《离散数学》期末考试题(J)参考答案

一、1. $\{x, y\}, \varnothing$.

2. 216.

3. $\neg\forall x\big(I(x)\to\exists y\big(C(y)\wedge D(y,x)\big)\big)$.

4. $y = z$..

5. $m = n \geq 2$.

二、1(A); 2(B); 3(D); 4(B); 5(C).

三、1(√); 2(×); 3(√); 4(√); 5(×).

四、**证** (1)对于任意$x, y \in \mathbf{N}$, 若$f(x) = f(y)$，则$x + 1 = y + 1, x = y$, 于是f是单射. 由于$f(x) = x+1 \geq 1$，即$0\in \mathbf{N}$没有原像, 所以f不是满射.

对于任意$x \in \mathbf{N}$, 因为$g(x+1) = \max\{0, x\} = x$，于是$g$是满射. 由于$g(0) = g(1) = 0$，所以$g$不是单射.

(2) 对于任意$x \in \mathbf{N}$, 因为$(f\circ g)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = x$，于是$f\circ g = I_{\mathbf{N}}$. 由于$(g\circ f)(0) = f(g(0)) = f(0) = 1$且$(g\circ f)(1) = f(g(1)) = f(0) = 1$，于是$g\circ f$不是单射，显然$g\circ f \neq I_{\mathbf{N}}$.

五、**解** 例如若令$D = \mathrm{Z}$，$A(x): x$是偶数，$B(x): x$是奇数，则$\exists xA(x)$和$\exists xB(x)$在上述解释下取 1，进而$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$在上述解释下取 1. 另一方面，$\exists x(A(x)\wedge B(x))$在上述解释下取 0.

六、**证** 因为$x \leq x + y$且$x \leq x + z$，所以$x \leq (x + y)\cdot(x + z)$. 又因为$y\cdot z \leq y \leq x + y$且$y\cdot z \leq z \leq x + z$，因此$y\cdot z \leq (x + y)\cdot(x + z)$. 由“上确界≤上界”知$x + (y\cdot z) \leq (x + y)\cdot(x + z)$.

七、**证** 将组里的每个人看作节点，两个人是朋友当且仅当对应的节点邻接，于是得到一个n阶简单无向图G，进而G中每节点的度数可能为$0,1,2,\ldots,n-1$中一个.

当G中无孤立点时，于是每节点的度数可能为$1,2,\ldots,n-1$. 由于共有n个节点，于是必有两节点度数相同.

当G中有孤立点时，这时每节点的度数只可能为$0,1,2,\ldots,n-2$. 同样由于共有n个节

点，因此必有两节点度数相同.

八、**解** $((2-a)-(3+4/b))-(x+3/11)$ 的有序树表示如下：