时)

(4)笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律，即

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$　　$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$　　$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

(5)$A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

常用的关系

对任意集合A，定义

全域关系 $EA=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$

恒等关系 $IA=\{<x,x>|x\in A\}$

空关系 $\varnothing$

小于或等于关系：LA={<x,y>|x,y∈A∧x≤y}，其中 A⊆R。

整除关系：DB={<x,y>|x,y∈B∧x 整除 y}，其中 A⊆Z* ，Z*是非零整数集

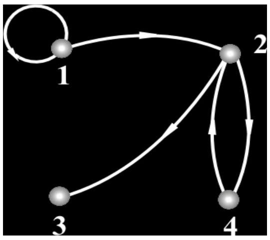
包含关系：R⊆={<x,y>|x,y∈A∧x⊆y}，其中 A 是集合族。

关系矩阵和关系图

设 A={1,2,3,4}，R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>}，

则 R 的关系矩阵和关系图分别是

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



定义域 dom R ＝ {x | ∃y(<x,y>∈R)}

值域 ran R＝{y | ∃x(<x,y>∈R)}

域 fld R＝dom R ∪ ran R

例 求 R={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>}的定义域、值域和域。

解答 dom R＝{1,2,4} ran R＝{2,3,4} fld R＝{1,2,3,4}

逆 R-1＝{<x,y>|<y,x>∈R}

右复合 F°G＝{<x,y> | ∃t(<x,t>∈F∧<t,y>∈G)}

限制 R↾A={<x,y>|xRy∧x∈A}

像 R[A]=ran(R↾A)

例 设 R＝{<1,2>，<1,3>，<2,2>，<2,4>，<3,2>}

R↾{1}＝{<1,2>，<1,3>} R↾∅ ＝∅ R↾{2,3}＝{<2,2>，<2,4>}，<3,2>}

R[{1}]＝{2,3} R[∅] ＝∅ R[{3}]＝{2}

设 F 是任意的关系，则

(1)(F-1)-1＝F

(2)dom F-1＝ran F，ran F-1＝dom F

设 F，G，H 是任意的关系，则

(1)(F°G)°H＝F°(G°H)

(2)(F°G)-1＝G-1 ° F-1

设 R 为 A 上的关系，则 R ° IA＝IA° R＝R

设 F，G，H 是任意的关系，则

(1) F°(G∪H)＝F°G∪F°H

(2) (G∪H)°F＝G°F∪H°F

(3) F°(G∩H)⊆F°G∩F°H

(4) (G∩H)°F⊆G°F∩H°F

设 F 为关系，A,B 为集合，则

(1) F↾(A∪B)=F↾A∪F↾B

(2) F[A∪B]=F[A]∪F[B]

(3) F↾(A∩B)=F↾A∩F↾B

(4) F[A∩B]⊂F[A]∩F[B]

关系的幂运算

设 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为：

（1） R0＝{<x,x>|x∈A}＝IA

（2） Rn+1＝Rn°R

幂运算的性质

设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t,使得 Rs=Rt。

设 R 是 A 上的关系，m,n∈N，则

(1)Rm°Rn＝Rm+n　　　　(2)(Rm)n＝Rmn

设 R 是 A 上的关系，若存在自然数 s,t(s<t)使得 Rs=Rt，则

(1) 对任何 k∈N 有 Rs+k=Rt+k

(2) 对任何 k,i∈N 有 Rs+kp+i=Rs+i，其中 p=t-s

(3) 令 S={R0，R1，…，Rt-1}，则对于任意的 q∈N 有 Rq∈S

自反 ∀x(x∈A→<x,x>∈R)，

反自反 ∀x(x∈A→<x,x>∉R)，

对称 ∀x∀y(x,y∈A∧<x,y>∈R→<y,x>∈R)

反对称 ∀x∀y(x,y∈A∧<x,y>∈R∧<y,x>∈R→x=y)，

传递 ∀x∀y∀z(x,y,z∈A∧<x,y>∈R∧<y,z>∈R→<x,z>∈R)

关系性质的等价描述

设 R 为 A 上的关系，则

（1）R 在 A 上自反当且仅当 IA⊆R

（2）R 在 A 上反自反当且仅当 R∩IA＝∅

（3）R 在 A 上对称当且仅当 R＝R-1

（4）R 在 A 上反对称当且仅当 R∩R-1⊆IA

（5）R 在 A 上传递当且仅当 R°R⊆R

(1)若 R1，R2 是自反的和对称的，则 R1∪R2 也是自反的和对称的。

(2)若 R1 和 R2 是传递的，则 R1∩R2 也是传递的。

关系性质的特点

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$，且 $i \neq j$，则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中 1 所在位置，M 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

关系的性质和运算之间的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

闭包的构造方法

设 R 为 A 上的关系，则有

（1）自反闭包 $r(R)=R \cup R^0$

（2）对称闭包 $s(R)=R \cup R^{-1}$

（3）$t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

关系性质与闭包运算之间的联系

设 R 是非空集合 A 上的关系，

（1）若 R 是自反的，则 s(R)与 t(R)也是自反的。

（2）若 R 是对称的，则 r(R)与 t(R)也是对称的。

（3）若 R 是传递的，则 r(R)是传递的。

等价类的性质

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

（1）$\forall x\in A$，$[x]$是 A 的非空子集。

（2）$\forall x,y\in A$，如果 xRy，则$[x]=[y]$。

（3）$\forall x,y\in A$，如果$\langle x,y\rangle\notin R$，则$[x]$与$[y]$不交。

（4）$\cup\{[x]|x\in A\}=A$。

偏序集中的特殊元素

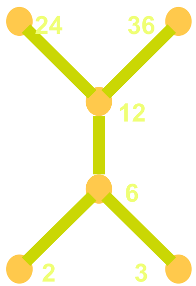
设$\langle A,\leqslant\rangle$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$。

（1）若$\forall x(x\in B\rightarrow y\leqslant x)$成立，则称 y 为 B 的最小元。

（2）若$\forall x(x\in B\rightarrow x\leqslant y)$成立，则称 y 为 B 的最大元。

（3）若$\forall x(x\in B\wedge x\leqslant y\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极小元。

（4）若$\forall x(x\in B\wedge y\leqslant x\rightarrow x=y)$成立，则称 y 为 B 的极大元



B	最大元	最小元	极大元	极小元
{2,3,6,12,24,36}	无	无	24，36	2,3
{6,12}	12	6	12	6
{2,3,6}	6	无	6	2,3
{6}	6	6	6	6

B	上界	下界	上确界	下确界
{2,3,6,12,24,36}	无	无	无	无
{6,12}	12,24,36	2,3,6	12	6
{2,3,6}	6,12,24,36	无	6	无
{6}	6,12,24,36,	2,3,6,	6	6

函数相等

由定义可知，两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件：

（1）dom F＝dom G

（2）$\forall x\in$ dom F＝dom G，都有 $F(x)=G(x)$

所有从 A 到 B 的函数的集合记作 BA，读作“B 上 A”，符号化表示为 BA＝{*f*|*f*：A→B} 。

例：设 A＝{1,2,3}，B＝{a,b}，求 BA。

BA＝{ *f*0, *f*1, *f*2, *f*3, *f*4, *f*5, *f*6, *f*7} 。其中

*f*0＝{<1,a>,<2,a>,<3,a>}　　*f*1＝{<1,a>,<2,a>,<3,b>}

*f*2＝{<1,a>,<2,b>,<3,a>}　　*f*3＝{<1,a>,<2,b>,<3,b>}

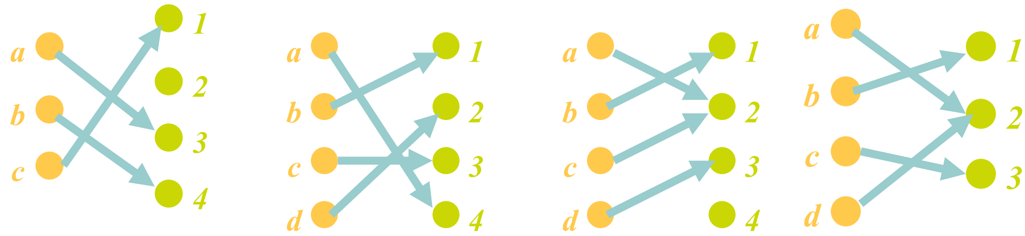
*f*4＝{<1,b>,<2,a>,<3,a>}　　*f*5＝{<1,b>,<2,a>,<3,b>}

*f*6＝{<1,b>,<2,b>,<3,a>}　　*f*7＝{<1,b>,<2,b>,<3,b>}

设 $f:A\rightarrow B$，（1）若 ran $f=B$，则称 $f:A\rightarrow B$ 是满射(*surjection*)的。

（2）若$\forall y\in$ran f 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$，则称 $f:A\rightarrow B$ 是单射(*injection*)的。

（3）若 f 既是满射又是单射的，则称 $f{:}A\rightarrow B$ 是双射(*bijection*)



单射　　　　　　　　双射　　　　　　　　函数　　　　　　　满射

例：判断下面函数是否为单射、满射、双射的，为什么?

