一、微分中值定理：

1、罗尔定理，拉格朗日中值定理；

2、会用中值定理证明某些结论和不等式。

二、洛必达法则

1、$\frac{0}{0}$型未定式：可先用等价无穷小代换，再使用洛必达法则。

2、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

3、$0\cdot\infty$型，$\infty-\infty$型，0^0型，1^∞型，∞^0型。

三、泰勒公式

四、利用导数讨论函数的性质

1、利用一阶导数的符号判断函数的单调性。

2、利用单调性证明某些不等式和方程根的唯一性。

3、利用二阶导数的符号判断函数曲线的凹凸性。

4、极值的概念和判定方法。

5、极值与最值的区别与联系。

6、求函数的最值。

一、填空题：

1. $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在[0,3] 上是否满足罗尔定理条件___是______,若满足 ,则 $\alpha=$ ____2__________。

分析

(1) $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在 $[0,3]$ 上连续；

(2) $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在 $(0,3)$ 内可导；

(3) $f(0)=0,\ f(3)=0.$

所以，$f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在[0,3] 上满足罗尔定理。

$\exists\alpha\in(0,3)$, 使得 $f'(\alpha)=0.$

一、填空题:

1. $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在[0,3] 上是否满足罗尔定理

条件__是__,若满足,则 $\alpha=$ __2__。

分析 $f'(\alpha)=0.$

而

$$f'(x)=\sqrt{3-x}+x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}},$$

$$\Rightarrow\quad f'(\alpha)=\sqrt{3-\alpha}+\alpha\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-\alpha}}=0,$$

$$\Rightarrow\quad \alpha=2.$$

2. $f(x)=x^4$在$[1,2]$ 上是否满足拉格朗日中值定理

条件___是_____,若满足,则 $\alpha=$ $\underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$ 。

分析

(1) $f(x)=x^4$ 在 $[1,2]$ 上连续;

(2) $f(x)=x^4$ 在 $(1,2)$ 内可导;

所以 $f(x)=x^4$在$[1,2]$ 上是满足拉格朗日中值定理。

$\exists\alpha\in(1,2)$, 使得

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}.$$

2. $f(x)=x^4$在$[1,2]$ 上是否满足拉格朗日中值定理条件___是______,若满足,则 $\alpha=$ $\underline{\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}}$ 。

分析 即 $f'(\alpha)=15.$

而 $f'(x)=4x^3,$

$\Rightarrow$ $f'(\alpha)=4\alpha^3=15,$

$\Rightarrow$ $\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}.$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + ax^2 + b}{x - 2} = 8$, 则 $\underline{a = -1, b = -4.}$

分析　由题意知，$\lim\limits_{x \to 2}(x^3 + ax^2 + b) = 0$,

即　$8 + 4a + b = 0$. 又因为

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + ax^2 + b}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 2ax}{1} = 12 + 4a = 8,$$

解得 $a = -1, b = -4$.

4.已知点 $(2,5)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$ $-\frac{5}{16}$，$b=$ $\frac{15}{8}$

分析 $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b$,

由 $(2,5)$ 为曲线的拐点知 $y''(2)=0$.

即　$12a+2b=0$.

又由 $(2,5)$ 为曲线上的点知，

$$8a+4b=5.$$

解得 $a=-\frac{5}{16}, b=\frac{15}{8}$.

二、选择题：

1. 罗尔定理的三个条件：在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$ 是$f(x)$ 在(a,b) 内至少存在一点 α, 使 $f'(\alpha)=0$ 的（　B　）

（A）必要条件；　　（B）充分条件；

（C）充分必要条件；　（D）既非充分也非必要条件.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=$ （ A ）

(A) 1;　(B) -1;　(C) 0;　(D)不存在。

分析

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=1.$$

3. $y = x^2 + 12x + 1$ 在区间$(-6, +\infty)$ 内（ C ）

（A）凸增；（B）凸减；　（C）凹增；（D）凹减.

分析　$D = (-\infty, +\infty)$.

