《离散数学》期末考试题(F)参考答案

一、1.{1, 3, {1, 2}, {3}}；{{2, 3}, {1}}；{1, 3, {1, 2}, {3}, {2, 3}, {1}}.

2.0，1，0.

3. $\neg\forall x(Z(x)\to O(x))$.

4. p^n, p 为素数，n 为正整数.

5. 是，3，10.

二、1(B); 2(C); 3(D); 4(C); 5(A).

三、1(√); 2(×); 3(√); 4(√); 5(×).

四、**证** 对于任意 $z\in C$，由于 $f\circ g$ 是满射，必存在 $x\in A$，使得 $(f\circ g)(x)=g(f(x))=z$.

令 $y=f(x)\in B$，有 $g(y)=z$，因此，g 是满射.

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{\alpha,\beta\}$，令 $f:A\to B$，$g:B\to C$,

$f(a)=2, f(b)=3, f(c)=3$，$g(1)=\beta, g(2)=\alpha, g(3)=\beta$. 这时，

$(f\circ g)(a)=g(f(a))=\alpha$，$(f\circ g)(b)=g(f(b))=\beta$，显然有 $\mathrm{ran}(f\circ g)=\{\alpha,\beta\}$，

$f\circ g$ 是满射. 而 ran f = {2, 3}，f 不是满射.

五、**证** (1)对于任意 $x\in \mathbf{Z}$, 由于 $x^2+x=x^2+x$, 所以 $(x, x)\in R$, 即 R 是自反的.

(2)因为 $(0, 0)\in R$, 因此 R 不是反自反的.

(3)对于任意 $x, y\in \mathbf{Z}$, 若 $(x, y)\in R$, 则 $x^2+x=y^2+y$, 于是 $y^2+y=x^2+x$, 进而 $(y, x)\in R$, 即 R 是对称的.

(4)因为 $(2, -3)\in R$ 且 $(-3, 2)\in R$，因此 R 不是反对称的.

(5)对于任意 $x, y, z\in \mathbf{Z}$, 若 $(x, y)\in R$ 且 $(y, z)\in R$, 则 $x^2+x=y^2+y$ 且 $y^2+y=z^2+z$，于是 $x^2+x=z^2+z$，所以 $(x, z)\in R$, 即 R 是传递的.

综上所述，知 R 是自反的、对称的和传递的.

六、**解** 命题公式 $A=\neg(p\to q))\leftrightarrow(p\to\neg q)$ 的真值表如下：

p q	$\neg(p\to q)$	$p\to\neg q$	A
1 1	0	0	1
1 0	1	1	1
0 1	0	1	0
0 0	0	1	0

A 的主析取范式为：

$$A=(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q).$$

A 的主合取范式为：

$$A=(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q).$$

七、**证** 将组里的每个人看作节点，两个人是朋友当且仅当对应的节点邻接，于是得到一个 n 阶简单无向图 G，进而 G 中每节点的度数可能为 $0,1,2,...,n-1$ 中一个.

当 G 中无孤立点时，于是每节点的度数可能为 $1,2,...,n-1$. 由于共有 n 个节点，于是必有两节点度数相同.

当 G 中有孤立点时，这时每节点的度数只可能为 $0,1,2,...,n-2$. 同样由于共有 n 个节点，因此必有两节点度数相同.

八、**证** 对于任意的 K_6 的节点 v，因为 $\deg(v)=5$，与 v 邻接的边有 5 条，当用红、蓝颜色去涂时，至少 3 条边涂的是同一种颜色，不妨设 vv_1,vv_2,vv_3 是红色. 若 3 条边 v_1v_2，v_2v_3，v_1v_3 是红色，则存在红色 K_3；若 v_1v_2，v_2v_3，v_1v_3 都是蓝色，则存在蓝色.