(1) f：$R\rightarrow R$，$f(x)= -x2+2x-1$　　　　(2) f：$Z+\rightarrow R$，$f(x)=\ln x$，$Z+$为正整数集

(3) f：$R\rightarrow Z$，$f(x)=\lfloor x\rfloor$　　　　(4) f：$R\rightarrow R$，$f(x)=2x+1$。

解（1）f 在 x=1 取得极大值 0。既不是单射也不是满射的。

（2）f 是单调上升的，是单射的，但不满射。ran f=$\{ln1, ln2, ...\}$。

（3）f 是满射的， 但不是单射的，例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$。

（4）f 是满射、单射、双射的，因为它是单调函数并且 ran f=R。

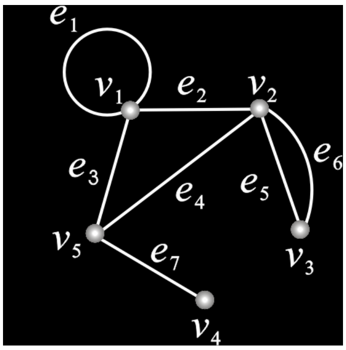
例：(1) 给定无向图 G＝<V,E>，其中 V＝{v1,v2,v3,v4,v5}，

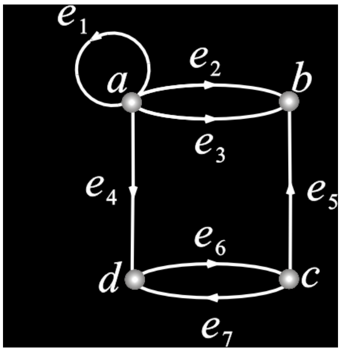
E={(v1,v1),(v1,v2),(v2,v3),(v2,v3),(v2,v5),(v1,v5),(v4,v5)}.

(2) 给定有向图 D=<V,E>，其中 V＝{a,b,c,d}，

E＝{<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,<c,d>,<d,c>,<c,b>}。

画出 G 与 D 的图形。





邻域：NG(v1) ＝{v2，v5}

闭邻域：NG(v1) ＝{v1，v2，v5}

关联集：IG(v1) ＝{e1，e2，e3}

d(v1)＝4(注意，环提供 2 度)，

△＝4， δ＝1，

v4 是悬挂顶点，e7 是悬挂边。

度数列为 4,4,2,1,3。

后继元集：Γ+D(d) ＝{c}

先驱元集：Γ-D(d) ＝{a，c}

邻域： ND(d) ＝{a，c}

闭邻域：ND(d) ＝{a，c，d}

出度：d+(a)＝4，入度：d-(a)＝1

(环 e1 提供出度 1，提供入度 1)，

d(a)＝4+1＝5。△＝5， δ＝3，

△+＝4 (在 a 点达到)

δ+＝0(在 b 点达到)

△-＝3(在 b 点达到)

δ-＝1(在 a 和 c 点达到)

按字母顺序，度数列：5,3,3,3

出度列：4,0,2,1　　　入度列：1,3,1,2

设 $G=<V,E>$是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

（1）G 是树。（2）G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径。

（3）G 中无回路且 $m=n-1$。（4）G 是连通的且 $m=n-1$。

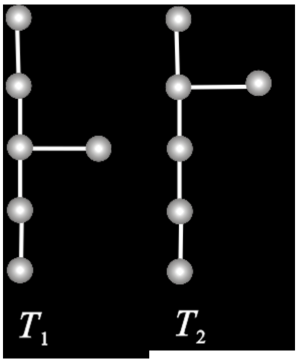
（5）G 是连通的且 G 中任何边均为桥。

（6）G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

例题 已知无向树 T 中，有 1 个 3 度顶点，2 个 2 度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树。

解答 设有 x 片树叶，于是结点总数

$$n=1+2+x=3+x$$



由握手定理和树的性质 $m=n-1$ 可知，

$$2m=2(n-1)=2\times(2+x)$$
$$=1\times3+2\times2+x$$

解出 $x=3$，故 T 有 3 片树叶。

故 T 的度数应为 1、1、1、2、2、3。

求最小生成树的算法（避圈法(Kruskal)）

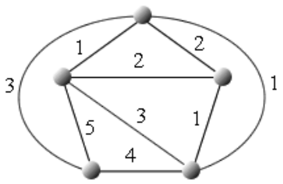
(1)设 n 阶无向连通带权图 $G=<V,E,W>$有 m 条边。不妨设 G 中没有环（否则，可以将所有的环先删去），将 m 条边按权从小到大排序：$e1,e2,\ldots,em$。

(2)取 $e1$ 在 T 中。

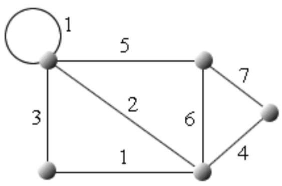
(3)依次检查 $e2,\ldots,em$ ，若 $ej(j\geqslant2)$与已在 T 中的边不构成回路，取 ej 也在 T 中，否则弃去 ej。

(4)算法停止时得到的 T 为 G 的最小生成树为止。

例：求下图所示两个图中的最小生成树。



(1)



(2)

$W(T1)=6$ $W(T2)=12$

T 是 $n(n\geqslant2)$阶有向树，

(1) T 为根树— T 中有一个顶点入度为 0，其余顶点的入度均为 1

(2) 树根——入度为 0 的顶点

(3) 树叶——入度为 1，出度为 0 的顶点

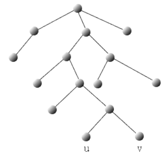
(4) 内点——入度为 1，出度不为 0 的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

(6) 顶点 v 的层数——从树根到 v 的通路长度

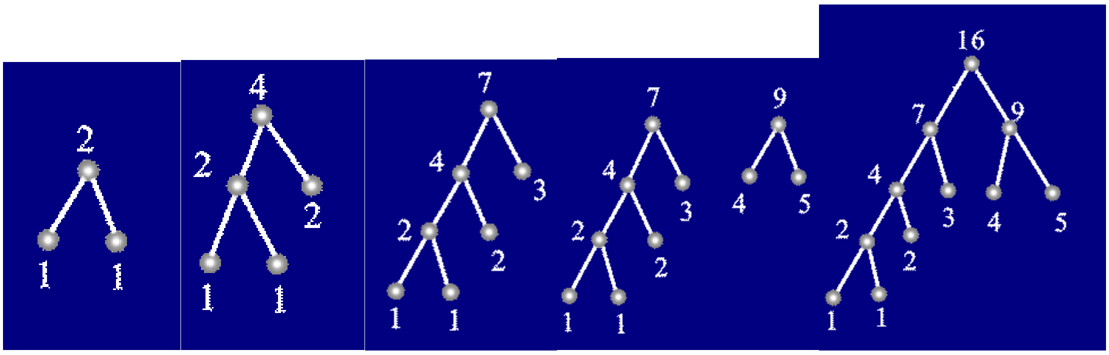
(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

根树的画法：树根放上方，省去所有有向边上的箭头。

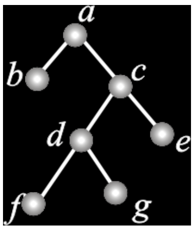


树叶——8 片　　内点——6 个　　分支点——7 个　　高度——5

求带权为 1、1、2、3、4、5 的最优树。



$W(T)$=38



中序行遍法：$b\ \underline{a}\ (f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e$　　前序行遍法：$\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$

后序行遍法：$b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$

├ 断定符（公式在 L 中可证）
╞ 满足符（公式在 E 上有效，公式在 E 上可满足）
┐ 命题的“非”运算
∧ 命题的“合取”（“与”）运算
∨ 命题的“析取”（“或”，“可兼或”）运算
→ 命题的“条件”运算
↔ 命题的“双条件”运算的
A<=>B 命题 A 与 B 等价关系
A=>B 命题 A 与 B 的蕴涵关系
A* 公式 A 的对偶公式
wff 合式公式
iff 当且仅当
↑ 命题的“与非” 运算（ “与非门” ）
↓ 命题的“或非”运算（ “或非门” ）
□ 模态词“必然”
◇ 模态词“可能”
φ 空集
∈ 属于（∉不属于）
P（A） 集合 A 的幂集
|A| 集合 A 的点数
R^2=R○R [R^n=R^(n-1)○R] 关系 R 的“复合”
ℵ 阿列夫
⊆ 包含
⊂（或下面加 ≠） 真包含
∪ 集合的并运算
∩ 集合的交运算
-（~） 集合的差运算
〡 限制
[X](右下角 R) 集合关于关系 R 的等价类
A/ R 集合 A 上关于 R 的商集
[a] 元素 a 产生的循环群
I (i 大写) 环，理想
Z/(n) 模 n 的同余类集合
r(R) 关系 R 的自反闭包
s(R) 关系 的对称闭包
CP 命题演绎的定理（CP 规则）
EG 存在推广规则（存在量词引入规则）
ES 存在量词特指规则（存在量词消去规则）
UG 全称推广规则（全称量词引入规则）
US 全称特指规则（全称量词消去规则）

