第五章 矩阵的对角化

第一讲 特征值与特征向量的定义

定义

设 A 是一个 n 阶方阵, 如果存在一个数 λ 和一个非零列向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 使得关系式 $Ax=\lambda x$ （1）成立, 则称数 λ 为方阵 A 的一个特征值, 非零向量 x 称为 A 的对应特征值 λ 的特征向量.

例如，对于方阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -12 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -12 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

从而，由定义得出：

1是方阵 A 的特征值，$x=(3,1,-1)^T$ 是 A 的对应于特征值1的特征向量

注

$$\boxed{A}\boxed{x}=\lambda x \qquad (1)$$

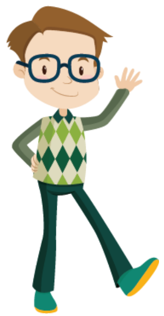
1、特征值问题是对方阵而言的, 也就是说, 等式(1)中的矩阵 A 必须是方阵.

2、特征向量必须是非零向量.

因为, 当 x 为零向量时, 对任意的方阵 A 和任意的数 λ , 都恒有 $A0=0=\lambda 0$, 也就没什么“特征”可言了.

但对于特征值 λ 并没有此限制, 可以为零.

3、特征向量一定是对应于某一特征值的，即特征向量与特征值是对应的.



注

如果 λ 是属于 x 的特征值，则根据数乘矩阵的性质，有

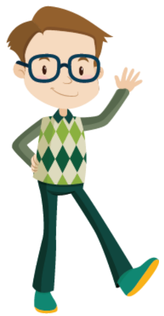
$A(kx)=k(Ax)=k(\lambda x)=\lambda(kx)$ ，可得 $kx(k\neq 0)$ 也是属于 λ 的特征向量.

假设 x_1,x_2 都是属于 λ 的特征向量，由

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=\lambda x_1+\lambda x_2=\lambda(x_1+x_2)$$

可得，当 $x_1+x_2\neq 0$ 时，x_1+x_2 也是属于 λ 的特征向量.

4、属于同一特征值 λ 的特征向量的任意非零线性组合也是方阵 A 的特征向量，这说明每一个特征值对应无穷多个特征向量.



注

5、两个特殊方阵的特征值：

（1）单位矩阵 E_n 的特征值为1，任意非零向量都是它的特征向量；

（2）零矩阵的特征值为0，任意非零向量都是它的特征向量.

对于方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&1\\4&-12&1\end{pmatrix}$，由定义知1是 A 的一个特征值，

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&1\\4&-12&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

第二讲　特征值与特征向量的计算

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

$$(A-\lambda E)x = 0 \qquad (2)$$

不难看出，(2)式是一个以 $A-\lambda E$ 为系数矩阵的含 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组，特征向量 x 是它的一个非零解. 而方程组(2)有非零解的充要条件为

$$|A-\lambda E| = 0 \qquad (3)$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

定义

设 A 为 n 阶方阵, 则 $A-\lambda E$、$|A-\lambda E|$、$|A-\lambda E|=0$ 分别称为方阵 A 的特征矩阵、特征多项式、特征方程. 其中特征多项式和特征方程通常分别记为 $f(\lambda)$ 和 $f(\lambda)=0$.

特殊矩阵计算行列式

设对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵分别为:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对应的特征多项式分别为对角行列式、上三角行列式、下三角行列式，都等于对角线上元素的乘积：

$$|A_1-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & & \\ & a_{22}-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda);$$

$$|A_2-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda);$$

$$|A_3-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & & \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda).$$

结论：对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵的特征值都为对角线上的元素.

如果 λ_i 是特征方程(3)的 k_i 重根,则称 λ_i 为 A 的 k_i 重特征值(当 $k_i=1$ 时,称 λ_i 为 A 的单重特征值),并称 k_i 为 λ_i 的代数重数.此时,A 的对应于 λ_i 的特征向量 x 是齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i E)x=0 \qquad (4)$$

的所有非零解,因此,计算对应于特征值 λ_i 的全部特征向量,就是求出方程组(4)的全部非零解.记 $\boxed{r_i=R(A-\lambda_i E)<n}$,则方程组(4)的基础解系所含解的个数为 $\boxed{n_i=n-r_i}$,它实际上是指 A 的对应于特征值 λ_i 的全部特征向量所构成的向量组的最大无关组所含向量的个数.

求 n 阶方阵 A 的全部特征值和特征向量的步骤：

1. 计算特征多项式 $|A-\lambda E|$，求出特征方程(3)的全部 n 个根，它们就是 A 的全部特征值. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的 s 个不同的特征值 $(s\le n)$，其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，则 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n.$

2. 对 A 的每个特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$, 求出齐次线性方程组(4)的基础解系 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{in_i}$ 则 A 的对应于特征值 λ_i 的全部特征向量为 $c_1\xi_{i1}+c_2\xi_{i2}+\cdots c_{n_i}\xi_{in_i}$，其中 c_1，$c_2,\cdots,c_{n_i}$ 是不全为0的任意常数.

例　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与对应的特征向量.

解:　A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-1)^2,$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1.$

当 $\lambda_1=2$ 时, 求解齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$.

系数矩阵 $A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$,

得基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

所以对应于$\lambda_1=2$ 的全部特征向量为 $k\eta_1=k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(k\neq 0)$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时, 求解齐次线性方程组 $(A-E)x=0$.

系数矩阵 $A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\boxed{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}}$,

得基础解系 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为 $k\eta_2=k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}(k\neq 0)$.

第三讲　特征值与特征向量的性质

性质1

一个特征向量只能属于一个特征值（相同的特征值看成一个）.

证明 设 x 是 A 的不同特征值 x_1 和 x_2 的特征向量, 则有

$$Ax = \lambda_1 x \quad 和 \quad Ax = \lambda_2 x,$$

即 $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, 也即 $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$

由于 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, 所以必有 $x = 0$, 得出矛盾.

性质2

若 λ 是方阵 A 的特征值, x 是属于 λ 的特征向量, 则

(1) $\mu\lambda$ 是 μA 的特征值, x 是属于 $\mu\lambda$ 的特征向量(μ 是常数);

(2) λ^m 是 A^m 的特征值, x 是属于 λ^m 的特征向量(m 是自然数);

(3) 当 $|A| \neq 0$ 时, λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, x 是属于 λ^{-1} 的特征向量.

证明 由$Ax=\lambda x$，可得

(1) $(\mu A)x=\mu(Ax)=\mu(\lambda x)=(\mu\lambda)x,$

从而, $\mu\lambda$ 是 μA 的特征值, x 是属于 $\mu\lambda$ 的特征向量;

(2) $A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda^2x,$

由归纳法得 $A^m x=\lambda^m x$（ m 是自然数),

从而λ^m 是 A^m 的特征值, x 是属于λ^m 的特征向量;

(3) $|A|\neq 0$，则 A 可逆, 从而 $\lambda\neq 0$，于是

$A^{-1}(Ax)=A^{-1}(\lambda x)$ 即 $x=\lambda A^{-1}x$，也即$A^{-1}x=\lambda^{-1}x,$

从而λ^{-1}是 A^{-1} 的特征值, x 是属于 λ^{-1} 的特征向量.

性质3

A 与 A^T 有相同的特征值.

证明 因为 $(A-\lambda E)^T = A^T - \lambda E$，

所以 $|A-\lambda E| = |(A-\lambda E)^T| = |A^T - \lambda E|$，

说明 A 与 A^T 有相同的特征多项式,

从而特征值相同.

性质4

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ，则

（1）$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=trA;$

（2）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|.$

其中，trA 称为 A 的迹（$trail$），为 A 的主对角线上的元素之和.

证明 一方面，A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

显然，A 的特征多项式是关于 λ 的一元 n 次多项式.

不妨将行列式按第一行展开, 可得

$$f(\lambda)=\boxed{(a_{11}-\lambda)A_{11}}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

由于代数余子式 A_{11} 是去掉的第一行第一列所得的 $(n-1)$ 阶行列式, 展开 A_{11} 时, λ 的最高次项的次数为 $n-1$;其它代数余子式 $A_{12},\cdots,A_{1n}$ 也是 $(n-1)$ 阶行列式, 但展开 $A_{12},\cdots,A_{1n}$ 时 λ 的最高次项的次数都是 $n-2$, 所以特征多项式关于 λ 的 n 次项和所有 $n-1$ 次项只能来自于 $(a_{11}-\lambda)A_{11}$,

用类似的方法, 再将代数余子式 A_{11} 按第一行展开, 一层一层分析下去……

得到特征多项式的 n 次项和所有 $n-1$ 次项都来自于行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

展开时主对角线上元素相乘的那一项, 即

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda),$$

从而多项式可写成

$$f(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+\cdots+a_0=0 \qquad (1)$$

其中常数项 $a_0=f(0)=|A-0\cdot E|=|A|.$

另一方面，由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为特征方程 $f(\lambda)=\left|A-\lambda E\right|=0$ 的全部根，从而有

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0,$$

也即 $f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)=0.$

从而 $f(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(-\lambda)^{n-1}+\cdots+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0.$ （2）

对比（1）、（2）两式的系数便得性质4的结论.

