1. **二重积分**：函数$f(x,y)$在有界闭区域D上的二重积分可记为：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i,\zeta_i)\,\Delta\sigma_i,$$

$$\text{其中}\lambda = \max\{\Delta\sigma_i\},D = \left\{\sum_{i=0}^{n}\Delta\sigma_i \middle| i = 0,1,2,\cdots,n\right\}.$$

2. **三重积分**：函数$f(x,y,z)$在空间有界闭区域 Ω 上的三重积分可记为：

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i,\zeta_i,\eta_i)\,\Delta v_i,$$

$$\text{其中}\lambda = \max\{\Delta v_i\},D = \left\{\sum_{i=0}^{n}\Delta v_i \middle| i = 0,1,2,\cdots,n\right\}.$$

1. **线性性质**：$\iint\limits_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，$k$是常数；

$$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. **区域可加性**：设区域D由D_1、D_2组成，且D_1、D_2除边界点外无其他交点，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma;$$

3. **比较定理**：若区域D内有$f(x,y) \le g(x,y)$，则$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，特别地，

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma;$$

【例 1】 比较$\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$的大小，其中 D：$(x-2)^2+y^2\leqslant 1$.

【思路探索】 所比较的二重积分中，D是相同的，所以根据不等式性质只要比较被积函数在 D 上的大小即可.

解：由 $y^2\leqslant 1-(x-2)^2$，则 $x^2-y^2\geqslant x^2-[1-(x-2)^2]=2(x-1)^2+1\geqslant 1$.

故 $x^2-y^2\geqslant\sqrt{x^2-y^2}$. 又在 D 内 $x^2-y^2\not\equiv\sqrt{x^2-y^2}$，所以$\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma>\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$.

4. 估值定理：设m,M分别为$f(x,y)$在闭区域D上的最小值和最大值，则

$$m|D|\leq\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leq M|D|\text{，其中}|D|\text{表示区域}D\text{的面积。}$$

5. 中值定理：若$f(x,y)$在闭区域D上连续，则在D上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)|D|\text{。}$$

1. 二重积分：

(1) 直角坐标下计算二重积分：

注意：首先需要转化为二次积分进行计算，可根据积分区域 D 的特点选择积分顺序

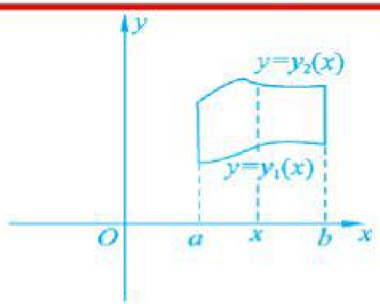


图 1

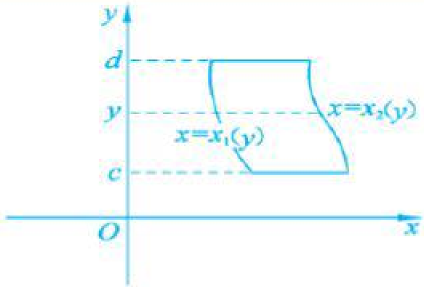


图 2

①先对y积分再对x积分，若D是由$x=a, y=b, y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$所围成的(图 1)，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y.$$

此时称D为X型区域，其特点是：穿过D内部且平行于y轴的直线与D的边界相交不多于两点。

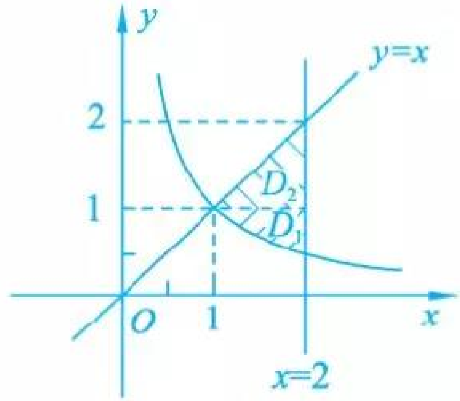
②先对x积分再对y积分，若D是由$y=c, y=d, x=x_1(y)$，$x=x_2(y)$所围成的(图 2)，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\mathrm{d}x.$$

此时称D为Y型区域，其特点是：穿过D内部且平行于x轴的直线与D的边界相交不多于两点。

【例2】 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 与双曲线 $xy=1$ 所围成的区域.

解:画出积分区域 D(如右图所示).



