第2章　导数与微分

单元自测题

一、导数的概念

1、函数在点 x_0 的导数的定义及三种等价定义式

2、导数的常用记法

3、导函数

4、可导与左右导数的关系

5、导数的几何意义

6、可导与连续的关系：可导 $\longrightarrow$ 连续

二、导数的求法

1、求导的四则运算

2、反函数求导法

3、复合函数求导法则——链锁规则

4、基本初等函数导数公式

5、隐函数求导法

6、对数求导法

7、参数方程求导法

三、高阶导数：

1、高阶导数的定义

2、会求函数的高阶导数

四、微分

1、微分的定义

2、微分的两种表示方法

3、可微与可导的关系：可微 $\Longleftrightarrow$ 可导

4、微分的四则运算

5、微分形式不变性

6、利用微分进行近似计算

一、判断题：

1、$f(x)$在x_0点可导,则$f(x)$在x_0点连续。(√)

2、$f(x)$在x_0点连续,则$f(x)$在x_0点可导。(×)

3、$f(x)$在x_0点可导,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在。(√)

4、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则$f(x)$在点$x_0$可导。(×)

5、$f(x)$在x_0点不可导,则$f(x)$在x_0点不连续。(×)

6、$f(x)$在x_0点不连续,则$f(x)$在x_0点不可导。(√)

分析

可导 $\Longrightarrow$ 连续：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在

二、选择题:

1、设 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+2h)}{h}=-3$,则（ C ）

(A) $f'(x_0)=2$; (B) $f'(x_0)=-3$;

(C) $f'(x_0)=\dfrac{3}{2}$; (D) $f'(x_0)$ 存在与否无法确定.

分析 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}\cdot(-2)$$

$$=-2f'(x_0)=-3,$$

$\Rightarrow$ $f'(x_0)=\dfrac{3}{2}.$

2、设 $f(0)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=2$ ，则（ A ）

(A) $f'(0)=1$; (B) $f'(0)=2$;

(C) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$; (D) $f'(0)$ 存在与否无法确定.

分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}\cdot 2=2f'(0)=2.$$

作业,第70页,习题2.1(A)

1(4) 设 $f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

由(4)知, 当 $f(0)=0$时, $\boxed{f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.}$

3、设函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin x, & x<0 \\ \ln(b+x), & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则（ B ）

(A) $a=0, b=1$;　　(B) $a=1, b=1$;

(C) $a=0, b=e$;　　(D) $a=1, b=e$.

分析　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导知, $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,

所以, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\ln b.$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a\sin x=0,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(b+x)=\ln b.$

所以, $\ln b=0$, 解得 $b=1$.

3、设函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin x, & x<0 \\ \ln(b+x), & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，则（ B ）

(A) $a=0, b=1$;　　(B) $a=1, b=1$;

(C) $a=0, b=e$;　　(D) $a=1, b=e$.

分析　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导知，$f'_-(0)=f'_+(0)$，

而 $$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\sin x-0}{x}=a,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=1.$$

所以，$a=1$.

4、设 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $\varphi(0)=0$, 若 $f(x)=|x|\varphi(x)$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处（ D ）

(A) 不连续;　　(B) 连续但不可导;

(C) 可导, 且 $f'(0)=\varphi'(0)$;　(D) 可导, 且 $f'(0)=\varphi(0)$.

分析

$$f(x)=|x|\varphi(x)=\begin{cases} x\varphi(x), & x\geq 0, \\ -x\varphi(x), & x<0, \end{cases}$$

由 $|x|$ 与 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 连续知, $f(x)$ 在 $x=0$ 连续;

4、设 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $\varphi(0)=0$, 若 $f(x)=|x|\varphi(x)$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处（ D ）

(A) 不连续;　　(B) 连续但不可导;

(C) 可导, 且 $f'(0)=\varphi'(0)$; (D) 可导, 且 $f'(0)=\varphi(0)$.

分析

$$f(x)=|x|\varphi(x)=\begin{cases} x\varphi(x), & x\geqslant 0, \\ -x\varphi(x), & x<0, \end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\varphi(x)}{x}=-\varphi(0)=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\varphi(x)}{x}=\varphi(0)=0.$$

所以 $f'(0)=\varphi(0)=0.$

三、计算下列各题：

1、设 $y = x\arcsin\frac{x}{2} + \tan^3(2x+1)$，求 y'.

解 $y' = (x\arcsin\frac{x}{2})' + [\tan^3(2x+1)]'$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \cdot (\frac{x}{2})' + 3\tan^2(2x+1) \cdot [\tan(2x+1)]'$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \cdot \frac{1}{2} + 3\tan^2(2x+1) \cdot \sec^2(2x+1)(2x+1)'$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + 6\tan^2(2x+1) \cdot \sec^2(2x+1).$$

2、设 $y = f^2(x^2)$ 其中函数 $f(x)$ 可导, 求 y'.