R 关系 r 相容关系
R○S 关系 与关系 的复合
domf 函数 的定义域（前域）
ranf 函数 的值域
f:X→Y f 是 X 到 Y 的函数
GCD(x,y) x,y 最大公约数
LCM(x,y) x,y 最小公倍数
aH(Ha) H 关于 a 的左（右）陪集
Ker(f) 同态映射 f 的核（或称 f 同态核）
[1，n] 1 到 n 的整数集合
d(u,v) 点 u 与点 v 间的距离
d(v) 点 v 的度数 G=(V,E) 点集为 V,边集为 E 的图
W(G) 图 G 的连通分支数
k(G) 图 G 的点连通度
△（G) 图 G 的最大点度
A(G) 图 G 的邻接矩阵
P(G) 图 G 的可达矩阵
M(G) 图 G 的关联矩阵
C 复数集
N 自然数集（包含 0 在内）
N* 正自然数集
P 素数集
Q 有理数集
R 实数集
Z 整数集
Set 集范畴
Top 拓扑空间范畴
Ab 交换群范畴
Grp 群范畴
Mon 单元半群范畴
Ring 有单位元的（结合）环范畴
Rng 环范畴
CRng 交换环范畴
R-mod 环 R 的左模范畴
mod-R 环 R 的右模范畴
Field 域范畴
Poset 偏序集范畴

<u>命题</u>：称能判断真假的陈述句为命题。

<u>命题公式</u>：若在复合命题中，p、q、r 等不仅可以代表命题常项，还可以代表命题变项，这样的复合命题形式称为命题公式。

<u>命题的赋值</u>：设 A 为一命题公式，p ,p ,⋯,p 为出现在 A 中的所有命题变项。给 p ,p ,⋯,p 指定一组真值，称为对 A 的一个**赋值**或**解释**。若指定的一组值使 A 的值为真，则称**成真赋值**。

<u>真值表</u>：含 n（n≥1）个命题变项的命题公式，共有 2^n 组赋值。将命题公式 A 在所有赋值下的取值情况列成表，称为 A 的真值表。

<u>命题公式的类型</u>：（1）若 A 在它的各种赋值下均取值为真，则称 A 为重**言式**或**永真式**。

（2）若 A 在它的赋值下取值均为假，则称 A 为矛盾式或**永假式**。

（3）若 A 至少存在一组赋值是成真赋值，则 A 是**可满足式**。

<u>主析取范式</u>：设命题公式 A 中含 n 个命题变项，如果 A 得析取范式中的简单合取式全是极小项，则称该析取范式为 A 的主析取范式。

<u>主合取范式</u>：设命题公式 A 中含 n 个命题变项，如果 A 得析取范式中的简单合析式全是极大项，则称该析取范式为 A 的主析取范式。

<u>命题的等值式</u>：设 A、B 为两命题公式，若等价式 A↔B 是重言式，则称 A 与 B 是**等值的**，记作 A<=>B。

<u>约束变元和自由变元</u>：在合式公式∀*x* A 和 ∃*x* A 中，称 x 为**指导变项**，称 A 为相应量词的**辖域**，x 称为**约束变元**，x 的出现称为**约束出现**，A 中其他出现称为**自由出现**（**自由变元**）。

<u>一阶逻辑等值式</u>：设 A，B 是一阶逻辑中任意的两公式，若 A↔B 为逻辑有效式，则称 A 与 B 是等值的，记作 A<=>B，称 A<=>B 为等值式。

<u>前束范式</u>：设 A 为一谓词公式，若 A 具有如下形式 Q*1*x*1*Q*2*x*2*Q*k*⋯x*k*B，称 A 为前束范式。

<u>集合的基本运算</u>：并、 交、差、相对补和对称差运算。

<u>笛卡尔积</u>：设 A 和 B 为集合，用 A 中元素为第一元素，用 B 中元素为第二元素构成有序对组成的集合称为 A 和 B 的笛卡尔积，记为 A×B。

<u>二元关系</u>：如果一个集合 R 为空集或者它的元素都是有序对，则称集合 R 是一个二元关系。

<u>特殊关系</u>：(1)、**空关系**：*Φ* （2）**全域关系**：EA={<x, y> | x∈A ∧ y∈A }= A×A

（3）**恒等关系**：IA={<x, x> | x∈A}

（4）**小于等于关系**：LA={<x, y>| x, y∈A∧x≤y∈A },A⊆R

（5）**整除关系**： R⊆ ={<x, y>| x，y∈ ψ ∧ x⊆y} , ψ 是集合族

<u>二元关系的运算</u>：**设 *R* 是二元关系，**

（1）*R* 中所有有序对的第一元素构成的集合称为 *R* 的**定义域 dom*R*** = { x | ∃y（<*x* , *y*>∈*R*）}

（2）*R* 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 *R* 的**值域 ranR** = {*y* | ∃*x*（<*x* , *y*>∈*R*）}

（3）*R* 的定义域和值域的并集称为 *R* 的**域 fld*R***= dom*R* ∪ran*R*

<u>二元关系的性质</u>：自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性。

<u>等价关系</u>：如果集合 *A* 上的二元关系 *R* 是自反的，对称的和传递的，那么称 *R* 是**等价关**系。设 *R* 是 *A* 上的等价关系，*x* , *y* 是 *A* 的任意元素，记作 *x*～*y*。

<u>等价类</u>：设 *R* 是 *A* 上的等价关系，对任意的∀*x*∈*A*，令[*x*]R={ *y* | *y*∈*A* ∧ *x R y* }，称[*x*]R 为 ***x* 关于 *R* 的等价类**。

<u>偏序关系</u>：设 *R* 是集合 *A* 上的二元关系，如果 *R* 是自反的，反对称的和传递的，那么称 *R* 为 *A* 上的**偏序**，记作≤；称序偶< *A* ,*R* >为**偏序集合**。

<u>函数的性质</u>：**设 *f*: *A*→*B*，**

（1）若 ran*f* = B，则称 *f* 是**满射**（**到上**）的。

（2）若 ∀*y*∈ ran*f* 都存在唯一的 *x* ∈*A* 使得 f(*x*)=*y*,则称 *f* 是**单射**（**— —**）的。

（3）若 *f* 既是满射又是单射的，则称 *f* 是**双射**（**— —到上**）的。

无向图：是一个有序的二元组<V, E>，记作 G，其中：
(1) $V\neq\Phi$称为顶点集，其元素称为**顶点**或**结点**。
(2) E 为边集，它是无序积 $V\&V$ 的多重子集，其元素称为**无向边**，简称**边**。
有向图：是一个有序的二元组<V,E>,记作 D,其中
(1) V 同无向图。 (2) E 为边集，它是笛卡尔积 $V\times V$ 的多重子集，其元素称为**有向边**。
设 G=<V,E>是一个无向图或有向图。
有限图：若 V, E 是有限集，则称 G 为有限图。
n 阶图：若$|V|=n$，称 G 为 n 阶图。
零图：若$|E|=0$，称 G 为零图,当$|V|=1$ 时，称 G 为平凡图。
基图：将有向图变为无向图得到的新图，称为有向图的基图。
图的同构：在用图形表示图时，由于顶点的位置不同，边的形状不同，同一个事物之间的关系可以用不同的图表示，这样的图称为图同构。
带权图：在处理有关图的实际问题时，往往有值的存在，一般这个值成为权值，带权值的图称为带权图或赋权图。
连通图：若无向图是平凡图，或图中任意两个顶点都是连通的，则称 G 是**连通图**。否则称为**非连通图**。设 D 是一个有向图，如果 D 的基图是连通图，则称 D 是**弱连通图**，若 D 中任意两个顶点至少一个可达另一个，则称 D 是**单向连通图**。若 D 中任意两个顶点是相互可达的，则称 D 是**强连通图**。
欧拉图：通过图中所有边一次且仅一次并且通过所有定点的通路（回路），称为**欧拉通路**（**回路**）。存在欧拉回路的图称为欧拉图。
哈密顿图：经过图中每个顶点一次且仅一次的通路（回路），称为哈密顿通路（回路），存在哈密顿回路的图称为哈密顿图。
平面图：一个图 G 如果能以这样的方式画在平面上：出定点处外没有变交叉出现，则称 G 为平面图。画出的没有边交叉出现的图称为 G 的一个**平面嵌入**。
二部图：若无向图 $G=\langle V, E\rangle$ 的顶点集合 V 可以划分成两个子集 $V1$ 和 $V2$（$V1\cap V2=\phi$ ），使 G 中的任何一条边的两个端点分别属于 $V1$ 和 $V2$，则称 G 为二部图（**偶图**）。二部图可记为 $G=<V1, V2, E>$, $V1$ 和 $V2$ 称为互补顶点子集。
树的定义：连通无回路的无向图称为无向树，简称**树**，常用 T 表示树。平凡图称为**平凡树**。若无向图 G 至少有两个连通分支，每个连通都是树，则称 G 为**森林**。在无向图中，悬挂顶点称为**树叶**，度数大于或等于 2 的顶点称为**分支点**。
树的性质：**性质 1**、设 G=<V,E>是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：
（1）G 是树 **（2）**G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径 **（3）**G 中无回路且 m=n-1.
（4）G 是连通的且 m=n-1. **（5）**G 是连通的且 G 中任何边均为桥。 **（6）**G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。
性质 2、设 T 是 n 阶非平凡的无向树，则 T 中至少有两片树叶。
证：设 T 有 x 片树叶，由握手定理及性质 1 可知，$2(n-1)=\sum d(vi)\geq x+2(n-x)$由上式解出 $x\geqslant2$.
最小生成树：设 T 是无向图 G 的子图并且为树，则称 T 为 G 的树。若 T 是 G 的树且为生成子图，则称 T 是 G 的生成树。设 T 是 G 的生成树。$e\in E(G)$，若 $e\in E(T)$，则称 e 为 T 的树枝，否则称 e 为 T 的弦。并称导出子图 $G[E(G)-E(T)]$为 T 的余树，记作 T。
最优二元树：设 2 叉树 T 有 t 片树叶 v1,v2,…,vt，权分别为 w1,w2,…,wt，称 W(t)=wil(vi)为 T 的权，其中 l(vi)是 vi 的层数。在所有有 t 片树叶，带权 w1,w2,…,wt 的 2 叉树中，权最小的 2 叉树称为**最优 2 叉树**。
最佳前缀码：利用 Huffman 算法求最优 2 叉树，由最优 2 叉树产生的前缀码称为最佳前缀码，用最佳前缀码传输对应的各符号能使传输的二进制数位最省。