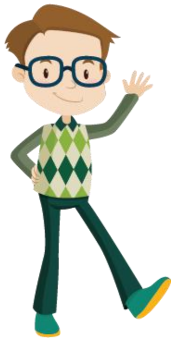
注

类似于方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ ，由性质4(2)有：

方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值都不能为零.

性质5

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 A 的 m 个互不相同的特征值，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是依次与之对应的特征向量，则 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关.



证明 设有常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ ，使得

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m=0,$$

则 $A(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m)=0$ ，

即 $\lambda_1c_1x_1+\lambda_2c_2x_2+\cdots+\lambda_mc_mx_m=0$ ， (3)

进行类推, 可得

$$\lambda_1^kc_1x_1+\lambda_2^kc_2x_2+\cdots+\lambda_m^kc_mx_m=0(k=1,2,\cdots,m-1). \quad (4)$$

将(3)式和(4)式中所表示的各式合写成矩阵形式,得

$$(c_1x_1, c_2x_2, \cdots, c_mx_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0, 0, \cdots, 0),$$

注意到,上式等号左边第二个矩阵的行列式转置后为范德蒙行列式,当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 互不相同时,由范德蒙行列式的结论知,该行列式的值不为零,说明这个矩阵可逆.

于是有

$$(c_1x_1, c_2x_2, \cdots, c_mx_m) = (0, 0, \cdots, 0),$$

即 $\begin{cases} c_1x_1 = 0, \\ c_2x_2 = 0, \\ \cdots \\ c_mx_m = 0. \end{cases}$， 又 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为特征向量都不等于零，所以必有

$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$, 从而 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性无关.

推论

设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同特征值, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量, 则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关.（证明留作习题.）

上述推论表明:对应于两个不同特征值的线性无关的特征向量组, 合起来还是线性无关的. 这一结论对 $m(m\geq 3)$ 个特征值的情形也是成立的.

第四讲　向量的内积与正交向量

定义1

设有 n 维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$x$ 与 y 的内积是指

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

内积具有下列性质:

1. $(x,y)=(y,x)$;
2. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;
3. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;
4. $(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

定义2

令 $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,

$\|x\|$ 称为 n 维向量 x 的长度(或范数).

长度具有下列性质:

1. 非负性: $\|x\| \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$;
2. 齐次性: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

定义3

当 $\|x\|=1$ 时, 称 x 为单位向量.

当 $x\neq 0$ 时, 由于 $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=\dfrac{1}{\|x\|}\cdot\|x\|=1$, 说明 $\dfrac{x}{\|x\|}$ 是单位向量,

并称这一运算为把向量单位化.

例如, 向量 $\alpha=(1,0,0,0)^T,\beta=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)^T$ 都是单位向量.

向量 $\gamma=(1,0,0,1)^T$ 的长度 $\|\gamma\|=\sqrt{2}$, 说明 γ 不是单位向量, 而 $\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}$ 就是单位向量了.

向量的内积满足柯西−施瓦兹 $(Cauchy-Schwarz)$（不等式）

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

或 $$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$$

定义4

（1） 非零向量 x, y 的夹角定义为：$\theta = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$

（2） 当 $\boxed{(x, y) = 0}$ 时，称向量 x 与 y 正交. 显然，零向量与任何向量正交.

（3） 一组两两正交的非零向量，称为正交向量组.

定理

正交向量组必定是线性无关组

证：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是两两正交的非零向量，有常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ ，使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0,$$

以 α_1^T 左乘上式两端，得 $\alpha_1^T(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r)=\alpha_1^T\cdot 0=0$ ，

即 $\lambda_1\alpha_1^T\alpha_1+\lambda_2\alpha_1^T\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_1^T\alpha_r=0$

也即 $\lambda_1(\alpha_1,\alpha_1)+\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots+\lambda_r(\alpha_1,\alpha_r)=0$

从而 $\lambda_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$

因为 $\alpha_1\neq 0$，所以 $\lambda_1=0$. 以此类推，以 $\alpha_j^T(j=2,3,\cdots,n)$ 分别左乘上式两端，

可得 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ ，从而，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关.

定义5

当正交向量组作为向量空间的基时，称之为正交基；

如果正交基中每个向量都为单位向量，则称之为正交规范基或者标准正交基.

定义5说明，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 R^n 的标准正交基，则有

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1, i=j;\\ 0, i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n).$$

例如，单位向量组 $e_1=(1,0,0)^T,e_2=(0,1,0)^T,e_3=(0,0,1)^T$ 是 R^3 的标准正交基；

向量组 $\xi_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T,\xi_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)^T,\xi_3=(0,0,1)^T$ 也是 R^3 的标准正交基.

标准正交基

如果 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 V 的一个标准正交基, 那么 V 中任一向量 α

都能由 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 线性表示, 设为 $\alpha=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_r e_r$.

为求其中的系数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$,

用 e_i^T 左乘上式, 有 $e_i^T\alpha=\lambda_i e_i^T e_i=\lambda_i$,

即 $\boxed{\lambda_i=e_i^T\alpha=(\alpha,e_i)\ .}$

这就是向量在标准正交基中的坐标的计算公式.

问题

怎样将线性无关向量组化为正交向量组?(即:向量组正交化)

怎样将一组基化为标准正交基?(即:正交且单位化)

第五讲　施密特正交化方法与正交矩阵

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 取

$$\beta_1=\alpha_1;$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1;$$

……

$$\beta_{\mathrm{r}}=\alpha_{\mathrm{r}}-\frac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_r,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}.$$

容易验证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是两两正交的向量组, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价.

定义

将线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 导出正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的过程称为施密特（$Schmidt$）正交化方法.

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为一组基, 按施密特正交化方法导出正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 后, 再将向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 单位化, 即取:

$$e_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1, e_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\cdots,e_r=\frac{1}{\|\beta_r\|}\beta_r$$

则 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间 V 的一个标准正交基.

定义

将线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 正交化，导出等价的正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$, 再进一步将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 单位化, 得出与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价的向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ ，这一过程称为把向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 标准正交化(也叫正交规范化).

例 设 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$ 为 R^3 的一组基，

求与之等价的标准正交基

解题思路

先用施密特正交化方法将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化，得 β_1,β_2,β_3，

再将 β_1,β_2,β_3 单位化得 e_1,e_2,e_3 ，e_1,e_2,e_3既为所求.（作为习题，请读者课后完成）

定义

如果 n 阶方阵 A 满足 $A^T A = E$（即 $A^{-1} = A^T$）, 称 A 为正交矩阵.

定理

设 A, B 都是 n 阶方阵, 则

1. $|A| = \pm 1$；

2. A 的列(行)向量组是两两正交的单位向量;

3. A^T（即 A^{-1}）也是正交矩阵;

4. AB 也是正交矩阵.

注

定理中第2个结论的逆命题也是成立的, 即有

n 阶方阵 A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ 方阵 A 的列(行)向量组是单位正交向量组.

从而, 正交矩阵 A 的 n 个列(行)向量构成向量空间 R^n 的一组标准正交基.

第六讲　相似对角矩阵的概念和性质

定义

设 A,B 都是 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 P , 使

$$P^{-1}AP=B,$$

则称 B 是 A 的相似矩阵, 也称方阵 A 和 B 相似. 并称由 A 到 B 的变换

$B=P^{-1}AP$ 为相似变换, 称 P 为相似变换矩阵.

例如 对于矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$ ，

（1） 若取相似变换矩阵 $P_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$,

则 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\8 & 4\end{pmatrix}=B_1$,

这时，称 A 与 B_1 相似.

(2) 若取相似变换矩阵 $P_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}, P_2^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$,

则 $P_2^{-1}AP_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=B_2$,

这时, 称 A 与 B_2 相似.

在不同的相似变换矩阵下, 与 A 相似的矩阵也是不同的.

相似关系具有下列基本性质:

1. 自反性:

因为 $E^{-1}AE = A.$

2. 对称性:

因为 $P^{-1}AP = B$,则 $(P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A.$

3. 传递性:

即: A 与 B 相似, B 与 C 相似, 则 A 与 C 相似.

因为 $P^{-1}AP = B, Q^{-1}BQ = C$,则

$Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = C,$ 即: $(PQ)^{-1}A(PQ) = C.$

性质1

相似矩阵具有相同的秩和相同的行列式.

