1. 定义：连续函数$f(x,y)$在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分即为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中，$\mathrm{L}=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i$，$(\xi_i,\eta_i)$为 L 上$\Delta s_i$小段上的某一点，$\lambda=\max\{\Delta s_i$的长度$\}$。

我们称$f(x,y)$为被积函数，L 为积分路径，ds 为弧微分，第一类曲线积分也叫对弧长的曲线积分。

2. 性质：

性质1：$\int_L [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}s=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\pm\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$；

性质2：$\int_L kf(x,y)\mathrm{d}s=k\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，$k$为常数；

性质3：若 $\mathrm{L}=L_1+L_2$，则有$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$；

性质4：在 L 上$f(x,y)\le g(x,y)$，则有$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\le\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$；

性质5：$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\widehat{BA}} f(x,y)\mathrm{d}s$

3. 计算：对于第一类曲线积分的计算，其方法是首先要将曲线 L 参数化。

根据$f(x,y)$的不同函数形式，将 L 参数化有以下几种情况：

L: $f(x,y)$	$y = y(x)$	$x = x(y)$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
选取参数	x	y	t
参数方程	$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$	$\begin{cases} x = x(y) \\ y = y \end{cases}$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
参数区间	$a \le x \le b$	$c \le x \le d$	$\alpha \le t \le \beta$
计算	$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ $= \int_L f(x,y)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$	$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ $= \int_L f(x,y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}\mathrm{d}y$	$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ $= \int_L f(x,y)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$

【例 1】 计算 $I=\int_L x\mathrm{d}s$,其中 L 为双曲线 $xy=1$ 从点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 到点$(1,1)$ 的弧段.

解:L 为 $x=\frac{1}{y}$,$1\leqslant y\leqslant 2$,以 y 为积分变量易得

$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_1^2\frac{1}{y}\sqrt{1+(x')^2}\,\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{\sqrt{1+y^4}}{y^3}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{1+y^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1+y^4}}{y^2}\Bigg|_1^2-\int_1^2\frac{1}{y^2}\frac{2y^3}{\sqrt{1+y^4}}\mathrm{d}y\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\mathrm{d}y^2$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}.$$

1. 定义：假设 xoy 面内一个质点，被力$F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$推着走，从 A 点沿一条曲线 L 移动到 B 点，其中 P（x, y），Q(x, y) 在 L 上连续。在这个过程中变力所作的功为：

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 性质：

性质1： $\int_L [\alpha \boldsymbol{F}_1(x,y) + \beta \boldsymbol{F}_2(x,y)]\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \alpha \int_L \boldsymbol{F}_1(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \beta \int_L \boldsymbol{F}_2(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$；

性质2： 若 $L = L_1 + L_2$，则有 $\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$；

性质3： $\int_{L^-} F(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$L^-$ 是 L 的方向曲线。。

3. 计算：对于第二类曲线积分的计算，同样方法是首先要将曲线 L 参数化。

根据$f(x,y)$的不同函数形式，将 L 参数化有以下几种情况：

L: $\boldsymbol{F}(x,y)$	$y=y(x)$	$x=x(y)$	$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$
选取参数	x	y	t
参数方程	$\begin{cases}x=x\\y=y(x)\end{cases}$	$\begin{cases}x=x(y)\\y=y\end{cases}$	$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$
参数区间	$a\le x\le b$	$c\le x\le d$	$\alpha\le t\le\beta$
计算	$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ $=\int_L [P(x,y)+Q(x,y)y'(x)]\mathrm{d}x$	$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ $=\int_L [P(x,y)x'(y)+Q(x,y)]\mathrm{d}y$	$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ $=\int_L [P(x,y)x'(t)+Q(x,y)y'(t)]\mathrm{d}t$

【例 2】 计算$\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 C 为曲线 $y=1-|1-x|$ 从对应于 $x=0$ 的点到 $x=2$ 的点.

【思路探索】 积分曲线 C 在 $x=0$ 到 $x=2$ 之间是由两条直线段组成，因而首先应把 $y=1-|1-x|$ 在每段上的表达式写出来，然后再把所求积分转化成两条有向线段上的积分之和.

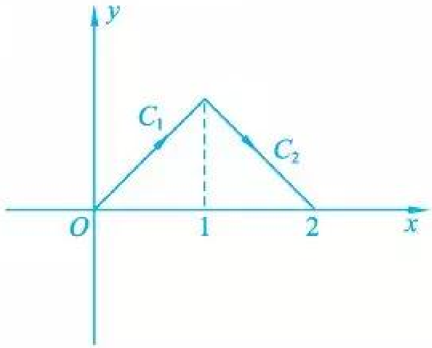


图 L11-1

解：$y=1-|1-x|=\begin{cases} x, & x\leqslant 1, \\ 2-x, & x>1, \end{cases}$

故 C 是由 $C_1: y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 和 $C_2: y=2-x(1<x\leqslant 2)$ 组成(如图 L11-1)，

故$\int_C=\int_{C_1}+\int_{C_2}$.

$$\int_{C_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2+x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y&=\int_1^2\{[x^2+(2-x)^2]+[x^2-(2-x)^2](-1)\}\mathrm{d}x\\&=2\int_1^2(4-4x+x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\end{aligned}$$

所以$\int_C(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}$.

