线性代数

课程介绍：

1、课程内容：三个工具解决两大问题

2、课程特点：公式多、知识点联系紧密、内容比较抽象、开头比较难

3、学习方法：以应试为导向，多总结善归纳

第一章 行列式

§1 行列式的定义

1. 基本概念

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

【定义1】： 由 n 个自然数 $1,2,3,\dots,n$ 组成的无重复有序实数组 $i_1,i_2,\dots,i_n$ 称为一个 n **元排列**。

【定义2】： 在一个 n 元排列中，如果一个较大数排在一个较小数前面，我们就称这两个数构成一个**逆序**。对于逆序，我们感兴趣的是一个 n 元排列 $i_1,i_2,\dots,i_n$ 中逆序的总数，称为 n 元排列 $i_1,i_2,\dots,i_n$ 的**逆序数**，记作 $\tau\left(i_1,i_2,\dots,i_n\right)$。

如果 n 元排列 $i_1,i_2,\dots,i_n$ 的逆序数是偶数，则 $i_1,i_2,\dots,i_n$ 称为**偶排列**；

如果 n 元排列 $i_1,i_2,\dots,i_n$ 的逆序数是奇数，则 $i_1,i_2,\dots,i_n$ 称为**奇排列**。

【例 1】计算下列排列的逆序数

（1）35412；　　　（2）$n(n-1)$　21

【定义3】：n 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$是一种运算法则，它是行列式中所有取自**不同行不同列** n 项元素乘积的**代数和**。它由 $n!$ 项组成，其中每一项都是行列式中 n 个不同行不同列元素的乘积，将这 n 项的行数按照自然顺序排列，假设此时其列数为 $i_1,i_2,\ldots,i_n$，当 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 为偶排列时，符号为正；当 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 为奇排列时，符号为负，也即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}\text{。}$$

注：

【例 2】求行列式值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

【例 3】求行列式值

$$\begin{vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ & & \\ \lambda_n & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & * \\ & & \\ \lambda_n & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & \lambda_1 \\ * & \lambda_2 & \\ & & \\ \lambda_n & & 0 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

【例 4】写出四阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$中含有因子$a_{11}a_{23}$的项.

§2 行列式的性质

性质一：将行列式的行和列互换（转置）后，行列式的值不变，也即行列式与它的转置行列式相等：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注：该性质告诉我们行列式中行和列是等价的。因此，我们在讨论行列式的性质时，只要说到行，那么把相关性质中的行改成列也是成立的。

性质二：将行列式的任意两行（或两列）互换位置后，行列式改变符号。
推论1：如果行列式有两行（或两列）相同，则行列式的值为0.

性质三：若行列式某行（列）有公因子k，则可把公因子k提到行列式外面；
也即：将行列式的某一行（或某一列）乘以一个常数k后，行列式的值变为原来的k倍。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & & ka_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论2：如果一个行列式的某一行（或某一列）全为0，则行列式的值等于0.
推论3：如果一个行列式的某两行（或某两列）元素对应成比例，则行列式的值等于0.

性质四：如果行列式某一行（或某一列）的所有元素都可以写成两个元素的和，则该行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式的这一行（或列）分别为对应两个加数，其余行（或列）与原行列式相等。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 4：将行列式的一行（或列）的k倍加到另一行（或另列）上，行列式的值不变。
【例 1】：计算行列式

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 99 & 201 & 302 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad (2)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2a_1-b_1 & 4a_1+5b_1 \\ a_2+b_2 & 2a_2-b_2 & 4a_2+5b_2 \\ a_3+b_3 & 2a_3-b_3 & 4a_3+5b_3 \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

【例 2】求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的根.

【思考】计算行列式：$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

【总结】运用行列式的性质计算行列式，需要造“0”，将行列式化为上（下）三角行列式.

§3 行列式的展开

【定义】：将行列式中元素 a_{ij} 所在的行和列划掉之后得到 $n-1$ 阶行列式，称之为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

给余子式加上符号则成为**代数余子式**，记作 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

注：1、余子式也是行列式，阶数比原先的行列式要低一阶，

2、A_{ij} 与 a_{ij} 的位置有关，与 a_{ij} 的值无关.

3、做题时，遇到余子式需要先转化为代数余子式.

4、做题时，遇到代数余子式，须考虑“展开定理”或“伴随矩阵”.

【展开定理】

行列式的值等于其任何一行（或列）所有元素与其代数余子式乘积之和，即

$$|\mathbf{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\ldots,n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}\qquad(i=1,2,\ldots,n)$$

推论：行列式的一行（或列）所有元素与另一行（或列）对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0,\quad(i\neq k)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ji}A_{jk}=a_{1i}A_{1k}+a_{2i}A_{2k}+\ldots+a_{ni}A_{nk}=0\quad(i\neq k)$$

【例 1】计算行列式 $\begin{vmatrix}3&2&-2&-7\\0&-1&-3&0\\1&5&6&3\\-4&1&0&2\end{vmatrix}$.

【总结】行列式的运算：造“0”+降阶！

【例 2】设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$，计算 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$，

$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

练习：设 $|A|=\begin{vmatrix}1&-2&3&5\\3&4&2&1\\1&-1&2&3\\1&2&1&1\end{vmatrix}$。（1）试求 $A_{21}-2A_{22}+3A_{23}+5A_{24}$；（2）求 $M_{41}+M_{42}+M_{43}$.

【范德蒙行列式】

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&&1\\x_1&x_2&x_3&&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&&x_n^2\\&&&&\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j).$$

【注】（1）对于范德蒙行列式直接应用其结论.

（2）结果 $\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$，顺序不要写错.

【例 3】计算 $D_4=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\9&8&7&6\end{vmatrix}$.

练习：计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\2&2^2&2^3&\dots&2^n\\3&3^2&3^3&\dots&3^n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\n&n^2&n^3&\dots&n^n\end{vmatrix}$

§4 高阶行列式的计算

类型一：行（列）和相等的行列式

方法：行和相等----将第 2 至 n 列加到第 1 列

列和相等----将第 2 至 n 行加到第 1 行

【例 1】计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & & b \\ b & a & b & & b \\ & & & & \\ b & b & b & & a \end{vmatrix}$.

练：计算行列式：$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

类型二：计算非零元素仅在（或可化为）主、次对角线上的行列式

【例 2】计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

练：计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

练：计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & b \\ & & & \\ & a & b & \\ & c & d & \\ & & & \\ c & & & d \end{vmatrix}=$

类型三：计算形如点斜线的行列式

【例 3】（1）$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & b_n \\ b_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$

类型四：爪形行列式

【例 4】计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ c_2 & & a_2 & \\ & & & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}(a_i \neq 0(i=1,2, \quad n))$.

类型五：计算三线行列式

【例 5】计算 $\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & & & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$

【练习】（1）$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$

（2）计算 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}, (a \neq -1)$

第二章 矩 阵

§1 矩阵的基本概念

【定义 1】：由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$ 排列成的 m 行 n 列数表

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $m\times n$ **矩阵**，简记为 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$。

当 $n=m$ 时，$\mathbf{A}$ 也称为 n 阶方阵，$\left|\mathbf{A}\right|$ 称为 $\mathbf{A}$ 的行列式。

两个矩阵 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)_{s\times k}$，如果 $m=s,n=k$ 则称它们为**同型矩阵**。

如果两个同型矩阵 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ $\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ 对应的元素相等，

也即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,..,n;j=1,\ldots,m)$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\mathbf{B}$ **相等**，记作 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$。

【特殊矩阵】

（1）方阵：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$，称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，记作 A 或 A_n .

（2）行矩阵（行向量）：$A=(a_1,a_2,\quad,a_n)$.

（3）列矩阵（列向量）：$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$.

（4）零矩阵：所有元素都为 0，记作 O .

（5）单位矩阵：$E=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

（6）数量矩阵：$\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & k & \\ & & \\ 0 & & k \end{pmatrix}$.

（7）对角矩阵：$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

（8）上三角矩阵：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

（9）下三角矩阵：$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$.

（10）对称矩阵、反对称矩阵

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$ 是一个 n 阶矩阵，如果 $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \quad , n)$，则称 A 为对称矩阵；如果 $a_{ij} = -a_{ji}(i, j = 1, 2, \quad , n)$，则称 A 为反对称矩阵.

注：要注意区分矩阵与行列式

首先，从概念上讲，行列式是一个运算法则，其运算结果是一个数字，而矩阵是一个数表，二者从本质上是不一样的；其次，从形式上讲，行列式中行和列必须相同（必须是正方形的），而矩阵的行数和列数可以是任意的。

§2 矩阵的运算

（1）矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & & a_{1n}+b_{1n} \\ & & \\ a_{m1}+b_{m1} & & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法满足下列运算规律：

① $A+B=B+A$.　　　　② $(A+B)+C=A+(B+C)$.

注：同型矩阵才能相加！

（2）矩阵的数乘

设 $A=(a_{ij})_{m\times n},\lambda\in R$，则

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & & \lambda a_{1n} \\ & & \\ \lambda a_{m1} & & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的数乘满足下列运算规律：

① $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$.　② $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.　③ $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

【例 1】填空

（1）$\begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{pmatrix}=\underline{\qquad}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}=\underline{\qquad}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

注意：数乘矩阵与数乘行列式的区别！

（3）矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times s},B=(b_{ij})_{s\times n}$，则

$$C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\quad+a_{is}b_{sj}\ \ (i=1,2,\quad,m;j=1,2,\quad,n)$.