证　设方阵 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$,

说明方阵 A 与 B 等价, 从而秩相等. 并且

$$|B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=\frac{1}{|P|}|A||P|=|A|.$$

性质2

相似矩阵如果可逆，则逆矩阵也相似.

证　设方阵 A 与 B 相似，且 A 与 B 都可逆，则由

$$P^{-1}AP=B$$

可得 $(P^{-1}AP)^{-1}=B^{-1}$,

即 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$,

从而，A^{-1}与 B^{-1} 相似.

性质3

如果方阵 A 与 B 相似, 则 A^k 与 B^k 也相似, 其中 k 为正整数.

证　由 $P^{-1}AP = B$, 可得 $(P^{-1}AP)^k = B^k$.

而 $(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$

$$= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP$$

$$= P^{-1}A^kP,$$

所以, A^k 与 B^k 相似.

注

性质3常用于计算 A^k .

定理1

相似矩阵具有相同的特征多项式, 从而具有相同的特征值.

证　设 A 与 B 相似. 且 $P^{-1}AP=B$, 则

$$
\begin{aligned}
|B-\lambda E| &= |P^{-1}AP-\lambda E| = |P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P| \\
&= |P^{-1}(A-\lambda E)P| = |P^{-1}||A-\lambda E||P| \\
&= |A-\lambda E|,
\end{aligned}
$$

说明 A 与 B 具有相同的特征多项式, 从而也具有相同的特征值.

推论

如果 n 阶方阵 A 与对角矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，

则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也是 A 的 n 个特征值.

证 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是对角矩阵 Λ 的 n 个特征值，由定理1知，

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 也是 A 的 n 个特征值.

注

定理1的逆命题并不成立, 即特征多项式相同的矩阵不一定相似.

例如: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$

显然, A 与 E 具有相同的特征多项式, 但 A 与 E 不相似,

因为单位矩阵只能与它自身相似.

第七讲　方阵的对角化

（1）对 n 阶方阵 A, 在什么条件下能与一个对角矩阵 Λ 相似?

（2）其相似变换矩阵 P 具有什么样的结构?

定义

如果 n 阶方阵 A 与一个对角矩阵 Λ 相似, 称 A 可相似对角化,

也称 A 可对角化.

定理1

如果 n 阶方阵 A 与一个对角矩阵 Λ 相似的充分必要条件为 A 有 n 个

线性无关的特征向量.

证　必要性:

设 n 阶方阵 A 与对角矩阵 Λ 相似, 记 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 Λ 的 n 个特征值.

由 $P^{-1}AP = \Lambda$, 可得 $AP = P\Lambda$. 将 P 按列分块, 写成分块矩阵 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$,

则 $AP = P\Lambda$ 可化为 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$,

从而有 $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \cdots, Ap_n = \lambda_n p_n$,

说明 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值, $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 A 的分别属于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量. 由于 P 可逆, 得 $|P| \neq 0$, 从而 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 必线性无关.

充分性: 如果 A 有 n 个线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，并假设

它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则有 $Ap_i = \lambda_i p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，

记 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$，写成矩阵的形式，有

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$$

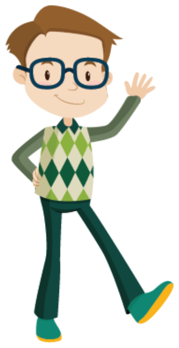
$$= (p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即 $AP = P\Lambda$. 因为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 线性无关，所以 P 可逆，从而有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

注

1. 如果 n 阶方阵 A 与对角矩阵 Λ 相似, 则相似变换矩阵 P 是由 A 的 n 个线性无关的特征向量作为列向量构成的矩阵.

2. 方阵 A 如果能够对角化, 则对角矩阵 Λ 在不计特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的排列顺序时是唯一的, 称为 A 的相似标准型.



设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 A 的 m 个互不相同的特征值, $x_1,x_2,\cdots,x_m$

是依次与之对应的特征向量, 则 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性无关.

推论1

如果 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则方阵 A 可对角化.

推论2

如果对 n 阶方阵 A 的任一 k_i 重特征值 λ_i，有 $r(A-\lambda_i E)=n-k_i$，

则 A 可对角化.

复习

1. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的 s 个不同的特征值 $(s\le n)$ ，

   其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ ，则

   $$k_1+k_2+\cdots+k_s=n.$$

2. 对应于两个不同特征值的线性无关的特征向量组，合起来还是线性无关的.

   这一结论对 $m(m\ge 3)$ 个特征值的情形也是成立的.

3. 当齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的系数矩阵的秩为 $r(A-\lambda_i E)=n-k_i$ 时,

   该方程组的解空间的维数为 $n-(n-k_i)=k_i$. 也就是说, 基础解系含 k_i 个线性

   无关的解向量.

证　对 A 的任一 k_i 重特征根λ_i，$r(A-\lambda_i E)=n-k_i$ ，由上述结论3，得该方程组的解空间的维数为$n-(n-k_i)=k_i$ ，则必对应 k_i 个线性无关的特征向量，又由结论1和结论2知，可找到 n 个线性无关的特征向量，从而 A 可对角化.

归纳 n 阶方阵 A 对角化的一般步骤:

1. 求出 A 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ （显然, $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$ ）;
2. 对每个不同特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$ ，求解齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系, 若基础解系正好由 k_i 个线性无关的解向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$ 构成, 则 A 可对角线.
3. 令 $P=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1k_1},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2k_2},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sk_s})$，则

$$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{k_1个},\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{k_2个},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{k_s个}).$$

注: P 中列向量的顺序与对角矩阵 Λ 的对角线上的特征值的顺序应该相对应, 但具有重数的特征值本身所含有的那些特征向量的顺序不作要求.

例 设方阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 判断 A 是否可对角化?

解答思路

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0$,

得 A 的三重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

另一方面, 系数矩阵经过初等行变换化为: $A+E=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

可得 $r(A+E)=2$, 从而得出解空间的维数为$n-r(A+E)=3-2=1$,

说明三重特征值 $\lambda=-1$ 对应的线性无关的特征向量只有一个, 所以A不可对角化.

第八讲 实对称矩阵的特征值与特征向量的性质

定理1

实对称矩阵的特征值为实数.

证: 设 $Ax=\lambda x, x\neq 0$，其中特征值 λ 为复数，复向量 x 为属于特征值 λ 的特征向量.

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数，$\overline{x}$ 表示 x 的共轭复向量，而 A 为实矩阵，有 $A=\overline{A}$，

从而 $A\overline{x}=\overline{A}\,\overline{x}=\overline{Ax}=\overline{\lambda x}=\overline{\lambda}\,\overline{x}.$

于是有 $\overline{x}^T Ax=\overline{x}^T(Ax)=\overline{x}^T(\lambda x)=\lambda\overline{x}^T x$

及 $\overline{x}^T Ax=(\overline{x}^T A^T)x=(A\overline{x})^T x=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T x$

两式相减得 $(\lambda-\overline{\lambda})\overline{x}^T x=0,$

因为 $x\neq 0$，所以 $\overline{x}^T x=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\neq 0$.

说明 $\lambda-\overline{\lambda}=0$,即 $\lambda=\overline{\lambda}$, 从而可得 λ 为实数.

显然, 当特征值 λ_i 为实数时, 齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$

是实系数方程组, 由 $\left|A-\lambda_i E\right|=0$ 知必有实的基础解系,

所以对应的特征向量可以取实向量.

定理2

实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交.

证: 设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵A 的不同特征值, x_1,x_2 分别是属于

λ_1,λ_2 的特征向量, 则有$Ax_1=\lambda_1 x_1, Ax_2=\lambda_2 x_2$.

因为A是对称矩阵, 所以 $\lambda_1 x_1^T=(\lambda_1 x_1)^T=(Ax_1)^T=x_1^T A$

于是 $\lambda_1 x_1^T x_2=x_1^T A x_2=x_1^T(\lambda_2 x_2)=\lambda_2 x_1^T x_2$

即 $(\lambda_1-\lambda_2)x_1^T x_2=0$.

但 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 故 $x_1^T x_2=(x_1, x_2)=0$, 即 x_1 与 x_2 正交.

定理3

设 A 为 n 阶实对称矩阵, λ 是 A 的 r 重特征值, 则 $r(A-\lambda E)=n-r$,

从而对应特征值 λ 正好有 r 个线性无关的特征向量.

定理4

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 必存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$$

其中 Λ 为以 A 的 n 个特征值为对角线元素的对角矩阵.

