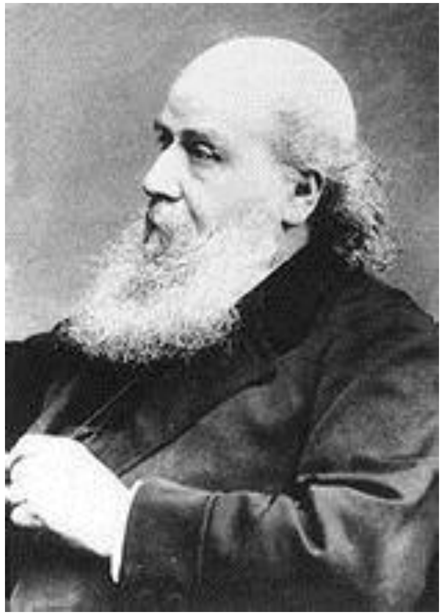
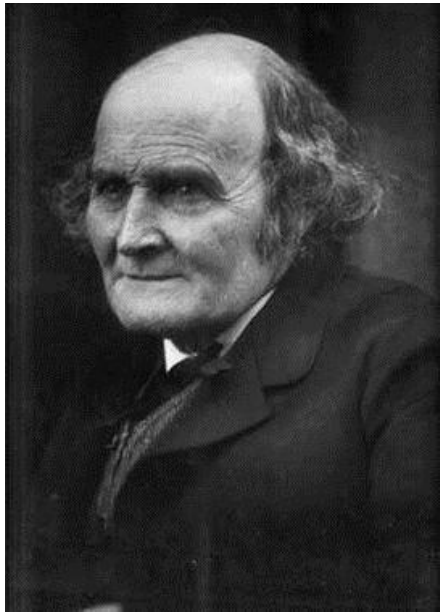
第二章　　矩阵

第一讲　　矩阵的定义

矩阵的定义引入



詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特
James Joseph Sylvester



阿瑟·凯莱
Arthur Cayley
《矩阵理论研究报告》

$$\begin{cases} x+6y=1, \\ 3x-7y=-5. \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

矩阵

一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

增广矩阵

矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\right)$
排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix},$$

称为 $m\times n$ 矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

简记为： $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}\right).$$

a_{ij} ：矩阵的元素，

实矩阵：元素是实数的矩阵，

复矩阵：元素是复数的矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ 2×4 实矩阵

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ 3×3 复矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$ 1×4 矩阵

$$(4) = 4$$ 1×1 矩阵

同型矩阵

两个矩阵的行数相等,列数也相等.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 3×2 同型矩阵.

若两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵, 并且对应元素相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

矩阵相等的条件 $\begin{cases} \text{同型;} \\ \text{对应元素相等.} \end{cases}$

几种特殊矩阵

(1) n 阶方阵：行数与列数都等于 n 的矩阵，记作 P_n 或 A_n .

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{3阶方阵.}$$

(2) 行矩阵(或行向量)：只有一行的矩阵

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

列矩阵(或列向量)：只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(3) 对角矩阵(对角阵)：

形如 $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵.

记作 $A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时, 称 A 为数量矩阵.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 时, 为单位矩阵, 用 E 或 E_n 表示.

$\boxed{\text{(4) 零矩阵：}}$ 元素全为零的矩阵，记作 $O_{m\times n}$ 或 O .

注

不同型的零矩阵是不相等的.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（5）方阵的行列式：

任何一个方阵 A_n 都有一个行列式与之对应，如

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{的行列式为} \quad |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{的行列式为} |A| = \begin{vmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 40.$$

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ y & 1 & z\end{pmatrix}$$

已知 $A=B$，求 x,y,z.

解 $\because A=B,$

$\therefore x=2, y=3, z=2.$

第二讲　矩阵的运算

矩阵的加法定义

设有两个$m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$, 那么矩阵
A 与 B的和记作 $A+B$, 规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注

A, B 必须同型, 才能进行加法运算.

例

$$\begin{pmatrix} \boxed{12} & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{1} & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{12+1} & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{13} & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

矩阵加法的运算规律

(1) $A+B=B+A$;

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) A 的负矩阵：

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=\left(-a_{ij}\right);$$

(4) $A+(-A)=0$;

(5) $A-B=A+(-B)$.

数与矩阵相乘定义

数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为:

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵的运算规律

（设 A、B 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为数）

(1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

(3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

(4) $1A=A,-1A=-A.$

矩阵的线性运算:矩阵加法 + 矩阵数乘.

矩阵与矩阵相乘定义

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵, 那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积 $C=(c_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$\left(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n\right),$$

并把此乘积记作 $C=AB.$

注

(1) 只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数等于第二个矩阵(右矩阵)的行数时，两个矩阵才能相乘.

(2) $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}.$

例

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

注

只有当第一个矩阵（左矩阵）的列数等于第二个矩阵（右矩阵）的行数时，两个矩阵才能相乘.

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\5&8&9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&6&8\\6&0&1\end{pmatrix}$, AB 不存在，但是 BA 是有意义的，

是2行3列的矩阵.

$$AB \neq BA$$

矩阵乘法的运算规律

(1) $(AB)C = A(BC)$;

(2) $A(B+C) = AB + AC, (B+C)A = BA + CA$;

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ为数）；

(4) $A_{m\times n}E_n = E_m A_{m\times n} = A$;

(5) 若 A 是 n 阶矩阵, 则 A^k 为 A 的 k 次幂, 即
$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{\text{k个}}$, 并且 $A^m A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}$（ m, k 为正整数）.

注

矩阵乘法不满足交换律, 即 $AB \neq BA, (AB)^k \neq A^k B^k$.

例　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$

则 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

结论1:交换律不成立. $AB \neq BA$ 不是对所有矩阵, 都有 $AB = BA$.

结论2:如果矩阵的积为零, 不能得到其中至少一个矩阵为零. 题中 $A \neq O$, $B \neq O$,但是 $BA = O$.

结论3:消去率不成立. 本例中 $AB = AC, A \neq O$ 但是, $B \neq C$.

第三讲　矩阵的转置

定义

把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T .

例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

A^T 与 A 的关系：

(1) 型的关系： $A_{m\times n} \to A^T{}_{n\times m}$.

(2) 元素的关系：$A(i, j) \to A^T(j, i)$.

运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.　　（倒序）

证明思路

（1） 矩阵同型：

$$(A_{m\times n}B_{n\times p})^T = C_{p\times m}, B^T A^T = D_{p\times m}.$$

（2） 对应元素相等：

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}(j = 1, 2, \cdots n; i = 1, 2, \cdots, p),$$

B^T中第 i 行元素是 $(b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{ni})$,

A^T中第 j 列元素是 $(a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn})^T$,

$B^T A^T$ 中的 (i,j) 元是：$\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$,

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.$$

$$\therefore (AB)^T = B^T A^T.$$

推广：$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n{}^T A_{n-1}{}^T \cdots A_1{}^T$.　(倒序)

例　已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},\quad 求\ (AB)^T\ .$$

解法一：

$$AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法二:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

定义

对称矩阵：$A^T = A$ 的方阵.

$$a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

例 $A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 为对称矩阵.

注

对称矩阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

如果 $A^T = -A$, 则称 A 为反对称矩阵. 这时, $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n).$

注

特别地, 当 $i = j$ 时, $a_{ii} = -a_{ii}$ $\therefore a_{ii} = 0.$

反对称矩阵主对角线上元素全为0, 其余元素以主对角线为对称轴互为相反数.

例 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称矩阵.

第四讲　方阵的行列式

定义

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素的相对位置不变), 叫做方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$.

例　$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,　$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=-2.$

运算性质:

(1)　$|A^T|=|A|$;　　(2)　$|\lambda A|=\lambda^n|A|$; (如: A 是3阶方阵, $|A|=-2$, 则 $|3A|=3^3|A|=-54$).

(3)　$|AB|=|A||B|$.

