# 第九章　重积分

# 单元自测题

# 一、二重积分

## 1、二重积分的概念与性质

## 2、二重积分的计算：

（1） $x-$型域：$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right]dx.$$

（2）$y-$型域：$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx\right]dy$$

（3）极坐标：$D:\begin{cases}\varphi_1(\theta)\le r\le\varphi_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{cases}$

$$\begin{cases}x\to r\cos\theta\\ y\to r\sin\theta\\ d\sigma\to rdrd\theta\end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\right]d\theta.$$

## 二、三重积分

### 1、三重积分的概念与性质

### 2、三重积分的计算：

（1）$xy$ 一型域：

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$$

**先一后二：**

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]d\sigma$$

**先二后一：**

若被积函数不含变量 $x,y$ 且积分区域 $\Omega$ 被平面 $z=z_0$ 所截平面区域面积容易计算，可先计算此面积，再计算定积分即可。

（2）球坐标：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

其中：$0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$

$$dv = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

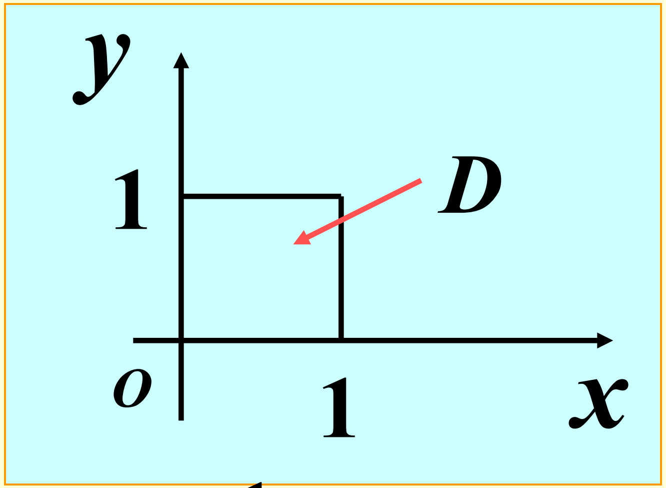
三、重积分的应用：空间曲面的面积

设 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 为光滑曲面，则

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\sigma.$$

# 一、填空题：

1、已知积分区域 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$, 则二重积分 $\iint\limits_D (x+y)d\sigma =$ <u>1</u>




**分析** 如图所示，

$$\iint\limits_D (x+y)d\sigma = \int_0^1\left[\int_0^1 (x+y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{1}\right]dx = \int_0^1 (x+\frac{1}{2})dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1 = 1.$$

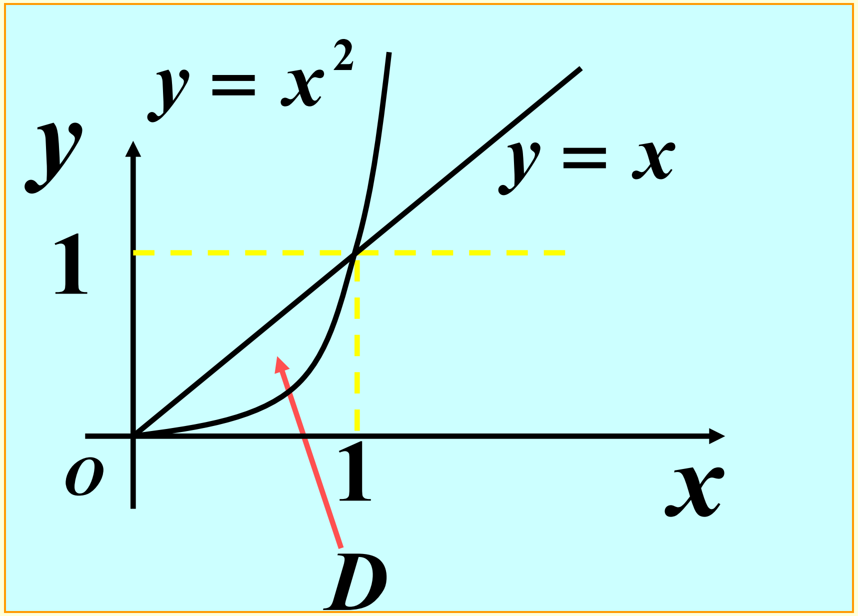
## 2、交换二次积分的积分次序

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \underline{\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx}$$