第九讲　实对称矩阵的对角化

定理4

设 A 为 n 阶实对称矩阵, 必存在正交矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

其中 Λ 为以 A 的 n 个特征值为对角线元素的对角矩阵.

n 阶方阵 A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ 方阵 A 的列(行)向量组是单位正交向量组.

n 阶实对称矩阵 A 正交相似对角化的一般步骤:

1. 求出 A 的互不相等的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ （显然, $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$ ）;

2. 对每个不同的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$, 求解齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系, 得到 A 的 k_i 个线性无关的特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$.
用施密特正交化方法将这些特征向量正交化, 然后再单位化, 得到 A 的 k_i 个对应于 λ_i 的单位正交特征向量 $\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ik_i}(i=1,2,\cdots,s)$,

由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交, 从而可得

$$\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1k_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2k_2},\cdots,\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{sk_s}$$

是 A 的 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$ 个单位正交特征向量;

3. 构造 n 阶正交矩阵

$$P=(\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1k_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2k_2},\cdots,\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{sk_s})$$

则有 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$, 这里, P 中列向量的顺序与对角矩阵 Λ

的对角线上的特征值的顺序应该相对应.

注

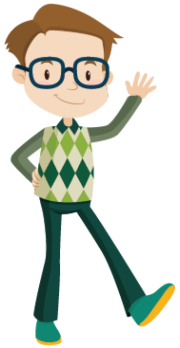
对实对称矩阵进行正交相似对角化的步骤与方阵的对角化的步骤是类似的,

只是在第2步, 对每个 k_i 重特征值 λ_i , 求出 k_i 个线性无关的特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$

后, 若不是正交向量组, 则需要用施密特正交化方法将其正交化, 然后再单位化, 得到

k_i 个两两正交的单位特征向量 $\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ik_i}$, 从而得到矩阵 A 的 n 个两两正交的单位

特征向量, 以这些特征向量作为列向量构成正交矩阵 P , 则可使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.



例 设 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解答思路

1. 利用特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 求得 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$.

2. 当 $\lambda_1=2$ 时，解齐次线性方程组 $(A-2E)x=0$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，

单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时, 解齐次线性方程组 $(A-4E)x=0$, 得正交基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\text{ 单位化得 } \eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

于是, 得正交矩阵 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

使得 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$.

注

例1中当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时, 求得的基础解系中的两个特征向量正好是正交的,

所以不需要用施密特正交化方法去正交化, 只需单位化.

第五章内容主要包括:

1. 特征值与特征向量的定义、计算和性质;
2. 相似矩阵的定义和性质;
3. 向量内积与施密特正交化方法;
4. 正交矩阵的定义和性质;
5. 方阵的对角化;
6. 实对称矩阵的对角化.

版块一　线性方程组

三个问题

(1) 方程组 $Ax=b$（$Ax=0$）何时有解?

(2) 方程组 $Ax=b$（$Ax=0$）有解，解的结构如何?

(3) 方程组 $Ax=b$（$Ax=0$）有解，如何求解?

版块一　线性方程组

一、齐次线性方程组

1、线性方程组的表达形式

含 n 个未知数，m 个方程的线性方程组一般有下面三种形式.

（1）一般形式：
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \quad ①$$

如果 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零，则称①为非齐次线性方程组，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{和} \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$
分别称为方程组①的系数矩阵和增广矩阵.

版块一　线性方程组

如果 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \quad ②$$

则称②为齐次线性方程组，②也叫做①的导出组.

（2）矩阵形式

非齐次线性方程组：$Ax=b$；

齐次线性方程组：　$Ax=0$.

其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

（3） 向量组形式

如果系数矩阵 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则非齐次线性方程组①可由矩阵形式

进一步写成向量组形式：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$. ③

即 $Ax=b \Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=b \Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$

版块一　线性方程组

注

（i）从方程组的角度，等式③是非齐次线性方程组的向量组形式，如果从线性组合的角度，等式③表示向量 b 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合，方程组的一组解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，看成向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的系数了. 这样就将方程组是否有解和向量组的线性相关性统一起来了. 从而有结论：

方程组①有解 $\Leftrightarrow$ 向量 b 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

（ii）齐次线性方程组②类似可写成向量组形式 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0.$　④

显然，齐次线性方程组一定有零解. 同理，有结论：

齐次线性方程组②有非零解 $\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

版块一　线性方程组

2、齐次线性方程组解的判定

设齐次线性方程组 $Ax=0$ 含有 n 个未知数, m 个方程, 即系数矩阵 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, 那么

(1)　$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关;

(2)　$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)<n$;

(3)　$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 当 $m=n$ 时, $|A|=0$. (这时显然也有 $r(A)<n$);

(4)　$Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关;

(5)　$Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$;

(6)　$Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 当 $m=n$ 时, $|A|\neq 0$. (这时显然也有 $r(A)=n$).

版块一　线性方程组

3、齐次线性方程组的基础解系

(1) 基础解系的定义

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量, 如果满足

① $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关;

② 方程组 $Ax=0$ 的任意一个解向量都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示,

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

(2) 重要结论

设方程组 $Ax=0$ 含有 n 个未知数, 记系数矩阵 A 的秩为 $r(A)$, 则基础解系所含向量的个数为 $n-r(A)$. 从而说明解空间的维数也是 $n-r(A)$.

版块一　线性方程组

注

结论（2）非常重要，揭示了齐次线性方程组中系数矩阵的秩、基础解系所含向量的个数以及解空间的维数这三者之间的关系，大家要熟记.

在解题应用中，很多时候都是间接或直接利用这个结论.

(3) 通解的定义

如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $Ax=0$ 的任意一个解向量都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示：$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$，称为 $Ax=0$ 的通解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意实数.

版块一　线性方程组

例 1 齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充要条件是(　　).

A　系数矩阵 A 的行向量组线性无关;

B　系数矩阵 A 的列向量组线性无关;

C　系数矩阵 A 的行向量组线性相关;

D　系数矩阵 A 的列向量组线性相关.

分析　齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解,相当于方程组的向量组形式

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时成立,其中

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的列向量组,这说明 A 的列向量组线性无关.

正确答案: B .

版块一　线性方程组

例 2 齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是(　　).

A　系数矩阵 A 的任意两个列向量线性相关;

B　系数矩阵 A 的任意两个行向量线性相关;

C　系数矩阵 A 的至少有一个列向量是其它列向量的线性组合;

D　系数矩阵 A 的任意列向量都是其它列向量的线性组合.

分析　齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件为 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关,从而容易得出正确答案为 C .

(课外题)例 3 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解的充要条件是 $\lambda=$(　　).

正确答案: $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$.

版块一　线性方程组

例 4 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$且 $|A|=0$ ，但 A 中某元素的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的每个基础解系中向量的个数都是（　　）.

A　1；　　B　k；　　C　l；　　D　n.

分析　因为 A 是 n 阶方阵，A 的代数余子式都是 $n-1$ 阶行列式，又 $|A|=0$ ，说明 A 是降秩矩阵，A 的秩最多为 $n-1$，而已知条件 A 中某元素的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$ ，说明 A 含有 $n-1$ 阶非零子式，又 $|A|=0$ ，可得 $r(A)=n-1$. 对应齐次线性方程组 $Ax=0$ ，由系数矩阵 A 的秩与基础解系所含向量的个数的关系，得基础解系含 $n-(n-1)=1$.

所以，正确答案：A .

版块一　线性方程组

注

关于基础解系中所含的向量要注意以下几点：

（1）所含向量都是解向量；

（2）所含向量都线性无关；

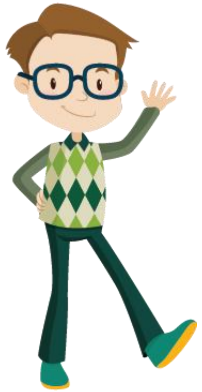
（3）所含向量的个数为 $n-r(A)$ ．

其中，第（1）点容易忽略，需特别注意.

另外，第（3）点说明线性方程组与矩阵的秩有着密切的联系，即：

基础解系中所含解向量的个数 $+r(A)=n$（其中 n 表示方程组所含未知数的个数），

解题时需注意两者的相互转化.



版块一　线性方程组

例 5 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&t\end{pmatrix}$，如果齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有3个解向量，则 $t=$（　　）.

分析 因为 $Ax=0$ 的基础解系含有3个解向量，未知数的个数为5，所以 $r(A)=5-3=2$.

对系数矩阵 A 进行初等行变换，得

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&t\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&t-5\end{pmatrix}.$$

由 $r(A)=2$，知 $t-5=0$，即 $t=5$.

版块一　线性方程组

二、非齐次线性方程组

1、设 $Ax=b$ 是含有n 个未知数, m 个方程的非齐次线性方程组,

(1) 设 η_1,η_2 是 $Ax=b$ 的两个解, 则$\eta_1-\eta_2$是其导出组 $Ax=0$ 的解;

(2) 设 η 是 $Ax=b$ 的解, ξ 是其导出组 $Ax=0$ 的解, 则 $\eta+\xi$ 是 $Ax=b$的解.