【例3】 计算 $I=\oint_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$,其中 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧位于第一卦限部分的正向边界.

解:如图 L11-2 所示,C 可分为 l_1,l_2,l_3 三段.

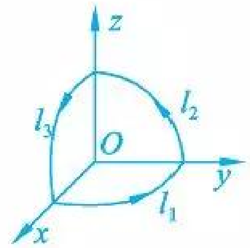


图 L11-2

l_1 的参数方程为:$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, \\ z=0, \end{cases}$

故 $\int_{l_1} y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\cdot(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-\dfrac{2}{3}a^3$.

由对称性知 $\int_{l_2}=\int_{l_3}=\int_{l_1}$.

故 $I=\oint_C=\int_{l_1}+\int_{l_2}+\int_{l_3}=3\int_{l_1} y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=-2a^3$.

曲线积分	第一类	第二类
积分区域	弧线段	有向弧
曲线 L	从小值到大值	从起点到终点
被积函数	都定义在 L 上	
积分微元	ds	dx，dy
两类曲线积分的关系	$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{ds}$ 其中 α，β 为有向曲线弧 L 切向量的方向角。	

格林公式：设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续的偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

成立.

其中 L 取正向.

需要说明以下几点：

(1) 格林公式说明了平面闭区域 D 上的二重积分可通过沿闭区域 D 的边界曲线上的曲线积分来表达，即面积分可以转化为线积分.

(2) 格林公式的简单应用：设闭区域 D 是由分段光滑曲线 L 围成，则 D 的面积 $=\frac{1}{2}\oint_{L} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$.

(3) 在应用格林公式时，首先检验格林公式的条件是否满足，即 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在由分段光滑的闭曲线 L 所围成的闭区域 D 上具有一阶连续偏导数，当条件不满足时，公式不能用. 例如考虑积分 $\oint_{L}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是区域 D 的边界曲线，如果 D 包含原点，那么 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在原点就不存在，就不可能连续，这时就不能运用格林公式将其转化为二重积分.

平面曲线积分与路径无关的条件：

设 G 是单连通区域，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则下面四个命题等价：

(1) $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内积分与路径无关；

(2) $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，$L$ 为 G 内任一闭曲线；

(3) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\quad(x,y)\in G$；

(4) 存在可微函数 $u(x,y)$，使

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,(x,y)\in G$$

且当上述四个等价命题之一成立时，有

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\
&= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

((x_0, y_0) 为 G 内任一点).

全微分方程：

如果一阶微分方程写成：$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，其中$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则称此方程为全微分方程. 其隐式通解为：

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\equiv C$$

例 1 计算 $\int_L y(1+\cos x)\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y$，其中 L 为自点(0,1)沿抛物线 $y^2=1-x$ 到点(1,0)的一段.

【思路探索】 本题积分路径不封闭，可通过添加辅助线，然后用格林公式计算.

解：如图 1 所示，添加路径 L_1 和 L_2，构成封闭曲线以应用格林公式

其中 $L_1: x=0, 0\leqslant y\leqslant 1$，则 $\mathrm{d}x=0$

$L_2: y=0, 0\leqslant x\leqslant 1$，则 $\mathrm{d}y=0$

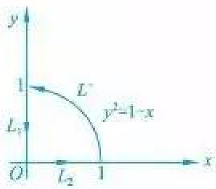


图 1

$$\int_{L_1}=\int_1^0 0\mathrm{d}y=0,\int_{L_2}=\int_0^1 0\mathrm{d}x=0$$

所以 $\int_{L_1}+\int_{L_2}=0$，

又 $\oint_{L_1+L_2+L^-}=\iint_D(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y^2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$$

故 $-\int_L=\int_{L^-}=\oint_{L_1+L_2+L^-}-(\int_{L_1}+\int_{L_2})=-\frac{2}{3}$

得 $\int_L y(1+\cos x)\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y=-(-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$

例 2 计算$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$,其中 L 为 $|x|+|y|=1$ 的正向.

【思路探索】 L 为闭曲线,但 $P(x,y),Q(x,y)$ 在闭区域 D 内有一点 O,不具有一阶连续偏导数,可考虑采用"挖洞"的方法来利用格林公式.

解:积分曲线如图 2 所示.