蕴含式推理

E_1	¬ ¬ p<=>P	E_{12}	R∨(P∧¬ P)<=>R
E_2	P∧Q<=>Q∧P	E_{13}	R ∧(P∨¬ P)<=>R
E_3	P∨Q<=>Q∨P	E_{14}	R∨(P∨¬ P)<=>T
E_4	(P∧Q)∧R<=>P∧(Q∧R)	E_{15}	R∧(P∧¬ P)<=>F
E_5	(P∨Q)∨R<=>P∨(Q∨R)	E_{16}	P→Q<=>¬ P∨Q
E_6	P∧(Q∨R)<=>(P∧Q)∨(P∧R)	E_{17}	¬ (P→Q)<=> P∧¬ Q
E_7	P∨(Q∧R)<=>(P∨Q)∧(P∨R)	E_{18}	P→Q<=>¬ Q→¬ P
E_8	¬ (P∧Q)<=> ¬ P∨¬ Q	E_{19}	P→(Q→R)<=>(P∧Q)→R
E_9	¬ (P∨Q)<=> ¬ P∧¬ Q	E_{20}	P⇆Q<=>(P→Q)∧(Q→P)
E_{10}	P∨P<=>P	E_{21}	P⇆Q<=>(P∧Q)∨(¬ P∧¬ Q)
E_{11}	P∧P<=>P	E_{22}	¬ (P⇆Q) <=> P⇆¬ Q

等值公式表

P∧Q=>P	化简式
P∧Q=>Q	化简式
P=>P∨Q	附加式
¬ P=>P→Q	变形附加式
Q=>P→Q	变形附加式
¬ (P→Q)=>P	变形简化式
¬ (P→Q)=>¬ Q	变形简化式
p∧(P→Q)=>Q	假言推论
¬ Q∧(P→Q)=>¬ P	拒取式
¬ p∧(P∨Q)=>Q	析取三段式
(P→Q) ∧(Q→R)=>P→R	条件三段式
(P⇆Q) ∧(Q⇆R)=>P⇆R	双条件三段式
(P→Q)∧(R→S)∧(P∧R)=>Q→S	合取构造二难
(P→Q)∧(R→S)∧(P∨R)=>Q∨S	析取构造二难
P→Q=>(P∨R) →(Q∨R)	前后附加式
P→Q=>(P∧R) →(Q∧R)	前后附加式

E_{23}	(∃x)((Ax)∨(Bx))<=>(∃x)(Ax)∨(∃x)(Bx)	E_{30}	(∀x)(Ax) →B<=>(∃x) ((Ax)→B)
E_{24}	(∀x)((Ax)∧(Bx))<=>(∀x)(Ax)∧(∀x)(Bx)	E_{31}	(∃x)(Ax) →B<=>(∀x) ((Ax)→B)
E_{25}	¬ (∃x)(Ax)<=>(∀x)¬ (Ax)	E_{32}	A→(∀x)(Bx) <=>(∀x) (A→(Bx))
E_{26}	¬ (∀x)(Ax)<=>(∃x)¬ (Ax)	E_{33}	A→(∃x)(Bx) <=>(∃x) (A→(Bx))
E_{27}	(∀x)(A∨(Bx))<=>A∨(∀x)(Bx)	I_{17}	(∀x)(Ax)∨(∀x)(Bx) =>(∀x)((Ax)∨(Bx))
E_{28}	(∃x)(A∧(Bx))<=>A∧(∃x)(Bx)	I_{18}	(∃x)((Ax)∧(Bx)) =>(∀x)(Ax)∧(∀x)(Bx)
E_{29}	(∃x)((Ax)→(Bx))<=>(∀x)(Ax)→(∃x)(Bx)	I_{19}	(∀x)(Ax)→(∀x)(Bx) =>(∀x)((Ax)→(Bx))

集合恒等式：P61

幂等律：$A \cup A = A$ ； $A \cap A = A$

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ； $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律：$A \cup B = B \cup A$ ； $A \cap B = B \cap A$

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ； $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

同一律：$A \cup \phi = A$ ； $A \cap E = A$

零　律：$A \cup E = A$ ； $A \cap \phi = \phi$

排中律：$A \cup \sim A = E$

矛盾律：$A \cap \sim A = \phi$

吸收律：$A \cap (A \cup B) = A$；$A \cup (A \cap B) = A$

德摩根定律：$A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$；$A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$；$\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$；$\sim\phi = E$；$\sim E = \phi$

双重否定律：$\sim(\sim A) = A$

二元关系的运算：

设 F,G,H 是任意的关系，

（1）$(F^{-1})^{-1} = F$　　（2）$\mathrm{dom}(F^{-1}) = \mathrm{ran}F$ ； $\mathrm{ran}(F^{-1}) = \mathrm{dom}F$

（3）$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$　（4）$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

设 *R* 是 *A* 上的关系（幂运算）

（1）$R^o = \{<x, x> \mid x \in A\}$　（2）$R^n = R^{n-1} \circ R$，$n \geqslant 1$　（3）$R \circ R^o = R^o \circ R = R$

图的矩阵表示：

（1）无向图的关联矩阵：设无向图 $G=<V,E>$, $V=\{v1,v2,\ldots,vn\}$, $E=\{e1,e2,\ldots,em\}$，令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边的关联次数，则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵。记为 $M(G)$。

（2）有向图的关联矩阵：设无向图 $D=<V,E>$, $V=\{v1,v2,\ldots,vn\}$, $E=\{e1,e2,\ldots,em\}$，

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的关联矩阵。记为 $M(D)$ 。

离散数学笔记

第一章 命题逻辑

合取
析取
定义 1. 1.3 否定：当某个命题为真时，其否定为假，当某个命题为假时，其否定为真
定义 1. 1.4 条件联结词，表示“如果… …那么……”形式的语句
定义 1. 1.5 双条件联结词，表示“当且仅当”形式的语句

定义 1.2.1 **合式公式**
(1)单个命题变元、命题常元为合式公式，称为原子公式。
(2)若某个字符串 A 是合式公式，则 $\neg A$、(A)也是合式公式。
(3)若 A、B 是合式公式，则 $A \wedge B$、$A \vee B$、$A \rightarrow B$、$A \leftrightarrow B$ 是合式公式。
(4)有限次使用(2)~(3)形成的字符串均为合式公式。

1.3 等值式

(1)$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ 条件式的等值式、原命题$\Leftrightarrow$逆否命题
(2)$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ 双条件的等值式
(3)$p \Leftrightarrow \neg\neg p$ 双重否定律
(4)$p \Leftrightarrow p \wedge p \Leftrightarrow p \vee p$ 幂等律
(5)$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$，$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ 交换律
(6) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ 结合律
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
(7) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 分配律
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(8) $p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$ 吸收律(多吃少)
$p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p$
(9) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ 德摩律
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

注意：符号“$\Leftrightarrow$”不是一个联结词，它表明两个公式的值相等。符号“$\leftrightarrow$”是联结词，表示“当且仅当”、“充分必要”。

定理 1.3.1 置换规则：当将公式 A 中的 B 换成 C 得到公式 D 后，若 $B \Leftrightarrow C$，那么 $A \Leftrightarrow D$。

当将一个公式的局部进行等值替换后，仍与原公式等值，这也是我们在代数等数学最常见的方法，不断对局部进行等值替换的操作，称为“等值演算”。

1.4 析取范式与合取范式

定义 1.4.1 文字：命题变项(变元)及其否定称为文字。如:p、q、r、¬p、¬q、¬r。

定义 1.4.2 简单析取式：仅由有限个文字构成的析取式。如:$p\vee q$、$\neg p\vee q$、$p\vee\neg q$、$\neg p\vee\neg q$、$p\vee q\vee r$。

