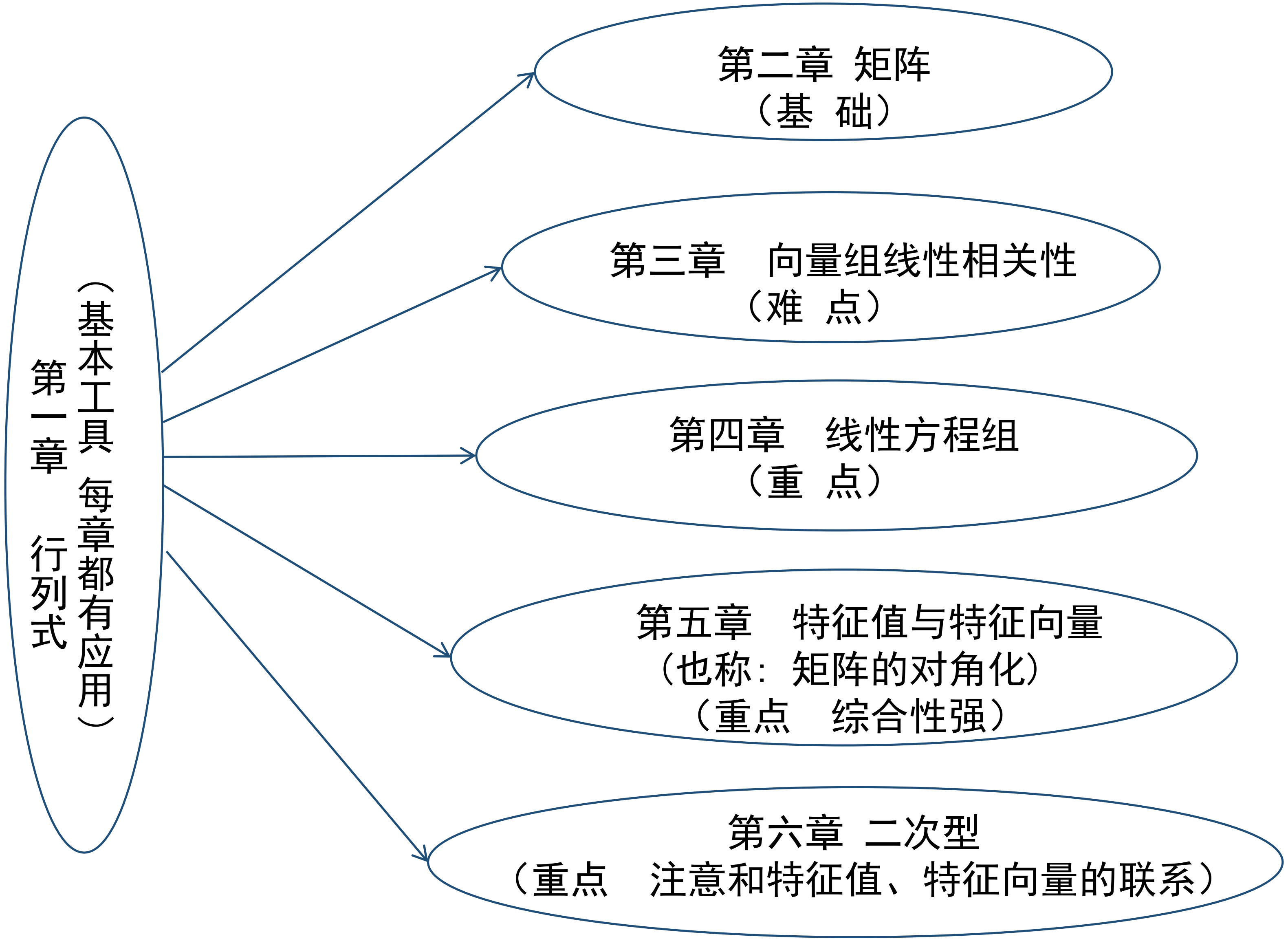
线性代数章节内容分布如下：



第一章 行列式

第一讲 全排列与逆序数

定义1

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 按某种次序排成一列, 称为这 n 个元素的的一个全排列(简称排列), 记作 $i_1,i_2,\cdots,i_n$, 这样的排列总共有 n! 个.

定义2

（1） 在排列中，如果较大的数排在较小的数前，则称这两个数构成了一个逆序.

（2） 一个排列中，所有逆序的个数和称为该排列的逆序数，记作 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ ，

其中逆序数为偶（奇）数的排列为偶（奇）排列.

（3） 排列$1,2,\cdots,n$ 是从小到大依次排列的，我们规定这个顺序为标准次序，

并称这个排列为自然排列. 由于自然排列中任何两个数都不构成逆序，

$\tau(1,2,\cdots,n)=0$，所以自然排列为偶排列.

逆序数的运算

例1 计算排列32514的逆序数

解:

3 2 5 1 4

$$\tau(32514) = 2 + 1 + 2 + 0 = 5$$

例2 计算排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数.

解: $\tau(n(n-1)\cdots321) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k,4k+1$ 时, 为偶排列;

当 $n=4k+2,4k+3$ 时, 为奇排列.

定义

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不变，得到一个新的排列，

这种变换称为对换.

将相邻两个元素对换，称为相邻对换.

定理1

排列中任意两个元素对换，改变排列的奇偶性.

证明:（1）设原排列$a_1a_2\cdots a_m ab b_1b_2\cdots b_n$

$$\xrightarrow{\text{对换}a\text{和}b} \text{新排列} a_1a_2\cdots a_m ba b_1b_2\cdots b_n$$

当$a>b$时，$\tau(a_1a_2\cdots a_m ab b_1b_2\cdots b_n)=\tau(a_1a_2\cdots a_m ba b_1b_2\cdots b_n)+1$

当$a<b$时，$\tau(a_1a_2\cdots a_m ab b_1b_2\cdots b_n)=\tau(a_1a_2\cdots a_m ab b_1b_2\cdots b_n)-1$

说明新排列与原排列的奇偶性不同, 即相邻对换改变排列的奇偶性.

(2)设原排列$a_1a_2\cdots a_m a b_1b_2\cdots b_n b c_1c_2\cdots c_p$

$\xrightarrow{\text{对换}a\text{和}b}$ 新排列$a_1a_2\cdots a_m b b_1b_2\cdots b_n a c_1c_2\cdots c_p$

$\Leftrightarrow$ 原排列$a_1a_2\cdots a_m a b_1b_2\cdots b_n b c_1c_2\cdots c_p$

$\xrightarrow{a\text{依次和}b_1,b_2,\cdots,b_n\text{作相邻对换(共进行n次)}}$中间排列$a_1a_2\cdots a_m b_1b_2\cdots b_n a b c_1c_2\cdots c_p$

$\xrightarrow{b\text{依次和}a,b_n,\cdots,b_2,b_1\text{作相邻对换(共进行n+1次)}}$ 新排列$a_1a_2\cdots a_m b b_1b_2\cdots b_n a c_1c_2\cdots c_p$

总共进行了$2n+1$次相邻对换，由情形（1）可得新排列与原排列的奇偶性也是不同的.

综上知，对换改变排列的奇偶性，从而定理的结论成立.

推论

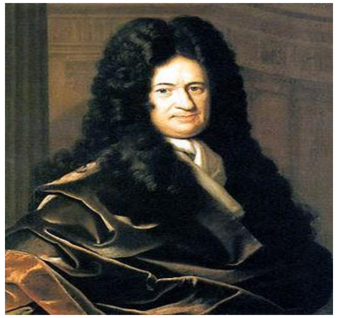
奇排列对换成自然排列的对换次数为奇数；

偶排列对换成自然排列的对换次数为偶数.

