《离散数学》期末考试题(H)参考答案

一、1. 2^n.

2. 反自反、反对称、传递.

3. 是.

4. 独异点.

5. 上确界和下确界.

二、1(C); 2(A); 3(B); 4(B); 5(D); 6(C); 7(A); 8(D); 9(B); 10(B).

三、1(×); 2(×); 3(√); 4(×); 5(√).

四、(1)**证** 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$，若 $f((x_1,y_1))=f((x_2,y_2))$，于是

$$(x_1+y_1,x_1-y_1)=(x_2+y_2,x_2-y_2),$$

进而 $x_1+y_1=x_2+y_2$ 且 $x_1-y_1=x_2-y_2$. 由此可得，$x_1=x_2,y_1=y_2$，因而 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$，故 f 是单射.

对于任意 $(p,q)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，取 $x=\dfrac{p+q}{2},y=\dfrac{p-q}{2}$，容易得知 $f((x,y))=(x+y,x-y)=(p,q)$.

由上可知，f 是双射.

(2)**解** 由上的证明过程知，$f^{-1}((x,y))=\left(\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}\right)$.

(3)**解** 很显然 $f^{-1}\circ f=I_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}}$，即 $(f^{-1}\circ f)((x,y))=(x,y)$.

$$(f\circ f)((x,y))=f((x+y,x-y))=((x+y)+(x-y),(x+y)-(x-y))=(2x,2y).$$

五、**解** $r(R)=R\cup I_A=\{(a,a),(a,b),(b,c),\underline{(b,b),(c,c)}\}$.

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{(a,a),(a,b),(b,c),\underline{(b,a),(c,b)}\}$.

$t(R)=\{(a,a),(a,b),(b,c),\underline{(a,c)}\}$.

六、**证**

(1) $\forall xP(x)$ P

(2) $P(c)$ US(1)

(3) $\forall x(P(x)\to(Q(y)\wedge R(x)))$ P

(4) $P(c) \to (Q(y) \wedge R(c))$　　US(3)

(5) $Q(y) \wedge R(c)$　　T(2)(4)I

(6)$Q(y)$　　T(5)I
(7)$R(c)$　　T(5)I

(8) $P(c) \wedge R(c)$　　T(2)(7)I

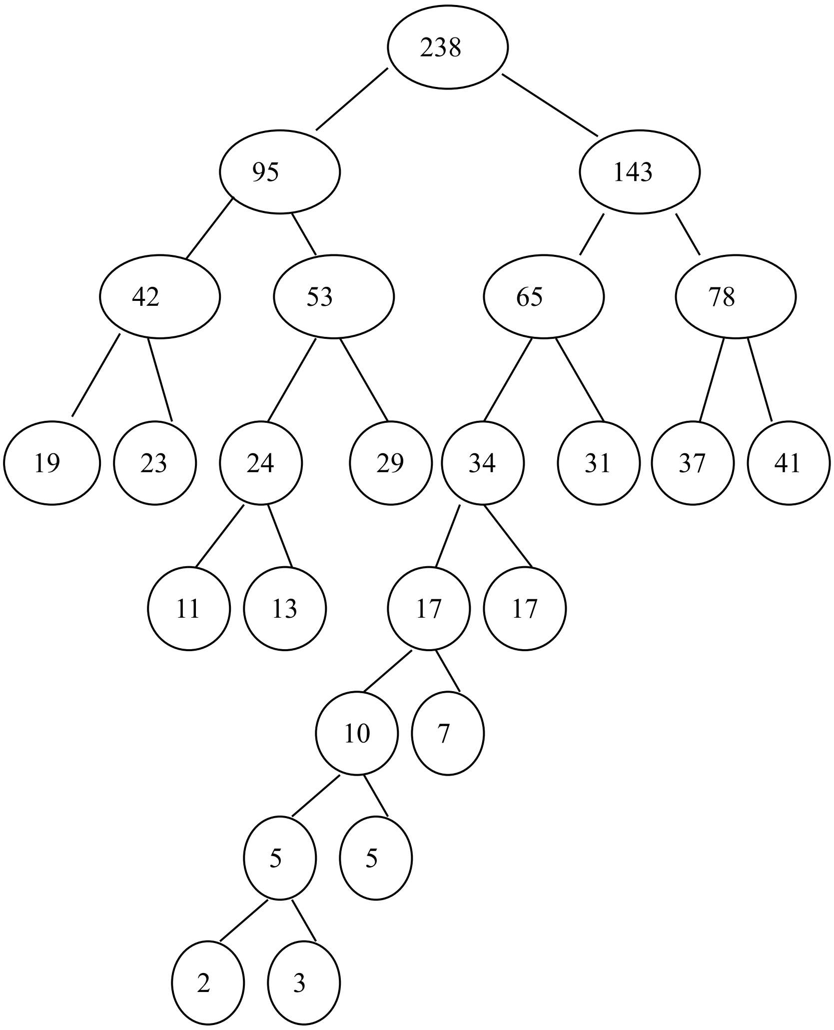
(9) $\forall x(P(x) \wedge R(x))$　　UG(8)

(10) $Q(y) \wedge \forall x(P(x) \wedge R(x))$　　T(6)(9)I

七、**解** 对于 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，先组合两个最小的权 2 + 3 = 5, 得 5，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41；在所得到的序列中再组合 5 + 5 = 10, 重新排列后为 10，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41；再组合 10 + 7 = 17, 得 17，11，13，17，19，23，29，31，37，41；继续下去，最后组合 95 + 143 = 238.

$\underline{2}$	$\underline{3}$	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
	$\underline{5}$	$\underline{5}$	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
		$\underline{10}$	$\underline{7}$	11	13	17	19	23	29	31	37	41
			17	$\underline{11}$	$\underline{13}$	17	19	23	29	31	37	41
			$\underline{17}$		24	$\underline{17}$	19	23	29	31	37	41
					24	34	$\underline{19}$	$\underline{23}$	29	31	37	41
					$\underline{24}$	34		42	$\underline{29}$	31	37	41
						$\underline{34}$		42	53	$\underline{31}$	37	41
								42	53	65	$\underline{37}$	$\underline{41}$
								$\underline{42}$	$\underline{53}$	65		78
									95	$\underline{65}$		$\underline{78}$
									$\underline{95}$			$\underline{143}$
												238

所求的 Huffman 树如图



八、**解** 由于任意三个点都不在同一条直线上，所以每两个点可确定唯一的一条直线，于是可以确定不同直线有 $C_{15}^{2}=\frac{15\times 14}{2\times 1}=105$ 条.

因为任意三个点可以构成一个三角形，于是位置不同的三角形有 $C_{15}^{3}=\frac{15\times 14\times 13}{3\times 2\times 1}=455$ 个.