令 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+4y^2}$

$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+4y^2}$

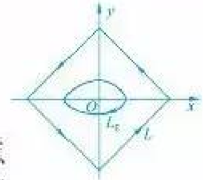


图 2

显然,$P(x,y),Q(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不连续,所以不能直接用格林公式.以原点为中心作一小椭圆 L_ε:$x^2+4y^2=\varepsilon^2$(如图 2)

即$\frac{x^2}{\varepsilon^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}=1$($\varepsilon$ 充分小)

记介于 L_ε 与 L 之间的区域为 D_ε,L_ε 取顺时针方向,则在 D_ε 上可利用格林公式得:

$$\oint_{L+L_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_\varepsilon}\left[\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+4y^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{-y}{x^2+4y^2}\right)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_\varepsilon}\left[\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}-\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=-\oint_{L_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon^-}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon'}\left[\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D_ε':$\frac{x^2}{\varepsilon^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\leqslant 1$,从而

$$\iint_{D_\varepsilon'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\pi}{2}\varepsilon^2.$$

因此$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\pi}{2}\varepsilon^2=\pi.$

(1) **定义**：此概念是通过求光滑曲面的质量这一问题而抽象出来的，其定义见教材。

(理解和掌握对面积的曲面积分的概念、物理意义和性质有助于更好的理解微元法及对面积的曲面积分的计算方法)

注意：

（1）当 $f(x,y,z)>0$ 时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 可以看成是以 $f(x,y,z)$ 为面密度的曲面 $\sum$ 的质量.

（2）当 $f(x,y,z)=1$ 时，$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=|S|$；$|S|$ 为曲面 $\sum$ 的面积.

（3）对面积的曲面积分也具有以下性质：

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S\pm\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} kf(x,y,z)\mathrm{d}S=k\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S(k\text{ 为常数}),$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

(2)对面积的曲面积分的计算方法(根据曲面的不同投影方向分类)

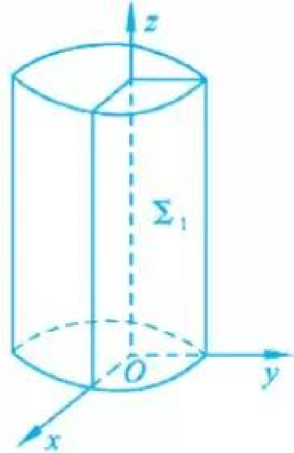
投影到 xOy 面上	设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$，设曲面 Σ 在 xOy 坐标面上的投影区域为 D_{xy}，$z(x,y)$ 在 D_{xy} 上有一阶连续偏导数，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为曲面的面积元素.
投影到 zOx 面上	设曲面 Σ 的方程为 $y=y(z,x)$，设曲面 Σ 在 zOx 坐标面上的投影区域为 D_{zx}，$y(z,x)$ 在 D_{zx} 上有一阶连续偏导数，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，其中 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ 为曲面的面积元素.
投影到 yOz 面上	设曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$，设曲面 Σ 在 yOz 坐标面上的投影区域为 D_{yz}，$x(y,z)$ 在 D_{yz} 上有一阶连续偏导数，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为曲面的面积元素.

(3)例题

【例 1】 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=H(H>0)$ 之间的部分.

解：设 Σ 在第一卦限内为 Σ_1（参考右图），由于 Σ 关于 yOz 面对称，$\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 关于 x 是奇函数，因而由对称性得 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=0$，同理 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=0$.

又 $\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$ 关于 x,y 都是偶函数，故 $I=4\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$.



将 Σ_1 投影到 yOz 面

$D_{yz}: 0\leqslant y\leqslant R, 0\leqslant z\leqslant H, \Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}$.

$$
\begin{aligned}
I&=4\iint\limits_{D_{yz}}\frac{z}{R^2+z^2}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=4\iint\limits_{D_{yz}}\frac{z}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=4R\int_0^H\frac{z}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\\
&=\pi R\ln\left(1+\frac{H^2}{R^2}\right).
\end{aligned}
$$

【例 2】 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的面密度的大小为 $\rho=z$.

解：Σ 在 xOy 平面内的投影域为

$$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 2(z=0),\ \mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以 $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{15}\pi(6\sqrt{3}+1).$$

(1) **定义**：此概念是由求流向曲面一侧的流量这一实际问题抽象得来的，其定义见教材。(性质与对面积的曲面积分类似)

(2)对坐标的曲面积分的计算方法：

投影到 xOy 面上	设曲面 Σ 方程为 $z=z(x,y)$，设曲面 Σ 在 xOy 坐标面上投影区域为 D_{xy}，$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中正、负号分别对应 Σ 的上侧与下侧，即 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向成锐角时，取“+”号；否则，取“—”号.
投影到 zOx 面上	设曲面 Σ 方程为 $y=y(z,x)$，设曲面 Σ 在 zOx 坐标面上投影区域为 D_{zx}，$Q(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$， 其中正、负号分别对应 Σ 的右侧与左侧，即 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴正向成锐角时，取“+”号；否则，取“—”号.
投影到 yOz 面上	设曲面 Σ 方程为 $x=x(y,z)$，设曲面 Σ 在 yOz 坐标面上投影区域为 D_{yz}，$P(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中正、负号分别对应 Σ 的前侧与后侧，即 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴正向成锐角时，取“+”号；否则，取“—”号.