举例说明性质(3)

$$|A||B| = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ a_{11} \\ a_{12} \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12} & b_{12}a_{11}+b_{22}a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12} & b_{12}a_{11}+b_{22}a_{12} \\ 0 & 0 & b_{11}a_{21}+b_{21}a_{22} & b_{12}a_{21}+b_{22}a_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2\times 2} |-E||AB| = |AB|.$$

性质(3)推广

(1) $|A_1A_2\cdots A_n| = |A_1||A_2|\cdots|A_n|.$

(2) n 个相同方阵 $|A\ A\ \cdots A\ | = |A\ ||A\ |\cdots|A\ |;$

即有 $|A^n| = |A|^n.$

性质(3)推广的意义

将方阵的高次幂的行列式转化为行列式（数）的高次幂.

例　已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$　求 $\left|A^{2k}\right|$.

$$\left|A^{2k}\right|=|A|^{2k}=\left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\right)^{2k}=10^{4k}.$$

证明:奇数阶反对称矩阵的行列式为0.

证明思路

设方阵 A 为 $2k+1$ 阶, $A^T=-A$,

$$\left|A^T\right|=|-A|.$$

由性质(1) $\left|A^T\right|=|A|$,

$$|-A|=(-1)^{2k+1}|A|=-1\cdot|A|.$$

$$|A|=-1\cdot|A|,$$

$$|A|=0.$$

逆矩阵

概念引入

$$ax = b$$

$$x = \frac{b}{a}$$

$$A \times ? = E$$

定义

对于 n 阶矩阵 A, 如果有一个 n 阶矩阵 B , 使得 $AB=BA=E$,
则说矩阵 A 是可逆的, 矩阵 B 称为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1} .

矩阵 A 要求： 1. 方阵

2. $AB=BA=E$

例　　设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\because AB=BA=E$

$\therefore B$ 是 A 的一个逆矩阵

A 是 B 的一个逆矩阵

注

若 A 是可逆矩阵, 则 A 的逆矩阵是唯一的.

证明思路

三个数a,b,c有:$ab=ba=1, ac=ca=1$,

则 $b=1*b=(ca)*b=c(ab)=c*1=c.$

若 B 和 C 是 A 的逆矩阵: $AB=BA=E, AC=CA=E$

则 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$

$\therefore B=C=A^{-1}$

A 的伴随矩阵：

$$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11} \quad A_{21} \quad \cdots \quad A_{n1}} \\ A_{12} \quad A_{22} \quad \cdots \quad A_{n2} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ A_{1n} \quad A_{2n} \quad \cdots \quad A_{nn} \end{pmatrix}$$

性质：$AA^* = A^*A = |A|E$

证明思路

设 $A = (a_{ij})$，记 $AA^* = (b_{ij})$，则

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A|\delta_{ij},$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & |A| & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = |A|E$$

同理

$$A^*A = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj} \right) = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & |A| & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = |A|E$$

定理

矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ ，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}$ ，其中A^{*} 为矩阵 A 的伴随矩阵.

证明思路

必要性:

$$A \text{ 可逆} \Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

充分性:

$$\left.\begin{array}{c} AA^{*} = A^{*}A = |A|E \\ |A| \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\frac{A^{*}}{|A|} = \frac{A^{*}}{|A|}A = E \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^{*}}{|A|}.$$

定义

奇异矩阵：$|A| = 0$ 的矩阵

非奇异矩阵：$|A| \neq 0$ 的矩阵

矩阵可逆的充要条件：非奇异

推论

若 A,B 都是 n 阶方阵, 且 $AB=E$, 则 $BA=E$, $B=A^{-1}$.

证明: $|A||B|=|E|=1$, 故 $|A|\neq 0$,

因而 A^{-1} 存在, 于是

$$B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}$$

判断可逆方法

（1） $AB = BA = E$

（2） $|A| \neq 0$

（3） $AB = E$ 或 $BA = E$

回顾

（1） 若方阵满足 $AB=E$ 或 $BA=E$ ，则方阵逆矩阵存在且唯一；

（2） 若 $|A|\neq 0$ ，则 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ （ A 为方阵）.

第六讲　　逆矩阵的性质

运算性质

（1）若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

（2）若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$ ，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)=\left(\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}\right)(AA^{-1})E.$$

（3）若 A,B 为同阶方阵且均可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明思路

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AEA^{-1}$$

$$= AA^{-1} = E.$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

推广

$$(\boxed{A_1}A_2\cdots\boxed{A_m})^{-1}=\boxed{A_m^{-1}}\cdots A_2^{-1}\boxed{A_1^{-1}}.$$

$\because$ 当 $A_1=A_2=\cdots=A_m=A$ 时，有$(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$.

另外，当 $|A|\neq 0$ 时，定义 $A^0=E, A^{-k}=(A^{-1})^k$.（k 为正整数），

当 $|A|\neq 0,\lambda,\mu$ 为整数时，有

$$A^\lambda A^\mu=A^{\lambda+\mu},(A^\lambda)^\mu=A^{\lambda\mu}.$$

（4） 若 A 可逆, 则A的转置也可逆, 且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

证明思路

$\because A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E$

$\therefore (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

（5）若 A 可逆，则 $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

证明思路

$\because AA^{-1} = E,$

$\therefore |A|\left|A^{-1}\right| = 1,$

因此 $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

（6） 当A^{-1} 存在时：

1. 矩阵方程 $AX = B$，方程两边左乘 A^{-1}，解为 $X = A^{-1}B$.

2. 矩阵方程 $XA = B$，方程两边右乘 A^{-1}，解为 $X = BA^{-1}$.

3. 矩阵方程$AXB = C$，若 B^{-1} 也存在，方程两边左乘 A^{-1}，右乘 B^{-1}，解为$X = A^{-1}CB^{-1}$.

求逆矩阵

例1 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$， $|A|=ad-cb\neq 0$，求 A^{-1} .

解：由于 $|A|\neq 0$，则 A^{-1} 存在

则 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=\dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc}$.

主交换副变号

例2　求方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：　$\because |A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$

$\therefore$ A^{-1}存在.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2.$

得 $$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

故 $$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

例3　设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$,

求矩阵 X 使满足 $AXB=C$.

解：$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0, B=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$

$\therefore\ A^{-1}, B^{-1}$都存在.

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix},$

又由 $AXB=C \Rightarrow A^{-1}\boxed{AXB}B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

$$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}.$$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\10 & -4\\-10 & 4\end{pmatrix}.$$

例4　设方阵 A 满足方程 $A^2-A-2E=0$ ，证明：

$A, A+2E$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

证明　由 $A^2-A-2E=0$ ，

得 $A(A-E)=2E \Rightarrow A\overset{A^{-1}}{\boxed{\dfrac{A-E}{2}}}=E$

$$\Rightarrow |A|\left|\frac{A-E}{2}\right|=1 \Rightarrow |A|\neq 0,$$

故 A 可逆.

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E).$$

$$A^2-A-2E=0\Rightarrow A^2-A-2E-4E=-4E$$

$$\Rightarrow(A+2E)(A-3E)=-4E$$

$$\Rightarrow(A+2E)\left[-\frac{1}{4}(A-3E)\right]=E$$

$$\Rightarrow|A+2E|\left|-\frac{1}{4}(A-3E)\right|=1,$$ 故$A+2E$可逆.

且$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{4}(A-3E)$.

第八讲　　分块矩阵

当矩阵阶数较大时，如果按照原来数字矩阵的算法求幂求行列式等，

计算量很大. 如果能将它分块，降低阶数，充分利用矩阵中零块的特征，

能简化计算.

定义

用若干条纵线和横线把矩阵 A 分成若干个小块,

每一个小块构成的小矩阵称为 A 的子块,

以子块为元素的矩阵称为 A 的分块矩阵.

例如 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} \\ 1 & 7 & \\ \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}} & & 4 & 1 \\ & & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 可作如下分块：

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & E_2 \\ O & A_{22} \end{pmatrix}.$$

一个矩阵可按不同的方式分块, 上述矩阵 A 也可作如下分块:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ \hline 1 & 7 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ \hline 0 & 0 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix},$$

$$A_1=(3,2,1,0), A_2=\begin{pmatrix}1 & 7 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 1\end{pmatrix}, A_3=(0,0,3,6).$$

常用分块方式

1. 矩阵按行分块:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix},$$

其中，A_i 是矩阵的第 i 行的元素构成的子块.