矩阵的乘法满足下列运算规律：

①$(AB)C = A(BC)$.　　　②$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

③$(A+B)C = AC+BC$，$C(A+B) = CA+CB$.

【注】①矩阵乘法不满足交换律，即在一般情形下，AB 与 BA 不一定相等；

（若方阵 A 与 B 满足 $AB = BA$，则称 A 与 B 可交换）

②由 $AB = O$，推不出 $A = O$ 或 $B = O$；

③由 $AB = AC$，$A \neq O$，推不出 $B = C$.

【例 2】计算下列矩阵乘积：$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

【例 3】已知三维列向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，三维行向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$，求 $\alpha \cdot \beta$，$\beta \cdot \alpha$.

（4）方阵的幂：设 A 为 n 阶矩阵，则 $A^k = A \cdot A \quad A$（k 个 A 相乘）.

矩阵的幂满足下列运算规律：

①$A^k A^l = A^{k+l}$；　②$(A^k)^l = A^{kl}$；

一般地，$(AB)^k$ 与 $A^k B^k$ 不一定相等.

【例 4】已知三维列向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，三维行向量 $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$，求 $(\alpha\beta)^n$.

【例 5】设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}^n$.

【小结】当矩阵 $\mathbf{A}$ 各行以及各列元素均成比例时，$\mathbf{A}^n = M^{n-1}\mathbf{A}$，其中 M 为矩阵 $\mathbf{A}$ 主对角元素之和.

【练习】设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&4&2\\2&6&8&4\\1&3&4&2\\3&9&12&6\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}^n$.

【例 6】：设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}^2,\mathbf{A}^3$.

【小结】：本题实质上解决了所有 $\begin{pmatrix}0&*&*\\0&0&*\\0&0&0\end{pmatrix}$ 以及 $\begin{pmatrix}0&0&0\\*&0&0\\*&*&0\end{pmatrix}$ 型的矩阵 n 次幂计算问题

【思考】设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&3&1\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}^n$（$n\geq 3$）

【小结】：

本题的方法适用于所有型如 $\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\a&\lambda&0\\c&b&\lambda\end{pmatrix}$（或 $\begin{pmatrix}\lambda&a&c\\0&\lambda&b\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$）的矩阵，计算步骤：首先将该矩阵分解为 $\lambda\mathbf{E}+\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\c&b&0\end{pmatrix}$，再利用二项式定理计算该矩阵的 n 次幂，由于

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}^3 = \mathbf{O}$，故利用二项式定理展开之后最多只需计算前三项即可。

（5）方阵的多项式

设 x 的多项式 $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \quad + a_{m-1}x + a_m$，则方阵 A 的多项式

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \quad + a_{m-1}A + a_mE .$$

方阵的多项式满足下列运算规律：

① $f(A)g(A) = g(A)f(A)$，其中 $f(A)$ 和 $g(A)$ 都是方阵 A 的多项式

② $f(A)$ 可因式分解

一般地，$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$，$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$，

但是，$(A+E)^2 = A^2 + 2A + E$，$(A+E)(A-E) = A^2 - E$.

（6）矩阵的转置

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 A 的转置矩阵.

矩阵的转置满足下列运算规律：

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$，② $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$，③ $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$，④ $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

【思考】设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

【例 7】设列矩阵 $X = (x_1, x_2, x_3, \quad, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X = 1$，E 为 n 阶单位阵，

$H = E - 2XX^{\mathrm{T}}$，证明 H 是对称阵，且 $HH^{\mathrm{T}} = E$.

【思考】设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，试证明：

（1） $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵， $\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 为反对称矩阵；

（2） $\mathbf{A}$ 可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和。

注：设 A,B 是 n 阶对称矩阵，则：

（1） $A+B$ 是对称矩阵；（2） AB 不一定是对称矩阵.

（7）方阵的行列式

由 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素所构成的 n 阶行列式，称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

方阵的行列式满足下列运算规律：

① $|A^T|=|A|$. ② $|\lambda A|=\lambda^n|A|$. ③ $|AB|=|BA|=|A||B|$ ， $|A^k|=|A|^k$.

注意： $|A+B|\neq|A|+|B|$.

【例 8】：设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ ， $\mathbf{E}$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{BA}=\mathbf{B}+2\mathbf{E}$ ，则 $|\mathbf{B}|=$_____.

【小结】一般来说，如果题目中给出了未知矩阵 $\mathbf{X}$ 的方程，要计算矩阵的行列式，就可以考虑利用相关运算法则从等式中提出未知矩阵，将其化为 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{XA}=\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$ （ $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 已知）的形式，再利用方阵行列式的相关公式（主要是 $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$ ）进行计算。

【练习】设三阶方阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{A}^2\mathbf{B}-\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{E}$ ，其中 $\mathbf{E}$ 为三阶单位矩阵，若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ，则 $|\mathbf{B}|=$_______.

【例 9】若 A 是 n 阶方阵，且 $AA^T=E$，$|A|=-1$，证明 $|A+E|=0$.

§3 逆矩阵

【定义】对于 n 阶矩阵 A，如果存在一个 n 阶矩阵 B，使

$$AB=BA=E,$$

则称矩阵 A 是可逆的，B 称为 A 的逆矩阵．A 的逆矩阵是唯一的，记作 A^{-1}.

例如：$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$。

注：要注意定义中要求矩阵 $\mathbf{A}$ 为方阵。

【定理】A 是可逆矩阵的充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

【推论】若方阵 A,B 满足 $AB=E$（或 $BA=E$），则 A 可逆，且 $B=A^{-1}$.

【例 1】设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明矩阵 A 和 $A+2E$ 均可逆，并求出它们的逆.

【练习】设 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=\mathbf{E}$，求（1）$\mathbf{A}^{-1}$；（2）$(\mathbf{A}+3\mathbf{E})^{-1}$。

【思考】设方阵 A、B、C 满足 $ABC=E$，则（　　）

(A) $ACB = E$　　(B) $CBA = E$

(C) $BAC = E$　　(D) $BCA = E$

【性质】(1) 若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 若 A 可逆，则 $kA\ (k \neq 0)$ 亦可逆，且 $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$.

(3) 若 A,B 可逆，则 AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) 若 A 可逆，则 A^{T} 亦可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(5) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.

(6) 已知 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，$\lambda_1\lambda_2 \quad \lambda_n \neq 0$，则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

【注】$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

【例 2】设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} =$ (　　)

(A) $A^{-1}+B^{-1}$　　(B) $A+B$

(C) $A(A+B)^{-1}B$　　(D) $(A+B)^{-1}$

【例 3】设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, AP = P\Lambda$, 求 A^n.

§4 伴随矩阵

【定义】设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，由 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵：

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵．且有 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$ 恒成立．

【定理】若 $|A|\neq 0$，则矩阵 A 是可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$．

【注】二阶方阵求逆，用 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$．

【例 1】求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

【性质】

设 A,B 均为 $n(n\ldots 2)$ 阶可逆矩阵，则有

（1） $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$， $A^{*}=|A|A^{-1}$， $|A^{*}|=|A|^{n-1}$；

（2） $(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}A$；$(kA)^{*}=k^{n-1}A^{*}$（k 为非零常数）．

（3） $(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}$， $(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}=\dfrac{1}{|A|}A$；

（4） $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$；$(A^{*})^{T}=(A^{T})^{*}$；

【例 2】设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，则 $\left(\mathbf{A}^*\right)^{-1}=$________

【例 3】设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$A^*BA=2BA-8E$，求 B .

【例 4】设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，求 $\left|(2A)^{-1}-5A^*\right|$.

§5 分块矩阵

【定义】：用水平和垂直的直线将矩阵 $\mathbf{A}$ 分成很多小块，每一块称之为 $\mathbf{A}$ 的一个子矩阵，则 $\mathbf{A}$ 称为以这些子矩阵为元素的**分块矩阵**。

两种分块形式：

【分块形式1】分成4块即：$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$.

（1）对分块矩阵也有相应的加法，数乘等运算

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{D}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}\end{bmatrix},k\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{A}&k\boldsymbol{B}\\k\boldsymbol{C}&k\boldsymbol{D}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{D}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AA}_1+\boldsymbol{BC}_1&\boldsymbol{AB}_1+\boldsymbol{BD}_1\\\boldsymbol{CA}_1+\boldsymbol{DC}_1&\boldsymbol{CB}_1+\boldsymbol{DD}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T&C^T\\B^T&\boldsymbol{D}^T\end{bmatrix}$$

注：一般来说，当A,B,C,D中至少有一块为零矩阵时，对矩阵进行分块可以起到简化计算的作用。例如：假设A与B，C与D均为同阶方阵，则有$\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{AB}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{CD}\end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{C}\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\mathbf{A}^n&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{C}^n\end{pmatrix}$$

【例 1】已知$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&4&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$，求$A^n$.

（2）分块矩阵的行列式

A,B分别为m阶，n阶方阵

$$\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&0\\C&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&C\\0&B\end{vmatrix}=|A||B|$$

$$\begin{vmatrix}0&A\\B&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C&A\\B&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&A\\B&C\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

【例 2】计算$\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&2&0&0\\2&3&0&0\end{vmatrix}$.