**分析** $D:\begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

如图所示，积分区域还可表示为

$$D:\begin{cases} y \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

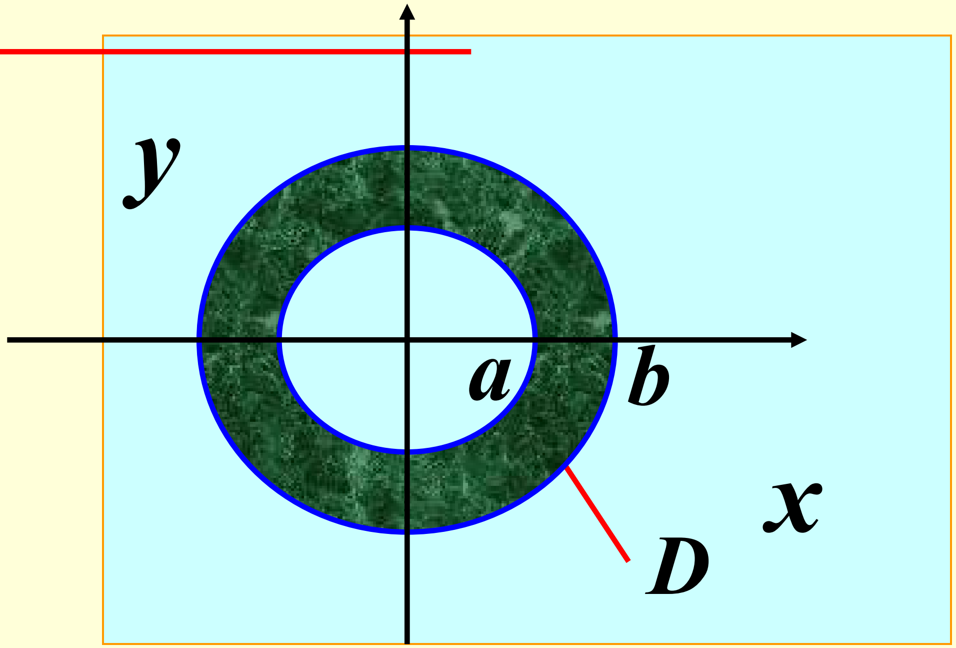


3、已知积分区域 $D: a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2 (0 < a < b)$，则将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为极坐标形式的二次积分为 $\underline{\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr}$.

**分析**

如图所示，积分区域可表示

$$D: \begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$




$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

4、已知区域 $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$

则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dv =$ 3

分析 $$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dv=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_0^1(x+2y+3z)dz\right]d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left.(xz+2yz+\frac{3}{2}z^2)\right|_{z=0}^{1}\right]d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}(x+2y+\frac{3}{2})d\sigma$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1(x+2y+\frac{3}{2})dy\right]dx=\int_0^1\left[\left.(xy+y^2+\frac{3}{2}y)\right|_{y=0}^{1}\right]dx$$

$$=\int_0^1(x+\frac{5}{2})dx=\left.\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x\right)\right|_0^1=3.$$

4、已知区域 $\Omega: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$

则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dv =$ $\underline{\quad 3 \quad}$

或者 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dv = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+2y+3z)dz$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left[ \left(xz + 2yz + \frac{3}{2}z^2\right)\Big|_{z=0}^{1} \right] dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (x + 2y + \frac{3}{2})dy = \int_0^1 \left[ \left(xy + y^2 + \frac{3}{2}y\right)\Big|_{y=0}^{1} \right] dx$$

$$= \int_0^1 (x + \frac{5}{2})dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x\right)\Big|_0^1 = 3.$$

5、由$z=4-x^2-y^2$与$xOy$坐标面所转成的立体$\Omega$的体积$V=$ $\underline{\quad 8\pi \quad}$

**分析** $V=\iint\limits_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)d\sigma$ 其中 $D_{xy}:\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

所以，

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}(4-r^2)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4r-r^3)dr$$

$$=2\pi\cdot\left.\left(2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\right|_0^2=8\pi.$$

## 二、选择题：

1、已知区域 $D$ 是由直线 $x+y=1$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴所围成的闭区域，则二重积分 $\iint\limits_D dxdy =$（ B ）

(A) $\frac{1}{4}$;　　(B) $\frac{1}{2}$;　　(C) 1;　　(D) 2.

**分析**

$$\iint\limits_D dxdy = S = \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{1}{2}.$$

2、已知积分区域 $D$ 是由直线 $y=x, x=1$ 和 $x$ 轴所围成，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（ C ）

(A) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$; (B) $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$;

(C) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$; (D) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$.

分析 $x-$ 型域：

$$D:\begin{cases}0\le y\le x\\ 0\le x\le 1\end{cases}.$$

$y-$ 型域：

$$D:\begin{cases}y\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}.$$

3、已知 $I=\iint\limits_D f(x^2+y^2)d\sigma$, 其中 $D: x^2+y^2\le 1$,

则 $I=$（ **B** ）

(A) $\int_0^1 rf(r^2)dr$;　　(B) $2\pi\int_0^1 rf(r^2)dr$;

(C) $\int_0^1 f(r^2)dr$;　　(D) $2\pi\int_0^1 f(r^2)dr$.