2. 矩阵按列分块：

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix},$$

其中 $B_j=\begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \end{pmatrix}^T,\ j=1,2,\cdots,n.$

这两种分块方式在矩阵计算和证明中经常用到. 究竟采用哪种方式，要根据具体的问题来确定.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

将系数矩阵按列分块, 第 i 列记为 α_i , 常数项矩阵用 β 表示, 则

$$\to (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta \to x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

分块矩阵的运算

矩阵分块后，把小矩阵当做元素，按普通的矩阵运算法则进行运算.

（1） 加法

设 A, B 是两个 $m \times n$ 矩阵，且用相同的分块法，得分块矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix},$$

其中各对应的子块 A_{ij} 与 B_{ij} 有相同的行数和列数，则

$$A \pm B = \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} & \cdots & A_{1r} \pm B_{1r} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} & \cdots & A_{2r} \pm B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} \pm B_{s1} & A_{s2} \pm B_{s2} & \cdots & A_{sr} \pm B_{sr} \end{pmatrix}.$$

(2) 数乘运算

设 λ 为任意的数，则

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda A_{s1} & \lambda A_{s2} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}.$$

(3) 乘法

设 A 为 $m \times l$ 矩阵，B 为 $l \times n$ 矩阵，分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

此处 A 的列分法与 B 的行分法一致，即 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数，则

$$AB = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}.$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,r).$$

(4) 转置

设 A 得分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1r}^T & A_{2r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

如将矩阵 A 分成两块

$$A=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{array}\right)=(A_1,A_2),A_1=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix},$$

$$A^T=\begin{pmatrix}A_1^T\\ A_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix},\quad \text{而不是}\ A^T=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}.$$

例　设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\1&2&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&2&1&0\\4&0&0&1\\0&1&0&0\\-2&0&0&0\\2&-1&0&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline 0&1&1&0&0\\1&2&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E_2&O\\A_1&E_3\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&2&1&0\\4&0&0&1\\\hline 0&1&0&0\\-2&0&0&0\\2&-1&0&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1&E_2\\B_2&O\end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} E_2 & O \\ A_1 & E_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & E_2 \\ B_2 & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & E_2 \\ A_1B_1+B_2 & A_1 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},$$

所以

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

回顾

对角矩阵 $diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}_{n\times n}$.

对角矩阵性质: $A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), B=diag(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$,

1. $A+B=diag(\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\cdots,\lambda_n+\mu_n)$;

2. $AB=diag(\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\cdots,\lambda_n\mu_n)$(注意特例$A=B$);

3. $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$;

4. $\lambda_i\neq 0(i=1,\cdots,n), A^{-1}=diag(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})$.

第九讲　　分块对角矩阵

定义

若方阵 A（A 不是对角矩阵）分块为:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix},$$

其中未写出的子块都是零矩阵.

像这种主对角线以外的子块都是零矩阵, 且主对角线上的子块都是方阵的的方阵,

叫做分块对角矩阵, 我们有如下重要结论:

性质

1. $|A|=|A_1|\ |A_2|\cdots|A_s|$;

2. 当 $|A_i|\neq 0$ （$i=1,2,\cdots,s$）时, 有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix};$$

3. 若 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$

是两个分块对角矩阵, 其中 A_i 与 B_i 是同阶方阵, 则

$$A \pm B = \begin{pmatrix} A_1 \pm B_1 & & & \\ & A_2 \pm B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \pm B_s \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & & \\ & A_2 B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s B_s \end{pmatrix}.$$

由以上可看出, 对于能划分为分块对角矩阵的矩阵, 如果采用分块来求逆矩阵或进行加减乘运算, 是十分方便的.

例1　设

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&2&5&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

求 A^{-1}.

解　将 A 分块如下

$$A=\left(\begin{array}{c|cc|cc}3&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0\\0&2&5&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&E_2\end{pmatrix},$$

其中

$$A_1=(3),\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\2&5\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

由于

$$A_1^{-1}=(1/3),\ A_2^{-1}=\begin{pmatrix}-5/2&1/2\\1&0\end{pmatrix},\quad E_2^{-1}=E\ ,$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&&\\&A_2^{-1}&\\&&E_2^{-1}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc|cc}1/3&0&0&0&0\\\hline 0&-5/2&1/2&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right).$$

例2 设 A,C 分别为 r 阶和 s 阶的可逆矩阵 $X=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$,

求逆矩阵 X^{-1}.

解 设逆矩阵 X^{-1} 分块为

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

$$XX^{-1}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=E.$$

$$\begin{pmatrix} AX_{11}+BX_{21} & AX_{12}+BX_{22} \\ CX_{21} & CX_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

比较等式两边对应的子块, 有

$$\begin{cases} AX_{11}+BX_{21}=E_r \\ AX_{12}+BX_{22}=O \\ CX_{21}=O \\ CX_{22}=E_s \end{cases}$$

注意到 A,C 可逆, 故解得

$$X_{22}=C^{-1},X_{21}=O,X_{11}=A^{-1},X_{12}=-A^{-1}BC^{-1},$$

所以

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

第十讲　　矩阵秩的定义

定义

在 $m \times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 $(k \le m, k \le n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为$\boxed{\text{矩阵 } A \text{ 的 } k \text{ 阶子式}}$.

例如，　矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 有3个2阶子式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \ne 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \ne 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \ne 0.$$

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

定义

若矩阵 A 中, 存在一个 k 阶非零子式且所有更高阶的子式

(如果有) 都为零, 则称数 k 为矩阵的秩, 记为 $rank(A)$, 简写为 $r(A)$.

最高阶非零子式的阶数叫做矩阵的秩.

如矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 5\end{pmatrix}$ 的秩为2.

$m \times n$ 矩阵 A 的秩 $r(A)$ 是 A 中不等于零的子式的最高阶数, 显然

$r(A) \leq \min(m,n)$.

对于 A^T, 显然有 $r(A^T) = r(A)$.

规定, 零矩阵的秩为0, 因此对任意的 $A_{m\times n}$,

有 $0 \leq r(A) \leq \min(m,n)$.

例1　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$ 的秩.

解　由高阶往低阶判断

因 A 的3阶子式只有一个 $|A|$，且 $|A|=0$.

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0.$$

$$\therefore r(A)=2.$$

非奇异矩阵的行列式不为零,所以它的秩等于它的阶数,

故非奇异矩阵又称为满秩矩阵,奇异矩阵称为降秩矩阵.

结论

A 满秩(降秩) $\Leftrightarrow |A| \neq 0, A$ 非退化($|A| = 0$ 退化);

$\Leftrightarrow A$ 可逆(不可逆);

$\Leftrightarrow AX = 0$ 只有零解(有非零解).

定理

若矩阵中至少有一个 k 阶子式不为零，所有的 $k+1$ 阶子式为零，

则 $r(A)=k$.

如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为3.

行阶梯型矩阵特点:

(1) 可划出一条阶梯线,线的左方和下方全是零;

(2) 每个台阶只有一行;

(3) 台阶数即是非零行的行数;

(4) 阶梯线的竖线后面的第一个元素都为非零元,这个非零元称作非零行的首非零元.

即非零行的第一个非零元.

这个矩阵叫做行阶梯型矩阵,它的秩就是它的非零行的行数.

矩阵的初等变换

定义

下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

（1） 对调两行（对调 i, j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）

（2） 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素：（第 i 行乘 k，记作 $r_i \times k$）

（3） 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去
（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 $r_i + kr_j$）.

注

变换 $r_i + kr_j$ 不能写成 $kr_j + r_i$.

同理可定义矩阵的初等列变换(所用记号是把“r”换成“c”).

定义

矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.

初等变换的逆变换仍为初等变换，且变换类型相同.

$r_i \leftrightarrow r_j$	逆变换	$r_i \leftrightarrow r_j$
$r_i \times k$	逆变换	$r_i \times (\frac{1}{k})$ 或 $r_i \div k$
$r_i + kr_j$	逆变换	$r_i + (-k)r_j$ 或 $r_i - kr_j$.

定义

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B 就称矩阵 A 与 B 等价,

记作 $A \sim B$.

