第六章 二次型

第一讲 二次型及其矩阵表示

一、二次型的基本概念

定义

把一个含有n个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad (1.1)$$

称为n元二次型, 简称为二次型.

当 $a_{ij}(1\le i\le j\le n)$ 为复数时, f 称为复二次型;

当 $a_{ij}(1\le i\le j\le n)$ 为实数时, f 称为实二次型.

矩阵表示

1. 用和号表示：

对二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^{\ 2}+a_{22}x_2^{\ 2}+\cdots+a_{nn}x_n^{\ 2}$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

取 $a_{ij}=a_{ji}$，则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$ 二次型(1.1)可以写成

$$f=a_{11}x_1^{\ 2}+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^{\ 2}+\cdots+$$
$$+a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^{\ 2}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j.$$

2. 用矩阵表示:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\
&\quad + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&\quad + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\
&= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则二次型可记作 $f=x^TAx$，其中 A 为对称矩阵.

二次型的矩阵及秩

在二次型的矩阵表示中，任给一个二次型，就唯一地确定一个对称矩阵；

反之，任给一个对称矩阵，也可唯一地确定一个二次型.

这样，二次型与对称矩阵之间存在一一对应关系.

称对称矩阵 A 为二次型 f 的矩阵；

也称 f 为对称阵 A 的二次型，

矩阵 A 的秩就叫做二次型 f 的秩.

例 写出二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ 的矩阵.

解: $a_{11} = 1, a_{22} = 2, a_{33} = -3, a_{12} = a_{21} = 2,$

$a_{13} = a_{31} = 0, a_{23} = a_{32} = -3.$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$ 则 $r(A) = 3.$

故二次型 f 的秩为3.

二、线性变换

定义

关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (1.4)$$

称为由变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个线性变换.

记 $C = (c_{ij})$ ，则上述可逆线性变换可记作 $x = Cy$.

其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

C 称为该线性变换的矩阵.

当 $|C|\neq 0$ 时, 称该线性变换为可逆的线性变换, 或称非退化的线性变换.

当 C 为正交矩阵时, 则称该线性变换为正交线性变换, 简称正交变换.

线性变换把二次型变成二次型, 二次型的化简就是要寻求可逆的线性变换将二次型变成比较简单的形式.

三、矩阵的合同

设二次型 $f = x^T Ax$ ，经可逆的线性变换 $x = Cy$ 后，变成

$$f = x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T\left(C^T AC\right)y = y^T By$$

其中 $B = C^T AC$

由于 $B^T = (C^T AC)^T = C^T AC = B$ 知 B 为对称矩阵.

定义

设 A, B 都是 n 阶方阵，如果存在 n 阶可逆矩阵 C 使 $B = C^T AC$ （1.5）

则称 A 与 B 合同.

注

1. 合同的矩阵，秩相等；

2. 合同关系是一种等价关系，具有自反性，对称性，传递性；

3. 二次型经可逆变换后，对应的矩阵具有合同关系.

将上述结论总结, 可得下述定理

定理

任给可逆矩阵 C ，令 $B=C^TAC$ ，如果 A 为对称矩阵,

则 B 也为对称矩阵, 且 $r(B)=r(A)$.

第二讲 用正交变换法化二次型为标准形

定义

只含平方项

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2 \qquad (2.1)$$

的二次型，称为**二次型的标准形（或法式）**.

例如 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2$.

(1) (2) (3) 都是二次型，但只有(3)是标准型.

标准形对应的矩形是对角矩阵.

二次型的讨论, 主要任务是: 寻求可逆的线性变换, 将二次型化为标准形,

即讨论二次型的矩阵与相应的对角矩阵的合同问题.

将一个二次型, 用可逆变换化成标准形的过程, 称之为二次型的化简.

二次型 $f = x^T Ax$ 经可逆变换 $x = Cy$ 后, 其秩不变, 但 f 的矩阵由 A 变为 $B = C^T AC$.

要使二次型 f 经可逆变换 $x=Cy$ 变成标准形, 就是要使

$$y^T C^T ACy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

就是要使 $C^T AC$ 成为对角矩阵.

二次型的化简, 通常有正交变换法、配方法、初等变换法.

