《离散数学》期末考试题(C)参考答案

一、1. $mn, 2^{mn}, 2^{m^2}$.

2.g, g, g.

3.1,2,4.

4.8，不存在，不存在.

5.连通，3，10.

二、1(C);　2(A);　3(B);　4(A);　5(D).

三、1(√);　2(×);　3(×);　4(√);　5(√).

四、**证** (1) 显然，$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(2)可以证明：$A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$.

(⇐)当 $A = B$ 时，$A - B = \varnothing$且 $B - A = \varnothing$, 于是 $A - B = B - A$.

(⇒)假定 $A - B = B - A$，先证明 $A \subseteq B$: 对于任意 $x \in A$，若 $x \notin B$，则 $x \in A - B$，进而 $x \in B - A$，根据差运算定义知 $x \in B$，与 $x \notin B$ 矛盾. 所以 $x \in B$，因此 $A \subseteq B$. 同理可证 $B \subseteq A$. 故 $A = B$.

(3)容易证明：$(A - B) \cup (B - A) = A \Leftrightarrow B = \varnothing$.

(⇐)显然.

(⇒)(反证)若 $B \neq \varnothing$，则存在 $x \in B$. 分两种情况讨论：若 $x \notin A$，则 $x \in B - A$，由于 $(A - B) \cup (B - A) = A$，于是 $x \in A$，矛盾；若 $x \in A$，则 $x \notin A - B$ 且 $x \notin B - A$, 进而 $x \notin A$，矛盾. 证毕.

五、**证** 1. 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 因为$\dfrac{x-x}{3} = 0$是整数，所以$(x, x) \in S$，即 S 是 $\mathbf{R}$ 上的自反关系.

2. 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 若$(x, y) \in S$，则$\dfrac{x-y}{3}$是整数，而$\dfrac{y-x}{3} = -\dfrac{x-y}{3}$也是整数，于是$(y, x) \in S$.

3. 对于任意 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 若$(x, y) \in S$ 且$(y, z) \in S$，则$\dfrac{x-y}{3}$是整数且$\dfrac{y-z}{3}$是整数. 由于 $\dfrac{x-z}{3} = \dfrac{x-y}{3} + \dfrac{y-z}{3}$是整数，由此得出$(x, z) \in S$.

综上所述，知 S 是 $\mathbf{R}$ 上的等价关系.

六、**解** $\exists x A(x) \to (B(y) \to \neg(\exists y C(y) \to \forall x D(x)))$

$= \exists x A(x) \to (B(y) \to \neg(\neg\exists y C(y) \vee \forall x D(x)))$

$= \exists x A(x) \to (\neg B(y) \vee \neg(\neg\exists y C(y) \vee \forall x D(x)))$

$$= \neg\exists x A(x) \vee (\neg B(y) \vee \neg(\neg\exists y C(y) \vee \forall x D(x)))$$

$$= \neg\exists x A(x) \vee (\neg B(y) \vee (\exists y C(y) \wedge \neg\forall x D(x)))$$

$$= \forall x \neg A(x) \vee (\neg B(y) \vee (\exists y C(y) \wedge \exists x \neg D(x)))$$

$$= \forall x \neg A(x) \vee (\neg B(t) \vee (\exists y C(y) \wedge \exists z \neg D(z)))$$

$$= \forall x (\neg A(x) \vee (\neg B(t) \vee (\exists y C(y) \wedge \exists z \neg D(z))))$$

$$= \forall x \exists y (\neg A(x) \vee (\neg B(t) \vee (C(y) \wedge \exists z \neg D(z))))$$

$$= \forall x \exists y \exists z (\neg A(x) \vee \neg B(t) \vee (C(y) \wedge \neg D(z))).$$

七、**证** 用 n 个节点代表 n 个人，两个人是朋友则在相应的两个节点之间连一条无向边，于是得到一个 n 阶图，其中每个节点的度数均为 3.

由于每个节点度数为3，根据握手定理知 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 3n = 2m$，其中 m 为 G 的边数．于是 n 必为偶数．证毕.

八、**解** 由数列 a_1，a_2，…，a_n，…，构造组合计数生成函数

$$G(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

因为 $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$，于是

$$G(x) = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 2(n-1)) x^n$$

$$= 2x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{n-2}$$

$$= 2x + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= 2x + xG(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2},$$

因而

$$G(x) = \frac{2x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$= 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}^2 x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2x^n+2\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(1+C_n^2\right)x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2-n+2\right)x^n,$$

故 $a_n=n^2-n+2$.