等价性质: 1. 自反性　　2. 对称性　　3. 传递性

定理

对矩阵进行初等变换, 矩阵的秩不变, 等价矩阵的秩相等.

例 用矩阵的初等行变换, 化简矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&-2\\1&2&0&3\\3&4&-2&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&3&-1&-2\\3&4&-2&-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&-1&-8\\0&-2&-2&-16\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&-1&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_1$$

矩阵 B_1 就是行阶梯型矩阵, 秩为2, 因此矩阵 A 的秩为2.

对 B_1 继续施行初等行变换, 可以化成行最简形如 B_2 .

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B_2$$

即非零行的第一个非零元为1, 且这些非零元所在的列的其他

元素都为零.

对于任何矩阵 $A_{m\times n}$, 总可以经过有限次初等行变换把它变为行阶梯型和行最简型.

行最简型是由矩阵唯一确定的;行阶梯型矩阵的非零行的行数也是由矩阵唯一确定的, 而且等于矩阵的秩.

行最简形矩阵再经过初等列变换, 可化成标准型.

$$B_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{\substack{c_3-c_2\\ c_4-8c_2}}{\overset{\substack{c_3+2c_1\\ c_4+2c_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}0 & 0\end{matrix}\end{pmatrix}=B_3$$

矩阵 B_3 称为矩阵 A 的标准型.

标准型特点:

B_3 的左上角是一个单位矩阵, 其余元素全为零

$m \times n$ 矩阵 A 总可经过初等变换化为标准型 $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$

此标准型由m, n, r 三个数唯一确定, 其中 r 就是行阶梯型矩阵中非零行的行数.

标准型矩阵是与矩阵 A 等价的最简单的矩阵.

对于一般的矩阵 $A_{m\times n}$ ，有下列结论：

1. 若 $r(A)=0$ ，则 $A=0$.

2. 若 $r(A)=r(r\neq m,n,0)$ ，则 $A\sim\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

第十二讲　初等矩阵

定义

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

三种初等变换:

1. 对调两行或两列;
2. 以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列;
3. 以数 k 称某行(列)加到另一行(列).

三种初等变换对应三种初等矩阵.

对调两行或两列

对调 E 中第 i,j 两行，即 $(r_i \leftrightarrow r_j)$，得初等方阵

$$E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } \boldsymbol{i} \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } \boldsymbol{j} \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

用 m 阶初等矩阵 $E_m(i,j)$ 左乘 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ，得

$$E_m(i,j)A=\begin{matrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{matrix}$$

相当于对矩阵 A 施行第一种初等行变换:把 A 的第 i 行与第 j 行对调 $(r_i \leftrightarrow r_j)$.

将矩阵 A 按行分块成 $A=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)^T$.

$$E(i,j)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&&&&\\ &&1&&&&&&&&\\ &&&0&&\cdots&&1&&&\\ &&&&1&&&&&&\\ &&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\ &&&&&&1&&&&\\ &&&1&&\cdots&&0&&&\\ &&&&&&&&1&&\\ &&&&&&&&&\ddots&\\ &&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_j\\ \vdots\\ \beta_i\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}.$$

类似地,以 n 阶初等矩阵 $E_n(i,j)$ 右乘矩阵 A

$$A_{m\times n}E_n(i,j)=\left(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\right)\begin{pmatrix}1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 && \cdots && 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && \cdots && 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1\end{pmatrix}$$

$$=\left(\beta_1\beta_2\cdots\beta_j\cdots\beta_i\cdots\beta_n\right).$$

相当于对矩阵 A 施行第一种初等列变换:把 A 的第 i 列与第 j 列对调 $(c_i\leftrightarrow c_j)$.

数乘某行或某列

以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵的第 i 行$(r_i \times k)$, 得初等矩阵 $E(i(k))$.

$$E(i(k)) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

以 $E_m(i(k))$ 左乘矩阵 A

$$E_m(i(k))A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

相当于以数 k 乘 A 的第 i 行 $(r_i \times k)$;

类似地, 以 $E_m(i(k))$ 右乘矩阵 A, 其结果相当于以数 k 乘 A 的第 i 列 $(c_i \times k)$.

数乘某行(列)加到另一行(列)

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上$(c_i + kc_j)$，

[或以 k 乘 E 的第 i 行加到第 j 行上 $(r_i + kr_i)$] .

$$E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array}$$

以 $E_m(ij(k))$ 左乘矩阵 A, 其结果相当于把 A 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上 $(r_i + kr_j)$.

类似地, 以 $E_m(ij(k))$ 右乘矩阵 A , 其结果相当于把 A 的第 i 列乘 k 加到第 j 列上 $(c_i + kc_j)$.

变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身,

则 $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$ ；

变换 $r_i \leftrightarrow k$ 的逆变换为 $r_i \leftrightarrow \frac{1}{k}$ ，

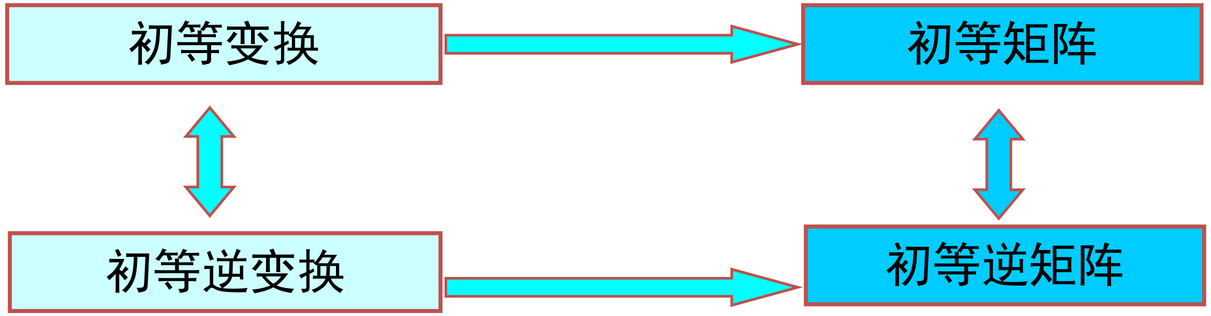
则 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$ ；

变换 $r_j + kr_i$ 的逆变换为 $r_j - kr_i$ ，

则 $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$ ；

定理

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 对 A 施行一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 施行一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.



$A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 满足以下条件等价：

（1）$A\sim B$；

（2）存在可逆的方阵 $P_m,Q_n,P_mAQ_n=B$,

$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=B,P_i(i=1,2,\cdots,s),Q_j(j=1,2,\cdots,t)$ 都是初等矩阵，都可逆；

（3）$r(A)=r(B)$.

第十三讲　　初等行变换求逆矩阵

定理

设 A 为可逆方阵, 则存在有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$

使 $A = P_1P_2\cdots P_l$

证明　$\because A \sim E$ 故 A 经有限次初等变换可变为 E,

故 E 经有限次初等变换可变为 A,

$\therefore$ 存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$, 使得 $P_1P_2\cdots P_sEP_{s+1}\cdots P_l = A$,

即 $A = P_1P_2\cdots P_l$.

推论

$m\times n$ 矩阵 A 等价于 B 的充要条件是存在可逆的 m 阶方阵和 n 阶方阵, 使得,

$PAQ = B.$

若 $A \sim B$ ，则 A 经有限次初等变换可变为 B .

即 $P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_l = B$;

即 $PAQ = B$;

反之, 若有可逆的 P_m 和 Q_n使得 $PAQ = B$;

$P = P_1P_2\cdots P_s, Q = Q_1Q_2\cdots Q_l$

即 $P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_l = B$;

也就是矩阵 A 经过有限次初等行变换和列变换变成矩阵 B , 所以 A, B 等价.

A 是$m\times n$矩阵, 对任意可逆的m 阶方阵P 和n 阶方阵 Q , 有

$r(PAQ)=r(PA)=r(AQ)=r(A)$.

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $r(B)=2$, 求$r(AB)$.

因为 A 可逆, 所以 $r(AB)=r(B)=2$.