2、设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\overline{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$ 分别是 $Ax=b$的系数矩阵和增广矩阵, 则

(1) $Ax=b$ 有解

$\Leftrightarrow b$可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示;

$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$;

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$;

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价.

版块一　线性方程组

(2)　$Ax=b$ 无解

$\Leftrightarrow r(A)\neq r(\overline{A})$，也就是说 $r(\overline{A})=r(A)+1$；

$\Leftrightarrow b$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

(3)　$Ax=b$ 有唯一解

$\Leftrightarrow b$ 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一的线性表示.

$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n;$

$\Leftrightarrow$ 当 $m=n$ 时, $|A|\neq 0.$

(4)　$Ax=b$ 有无穷多解

$\Leftrightarrow b$ 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 但表示法不唯一;

$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n;$

$\Leftrightarrow$ 当 $m=n$ 时, $|A|=0.$

版块一　线性方程组

3、关于非齐次线性方程组的通解

对非齐次线性方程组 $Ax=b$，如果 $r(A)=r(\overline{A})=r$，且 η 是 $Ax=b$ 的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $Ax=b$ 的通解(全部解)为 $\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意实数.

例 6 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是(　　).

A $r(A)=m$；　　B A 的列向量组线性相关；

C $r(A)=n$；　　D A 的行向量组线性相关.

分析 选项B和D是用来判定齐次线性方程组的解的情况的，这里不合要求.

仅分析选项A和C.

版块一　线性方程组

$Ax=b$ 有解的充要条件中与秩有关的只有 $r(A)=r(\overline{A})$.

前面提到 $\overline{A}$ 是 $m\times(n+1)$ 矩阵，所以有 $r(A)\le r(\overline{A})\le m$.

对选项A，如果 $r(A)=m$ ，又因为 $r(A)\le r(\overline{A})\le m$. 所以可得 $r(A)=r(\overline{A})=m$ ，从而 $Ax=b$ 有解；

而选项C是不能保证 $r(A)=r(\overline{A})$ 的，正确答案：A.

此题综合性比较强，需多看几遍！

版块一　线性方程组

例 7 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$Ax=0$是非齐次线性方程组 $Ax=b$的导出组，

则下述结论正确的是（　　）.

A 如果 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；

B 如果 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

C 如果 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解；

D 如果 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 只有零解.

分析 大家翻到前面归纳的 $Ax=0$ 仅有零解的充要条件知，$Ax=0$只有零解，

只能得到系数矩阵 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，并不能保证向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

加上常数向量 b 后所得向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 线性相关，从而得不到$r(A)=r(\overline{A})$ ，

说明不能得出 $Ax=b$ 有解，当然更得不到 $Ax=b$有唯一解，选项A错.

版块一　线性方程组

选项B中， $Ax=0$ 有非零解，说明 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，

而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 也线性相关的，有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

即 $r(A)=r(\overline{A})$，说明选项B也是正确的.

如果 $Ax=b$ 有无穷多解，那么对 $Ax=b$ 中任意两个不同解 η_1,η_2，它们的差

都是 $Ax=b$ 的导出组 $Ax=0$ 的解，所以选项C是正确的，而D是错的.

所以，本题的正确答案有两个，为B，C.

版块一　线性方程组

注

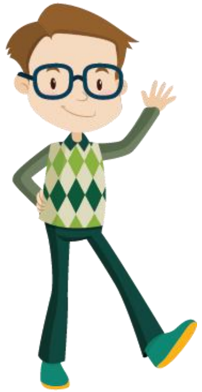
$Ax=b$ 有唯一解 $\Rightarrow Ax=0$ 只有零解；

$Ax=b$ 有无穷多解 $\Rightarrow Ax=0$ 有非零解；

反过来，$Ax=0$ 有非零解（说明 $r(A)<n$ ），不能保证 $Ax=b$ 有无穷多解

（因为 $r(A)<n$ 不能得出 $r(A)=r(\overline{A})$ ）；同理，$Ax=0$只有零解（说明 $r(A)=n$ ），

也不能保证 $Ax=b$ 有唯一解（因为 $r(A)=n$ 也不能得出 $r(A)=r(\overline{A})$ ）.



版块一　线性方程组

(课外题)例 8 设线性方程组 $A_{m\times n}x=b$,则正确的结论是(　　　).

A　如果 $Ax=0$ 只有零解,则 $Ax=b$ 有唯一解;

B　如果 $Ax=0$ 有非零解,则 $Ax=b$ 有无穷多解;

C　如果 $Ax=b$ 有两个不同的解,则 $Ax=0$ 有无穷多解;

D　$Ax=b$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=n$.

正确答案: C .

版块一　线性方程组

例 9 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解, 则 $a=$（　　）.

分析　方程组写成了矩阵的形式, 这是一个含3个未知数3个方程的特殊的非齐次线性方程组.

根据前面归纳的结果, 这个方程组有无穷多解必须满足 $r(A)=r(\overline{A})<3$, 也即, 由

$r(A)<3$ 首先得满足 $|A|=0$, 而

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+a & 1 & 1 \\ 2+a & a & 1 \\ 2+a & 1 & a \end{vmatrix}=(2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(2+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(2+a)(a-1)^2=0,$$

所以, $a=1$ 或 $a=-2$. 而 $a=1$ 时, $r(A)=1, r(\overline{A})=2$, 方程组无解, 所以 $a=-2$.

版块二　　特征值问题

一、特征值与特征向量的基本概念

1、设 A 是一个 n 阶方阵，如果存在一个数 λ 和一个非零列向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，

使得关系式　$Ax=\lambda x$　(1)

成立，则称数 λ 为方阵 A 的一个特征值，非零列向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

2、设 A 为 n 阶方阵，则 $A-\lambda E$、$|A-\lambda E|$、$|A-\lambda E|=0$ 分别称为方阵的特征矩阵、特征多项式、特征方程. 其中特征多项式和特征方程通常分别记为 $f(\lambda)$ 和 $f(\lambda)=0$.

版块二　特征值问题

二、特征值的性质

若数 λ 为方阵 A 的特征值，则

（1） $k\lambda$ 是 kA 的特征值；

（2） λ^m 是 A^m 的特征值；

（3） $f(A)=\sum_{i=0}^{m} a_i A^i$ 的特征值为 $f(\lambda)=\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i$；

（4） 若 A 可逆则 $\lambda \neq 0$，且 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值；

（5） 若 $\lambda \neq 0$，则 A^* 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$；

（6） A^T 与 A 有相同的特征值；

版块二　　特征值问题

（7）0是 A 的特征值的充要条件是 $|A|=0$，也即 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 的所有特征值不为零；

（8）零矩阵有 n 重特征值0；

（9）单位矩阵有 n 重特征值1.

（10）数量矩阵 kE 有 n 重特征值 k ；

（11）设方阵 A 的 n 个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

① $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+a_{nn}$，即特征值的和等于矩阵的迹 trA ；

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$，即特征值的积等于方阵的行列式.

版块二　特征值问题

三、特征向量的性质

(1) 若 x 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 x 一定是非零向量；

(2) 若 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 都是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量，且 $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m \neq 0$,

则 $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m$ 也是 A 的属于特征值 λ 的特征向量；

(3) 若 λ 是 A 的 r 重特征值，则属于 λ 的线性无关的特征向量最多有 r 个；

(4) A 的属于不同特征值的特征向量一定线性无关；

(5) 设 λ 是 A 的特征值，x 是属于 λ 的特征向量，则

① x 是 kA 的属于特征值 $k\lambda$ 的特征向量；　x 是 A^m 的属于特征值 λ^m 的特征向量；

x 也是 $f(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i$ 的属于特征值 $f(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i$ 的特征向量.

② 如果 $\lambda \neq 0$，则 x 是 A^{-1}的属于特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量；x 是 A^* 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量.

四、矩阵的特征值和特征向量的求法

1、对于数字型矩阵 A，求 A 的全部特征值和特征向量的步骤：

(1) 计算特征多项式 $|A-\lambda E|$，求出特征方程$|A-\lambda E|=0$ 的全部 n个根，它们就是A的全部特征值. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是A 的 s个不同的特征值$(s \le n)$，其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，则 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$.

(2) 对A的每个特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$，求出齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{in_i}$.

则A对应于特征值λ_i的全部特征向量为 $c_1\xi_{i1}+c_2\xi_{i2}+\cdots c_{n_i}\xi_{in_i}$ ，

其中 c_1，$c_2,\cdots,c_{n_i}$ 是不全为0的任意常数.