单调性：$f'(x) = 2x + 12 = 0 \Longrightarrow x = -6.$

x	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, +\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

3. $y = x^2 + 12x + 1$ 在区间$(-6, +\infty)$ 内（ C ）

（A）凸增；（B）凸减；（C）凹增；（D）凹减.

分析 $D = (-\infty, +\infty)$.

凹凸性： $f''(x) = 2 > 0$.

$\Longrightarrow$ $y = x^2 + 12x + 1$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的。

4.曲线 $y=4-\sqrt[3]{x-1}$ 的拐点是（ A ）

（A）(1,4); （B）(2,3); （C）(9,2); （D）(0,5).

分析　$D=(-\infty,+\infty)$. 当 $x\neq 1$ 时,

$$y'=-\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}},\ y''=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{5}{3}},$$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	-		+
$y=f(x)$	$\cap$		$\cup$

⟹ 拐点为(1,4)。

5. 下列结论正确的是（ B ）

（A）驻点一定是极值点；

（B）可导函数的极值点一定是驻点；

（C）函数的不可导点一定是极值点；

（D）函数的极大值一定大于极小值.

三、计算下列各题：

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x\sin^2 x}$　　$\dfrac{0}{0}$ 型

解

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$. $\infty-\infty$ 型

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

3、求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \cdot \ln x$ 　$0\cdot\infty$ 型

解

原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0.$

4、求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^{x}$　　　1^{∞} 型

解　$(\frac{2}{\pi}\arctan x)^{x}=e^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}=e^{x[\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x]}$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^{x}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

四、应用题

1.确定函数 $y=2x^2e^{-x}$ 的单调区间.

解 $D=(-\infty,+\infty)$,

$$y'=4xe^{-x}-2x^2e^{-x}=2x(2-x)e^{-x},$$

令 $y'=0$, 解得 $x_1=0, x_2=2.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

所以,单调增加区间为$[0,2]$;

单调减少区间为$(-\infty,0]$ 和$[2,+\infty)$.

2.求曲线 $y=x^2\ln x$ 的拐点及凹凸区间.

解　$D=(0,+\infty)$,

$$y'=2x\ln x+x,\ y''=2\ln x+3$$

令 $y''=0$, 解得 $x=e^{-\frac{3}{2}}$

x	$(0,e^{-\frac{3}{2}})$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$
y''	$-$		$+$
$y=f(x)$	$\cap$		$\cup$

所以,曲线的凹区间为$[e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$

凸区间为 $(0,e^{-\frac{3}{2}}]$　　拐点为$(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2}e^{-3})$

3.求 $y=x^3-12x+5$ 在$[0,5]$ 上的最大值和最小值.

解 $y'=3x^2-12=0,$

解得 $x_1=-2$（舍）$x_2=2.$

$$f(0)=5,\ f(2)=-11,\ f(5)=70.$$

所以,函数在 $[0,5]$ 上的最大值为$M=70,$

最小值为$m=-11.$

五、证明题

1.设 $b>a>0$, 证明：$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

证明 设 $f(x)=\ln x$, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，

在 (a,b)内可导，所以，$\exists\alpha\in(a,b)$, 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\alpha)(b-a),$$

即 $\ln b-\ln a=\frac{1}{\alpha}(b-a)$.

因为 $0<a<\alpha<b$, 所以，$\frac{1}{b}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{a}$,

从而，$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

2．证明：当 $x>0$ 时 $\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$.

证明 设 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且在 $(0,+\infty)$ 内

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,$$

所以，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

因此，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$.

即 $\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2>0$，从而 $\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$.

3．证明：方程$x^5+x-1=0$只有一个正根。

证明　设 $f(x)=x^5+x-1$，则$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续，且

$$f(0)=-1<0,\ f(1)=1>0.$$

所以，存在$\alpha\in(0,1)$，使得$f(\alpha)=0.$

又因为 $f'(x)=5x^4+1>0$，所以$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$

内单调增加，从而，方程最多只有一个实根．所以，方程只有正根。