（3）分块矩阵的逆

A,B分别为m阶，n阶可逆方阵

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$$

【例 3】求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

（4）分块矩阵伴随

【例 4】设 A,B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵．若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（　　）

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$　　　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

【例 5】设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 是单位矩阵，求 B.

【分块形式2】将矩阵按行或按列分块。

也即将矩阵 $\mathbf{A}$ 写成 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 或 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \cdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_m$ 分别代表矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量和行向量。

这种情况下的加法、数乘和转置运算和前面类似，我们着重讲一下乘法：

设 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)$，假设 $\mathbf{B}=(b_{ij})$ 为 $n\times m$ 矩阵，则

$$\mathbf{BA}=\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_2,...,\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_n)$$

$$\mathbf{AB}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$=(b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+...+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2...+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,...,b_{1m}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2m}\boldsymbol{\alpha}_2+...+b_{nm}\boldsymbol{\alpha}_n)$$

【例 6】：设 3 阶方阵 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$|\mathbf{A}|=a$，

试计算 $|(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)|$.

§6 初等变换

【定义】：我们对矩阵可以做如下三种**初等行（列）变换**：

a. 交换矩阵的两行（列）；

b. 将一个非零数 k 乘到矩阵的某一行（列）

c. 将矩阵的某一行（列）的 k 倍加到另一行上。

行阶梯形矩阵：①可画出一条阶梯线，线的下方全为 0，竖线右边的第一个元素是非零元；

②每个台阶的高度只有 1 行，宽度不限（台阶数就是非零行的行数）.

行最简形矩阵：①是一个行阶梯形矩阵；

②每个非零行的第一个非零元是 1，这些 1 所在列的其他元素是 0.

结论：任何一个矩阵可以通过有限次的初等行变换转化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

【例 1】将矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & -6 & 2\end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

【矩阵等价】如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价，记为 $A\cong B$. 矩阵的等价关系具有：①反身性；②对称性；③传递性.

【初等变换法求逆】 $(A \mid E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E \mid A^{-1})$.

【例 2】计算 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

【例 3】已知 A,B 为三阶方阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 E 为三阶单位阵

（1）证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；

（2）若 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

【例 4】求解矩阵方程 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 5\end{pmatrix}$.

§7 初等矩阵

【定义】：对单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵称之为**初等矩阵**。由于初等变换有三种，初等矩阵也就有三种：

1、**对换矩阵**：交换单位矩阵的第 i 行和第 j 行得到的初等矩阵记作 $\mathbf{E}_{ij}$，该矩阵也可以看做

交换单位矩阵的第 i 列和第 j 列得到的。如 $\mathbf{E}_{1,3}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。

2、**数乘矩阵：**将一个非零数 k 乘到单位矩阵的第 i 行得到的初等矩阵记作 $\mathbf{E}_i(k)$；该矩阵也可以看做将单位矩阵第 i 列乘以非零数 k 得到的。如 $\mathbf{E}_2(-5)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

3、**倍加矩阵：**将单位矩阵的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上得到的初等矩阵记作 $\mathbf{E}_{ij}(k)$；该矩阵也可以看做将单位矩阵的第 i 列的 k 倍加到第 j 列上得到的。如 $\mathbf{E}_{32}(-2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$。

注：1. 初等矩阵都只能是做单位矩阵做**一次**初等变换之后得到的。
2. 对每个初等矩阵，都要从行和列的两个角度来理解它，这在上面的定义中已经说明了。尤其需要注意初等矩阵 $\mathbf{E}_{ij}(k)$ 看做列变换是将单位矩阵第 i 列的 k 倍加到第 j 列。

【性质】

（1）**初等变换与初等矩阵的关系：左行右列！**

在 $A_{m\times n}$ 的左边乘上 m 阶初等矩阵，相当于对 A 施行一次相应的初等行变换；

在 $A_{m\times n}$ 的右边乘上 n 阶初等矩阵，相当于对 A 施行一次相应的初等列变换.

（2）初等矩阵均可逆，而且初等矩阵的逆矩阵是同类型的初等矩阵

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij}，\quad E_i^{-1}(k)=E_i(\frac{1}{k})\quad，\quad E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k).$$

$$\left|E_{ij}\right|=-1，\quad \left|E_i(k)\right|=k\quad，\quad \left|E_{ij}(k)\right|=1.$$

$$\left(E_{ij}\right)^*=-E_{ij}，\quad \left[E_i(k)\right]^*=kE_i(\frac{1}{k})\quad，\quad \left[E_{ij}(k)\right]^*=E_{ij}(-k).$$

$$\left(E_{ij}\right)^T=E_{ij},\left(E_i(k)\right)^T=E_i(k),\left(E_{ij}(k)\right)^T=E_{ji}(k).$$

（3）A 可逆 $\Leftrightarrow A=P_1P_2\quad P_l$，其中 P_i 均为初等矩阵.

（4）$A_{m\times n}\cong B_{m\times n}\quad\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{m\times m}$，使 $PAQ=B$.

【例 1】设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为（　　）

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【例 2】设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（　　）

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$　　(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

【例 3】设 A 是 n 阶可逆矩阵，将 A 的第 i 行与第 j 行对调后得到的矩阵记为 B，证明 B 可逆，并求 AB^{-1}.

练习：设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$，$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则必有（　　）

$(A)\ \mathbf{AP_1P_2=B}$　　$(B)\ \mathbf{AP_2P_1=B}$　　$(C)\ \mathbf{P_1P_2A=B}$　　$(D)\ \mathbf{P_2P_1A=B}$

§8 矩阵的秩

【定义1】：任选矩阵A中的任意k行k列所形成的k阶行列式称为矩阵A的一个k**阶子式**。

如对矩阵A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，选取第1、2行，第2、3列得到的一个2阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$就是矩阵$A$的一个2阶子式。选取矩阵的所有3行3列就可以得到一个3阶子式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$。

注：子式的阶数不超过矩阵行数和列数的最小值。

【定义2】：矩阵A最高阶非零子式的阶数称之为**矩阵A的秩**，记为$r(A)$。

如对上述矩阵A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，由于它有一个非零的2阶子式$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$，它的三阶子式只有一个：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$。可知A最高阶非零子式的阶数为2，故有$r(A) = 2$。

零矩阵没有非零子式，我们规定它的秩为0.

【定理】

（1）$r(A) = r \Leftrightarrow A$中有$r$阶子式不为0，而$r+1$阶子式全为0.

（2）$r(A) \geq 1 \Leftrightarrow A \neq O$.

（3）$r(A) = 1 \Leftrightarrow A \neq O$，且$A$的任意两行（列）成比例.

（4）若矩阵$A \cong B$，则$r(A) = r(B)$，即初等变换不改变矩阵的秩.

【秩的计算】

利用初等行变换求矩阵的秩：将矩阵通过初等行变换化为行阶梯形矩阵，矩阵的秩就等于它的行阶梯形矩阵的非零行行数.

【例 1】求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩.

【例 2】设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$，已知 $r(A)=2$，求 λ,μ 的值.

【有关秩的重要公式】

（1）$0 \le r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$.

（2）$r(A)=r(A^T)=r(kA)\ (k\neq 0)$.

（3）$r(A+B) \le r(A)+r(B)$.

【例 3】设 A 为 n 阶矩阵，证明：$r(A+E)+r(A-E)\geq n$.

（4）$\max\{r(A),r(B)\} \le r(A,B) \le r(A)+r(B)$.

（5）$r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$.

（6）若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$.

【例 4】设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&2&0&1\\0&0&3&-1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$，则 $r(BA+2A)=$ ________.

（7）若 $A_{m\times n}B_{n\times s}=O$，则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

【例 5】A 为 4 阶方阵，且满足: $A^2=A$, 则 $r(A)+r(A-E)=$

【例 6】已知 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$ 为 3 阶非零矩阵，且满足是 $PQ=O$，则（　　）

(A)　$t=6$ 时，P 的秩必为 1　　　(B)　$t=6$ 时，P 的秩必为 2

(C)　$t\neq 6$ 时，P 的秩必为 1　　　(D)　$t\neq 6$ 时，P 的秩必为 2

（8）设 A 是 n 阶矩阵，则 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1\end{cases}$

【例 7】若 A，A^* 和 B 均是 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $r(B)=$（　　）

(A)1　　(B)2　　(C) $n-1$　　(D)无法确定

第三章 向量组与方程组

§1 线性方程组

1）线性方程组及其矩阵表示

【定义】：方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 称为 m 个方程，n 个未知量的**线性方程组**。其中 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为未知数，m 为方程的个数，$b_1,b_2,\ldots,b_n$ 为常数项。

如果常数项 $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$，则称该方程组为**齐次线性方程组**。

如果 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 不全为零，则称该方程组为**非齐次线性方程组**，

将任一非齐次线性方程组的常数项改为零所得到的齐次线性方程组称为原方程组的**导出组**。

注：1）对于线性方程组我们有三个基本的问题：是否有解（解的存在性）；有解时，解是否唯一（解的唯一性）；解不唯一的时侯，怎么表示所有的解（解的结构）。

2）齐次线性方程组的特殊性在于它肯定是有解的：直接令 $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ 即可。换句话说，齐次线性方程组一定是有零解的。因此，对齐次方程组，解的存在性是不用讨论的，需要讨论的只有解的唯一性和通解的表示。其中，解的唯一性的问题又称为是否有非零解的问题（解唯一对应无非零解，解不唯一对应有非零解）。

【定义 2】：由线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 的系数构成的 $m\times n$ 矩阵

