《离散数学》期末考试题(D)参考答案

一、1. 32，0，30.

2. $\forall x(G(x) \to F(x)) \wedge \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$.

3. $\varnothing$，X，X.

4. 3.

5. n 为奇数，3，$n \le 4$.

二、1(C); 2(B); 3(D); 4(D); 5(A).

三、1(√); 2(√); 3(×); 4(×); 5(√).

四、**证** $A - B = B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

($\Leftarrow$)显然.

($\Rightarrow$)因为 $A - B = A \cap \overline{B}$，根据 $A - B = B$ 得 $(A \cap \overline{B}) \cap B = B \cap B$，于是 $B = \varnothing$，进而 $A = \varnothing$.

五、**解** 由于 R 和 S 是对称的，所以 $R^{-1} = R, S^{-1} = S$.

($\Leftarrow$)因为 $R \circ S = S \circ R$，两边取逆得 $(R \circ S)^{-1} = (S \circ R)^{-1}$，而

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} = R \circ S.$$

所以 $(R \circ S)^{-1} = R \circ S$，因此 $R \circ S$ 是对称关系.

($\Rightarrow$)由于 $R \circ S$ 对称，所以 $(R \circ S)^{-1} = R \circ S$. 而 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$，因而 $R \circ S = S \circ R$.

六、**解** (1)等值演算法

A 的主合取范式:

$A = (\neg r \vee (q \to p)) \to (p \to (q \vee r))$

$= (\neg r \vee (\neg q \vee p)) \to (\neg p \vee (q \vee r))$

$= \neg(\neg r \vee (\neg q \vee p)) \vee (\neg p \vee q \vee r)$

$= (r \wedge q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee q \vee r)$

$= \neg p \vee q \vee r$ (由吸收律得到).

于是，A 的主析取范式为

$A = (\neg r \vee (q \to p)) \to (p \to (q \vee r))$

$= (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$

$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$.

(2)真值表法

命题公式 $A=(\neg r\vee(q\to p))\to(p\to(q\vee r))$ 的真值表如下:

p,q,r	$(\neg r\vee(q\to p))$	$p\to(q\vee r)$	A
1, 1, 1	1	1	1
1, 1, 0	1	1	1
1, 0, 1	1	1	1
1, 0, 0	1	0	0
0, 1, 1	0	1	1
0, 1, 0	1	1	1
0, 0, 1	1	1	1
0, 0, 0	1	1	1

由表可知，$A=(\neg r\vee(q\to p))\to(p\to(q\vee r))$ 的主合取范式为

$$A=\neg p\vee q\vee r.$$

A 的主析取范式为

$A=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee$

$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$.

七、**证**(反证) 假设 G 中不含圈. 设 G 有 $k(k\geq 1)$个连通分支 $G_1,G_2,\ldots,G_k$，其节点个数分别为 $n_1,n_2,\ldots,n_k$，其边数分别为 $m_1,m_2,\ldots,m_k$. 这时，G_i 为树，根据树的基本性质有 $m_i=n_i-1\ i(1\leq i\leq k)$. 进而 $m=\sum_{i=1}^{k}m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k<n$，与已知 $m\geq n$ 矛盾. 证毕.

八、**解** 令 $g(k)=f(2^k)=f(n)$，于是原递归关系变为

$$\begin{cases}g(k)=2g(k-1)+b2^k\\ g(0)=c\end{cases}.$$

利用递归法，有

$$g(k)=2[2g(k-2)+b\cdot 2^{k-1}]+b2^k$$

$$=2^2g(k-2)+2b\cdot 2^k$$

$$=2^2[2g(k-3)+b\cdot 2^{k-2}]+2b\cdot 2^k$$

$$=2^3g(k-3)+3b\cdot 2^k=\cdots$$

$$= 2^k g(0) + kb \cdot 2^k$$

$$= 2^k (c + bk)$$

$$= n(c + b\ln n),$$

因此，有 $f(n) = n(c + b\ln n)$，其中 b，c 为常数且 $n = 2^k$，k 为正整数.

.