(3)例题

【例 3】 计算曲面积分：

$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 $\sum$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧.

解：Σ 在 xOy 面的投影为一段弧，所以 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

Σ 在 yOz 面上的投影为 $D_{yz}=\{(y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 3\}$，此时 Σ 为

$$x=\sqrt{1-y^2}, (y,z)\in D_{yz}.$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \mathrm{d}z\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y$

$$= 3\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = 3\times\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi,$$

Σ 在 zOx 面上的投影区域为 D_{zx}：$0\leqslant z\leqslant 3, 0\leqslant x\leqslant 1$，此时 Σ 可表示为

$$y=\sqrt{1-x^2}, (x,z)\in D_{zx}.$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_0^3 \mathrm{d}z\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 3\times\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi,$

因此 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0 + \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi.$

3. 两类曲面积分的关系(利用两种曲面积分的联系可以实现两种曲面积分之间的转化，从而化简计算)

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦，写成向量形式为

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} A_n\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$，$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的单位法向量，$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，$A_n$ 是向量 $\boldsymbol{A}$ 在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影.

高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦. 上述公式叫作高斯公式.

高斯公式的应用应注意问题：

(1) 利用高斯公式可以把对坐标的曲面积分化为三重积分，而在大多数情况下计算三重积分比计算对坐标的曲面积分容易.

(2) 要注意高斯公式应用的条件，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在区域 Ω 内要有连续的一阶偏导数，否则高斯公式不能用.

(3) 在高斯公式中，Σ 应为封闭曲面，并取外侧. 如果 Σ 不是封闭曲面，有时可引入辅助曲面 Σ_1，使 $\Sigma+\Sigma_1$ 成为取外侧或取内侧的封闭曲面，进而采用高斯公式. 取内侧时，高斯公式中应加负号. 当然辅助曲面 Σ_1 应尽量简单，以方便计算其上对坐标的曲面积分，一般情况下尽量选择平行于坐标面的平面.

(4) 在应用高斯公式时，要清楚 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 对什么变量求偏导，不要混淆.

(5) 利用两类曲面积分之间的关系，有时可把对面积的曲面积分先转化为对坐标的曲面积分，然后应用高斯公式.

沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件：

设 G 是空间二维单连通区域，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在 G 内与所取曲面 Σ 无关而只取决于 Σ 的边界曲线（或沿 G 内任一闭曲面的曲面积分为零）的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

在 G 内恒成立.

例 1 计算曲面积分：

$$I=\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$，其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 位于第一卦限部分的上侧.

【思路探索】 易验证所求积分中的被积函数均有连续的一阶偏导数，但 S 不是封闭曲面，因此需作辅助面，使其合成为一封闭曲面.

解：设三个坐标面与 S 围成空间区域 Ω，Ω 的边界在三个坐标面部分分别为 D_{xy}，D_{yz}，D_{zx} 分别取下侧，后侧，左侧.

由高斯公式可得：

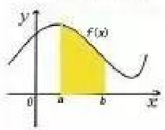
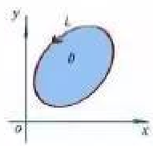
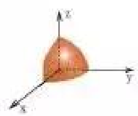
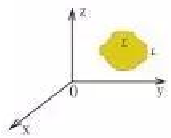
$$\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{yz}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{zx}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{12}$$

显然 $\iint_{D_{xy}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{yz}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{zx}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

所以 $I=\iint_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{12}-0-0-0=\frac{1}{12}$.

名称	公式	空间维度	成立条件	共性
牛顿一莱布尼茨公式	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	一维闭区域 	(1)$f(x)$在$[a,b]$上可积； (2)$F'(x) = f(x), x \in [a,b]$	积分值都能用积分区域的边界值表示
格林公式	$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$	二维闭区域 	(1)平面闭区域 D 的边界曲线 L 分段光滑； (2)P(x,y),Q(x,y)在 D 上有一阶连续偏导数。	
高斯公式	$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{dV} = \oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	三维闭区域 	(1)空间闭区域 Ω 的边界曲面 Σ 分片光滑； (2)P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y, 在 Ω 上有一阶连续偏导数。	
斯托克斯公式	$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$	三维闭区域 	(1)空间曲面闭区域∑的边界曲线 L 分段光滑； (2)P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)在 Σ 上有一阶连续偏导数。	