第二讲 二阶行列式和三阶行列式

行列式最先由日本数学家关孝和和德国数学家莱布尼茨各自以不同的方式独立提出，它的起源与线性方程组的求解息息相关.

关孝和



莱布尼兹

例 用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1, \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

解 当未知数 x_1, x_2 的系数满足 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,

方程组(1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}. \qquad (2)$$

定义

把四个系数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 按它们在方程组(1)中的位置

排成二行二列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$, （3）

定义算式 $\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ 为数表(3)所确定的**二阶行列式**,

通常记作 $\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. （4）

所以，有 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$ （5）

注

1. 数$a_{ij}\,(i=1,2;\ j=1,2)$称为行列式中的元素，其中 a_{ij} 的

第一个下标 i 叫做行标，表示该元素位于第 i 行；第二个下标 j 叫做列标，

表示该元素位于第 j列.

例如，a_{21} 表示行列式中位于第2行第1列的元素.

2. 位于第 i 行第 j 列的元素也称为行列式的(i,j) 元.

3. 在 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中，连接 a_{11}, a_{22} 的直线叫做主对角线，连接 a_{12}, a_{21} 的直线叫做副对角线.

从而，二阶行列式等于主对角线上的元素之积减去副对角线上之积.

定义

设9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (6)$$

算式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ （7）

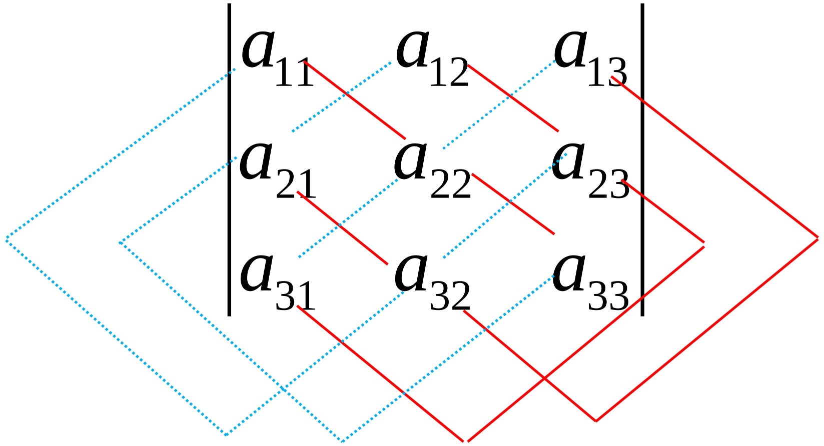
称为由数表（6）确定的三阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

从而有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (9)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (9)$$



图中三条实线看成平行于主对角线的连线, 三条蓝线看成平行于副对角线的连线. 红线上三元素的乘积都给予正号, 蓝线上三元素的乘积都给予负号.

这样就得到了（9）式中的展开式.

第三讲　n阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

~~（式1）~~ ~~（式3）~~

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boxed{\begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}}$$

~~（式2）~~ ~~（式4）~~

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \boxed{a_{13}a_{21}a_{32}} \boxed{-a_{13}a_{22}a_{31}} \boxed{-a_{12}a_{21}a_{33}} \boxed{-a_{11}a_{23}a_{32}}.$$

~~（式5）~~

1、展开式是6项的代数和，每一项都是3个元素的乘积.

2、每一项中3个元素都位于不同的行和不同的列. 并且3个元素的行标顺序都为1, 2, 3, 而列标排成了$p_1 p_2 p_3$的形式.

$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$　　$\tau(p_1 p_2 p_3)$

偶

$$\boxed{\tau(123)=0,\ \tau(231)=2,\ \ \tau(312)=2}$$

奇

$$\boxed{\tau(321)=3,\tau(213)=1,\tau(132)=1}$$ ~~（式8）~~

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$$ ~~（式9）~~

3、当各项“行标固定，变列标”时,各项的正、负号与列标排列的逆序数的奇偶性有关.

$$(-1)^{\tau(P_1P_2P_3)}\ a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$ ~~（式10）~~

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$ ~~（式11）~~

这里,$\sum$ 表示对1, 2, 3这3个数的所有全排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

定义

设有n^2个数，排成n行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

作出表中位于不同行不同列的n个数的乘积$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，

并加上符号$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$，得到形如$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$　(1)　的项.

由于$p_1p_2\cdots p_n$为自然数$1,2,\cdots,n$的一个排列，这样排列总共有$n!$个，

因而形如(1)式的项总共有$n!$项，所有这$n!$项的代数和

$$\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n阶行列式.

n阶行列式通常记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

从而有下述等式成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中$\sum$是对 $1,2,\cdots,n$ 这 n个数的所有 $p_1p_2\cdots p_n$求和.

n 阶行列式的直观分解：

1. 给一个数表；

2. 给一个定义（这个定义特指（1）$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ ）；

3. 求和.

注

1. n 阶行列式通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示, 也记为 $\det(a_{ij})$, 其中 a_{ij} 特指行列式中位于第 i 行第 j 列的元素,

2. 当$n=1$时, 一阶行列式$|a|=a$, 注意与绝对值的记号加以区别, 例如:$|-1|=-1$ 与$|-1|=1$是不一样的, 前者表示一阶行列式, 后者表示绝对值.

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{\boxed{1p_1}}a_{\boxed{2p_2}}\cdots a_{\boxed{np_n}}$$

1. $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$是乘积因子；

2. $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$中各元素的双下标满足“行标固定，列标变”；

3. 每一项的符号由列标排列的逆序数的奇偶性决定.

思考：

$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 是四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 的项吗？

1234偶排列 $\longrightarrow$ 1324奇排列

第四讲 行列式的等价定义

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}.$$

其中行标 $12\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列.

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{\boxed{ip_i}}\cdots a_{\boxed{jp_j}}\cdots a_{np_n}\to a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{\boxed{jp_j}}\cdots a_{\boxed{ip_i}}\cdots a_{np_n},$$

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{\boxed{ip_i}}\cdots a_{\boxed{jp_j}}\cdots a_{np_n}=a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{\boxed{jp_j}}\cdots a_{\boxed{ip_i}}\cdots a_{np_n}.$$

原行标排列 $12\cdots i\cdots j\cdots n$ $\longrightarrow$ 新行标排列 $12\cdots j\cdots i\cdots n$;

原列标排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n \longrightarrow$ 新列标排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$.

设新行标排列的逆序数为 τ_1，则 τ_1 为奇数;

设新列标排列的逆序数为 τ_2 ，则 τ_2 与 $\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$ 的奇偶性不同,

于是有关系式

$$(-1)^{\tau_2} = -(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}$$

$$\Rightarrow (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} = -(-1)^{\tau_2} = (-1)^{\tau_1+\tau_2}.$$

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

$$=(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

定理1

n 阶行列式也可定义为

$$D=\boxed{\sum}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

注

定理1中 $\sum$ 是指“列标固定, 行标变”时, 对行标的所有全排列求和.

定理2

n 阶行列式也可定义为

$$D=\boxed{\sum}(-1)^{\tau_1\boxed{(p_1p_2\cdots p_n)}+\tau_2\boxed{(q_1q_2\cdots q_n)}}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

注

定理2中 $\sum$ 是指“行标变，列标也变”时，对应行标排列为 $p_1p_2\cdots p_n$ 对应列标排列为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的所有全排列求和.