利用初等矩阵求逆矩阵

当 $|A| \neq 0$ 时, 由 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$ 有 $P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E$,

以及 $P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}$,

$$\therefore \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} (A \mid E) \left(P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \;\; P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E \right) = \left(E \mid A^{-1} \right).$$

实际上, 由分块矩阵的运算有

$$A^{-1}(A \;\vdots\; E) = \left(A^{-1}A \;\vdots\; A^{-1}\right) = \left(E \;\vdots\; A^{-1}\right).$$

即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \mid E)$ 施行初等行变换, 当把 A 变成 E 时, 原来的 E 就变成 A^{-1} .

例1 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$(A\,|\,E)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

利用初等行变换求逆矩阵的方法, 还可用于求矩阵 $A^{-1}B$.

$$A^{-1}(A|B)=(E|A^{-1}B)$$

例2 求矩阵 X , 使 $AX=B$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆, 则 $X=A^{-1}B$.

$$(A|B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

版块一　矩阵的有关概念

一、同型矩阵与矩阵相等

1、如果两个矩阵的行数相等，列数也相等，称这两个矩阵是同型矩阵.

2、已知 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，如果它们的对应元素相等，即

$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，称矩阵 A,B 相等，记作：$A=B$.

二、方阵与方阵的行列式

1、如果矩阵 $A_{m\times n}$ 的行和列相等，即 $m=n$，称这个矩阵为 n 阶方阵；记为 A_n，简记为 A .

2、由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 A 的行列式，

记为 $|A|$.

3、如果 $|A|=0$，则称方阵 A 为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵.

版块一　矩阵的有关概念

注

（1） 只有方阵才有行列式.

（2） 方阵与行列式是两个不同的概念，n 阶方阵是 n^2 个数按一定的顺序排成的 n 行 n 列的数表，而 n 阶行列式是 n^2 个数按一定的运算法则所确定的一个数. 例如

二阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$（　　），二阶方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 是一个数表.

版块一　矩阵的有关概念

三、伴随矩阵

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，由 A 的行列式 $|A|$ 的所有元素的代数余子式

构成的方阵 $A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，称为 A 的伴随矩阵，记为 A^{*} .

版块一　矩阵的有关概念

四、几类特殊矩阵

1、上三角矩阵 $A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$． 2、下三角矩阵 $A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$．

3、对角矩阵 $A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$． 4、数量矩阵 $A_4=\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$．

版块一　矩阵的有关概念

5、单位矩阵 $E=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$.

6、对称矩阵

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 即 $A^T=A$, 则称 A 为对称矩阵.

7、反对称矩阵

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j),a_{ii}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$ ，

即 $A^T=-A$, 则称 A 为反对称矩阵.

注

反对称矩阵的主对角线上的元素都为零.

版块二　矩阵的运算

矩阵的运算包括:加法、乘法（包括两种:数与矩阵相乘,矩阵与矩阵相乘）、矩阵的乘方（也叫作幂）、矩阵的转置、矩阵的逆.

一、矩阵的乘法

1、数与矩阵相乘

方阵行列式的性质

设 A,B 是 n 阶方阵,则

(1) $\left|A^T\right|=|A|$ ；　(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$；

(3) $|AB|=|A||B|$；　(4) $|AB|=|BA|$.

版块二　矩阵的运算

数乘矩阵的运算

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

注

(1) 数乘矩阵时，这个数需乘矩阵的每一个元素；

(2) 上面方阵行列式性质中的的第2个公式为 $|\lambda A|=\lambda^n|A|$，而不是 $|\lambda A|=\lambda|A|$.

版块二　矩阵的运算

例 1 设 A,B 是 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　　）.

A　$AB \neq 0 \Leftrightarrow A \neq 0$ 且 $B \neq 0$；

B　$|A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$；

C　$|AB| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ 或 $|B| = 0$；

D　$A = E \Leftrightarrow |A| = 1$.

分析 A是必要非充分条件，例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \neq 0, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$，但 $AB = 0$；

B是充分非必要条件，例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$，显然 A 不是零矩阵；

D是必要非充分条件，例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1$，显然 A 不是单位矩阵.

由于 $|AB| = |A||B| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$，所以，正确答案：C.

版块二　矩阵的运算

（课外题）

例 2 设 A 是四阶方阵，B 是五阶方阵，$|A| = 2, |B| = -2$，则

（1）$\left| -|A|B \right| =$（　　　）；

（2）$\left| -|B|A \right| =$（　　　）.

例 3 设4阶矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4), B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$，其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为4维列向量. 且已知 $|A| = 4, |B| = 1$，则 $|A + B| =$（　　　）.

分析：$A + B = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) + (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$

$$= (\alpha + \beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4),$$

根据行列式的性质，得 $|A + B| = |\alpha + \beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 2 \times 2 \times 2 |\alpha + \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|$

$$= 8(|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + |\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|) = 8(|A| + |B|) = 40.$$

故正确答案：40.

版块二　矩阵的运算

2、矩阵与矩阵相乘

设 $A=(a_{ij})_{m\times s},B=(b_{ij})_{s\times n},C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 C 为 A 与 B 的乘积，记为 AB，即 $C=AB$.

注

(1) 两个矩阵相乘需满足前面矩阵的列数等于后面矩阵的行数；

(2) 矩阵乘法一般不满足交换律，即 AB 有意义，BA 不一定有意义；即使 BA 有意义，

也不一定有 $AB=BA$；

(3) 两个非零矩阵相乘，可能得到零矩阵，从而 $AB=0$ 不一定能推出 $A=0$ 或 $B=0$；

(4) 矩阵的乘法一般不满足消去律，即不能由 $AC=BC$ 必然推出 $A=B$.

版块二　矩阵的运算

例 4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为3维列向量, 记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3).$$

如果 $|A|=1$, 那么$|B|=$ (　　).

分析 由已知条件, 并根据乘法法则, 可得

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=AC,\quad \text{其中 } C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

在等式两端同时取行列式得 $|B|=|A|\cdot|C|$, 而计算得出 $|C|=2$, 所以 $|B|=2$.

版块二　矩阵的运算

3、矩阵的乘方

n 阶方阵 A 的 k 次幂是指 $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots \cdot A}_{k个}$.

重要结论:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^k & & & \\ & \lambda_2{}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n{}^k \end{pmatrix}.$$

版块二　矩阵的运算

二、矩阵的转置

矩阵的转置是指将矩阵的行和列依次互换，得到一个新的矩阵，即

$A=(a_{ij})_{m\times n}\to A^T=(a_{ji})_{n\times m}$.

关于矩阵转置运算的性质：

（1）　$(A^T)^T=A$　；

（2）　$(A+B)^T=A^T+B^T$　；

（3）　$(kA)^T=kA^T$；

（4）　$(AB)^T=B^TA^T$　.

版块二　矩阵的运算

例 5 已知$\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, 设 $A=\alpha^T\beta$ ，其中 α^T是 α 的转置, 则 $A^n=($　　　$)$.

分析　经计算, 得 $\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix},\beta\alpha^T=3$ ，而

$$A^n=\underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots\cdots(\alpha^T\beta)}_{共n个}=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots\cdots(\beta\alpha^T)}_{共n-1个}\beta$$

$$=\alpha^T(\beta\alpha^T)^{n-1}\beta=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

版块二　矩阵的运算

三、分块矩阵

1、设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$，其中 $A_i=(i=1,2,\cdots,m)$ 都是方阵，则

$$|A|=|A_1|\cdots|A_m|,\qquad A^n=\begin{pmatrix} A_1{}^n & & & \\ & A_2{}^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m{}^n \end{pmatrix}.$$

2、设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$，其中 $A_i=(i=1,2,\cdots,m)$ 都是可逆矩阵，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1{}^{-1} & & & \\ & A_2{}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m{}^{-1} \end{pmatrix}$.

版块二　矩阵的运算

3、设 $A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_m & & & \end{pmatrix}$，其中 $A_i=(i=1,2,\cdots,m)$ 都是可逆矩阵，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_m^{-1} \\ & & A_{m-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$.

4、设 A,B 为方阵，则 $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ D & B \end{vmatrix}=|A||B|$.