正交变换法

由于对任意的实对称矩阵 A ，总有正交矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ ，

即 $P^{-1}AP=\Lambda$. 把结论应用于二次型, 有

定理

(主轴定理) 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$,

总有正交变换 $x=Py$ 使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值.

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤:

1. 将二次型表成矩阵形式 $f = x^T Ax$ ，求出 A;

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ ；

4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 正交化, 单位化, 得 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ ，记 $C = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ；

5. 作正交变换 $x = Cy$, 则得 f 的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

例 将二次型 $f=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

通过正交变换 $x=Py$，化为标准形.

解 1. 写出对应的二次型矩阵A：

$$A=\begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

2. 求出对称矩阵A特征值：

$$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{pmatrix}=(\lambda-18)^2(\lambda-9).$$

从而，得特征值 $\lambda_1=9,\lambda_2=\lambda_3=18.$

3. 求出每个特征值的特征向量：

将 $\lambda_1=9$ 代入 $(A-\lambda E)x=0$，得基础解系 $\xi_1=(\frac{1}{2},1,1)^T$.

将 $\lambda_2=\lambda_3=18$ 代入 $\left(A-\lambda E\right)x=0$，得基础解系

$$\xi_2=(-2,1,0)^T,\xi_3=(-2,0,1)^T.$$

4. 将特征向量正交化：

取 $\alpha_1=\xi_1,\alpha_2=\xi_2,\alpha_3=\xi_3-\dfrac{[\alpha_2,\xi_3]}{[\alpha_2,\alpha_2]}\alpha_2$,

得正交向量组

$$\alpha_1=(\frac{1}{2},1,1)^T,\alpha_2=(-2,1,0)^T,\alpha_3=(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1)^T.$$

5. 将正交向量组单位化, 得正交矩阵 P

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \quad (i=1,2,3),$

得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ -4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$

所以

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

于是所求正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有 $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$

第三讲 用配方法化二次型为标准形

定理

任何二次型都可通过非退化线性变换(可逆变换)化为标准形.

步骤:

1. 若二次型含有 x_i 的平方项,则先把含有 x_i 的乘积项集中,然后配方,

   再对其余的变量用同样的方法配方,直到都配成平方项为止,经过非退化线性变换,就得到标准形;

2. 若二次型中不含有平方项,但是 $a_{ij} \neq 0(i \neq j)$,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ \quad x_k = y_k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n, \text{且} k \neq i, j)$$

化二次型为含有平方项的二次型,然后再按1中方法配方.

例 化简二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

为标准形, 并求所用的变换矩阵.

解

含有x_1的平方项

含有x_1的项配方

$$f=\boxed{x_1^2}+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

$$=\boxed{x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3}+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+\left(x_2+2x_3\right)^2.$$

令 $$\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= y_1^2 + y_2^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(|C| = 1 \neq 0\right).$$

例 化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形, 并求所用的变换矩阵.

解 由于所给二次型中无平方项, 所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

代入 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$,

得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

再配方，得 $f=2\left(y_1-y_3\right)^2-2\left(y_2-2y_3\right)^2+6y_3^2.$

令
$$\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3, \\ z_3=y_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3 \end{cases}\quad \text{即}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

得 $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\left(\left|C\right|=-2\neq 0\right).$$

第四讲　用初等变换法化二次型为标准形

由于对称矩阵A合同于对角矩阵, 因此存在可逆矩阵C使　$C^TAC=\Lambda$.

$$\begin{pmatrix} C^T & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} C^TA \\ E \end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} C^TAC \\ C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix},$$

而C可写成有限个初等矩阵的乘积, 即

$$C=P_1P_2\cdots P_s,$$

因此对$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$进行初等列变后, 再对$A$施行相应的初等行变换, 当$A$化为对角矩阵时, E就化为所求的C.

例1 化二次型$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$为标准形, 并求所用的变换矩阵.