定义 1.4.3 简单合取式:仅由有限个文字构成的合取式。如:$p\wedge q$、$\neg p\wedge q$、$p\wedge\neg q$、$\neg p\wedge\neg q$、$p\wedge q\wedge r$。

定理 1.4.1

(1)简单析取式 Ai 是重言式⇔同时含有某命题变元及其否定式，如 $Ai=p\vee\neg p\vee\ldots$。

(2)简单合取式 Ai 是矛盾式⇔同时含有某个命题变元及其否定式，如 $Ai=p\wedge\neg p\wedge\ldots$。

定义 1.4.4 析取范式：由有限个简单合取式的析取构成的命题公式。

如：$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)$、$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q\wedge r)$。

由析取的性质可知，仅当每个简单合取式为假时，析取范式为假。

范式中只出现¬(否定)、∨(析取)、∧(合取)三种符号，其中∨、∧交替出现，因为最外层的运算符号是析取，从而将这种范式称为“析取范式”。如果最外层的符号是合取则称为“合取范式”。

定义 1.4.5 合取范式：由有限个简单析取式的合取构成的命题公式。

如：$(p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)$、$(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\wedge(p\vee q\vee r)$

由合取的性质可知，仅当每个简单析取式为真时，合取范式才为真。

定理 1.4.2

(1)析取范式是矛盾式⇔该范式中每个简单合取式是矛盾式。

(2)合取范式是重言式⇔该范式中每个简单析取式是重言式。

将一个普通公式转换为范式的基本步骤

1、肯定转换→：利用 $A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$，将条件式运算符转换为¬、∨。

2、恰当转换↔：利用 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$

利用 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

3、否定到底：利用$\neg\neg A\Leftrightarrow A$、$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$、$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

4、适当分配：$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

定理 1.4.3(范式存在定理)

(1)不是永假的命题公式，存在析取范式。

(2)不是永真的命题公式，存在合取范式。

定义 1.4.4 小项：在含有 n 个变元的**简单合取式**中，每个命题变元或其否定仅出现一次，且各变元按其字母顺序出现，则该简单合取式为小项或极小项。

如：$p\wedge q\wedge r$, $p\neg\wedge q\wedge r$, $p\wedge q\neg\wedge r$, $\neg p\wedge q\wedge r$ 是小项，而$\neg p\wedge r$、$q\wedge r$ 不是小项。

定义 1.4.5 大项：在含有 n 个变元的**简单析取式**中，每个命题变元或其否定仅出现一次，且各变元按其字母顺序出现，则该简单析取式为大项或极大项。

如：$p\vee q\vee r$, $p\neg\vee q\vee r$, $p\vee q\neg\vee r$, $\neg p\vee q\vee r$ 是大项，但 $p\vee r$、$\neg q\vee r$ 不是大项。

【帮你记忆】：因为 $p\wedge q$ 的结果是这两值中最小者，即 $p\wedge q=\min(p,q)$，所以将形如“$p\wedge q$”的公式称为小项。类似 $p\vee q$ 结果是这两值中最大者，即 $p\vee q=\max(p,q)$，所以将形如“$p\vee q$”的公式称为大项。

定义 1.4.6 主合取范式：一个合取范式中，如果所有简单析取式均为大项，则称为主合取范式。

如 $(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\neg\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\neg\vee r)$是主合取范式。

又如$(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\neg\vee r)$前 2 个简单析取式变元不全，因而不是大项，故不是主合取范式。

定义 1.4.7 主析取范式：一个析取范式中，如果所有简单合取式均为小项，则称为主析取范式。

如$(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\neg\wedge q\wedge\neg r)$，因其前 2 个简单合取式中少变元不是小项，从而不是主析取范式

又如：$(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\neg\wedge q\neg\wedge r)$是主析取范式。

现构造$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$、其主析取范式、其主合取范式的真值表，其中 $m_{001}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{111}$ 为 $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$，$M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{101}\wedge M_{110}$ 为 $(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$。

表 1.17

p	q	r	$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$ 原式(记为 A)	$m_{001}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{111}$ 主析取范式(记为 B)	$M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{101}\wedge M_{110}$ 主合取范式(记为 C)
0	0	0	0	$0\vee 0\vee 0\vee 0=0$	$\mathbf{0}\wedge 1\wedge 1\wedge 1=0$
0	**0**	**1**	1	$\mathbf{1}\vee 0\vee 0\vee 0=1$	$1\wedge 1\wedge 1\wedge 1=1$
0	1	0	0	$0\vee 0\vee 0\vee 0=0$	$1\wedge \mathbf{0}\wedge 1\wedge 1=0$
0	**1**	**1**	1	$0\vee \mathbf{1}\vee 0\vee 0=1$	$1\wedge 1\wedge 1\wedge 1=1$
1	**0**	**0**	1	$0\vee 0\vee \mathbf{1}\vee 0=1$	$1\wedge 1\wedge 1\wedge 1=1$
1	0	1	0	$0\vee 0\vee 0\vee 0=0$	$1\wedge 1\wedge \mathbf{0}\wedge 1=0$
1	1	0	0	$0\vee 0\vee 0\vee 0=0$	$1\wedge 1\wedge 1\wedge \mathbf{0}=0$
1	**1**	**1**	1	$0\vee 0\vee 0\vee \mathbf{1=1}$	$1\wedge 1\wedge 1\wedge 1=1$

从表 1.17 可发现$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$、与其主析取范式、主合取范式的真值表完全一样，说明三者互相等值，因此我们得到如下定理。

定理 1.4.4

(1)不是永假的命题公式，其主析取范式等值于原公式。

(2)不是永真的命题公式，其主合取范式等值于原公式。

1.6 推理

定义 1.6.1 设 A 与 C 是两个命题公式， 若 A → C 为永真式、 重言式，则称 C 是 A 的有效结论，或称 A 可以逻辑推出 C，记为 A => C。（用等值演算或真值表）

第二章 谓词逻辑

2.1、基本概念

∀：全称量词　　　∃：存在量词

一般情况下， 如果个体变元的取值范围不做任何限制即为全总个体域时， 带 “全称量词”的谓词公式形如"∀x(H(x)→B(x))，即量词的后面为条件式，带“存在量词”的谓词公式形如∃x(H(x)∨WL(x))，即量词的后面为合取式

例题

R(x)表示对象 x 是兔子，T(x)表示对象 x 是乌龟， H(x,y)表示 x 比 y 跑得快，L(x,y)表示 x 与 y 一样快，则兔子比乌龟跑得快表示为： ∀x∀y(R(x)∧T(y)→H(x,y))

有的兔子比所有的乌龟跑得快表示为：∃x∀y(R(x)∧T(y)→H(x,y))

2.2、谓词公式及其解释

定义 2.2.1、 非逻辑符号： 个体常元(如 a,b,c)、 函数常元(如表示 x^2+y^2 的 f(x,y))、 谓词常元(如表示人类的 H(x))。

定义 2.2.2、**逻辑符号**：个体变元、量词(∀∃)、联结词(¬∨∧→↔)、逗号、括号。

定义 2.2.3、**项**的定义：个体常元、变元及其函数式的表达式称为项(item)。

定义 2.2.4、**原子公式**：设 R($x_1...x_n$)是 n 元谓词，$t_1...t_n$是项，则 R(t)是原子公式。原子公式中的个体变元，可以换成个体变元的表达式(项)，但不能出现任何联结词与量词，只能为单个的谓词公式。

定义 2.2.5 **合式公式**：(1)原子公式是合式公式；(2)若 A 是合式公式，则(¬A)也是合式公式；(3)若 A,B 合式，则 A∨B, A∧B, A→B , A↔B 合式(4)若 A 合式，则∀xA、∃xA 合式(5)有限次使用(2)~(4)得到的式子是合式。

定义 2.2.6 **量词辖域**：∀xA 和∃xA 中的量词∀x/∃x 的作用范围，A 就是作用范围。

定义 2.2.7 **约束变元**：在∀x 和∃x 的辖域 A 中出现的个体变元 x，称为约束变元，这是与量词相关的变元，约束变元的所有出现都称为约束出现。

定义 2.2.8 **自由变元**：谓词公式中与任何量词都无关的量词，称为自由变元，它的每次出现称为自由出现。一个公式的个体变元不是约束变元，就是自由变元。

注意：为了避免约束变元和自由变元同名出现，一般要对“约束变元”改名，而不对自由变元改名。

定义 2.2.9 闭公式是指不含自由变元的谓词公式

从本例(已省)可知， 不同的公式在同一个解释下， 其真值可能存在， 也可能不存在， 但是对于没有自由变

元的公式(闭公式)，不论做何种解释，其真值肯定存在

谓词公式的类型：重言式(永真式)、矛盾式(永假式)、可满足公式三种类型

定义 2.2.10 在任何解释下，公式的真值总存在并为真，则为重言式或永真式。

定义 2.2.11 在任何解释下，公式的真值总存在并为假，则为矛盾式或永假式。

定义 2.2.12 存在个体域并存在一个解释使得公式的真值存在并为真，则为可满足式。

定义 2.2.13 代换实例 设 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是命题公式 A_0 中的命题变元， $A_0, A_1, \ldots, A_n$ 是 n 个谓词公式，用 A_i 代替公式 A_0 中的 p_i 后得到公式 A，则称 A 为 A_0 的代换实例。