方法一 先沿 y 方向积分,区域 D 可表示为:$D:\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x,\end{cases}$

则 $$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}y=\int_1^2\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^5}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{12}x^{-4}\right)\Big|_1^2=\frac{27}{64}.$$

方法二 先沿 x 方向积分,此时需将 D 分为 D_1,D_2(如右图所示),

$D_1:\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ \frac{1}{y}\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ $D_2:\begin{cases}1\leqslant y\leqslant 2,\\ y\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 则

$$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(y^3-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y+\int_1^2\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{27}{64}.$$

(2) 极坐标下计算二重积分：

注意：当二重积分中积分区域D为为圆域、环域、扇形区域或环扇形区域又或者被积函数$f(x,y)$中含有$x^2+y^2,\frac{x}{y},\frac{y}{x}$等时，往往用极坐标计算

一般而言，极坐标系中二重积分的积分次序是“先ρ后θ”，即

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_?^? \mathrm{d}\theta\int_?^? f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

积分上下限跟随极点O与积分区域D的边界曲线的相对位置而定。

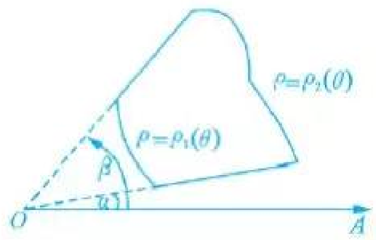


图 3

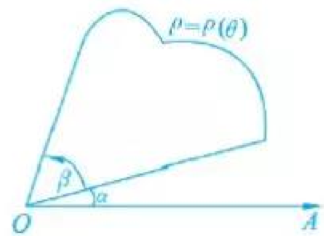


图 4

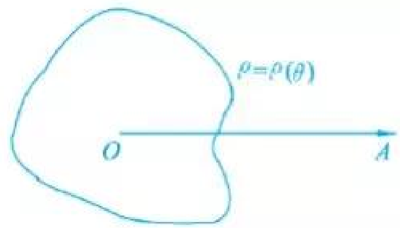


图 5

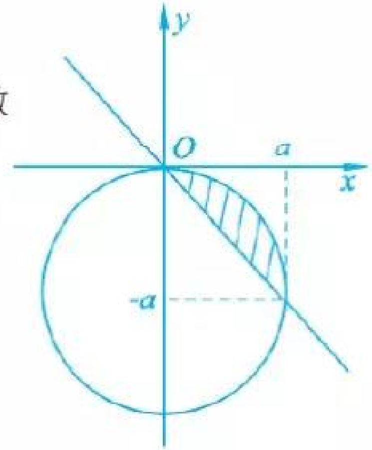
①当极点O与积分区域D的边界曲线外(图 3)，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$

②当极点O与积分区域D的边界曲线上(图 4)，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{0}^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$

③当极点O与积分区域D的边界曲线内(图 5)，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_{0}^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$

【例3】 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成.

【思路探索】 被积函数含有 x^2+y^2，积分区域 D 也与圆或圆弧有关，故想到可以利用极坐标计算二重积分的值.



解：积分区域 D 如右图所示.

利用极坐标，D 可表示为：$D:\begin{cases}-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0,\\ 0\leqslant r\leqslant -2a\sin\theta.\end{cases}$ 则

$$I=\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{4a^2-r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta}}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint\limits_D \frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{\text{令 } r=2a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

(3)利用重积分的对称性计算二重积分：

注意：利用二重积分中积分区域D的对称性和被积函数$f(x,y)$的奇偶性

①设D关于y轴对称：i 若f关于x为奇函数，则$I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=0$.

ii 若f关于x为偶函数，则$I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，

其中$D_1=\{(x,y)\in D|x\geq 0\}$，即$D_1$为$D$中位于$y$轴右边的那一部分区域。

②设D关于x轴对称：i 若f关于y为奇函数，则$I=0$.

ii 若f关于y为偶函数，则$I=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，

其中$D_2=\{(x,y)\in D|y\geq 0\}$，即$D_2$为$D$中位于$x$轴上方那一部分的区域。

③**设D关于原点对称**：i 若f关于x, y为奇函数，则$I = 0$.

ii 若f关于x, y为偶函数，则$I = 2\iint\limits_{D_3} f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma$，

其中$D_3 = \{(x, y) \in D | y \geq 0\}$，即$D_1$为$D$在上半平面的那一部分。

④**设D关于直线$y = x$对称**： i 若$f(x, y) = -f(y, x)$，则$I = 0$.

ii 若$f(x, y) = f(y, x)$，则$I = 2\iint\limits_{D_4} f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma$，

其中$D_4 = \{(x, y) \in D | y \geq x\}$，即$D_4$为$D$中位于直线$y = x$以上的部分。

2. 三重积分

(1)利用投影法计算三重积分：

①向xOy平面作投影：V可表示成$\begin{cases}(x,y)\in D_{xy}\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases}$，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