**分析**　$D:\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$,

$$I=\iint\limits_D f(x^2+y^2)d\sigma=\iint\limits_D f(r^2)rdrd\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 f(r^2)rdr=2\pi\int_0^1 f(r^2)rdr.$$

4、已知积分区域 $\Omega: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$，则将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2)dv$ 化为球坐标系下的累次积分为（ D ）

(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 f(r^2)dr;$

(B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_1^2 f(r^2)dr;$

(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_1^2 f(r^2)rdr;$

(D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_1^2 f(r^2)r^2dr.$

4、已知积分区域 $\Omega: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$，则将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv$ 化为球坐标系下的累次积分为（ **D** ）

**分析**　$\Omega: \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$，

$$\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv = \iiint_{\Omega} f(r^2)r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 f(r^2) r^2 \sin\varphi dr.$$

三、计算下列二重积分：

1、计算 $\iint\limits_D \frac{2x}{y^3} d\sigma$，其中积分区域 $D$ 由曲线 $y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=4$ 所围成的闭区域。

**解** $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ x=y^2 \end{cases} \longrightarrow$ 交点 $(1,1)$. 所以，$D:\begin{cases} \dfrac{1}{x}\le y\le \sqrt{x} \\ 1\le x\le 4 \end{cases}$

从而 $$\iint\limits_D \frac{2x}{y^3} d\sigma=\int_1^4 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \frac{2x}{y^3} dy=\int_1^4 x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$=\int_1^4 (x^3-1)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-x\right)\Bigg|_1^4=\frac{243}{4}.$$

2、计算 $\iint\limits_D e^{y^2}dxdy$, 其中积分区域 $D$ 由直线 $y=x, y=1$ 及 $y$ 轴所围成的闭区域。

**解** 由题意知, $D:\begin{cases}0\le x\le y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$.

$$\iint\limits_D e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 e^{y^2}\cdot x\Big|_{x=0}^{y}dy$$

$$=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}d(y^2)$$

$$=e^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

3、计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中积分区域 $D$ 是由 $1 \le x^2+y^2 \le 4$ 所确定的圆环域。

**解** 由题意知， $D:\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$,

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r\cdot r dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_1^2 = \frac{14}{3}\pi.$$

4、计算 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, 其中积分区域 $D$ 是由 $x^2+y^2\le 1$ 所确定的圆形域。

**解** 由题意知， $D:\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$,

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{r^2}\cdot rdr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 e^{r^2}d(r^2)=2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1=(e-1)\pi.$$

四、计算下列三重积分：

1、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz$，其中 $\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域。

**解** 由题意知，

$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1-x-y\\(x,y)\in D_{xy}\end{cases}，其中\ D_{xy}:\begin{cases}0\le y\le 1-x\\0\le x\le 1\end{cases},$$

所以，$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_0^{1-x-y} x^2 dz\right]d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[(x^2 z)\Big|_{z=0}^{1-x-y}\right]d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}} x^2(1-x-y)d\sigma$$

四、计算下列三重积分：

1、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz$，其中 $\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域。

**解**

$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x} x^2(1-x-y)dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^2[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2]\Big|_{y=0}^{1-x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{1}{60}.$$

2、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z dxdydz$，其中 $\Omega$ 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

**解** 由题意知，

$$\Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 \le z \le 4 \\ (x, y) \in D_{xy} \end{cases}，\text{其中 } D_{xy} : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases},$$

所以，$$\iiint\limits_{\Omega} z dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} \left[ \int_{x^2+y^2}^{4} z dz \right] d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left[ \left(\frac{1}{2} z^2\right) \Big|_{z=x^2+y^2}^{4} \right] d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] d\sigma$$

2、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 $\Omega$ 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

解

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2}(16-r^4)rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{1}{2}r(16-r^4)dr$$

$$=\pi\int_0^2(16r-r^5)dr$$

$$=\pi\left(8r^2-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^2=\frac{64}{3}\pi.$$

2、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz$，其中 $\Omega$ 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

**或先二后一：**

过 $z = z_0 (0 \le z_0 \le 4)$ 作垂直于 $z$ 轴的平面，截 $\Omega$ 所得截面的面积为 $\pi z_0$. 所以，

$$\iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^4 z dz \iint\limits_{D_{xy}} dx dy$$

$$= \int_0^4 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3} z^3 \Big|_0^4 = \frac{64}{3} \pi.$$

五、求由平面 $x=1, y=0$ 与柱面 $y=x^2$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 所截得的立体的体积。

**解** 由题意知，

$$V=\iint_D (4-x^2-y^2)d\sigma, \text{其中 } D:\begin{cases}0\le y\le x^2\\ 0\le x\le 1\end{cases},$$

所以，

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(4-x^2-y^2)dy=\int_0^1[(4y-x^2y-\frac{1}{3}y^3)\Big|_{y=0}^{x^2}]dx$$

$$=\int_0^1(4x^2-x^4-\frac{1}{3}x^6)dx$$

$$=(\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7)\Big|_0^1=\frac{114}{105}=\frac{38}{35}.$$