如 A(x)∨¬A(x)，∀xA(x) ∨¬∀ xA(x)可看成 p ∨¬ p 的代换实例，A(x) ∧¬A(x)，∀xA(x) ∧¬ ∀x A(x)可看成 p ∧¬ p 的代换实例。

定理 2.2.1 命题逻辑的永真公式之代换实例是谓词逻辑的永真公式， 命题逻辑的永假公式之代换实例是谓词逻辑的永假式。(代换前后是同类型的公式)

2.3、谓词公式的等值演算

定义 2.3.1 设 A、B 是两个合法的谓词公式，如果在任何解释下，这两个公式的真值都相等，则称 A 与 B 等值，记为 A ⇔ B。

当 A⇔B 时，根据定义可知，在任何解释下，公式 A 与公式 B 的真值都相同，故 A↔B 为永真式，故得到如下的定义。

定义 2.3.2 设 A、B 是两个合法谓词公式，如果在任何解释下， A↔ B 为永真式， 则 A 与 B 等值，记为 A ⇔ B。

一、利用代换实例可证明的等值式(p↔¬¬p 永真，代换实例∀ xF(x) ↔¬¬∀ xF(x)永真)

二、个体域有限时，带全称量词、存在量词公式的等值式

如：若 D={$a_1, a_2, \ldots, a_n$ }，则∀ xA(x) ⇔ A(a_1)∧A(a_2)∧…∧A(a_n)

三、量词的德摩律

1、 ¬∀xA(x) ⇔ ∃x¬A(x)　　　　2、 ¬∃xA(x) ⇔ ∀x¬A(x)

四、量词分配律

1、∀x(A(x)∧B(x)) ⇔ ∀xA(x)∧∀xB(x)　　　　2、∃x(A(x)∨B(x)) ⇔ ∃xA(x)∨∃xB(x)

记忆方法：∀与∧，一个尖角朝下、一个尖角朝上，相反可才分配。2 式可看成 1 式的对偶式

五、量词作用域的收缩与扩张律

A(x)含自由出现的个体变元 x，B 不含有自由出现的 x，则有：

1、∀/∃(A(x)∨B) ⇔ ∀/∃A(x)∨B　　　　2、∀/∃(A(x)∧B) ⇔ ∀/∃A(x)∧B

对于条件式 A(x) ↔B， 利用 “基本等值一” 将其转换为析取式， 再使用德摩律进行演算

六、置换规则

若 B 是公式 A 的子公式，且 B ⇔ C，将 B 在 A 中的每次出现，都换成 C 得到的公式记为 D，则 A ⇔D

七、约束变元改名规则

将公式 A 中某量词的指导变元及辖域中约束变元每次约束出现，全部换成公式中未出现的字母，所得到的公式记为 B，则 A ⇔ B

例 $\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$

证明步骤：

$\forall x(A(x)\to B)$

$\Leftrightarrow\forall x(\neg A(x)\vee B)$　　命题公式 $p\to q\Leftrightarrow\neg p\vee q$ 的代换实例

$\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)\vee B$　　量词作用域的收缩与扩张律

$\Leftrightarrow\neg\exists xA(x)\vee B$　　德摩律

$\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$　　$p\Leftrightarrow\neg\neg p$ 的代换实例

2.4、谓词公式的范式

定义 2.4.1 一个谓词公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则该公式称为前束范式。

如：$\forall x\exists yF(x)\wedge G(y)$，$\forall y\exists x(\neg P(x,y)\to G(y))$是前束范式。

但 $\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\vee H(x,y))$不是前束范式。

定理 2.4.1 任意一个谓词公式，都有与之等值的前束范式。

从定理证明过程，可得到获取前束范式的步骤：

(1)剔除不起作用的量词；

(2)如果约束变元与自由变元同名，则约束变元改名；

(3)如果后面的约束变元与前面的约束变元同名，则后的约束变元改名；

(4)利用代换实例，将→、↔转换¬∨∧表示；

(5)利用德摩律，将否定¬深入到原子公式或命题的前面；

(6)利用量词辖域的扩张与收缩规律或利用量词的分配律，将量词移到最左边

例题 2.4.1 把公式$\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$转换为前束范式

解：由于没有空量词，即没有不约束任何变元的量词，现有的约束变元也不与自由变元同名，但$\exists x$的约束变元与前面$\forall x$中的 x 同名，后者改名。

$\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow\forall xP(x)\to\exists yQ(y)$　　后方约束变元改名

$\Leftrightarrow\neg\forall xP(x)\vee\exists yQ(y)$　　条件式的代换实例

$\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)\vee\exists yQ(y)$　　德摩律

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg P(x)\vee\exists yQ(y))$　　量词辖域的扩张

2.5、谓词推理

定义 2.5.1 若在各种解释下 $A_1\wedge A_2\wedge...A_n\to B$ 只能为真即为永真，则称为前提 $A_1\wedge A_2\wedge...A_n$ 可推出结论 B。

定义 2.5.2 在所有使 $A_1\wedge A_2\wedge...A_n$ 为真的解释下，B 为真，则称为前提 $A_1\wedge A_2\wedge...A_n$ 可推出结论 B。

谓词逻辑的推理方法分为以下几类：

一、 谓词逻辑的等值演算原则、 规律： 代换实例、 量词的德摩律、 量词的分配律、 量词

辖域的扩张与收缩、约束变元改名。

二、 命题逻辑的推理规则的代换实例， 如假言推理规则、 传递律、 合取与析取的性质律、CP 规则、反证法等。

三、谓词逻辑的推理公理

(1) $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$ 全称量词展开可推出合并

(2) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 存在量词的合并可推出展开，别记反了

(3)全称量词的指定 US 或∀-：$\forall xA(x) \Rightarrow A(x0)$

x0 是论域中的任意个体。该规则可理解为：谓词公式$\forall xA(x)$在某个解释下为真，即论域中**所有**个体都在此解释下使 A 为真时，论域中的任意**个体** x0 在此解释下使 A 为真。

(4)全称量词的推广 UG 或∀+：$A(x0) \Rightarrow \forall xA(x)$

x0 是论域中的任意个体，它是由某个全称量词指定时确定个体。该规则可理解为：在某个解释下，论域中的**任意**个体 x0 都使公式 A 为真，那么论域中的**所有**个体在此解释下，都使 A 为真，意即谓词公式$\forall xA(x)$为真。

(5)存在量词的指定 ES 或∃-：$\exists xA(x) \Rightarrow A(c)$

c 为某个特定的个体，不是任意的个体，这是它与全称量词的区别。该规则可理解为：当$\exists xA(x)$在某个解释下为真时，至少有一个个体常元 c 在该解释下使得公式 A 为真，即 A (c)=1。

(6)存在量词的推广 EG 或∃+：$A(c) \Rightarrow \exists xA(x)$

c 为某个体，可以是某个存在量词指定时确定的个体，也可以是全称量词指定时的个体。该规则可理解为：在某个解释下有 1 个个体 c 使公式 A 为真，就可认为$\exists xA(x)$该解释下为真。

例题 2.5.3 证明$\forall x(F(x) \to G(x)), \exists x(F(x) \wedge H(x)) \Rightarrow \exists x(G(x) \wedge H(x))$

(1)$\exists x(F(x) \wedge H(x))$为真	(前提)
(2) $F(c) \wedge H(c)$为真	(存在指称，至少存在 c 使 F(c)为真，先使用存在指定)
(3) F(c)为真	((2) ∧的定义)
(4) H(c)为真	((2) ∧的定义)
(5) $\forall x(F(x) \to G(x))$为真	(前提)
(6) $F(c) \to G(c)$为真	(全称指定，任意 x0 都为真，尤其 x0=c 时为真)
(7) G(c)为真	((2)，(4)假言推理的代换实例)
(8)$G(c) \wedge H(c)$为真	((4)(7)合取)
(6) $\exists x(G(x) \wedge H(x))$为真	((5)存在推广，有一个 c 使公式为真，则存在量词可加)