版块二　特征值问题

2、对于抽象型矩阵 A ，它的特征值和特征向量的求法通常有两种思路：

(1) 利用特征值和特征向量的定义；

(2) 利用特征值和特征向量的性质，例如，已知 A 的特征值，可求得 $kA, A^m, \sum_{i=0}^{m} a_i A^i$ 等矩阵的特征值.

例10 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是(　　).

分析　特征方程为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-4)=0$ ，

所以 A 的特征值为一重特征值 $\lambda_1=4$ 和三重特征值 $\lambda_2=0$（不含本题要求，舍去）.

版块二　特征值问题

例 11 已知三阶矩阵A的特征值为$1,-1,2$，则矩阵 $B=2A+E$（E为三阶单位矩阵）的特征值为(　　).

分析 矩阵B是关于A的矩阵多项式, 即 $B=2A+A^0$, 由上面归纳的性质知, A的矩阵多项式的特征值等于A的对应的特征值多项式 $2\lambda+\lambda^0$ 即 $2\lambda+1$，即是B的特征值. 因为A的特征值为 $1,-1,2$，所以 B 的特征值为$3,-1,5$.

版块二　特征值问题

(课外题)例 12 已知三阶矩阵A 的特征值为$1,-2,3$，则

(1) $|A|=$ (　　)；(2) A^{-1} 的特征值为(　　)；

(3) A 的伴随矩阵 A^* 的特征值为(　　)；(4) A^2+2A+E 的特征值为(　　).

分析　利用上面归纳的性质一一进行解答

(1) 因为n 阶方阵A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ (允许有重根)满足：$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$，

所以 $|A|=-6$；

(2) 因为λ 为方阵A 的特征值，且 $\lambda\neq 0$时，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是A^{-1}的特征值，所以 A^{-1} 的

特征值为 $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$；

(3) 因为 λ为方阵A 的特征值，且$\lambda\neq 0$ 时，则$\dfrac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值，已求得$|A|=-6$，

所以 A^* 有特征值为 $-6,\dfrac{-6}{-2},\dfrac{-6}{3}$，即 $-6,3,-2$；

版块二　特征值问题

(4) 因为 λ 为方阵 A 的特征值, $f(A)$ 为 A 的矩阵多项式, 那么 $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的特征值,

从而 A^2+2A+E 的特征值为 $\lambda^2+2\lambda+1$, 将 $1,-2,3$ 分别代入 $\lambda^2+2\lambda+1$,

得 A^2+2A+E 的特征值: $4,1,16.$

例 13 若 $A^2=E$, 则 A 的特征值为(　　).

分析 设 A 的特征值为 λ, 则 A^2-E 的特征值为 λ^2-1, 由条件知 A^2-E 等于零矩阵,

零矩阵的特征值都为零, 所以 $\lambda^2-1=0$, 从而, $\lambda=\pm1.$

版块二　特征值问题

例 14 已知四阶方阵 $A,|A|=2$，又 $2A+E$ 不可逆, 则 A^*-E 的一个特征值 $\lambda=$（　　）.

分析　因为 $2A+E$ 不可逆, 所以 $|2A+E|=0$, 即

$\left|2\left(A-(-\frac{1}{2}E)\right)\right|=2^4\left|A-(-\frac{1}{2}E)\right|=0$, 对照 A 的特征方程的一般形式 $|A-\lambda E|=0$，

可得 $-\frac{1}{2}$ 是 A 的一个特征值. 因为 $|A|=2$，说明 A 是可逆的, 并且 -2 是 A^{-1} 的一个特征值,

所以由 A 和 A^* 的关系 $AA^*=A^*A=|A|E$ 可得 $A^*=|A|A^{-1}=2A^{-1}$，从而 $A^*-E=2A^{-1}-E$，

相应的 $2\times(-2)-1=-5$ 是 A^*-E 的一个特征值.

版块二　　特征值问题

例 15 设λ_1,λ_2是n阶方阵A的特征值，ξ_1,ξ_2是A的分别属于λ_1,λ_2的特征向量，下列结论正确的是（　　）.

A 如果$\lambda_1=\lambda_2$，则ξ_1,ξ_2的对应分量成比例；

B 如果$\lambda_1\neq\lambda_2$，且$\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$也是$A$的特征值，则对应的特征向量是$\xi_1+\xi_2$；

C 如果$\lambda_1\neq\lambda_2$，则$\xi_1+\xi_2$不可能是特征向量；

D 如果$\lambda_1=0$，则$\xi_1=0$.

分析 ξ_1,ξ_2的对应分量成比例说明ξ_1,ξ_2线性相关，$\lambda_1=\lambda_2$说明是A的二重特征值，而一个特征值的两个特征向量是可能线性无关的，所以选项A是错误的.

版块二　特征值问题

如果 $\xi_1+\xi_2$ 是 λ_3 的特征向量,则有 $A(\xi_1+\xi_2)=\lambda_3(\xi_1+\xi_2)$,而 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1, A\xi_2=\lambda_2\xi_2$,

所以 $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\lambda_3(\xi_1+\xi_2)$,即 $(\lambda_3-\lambda_1)\xi_1+(\lambda_3-\lambda_2)\xi_2=0$. 又因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,

ξ_1,ξ_2 是 A 的分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量,所以 ξ_1,ξ_2 一定线性无关,从而系数

$\lambda_3-\lambda_1=\lambda_3-\lambda_2=0$,得到 λ_1 和 λ_2 必相等,矛盾,说明选项B错误;

选项D显然不成立,所以正确答案为C.

版块三　矩阵的对角化

一、矩阵的对角化

1、矩阵相似的概念

设 A,B 都是 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则称 B 是 A 的相似矩阵，也称方阵 A 和 B 相似. 并称由 A 到 B 的变换 $B=P^{-1}AP$ 为相似变换，称 P 为相似变换矩阵.

2、矩阵相似的性质

(1) 如果方阵 A 与 B 相似，则 $|A|=|B|, r(A)=r(B)$；

(2) 如果方阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征值；

(3) 如果方阵 A 与 B 相似，且 A 与 B 都可逆，则 A 与 B 相似；

(4) 如果方阵 A 与 B 相似，则 A^k 与 B^k 也相似，其中 k 为正整数；

(5) 如果方阵 A 与 B 相似，则 kA 与 kB 相似、A^m 与 B^m 相似，进一步，有 A 的矩阵多项式 $f(A)=\sum_{i=0}^{m}a_iA^i$ 与 B 的矩阵多项式 $f(B)=\sum_{i=0}^{m}a_iB^i$ 相似.

版块三　矩阵的对角化

(6) 零矩阵、单位矩阵，数量矩阵都只和它自己相似.

注

性质(1)-(5)都只是矩阵相似的必要条件，每个命题反过来都不一定成立.

3、矩阵相似的判定

通常有三种方法：

方法一　利用矩阵相似的定义：　A 与 B 相似，即找到一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$；

方法二　利用相似的传递性：即，如果存在矩阵 C，使 A 与 C 相似，C 与 B 相似，

则 A 与 B 相似；

方法三　利用相似的必要条件：即 A 与 B 不满足相似的必要条件，则 A 与 B 不相似.

(这些必要条件是指上面归纳的矩阵相似的性质(1)-(5)).

版块三　矩阵的对角化

4、矩阵的(相似)对角化

设 A 是 n 阶方阵, 如果存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP=\Lambda$, 则称 A 可对角化.

5、矩阵对角化的判定

常用的方法有

方法一　方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量;

方法二　方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对 A 的任意特征值 λ, 属于 λ 的线性无关的特征向量的个数等于 λ 的重数, 即 $n-r(A-\lambda E)=\lambda$ 的重数;

方法三　方阵 A 可对角化的充分条件为 A 有 n 个互不相同的特征值. 即, 方阵 A 有 n 个互不相同的特征值 $\Rightarrow$ A 可对角化, 但反过来不一定成立.

版块三　矩阵的对角化

6、矩阵对角化步骤

(1) 求出 A 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$

（显然，$k_1+k_2+\cdots+k_s=n$）；

(2) 对每个不同的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$，求解齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系，

若基础解系正好由 k_i 个线性无关的解向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$ 构成，则 A 可对角化；

(3) 令 $P=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1k_1},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2k_2},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sk_s})$，则

$$P^T AP=\Lambda=diag(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{k_1\text{个}},\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{k_2\text{个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{k_s\text{个}}).$$

注

对于矩阵 Λ 的主对角元素为 A 的全部特征值，它的排列顺序与 P 中列向量的排列顺序对应，而对于同一个特征值在 P 中所对应的不同列向量的排列顺序则不作要求.

版块三　矩阵的对角化

例 16 如果四阶方阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,

则行列式 $\left|B^{-1}-E\right|=$ (　　).

分析　A 与 B 相似 $\Rightarrow A,B$ 具有相同的特征值, 即 B 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$.

