《离散数学》期末考试题(E)参考答案

一、1. $\in$，$\in$，$\subseteq$.

2. $\{(1,5), (3, 2), (2, 5)\}$, $\{(4, 2), (3, 2), (1, 4)\}$, $\{(1, 2), (2, 2)\}$.

3. 12, 144.

4. $(P(X),\cup,\cap,\bar{\ },\varnothing, X)$, 2^n.

5. 3, 9.

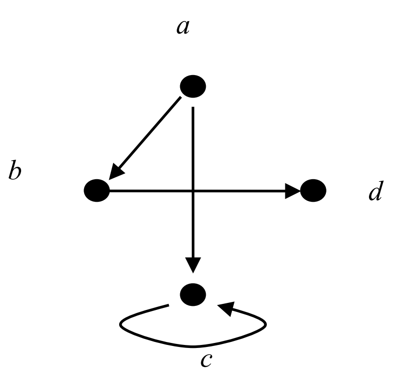
二、1(D); 2(B); 3(A); 4(C); 5(C).

三、1(×); 2(√); 3(√); 4(√); 5(√).

四、**证** 对于任意 $x_1, x_2 \in A$，若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$，于是 $(f \circ g)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. 由于 $f \circ g$ 是单射，所以 $x_1 = x_2$，因此 f 是单射.

例如，$A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $f = \{(a, 1), (b, 2)\}$, $g = \{(a, \alpha), (b, \beta), (c, \beta)\}$, 这时 $f \circ g = \{(1,\alpha),(2,\beta)\}$，它是 A 到 C 的单射，但 g 不是单射.

五、**解** R 的关系图如下：



$r(R) = \{(a,b),(b,d),(c,c),(a,c),\underline{(a,a),(b,b),(d,d)}\}$,

$s(R) = \{(a,b),(b,d),(c,c),(a,c),\underline{(b,a),(d,b),(c,a)}\}$.

$t(R) = \{(a,b),(b,d),(c,c),(a,c),\underline{(a,d)}\}$.

六、**解** $\neg p \vee (\neg q \vee r), q \to (r \to s), p \Rightarrow q \to s$

(1) q	P(附加)
(2) $q \to (r \to s)$	P
(3) $r \to s$	T(1)(2)I
(4) p	P

(5) $\neg p \vee (\neg q \vee r)$ P

(6) $\neg q \vee r$ T(4)(5)I

(7) r T(1)(6)I

(8) s T(3)(7)I

(9) $q \rightarrow s$ CP

七、解 $(\neg \exists x A(x) \vee \forall y B(y)) \wedge (A(x) \rightarrow \forall z C(z))$

$= (\neg \exists x A(x) \vee \forall y B(y)) \wedge (\neg A(x) \vee \forall z C(z))$

$= (\forall x \neg A(x) \vee \forall y B(y)) \wedge (\neg A(x) \vee \forall z C(z))$

$= \forall x \forall y (\neg A(x) \vee B(y)) \wedge \forall z (\neg A(x) \vee C(z))$

$= \forall x \forall y (\neg A(x) \vee B(y)) \wedge \forall z (\neg A(t) \vee C(z))$

$= \forall x (\forall y (\neg A(x) \vee B(y)) \wedge \forall z (\neg A(t) \vee C(z)))$

$= \forall x \forall y ((\neg A(x) \vee B(y)) \wedge \forall z (\neg A(t) \vee C(z)))$

$= \forall x \forall y \forall z ((\neg A(x) \vee B(y)) \wedge (\neg A(t) \vee C(z)))$.

八、**证** 用 6 个节点分别表示这 6 个人，可得 6 阶完全无向图 K_6. 若两个人认识，则在相应的两个节点所在的边上涂上红色，若两个人不认识，则在相应的两个节点所在的边上涂上蓝色.

对于任意的 K_6 的节点 v，因为 $\deg(v) = 5$，与 v 邻接的边有 5 条，当用红、蓝颜色去涂时，至少 3 条边涂的是同一种颜色，不妨设 vv_1, vv_2, vv_3 是红色. 若 3 条边 v_1v_2，v_2v_3，v_1v_3 是红色，则存在红色 K_3，这意味着有 3 个人相互认识; 若 v_1v_2， v_2v_3， v_1v_3 都是蓝色，则存在蓝色 K_3，这意味着有 3 个人相互不认识. 结论成立.