第三章 集合与关系

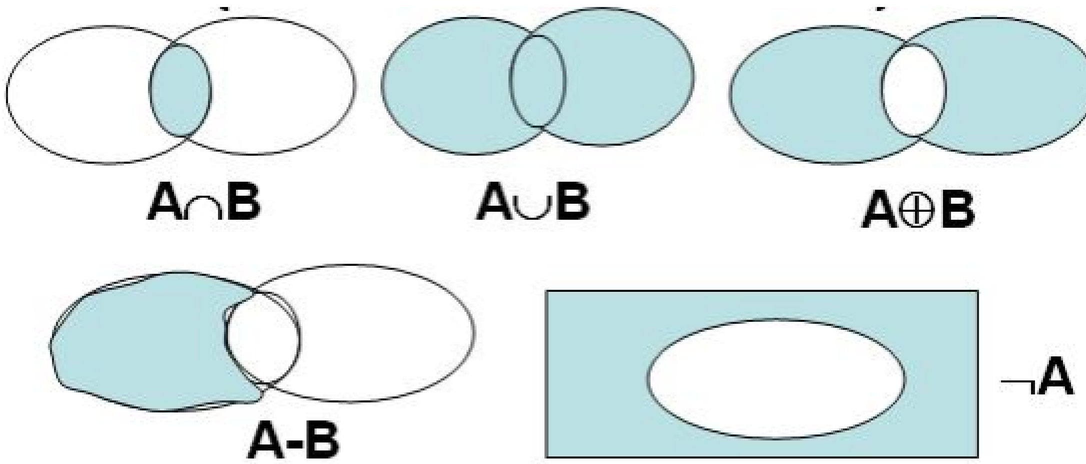
3.1、基本概念

在离散数学称 “不产生歧义的对象的汇集一块” 便构成集合。常用大写字母表示集合， 如 R 表示实数， N 表示自然数， Z 表示整数， Q 表示有理数，C 表示复数。描述一个集合一般有 “枚举法” 与 “描述法” ，“枚举法”。元素与集合之间有“属于∈”或“不属于∉”二种关系。

定义 3.1.1 设 A，B 是两个集合，如果 A 中的任何元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，也称 B 包含于 A，记为 B⊆A，也称 A 包含 B，记为 A⊇B。

3.2 集合运算性质

定义 3.2.1 设 A、B 为集合，A 与 B 的并集 $A\cup B$、A 与 B 的的交集 $A\cap B$、A-B 的定义：$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$，$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$，$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$



定义 3.2.2 设 A、 B 为集合， A 与 B 的对称差， 记为 $A\otimes B=\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)\}=A\cup B-A\cap B$。

定义 3.2.3 设 A、B 是两个集合，若 $A\subseteq B$、$B\subseteq A$ 则 A=B，即两个集合相等。

幂等律	$A\cup A=A$、$A\cap A=A$
结合律	$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
	$A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
交换律	$A\cup B=B\cup A$、$A\cap B=B\cap A$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
同一/零律	$A\cup\varnothing=A$、$A\cap\varnothing=\varnothing$
排中/矛盾律	$A\cup\neg A=E$、$A\cap\neg A=\varnothing$
吸收律(大吃小)	$A\cap(B\cup A)=A$、 $A\cup(B\cap A)=A$
德摩律	$\neg(A\cap B)=\neg A\cup\neg B$ 、$\neg(A\cup B)=\neg A\cup\neg B$
双重否定	$\neg\neg A=A$

3.3、有穷集的计数

定理 3.3.1 二个集合的包含排斥原理 $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$

3.4、序偶

定义 3.4.2 令<x,y>与<u,v>是二个序偶，如果 x=u、y=v，那么<x,y>=<u,v>即二个序偶相等。

定义 3.4.3 如果<x,y>是序偶，且<<x,y>,z>也是一个序偶，则称<x,y,z>为三元组。

3.5、直积或笛卡尔积

定义 3.5.1 令 A、B 是两个集合， 称序偶的集合{<x,y>|x∈A, y∈B}为 A 与 B 的直积或笛卡尔积，记为 A×B。

如：A={1,2,3}，B={a,b,c}则 A×B={1,2,3}×{a,b,c}={<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>}

直积的性质

1、A×(B∪C)=A × B ∪ A × C

2、A × (B∩C)=A × B ∩ A × C

3、(B∪ C) × A=B × A∪ C × A

4、(B ∩ C) × A=B × A ∩ C × A

5、A⊆B⇔A ×C ⊆ B × C⇔C × A ⊆ C × B

6、A⊆B,C⊆D⇔A × C ⊆ B × D

定义 3.5.2 令 $A_1, A_2, ...A_n$ 是 n 个集合，称 n 元组的集合{$<x_1, x_2, ..., x_n>|$ $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n$}，为 $A_1, A_2, ...A_n$ 的直积或笛卡尔积，记为 $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$。

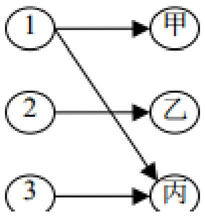
3.6、关系

定义 3.6.1 称直积中部分感兴趣的序偶所组成的集合为“关系”，记为 R。

如在直积{1,2,3,4,5,6,7,8}×{1,2,3,4,5,6,7,8}中， 只对第 1 个元素是第 2 个元素的因数的序偶感兴趣，即只对 R={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>, <1,7>,<1,8>, <2,2>,<2,4>, <2,6>, <2,8>, <3,3>,<3,6>,<4,4>,<4,8>,<5,5>, <6,6>,<7,7>,<8,8>}，R⊆A×A（A={1,2,3,4,5,6,7,8}）

定义 3.6.2 如果序偶或元组属于某个关系 R，则称序偶或元组具有关系 R。

关系图，关系矩阵



$$M_R = \begin{array}{c|ccc} & 甲 & 乙 & 丙 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}，应为 M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.7、关系的复合

定义 3.7.1 若关系 F⊆A×A，关系 G⊆A×A，称集合{<x,y>|∃t 使得<x, t>∈F，<t,y>∈G} 为 F 与 G 的复合，记为 F∘G。

例题 3.7.1 令 A={1,2,3}，F={<1,1>,<1,2>} G={<2,2>,<1,3>,<1,1>}则

解： F∘G={ <1,3>,<1,1>,<1,2>} ，G∘F={<1,2>,<1,1>}， 因此关系的复合不满足交换律。

采用复合的定义去计算，只适合于人工计算，为了编程实现，故采用矩阵表示关系。

$$M_F \circ M_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_G \circ M_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

说明： M_F 的第 i 行与 M_G 的第 j 列相乘时，乘法是合取∧，加法是析取∨，如 MF 的 1 行与 MG 的第 3 列相乘是：(1∧1)∨(1∧0)∨(0∧0)，结果为 1。

定义 3.7.2 若关系 F⊆A×A，称集合{<y,x>|<x,y>∈F }为 F 的逆，记为F^{-1}

例题 3.7.2 令 A={1,2,3}，F={<1,2>,<1,3>,<2,1>}，则F^{-1}={ <2,1>,<3,1>,<1,2>}。

3.8、关系的分类

定义 3.8.1 若$\forall x \in A$都有<x,x>∈R，则 R 是**自反关系**。(自己到自己的关系全属于 R)
定义 3.8.2 若$\forall x \in A$都有<x,x>∉R,则 R 是**反自反**的。(自己到自己的关系全不属于 R)

$$M_{R1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad M_{R2}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad M_{R3}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

自反关系 R1 的关系矩阵 M_{R1} 的对角线全为 1，凡关系矩阵的对角线全是 1 是自反关系。
反自反关系 R2 的关系矩阵 M_{R2} 的对角线全为 0，凡关系矩阵的对角线全是 0 的反自反。
而关系 R3 的关系矩阵的主角线不全是 1，也不全是 0，故既不是自反的，也不是反自

定义 3.8.4 如果所有形如<x,x>的序偶都在关系 R 中， R 也只有这种形式的序偶， 则称 R 为恒等关系，记为I_A。

对于恒等关系而言，其关系矩阵是单位矩阵，即其主对角线全是 1，其他位置全是 0，对关系图是每个点都有自旋，仅只有自旋，没有其他边。
定义 3.8.5 令关系 R⊆A×A，如果当<x,y>∈R 时<y,x>∈R，则称 R 为**对称关系**。
定义 3.8.6 令关系 R⊆A×A，如果当<x,y>∈R 且 x≠y 时<y,x>∉R， 则称 R 为**反对称关系**。

$$M_{R1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad M_{R2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad M_{R3}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

定义 3.8.8 令关系 R⊆A×A，若当<x,y>∈R,<y,z>∈R 时有<x,z>∈R，则称 R 为**可传递关系**。

从 R∘R 的关系矩阵可知，其非 0 元素在 R 的关系矩阵都出现，即$M_{R\circ R} \le M_R$，凡满足这个不等式的关系，肯定为可传递关系。

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&\boxed{1}\\0&0&\boxed{1}\\0&0&\boxed{1}\end{bmatrix}\qquad M_{R\circ R}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&0&\boxed{1}\\0&0&\boxed{1}\end{bmatrix}$$

所以不可传递。
从 R∘R 的关系矩阵可知，其非 0 元素出现在(1,1)，(1,3)，(2,2)，(2,4)，在 R 的关系矩

阵都没出现，不满足$M_{R\circ R} \le M_R$，不可传递关系。

$$M_R=\begin{bmatrix}\boxed{0}&1&\boxed{0}&0\\1&\boxed{0}&1&\boxed{0}\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_{R\circ R}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&\boxed{1}&0\\0&\boxed{1}&0&\boxed{1}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