四、矩阵的逆

不能定义矩阵除法的原因：

（1）不是每一个非零方阵都可逆；

（2）由于矩阵乘法不满足交换律，当一个矩阵可逆时，我们也没法定义除法，因为这时还可能出现

$AB^{-1}\neq B^{-1}A$，无法定义 $\dfrac{A}{B}$.

版块二　矩阵的运算

1、矩阵可逆的判定

n 阶方阵 A 可逆

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$（定义）.

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=E$（或者 $BA=E$）.

$\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$（$\Leftrightarrow$ A 为非奇异矩阵）.

$\Leftrightarrow$ A 的行阶梯形含有 n 个非零行.

$\Leftrightarrow$ A 的行最简形是 E.

$\Leftrightarrow$ A 的标准形是 E.

$\Leftrightarrow$ A 可表示为同阶初等矩阵的乘积.

$\Leftrightarrow$ A 的秩 $r(A)=n$（$\Leftrightarrow$ A 为满秩矩阵）.

版块二　矩阵的运算

$\Leftrightarrow$ A 的行(列)向量组线性无关.

$\Leftrightarrow$ A 的行(列)向量组构成 n 维向量空间的一组基.

$\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有唯一解.

$\Leftrightarrow$ A 没有零特征值.

$\Leftrightarrow$ A^TA 是正定矩阵.

版块二　矩阵的运算

2、关于逆矩阵常用的结论

(1) 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$；

(2) 如果 $AB=E$ 或 $BA=E$，则 $B=A^{-1}$；

(3) $(A^{-1})^{-1}=A$；

(4) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$，其中 $k\neq 0$；

(5) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$；

(6) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

(7) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$；

(8) 一般情况下，$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$．

版块二　矩阵的运算

3、关于伴随矩阵常用的结论

(1) $AA^* = A^*A = |A|E$ ；

(2) 如果 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$. 并且 A^* 也可逆, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$ ；

(3) $(AB)^* = B^*A^*$;

(4) $(A^*)^T = (A^T)^*$.

版块二　矩阵的运算

例 6 设 A 为三阶方阵, 且 $|A|=2$ ，则

（1）$\left|2A^{-1}\right|=$（　　）；

（2）$\left|(A^{*})^{-1}\right|=$（　　）；

（3）$\left|3A^{-1}-2A^{*}\right|=$（　　）.

分析　（1）$\left|2A^{-1}\right|=2^{3}\left|A^{-1}\right|=2^{3}|A|^{-1}=2^{3}\times\dfrac{1}{2}=4$ ；

（2）$\left|(A^{*})^{-1}\right|=\left|\dfrac{1}{|A|}A\right|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}|A|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}\times 2=\dfrac{1}{4}$ ；

（3）$\left|3A^{-1}-2A^{*}\right|=\left|3A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|-A^{-1}\right|=-\dfrac{1}{2}$.

版块二　矩阵的运算

例 7 设A 为三阶方阵, 且$|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行和第二行得到矩阵B, 则$|BA^*|=$（　　）.

分析　这是一道考研题, 由条件知$|B|=-|A|$, 从而

$$|BA^*|=|B||A^*|=-|A|||A|A^{-1}|=-3\times|A|^3|A^{-1}|=-3\times|A|^3|A|^{-1}=-3\times|A|^2=-27.$$

版块二　矩阵的运算

4、求逆矩阵的方法

（1）利用定义求逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵, 如果存在 n 阶方阵 B ，使得 $AB=BA=E$, 则称 A 是可逆的, 并称 B 是 A 的逆矩阵.

利用定义一般是用来求抽象矩阵的逆矩阵（也就是说, 求一些不知道具体表达式的矩阵的逆矩阵），关键是凑出等式 $AB=E$ 或 $BA=E$ ，从而 $A^{-1}=B$.

版块二　矩阵的运算

例 8 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A-E)^{-1}=$ (　　).

分析　这里需从条件 $A^2+A-4E=0$ 凑出等式 $(A-E)B=E$.

因为 $A^2+A-4E=0 \Rightarrow (A-E)(A+2E)=2E \Rightarrow (A-E)\dfrac{A+2E}{2}=E$,

所以 $(A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(A+2E)$.

(2) **伴随矩阵法**

设 $|A|\neq 0$, 则方阵 A 可逆, 且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

版块二　矩阵的运算

(3) 初等变换法

具体做法是:

设 A 为 n 阶方阵, 构造 $n\times 2n$ 矩阵 $(A,E)_{n\times 2n}$ ，对 $(A,E)_{n\times 2n}$ 实施初等行变换,

当 $(A,E)_{n\times 2n}$ 中矩阵 A 化为单位矩阵 E 时, 相应的 E 就化为 A^{-1}， 即

$$(A,E)_{n\times 2n}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E,A^{-1}\right)_{n\times 2n}.$$

用初等列变换求逆矩阵的做法是:

构造 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}_{2n\times n}$ ，对 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}_{2n\times n}$ 实施初等列变换, 当 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}_{2n\times n}$ 中矩阵 A 化为

单位矩阵 E 时, 相应的 E 就化为 A^{-1} ，即

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}_{2n\times n}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}_{2n\times n}.$$

版块二　矩阵的运算

（4）利用分块矩阵求逆矩阵

对于零元素特别多的方阵，可以考虑用分块矩阵求逆矩阵．特别地，

设 A,B 为可逆方阵，则有

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

注

利用这个思路可以把求高阶矩阵的逆矩阵转化为求两个低阶矩阵的逆矩阵，

特别是当 A,B 的阶数为一阶或二阶时，A,B 的逆矩阵可直接得到，从而减少计算量．

版块二　矩阵的运算

例 9 设四阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$（　　）.

分析　令 $A_1=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，将矩阵 A 化为分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}$.　对于矩阵 A_1, A_2，可以伴随矩阵法求出逆矩阵：

$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, A_2^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.　从而 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

版块三　初等变换与初等矩阵

1、矩阵的初等变换

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换. 具体来说,是指:

(1) 交换两行(列)(记为 $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$);

(2) 以非零常数乘矩阵的某一行（列)(记为 kr_i, kc_i);

(3) 将矩阵的某一行（列）的 k倍加到另一行(列)(记为 $r_i + kr_j, c_i + kc_j$).

2、 初等矩阵

(1) 定义:由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵;

(2) 三种初等变换对应三种初等矩阵:

版块三　初等变换与初等矩阵

① 交换两行或者两列，所得初等矩阵都记为 $E(i,j)$ ，

$$E(i,j)=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & & \cdots & & 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && \cdots && 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}.$$

上述矩阵是指单位矩阵中第 i 行和第 j 行交换后所得的初等矩阵，

而交换第 i 列和第 j 列后所得的初等矩阵也是这个形式，都记为 $E(i,j)$.

版块三　初等变换与初等矩阵

② 以不等于零的数 k 乘某行或某列, 记为 $E(i(k))$,

$$E(i(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}.$$

同样, 单位矩阵中第 i 行乘非零数 k 所得的初等矩阵和单位矩阵中第 i 列乘非零数 k 所得的初等矩阵是相同的, 都记为 $E(i(k))$.

版块三　初等变换与初等矩阵

③　以数 k 乘某行(列)后加到另一行(列)上去,

$$E(i,j(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & \cdots & & k & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & & \vdots & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1\end{pmatrix}.$$

上述初等矩阵 $E(i,j(k))$ 是指单位矩阵中第 j 行乘 k 加到第 i 行,

如果是通过初等列变换得到这个初等矩阵,就需看成是第 i 列乘 k 加到第 j 列,

这时单位矩阵记为 $E(j,i(k))$.

版块三　初等变换与初等矩阵

（3） 关于初等矩阵的转置、逆矩阵及初等矩阵的行列式，有以下公式：

① $E^T(i,j)=E(i,j)$， $E^T(i(k))=E(i(k))$ ，$E^T(i,j(k))=E(j,i(k))$ ；

② $E^{-1}(i,j)=E(i,j)$ ，$E^{-1}(i(k))=E(i(\frac{1}{k}))$ ，$E^{-1}(i,j(k))=E(i,j(-k))$ ；

③ $|E(i,j)|=-1$， $|E(i(k))|=k$， $|E(i,j(k))|=1$．

版块三　初等变换与初等矩阵

3、初等变换与初等矩阵的关系

定理

设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 对 A 实施一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 实施一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

版块三　初等变换与初等矩阵

例 10 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（　　）.