1. 下三角行列式

是指行列式中主对角线以上的元素全为零. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 上三角行列式

是指行列式中主对角线以下的元素全为零. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 对角行列式

是指行列式中主对角线以外的元素全为零. 它是特殊的下三角行列式, 也是特殊的上三角行列式. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. 副对角行列式

是指行列式中副对角线以外的元素全为零. 例如:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

例1　　计算下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

分析　　共有 $n!$ 项相加，其中第一种定义中一般项为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,

所以，行列式 D 中不明显为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角行列式等于主对角行列式上元素的乘积.

注

(1) 上三角行列式等于主对角行列式上元素的乘积, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 对角行列式等于主对角行列式上元素的乘积, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例2　计算副对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

分析　行列式中不明显为 0 的项只有 $(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$,

$$\tau(n(n-1)\cdots 1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

副上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

副下三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

第五讲 行列式的性质(1)

定义

将 n 阶行列式 D 中的各行换成了相应的列,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{将}D\text{中行与列互换}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们称对行列式 D 进行了一次转置, 所得的新的行列式称为 D 的转置行列式,记作 D^T .

性质1 $D = D^T$.

证明思路

记$D = \det(a_{ij})$，由转置的定义知 $\boxed{D^T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

另一方面, 为证明的需要, 我们记 $\boxed{D^T} = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

则有 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

按行列式的定义

$$D^T=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$\overset{b_{ij}=a_{ji}}{=\!=}\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

由 n 阶行列式定义的等价形式，当“列标固定，行标变”时，

$\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D$，从而有 $D^T=D$.

注

性质1表明，在行列式中行与列有相同的地位，凡有关行的性质对列同样成立，

有关列的性质对行也是成立的.

性质2

交换行列式的两行（或两列），行列式改变符号.

证明思路

设行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

是由行列式 $D = \det(a_{ij})$ 交换第 i 行和第 j 行得来的(不妨设 $i < j$).

$$b_{kp} = \begin{cases} a_{kp}, k \neq i, j; \\ a_{jp}, k = i; \\ a_{ip}, k = j. \end{cases} \qquad (1)$$

$$D_1 = \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots \underline{a_{jp_i}} \cdots \underline{a_{ip_j}} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \qquad (2)$$

$$= -\sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D.$$

$$(-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} = -(-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)}$$

推论

如果行列式有两行（或两列）完全相同, 则此行列式为零.

证明思路

由性质2知, 将相同的这两行互换, 行列式没变,

有 $D=-D$, 故$D=0$.

性质3

行列式中某一行（或列）的各元素有公因子, 则可提到行列式符号的外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论

行列式的某一行（或列）所有元素都乘以同一个数 k ，等于用 k 乘此行列式.

推论

行列式的某一行（或列）的元素全为零，行列式的值等于零.

第六讲 行列式的性质(2)

性质4

若行列式中有两行（列）的元素对应成比例,则行列式等于零.

证明思路

由性质3及推论,将其中一行的元素的比例系数都提公因子到行列式外面,

这时行列式中有两行的元素对应相同,从而等于零.

性质5

若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和, 如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式的和, 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明思路

利用行列式定义展开时, 每项都有第 i 列的一个元素 $a_{ki}+a'_{ki}$,
从而每一项都可拆成两项的和.

性质6

将行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

例 把行列式的第 j 列乘以常数 k 后加到第 i 列的对应元素上，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明思路

利用行列式定义、性质5及推论1易证性质6.

归纳与小结

这两次课我们介绍了行列式的六条性质，三条推论，并对证明思路进行了简要分析.

六条性质可以简记为：

性质 1	$D = D^T$.	性质 4	元素对应成比例值为零.
性质 2	换行(列)变号.	性质 5	拆分行列式.
性质 3	倍乘提公因子.	性质 6	倍加后值不变.

为表达方便，下面给出有关记号的约定：

1、以 r_i 表示第 i 行， c_i 表示第 i 列；

2、交换 i, j 两行（列）记为 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$；

3、第 i 行（列）乘以数 k 记为 $kr_i (kc_i)$；

4、第 j 行（列）的元素乘以 k 加到第 i 行（列）记为 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$；

5、第 i 行（列）提取公因式记为 $r_i \div k (c_i \div k)$.

注

第4条中记号 $r_i + kr_j$ 和 $c_i + kc_j$ 中两个加数的顺序不能颠倒，

例如，不能写成 $kr_j + r_i$ 和 $kc_j + c_i$.

第七讲　行列式按行(列)展开

在n阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的行和列，余下的$n-1$阶行列式(按照原来的排法)，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

在余子式前面加上符号 $(-1)^{i+j}$，(其中 i和 j 表示元素 a_{ij} 所在的行和列)，称为元素a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij} 其中$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

注

(1) 行列式的余子式和代数余子式只与元素 a_{ij} 所在的位置有关，与元素 a_{ij} 的大小无关.

(2) 由 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 知，行列式中同一个元素的余子式和代数余子式可能相同，可能不同，由 $i+j$ 的奇偶性决定.

例如, 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式为 $$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix};$$

代数余子式为 $$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

引理

一个 n 阶行列式 D , 如果第 i 行所有元素除 a_{ij} 外全为零, 则行列式 $D = a_{ij}A_{ij}$. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$= a_{ij}A_{ij}.$$

证明思路

先证特殊情形

当 a_{ij} 位于第1行第1列时,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$$= \sum_{1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(1p_2\cdots p_n)} a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= a_{11}\sum_{p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)} a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{行交换}(i-1)\text{次}}} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{列交换}(j-1)\text{次}}} (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{i,j} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,j-1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{n,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(i-1)+(j-1)} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

定理

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = \underline{a_{i1}}A_{i1} + \underline{a_{i2}}A_{i2} + \cdots + \underline{a_{in}}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

例如 行列式 D 按第一行展开, 则

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

行列式 D 按列展开, 则

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

证明思路

在行列式 D 的第 i 行中，将每一个元素都写成与 $n-1$ 个 0 相加，然后由行列式性质6“拆分行列式”可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由引理，有 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\,(i=1,2,\cdots,n).$

同理可证

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\,(j=1,2,\cdots,n).$$

注

(1) 要弄清楚定理结论的表达式的结构, 注意行标和列标中“变”与“不变”的意义.

(2) 这个定理称为行列式按行(列)的展开法则, 利用这个法则并结合行列式的性质, 可将行列式降阶, 从而达到简化计算的目的.

$$a_{i1}\underbrace{A_{j1}}_{a_{j1}\text{ 的代数余子式}}+a_{i2}\underbrace{A_{j2}}_{a_{j2}\text{ 的代数余子式}}+\cdots+a_{in}\underbrace{A_{jn}}_{a_{jn}\text{ 的代数余子式}}=?(i\neq j)$$

推论

行列式任一行(列)的元素与另外一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

证明思路

作行列式 $(i \neq j)$

$$D_1=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right|, \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

因为行列式中第 i 行和第 j 行元素对应相同, 由行列式性质知行列式为 $D_1=0$;

另一方面, 利用行列式展开法则, 按第 j 行展开得 $D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$.

于是有 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$,

同理可证: $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$.

