1、原函数：$F'(x) = f(x)$，称$F(x)$ 是$f(x)$ 的原函数.

2、不定积分：

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Longleftrightarrow F'(x) = f(x),$$

3、不定积分的计算方法：

1）基本积分公式表；

2）不定积分的性质；

3）凑微分法：

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

$$\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=} \int f(u)du$$

$$= F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

4）第二类换元积分法：

$$\int f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=\!=\!=\!=} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

常用的三角代换：

$$\sqrt{a^2-x^2} \longrightarrow x = a\sin t$$

$$\sqrt{x^2+a^2} \longrightarrow x = a\tan t$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \longrightarrow x = a\sec t$$

5）分部积分法：

$$\int uv'dx = \int udv = uv - \int vdu = uv - \int u'vdx$$

4、有理函数的积分

一、填空题

1.若不定积分$\int f(x)dx = 2^{x^2} + C$,则被积函数

$f(x) = \underline{2x \cdot 2^{x^2} \ln 2}$.

分析

$$f(x) = (2^{x^2})' = 2^{x^2} \ln 2 \cdot (x^2)' = 2x \cdot 2^{x^2} \ln 2.$$

2.已知 $\left(\int f(x)dx\right)'=\sqrt{1+x^2}$,则 $f'(1)=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

分析 由 $\left(\int f(x)dx\right)'=[F(x)+C]'=f(x)$知

$$f(x)=\sqrt{1+x^2},$$

所以, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

从而, $f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.设 $\int f(x)dx = x^2 + C$，则 $\int xf(x^2-1)dx =$ ______

分析

$$\int xf(x^2-1)dx = \frac{1}{2}\int f(x^2-1)d(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)^2 + C.$$

4.不定积分 $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x+1}}dx=$ $\underline{2\sqrt{\tan x+1}+C}$.

分析

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x+1}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\tan x+1}}d(\tan x+1)$$

$$=2\sqrt{\tan x+1}+C.$$

5.不定积分$\int \frac{1}{x(1+x^3)}dx=\underline{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|+C}$.

分析

$$\int \frac{1}{x(1+x^3)}dx=\int \frac{x^2}{x^3(1+x^3)}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3(1+x^3)}d(x^3)$$

$$=\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{1+x^3}\right)d(x^3)$$

$$=\frac{1}{3}\left|\int \frac{1}{x^3}d(x^3)-\int \frac{1}{1+x^3})d(x^3+1)\right|$$

$$=\frac{1}{3}(\ln|x^3|-\ln|1+x^3|)+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|+C$$

二、选择题

1.若函数 2^x 为 $f(x)$的一个原函数,则 $f(x)=$ (C)

(A) $x2^{x-1}$;(B) $\dfrac{1}{x+1}2^{x+1}$;(C) $2^x\ln 2$;(D) $\dfrac{2^x}{\ln 2}$.

分析 由原函数的定义知,

$$f(x)=(2^x)'=2^x\ln 2.$$

2.若函数$\ln(x^2+1)$为 $f(x)$的一个原函数,则下列函数中

（ C ）为 $f(x)$ 的原函数。

(A) $\ln(x^2+2)$;　　　　(B) $2\ln(x^2+2)$;

(C) $\ln(2x^2+2)$;　　　　(D) $2\ln(x^2+1)$.

分析

$$\ln(2x^2+2)=\ln[2(x^2+1)]=\ln 2+\ln(x^2+1).$$

3.设 $F''(x)=f(x)$则 $\int f(x)dx=($ B $)$

(A) $F(x)+C$;　　(B) $F'(x)+C$;

(C) $F''(x)+C$;　　(D) $f'(x)+C$.