解

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{c_3 - c_1}{\overset{c_2 - c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&4\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\underset{r_3-2r_2}{\overset{c_3-2c_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad(|C|=1\neq 0).$$

相应的可逆变换为 $x=Cy$，标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2.$$

小结

将一个二次型化为标准形，可以用正交变换法，（也可以用拉格朗日配方法），或正交变换法，这取决于问题的要求：

1、如果需找出一个正交矩阵，无疑应使用正交变换法；

2、如果只需要找出一个可逆线性变换，那么三种方法都可以使用． 正交变换法的好处是有固有的步骤，可以按部就班一步一步求解，但计算量通常较大；

3、如果二次型中变量个数较少，使用配方法反而比较简单．

注

使用不同的方法化简二次型，所得的标准形可能不同，但标准形所含有的项数必定相同，都等于所给定的二次型的秩．

第五讲　　有定性的判断（1）

二次型的正(负)定性

定义　设有实二次型 $f = x^T Ax$ ，如果对任取的 x，

（1） $f \geq 0$ ，当且仅当 $x = 0, f = 0$ ，则称二次型 f是正定二次型，则称对称矩阵 A 为正定矩阵；

（2） $f \leq 0$ ，当且仅当 $x = 0, f = 0$ ，则称二次型 f是负定二次型，则称对称矩阵 A 为负定矩阵；

（3） $f \geq 0$(或 $f \leq 0$)，则称二次型 f是半正定(或半负定)二次型，同时称矩阵 A是半正定矩阵(或半负定矩阵)；

（4） f 的值有正有负，则称二次型 f是不定的.

例如　$f = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ 为正定二次型；$f = -x_1^2 - 3x_2^2$ 为负定二次型；

但　$f = x^2 + 4y^2$ 为半正定二次型.

注

1、一个二次型的标准形一般不唯一，但标准形中所含的项数是唯一的，也就是说，同一个二次型的不同标准形所含的项数是相同的.

2、二次型的标准形所含的项数等于这个二次型的秩.

设二次型 f 的标准形为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-c_1y_{p+1}^2-\cdots-c_qy_r^2, \quad (1)$$

其中 $d_i(1\le i\le p)>0,c_j(1\le j\le q)>0$ ，且 $p+q=r.$

对这个二次型,作如下可逆线性变换:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \cdots\cdots \\ y_p = \dfrac{1}{\sqrt{d_p}} z_p, \\ y_{p+1} = \dfrac{1}{\sqrt{c_1}} z_{p+1}, \\ \cdots\cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{c_q}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \cdots\cdots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

变成如下形式: $f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$.

定义

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$ 称为二次型 f 的规范形.

定义

在实二次型 f 的标准型中, 正系数个数 p 称为二次型 f 的正惯性指数;

负系数个数 q 称为二次型 f 的负惯性指数.

惯性定理与规范形

惯性定理

设二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，它的秩为$r$，如果存在两个实的可逆变换$x=Cy$

及$x=Pz$ 使$f=k_1{y_1}^2+k_2{y_2}^2+\cdots+k_r{y_r}^2$及$f=\lambda_1{z_1}^2+\lambda_2{z_2}^2+\cdots+\lambda_r{z_r}^2$，

则$k_1,\cdots,k_r$中正数的个数与$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$中正数的个数相等，负数的个数也相等.

注

1、二次型 $f = x^T Ax$ 的标准形中正惯性指数与负惯性指数是唯一确定的，与可逆线性变换的选取无关.

2、二次型的规范形是唯一的.

正(负)定二次型的判别

定理3.2

实二次型$f = x^T Ax$为正(负)定的充分必要条件是:它的正(负)惯性指数为n.

推论1

对称矩阵A为正定的充分必要条件是A 的特征值全为正.

推论2

实二次型$f = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为半正(负)定的充分必要条件是:它的正(负)惯性指数等于二次型的秩.

推论3

可逆变换不改变实二次型$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的正定性.

推论4

对称矩阵A为正定的充分必要条件是：A与单位矩阵合同.

定理3.3

对称矩阵A正定的充要条件是存在可逆矩阵C使$A = C^TC$.

证明

充分性：对任意的$x \neq 0$，有

$$x^TAx = x^T(C^TC)x = (Cx)^T(Cx) = ||Cx||^2 > 0.$$

必要性：如果A正定，由推论4知，存在可逆矩阵C使

$$A = C^TEC = C^TC.$$

定理3.4

设A为正定矩阵，则

(1) A 的主对角线元素$a_{ii} > 0(i = 1,2,\cdots,n)$;

(2) $|A| > 0$.