将推论中两结论分别写成 $\sum$ 和的形式

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}(i\neq j).$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}(i\neq j).$$

可以将定理和推论中的四个结论统一写成:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, i=j,\\0,\ i\neq j.\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, i=j,\\0,\ i\neq j.\end{cases}$$

消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad (1)$$

当未知数 x_1, x_2 的系数满足 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组（1）有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad (2)$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad (3)$$

第八讲 克莱姆法则

含有n个未知数 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的n个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4}$$

的解可以用n阶行列式表示，即有

克莱姆法则　如果线性方程组(4)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

不等于0, 则方程组(4)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将 D中第 j 列元素换成常数项所得的行列式, 即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D_j中除第 j 列变为常数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$, 其它元素和系数行列式中元素是对应相同的.

下面进行简单的证明:

证明思路

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是方程组(4)的解. 利用行列式性质, 将(5)式化为

$$Dx_j = x_j \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}x_j & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}x_j & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}x_j & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

再次利用行列式的性质, 在行列式(6)中依次进行 $(n-1)$ 次列倍加运算, 也就是将第1列, 第2列, $\cdots$, 第 $j-1$ 列, 第 $j+1$列, $\cdots$, 第 n 列分别乘上 $x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n$后都加到第 j 列, 行列式值不变, 即

$$Dx_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=D_j.$$

因为 $D \neq 0$, 所以 $x_j = \dfrac{D_j}{D}\ (j=1,2,\cdots,n)$ 为方程组 (4) 的唯一解.

注

1. 未知数的个数与方程的个数必须相同;

2. 系数行列式不为零;

3. 当未知数个数和方程个数不同时, 克莱姆法则不再适用, 我们将在第四章对一般线性方程组的求解进行专门介绍. 这也说明, 克莱姆法则既是求解二元线性方程组的推广, 也是求解一般线性方程组的一个特殊情形;

4. 由克莱姆法则的求解公式知, 我们需要计算很多行列式, 使用起来并不方便, 所以只适用于未知数较少和某些特殊的方程组. 克莱姆法则主要用于理论推导.

定理1

如果线性方程组(4)的系数行列式 $D \neq 0$ ，则方程组(4)一定有解，且解是唯一的.

对应的逆否命题为：

定理2

如果线性方程组(4)无解，或有两个不同解，则系数行列式必为零($D = 0$).

当方程组(4)右边的常数项全为零时，方程组(4)称为齐次线性方程组，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

否则，当$b_1, b_2, \cdots, b_n$不全为零时，方程式(4)称为非齐次线性方程组.

显然，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 是齐次线性方程组(7)的解，称为零解；

若齐次线性方程组(7)除零解外，还有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零的解，称为非零解.

定理3

如果齐次线性方程组(7)的系数行列式 $D \neq 0$,则该方程组只有零解.

定理4

如果齐次线性方程组(7)有非零解,则系数行列式必为零.

注

在第四章中,我们还将证明系数行列式为零是齐次线性方程组(7)
有非零解的充分条件,从而有

齐次线性方程组(7)有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式必为零.

第九讲 行列式的计算(1)

1. 定义法

定义法是指按照 n 阶行列式的定义将行列式展开来进行计算.

例1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

注

从这个例子可以看出, 定义法适用于零元素较多的行列式.

2. 三角化方法

三角化方法是指利用行列式性质将行列式进行保值变换, 化为主对角线一侧的所有元素全为零, 也即化为上三角行列式或下三角行列式, 从而等于主对角线上元素的乘积.

而对于副对角线的情形, 行列式的值等于 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 与副对角线上元素的乘积.

一般情况下，我们习惯于将行列式化为上三角行列式，

也就是主对角线以下全化为零，以这个四阶行列式为例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

例2　　计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - 2r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-3) \times 3 = -9.$$

注

上例是多次利用行倍加性质 $r_i+\lambda r_j$ 将行列式化为上三角行列式.

实际上, 可以用数学归纳法证明任何一个 n 阶行列式总能利用

行倍加或列倍加性质化为上三角行列式或下三角行列式.

例3

$$D=\left|\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & D_1 & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & & & & 0 & \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1k} & & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & D_2 & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}} & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & & & \end{array}\right|,$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明： $D=D_1D_2$.

证明思路

对行列式 D_1 作一系列行倍加运算, 把 D_1 化为下三角行列式, 设为

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},$$

对行列式 D_2 作一系列列倍加运算, 把 D_2 化为下三角行列式, 设为

$$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是, 在 D 中对前 k 行作行倍加运算, 再对后 n 列作列倍加运算, 将 D 化为下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

从而 $$D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$$

注

1. 三角化方法的特点是程序化明显，对阶数较低的数字行列式和一些特殊的字母行列式适用.

2. 要掌握例3中行列式的结构特征，并熟记该行列式的结果，用起来会非常方便. 例如，第七讲中引理的第一种情形的证明， 利用例3的结果就可直接得出.

3. 降阶法

降阶法是指利用行列式展开法则将行列式展开降阶. 通常先利用行列式性质把原行列式的某行（列）的元素尽可能多地化为零，使该行（列）不为零的元素只有一个或两个，然后再按该行（列）展开降阶后进行计算.

例4　　计算例2中行列式

解

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1-2c_3\\c_4-2c_3}}{\underset{c_2+5c_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&0&1&0\\-1&2&-1&6\\1&1&2&3\\2&-1&1&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&2&6\\1&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}\overset{r_1-2r_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-3&0&0\\1&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\times(-3)\begin{vmatrix}1&3\\-1&0\end{vmatrix}=-9.$$

注

行列式计算中一题多解的情形比较多，相对来说，结合行列式性质，

并利用行列式展开法则来进行计算是比较常用的方法.

第十讲 行列式的计算（2）

4. 递推法

递推法是指根据行列式的结构特点, 找出所求 n 阶行列式 D_n 与其相应的低阶行列式之间的递推关系, 从而计算行列式.

通常是建立D_n 与 D_{n-1} 的递推关系, 逐步推下去, 从而得出 D_n 的值. 有时也可以找到 D_n， D_{n-1} 以及 D_{n-2} 之间的递推关系式, 最后利用 D_1 ，D_2 求出 D_n 的值.

例1　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

解　将 D_n 按第1列展开, 得到

$$D_n=x\boxed{\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_{D_{n-1}}}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix},$$

即 $D_n = xD_{n-1} + a_n.$

这个式子对任意自然数 $n(n \geq 2)$ 都成立, 例如, 对低一阶的行列式 D_{n-1},
类似有 $D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-1}$, 所以

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n \\ &= \cdots \\ &= x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

因为 $D_1 = |x + a_1| = x + a_1$,

所以 $D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$

注

1、例1也可以利用降阶法, 按第 n 行展开来进行计算.

2、例1中得到的是 D_n 与 D_{n-1} 之间的递推关系.

例2　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　将D_n 按第1列展开, 得到

$$D_n=2D_{n-1}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=2D_{n-1}-D_{n-2},$$　即有　$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}.$

由此类推 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1=3-2=1,$

从而　$D_n=D_{n-1}+1=(D_{n-2}+1)+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+(n-1)=n+1.$

注

例2得到的是 D_n，D_{n-1} 以及 D_{n-2} 之间的递推关系.

5. 加边法(升阶法)

加边法是指把行列式添加一行和一列, 使升阶后的行列式的值保持不变.

一般来说, 如果一个 n 阶行列式 D_n的每一行(列)中除对角线上元素外的 $n-1$ 个元素都分别是某 $n-1$个元素(不妨记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$)的倍数, 则可添加第1行(列)为 $1, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$, 第一列(行)为 $1, 0, \cdots, 0$, 将 D_n转化为 D_{n+1} 进行计算.