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为该线性方程组的**系数矩阵**。由线性方程组的系数矩阵和常数

项构成的 $m\times(n+1)$ 矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 称为该线性方程组的**增广矩阵**。

如果令 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$,$b=(b_1,b_2,\dots,b_m)^T$ ，利用矩阵的乘法，我们可以将原线性方程组简写为 $Ax=b$ 。

注：非齐次线性方程组由其增广矩阵唯一确定，而齐次线性方程组则是由其系数矩阵唯一确定的。

2）高斯消元法

a.线性方程组的初等变换

我们对线性方程组可以作如下的三种变换：

（1）将一个非零常数 k 乘到方程的两端；

（2）将一个方程的若干倍加到另一个方程上；

（3）交换两个方程的位置。

我们将线性方程组的这三种变换称之为线性方程组的**初等变换**。

注：

1、对方程组做初等变换得到的新的线性方程组与原来的线性方程组是同解的。

2、齐次线性方程组的常数项恒为零，我们在对其做初等变换时只需对它的系数矩阵做相应的初等行变换。

3、对非齐次线性方程组做初等变换等价于对增广矩阵做相应的初等行变换。

b.高斯消元法

我们对线性方程组作初等变换的目的是为了将其化为与之同解的如下形式的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}'x_1+a_{12}'x_2+a_{13}'x_3+\dots+a_{1n}'x_n=b_1' \\ \qquad a_{22}'x_2+a_{23}'x_3+\dots+a_{2n}'x_n=b_2' \\ \qquad\qquad a_{33}'x_3+\dots+a_{3n}'x_n=b_3' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{kk}'x_k+\dots+a_{mn}'x_n=b_k' \end{cases}$$

在该方程组中，每一个方程都至少比上一个方程少一个未知量，这种方程称为**阶梯型方程**。在阶梯型方程组中，每一行的第一个未知量称为**主元**，其余的未知量称为**自由变量**。

阶梯型方程组的解是比较容易求得的。将线性方程组通过初等变换化为同解的阶梯型方程组的过程就称之为**高斯消元法**。

易知，利用高斯消元法求解线性方程组就等价于利用初等行变换将线性方程组的矩阵化为阶梯型矩阵。

注：1）高斯消元法示例：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+4x_3=7 \\ x_1+3x_2+9x_3=13 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_2+3x_3=4 \\ 2x_2+8x_3=10 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_2+3x_3=4 \\ x_2+4x_3=5 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_2+3x_3=4 \\ x_3=1 \end{cases}$$ 。

从最后一个线性方程组中不难求出原线性方程组的解为$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$。

2）高斯消元法的矩阵形式

对上述的线性方程组，其求解过程等价于对其增广矩阵作如下的变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

还可以继续化简，化为行最简形，再将最后的增广矩阵还原为线性方程组同样可以求出原方程组的解。不难看出该求解过程更为简洁。

§2 克莱姆法则（克拉默法则）

设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad ①$$

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$称为方程组①的系数行列式.

【定理 1】

当$D \neq 0$时，方程组（1）有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中D_j（$j = 1,2,\cdots,n$）是把D中第j列用$b_1, b_2, \cdots, b_n$代替后所得到的n阶行列式.

当$D = 0$时，方程组①无解或有无穷多解.

【定理 2】

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = 0, \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \quad ②$$

当 $D \neq 0$ 时，方程组②只有零解；

当 $D = 0$ 时，方程组②有非零解.

注：克拉默法则的局限性，必须为 n 个方程 n 个未知量的方程组。

【例 1】λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$ 有非零解？

练习：讨论齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ kx_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 是否有非零解。

§3 齐次线性方程组解的判定及求解

齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 的解的判定

【定理】① $Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n \xleftrightarrow{当m=n时} |A| \neq 0$.

② $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n \xleftrightarrow{当m=n时} |A| = 0$.

解法：

ⅰ）把系数矩阵 A 通过**初等行变换**化为行阶梯形，若 $r(A) = n$，则方程组只有零解；

ⅱ）若 $r(A) < n$，则进一步把 A 化为行最简形；

ⅲ）设 $r(A) = r$，把行最简形中 r 个非零行的非零首元所对应的未知数取为非自由未知数，其余 $n-r$ 个未知数取为自由未知数（简称为自由量），令自由未知数分别等于

$c_1,c_2,\quad ,c_{n-r}$，把非自由未知数用 $c_1,c_2,\quad ,c_{n-r}$ 表示，就得到含 $n-r$ 个任意常数的通解.

【例 1】设 A、B 分别为 $m\times n$、$n\times m$ 矩阵，则齐次方程组 $ABx=0$（　　）

(A) 当 $n>m$ 时，仅有零解　　　　(B) 当 $n>m$ 时，必有非零解

(C) 当 $m>n$ 时，仅有零解　　　　(D) 当 $m>n$ 时，必有非零解

【例 2】求解下列线性方程组

（1）$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0, \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0. \end{cases}$$

（2）$$\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

【例 3】求与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.

【例 4】写一个以 $x=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为通解的齐次线性方程组.

§4 非齐次线性方程组解的判定及求解

$A_{m\times n}x=b(b\neq 0)$ 的解的判定.

【定理】

① $Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)<r(A,b)$.

② $Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)=n \overset{\text{当}m=n\text{时}}{\Leftrightarrow} |A|\neq 0$.

③ $Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,b)<n$.

【推论】若 $r(A_{m\times n})=m$，则方程组 $A_{m\times n}x=b$ 一定有解.（行满秩一定有解）

解法：

i ）把增广矩阵 (A,b) 通过初等行变换化为行阶梯形，

若 $r(A)<r(A,b)$，则方程组无解；

ii ）若 $r(A)=r(A,b)$，则进一步把 (A,b) 化为行最简形；

iii）若 $r(A)=r(A,b)=n$，则由行最简形直接可得方程组的唯一解；

iv）若 $r(A)=r(A,b)<n$，设 $r(A)=r(A,b)=r$，把行最简形中 r 个非零行的非零首元所对应的未知数取为非自由未知数，其余 $n-r$ 个未知数取为自由未知数，令自由未知数分别等于 $c_1,c_2,\quad,c_{n-r}$，把非自由未知数用 $c_1,c_2,\quad,c_{n-r}$ 表示，就得到含 $n-r$ 个任意常数的通解.

【例 1】求解下列线性方程组

（1）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1. \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\qquad\quad =5, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3. \end{cases}$

练习 1：判断下列线性方程组是否有解，如果有解，是有唯一解还是有无穷多解。

$$(1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2+4x_3=8 \\ x_1+3x_2+9x_3=13 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=5 \\ -2x_1+3x_2+3x_3=1 \\ -x_1+x_2+4x_3=6 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3 \\ 2x_1-x_2+4x_3=1 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

【例 2】：已知线性方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解，则 $a=$_________。

练习 2：设线性方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多解，则 $a=$_________。

【例 3】λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2. \end{cases}$（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？在方程组有无穷多个解时，求其通解.

【练习】非齐次线性方程组$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-(\lambda+1) \end{cases}$

问λ为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

§5 向量组及其线性组合

1）向量组及其运算

【定义 1】：由n个实数$a_1,a_2,\ldots a_n$组成的n元有序实数组$\left(a_1,a_2,\ldots a_n\right)$称之为$n$维**行向量**，

如果该实数组是纵向排列的$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，则称其为$n$维**列向量**。

由多个同型向量（维数相同且都为行向量或列向量）组成的集合称之为**向量组**。

注：两个n维向量$\alpha=\left(a_1,a_2,\ldots a_n\right)$和$\beta=\left(b_1,b_2,\ldots b_n\right)$相等当且仅当它们同型且各分量相等。

【定义 2】：假设$\alpha=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$则可以定义如下运算：

转置：$\alpha^T=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$，通常我们也习惯把列向量写成$\alpha=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)^T$

向量加法：$\alpha+\beta=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n\right)^T$

向量数乘：$k\alpha=\left(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n\right)^T$

注：向量也可以看作矩阵，向量的运算也可以看作矩阵里相应的运算，矩阵运算中的运算法则在向量里仍然适用。

2）线性表出

【定义 3】：设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 是 m 个 n 维向量，$k_1,k_2,...k_m$ 是 m 个常数，则称 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的一个**线性组合**。

【定义 4】：设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 是 m 个 n 维向量，β 是一个 n 维向量，如果 β 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的一个线性组合，则称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ **线性表出**。

该定义也可以等价地描述为：存在实数 $k_1,k_2,...k_m$，使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m$。

【定理 1】

向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m$ 线性表示,

$\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\quad+x_m\alpha_m=\beta$ 有解.

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m)=r(\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m,\beta)$.

【例 1】证明:向量 $\beta=\begin{pmatrix}8\\-2\\5\\-9\end{pmatrix}$ 能由向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\7\end{pmatrix}$ 线性表示，并写出表达式.

