一、函数

1、区间和邻域

2、函数的定义

3、函数的性质：有界性、单调性、奇偶性、周期性

4、复合函数

5、反函数

6、基本初等函数、初等函数

二、极限

1、数列极限定义、性质：$\lim_{n\to\infty} x_n = A$

2、函数极限定义、性质：

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$; $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$; $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$

3、无穷小、无穷大

1）无穷小：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

2）无穷大：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

3）无穷小与无穷大的关系

4、极限的运算法则：
四则运算法则、无穷小的运算法则、复合函数的极限。

5、极限的存在准则：夹逼准则、单调有界原理

6、两个重要极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e,\quad \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n}=e,\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

7、无穷小的比较：等价无穷小的替换

当 $x\to 0$ 时，常用等价无穷小：

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$\arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x.\qquad e^{x}-1\sim x$$

三、连续函数

1、连续性的概念：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2、连续函数的运算

3、初等函数的连续性：

初等函数在其定义区间内都是连续的。

4、函数的间断点：第一类、第二类

5、闭区间上连续函数的性质：

最值定理、有界性定理、介值定理、零点定理。

一、填空题

1、设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, 则 $f[f(x)]=$ $\underline{x,(x\neq-1)}$.

分析

$$f[f(x)]=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=x,$$

且

$$\begin{cases} x\neq-1 \\ \frac{1-x}{1+x}\neq-1 \end{cases}\Rightarrow x\neq-1.$$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}=-1$

解

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n}{3^n}-1}{\dfrac{2^n}{3^n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{2}{3}\right|^n-1}{\left|\dfrac{2}{3}\right|^n+1}=-1$$

3、$\lim\limits_{x\to\infty}\left|1-\frac{1}{x}\right|^{2x}=\underline{e^{-2}}$

解

原式 $\overset{u=-\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{-\frac{2}{u}}$

$$=\lim_{u\to 0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{-2}=e^{-2}$$

4、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{3x+2}\sin\dfrac{1}{x}=\underline{\dfrac{2}{3}}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{3x+2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{3x^2+2x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}.$$

5、已知 $x \to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$ $\underline{-\frac{3}{2}}$.

分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1.$$

解得 $a=-\frac{3}{2}$.

6、函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x\sin\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 的连续区间是

$\underline{(-\infty,+\infty)}$.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)$ 连续当 $x>0$ 时，$f(x)$ 连续；

又因为 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$.

所以，当 $x=0$ 时 $f(x)$ 连续.

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

二、选择题:

1、函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$ 的定义域是（ A ）

(A) $[0,2)$;(B) $(-2,2)$;(C) $[0,4]$;(D) $(-2,4]$

分析 $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ -1\leqslant\dfrac{x}{2}-1\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ 0\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$

所以，$0\leqslant x<2.$

2、已知极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n}+kn\right)=0$, 则常数$k=$ （ A ）

(A) -1 ;(B) 0 ;(C) 1 ;(D) 2 .

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n}+kn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2+kn^2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)n^2+2}{n}=0,$$

所以, $k+1=0$. 从而, $k=-1$.

3、若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则下列选项中不正确的是（ C ）

(A) $f(x)=A+\alpha$, 其中α 为无穷小；

(B) $f(x)$在 x_0 点可以无意义；

(C) $A=f(x_0)$ ；

(D)若 $A>0$, 则在x_0 的某一去心邻域内$f(x)>0$.

4、当 $x \to 0$ 时，下列哪一个函数不是其他函数的等价无穷小（ B ）

(A) $\sin x^2$;　　(B) $1-\cos x^2$;

(C) $\ln(1+x^2)$;　　(D) $x(e^x-1)$.

解　当 $x \to 0$ 时，

$$\sin x^2 \sim x^2; \qquad 1-\cos x^2 \sim \frac{1}{2}(x^2)^2;$$

$$\ln(1+x^2) \sim x^2; \quad x(e^x-1) \sim x^2.$$

5、设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x>0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x<0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续

则常数 a,b 的值为（ C ）

(A) $a=0, b=0$;　(B) $a=1, b=1$;

(C) $a=-1, b=-1$; (D) $a=1, b=-1$.

解 由函数在点 $x=0$ 连续可知，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)= f(0)=b.$$

而

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\ln(1-x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a.$$

所以，$a=b=-1.$

6、已知函数 $f(x)=x^3+x-3$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，则方程$x^3+x-3=0$ 必有一个根的区间是（ C ）

(A) $(-1,0)$ ；(B) $(0,1)$ ；(C) $(1,2)$ ；(D) $(2,3)$.

解

$$f(-1)=-5<0,\ f(0)=-3<0,\ f(1)=-1<0,$$

$$f(2)=7>0,\ f(3)=27>0.$$

三、计算下列各题：

1、求函数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 的反函数，并求反函数的定义域．

解　由 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 可得，$x=\ln\dfrac{y}{1-y}$.

由 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^x+1-1}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$ 可知 $0<y<1$.

因此，所求反函数为 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$，$(0<x<1)$.

2、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

解

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1.$$

3、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right|$.

解 令 $x_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$, 因为

$$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}$$

即 $\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\dfrac{1}{2}$.

所以, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

作业，第44页，习题1.4(B)

1、（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right).$

解　令 $x_n = n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$，因为

$$n\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right) \leqslant x_n \leqslant n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}\right)$$

即 $\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant x_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1.$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

4、求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left|\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right|$.

解

原式 $=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right]$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1.$$

5、设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{x+2a}{x-a}\right|^{x}=8$, 求常数$a$.

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x+2a}{x-a}\right|^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{2a}{x})^{x}}{(1-\frac{a}{x})^{x}}=\frac{e^{2a}}{e^{-a}}=e^{3a}=8,$$

所以，$3a=\ln 8$, 即得$a=\dfrac{1}{3}\ln 8=\ln 2$.

6、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解

原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+3\tan^2 x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3\tan^2 x\right)}{x^2}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\tan^2 x}{x^2}} = e^3.$

7、讨论函数 $f(x)=\dfrac{|x|(x-1)}{x^2(x^2-1)}$ 的间断点及其类型．

解　函数在 $x=0, x=1, x=-1$ 处没有定义，

因此，$x=0, x=1, x=-1$ 是函数的间断点．

因为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)}{x^2(x^2-1)}, x>0,\text{且}x\neq 1\\ -\dfrac{x(x-1)}{x^2(x^2-1)}, x<0,\text{且}x\neq -1\end{cases},$

即 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(x+1)}, x>0,且x\neq 1\\ -\dfrac{1}{x(x+1)}, x<0,且x\neq -1\end{cases}$,

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[-\dfrac{1}{x(x+1)}\right]=\infty.$

所以，$x=-1$ 是函数的第二类间断点 .

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}\right]=\infty.$

所以，$x=0$ 是函数的第二类间断点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{2}.$

所以，$x=1$ 是函数的第一类间断点.

四、证明题：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a < f(x) < b$.

证明至少存在一点 $\alpha \in (a,b)$，使 $f(\alpha) = \alpha$.

证明 设 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a) = f(a) - a > 0, F(b) = f(b) - b < 0,$$

所以，由零点定理知，存在 $\alpha \in (a,b)$，使得

$F(\alpha) = 0$，即 $f(\alpha) = \alpha$.