例3　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},$$ 其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

解　将D_n 中添加第 1 行为 $1,1,\cdots,1,$ 第一列 $1,0,\cdots,0,$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

因 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$ ，利用倍加性质，从第2列开始，将各列的 $\frac{1}{a_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 都倍加到第1列，得

$$
=\begin{vmatrix}
1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}.
$$

从而利用上三角行列式的结果，得

$$
=a_1a_2\cdots a_n(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})
$$

$$
=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}).
$$

注

1、加边法要求保持原行列式的值不变，并且加边后的行列式容易进行计算;

2、根据需要和原行列式的特点选取所加的行和列;

3、由上例可看出:对除主对角线上元素外其余元素都相等的行列式, 可采用加边法进行计算, 但对更特殊的情形, 当主对角线上的元素也相同时, 结合倍加性质, 利用三角化方法计算更简单, 例如 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

第十一讲 行列式的计算(3)

6. 利用范德蒙行列式进行计算法

n 阶范德蒙行列式的特点:

(1) 由 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 决定;

(2) 第1行的元素全为1, 也可以分别看成是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的0次幂;第2行是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次幂;第3行是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次幂, 由此类推, 第 n 行是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $n-1$ 次幂.

步骤

（1） 先根据范德蒙行列式的结构特点，将所求行列式化为范德蒙行列式；

（2） 利用范德蒙行列式的结果进行计算. 即

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

例1　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n\end{vmatrix}.$$

解　提取行列式中每一行的公因子, 得

$$D_n=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix},$$

再转置行列式, 得

$$=n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix},$$

利用范德蒙行列式的结果, 得

$$=n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)].$$

整理后, 得

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例2　计算4阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

解　在 D_4 中加上第四行和第五列得行列式 D_5，

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix},$$

一般情况下, $D_4 \neq D_5$, 但 D_4 是 D_5 中 x^3 的余子式 M_{45}, 且 $D_4 = M_{45} = -A_{45}$.

另一方面, 将 D_5 按照第5列展开, 有

$$D_5 = A_{15} + xA_{25} + x^2 A_{35} + x^3 A_{45} + x^4 A_{55}.$$

所以, D_4 正好是 D_5 中 x^3 的系数的相反数.

利用范德蒙行列式的结论可得

$$\begin{aligned}D_5 &= (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d) \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c) \\ &\quad [\cdots-(a+b+c+d)x^3+\cdots],\end{aligned}$$

从而

$$D_4 = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

7. 归纳法

归纳法是指通过计算一些初始行列式, 如 D_1, D_2, D_3 , 找出所求结果与阶数之间的关系, 用不完全归纳法对 D_n 的结果提出猜想, 再用数学归纳法对猜想进行证明.

例3　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

解题思路

由于 $D_1=\cos\theta,$

$$D_2=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-2\cos^2\theta & 2\cos\theta & 1\\ -\cos\theta & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1-2\cos^2\theta & 1\\ -\cos\theta & 2\cos\theta\end{vmatrix}=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta,$$

因而猜想 $D_n=\cos n\theta.$

下面利用数学归纳法进行证明:

当 $n=1$ 时, 结论成立.

假设结论对 $k \le n-1$ 都成立, 则当 $k=n$ 时, 将 D_n 按最后一行展开

$$
\begin{aligned}
D_n &= 2D_{n-1}\cos\theta - D_{n-2} \\
&= 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \\
&= \cos[\theta+(n-1)\theta] + \cos[(n-1)\theta-\theta] - \cos(n-2)\theta \\
&= \cos n\theta,
\end{aligned}
$$

从而证明猜想是正确的.

版块一　行列式的定义

一、行列式的本质

n 阶行列式实际上是一个由已知的 n^2 个数定义出来一个新的数, 求出这个新的数有很多种简便方法, 这些简便方法就是行列式的基本性质.

二、n 阶行列式的三个等价定义

1、 一个n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于来自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和.

版块一　行列式的定义

（1）“行标固定，列标变”

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

（2）“列标固定，行标变”

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}.$$

（3）“行标变，列标也变”

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

版块一　行列式的定义

注

1、 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 展开后等于 $n!$ 项的代数和.

2、 n 阶行列式的定义一实际上是定义三的特殊形式，由于$\tau(123\cdots n)=0$，

则定义一中的一般项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号部分 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$

可以看成是 $(-1)^{\tau(123\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$. 同理，定义二实际上也是定义三的特殊形式.

版块一　行列式的定义

例 1 选择 i 和 k，使得 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 成为五阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$ 中的一个带负号的项.

解 将给定的项改写成行标排列为自然顺序的形式 $a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}$，列标排列为 $i52k3$，缺1和4. 将1和4放到 i 和 k 的位置就有 $i=1,k=4$ 和 $i=4,k=1$ 两种情况.

令 $i=1,k=4,\tau(15243)=3+1=4$，故这项的符号为正.

又由于对换会改变排列的奇偶性，所以，取 $i=4,k=1$ 时，

$a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 的符号为负.

版块一　行列式的定义

例 2　用行列式的定义来证明：$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$

证明思路

不考虑每一项的符号，这个行列式展开式中的一般项为 $a_i b_j c_k d_s e_t$，其中

$ijkst$ 是12345对应的任意一个排列. 由行列式的定义，五阶行列式的每一项

的5个乘积因子必来自不同行不同列.

我们先不看第1，2行的元素，第3，4，5行中只有第1，2列的元素不为零，

必须在第3，4，5列中还要取一个元素，从而所有项都为零，得这个行列式等于零.

版块一　行列式的定义

例 3　证明：一个n阶行列式中等于零的元素的个数如果比 n^2-n 多，则此行列式等于零.

分析　n 阶行列式中共有 n^2 个元素，如果 D 是一个n 阶行列式，并且 D 中等于零的元素的个数比 n^2-n 多，说明非零元素的个数比 $n^2-(n^2-n)=n$少，这样，由行列式的定义知，展开式的每一项的乘积部分必有一个零因子，从而$D=0$.

注

这个结论很重要，可以衍生出很多变式，必须先了解并记住n 阶行列式的定义，然后熟记例3的结论，来方便灵活运用.

版块二　常用行列式

1、 二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2、 三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

版块二　常用行列式

3、 上三角、下三角、对角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & o \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & o \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4、副对角线方向的副上三角、副下三角、副对角行列式:

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & o \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

版块二　常用行列式

5、范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$$

6、 分块行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & O \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1 D_2，\text{其中}\quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}，D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

版块三　行列式的性质

一、行列式的六条性质

1、$\boxed{D = D^T}$.

2、交换行列式的两行（或两列），行列式改变符号.

3、行列式中某一行（或列）的各元素有公因子，则可提到行列式符号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4、若行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则行列式等于零.

版块三　行列式的性质

5、若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式的和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6、将行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

版块三　行列式的性质

注

这六条性质可简记为:

性质1　$D = D^T$.

性质2　换行（列）变号.

性质3　倍乘提公因子.

性质4　元素对应成比例值为零.

性质5　拆分行列式.

性质6　行（列）倍加后值不变.

版块三　行列式的性质

二、三条推论

1、如果行列式有两行（或两列）完全相同，则此行列式等于零.

2、行列式的某一行（或列）所有元素都乘以同一个数 k，等于用 k 乘此行列式.

3、如果行列式的某一行（列）的元素全为0，则此行列式等于零.