练习：判断向量 β 是否能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（1）$\alpha_1=(1,-2,3),\alpha_2=(1,4,9),\alpha_3=(1,1,1),\beta=(2,1,5)$

（2）$\alpha_1=(1,-1,2)^T,\alpha_2=(3,-2,1)^T,\alpha_3=(4,-3,3)^T,\beta=(-2,1,1)^T$

（3）$\alpha_1=(1,1,-2)^T,\alpha_2=(2,-2,3)^T,\alpha_3=(3,-1,1)^T,\beta=(0,1,0)^T$

【思考】已知 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$，$\alpha_2=(1,t,-1)^T$，$\alpha_3=(t,1,2)^T$，$\beta=(4,t^2,-4)^T$，若 β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，且表示法不唯一，求 t。

【定义 5】如果向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ 中的每一个向量都能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出，则称向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ **线性表出**。

注：零向量可以由任何向量组线性表出；

$\alpha_i(i=1,2,...,m)$ 一定可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出；

任何 n 维向量都可以由 n 维基本单位向量组 $e_1,e_2,...,e_n$ 线性表出。

【**定理 2**】向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$.

【推论】向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX=B$ 有解.

【例 2】确定常数 a，使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$，$\alpha_2=(1,a,1)^T$，$\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T$，$\beta_2=(-2,a,4)^T$，$\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

【**定义 6**】：设有向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 与向量组（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$，如果向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）能相互线性表出，则称向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）**等价**，记作（Ⅰ）≅（Ⅱ）。

【**定理 3**】向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$.

【例 3】设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$

证明：向量组 α_1,α_2 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价.

注：两个矩阵的等价与两个向量组的等价有什么区别和联系？
区别：
（1）矩阵等价指的是 A 可以通过有限次初等变换变成 B ，因此，两个不同型的矩阵是不可能等价的；
（2）两向量组的等价指的是它们能够相互线性表示，它们各自所含向量的个数可能是不一样的。
联系：

（1）若矩阵 A 经初等行变换化为 B ，则 A,B 的行向量组等价；

若矩阵 A 经初等列变换化为 C ，则 A,C 的列向量组等价；

若 A 经过初等行变换又经过初等列变换化为 D，则矩阵 A,D 等价，但 A,D 的行向量组与列向量组未必等价.

（2）反过来，

设两列向量组等价，若它们所含向量个数不相同，则它们对应的两个矩阵是不同型的，因而矩阵不等价；

若所含向量个数相同，那么它们对应的两个矩阵等价，但行向量组不一定等价，例如：

向量组 $A:\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ 与向量组 $B:\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 等价，它们对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$ 等价，但行向量组不等价；

§6 线性相关与线性无关的定义及判定

【定义】

给定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m$，如果存在一组不全为 0 的数$k_1,k_2,\quad,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\quad+k_m\alpha_m=0,$$

成立，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m$**线性相关，**否则称**线性无关**.

由线性相关的定义可知：

①单个零向量是线性相关的，含有零向量的向量组必线性相关，单个非零向量是线性无关的.

②两个向量线性相关的充分必要条件是这两个向量的分量对应成比例.

【判定】

【定理 1】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$\left(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_m\end{pmatrix}=0$有非零解$\Leftrightarrow r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m)<m$.

【定理 2】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性无关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$\left(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_m\end{pmatrix}=0$仅有零解$\Leftrightarrow r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m)=m$.

1、具体向量组的线性相关性

【例 1】讨论下列向量组的线性相关性.

（1）$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(2,-1,1)^T$；

（2）$\alpha_1=(1,-1,1)^T,\alpha_2=(2,1,-1)^T,\alpha_3=(1,-4,p)^T$.

【一些结论】

1：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m$线性相关当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m$中至少有一个是其余$m-1$个向量的线性组合。

2：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m$线性相关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$也线性相关。

注：“部分相关$\Rightarrow$整体相关”或“整体无关$\Rightarrow$部分无关”。

3：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$的延伸组$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_m\\ \beta_m\end{pmatrix}$也线性无关。

4：已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m,\beta$线性相关当且仅当$\beta$可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$线性表出。

5：阶梯型向量组线性无关。

6：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表出，且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，则有$s\le t$。

注：等价的描述为：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可以由向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表出，且$s>t$，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关。简单地记为："多数被少数线性表出，则必相关。"

7：$n+1$个n维向量必然线性相关。

注：本结论可以推广为任意多于n个n维向量必然线性相关；

2、抽象矩阵的线性相关性判定

【例 2】已知三维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，试证向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关.

【例 3】向量$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s\ (s\ge 2)$线性相关的充分必要条件是（　　）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有一个是零向量.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有两个向量成比例.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中至少有一个向量可由其余$s-1$个向量线性表示.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_s$中任一部分组线性相关.

【例 4】已知n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_m\ (m>2)$线性无关，则

(A) 对任意一组数 $k_1, k_2, \quad, k_m$，都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \quad + k_m\alpha_m = 0$.

(B) $m < n$.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \quad, \alpha_m$ 中少于 m 个向量构成的向量组均线性相关.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \quad, \alpha_m$ 中任意两个向量均线性无关.

【例 5】设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则对任意常数 k 必有

（A） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关　　（B） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关

（C） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关　　（D） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关

【例 6】设向量组 α, β, γ 线性无关，α, β, δ 线性相关，则

(A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示.　　(B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示.

(C) δ 必可由 α, β, γ 线性表示.　　(D) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示.

§7 向量组的秩与极大无关组

【定义 1】若向量组 A 的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_r$ 满足：

（1） $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_r$ 线性无关；

（2） A 中任意 $r+1$ 个向量（若存在）都线性相关.

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_r$ 为向量组 A 的极大线性无关组，简称**极大无关组**.

注：1）我们可以这样来理解极大线性无关组：首先，它必须是线性无关的；其次，定语“极大”可以理解为最多，也即再任意增加一个向量就会变得线性相关。也就是说，极大线性无关组就是原向量组中最多的、线性无关的子向量组。

2）极大无关组不唯一.对于向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$来说，由于$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$，可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。又由于$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，可知$\alpha_1,\alpha_2$即为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组；类似地，$\alpha_2,\alpha_3$和$\alpha_1,\alpha_3$也都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组。

3）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关的充要条件是极大线性无关组为其本身。

计算向量组极大线性无关组的步骤

i）将向量组作为列向量组成矩阵A（如果是行向量，则取转置后再计算）；

ii）对矩阵A做初等行变换，化为阶梯型矩阵，阶梯型矩阵中非零行的个数即为向量组的秩；

iii）在阶梯型矩阵中标出每个非零行的主元（第一个主元），主元所在列即对应原向量组的一个极大线性无关组。

注：注意只能做行变换

【例 1】设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1\\1&1&-2&1\\4&-6&2&-2\end{pmatrix}$，求矩阵$A$的列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组表示.

练习：设向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,a),\alpha_4=(1,-2,2,0)$线性相关，求$a$及该向量组的一个极大线性无关组.

相关结论：

定理 1：任一向量组和自己的极大线性无关组等价。

推论 1：向量组的任意两个极大线性无关组等价。

推论 2：等价的向量组的极大线性无关组等价。

定理 2：向量组任意两个极大线性无关组所含的向量的个数相等。

【定义 2】：向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$的极大线性无关组中所含向量个数称为该**向量组的秩**，记作

$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$。由一个零向量组成的向量组没有极大线性无关组，我们规定它的秩为 0。

注：要计算一个向量组的秩，只需找出其极大线性无关组即可。例如：对向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$，由于它的极大线性无关组为 α_1,α_2，故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$。

矩阵的秩与向量组的秩

分别将矩阵 A 写成按行分块和按列分块的形式：$A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\cdots\\\beta_m\end{pmatrix}$。其中

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 分别为矩阵 A 的列向量组和行向量组。

我们从矩阵 A 中可以读出 3 个秩，它们是

矩阵 A 的**秩**：矩阵 A 的非零子式的最高阶数；

矩阵 A 的**行秩**：向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$（行向量组）的极大线性无关组所含向量的个数；

矩阵 A 的**列秩**：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$（列向量组）的极大线性无关组所含向量的个数。

定理 1：矩阵的行秩等于列秩且等于矩阵的秩。

定理 2：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表出，

则 $r(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)$.

【例 2】设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\quad,\beta_s$ 线性表示，则（　　）

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

【思考】证明：$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$.

§8 齐次线性方程组解的性质与结构

【性质 1】若ξ_1,ξ_2是$Ax=0$的解，则$\xi_1+\xi_2$也是$Ax=0$的解.

【性质 2】若ξ是$Ax=0$的解，$k\in R$，则$k\xi$也是$Ax=0$的解.

【解的结构】设矩阵A的秩$r(A)=r$，则$Ax=0$的解集S的秩$r_S=n-r$.

$Ax=0$的解集S的一个极大无关组$\xi_1,\xi_2,\quad,\xi_{n-r}$，称为$Ax=0$的一个**基础解系**. 由以上两条性质可知，$Ax=0$的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\quad+k_{n-r}\xi_{n-r}\text{（}k_1,k_2,\quad k_{n-r}\text{是任意常数）.}$$

注 1: 1)结合对基础解系定义的说明,实质上齐次线性方程组$Ax=0$的解集的秩为$n-r(A)$;

2)由极大线性无关组的性质还可以得到:$Ax=0$任意$n-r(A)$个线性无关的解都是$Ax=0$的基础解系。

注 2: 基础解系是求齐次及非齐次线性方程组通解的关键，是解的结构部分最重要的概念，为了让考生对该概念有正确而全面的认识，我们从如下两方面来予以说明:

1）齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$是$Ax=0$的一组线性无关的解，它们可以线性表出$Ax=0$的任意解。也就是说，假设α是$Ax=0$的任一解，向量组$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s,\alpha$是线性相关的。通过上述分析不难发现，基础解系本质上是齐次线性方程组解集的极大线性无关组。

2）由于基础解系是一个极大线性无关组，那么极大线性无关组的性质对基础解系同样成立，如:齐次线性方程组的任意两个基础解系是等价的，齐次线性方程组的任意两个基础解系所含的向量个数相等，故方程组的通解形式不唯一。

【例 1】设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\a&b&c\end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，则$A^*x=0$的通解是

(A) $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$.　(B) $k_1\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$.　(C) $k_1\begin{pmatrix}3\\1\\c\end{pmatrix}$.　(D) $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$为任意常数）.