A　$AP_1P_2=B$；　　B　$AP_2P_1=B$；　　C　$P_1P_2A=B$；　　D　$P_2P_1A=B$.

分析　矩阵B是先将矩阵A的第一行乘以1加到第三行，然后再将第二行和第三行交换位置，由初等变换与初等矩阵的关系，相当于先左乘P_2，再左乘P_1，也就是$B=P_1P_2A$．正确答案：C.

版块三　初等变换与初等矩阵

例 11 设 A 为三阶方阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B ，再交换 B 的第二行和第三行得单位矩阵, 记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 则 $A=$ （　　）.

A　P_1P_2 ；　　B　$P_1^{-1}P_2$ ；　　C P_2P_1 ；　　D　$P_2P_1^{-1}$.

分析 由初等变换与初等矩阵的关系, 这里是先进行一次初等列变换再进行一次初等行变换, 所以是先右乘一个初等矩阵再左乘一个初等矩阵. 先有 $AP_1=B$ ，再有 $P_2B=E$ ，又因为初等矩阵都是可逆的, 所以

$$\left.\begin{array}{l}AP_1=B\Rightarrow A=BP_1^{-1}\\P_2B=E\Rightarrow B=P_2^{-1}E\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}A=P_2^{-1}EP_1^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}\\P_2^{-1}=P_2\end{array}\right\}\Rightarrow A=P_2P_1^{-1}.$$

正确答案:D.

版块三　初等变换与初等矩阵

例 12 设n阶方阵 A 可逆，将A 的第i 行和第 j行交换后得到矩阵 B ，

(1) 证明 B 可逆；(2) 求 AB^{-1} .

分析　前面归纳了初等矩阵的逆矩阵和转置矩阵的有关公式，这里要用到.

(1) 将 A 的第 i 行和第 j行交换后得到矩阵 B ，即 $B=E(i,j)A$ ，

因为 $B=E(i,j),A$ 都可逆，所以 B 可逆，并且

$$B^{-1}=(E(i,j)A)^{-1}=A^{-1}E^{-1}(i,j)=A^{-1}E(i,j);$$

(2) $AB^{-1}=AA^{-1}E(i,j)=E(i,j).$

版块三　初等变换与初等矩阵

4、 解矩阵方程

（1） 线性方程组可以写成矩阵形式 $Ax=b$ ，这里，$Ax=b$ 就是一个特殊的矩阵方程，其中常向量 b 就是一个列矩阵. 解这个矩阵方程就是解方程组.

（2） 对矩阵方程 $AX=B$ ，当 B 不是列矩阵，并且 A 可逆时，我们有 $X=A^{-1}B$ ；同理，$XA=B \Rightarrow X=BA^{-1}$.

版块三　初等变换与初等矩阵

例 13 解矩阵方阵 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

解　令 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

方法一　利用上面的公式, 先求出 A^{-1} , 再求出 $A^{-1}B$. 由于 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

故矩阵方程的唯一解为 $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

方法二　利用初等变换

$$(A \vdots B) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

版块三　初等变换与初等矩阵

故矩阵方程的唯一解为 $X=\begin{pmatrix}-7 & -2 & 9\\ 5 & 1 & -5\end{pmatrix}$.

注

方法二是指对矩阵方程 $AX=B,\left(A\vdots B\right)\sim\left(A^{-1}A\vdots A^{-1}B\right)\sim(E\vdots A^{-1}B)$ ；

而对矩阵方程 $XA=B,\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}AA^{-1}\\ BA^{-1}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}E\\ BA^{-1}\end{pmatrix}$.

版块四　矩阵的秩

1、 k 阶子式

设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 在 A 中任取 k 行 k 列, 则在其交叉处的 k^2 个元素按原来的顺序组成一个 k 阶行列式, 称为 A 的一个 k 阶子式.

2、 矩阵的秩

矩阵 A 的最高阶非零子式的阶数称为 A 的秩, 记作 $r(A)$.

版块四　矩阵的秩

3、与秩有关的常用公式和结论

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则

(1) $0\le r(A)\le \min\{m,n\}$；

(2) $r(A^T)=r(A)$；

(3) 若 $A\ne 0$，则 $r(A)\ge 1$；

(4) $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$；

(5) $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$；

(6) 若 A 是 n 阶方阵，则 $r(A)=n\Leftrightarrow |A|\ne 0, r(A)<n\Leftrightarrow |A|=0$；

(7) 同型矩阵 A,B 等价的 $r(A)=r(B)$；

版块四　矩阵的秩

(8) 设 A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，则 $r(A^*)=\begin{cases} n, 若 r(A)=n; \\ 1, 若 r(A)=n-1; \\ 0, 若 r(A)<n-1. \end{cases}$

例 14 与矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 等价的是(　　).

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　B $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　C $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;　D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

方法一　直接进行初等变换，将 A 化为四个选项中的某一个矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以，正确答案：B.

版块四　矩阵的秩

方法二 利用结论：同型矩阵 A,B 等价的 $r(A)=r(B)$.

四个选项的矩阵的秩一目了然，只需将 A 进行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

这里就不需再进行初等列变换. 得到 $r(A)=2$，所以，正确答案：B .

版块四　矩阵的秩

例 15 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$，且 $r(A)=3$，则 $k=($　　$)$.

分析　$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1 \\ k+3 & k & 1 & 1 \\ k+3 & 1 & k & 1 \\ k+3 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3,$$

由结论，若 A 是 n 阶方阵，则 $r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0, r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$，可得 $|A|=0$，

从而 $k=1$ 或 $k=-3$. 又因为 $k=1$ 时，$r(A)=1$，所以，$k=-3$.

版块四　矩阵的秩

例 16　设 A 是 $m\times n$ 矩阵, $r(A)=r<m<n$ ，则（　　）成立.

A　A 的所有 n 阶子式都不为零;　　　　B　A 的所有 n 阶子式都不为零;

C　A 经过初等行变换可以化为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;　D　A 不可能是满秩矩阵.

分析　$r(A)=r$, 只需存在一个 r 阶非零子式, 也不需要所有 $r-1$ 阶子式不为零,

另外, 我们已经学过,

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\text{行阶梯形矩阵}B_1\xrightarrow{\text{初等行变换}}\text{行最简形}B_2$$

$$\xrightarrow{\text{初等列变换}}\text{标准型}B_3=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以选项 A、B、C都不对, 因为 $r(A)=r<m<n$ ，所以 A 肯定不是满秩矩阵.

正确答案: D.

温馨提示：

此习题为章补充练习，针对《线性代数》慕课第二章所介绍内容设计，并附有答案和解析，建议大家学习完本章内容（最好学习完第二章复习长视频）后完成！建议时量：90 分钟.

一、填空题：

1、二阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为（　　　）.

2、$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=$（　　　）.　　　3、$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=$（　　　）.

4、设 A 为三阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=3$，则

（1）$|A^{-1}|=$（　　　）.　　　（2）$|A^*|=$（　　　）.

（3）$|-2A|=$（　　　）.　　　（4）$|(3A)^{-1}|=$（　　　）.

（5）$\left|\frac{1}{3}A^*-4A^{-1}\right|=$（　　　）.　　　（6）$|(A^*)^{-1}|=$（　　　）.

5、设 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\0 & 3 & -4 & 3\\0 & 4 & -7 & -1\end{pmatrix}$，则秩 $r(A)=$（　　　）.

6、方阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}=$（　　　）.

7、设 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，则 $A^n=$（　　　）.

8、方阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 7\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}=$（　　　）.

二、求解矩阵方程$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

三、将下列矩阵化为行最简形：

1、$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$；

2、$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

四、设$A^3 = 2E$，证明：$A+2E$可逆，并求出$(A+2E)^{-1}$.

五、已知矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，为得到下述 4 个矩阵，请分别求出$A$所乘上的矩阵.

1、$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$；

2、$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$；

3、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$；

4、$(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{31}+a_{32}+a_{33})$.