版块三　行列式的性质

三、关于余子式与代数余子式

1、 记元素 a_{ij} 的余子式为 M_{ij}, 代数余子式为 A_{ij}, 则 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

或者 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$. 这说明同一个元素的余子式和代数余子式要么相同, 要么互为相反数.

例 4 设 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 中代数余子式 $A_{12}=-1$, 则 $A_{21}=$ (　　).

分析 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=4-5x=-1$,所以 $x=1$, 从而 $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2.$

版块三　行列式的性质

2、　行列式中元素的代数余子式只与这个元素所在的位置有关

（也就是说，看这个元素位于哪一行哪一列），与元素的大小无关.

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 和 $D_1=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的第四行的

元素的余子式和代数余子式都是对应相同的.

版块三　行列式的性质

例 5 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，求第四行中各元素的余子式之和.

分析 因为 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$，

由已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 构造新行列式 $D_1=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，

将 D_1 按第四行展开即为所求.

版块三　行列式的性质

从而，$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{\text{按第三行展开}}}(-7)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

版块三　行列式的性质

例 6 设 $D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&3&3\\3&2&5&4&2\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$，

求（1）$A_{31}+A_{32}+A_{33}$；（2）$A_{34}+A_{35}$.

分析 观察行列式中元素的特点，构造行列式 $D_5'=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&3&3\\1&1&1&3&3\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$，

一方面， 由行列式性质有 $D_5'=0$；

版块三　行列式的性质

另一方面, 将 D_5' 按第三行展开, 有 $D_5' = (A_{31} + A_{32} + A_{33}) + 3(A_{34} + A_{35})$.

从而可得等式 $(A_{31} + A_{32} + A_{33}) + 3(A_{34} + A_{35}) = 0$.　①

同理, 构造行列式 $D_5'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 则有 $D_5'' = 0$, 另外将 D_5'' 按第三行展开,

可得等式 $2(A_{31} + A_{32} + A_{33}) + (A_{34} + A_{35}) = 0$.　②

解①　②联立的方程组, 得 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = 0$，$A_{34} + A_{35} = 0$.

版块三　行列式的性质

例 7 设 $D_4=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$ ，

求（1） $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ ；（2） $A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}$.

分析 (1) 根据所求的表达式, 构造行列式 $D_4^{'}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$, 显然 $D_4^{'}=0$ ，

从而 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=D_4^{'}=0.$

版块三　行列式的性质

(2) 根据所求的表达式，构造行列式 $D_4{}'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，

那么 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{43} + 4A_{44} = D_4''$. 利用行列式性质计算，得 $D_4{}'' = 10$.

从而有 $A_{41} + 2A_{42} + 3A_{43} + 4A_{44} = 10$.

版块三　行列式的性质

例 8 单选题:

设 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$，则 D_n 中所有元素的代数余子式之和等于（　　）.

A　0;　　B　$n!$;　　C　$-n!$;　　D　$2n!$.

分析　一方面，容易看出 D_n 是一个上三角行列式，有 $D_n = n!$.

另一方面，D_n 中第一行元素的代数余子式的和就等于 D_n 按第一行展开，从而等于 $n!$；

按照例6、例7中的方法，类似有，从第二行开始，每行的代数余子式的和都为零，所以

正确答案为B.

版块三　行列式的性质

四、行列式按行（或列）的展开法则

定理

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,

即 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,

$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\ (j = 1, 2, \cdots, n)$.

推论

行列式任一行(列)的元素与另外一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,

即 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 (i \neq j)$,

$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 (i \neq j)$.

版块三　行列式的性质

例 9　如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{13} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{23} & 2a_{22} \\ 2a_{31} & 2a_{33} & 2a_{32} \end{vmatrix}$, 则 $D_1=$(　　　).

A　$2D$;　　　B　$-2D$;　　　C　$8D$;　　　D　$-8D$.

正确答案: D.

例 10　证明:元素为0,1的三阶行列式的值只能是 $0, \pm 1, \pm 2$.

分析　设三阶行列式为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 其中 a_{ij} 取值为0或1. 如果 D 中某一行(或列)

的元素全为零, 则 $D=0$. 否则, 假设第一列中至少有一个元素为1, 不妨设 $a_{11}=1$,

版块三　行列式的性质

（1）当第一列中另外两个元素全为零时，$D=\begin{vmatrix}1 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，显然，$D=0,\pm1.$

（2）当第一列中另外两个元素不全为零时，可以通过行倍加运算将不为零的元素化为零，

从而 $D=\begin{vmatrix}1 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & b_{22} & b_{23}\\ 0 & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}=b_{22}b_{33}-b_{23}b_{32}$，其中 $b_{ij}=a_{ij}$，或者 $b_{ij}=a_{ij}-a_{1j},(i,j=2,3)$.

因此，$|b_{ij}|\le 1$，从而 $|D|\le 2$. 即 $D=0,\pm1,\pm2.$

版块四　行列式的计算

1、定义法

（1）$D_1=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&n-1&\cdots&0&0\\n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$；（2）$D_2=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$；（3）$D_3=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}$.

分析　(1) 为副对角行列式，$D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$；

(2) 类似于第 (1) 小题，行列式 D_2 展开后只有一个非零项，得 $D_2=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}n!=(-1)^{n-1}n!$；

(3) 同理，行列式 D_3 展开后只有一个非零项，得 $D_3=(-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)}n!=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

版块四　行列式的计算

2、三角化方法与降阶法

三角化方法和降阶法都是最常用的方法，并且这两种方法通常在解答中结合运用. 三角化方法和降阶法是指利用行列式的性质及展开法则将行列式化为三阶行列式，再利用已有结论得出结果.

例 11　已知 $1998, 2196, 2394, 1800$ 都能被18整除，不计算行列式的值，

证明行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 也能被18整除.

版块四　行列式的计算

解 因为 $D_4=\begin{vmatrix}1&9&9&8\\2&1&9&6\\2&3&9&4\\1&8&0&0\end{vmatrix}\overset{\substack{c_4+10c_3\\c_4+100c_2\\c_4+1000c_1}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&9&9&1998\\2&1&9&2196\\2&3&9&2394\\1&8&0&1800\end{vmatrix}$，

由已知条件 1998, 2196, 2394, 1800 都能被18整除知行列式的第四列

都有公因子18，可以把这个公因子提到行列式外面，

从而说明 D_4 能被18整除.

版块四　行列式的计算

3、递推法

如果行列式中零元素比较多，且非零元素的分布很有规律. 一般先考虑递推法计算.

用递推法计算行列式的一般做法是：将行列式按一行（或列）展开，找到一个递推公式后进行递推.

例 12 计算5阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$

版块四　行列式的计算

分析　将行列式按第一行展开，有

$$D_5=(1-a)\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}-1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=(1-a)D_4+aD_3.$$

一方面，变形可得

$$D_5-D_4=-a(D_4-D_3)=a^2(D_3-D_2)=-a^3(D_2-D_1).$$

其中 $D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=a^2-a+1, D_1=1-a.$

从而 $D_5-D_4=-a^5.$　　　（1）

另一方面，变形可得

$$D_5+aD_4=D_4+aD_3=D_3+aD_2=D_2+aD_1.$$

从而 $D_5+aD_4=1.$ (2)

联立(1)(2)，解方程组，得 $(a+1)D_5=1-a^6.$

所以，当 $a\neq -1$ 时，$D_5=\dfrac{1-a^6}{a+1}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5;$

当 $a=-1$ 时，则由(2)知 $D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3=D_1+4=6.$

两种情形可统一为：$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

版块四　行列式的计算

(课外题) 例 13 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

方法一　将 D_n 按第一行拆开:

版块四　行列式的计算

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha\end{vmatrix}+\beta D_{n-1}=\alpha^n+\beta D_{n-1}.$$

版块四　行列式的计算

得递推公式 $D_n = \alpha^n + \beta D_{n-1}$.