【例 2】已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ ax_1+bx_2+cx_3=0, \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0. \end{cases}$

（1）a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

（2）a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多组解，并用基础解系表示全部解.

【思考 1】已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$ 的基础解系中有 2 个向量，求 a,b 并求它的一个基础解系。

【思考 2】设 A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为 $n\times s$ 矩阵，证明：若 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$.

§9 非齐次线性方程组解的性质与结构

【性质 3】若 η_1,η_2 是 $Ax=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

【推广】若 $\eta_1,\eta_2,\ \ ,\eta_n$ 是 $Ax=b$ 的解，若满足

1）$k_1+k_2+\ \ +k_n=1$，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ \ +k_n\eta_n$ 是 $Ax=b$ 的解；

2）$k_1+k_2+\ \ +k_n=0$，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ \ +k_n\eta_n$ 是 $Ax=0$ 的解.

【性质 4】若 η 是 $Ax=b$ 的解，ξ 是 $Ax=0$ 的解，则 $\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解.

【解的结构】

设η^*是$Ax=b$的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\quad,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，由以上两条性质可知，$Ax=b$的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\quad+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*\text{（}k_1,k_2,\quad k_{n-r}\text{是任意常数）.}$$

注：1）非齐次线性方程组的通解为其导出组的通解加上它任意一个特解；
2）由定理可知求解非齐次线性方程组的关键也是求其基础解系。

【例 1】设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 4 元非齐次线性方程组$Ax=b$的 3 个解向量，$r(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$C$为任意常数，则方程组$Ax=b$的通解为（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

【例 2】：已知β_1，β_2是$Ax=b$的两个不同的解，a_1，α_2是相应齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，k_1,k_2是任意常数，则$Ax=b$的通解是

（A）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；（B）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

（C）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$；（D）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

【例 3】设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$，令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，求线性方程组$Ax=\beta$的通解。

【例4】：设$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$　$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$

已知线性方程组$Ax=b$存在两个不同的解

（Ⅰ）求λ，a；

（Ⅱ）求方程组$Ax=b$的通解。

【小结】：对含未知参数的线性方程组进行讨论的一般步骤：

1）对方程组的增广矩阵进行初等行变换化为行阶梯型矩阵；

2）讨论线性方程组解的情况（有唯一解，无解，有无穷多解），确定每种情况下未知参数的值或满足的关系式；

3）在有解的情况下求解方程组（由于方程组已被化为行阶梯性矩阵，此时求解该线性方程组就变得相对容易了）。

【思考】

已知$(1,1,1,1)^T,(1,2,3,4)^T,(1,0,1,0)^T$均为非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+a_1x_3+a_2x_4=a_3 \\ x_1-x_2+b_1x_3+b_2x_4=b_3 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=1 \end{cases}$的解，求其通解。

回顾向量组与方程组的关系：

定理：向量β可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性表出$\Leftrightarrow$线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$有解。

定理：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$有非零解。

注：线性方程组和向量组是同一个问题的两个不同的侧面。

§10 向量的内积、长度及正交化

【定义 1】设n维向量$\alpha=\left(a_1,a_2,\quad,a_n\right)^T$及$\beta=\left(b_1,b_2,\quad,b_n\right)^T$，则

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\quad a_nb_n=\alpha^T\beta.$$

称为向量α与β的**内积**.

当$(\alpha,\beta)=0$时，称向量α与β**正交**. **零向量与任何向量正交.**

【性质 1】 （1）$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$.

（2）$(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$.

（3）$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$.

（4）当$\alpha=0$时，$(\alpha,\alpha)=0$；当$\alpha\neq 0$时，$(\alpha,\alpha)>0$.

【定义 2】令$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\quad+a_n^2}$，$\|\alpha\|$称为向量$\alpha$的长度. 当$\|\alpha\|=1$时，称$\alpha$为单位向量，若$\alpha$不是单位向量，则$\alpha$方向上的单位向量为$\alpha_0=\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$.

【性质 2】（1）当$\alpha=0$时，$\|\alpha\|=0$；当$\alpha\neq 0$时，$\|\alpha\|>0$.

（2）$\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\cdot\|\alpha\|$.

【定义 3】正交向量组：一组两两正交的非零向量.

规范正交向量组：一组两两正交的单位向量.

【性质 3】（1）正交向量组线性无关；

（2）任一线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_r$都可以通过以下方法规范正交化.

①施密特正交化：

令$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$，……，

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\quad-\frac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1},$$

②规范化：$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\quad,\gamma_r=\dfrac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$.

【例 1】设$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

【定义 4】若n阶矩阵A满足$A^TA=E$，即$A^{-1}=A^T$，则称A为正交矩阵．若A为正交矩阵，则称线性变换$y=Ax$为正交变换.

【性质 4】（1） A为正交矩阵$\Leftrightarrow A$的列（行）向量组是规范正交向量组.

（2） A为正交矩阵$\Rightarrow |A|=\pm 1$.

【例 2】设x为n维列向量， $x^Tx=1$，令$H=E-2xx^T$，证明H是对称的正交阵.

§11 （数一专项）向量空间、维数、基、坐标

【向量空间，基，维数】

设V是n维向量的一个非空集合，如果它对加法和数乘两种运算封闭，即

（1）当$\alpha,\beta\in V$时， $\alpha+\beta\in V$，

（2）当$\alpha\in V$， $k\in R$时， $k\alpha\in V$，

则称V为向量空间．V的极大无关组叫做V的基（或基底），V的秩r叫做V的维数，V叫做r维向量空间.

【生成的向量空间，子空间】

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，则$L=\{x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m|k_1,k_2,\cdots,k_m\in R\}$叫做由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$所生成的向量空间.

设有向量空间V_1和V_2，若$V_1\subset V_2$，则称V_1是V_2的子空间.

【坐标】

设$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基，则$V$中任一向量$x$可以唯一表示为：

$$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\quad+k_r\alpha_r,$$

其中系数$k_1,k_2,\quad,k_r$称为向量x在基$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_r$下的坐标.

全体n维向量构成的向量组记作R^n，叫做n维向量空间．向量组$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \\0\end{pmatrix},\quad,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \\1\end{pmatrix}$是$R^n$的一个基，对任一$n$维向量$x=(x_1,x_2,\quad,x_n)^T$，有

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\quad+x_ne_n.$$

【规范正交基】

设$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_r$是向量空间$V$的一个基，如果$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_r$两两正交，且都是单位向量，则称$\alpha_1,\alpha_2,\quad,\alpha_r$是$V$的一个规范正交基．对任一$x\in V$，有

$$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\quad+k_r\alpha_r,\ \text{其中}k_i=(x,\alpha_i),i=1,\quad,r$$

【基变换，过渡矩阵，坐标变换】（以3维向量空间为例）

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^3$的一个旧基，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$是$R^3$的一个新基，并设

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P\ \text{（基变换公式）},$$

则P称为从旧基到新基的过渡矩阵．有

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$$

设向量$x=(x_1,x_2,x_3)^T$在旧基和新基下的坐标分别为y_1,y_2,y_3和z_1,z_2,z_3，即

$$x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix},$$

则
$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

称为从旧坐标到新坐标的坐标变换公式.

【例 1】设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_2,\dfrac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2$,

$\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

【例 2】

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$

（Ⅰ）证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$为$\boldsymbol{R}^3$的一个基；

（Ⅱ）当k为何值时，存在非零向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标相同，并求所有的$\boldsymbol{\xi}$.

第四章 矩阵的相似对角化

§1 特征值与特征向量的定义

【定义】：设 A 为 n 阶矩阵，λ 是一个数，若存在一个 n 维的非零列向量 α 使得关系式 $A\alpha=\lambda\alpha$ 成立。则称 λ 是矩阵 A 的**特征值**，α 是属于特征值 λ 的**特征向量**。

设 E 为 n 阶单位矩阵，则行列式 $|\lambda E-A|$ 称为矩阵 A 的**特征多项式**。

注：1）要注意：特征向量必须是非零向量；

2）等式 $A\alpha=\lambda\alpha$ 也可以写成 $(A-\lambda E)\alpha=0$，因此 α 是齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 的解，由于 $\alpha\neq 0$，可知 $(A-\lambda E)x=0$ 是有非零解的，故 $|A-\lambda E|=0$；反之，若 $|A-\lambda E|=0$，那么齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 有非零解，可知存在 $\alpha\neq 0$ 使得 $(A-\lambda E)\alpha=0$，也即 $A\alpha=\lambda\alpha$。

由上述讨论过程可知：λ 是矩阵 A 的特征值的充要条件是 $|A-\lambda E|=0$（或 $|\lambda E-A|=0$），而特征值 λ 的特征向量都是齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 的非零解。

3）由于 $|\lambda E-A|$ 是 n 次多项式，可知 $|A-\lambda E|=0$ 有 n 个根（包括虚根），也即 n 阶矩阵有 n 个特征值；任一特征值都有无穷多特征向量

【计算具体矩阵的特征值与特征向量】

步骤：

1）计算行列式 $|\lambda E-A|$，解方程 $|\lambda E-A|=0$ 得到特征值；

2）对每个特征值，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$，$(\lambda E-A)x=0$ 的**非零解**即为特征值 λ 所有特征向量。

【例 1】 求下列矩阵的特征值和特征向量.