答案与解析：

一、填空题：

1、$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

解析：对二阶方阵，求伴随矩阵A^*有顺口溜“主交换，副变号”，求出A^*后再用公式求出逆矩阵$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$.

2、$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 6 \\ -4 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

3、18.

解析：注意对第 2 题和第 3 题的条件和结论进行比较.

4、(1) $\frac{1}{3}$; (2) 9; (3) -24; (4) $\frac{1}{81}$; (5) -9; (6) $\frac{1}{9}$.

解析：此题为巩固方阵的有关性质，很重要！特别是第（2）（5）（6）题中出现 A^*，需记住线性代数中只有公式 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ 中有 A^*，所以计算这几道与 A^* 有关的题时，首先需通过公式 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，用 $|A|A^{-1}$ 替换 A^*.

5、2.

解析：如只需求矩阵的秩，则只要将矩阵化为行阶梯形，有几个非零行就说明矩阵的的秩是几.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}\underset{\sim}{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}0&3&-4&3\\0&2&-3&1\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}\underset{\sim}{r_1-r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&2&-3&1\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix}r_2-2r_1\\r_3-4r_1\end{matrix}}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&-1&-3\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}\underset{\sim}{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

6、$\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

解析：设 $A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&a_2&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_n&\cdots&0&0\end{pmatrix}$，且 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\frac{1}{a_n}\\0&\cdots&\frac{1}{a_{n-1}}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\\frac{1}{a_1}&\cdots&0&0\end{pmatrix}$.

7、$\begin{pmatrix}3^n&0&0\\0&1&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}$.

解析：设 $A=\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_n\end{pmatrix}$，则 $A^n=\begin{pmatrix}a_1^{\ n}&0&\cdots&0\\0&a_2^{\ n}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_n^{\ n}\end{pmatrix}$.

8、$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

解析：此矩阵可化成分块对角矩阵，利用分块矩阵法求逆矩阵.

二、$X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

解析：方法一：令 $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，原矩阵方程即 $P_1XP_2=A$，易证 P_1,P_2 可逆，所以 $P_1XP_2=A$ 可化为 $X=P_1^{-1}AP_2^{-1}$，分别求出 P_1^{-1},P_2^{-1}，再将 $P_1^{-1}AP_2^{-1}$ 求出来即可. 此为常规方法.

方法二：注意到 P_1,P_2 都为三阶初等矩阵，其中 P_1 看成由单位矩阵 E_3 交换第 1，2 行所得，P_2 看成由单位矩阵 E_3 交换第 2，3 列所得，由初等矩阵与初等变换的关系知 $P_1XP_2=A$ 是指先交换矩阵 X 中的第 1，2 行，再交换 X 中的第 2，3 列后得到矩阵 A，所以，不用计算，只需逆过来，交换矩阵 A 中的第 1，2 行，及第 2，3 列后便得到 $X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

注：方法二简单直接，建议大家回看一下介绍初等矩阵与初等变换关系的那条定理.

三、1、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

2、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解析：此类题没任何解答技巧，需按部就班通过初等行变换先将矩阵化为行阶梯形，再继续初等行变换化为最简形，作为后续学习的重要基础，必须掌握好.

$$\begin{pmatrix}5&0&4&1\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\5&0&4&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-5r_1\\r_3-4r_1\\r_4-r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&5&-6&-4\\0&5&-6&-4\\0&2&-1&0\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&5&-6&-4\\0&0&0&0\\0&2&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&5&-6&-4\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&2&-1&0\\0&5&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&5&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_3-5r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{7}{2}&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{2}{7}r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{8}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{8}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_1-\frac{3}{2}r_3\\r_2+\frac{1}{2}r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{7}\\0&1&0&\frac{4}{7}\\0&0&1&\frac{8}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

注： 考虑到第 2 题的计算有点繁琐，以上特给出详解，供大家参考；进行初等行变换的方法可以不唯一.

四、$\dfrac{A^2-2A+4E}{10}$.

解析：此类题类似于“因式分解”，并利用推论“若方阵 $AB=E$，则 A,B 互为逆矩阵”得出结论.

$\because \quad A^3=E, \quad \therefore \quad (A+2E)(A^2-2A+4E)=10E$，即 $(A+2E)\dfrac{A^2-2A+4E}{10}=E$.

五、1、左乘 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$；

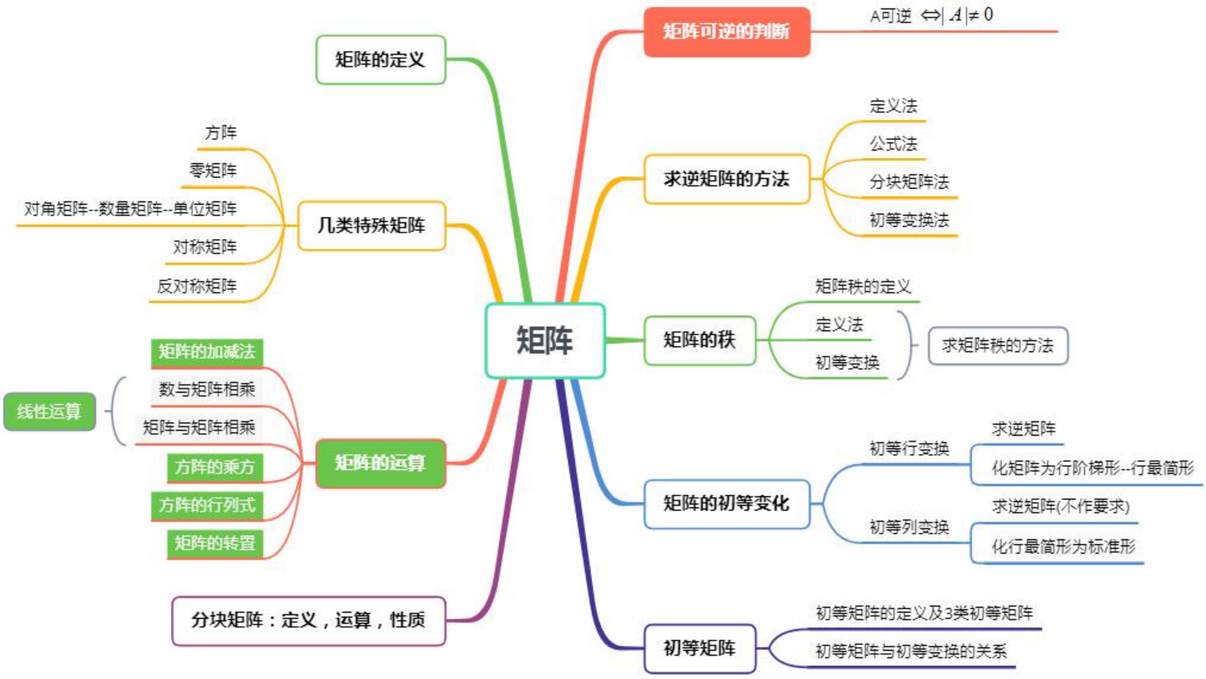
2、右乘 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

3、左乘 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$；

4、左乘 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，右乘 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

注：我们习惯于“从左到右”，即由矩阵相乘得出积矩阵；此题很有意思，是反过来，由积矩阵反推所进行的乘法运算，对大家的要求更高，需非常熟练矩阵的运算.

第二章　　矩阵知识图解



矩阵
矩阵的定义
几类特殊矩阵
方阵
零矩阵
对角矩阵--数量矩阵--单位矩阵
对称矩阵
反对称矩阵
矩阵的运算
线性运算
矩阵的加减法
数与矩阵相乘
矩阵与矩阵相乘
方阵的乘方
方阵的行列式
矩阵的转置
分块矩阵：定义，运算，性质
矩阵可逆的判断
A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
求逆矩阵的方法
定义法
公式法
分块矩阵法
初等变换法
矩阵的秩
矩阵秩的定义
定义法
初等变换
求矩阵秩的方法
矩阵的初等变化
初等行变换
求逆矩阵
化矩阵为行阶梯形--行最简形
初等列变换
求逆矩阵(不作要求)
化行最简形为标准形
初等矩阵
初等矩阵的定义及3类初等矩阵
初等矩阵与初等变换的关系