②向yOz平面作投影：V可表示成$\begin{cases}(y,z)\in D_{yz}\\ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)\end{cases}$，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x.$$

③向zOx平面作投影：V可表示成$\begin{cases}(z,x)\in D_{zx}\\ y_1(z,x)\le y\le y_2(z,x)\end{cases}$，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y.$$

(2)利用截面法计算三重积分：

①垂直于z轴作截面，则 $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_{a}^{b}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

②垂直于x轴作截面，则 $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_{c}^{d}\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

③垂直于y轴作截面，则 $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_{e}^{f}\mathrm{d}y\iint\limits_{D_y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$

(3)柱面坐标下计算三重积分：

注意：当积分区域V在坐标面上的投影区域为圆形、扇形或环形区域，而且被积函数为$f(x^2+y^2,z)$或$f(y^2+z^2,x)$、$f\left(\frac{x}{y}\right)$、$f\left(\frac{y}{x}\right)$等形式时，往往用柱坐标计算

i 柱面坐标与直角坐标的关系：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$；

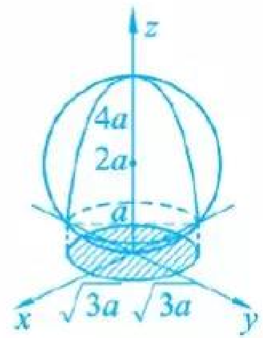
ii 体积元素：$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$;

iii 化为三次积分：$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz$

【例 4】 曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 分成两部分，求这两部分的体积比.

解：如右图所示，联立曲面方程和球面方程可知两曲面相交于点 $(0,0,4a)$

及曲线：$\begin{cases} x^2+y^2=3a^2, \\ z=a. \end{cases}$ 此曲线在 xOy 面投影曲线为 $x^2+y^2=3a^2$.



位于抛物面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 内侧部分的球体记作 V_1，其体积为

$$V_1=\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}V=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{2a-\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}}^{4a-\frac{1}{a}(x^2+y^2)}1\cdot\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D}\left[2a+\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}-\frac{1}{a}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a}\left[2a+\sqrt{4a^2-r^2}-\frac{1}{a}r^2\right]r\mathrm{d}r=\frac{37}{6}\pi a^3.$$

则位于抛物面外侧部分球体的体积

$$V_2=\frac{4}{3}\pi(2a)^3-V_1=\frac{32}{3}\pi a^3-\frac{37}{6}\pi a^3=\frac{27}{6}\pi a^3,$$

故 $V_1:V_2=37:27$.

(3)球面坐标下计算三重积分：

注意： 当积分区域为球面、球面与锥面、球面与球面等围成的区域，而被积函数含有$x^2+y^2+z^2$的因子时，宜采用球面坐标进行计算

i 球面坐标与直角坐标的关系：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，其中$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$；

ii 体积元素：$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$；

iii 化为三次积分：$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin\varphi d\varphi \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 dr$

1. **几何应用**（主要体现在计算立体的体积、曲面的面积）：

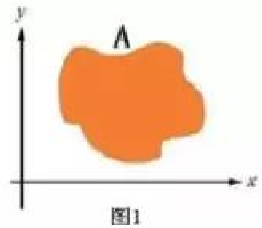


图1

①求平面区域的面积：$A=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，如图 1 所示。

②求空间曲面的面积：

i 设曲面S的方程为$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, D_{xy}为S在xOy面上的投影区域，$f(x,y)$在D_{xy}上具有连续的偏导数，则曲面S的面积为$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

ii 若曲面的方程为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$或$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$, 类似地可得到：

$$A=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\text{或}A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

③求曲顶柱体的体积：已知曲顶方程为$z=f(x,y)$的曲顶柱体体积：$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

④求空间立体Ω的体积：$V=\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V$.

2. 例题:

【例 1】 求由曲面 $x^2+y^2=2ax$, $az=x^2+y^2(a>0)$ 及平面 $z=0$ 所围成的立体的体积.

【思路探索】 由题意可知所求立体的体积为一曲顶柱体的体积,可用二重积分计算,关键是要确定柱体的曲顶以及在坐标面上的投影区域.

解:$x^2+y^2=2ax$ 是一母线平行于 z 轴的圆柱面,故可知所围立体是一曲顶柱体. 其顶为抛物面 $z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)$.

立体在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 2ax$. 所求立体的体积为

$$V=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{a}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\frac{1}{a}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16a^4\cos^4\theta}{4}\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^3.$$

1.物理应用(主要体现在求物体的质量、质心、转动惯量及引力):

①求质量:

i 若平面薄片的面密度$\rho(x,y)$,物体所占区域为D,则此平面薄片的质量为$M=\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

ii 若物体的体密度$\rho(x,y,z)$,所占空间区域为Ω,则物体的质量为$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$.