依次类推, 有
$$\begin{aligned} D_n &= \alpha^n + \beta D_{n-1} \\ &= \alpha^n + \beta(\alpha^{n-1} + \beta D_{n-2}) \\ &= \alpha^n + \beta\alpha^{n-1} + \beta^2 D_{n-2} \\ &= \alpha^n + \beta\alpha^{n-1} + \beta^2\alpha^{n-2} + \beta^3 D_{n-3} \\ &= \cdots \\ &= \alpha^n + \beta\alpha^{n-1} + \beta^2\alpha^{n-2} + \cdots + \beta^{n-3}\alpha^3 + \beta^{n-2} D_2, \end{aligned}$$

因为
$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2,$$

所以
$$D_n = \alpha^n + \beta\alpha^{n-1} + \beta^2\alpha^{n-2} + \cdots + \beta^{n-3}\alpha^3 + \beta^{n-2}\alpha^2 + \beta^{n-1}\alpha + \beta^n .$$

版块四　行列式的计算

方法二　将 D_n 按第一行展开:

$$D_n=(\alpha+\beta)\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$-\alpha\begin{vmatrix}\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}_{n-1},$$

版块四　行列式的计算

再将等号右边第二个行列式按第一列展开，得递推公式

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$$

移项后，得
$$\begin{aligned}D_n-\beta D_{n-1}&=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})\\&=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})\\&=\cdots\\&=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1),\end{aligned}$$

因为 $D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\\ \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$，$D_1=\alpha+\beta$.

所以 $D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n.$

版块四　行列式的计算

进一步递推, 得

$$
\begin{aligned}
D_n &= \beta D_{n-1} + \alpha^n \\
&= \beta(\beta D_{n-2} + \alpha^{n-1}) + \alpha^n \\
&= \beta^2 D_{n-2} + \beta\alpha^{n-1} + \alpha^n \\
&= \cdots \\
&= \beta^{n-2} D_2 + \beta^{n-3}\alpha^3 + \beta^{n-4}\alpha^4 + \cdots + \beta\alpha^{n-1} + \alpha^n \\
&= \beta^n + \beta^{n-1}\alpha + \beta^{n-2}\alpha^2 + \beta^{n-3}\alpha^3 + \beta^{n-4}\alpha^4 + \cdots + \beta\alpha^{n-1} + \alpha^n .
\end{aligned}
$$

注

本题的两种方法都是采用递推法, 方法一得到的递推公式中仅含有 D_n 和 D_{n-1} ,

方法二得到的递推公式中含有 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} . 由于递推公式不同, 用递推公式

进行计算时的难易程度也是不同的.

版块四　行列式的计算

4、加边法

加边法的原理是在原行列式中添加一行和一列，且保持原行列式不变或与原行列式有某种巧妙的联系，常用的加边法为：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

版块四　行列式的计算

例 14 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

分析 将 D_n 加边，得 $n+1$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

版块四　行列式的计算

将第1行的（-1）倍分别行倍加到其余的 $n-1$ 行, 然后将第 $2,3,\cdots,n+1$ 列都加到第1列, 得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i\ .$$

版块四　行列式的计算

（课外题）例15 方程 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0$ 的根为(　　).

A　a_1+a_2, a_3+a_4；　　B　$0, a_1+a_2+a_3+a_4$;

C　$a_1a_2a_3a_4, 0$；　　D　$0, -a_1-a_2-a_3-a_4$.

方法一　将行列式的第一行的（-1）倍分别第2, 3, 4行, 得

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix},$$

版块四　行列式的计算

所得的行列式的第2，3，4行的元素中，除了副对角线上是x外，第4列的三个元素都是$-x$，将第2, 3, 4列都加到第4列, 得副上三角行列式

$$
\begin{aligned}
&=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1+a_2+a_3+a_4+x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&=(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} x^3(a_1+a_2+a_3+a_4+x) \\
&=x^3(a_1+a_2+a_3+a_4+x).
\end{aligned}
$$

版块四　行列式的计算

方法二　由于 $D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x \\ -1 & 0 & 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

（1）当 $x=0$ 时，$D=0$；

（2）当 $x\neq 0$ 时，

版块四　行列式的计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x \\ -1 & 0 & 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{x}+\frac{a_4}{x} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(1+\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{x})x^4.$$

从而，方程 $D=0$ 的根为 $0,-a_1-a_2-a_3-a_4$．正确答案：D.

版块四　行列式的计算

5、利用范德蒙行列式

例 16 设 a,b,c互不相同, $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$, 则 $D=0$的充要条件是 $a+b+c=0$.

解 将 D 的第一行倍加到第三行, 并交换行的顺序, 得

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

因为a,b,c 互不相同, 所以 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}\neq 0$, 从而 $D=0$ 的充要条件是 $a+b+c=0$.

版块四　行列式的计算

例 17　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^{\ 2}+x_1 & x_2^{\ 2}+x_2 & \cdots & x_n^{\ 2}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\ n-1}+x_1^{\ n-2} & x_2^{\ n-1}+x_2^{\ n-2} & \cdots & x_n^{\ n-1}+x_n^{\ n-2} \end{vmatrix}$.

解 将第 i 行的(−1)倍加到第 $i+1$ 行, 其中 $i=1,2,\cdots,n-1$ ，则可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{\ n-1} & x_2^{\ n-1} & \cdots & x_n^{\ n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

版块四　行列式的计算

6、克莱姆法则

克莱姆法则　如果含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

版块四　行列式的计算

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将 D 中第 j 列元素换成常数项所得的行列式, 即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里，D_j 中除第 j 列变为常数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ ，其它元素和系数行列式中元素是对应相同的. 当方程组（1）中的常数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为零时，这个线性方程组就变为齐次线性方程组，记为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{2}$$

版块四　行列式的计算

并相应有如下两个重要的结论：

定理1

如果齐次线性方程组（2）的系数行列式 $D \neq 0$, 则该方程组只有零解.

定理2

如果齐次线性方程组（2）有非零解, 则系数行列式必为零.

版块四　行列式的计算

注

1、未知数的个数与方程的个数必须相同;

2、系数行列式不为零;

3、当未知数个数和方程个数不同时,克莱姆法则不再适用,我们将在第四章对一般线性方程组的求解进行专门介绍.这也说明,克莱姆法则既是求解二元线性方程组的推广,也是求解一般线性方程组的一个特殊情形;

4、由克莱姆法则的求解公式知,我们需要计算很多行列式,使用起来并不方便,所以只适用于未知数较少和某些特殊的方程组.克莱姆法则主要用于理论推导.

温馨提示：

此习题为本章补充练习，针对《线性代数》慕课第一章所介绍内容设计，并附有答案和解析，建议大家学习完本章内容（最好学习完第一章复习长视频）后完成！建议时量：90 分钟.

一、填空题：

1、n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ =（　　）.

2、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的一次项系数为（　　）.

3、$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ =（　　）.

4、$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$ =（　　）.

5、四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 中第 4 行各元素的余子式之和为（　　）.

6、若行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{vmatrix}$ =（　　）.

7、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ =（　　）.

8、当 $a\neq$（　　）时，方程组 $\begin{cases} ax+z=0 \\ 2x+ay+z=0 \\ ax-2y+z=0 \end{cases}$ 只有零解.