解

$$y' = 2f(x^2)[f(x^2)]'$$

$$= 2f(x^2)\cdot f'(x^2)\cdot(x^2)'$$

$$= 4xf(x^2)f'(x^2).$$

3、设 $y=(1+x^2)^x$，求 y'.

方法一　两边同时取对数：

$$\ln y = x\ln(1+x^2),$$

两边同时对 x 求导：

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln(1+x^2) + x\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x,$$

解得 $y' = (1+x^2)^x\left[\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right].$

3、设 $y=(1+x^2)^x$,求 y'.

方法二

$$y=e^{x\ln(1+x^2)},$$

所以,

$$y'=[e^{x\ln(1+x^2)}]'=e^{x\ln(1+x^2)}\cdot[x\ln(1+x^2)]'$$

$$=(1+x^2)^x\left[\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}\right].$$

4、设 $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}$，求 y'.

解 两边同时取对数

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x-5)-\frac{1}{6}\ln(x^2+2)$$

两边同时对 x 求导：

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x$$

$$\Rightarrow y'=\sqrt{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}}\left[\frac{1}{2(x-5)}-\frac{x}{3(x^2+2)}\right].$$

5、设 $y=x^2\ln x+\sin^2 2x$，求 y''.

解 $y'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'+2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'$

$=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}+2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2$

$=2x\ln x+x+2\sin 4x$

$\Rightarrow$ $y''=(y')'=(2x\ln x+x+2\sin 4x)'$

$=2\ln x+2x\cdot\dfrac{1}{x}+1+2\cos 4x\cdot 4$

$=2\ln x+3+8\cos 4x.$

6、设 $y=y(x)$是由方程 $e^y=y+x$所确定的隐函数, (1)求 $\dfrac{dy}{dx}$;(2)求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

解　方程两边同时对 x求导:

$$\frac{de^y}{dx}=\frac{d(y+x)}{dx}, \longrightarrow e^y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}+1,$$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{e^y-1}.$

6、设 $y=y(x)$是由方程 $e^y=y+x$所确定的隐函数, (1)求 $\dfrac{dy}{dx}$;(2)求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

解

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^y-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{(e^y-1)^2}\cdot e^y\cdot y'=-\frac{e^y}{(e^y-1)^3}.$$

7、设 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = te^t \end{cases}$，(1)求 $\dfrac{dy}{dx}$；(2) 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{(te^t)'}{(t^2+2t)'} = \frac{e^t + te^t}{2t+2} = \frac{e^t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{e^t}{2}\cdot\frac{1}{2t+2} = \frac{e^t}{4(t+1)}.$$

8、设 $y = \ln\sqrt{1+x^2}$，求 dy.

解　$y = \ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$,

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2},$$

$$\Rightarrow dy = \frac{x}{1+x^2}dx.$$

四、应用题

1、已知曲线 $y=f(x)$ 过 $(1,0)$ 点，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-2x)}{x}=1$，求曲线在点 $(1,0)$ 处的切线方程.

解 由曲线 $y=f(x)$ 过 $(1,0)$ 点知，$f(1)=0$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+(-2x))-f(1)}{-2x}\cdot(-2)$

$$=-2f'(1)=1,$$

所以 $k_{切}=f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

从而曲线 $y=f(x)$ 过点 $(1,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-1)\quad 即\quad x+2y-1=0.$$

2、设水管壁的正截面是一个圆环,其外直径为 $20cm$ 壁厚为 $0.4cm$ 试求此圆环面积的近似值.

解　设圆的面积为 $S=\pi R^2$,则

因为

$$\Delta S \approx dS = (\pi R^2)' \cdot \Delta R\Big|_{\substack{R=10\\ \Delta R=-0.4}} = (2\pi R\Delta R)\Big|_{\substack{R=10\\ \Delta R=-0.4}}$$

$$= -8\pi \approx -25.12cm^2.$$

所以,圆环的面积约为 $25.12cm^2$.

五、设 $y=f(e^x)$, 且函数 $f(x)$ 具有二阶导数,
证明：$y''-y'=e^{2x}f''(e^x)$.

证明 因为

$$y'=[f(e^x)]'=f'(e^x)(e^x)'=f'(e^x)e^x,$$

$$y''=[f'(e^x)e^x]'=[f'(e^x)]'e^x+f'(e^x)(e^x)'$$

$$=f''(e^x)e^x\cdot e^x+f'(e^x)e^x.$$

所以,

$$y''-y'=f''(e^x)e^{2x}+f'(e^x)e^x-f'(e^x)e^x$$

$$=e^{2x}f''(e^x).$$