由特征值的性质知, B^{-1} 的特征值为 $2,3,4,5$; 又由矩阵与矩阵多项式的

特征值的关系知, $B^{-1}-E$ 的特征值为 2-1,3-1,4-1,5-1, 即 $1,2,3,4$;

说明 $B^{-1}-E$ 一定可对角化于对角矩阵 $\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}$,

又因为相似矩阵的行列式相等, 所以 $\left|B^{-1}-E\right|=1\times2\times3\times4=24.$

版块三　矩阵的对角化

(课外题)例 17 如果矩阵 A 与 B 相似,且2是 B 的一个特征值,则矩阵 $3A^2-4A+E$

必有一个特征值为(　　).

正确答案: 5 .

例 18 矩阵 A 与 B 相似的充分条件为(　　).

A　A 与 B 有相同的特征值;　　B　A 与 B 有相同的特征向量;

C　A^k 与 B^k 相似;　　D　A,B 都和同一个矩阵 C 相似.

分析　由矩阵相似的性质知选项A、B、C都只是 A 与 B 相似的必要条件,也就是说 A 与 B

相似能得到选项A、B、C,反过来是不一定成立的.能得到选项A、B、C,反过来是不一定成立的,

但是两个矩阵相似是有传递性的,所以 A 与 C 相似, B 与 C 相似,必有 A 与 B 相似.

版块三　矩阵的对角化

例 19 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 与(　　　)相似.

A $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;　　B $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;　　C $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;　　D $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

分析　$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$是上三角矩阵,容易看出它的特征值为1和2,而 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 为对角矩阵,也易特征值是-1和-2,两矩阵的特征值不同,矩阵相似的必要条件不满足所以这两个矩阵不相似;

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$,而 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式分别为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$,

说明方阵的行列式不相等,矩阵相似的必要条件不满足,所以 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

都不相似,选项B,C都不满足;

版块三　矩阵的对角化

正确答案为D，事实上，D选项中矩阵的特征值为1和2，并且我们也可以看出$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$实际上都是可以对角化，由传递性知这两个矩阵相似.

注

例19是用到矩阵相似的方法二，先判断是否满足相似的必要条件，用排除法一一排除不满足的选项.

(课外题)例 20 设 n 阶方阵 A 相似于 Λ ，则(　　).

A　$r(A)=n$ ；

B　A 有不同的特征值；

C　A 是实对称矩阵；

D　A 有 n 个线性无关的特征向量.

正确答案：D.

版块三　矩阵的对角化

二、实对称矩阵的对角化

1、正交矩阵的概念

定义　如果 n 阶方阵A 满足 $A^T A = E$ （即 $A^{-1} = A^T$ ），称 A 为正交矩阵.

2、正交矩阵的性质

定理1　设 A,B 都是n 阶正交方阵，则

（1）　$|A| = \pm 1$ ；

（2）　A的列（行）向量组是两两正交的单位向量；

（3）　A^T(即 A^{-1} ）也是正交矩阵；

（4）　AB 也是正交矩阵.

特别地，由于这个定理1的第（2）个结论的逆命题也是成立的，所以有定理2.

定理2　n 阶方阵 A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ 方阵 A 的列（行）向量组是单位正交向量组.

版块三　矩阵的对角化

3、实对称矩阵的特征值和特征向量的性质

设 A 是实对称矩阵，则

(1)　A 的特征值为实数，A 的特征向量是实向量；

(2)　A 的不同特征值所对应的特征向量正交；

(3)　A 的 k 重特征值所对应的线性无关的特征向量恰有 k 个；

(4)　A 相似于对角矩阵（即可对角化），且存在正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP = P^{T}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

其中 $\lambda_2,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值；

(5)　实对称矩阵 A 与 B 相似的充要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

版块三　矩阵的对角化

复习矩阵对角化的步骤:

（1） 求出 A 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$

（显然, $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$ ）;

（2） 对每一个不同的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$, 求解齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系,

若基础解系正好由 k_i 个线性无关的解向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$ 构成, 则 A 可对角化;

（3） 令 $P=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1k_1},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2k_2},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sk_s})$，则

$$P^T AP=\Lambda=diag(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{k_1\text{个}},\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{k_2\text{个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{k_s\text{个}}).$$

版块三　矩阵的对角化

4、 n 阶实对称矩阵 A 正交相似对角化的一般步骤：

（1） 求出 A 的全部互不相等的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，其代数重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$

（显然，$k_1+k_2+\cdots+k_s=n$ ）；

（2） 对每一个不同的特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$，求解齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$

的基础解系，得到 A 的 k_i 个线性无关的特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$. 用施密特正交化方法

将这些特征向量正交化，然后再单位化，得到 A 的 k_i个对应于 λ_i 的单位正交特征向量

$\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ik_i}(i=1,2,\cdots,s)$，由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交，从而

可得 $\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1k_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2k_2},\cdots,\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{sk_s}$ 是 A 的 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$ 个

单位正交特征向量；

版块三　矩阵的对角化

（3）构造n 阶正交矩阵 $P=(\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1k_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2k_2},\cdots,\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{sk_s})$，

则有$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$. 这里，P 中列向量的顺序与对角矩阵Λ 的对角线上的

特征值的顺序应该相对应.

注

（1）对实对称矩阵进行正交相似对角化的步骤与方阵的对角化的步骤是类似的，区别在第2步.

（2）将实对称矩阵对角化时，对每个k_i 重特征值 λ_i，求出 k_i 个线性无关的特征向量 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$ 后，若不是正交向量组，则需要用施密特正交化方法将其正交化，然后再单位化，得到 k_i 个两两正交的单位特征向量 $\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ik_i}$，从而得到矩阵 A的 n 个两两正交的单位特征向量，以这些特征向量作为列向量构成正交矩阵 P，则可使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

版块三　矩阵的对角化

例 21　设实对称矩阵A满足$A^3+A^2+A=3E$，则 $A=$(　　　).

分析　设A的特征值为λ，则由$A^3+A^2+A=3E$得$\lambda^3+\lambda^2+\lambda=3$，即$\lambda^3+\lambda^2+\lambda-3=0$，

因式分解后得$(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+3)=0$，又因为$\lambda$必须是实数，所以$\lambda^2+2\lambda+3>0$，

说明A只有一个特征值1，即A的特征值是重数．因为实对称矩阵一定可以对角化，

所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda=E$，于是$PP^{-1}APP^{-1}=PEP^{-1}$，即$A=E$．

版块三　矩阵的对角化

例 22 设A是三阶实对称矩阵，秩$r(A)=2$，如果$A^2=A$，则A的特征值是（　　）.

分析 因为A是三阶实对称矩阵，所以A一定可以对角化，即A与Λ相似，

又因为秩$r(A)=2$，所以对角矩阵Λ的秩也等于2，说明Λ的对角线上

正好有一个零元素.

另一方面，根据矩阵与矩阵多项式的特征值的关系，设A的特征值λ，

由已知条件$A^2=A$可得$\lambda^2-\lambda=0$，说明A的特征值为0和1. 而A与Λ相似时，Λ的

对角线上的元素就是A的特征值，所以，三阶方阵A的特征值只能是$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0.$

版块三　矩阵的对角化

(课外题)例 23 设A是四阶实对称矩阵,秩$r(A)=3$,如果$A^2+A=0$,则 A 相似于(　　).

A $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$;　　B $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$;

C $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$;　　D $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

正确答案: D.

版块四　线性代数内容串讲

一、“变”与“不变”的问题

1、行列式进行恒等变形，值不变；

2、向量组进行初等行变换，向量组的秩及线性表示关系不变；

3、二次型化为标准形，正、负定性不变.

二、牢记矩阵初等变换的核心地位

1、解决矩阵自身的问题：

第二章求矩阵的秩、矩阵的逆矩阵、解矩阵方程；第五章求方阵的特征值和特征向量等；

2、解决其它相关问题：

第三章求向量组的秩、第四章求线性方程组的通解、第六章化二次型为标准形等.

版块四　线性代数内容串讲

三、从“量变”到“质变”的问题

1、n 阶方阵 A 的秩 $r(A)$ 与 $|A|$ ：

当 $r(A)<n$ 即 $|A|=0$ 时，A 不可逆；

当 $r(A)=n$ 即 $|A|\neq 0$ 时，A 不可逆；

2、含 n 个未知数的线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵的秩 $r(A,b)$ 与系数矩阵 $r(A)$ ：

当 $r(A,b)=r(A)=n$ 时，方程组有唯一解；

当 $r(A,b)=r(A)<n$ 时，方程组无穷多解；

当 $r(A,b)\neq r(A)$ 时，方程组无解.