分析

由 $F''(x)=[F'(x)]'=f(x)$知,

$F'(x)$是 $f(x)$的原函数。

三、计算下列不定积分：

1. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

解

原式 $=\int \frac{e^x \cdot e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{e^x}{1+e^x}de^x=\int \frac{e^x+1-1}{1+e^x}de^x$

$=\int (1-\frac{1}{1+e^x})de^x=\int de^x-\int \frac{1}{1+e^x}d(e^x+1)$

$=e^x-\ln(1+e^x)+C$

2. $\int \frac{x-\arctan x}{1+x^2}dx$

解

原式 $=\int \frac{x}{1+x^2}dx-\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}-\int \arctan x d\arctan x$

$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$

3. $\int \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$

解　令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t dt$，且

$$\int \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\sin^2 t\cos t}{1-\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int \frac{\sin^2 t\cos t}{1-\cos t}dt$$

$$=\int \frac{(1-\cos^2 t)\cos t}{1-\cos t}dt=\int (1+\cos t)\cos t dt$$

$$=\int (\cos t+\cos^2 t)dt=\int (\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})dt$$

$$=\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=x+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} dx.$

解　令 $t=\sqrt{2x-1}$,则 $x=\frac{1}{2}(t^2+1), dx=t\,dt$,且

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} dx=\int \frac{t}{t+1} dt=\int \frac{t+1-1}{t+1} dt$$

$$=\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right) dt=t-\ln|t+1|+C$$

$$=\sqrt{2x-1}-\ln(1+\sqrt{2x-1})+C.$$

5. $\int e^x \sin\frac{x}{2}dx.$

解 $\int e^x \sin\frac{x}{2}dx = \int \sin\frac{x}{2}de^x = e^x \sin\frac{x}{2} - \int e^x d\sin\frac{x}{2}$

$= e^x \sin\frac{x}{2} - \int e^x \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}dx = e^x \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2} de^x$

$= e^x \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(e^x \cos\frac{x}{2} - \int e^x d\cos\frac{x}{2})$

$= e^x \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}e^x \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int e^x \sin\frac{x}{2}dx,$

所以，$\int e^x \sin\frac{x}{2}dx = \frac{4}{5}(e^x \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}e^x \cos\frac{x}{2}) + C.$

6. $\int \frac{1+x^2\ln^2 x}{x\ln x}dx.$

解

原式 $=\int \frac{1}{x\ln x}dx+\int \frac{x^2\ln^2 x}{x\ln x}dx=\int \frac{1}{\ln x}d\ln x+\int x\ln x dx$

$=\ln|\ln x|+\frac{1}{2}\int \ln x d(x^2)$

$=\ln|\ln x|+\frac{1}{2}(x^2\ln x-\int x^2 d\ln x)$

$=\ln|\ln x|+\frac{1}{2}(x^2\ln x-\int x dx)$

$=\ln|\ln x|+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$

7. $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx.$

解 设 $\frac{x+7}{x^2-x-2}=\frac{x+7}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$, 则

$$A(x+1)+B(x-2)=x+7,$$

令 $x=2$, 则 $A=3$; 令 $x=-1$, 则 $B=-2$;

所以,

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx=\int \left(\frac{3}{x-2}+\frac{-2}{x+1}\right)dx$$

$$=3\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C.$$

8. $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

解

$$\text{原式} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+1} dx = \int \frac{1}{\sec^2 x+1} d\tan x$$

$$= \int \frac{1}{\tan^2 x+2} d\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$$

四、应用题

已知某产品产量的变化率是时间 t 的函数 $f(t)=at+b$（a,b 为常数），设此产品的产量为函数 $P(t)$，且 $P(0)=0$，求 $P(t)$.

解 由题意知 $P'(t)=f(t)=at+b$，又因为

$$\int f(t)dt=\int(at+b)dt=\frac{a}{2}t^2+bt+C,$$

所以，存在常数 C，使得 $P(t)=\frac{a}{2}t^2+bt+C$.

又由 $P(0)=0$，代入可得 $P(0)=C=0$.

所以，$P(t)=\frac{a}{2}t^2+bt$.