二、已知 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，求下列行列式的值：

1、$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　　2、$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+4 & 3z+6 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$.

三、计算下列行列式：

1、$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$；　　2、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$；

3、$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$；　　4、$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；

5、$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$；

6、$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

答案与解析：

一、填空题：

1、$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$.

解析：此为特殊行列式之一，结论需熟记.

2、-1.

解析：设三阶行列式的一般形式为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，此题给出的三阶行列式的元素中仅$a_{12}=x$，根据行列式的定义，行列式展开式的一般项为$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，且每一项中的乘积因子必来自于该行列式的不同行和不同列，因此，$f(x)$的一次项有两项：$(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}=-a_{12}a_{21}a_{33}=2x$和$(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}=a_{12}a_{23}a_{31}=-3x$，得系数为$-1$.

3、1.

4、0.

解析：行列式中零元素较多，利用定义法计算.

5、-14.

解析：此题易得错误答案：0. 注意到这里是求第 4 行各元素的余子式之和，即求 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$！由于 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$，根据行列式展开法则，构造行列式 $D_4'=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\1&1&1&1\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$，其按第 4 行展开正好是 $-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$，所以，求 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$ 只需计算 D_4'，可算得 $D_4'=-14$.

6、$6k$.

解析：$\begin{vmatrix}2a_{11}&2a_{12}&2a_{13}\\3a_{31}&3a_{32}&3a_{33}\\-a_{21}&-a_{22}&-a_{23}\end{vmatrix}=-2\times3\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=6k.$

7、6.

解析：用三角化方法，利用行倍加运算将第 1 行分别加到第 2，3，4 行得一个上三角行列式.

8、2.

解析：利用克拉姆法则的推论，对含 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组，只有零解的充要条件为系数行列式不等于零.

二、1、1.

解析：$\begin{vmatrix}x&y&z\\0&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_1-r_3}{\underset{r_2+r_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\1&3&4\\1&1&1\end{vmatrix}.$

2、2.

解析：$2\begin{vmatrix}x&y&z\\0&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y&z\\0&4&6\\1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{\underset{r_2+3r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}x&y&z\\3x&3y+4&3z+6\\x+1&y+1&z+1\end{vmatrix}.$

三、计算下列行列式：

1、-21.

解析：此题可用三角化方法，先利用行列式性质化为上三角行列式；考虑到行列式中含零元素，也可用降阶法，先用行列式性质将行列式化为第 1 列只有一个非零元，再按第 1 列展开，降阶，然后再按类似方法继续.

2、12.

解析：用范德蒙行列式计算.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=12.$$

此题也可用三角化方法和降阶法计算. 相对来说，用范德蒙行列式法最简便.

3、$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

解析：用递推法. 记 $D_4=\begin{vmatrix}x&-1&0&0\\0&x&-1&0\\0&0&x&-1\\a_0&a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}$. 将 D_4 按第 1 列展开得递推公式

$D_4=a_0+xD_3$，并依次递推，有 $D_4=a_0+xD_3=a_0+x(a_1+xD_2)=a_0+a_1x+x^2D_2$

$=a_0+a_1x+x^2(a_2+a_3x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

4、48.

解析：为林荫小道型行列式.

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

注：由于此题每行上的元素之和以及每列上的元素之和都是 6，若将第 $2,3,\cdots,n$ 行的元素都加到第 1 行，再提公因数，并进行列倍加运算，也是可行的.

5、$1+\sum_{i=1}^{n}a_i$.

解析：$\begin{vmatrix}1+a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&1+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&a_n&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}a_i&1+\sum_{i=1}^{n}a_i&\cdots&1+\sum_{i=1}^{n}a_i\\a_2&1+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&a_n&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_2&1+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&a_n&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

注：请大家同第 4 题进行仔细比较，解答思路有何异同？

6、$(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$.

解析：

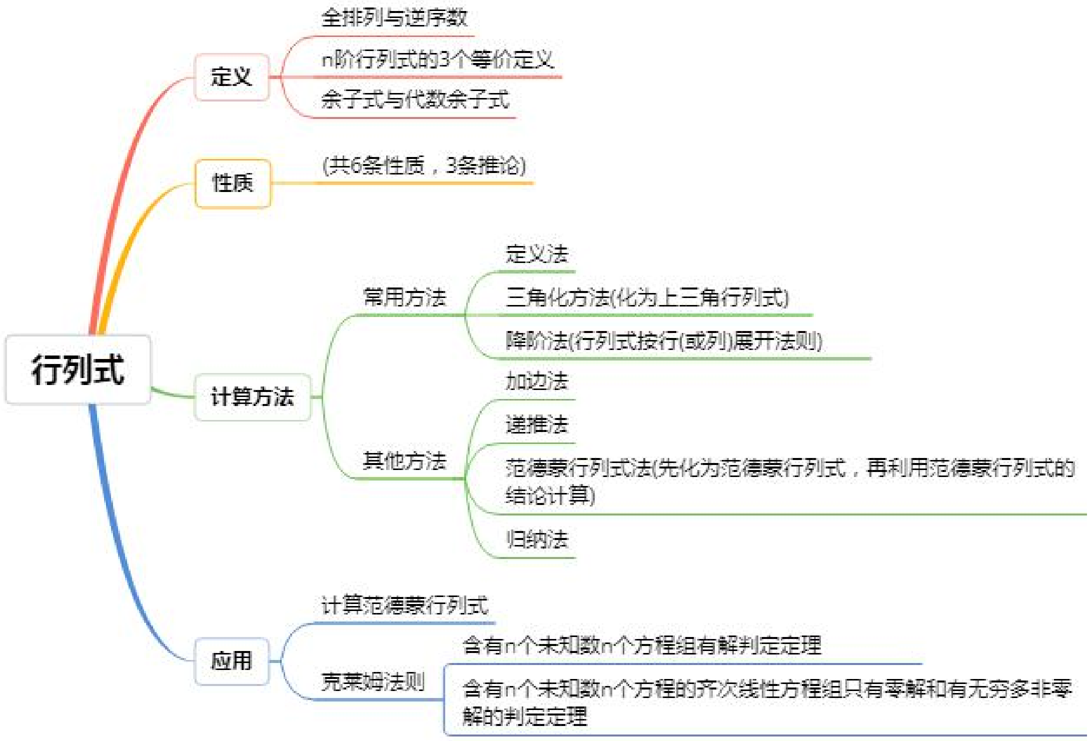
$$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\overset{\substack{r_i-r_1\\(i=2,\cdots,n)}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}\text{(称此行列式为爪形行列式)}$$

$$\overset{c_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}c_i}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i})a_2a_3\cdots a_n$$

$$=(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n.$$

注：第 5 题和第 6 题形式类似，解答方法迥异，请大家仔细思考一下.

第一章　　行列式知识图解


行列式
定义
全排列与逆序数
n阶行列式的3个等价定义
余子式与代数余子式
性质
(共6条性质，3条推论)
计算方法
常用方法
定义法
三角化方法(化为上三角行列式)
降阶法(行列式按行(或列)展开法则)
其他方法
加边法
递推法
范德蒙行列式法(先化为范德蒙行列式，再利用范德蒙行列式的结论计算)
归纳法
应用
计算范德蒙行列式
克莱姆法则
含有n个未知数n个方程组有解判定定理
含有n个未知数n个方程的齐次线性方程组只有零解和有无穷多非零解的判定定理