版块四　线性代数内容串讲

3、n 个 m 维的向量构成的向量组 A 的秩 $r(A)$ 与线性相关性:

当 $r(A)<n$ 时, 向量组 A 线性相关;

当 $r(A)=n$ 时, 向量组 A 线性无关.

4、n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 含 n 个线性无关的特征向量.

也就是说, n 阶方阵 A 所含线性无关的特征向量的个数小于 n 时, 不能与一个对角矩阵 A 相似.

版块四　线性代数内容串讲

四、“特殊”与“一般”的关系

1、二阶、三阶行列式与 n 阶行列式；

2、数乘矩阵与矩阵的乘法运算；

3、向量空间的基与标准正交基；

4、齐次线性方程组与非齐次线性方程组；

5、特解与通解；

6、二次型与标准形；

7、矩阵、行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形.

温馨提示：

此习题为本章补充练习，针对《线性代数》慕课第五章矩阵的对角化所介绍内容设计，并附有答案和解析，建议大家学习完本章内容（最好学习完第五章复习长视频的版块二、三、四）后完成！建议时量：90 分钟.

一、填空与选择题：

1、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}$，则 A 的特征值为（　　）.

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&a&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$ 的三个特征值分别为 $-2,-2,4$，则 $a=$（　　）.

3、设 A 为 n 阶方阵，且 $Ax=0$ 有非零解，则 A 至少有一个特征值为（　　）.

4、设 3 是方阵 A 的一个特征值，则 $4A^2+A-3E$ 的一个特征值为（　　）；$(3A)^{-1}$ 的一个特征值为（　　）.

5、设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$，则下列矩阵与 A 不相似的是（　　）.

A $\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$　　B $\begin{pmatrix}1&7\\0&3\end{pmatrix}$　　C $\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$　　D $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

6、已知 $\alpha=(\frac{1}{k},1,-1,-2),\beta=(5,k,4,1)$，当 $k=$（　　）时，α,β 正交.

二、设 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,-2,1)$，求一个单位向量 X，使 X 与 α_1,α_2 都正交.

三、已知三阶方阵 A 的特征值分别为：$-1,1,2$. 设 $B=A^3-5A^2$，求 $|B|$ 和 $|A-5E|$.

四、利用施密特正交化方法将下列向量组单位正交化：

$\alpha_1=(3,0,4),\alpha_2=(-1,0,7),\alpha_3=(2,9,11)$.

五、判断下列矩阵是否为正交矩阵：

1、$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$；　　2、$\begin{pmatrix}1&-\frac12&\frac13\\-\frac12&1&\frac12\\\frac23&\frac12&-1\end{pmatrix}$.

六、求一个可逆矩阵 P，将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 对角化，并写出相应的对角矩阵 Λ.

七、设 $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

答案与解析：

一、填空与选择题：

1、-4,6.

解析：特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 5\\ 5 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-25$，特征方程为 $(1-\lambda)^2-25=0\Rightarrow 1-\lambda=\pm5,\quad \lambda_1=-4,\lambda_2=6$.

2、-5.

解析：特征值有重要性质：方阵 A 的特征值的和等于方阵 A 的主对角线上的元素之和，也叫做迹，记为 trA.

3、0.

解析：特征值有重要性质：方阵 A 的行列式等于方阵 A 的特征值之积.

$Ax=0$ 有非零解说明 $|A|=0$，从而 A 的特征值至少有一个为零.

4、36；$\dfrac{1}{9}$.

解析：（1）方阵 A 的特征值与方阵 A 的矩阵多项式 $f(A)=\sum^m a_iA^i$ 的特征值的关系：设 λ 为方阵 A 的特征值，则 $f(A)=\sum^m a_iA^i$ 的特征值为 $f(\lambda)=\sum^m a_i\lambda^i$. 从而，若 3 是方阵 A 的一个特征值，则 $4\cdot3^2+3-3$ 是矩阵多项式 $4A^2+A-3E$ 的特征值.

（2）$(3A)^{-1}=\dfrac{1}{3}A^{-1}$，若 3 是方阵 A 的一个特征值，则 $\dfrac{1}{3}$ 是 A^{-1}，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}$ 是 $\dfrac{1}{3}A^{-1}$ 的特征值.

5、C.

解析：两个矩阵的特征值相同是相似的必要条件. 显然，A、B、D 三个选项中方阵的特征值与 A 的特征值相同.

6、1 或 5.

二、$X=(\dfrac{\sqrt2}{2},0,-\dfrac{\sqrt2}{2})$ 或 $X=(-\dfrac{\sqrt2}{2},0,\dfrac{\sqrt2}{2})$.

解析：设 $X=(x_1,x_2,x_3)$，则由已知条件有 $\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2=1;\\ x_1+x_2+x_3=0;\\ x_1-2x_2+x_3=0.\end{cases}$ 解方程组得

$X=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $X=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

三、-288，-72.

解析：（1）由方阵的特征值与方阵的多项式的特征值的关系知，$-6,-4,-12$ 是 B 的特征值，

从而有 $|B|=-6\times(-4)\times(-12)=-288.$

（2）同理，由方阵的特征值与方阵的多项式的特征值的关系知 1，1，4 是 A^2 的特征值，得 $|A^2|=4$. 由 $B=A^3-5A^2$ 得 $B=A^2(A-5E)$，从而 $|B|=|A^2(A-5E)|=|A^2|\cdot|A-5E|$. 所以，$|A-5E|=-72.$

四、$\gamma_1=(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}),\gamma_2=(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}),\gamma_3=(0,1,0).$

解析：（1）正交化

令 $\beta_1=\alpha_1$,

则 $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-4,0,3)$；

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(0,9,0)$.

（2）单位化

$\gamma_1=(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}),\gamma_2=(-\frac{4}{5},0,\frac{3}{5}),\gamma_3=(0,1,0).$

五、1、是；2、不是.

解析：方阵为正交矩阵的充要条件为方阵的列（或行）向量组为两两正交的单位向量组.

六、此题的设计为巩固方阵对角化内容. 求一个可逆矩阵 P，使得方阵 A 可对角化，即 A 与对角矩阵 Λ 相似，也即满足 $P^{-1}AP=\Lambda$，其解答思路在新课视频中进行了详细介绍，应部分同学在交流区所提要求，特补充第六、七题，并给予详细解答过程，其中第七题是关于方阵对角化问题中的特殊情形：实对称矩阵的对角化.

1、求出 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 的特征值；

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 2 & 4-\lambda & -2\\ -3 & -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -1 & 1-\lambda\\ -2 & 4-\lambda & 2\\ 5-\lambda & -3 & -3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & -1 & 1-\lambda\\ 0 & 2-\lambda & 2(2-\lambda)\\ 0 & 2-\lambda & (2-\lambda)(\lambda-4)\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 1-\lambda\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$=-(2-\lambda)^2(\lambda-6)$，

求得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6.$

2、对不同特征值，分别代入齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$，求出基础解系.

（1）当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程组 $(A-2E)x=0$.

系数矩阵 $A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，其秩为 1，说明基础解系含 2 个解向量，并求解对应的同解方程组 $x_1+x_2-x_3=0$，得出其中一个基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

（2）当 $\lambda_3=6$ 时，解方程组 $(A-6E)x=0$. 系数矩阵

$$A-6E=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -5 & -1 & 1\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -6 & -4\\ 0 & -6 & -4\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -6 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

求解对应的同解方程组 $\begin{cases}x_1-\frac{1}{3}x_3=0;\\ x_2+\frac{2}{3}x_3=0.\end{cases}$，得出其中一个基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

3、以所求的基础解系中的向量作为列向量构造可逆矩阵 P，并对应得出对角矩阵 Λ.

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}，\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

七、此题与第六题方法类似，因为是实对称矩阵，所以可以求出特殊的可逆矩阵---正交矩阵，使得 A 可对角化.

1、求出 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$ 的特征值.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$$，求得 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

2、对不同特征值，分别代入齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$，求出基础解系.

（1）当 $\lambda_1=-2$ 时，解方程组 $(A+2E)x=0$.

$$A+2E=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&3&-2\\4&-2&0\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&3&-2\\0&4&-4\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&3&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，求得出其中一个基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

（2）当 $\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-4&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$，求得出其中一个基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

（3）当 $\lambda_3=4$ 时，解方程组 $(A-4E)x=0$.

$$A-4E=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&-2&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$，求得出其中

一个基础解系为$\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

4、将所得基础解系中的向量单位正交化.

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3分别来自于不同特征值，必两两正交，所以，只需单位化.

$$\gamma_1=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \gamma_2=\frac{\xi_2}{|\xi_2|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \gamma_3=\frac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

5、构造正交矩阵P，并对应得出对角矩阵Λ.

$$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

第五章　矩阵的对角化知识图解