3.9、关系的闭包

由前面的知识可知，有自反关系、对称关系、可传递关系，对于反自反或既不是自反，也不是反自反的关系，是否适当添加一些序偶，使之变成自反的关系，同时也要使添加的序偶尽可能少，类似对关系进行“投入”，使之发育成对称关系与可传递关系，同时要求“投入”刚刚好，这样得到的自反关系、对称关系、可传递关系，称为原关系的自反闭包(记为 r(R))、对称闭包(记为 s(R))、可传递闭包(t(R))，严格的数学定义如下。

定义 3,9.1 设 $R\subseteq A\times A$，若存在关系 $R'\subseteq A\times A$，满足如下条件则称为自反闭包。

(1)R'是自反关系。

(2)$R\subseteq R'$。

(3)任意 $R''\subseteq A\times A$ 且 $R\subseteq R''$，那么 $R'\subseteq R''$。

即 r(R)是包含 R 的所有自反关系中，序偶最少的一个。

定义 3,9.2 设 $R\subseteq A\times A$，若存在关系 $R'\subseteq A\times A$，满足如下条件则称为对称闭包。

(1)R'是对称关系。

(2)$R\subseteq R'$。

(3)任意 $R''\subseteq A\times A$ 且 $R\subseteq R''$，那么 $R'\subseteq R''$。

即 s(R)是包含 R 的所有对称关系中，序偶最少的一个。

定义 3,9.3 设 $R\subseteq A\times A$，若存在关系 $R'\subseteq A\times A$，满足如下条件则称为可传递闭包。

(1)R'是可传递关系。

(2)$R\subseteq R'$。

(3)任意 $R''\subseteq A\times A$ 且 $R\subseteq R''$，那么 $R'\subseteq R''$。

即 s(R)是包含 R 的所有可传递关系中，序偶最少的一个。

将关系矩阵的主角线上全部变成 1， 即得到其**自反闭包**的关系矩阵， 从而可得到其自反闭包。

3.10、等价关系与集合的划分

定义 3.10.1 设 $R\subseteq A\times A$，如果 R 是自反、对称、可传递的关系则称为**等价关系**。

定义 3.10.2 设 $R\subseteq A\times A$，如果 R 是等价关系， $B\subseteq A$， B 中任意二个元素之间都有关系 R，则 B 是一个**等价类**。

定义 3.10.3 设 $R\subseteq A\times A$，R 是等价关系，$A_0,A_1,...,A_k$ 是基于 R 得到的等价类，则称集合 $\{A_0,A_1,...,A_k\}$ 为 A 关于 R 的**商集**，记为 A/R。

定义 3.10.3 若 $A_0,A_1,...,A_{k-1}$ 是 A 的子集，若 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\Phi$，并且 $A=A_0\cup A_1\cup...\cup A_{k-1}$，

则称 $A_0,A_1,...,A_k$ 是 A 的**一个划分**。

定理 3.10.1 设 R⊆ A×A，R 是等价关系，$A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ 是利用 R 得到的 k 个不同的等价类，则 $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ 为集合 A 的划分。

定理 3.10.2 设 $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ 是 A 的划分， R=$A_0 \times A_0 \cup A_1 \times A_1 \cup ... \cup A_{k-1} \times A_{k-1}$， 则 R 是等价关系。

3.11、偏序关系

定义 3.1 1.1 设 R⊆ A×A，如果 R 是自反、反对称、可传递的关系则称为**偏序关系**。
如：R 是实数中小于等于关系，则 R 是偏序关系。
定义 3.1 1.2 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，x 与 y 是 A 中的元素，若序偶<x,y>与<y,x>至少有一个在 R 中，则称 x 与 y **可比**。
定义 3.1 1.3 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，若 A 中任意二个元素都可比，则称 A 为**全序关系**或线序关系。
定义 3.1 1.4 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，将关系图绘制成所有箭头都朝上，然后去掉所有箭头、去掉自旋边、去掉复合边，得到关系图的简化形式，称为**哈斯图**。
定义 3.1 1.5 在哈斯图中，如果某个元素 y 在元素 x 的直接上方，则称 y **盖住**了 x。记 COVA={<x,y>}
定义 3.1 1.6 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，将偏序关系与集合 A 一块称为偏序集，记为<A,R>，表示是 A 上的偏序关系。以后说偏序关系时，可简单地说偏序集<A,R>。
定义 3.1 1.7 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若$\forall x \in B$都有<x,y>∈R，则称 y 是**最大元**。即最大元与 B 中每个元素都可比，并且都比其大。
定义 3.1 1.8 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若$\forall x \in B$都有<y,x>∈R，则称 y 是**最小元**。即最小元与 B 中每个元素都可比，并且都比其小。
一个子集中没有最大元或最小元时，可能存在极大元或极小元。
定义 3.1 1.9 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若不存在 x∈B 使得<y,x>∈R，则称 y 是**极大元**， 即 B 中不存在比 y“大”的元素。 即极大元与 B 中有些元素是否可比不做要求。
定义 3.1 1.10 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若不存在 x∈B 都有<x,y>∈R，则称 y 是**极小元**，不存在比 y 小的元素。即极小元与 B 中元素是否可比不做要求。
定义 3.1 1.1 1 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若任意 x∈B 都有<x,y>∈R，则称 y 是 B 的**上界**。与 B 中每个元素都可比，并且都 B 中的元素大。

3.12、其它关系

定义 3.6.1 给定集合 A 上的关系 ρ，若 ρ 是**自反的**、**对称的**，则称 ρ 是 A 上的相容关系。

定义 3.6.3 给定非空集合 A，设有集合 S={$S_1, S_2, ..., S_n$}，其中$S_i \subseteq A$且$S_i \neq \Phi$，i=1,2,…,m,且 $S_i \cap S_j = \Phi (i \neq j)$，则称集合 S 称作 A 的**覆盖**。

定理 3.6.1 给定集合 A 的覆盖，$S_1, S_2, ..., S_n$，由它确定的关系：$S_1 \times S_1 \cup ... \cup S_n \times S_n$是相容关系。

定义 3.7.1 设 R 为定义在集合 A 上的一个关系，若 R 是自反的，对称的，传递的，则 R 称为**等价关系**。(显然等价关系一定是相容关系)。

定义 3.7.2 设给定非空集合 A，若有集合 S={$S_1, S_2, ..., S_n$}，其中$S_i \subseteq A$且$S_i \neq \Phi$ (i=1,2,…,m)，且有

$S_i \cap S_j = \Phi(i \neq j)$，同时有 $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$，则称 S 为 A 的一个划分。(所有子集的并为 A，且子集的交为空，则这些子集组成的集合为 A 的一个划分，**覆盖中，子集的交集可不为空**)

等价类
商集

偏序关系(自反性，反对称性，传递性) $< A, \leq >$，哈斯图，可比的，元素 y 盖住元素 x，全序关系，极大元，极小元，最大元，最小元
拟序关系(反自反的，传递的) $< A, \prec >$

第四章 代数系统

定义 4.3.1 设° 是集合 S 上的二元运算，若 $\forall x, y \in S$ 都有 x° y=y° x，则称° 在 S 上是可交换的，或者说运算° 在 S 上满足**交换律**。
定义 4.3.2 设° 是集合 S 上的二元运算，若 $\forall x, y \in S$ 都有(x° y)° z=x° (y° z)，则称° 在 S 上是可结合的，或者说运算° 在 S 上满足**结合律**。
定义 4.3.3 设° 是集合 S 上的二元运算，若 $\forall x \in S$ 都有 x° x=x，则称° 在 S 上是幂等的,或说运算° 在 S 上满足幂等律。
定义 4.3.4 设° 与*是集合 S 上的二种运算，若 $\forall x, y \in S$ 都有 x*(y° z)=(x*y)° (x*z)与(y° z)*x=(y*x)° (z*x)，则称*对° 是**可分配的**。
定义 4.3.5 设° 与*是集合 S 上的二种可交换的二元运算，若 $\forall x, y \in S$ 都有 x*(x° y)=x 与 x° (x*y)=x 则称*与° 是满足**吸收律**，内外二种运算不一样，运算符内外各出现一次，以多吃少。

广群：

定义 4.6.1 对于代数系统<A, ♥>，若其运算♥是封闭的，即∀a,b∈A，其运算结果 a ♥ b∈A，则称此代数系统为广群。

半群：

定义 4.6.2 对于代数系统<A, ♥>，若其运算♥是封闭的，还是可结合的，即∀a,b,c∈A，(a ♥ b)♥ c=a ♥(b ♥ c)，则称此代数系统为半群。

群：

定义 4.7.1 若代数系统<A, ♥>之运算♥是封闭的、可结合的、存在单位元、∀a∈A 都有逆元 a^{-1}∈A，则称该代数系统为群。记为 G，即 Group 的首字母。

子群：

定义 4.8.1 代数系统<G, °>是群，∅≠H⊆G，若代数系统<H, °>是群，则称为<G, °>的子群，也简称 H 是 G 的子群，记为 H≤G。若 H⊂G 则称 H 是 G 的真子群，记为 H<G。