（1）$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$.

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

【练习】求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量。

【例 2】：已知$\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量，试确定参数 a,b，及特征向量ξ所对应的特征值。

【思考 1】设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & b & \dots & b \\ b & 1 & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & 1 \end{bmatrix}, b\neq 0$，求 A 的特征值和特征向量。

【思考 2】设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$，求 A 所有的特征值。

【小结】：本题的结论可以推广，假设矩阵 A 的秩为 1（ A 的各行及各列元素均成比例），则 A 的特征值为 0 （ $n-1$ 重）， $tr(A)$ 。

【练习 1】若 n 阶矩阵 A 的所有元素均为 1 ，求 A 的所有特征值。

【练习 2】若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$ ，其中 α^T 为 α 的转置，求矩阵 $A = \beta\alpha^T$ 的非零特征值。

§2 特征值特征向量的性质

1、特征值的性质

（1）对角矩阵、上三角矩阵和下三角矩阵的特征值是主对角线元素.

（2）设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的 n 个特征值，则

①$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 是 A 的主对角元之和，称为矩阵 A 的迹，记作 $tr(A)$.

②$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$ （ A 可逆 $\Leftrightarrow$ 0 不是特征值）.

（3）若行列式 $|aE+bA|=0$，则 $\lambda = -\dfrac{a}{b}$ 是 A 的一个特征值.

【例 1】设 A 、 $A+E$ 、 $A-2E$ 均为 3 阶不可逆矩阵，则 $|3A-E| =$ （　　）

(A) 0　　(B) 8　　(C) 14　　(D) 20

2、特征向量的性质

（1）矩阵 A 的对应于不同特征值的特征向量线性无关.

（2）矩阵 A 的 k 重特征值 λ 至多有 k 个线性无关的特征向量．特别地，当 A 有 n 个不同的特征值时（没有重根），A 有 n 个线性无关的特征向量.

（3）设 $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_s$ 都是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，则对任意常数 $k_1,k_2,...,k_s$，当 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_s\alpha_s\neq 0$ 时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_s\alpha_s$ 也是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量。

注：概括为同一特征值特征向量的任意非零线性组合仍为该特征值的特征向量。

总结：设 n 阶方阵 A 的特征值为 λ，A 的属于特征值 λ 的特征向量为 α，则

A	$A+kE$	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
λ	$\lambda+k$	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
α	α	α	α	α	α	α	不确定	$P^{-1}\alpha$

【例 2】已知 3 阶方阵 A 的三个特征值为$1,-2,3$，则$|A|=$__________，
A^{-1} 的特征值为 __________，A^* 的特征值为__________，
$\left(A^*\right)^{-1}$ 的特征值为 __________,$\left(A^*\right)^*$ 的特征值为__________，
$(2A)^*$ 的特征值为__________，$A^2-2A^{-1}+3E$ 的特征值为__________.

【练习 1】若 3 阶矩阵 A 所有特征值为$1,2,3$，求$|2A-E|$.

【练习 2】若 3 阶矩阵 A 满足$|A+E|=|E-A|=|2A-E|=0$，求$|A^{-1}+2E|$。

【练习 3】若 3 阶矩阵 A 所有特征值为$3,1,1$，求$|A^*+E|$。

【思考】若n阶矩阵A满足$A^2+A=O$，且$tr\left(A\right)=-2$，求$\left|A+2E\right|$。

【例 3】设x_1,x_2是 3 阶矩阵A的属于特征值λ_1的两个线性无关的特征向量，x_3是A的属于特征值λ_2的特征向量，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，则（　　）

(A) $k_1x_1+k_2x_2$是A的特征向量　　(B) $k_1x_1+k_2x_3$是A的特征向量

(C) x_1+x_2是$2A-E$的特征向量　　(D) x_2+x_3是$2A-E$的特征向量

【思考】设A为 3 阶矩阵，$\left|A\right|=0$，α,β为线性无关的 3 维列向量，满足$A\alpha=\beta,A\beta=\alpha$，试求$tr\left(A+2E\right)^*$.

【例 4】设λ_1和λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为x_1和x_2，证明x_1+x_2不是A的特征向量.

思考：设n阶矩阵A满足$A^3+2A^2=O$，证明：矩阵$A+E$可逆。

§3 矩阵的相似对角化

【定义 1】设 A 和 B 为两个 n 阶方阵，如果存在一个 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 和 B 相似，记作 $A\sim B$。

注： i）对任意 n 阶矩阵 A，有 A 与 A 相似；

ii）若 A 与 B 相似，则 B 与 A 相似；

iii）若 A 与 B 相似，若 B 与 C 相似，则 A 与 C 相似。

【定义 2】对 n 阶方阵 A，如果存在一个 n 阶对角矩阵 Λ 使得 A 与 Λ 相似，则称矩阵 A 可相似对角化，并把 Λ 称为矩阵 A 的相似标准型。

注：1）相似对角化一般简称对角化，矩阵 A 可对角化的定义还可以等价地描述为

i）存在 n 阶可逆矩阵 P，与 n 阶对角矩阵 Λ，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$；

ii）存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

2）相似对角化是本章的核心考点，关于相似对角化我们主要掌握两个问题：

一是矩阵可相似对角化的条件，

二是相似对角化的相关计算（最基本的是可逆矩阵 P，与 n 阶对角矩阵 Λ 的计算）

【相似矩阵的性质】

1、相似的必要条件：

若 $A\sim B$，则（1） A 与 B 有相同的特征值，

（2）$|A|=|B|$，

（3）$r(A)=r(B)$，

（4）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，

（5）$trA=trB$.

2、相似的充要条件：

若 $A\sim B \Leftrightarrow A^T\sim B^T \Leftrightarrow A^{-1}\sim B^{-1}(\text{若}A,B\text{可逆}) \Leftrightarrow A^*\sim B^*$

$\Leftrightarrow A+kE\sim B+kE$

注：

（1）相似的矩阵具有相同的特征值，这条性质在考试中用得比较多。需要注意的是它的逆命题不成立，也即：有相同特征值的矩阵不一定相似。例如，令 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，

容易检验矩阵 A,B 的特征值相同，但对于任意的二阶可逆矩阵 P，都有 $PBP^{-1}=O\neq A$，

可知 A,B 不相似。

（2）证明矩阵相似的方法：当 n 阶矩阵 A,B 都能对角化时，若它们有相同的特征值，则它们一定相似.

【例 1】设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x,y .

【例 2】 已知矩阵 A 和 B 相似，若 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，则 $r(A-E)=$________.

【相似对角化的结论】

【定理 1】n 阶矩阵 A 可相似对角化的充要条件是矩阵 A 存在 n 个线性无关的特征向量。同时，在等式 $A=P\Lambda P^{-1}$ 中，对角矩阵 Λ 的元素为 A 的 n 个特征值，可逆矩阵 P 的列向量为矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量，并且 P 中特征向量的排列顺序与 A 中特征值的排列顺序一致。

推论：设矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则矩阵 A 可相似对角化。

【例 3】求一个可逆矩阵，将 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 对角化，并求 A^{100} .

【定理 2】n 阶矩阵 A 可相似对角化的充要条件是对任意特征值 λ ，λ 线性无关的特征向量个数都等于 λ 的重数。

推论：n 阶矩阵 A 可相似对角化的充要条件是对任意特征值 λ , $n-r(\lambda E-A)=\lambda$ 的重数。

【例 4】设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可以对角化，求 a .

【练习】设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ a+5 & -a-2 & 2a\end{pmatrix}$ 问 a 为何值时 A 能对角化？

【例 5】设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，对应的特征向量依次为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，求 A .

【练习】已知 $A\alpha_i=i^2\alpha_i(i=1,2,3)$，其中 $\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2=(3,2,0)^T$，$\alpha_3=(2,0,0)^T$，求矩阵 A 。

【小结】：对于可相似对角化的矩阵来说，如果求出了所有的特征值与特征向量，就可以根据公式 $A=P\Lambda P^{-1}$ 反求出矩阵 A 。

§4 实对称矩阵的相似对角化

【实对称矩阵的性质】

设 A 为实对称矩阵，则

（1） A 的特征值全是实数；

（2） A 的属于不同特征值的特征向量必正交；

（3） A 的 k 重特征值必有 k 个线性无关的特征向量，即 $r\left(\lambda E-A\right)=n-k$；

（4） A 可以对角化，并且存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda$.

【例 1】：设 A 为3阶实对称矩阵，满足 $A^4+A^3+A^2+A=0$，若 A 的秩为2，则 $\left|A+2E\right|$=_______。

【练习】假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&a&1\\a&3&b\\1&b&3\end{pmatrix}$（$a>0$）有一个二重特征值2，求 a,b

【思考】设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解，但不唯一，

试求（1）a 的值 （2）正交矩阵 Q，使得 $Q^{T}AQ$ 为对角矩阵

【例 2】求一个正交矩阵，将对称阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 对角化.