②求质心：

说明：其中$M_1=\iint\limits_D u(x,y)\mathrm{d}\sigma$为平面薄片的质量，$M_2=\iiint\limits_V u(x,y,z)\mathrm{d}V$为物体的质量，$M_y=\iint\limits_D xu(x,y)\mathrm{d}\sigma$为平面薄片对$y$轴的静矩，$M_x=\iint\limits_D yu(x,y)\mathrm{d}\sigma$为平面薄片对$x$轴的静矩.

i 若平面薄片占有平面区域D，面密度为$u(x,y)$，则质心坐标为$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{M_y}{M_1}=\dfrac{1}{M_1}\iint\limits_D xu(x,y)\mathrm{d}\sigma\\ \bar{y}=\dfrac{M_x}{M_1}=\dfrac{1}{M_1}\iint\limits_D yu(x,y)\mathrm{d}\sigma\end{cases}$.

ii 若物体占有空间区域V，体密度为$u(x,y,z)$，则物体的质心坐标为$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{1}{M_2}\iiint\limits_V xu(x,y,z)\mathrm{d}V\\ \bar{y}=\dfrac{1}{M_2}\iiint\limits_V yu(x,y,z)\mathrm{d}V\\ \bar{z}=\dfrac{1}{M_2}\iiint\limits_V zu(x,y,z)\mathrm{d}V\end{cases}$.

③求转动惯量：

i 若物质薄片占有平面区域 D，面密度为 $u(x,y)$，则对 x 轴、y 轴及原点的转动惯量分别为

$$\begin{cases} I_x = \iint\limits_D y^2 u(x,y)\mathrm{d}\sigma, \\ I_y = \iint\limits_D x^2 u(x,y)\mathrm{d}\sigma, \\ I_o = \iint\limits_D (x^2+y^2)u(x,y)\mathrm{d}\sigma. \end{cases}$$

ii 若物体占有空间区域 V，体密度为 $u(x,y,z)$，则物体对 x 轴、y 轴、z 轴及原点的转动惯量分别为

$$\begin{cases} I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V, \\ I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V, \\ I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V, \\ I_o = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)u(x,y,z)\mathrm{d}V. \end{cases}$$

④引力(略)

2. 例题：

【例 2】 设物体所占区域由抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 围成，密度 $\rho(x,y)=|x|+|y|$，求其质量.

解：所求物体的质量为 $m=\iiint\limits_{\Omega}(|x|+|y|)\mathrm{d}V$. 因为 $|x|+|y|$ 关于 x 与 y 均是偶函数，且 Ω 关于平面 xOz 对称，也关于 zOy 对称，所以 $m=4\iiint\limits_{\Omega_1}(|x|+|y|)\mathrm{d}V$，其中 Ω_1 为 Ω 在第一卦限的部分.

Ω_1 在 xOy 面上的投影区域为：$x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$，故

$$m=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 r^2(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}z=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{16}{15}.$$

【例 3】 求由锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=0$ 所围成的圆锥体的形心.

解:如图 2 所示.

由对称性可得 $\overline{x}=\overline{y}=0$,$\overline{z}=\dfrac{1}{A}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$,其中 A 为锥体体积.

Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[0,1]$ 且过 z 轴上 $[0,1]$ 内的任意一点作垂直于 z 轴的平面截 Ω 所得截面为 $x^2+y^2\leqslant(1-z)^2$,所以

$$\overline{z}=\frac{1}{A}\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(1-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_0^1 z\pi(1-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{A}\cdot\frac{\pi}{12},$$

而 $A=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 1^2=\dfrac{\pi}{3}$,故 $\overline{z}=\dfrac{\pi}{12}\times\dfrac{3}{\pi}=\dfrac{1}{4}$.

所求形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{1}{4}\right)$.

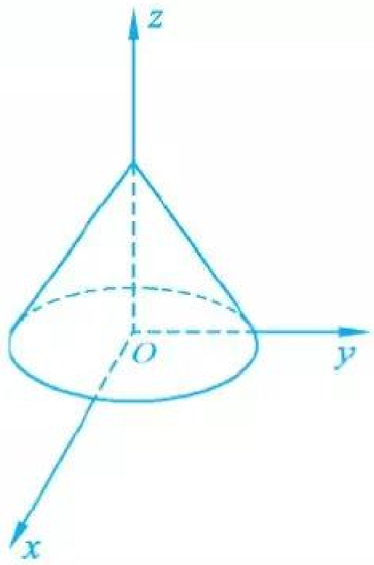


图 2