第7章 内容小结：

1、基本概念：微分方程，方程的阶，线性微分方程，方程的解，通解，特解

2、可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=f(x)h(y)$$

分离变量 $g(y)dy = f(x)dx$

方程的通解为 $\int g(y)dy=\int f(x)dx$

3、齐次方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做齐次方程.

齐次方程的解步骤.

令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $u+x\dfrac{du}{dx}=\varphi(u)$

分离变量: $\dfrac{du}{\varphi(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$

两边积分, 得 $\displaystyle\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u, 得原方程的通解.

4、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

若$Q(x) \equiv 0$　称为齐次方程；

若$Q(x) \not\equiv 0$　称为非齐次方程.

通解：

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]$$

5、二阶常系数齐次线性微分方程通解求法：

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (\,p, q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

6、二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理，其通解为:

$$y = \underbrace{Y}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{y^*}_{\text{非齐次方程特解}}$$

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^*的待定形式,

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

(λ为实数，$P_m(x)$为m次多项式)

(1) 若λ不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根，

特解形式为: $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$

(2) 若λ 是特征方程的单根，

特解形式为: $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的二重根时 ，

特解形式为: $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

故特解形式为: $\boxed{y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}\quad(k=0,1,2)}$

第六章　单元自测题（微分方程 ）

一、填空题：

1、微分方程$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$的通解为$\underline{arcsin\ y = x^2 + C}$

2、微分方程$y'\sin x = y\ln y$满足初始条件$y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$的特解为$\underline{y = e^{\tan\frac{x}{2}}}$

3、微分方程$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$的通解为$\underline{y = C_1e^x + C_2xe^x}$.

二、选择题：

1、下列微分方程中，通解为 B

$$y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

微分方程是（）.

$(A)\, y'' - 2y' - 3y = 0; (B)\, y'' - 2y' + 5y = 0$

$(C)\, y'' + y' - 2y = 0; (B)\, y'' + 6y' + 13y = 0.$

2、微分方程$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的特解形式（其中a,b为常数）为（）. A

$(A)\ y^*=x(ax+b)e^{2x}$; $(B)\ y^*=(ax+b)e^{2x}$

$(C)\ y^*=ax^2e^{2x}+b$; $(B)\ y^*=ae^{2x}+b$.

3、微分方程$y''-y=e^x+1$的特解形式(其中a,b为常数)为（）. B

$(A)ae^x+b$; $(B)axe^x+b$; $(C)ae^x+bx$; $(\mathrm{D})axe^x+bx$.

三、求下列微分方程的通解：

1、$y'\cos y=\dfrac{1+\sin y}{\sqrt{x}}$

解：分离变量: $\dfrac{\cos y\,dy}{1+\sin y}=\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

两边积分$\displaystyle\int\frac{\cos y\,dy}{1+\sin y}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}\Rightarrow\int\frac{d(1+\sin y)}{1+\sin y}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

得通解为 $\ln(1+\sin y)=2\sqrt{x}+C$

$$2、\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$$

解:令 $u=\frac{y}{x}$，得$y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

化简得$\frac{du}{dx}x=e^{u}\quad\Rightarrow -e^{-u}=ln|x|+C_1$

$$\Rightarrow e^{-u}=-ln|x|+C,其中C=-C_1$$

$$\Rightarrow u=-ln\left(C-ln|x|\right)$$

得通解$y=-x\,ln\left(C-ln|x|\right)$

$$3、(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$$

解：先化为一阶线性方程：$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{(x-2)}y=2(x-2)^2$

其中$p(x)=-\frac{1}{(x-2)}, Q(x)=2(x-2)^2$

由公式$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

得方程的通解为

$$y=C(x-2)+(x-2)^3$$

4、$y'' + y' = 2x^2 e^x$

解：特征方程为$r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -1$

$\therefore \lambda = 1$不是特征方程的根

非齐次方程的特解$y^* = (ax^2 + bx + c)e^x$

代入原方程得$a = 1, b = -3, c = \dfrac{7}{2}$

$\therefore$ 通解为$y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x(x^2 - 3x + \dfrac{7}{2})$

四、应用题

1、已知曲线y=y(x) 经过原点，且在原点处的切线与直线 2x+y+6=0平行，而y(x) 满足微分方程

$y''-2y'+5y=0$，求该曲线的方程.

解：$y''-2y'+5y=0$的特征方程为$r^2-2r+5=0$

可解得其通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

根据已知条件可得以下初始条件: $y\big|_{x=0}=0$, $y'\big|_{x=0}=-2$

$\Rightarrow C_1=0, C_2=-1$

所以所求曲线方程为 $y=-e^x\sin 2x$

2、设连续函数y=y(x) 满足方程

$$y(x)=\int_0^x y(t)dt+e^x,\text{求}y(x)$$

解：对方程两求导得$y'(x)=y(x)+e^x$

即$y'(x)-y(x)=e^x$为一阶线性微分方程

其中$p(x)=-1,Q(x)=e^x,$

由公式$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$得

$$y(x)=(x+\mathrm{C})e^x$$