【练习】设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$，试求正交矩阵 Q 及对角矩阵 Λ 使得 $Q^T AQ=\Lambda$ 。

【例 3】设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，对应 λ_1,λ_2 的特征向量依次为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，求 A .

【练习】设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$，与 λ_1 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 A .

第五章 二次型

§1 二次型的定义

【定义 1】含有 n 个变量 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\quad+a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\quad+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad ①$$

称为**二次型**．当系数 a_{ij} 都是实数时，称为实二次型，简称二次型．

由于 $x_ix_j=x_jx_i$，具有对称性，若令 $a_{ji}=a_{ij}(i<j)$，则

$$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i(i<j)$$

于是①式可以写成对称形式

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\dots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\quad+a_{1n}x_1x_n\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\quad+a_{2n}x_2x_n\\&+\quad+\\&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\quad+a_{nn}x_n^2\end{aligned} \qquad ②$$

利用矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n},x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则二次型可记为

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax,$$

其中对称矩阵 A 称为**二次型 f 的矩阵**，A 的秩称为**二次型 f 的秩**．

注： i ）n 元实二次型与 n 阶实对称矩阵之间有着一一对应的关系。

ii ）二次型的矩阵与其系数的关系是：对角线上的元素 a_{ii} 是 x_i^2 的系数，a_{ij} 和 a_{ji} 均为 x_ix_j 系数的一半。

【例 1】（1）写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 的矩阵；

（2）写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+3x_3)(x_1-2x_2+x_3)$ 的矩阵.

【小结】：对于任意实二次型来说，满足 $f=x^TAx$ 的矩阵 A 都有无穷多个（只要满足 $a_{ij}+a_{ji}$ 等于 x_ix_j 的系数即可）。在所有满足该式的矩阵中，实对称矩阵只有一个，二次型的矩阵特指该实对称矩阵。

【练习】已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则参

数 $c=$__________。

【思考】二次型 $f\left(x_1,x_2,\quad,x_n\right)=\left(a_1x_1+a_2x_2+\quad+a_nx_n\right)^2$ 的矩阵是__________.
秩是____________（$a_1,a_2,\quad,a_n$ 不全为零）

【定义 2】 如果令 $\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\ldots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\ldots+c_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\ldots+c_{nn}y_n \end{cases}$，并且其中 $|C|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，

则称该变量代换为**非退化（可逆）的线性变换**。如果令 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$，则该变换也可以简记为 $x=Cy$。

【定义 3】 设有 n 元二次型 $f=x^TAx$ 和 $g=y^TBy$，如果存在可逆的线性变换 $x=Cy$，将二次型 f 变成 g，则称这两个二次型**合同**。

【定义 4】 设有 n 阶实对称矩阵 A 和 B，如果存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC=B$，则称矩阵 A 和 B **合同**，记作 $A\quad B$。

注：1） 要注意讨论合同关系的矩阵必须是实对称矩阵。

2）两个二次型 $f=x^TAx$ 和 $g=y^TBy$ 合同的充要条件是它们的矩阵 A 和 B 合同。

3）合同矩阵的性质：

对任意 n 阶实对称矩阵 A,B,C，有 A 与 A 合同（反身性）；若 A 与 B 合同，则 B 与 A 合同（对称性）；若 A 与 B 合同且 B 与 C 合同，则 A 与 C 合同（传递性）；

4）若矩阵 A 与 B 合同，则 $r(A)=r(B)$；

若矩阵 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow$ A^T 与 B^T 合同 $\Leftrightarrow$ 若 A 可逆，则 A^{-1} 与 B^{-1} 合同.

§2 二次型的标准型

【定义】：如果二次型 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 中，只含有平方项，所有混合项 $x_ix_j(i\neq j)$ 的系数全为零，也即形如 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+...+d_nx_n^2$，则称该二次型为**标准形**。

注：求二次型 x^TAx 的标准形可以等价为：求可逆矩阵 C，使得可逆的线性变换 $x=Cy$ 能将原二次型化为标准形；或者，求可逆矩阵 C 以及对角矩阵 Λ，使得 $C^TAC=\Lambda$。

【定理 1】任何一个实二次型都可以通过合同变换化为标准形。
常用方法为：正交变换法，配方法。

【定理 2】任意一个二次型 $f=x^TAx$ 都可以经过正交变换 $x=Qy$ 化为标准形：

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\quad+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\quad,\lambda_n$ 是 A 的特征值.（即任一对称矩阵都与一个对角阵合同）

【例 1】分别用正交变换法和配方法将二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准形.

注：对以上两种方法化成的二次型结果进行比较，结果不一定相同，说明二次型的标准型不唯一，并且正交变换法化为的标准型中系数即为矩阵的特征值，但配方法化为的标准型中的系数却不一定是.

【练习】用正交变换法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形。

【例 2】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$ ，其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.

（1）求a,b的值.

（2）利用正交变换将二次型f化为标准形，并写出所用的正交变换.

【练习】已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（I） 求a的值；

（II） 求正交变换$x=Qy$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形；

【例 3】：用配方法将下列二次型化为标准形。

1） $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

2） $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1x_2+2x_2x_3$.

【例 4】【逆问题】已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经过正交变换$x=Py$可化为标准形$f=6y_1^2$，则$a=$____________。

【思考】已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.求矩阵 A ；

【小结】：将二次型 x^TAx 经过正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $y^T\Lambda y$ 之后，由于 $\Lambda=Q^TAQ=Q^{-1}AQ$，因此矩阵 A 与 Λ 之间既是相似关系也是合同关系。也就是说 Λ 也是 A 的相似标准形。因此 Λ 的对角元均为 A 的特征值，而 Q 的列向量就是所对应的特征向量。

§3 惯性指数与规范形

【定义 1】：二次型 $f=x^TAx$ 的合同标准形 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+...+d_nx_n^2$ 中正项的个数称之为二次型 $f=x^TAx$ 的**正惯性指数**；相应地，其中负项的个数称之为二次型 $f=x^TAx$ 的**负惯性指数**。

【定义 2】：如果某一标准形中平方项的系数仅为 $1,-1$ 或 0，也即形如

$x_1^2+...+x_p^2-x_{p+1}^2-...-x_{p+q}^2$，则称该二次型为**规范形**。

定理 1（惯性定理）：对于一个实二次型，不管通过怎样的坐标变换将它化为标准形，它的**正惯性指数**和**负惯性指数**都是不变的。

注： ⅰ）矩阵的正负惯性指数就是其正负特征值的个数；合同规范形中 1 和 -1 的个数分别等于该二次型的正负惯性指数。

ⅱ）该定理也可以等价地描述为合同的矩阵具有相同的惯性指数；或合同变换不改变惯性指数。

定理 2： 两个 n 元二次型合同的充要条件是它们的**正惯性指数**和**负惯性指数**均相同。

注： 两个二次型合同的充要条件还可以等价地描述为：合同规范形相同，特征值中正数和负数的个数一样。

【例 1】 下列矩阵中与 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

【例 2】：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的正负惯性指数分别为 $p=$ ______ $,q=$ ______ 。

【练习】 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正负惯指数都是 1，试计算 a 的值并用正交变换将二次型化为标准形。

【矩阵的三大关系】

等价： 矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称 A 与 B 等价；

等价的充要条件： $A\cong B\Leftrightarrow A,B$ 是同型矩阵且有相同的秩.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

相似：设 A,B 是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 A 与 B 相似，记为：$A\quad B$.

合同：两个 n 阶实对称矩阵 A 和 B，如存在可逆矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$，则称矩阵 A 和 B 合同.

合同的充要条件：二次型 x^TAx 与 x^TBx 有相同的正、负惯性指数；

合同的充分条件：实对称矩阵合同的充分条件是 $A\sim B$.

【例 3】设 A 是 n 阶方阵，交换 A 的第 i 列和第 j 列后再交换第 i 行和第 j 行得到矩阵 B，则 A 与 B

（A）等价但不相似.　　（B）相似但不合同.

（C）相似、合同，但不等价.　　（D）等价、相似、合同.

§4 二次型的正定性

【定义】 设有二次型 $f(x)=x^TAx$，如果对任何 $x\neq 0$，都有 $x^TAx>0$，则称 f 为**正定二次型**，并称对称阵 A 为**正定矩阵**.

【定理】 $f=x^TAx$ 为正定二次型（或对称阵 A 为正定矩阵）

$\Leftrightarrow$ 对任何 $x\neq 0$，都有 $x^TAx>0$；

$\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数为 n；

$\Leftrightarrow$ A 的所有特征值全为正；

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C，使得 $A=C^TC$，即 A 与 E 合同；

$\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式全为正.

【例 1】实对称矩阵 A 正定的充要条件是

（A）所有 k 阶子式为正.　　（B）所有特征值非负.

（C）$r(A)=n$.　　（D）A 的逆矩阵正定.

【例 2】若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是__________.

【例 3】设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=(kE+A)^2$，其中 k 为实数，求对角矩阵 Λ，使 B 与 Λ 相似，并求 k 为何值时，B 为正定矩阵.

【思考】假设矩阵 A 是 3 阶正定矩阵，证明：$|A+E|>1$。

【小结】:

●说明矩阵正定性最常用的三种思路：顺序主子式、特征值、定义。

●由于正定矩阵必为实对称矩阵，故如果要证明某矩阵为正定矩阵，在使用所有上述方法之前，先检验该矩阵为实对称矩阵。