推论

设A为负定矩阵，则

(1) A 的主对角线元素$a_{ii} < 0(i = 1,2,\cdots,n)$;

(2) $|-A| = (-1)^n|-A| > 0.$

定义3.3

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，称

$$|A_k|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$ 为A的k阶顺序主子式.

定理3. 5

对称矩阵A为正定的充分必要条件是A的各阶主子式为正，即$a_{11} > 0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots$ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$；亦即$n$阶方阵$A$为正定矩阵的充要条件是它所有的顺序主子式都大于零.

对称矩阵A 为负定的充分必要条件是奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, (r = 1,2,\cdots,n).$$

亦即n阶方阵A为负定矩阵的充要条件是它所有的偶数阶顺序主子式都大于零，所有的奇数阶顺序主子式都小于零. 这个定理称为霍尔维茨定理.

注

（1）若A,B均为n阶正定矩阵，则$A+B$也是正定矩阵；（证明 用正定二次型的定义）

（2）设A为正定实对称阵，则A^T,A^{-1},A^*均为正定矩阵.（证明见教材）

第六节　有定性的判断（2）

例1　　判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

是否正定.

解　　$f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

它的顺序主子式

$$5>0,\qquad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1>0.$$

故上述二次型是正定的.

例2　判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$$

是否正定.

解　用特征值判别法.

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&5\end{pmatrix}$,

令 $|A-\lambda E|=0 \quad \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=6.$

即知 A 是正定矩阵.　故此二次型为正定二次型.

例3　　判别二次型

$$f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$$

的正定性.

解　f 的矩阵为　$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,

$$a_{11} = -5 < 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0,\ |A| = -80 < 0,$$

根据定理知f为负定.

小结

正定二次型（正定矩阵）的判别方法：(1)定义法;(2)顺次主子式判别法;(3)特征值判别法.

当矩阵的具体形式已知时,可选用顺序主子式法,矩阵形式未知时,一般用分解为可逆矩阵的转置与其乘积的分解来处理.

温馨提示：

此习题为本章补充练习，针对《线性代数》慕课第六章所介绍内容设计，并附有答案和解析，建议大家学习完本章内容后完成！建议时量：60 分钟.

一、填空与选择题：

1、二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$ 的矩阵为（　　）.

2、二次型 $f(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2+2xy+4xz-6yz$ 的秩为（　　）.

3、若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&2&t\end{pmatrix}$ 正定，则 t 的取值范围为（　　）.

4、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-4x_2x_3$ 的负惯性指数为（　　）.

5、以下结论不正确的是（　　）.

A 若存在可逆矩阵 C，使得 $A=C^TC$，则 A 是正定矩阵；

B 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 是正定二次型；

C n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件是 A 的特征值全为正数；

D n 元实二次型正定的充要条件是 f 的正惯性指数为 n.

6、设 A,B 都是 n 阶正定矩阵，则 AB 一定是（　　）.

A 对称矩阵；　B 正交矩阵；　C 正定矩阵；　D 可逆矩阵.

7、n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件是（　　）.

A A 的所有主对角线上的元素 $a_{ii}>0,(i=1,2,\cdots,n)$；　B $r(A)=n$；

C A 的所有特征值非负；　D A^{-1} 为正定矩阵.

8、设 A 为正定矩阵，则下列矩阵中不一定正定的是（　　）.

A A^T；　B A^{-1}；　C $A+E$；　D $A-E$.

二、用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-4x_1x_3$ 为标准形，并求出所用线性变换.

三、用配方法化下列二次型为标准形，并求出所用线性变换.

1、$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$；

2、$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

四、判别二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 的正定性.

答案与解析：

一、填空与选择题：

1、$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解析：此题极易出错！四元二次型的矩阵为四阶对称矩阵，这里需注意此题中二次型的表达式不含变量 x_4 的项.

2、3.

3、$t > 2$.

4、1.

解析：（1）由主轴定理知：任意一个 n 元实二次型 f 都可以通过一个正交变换化为标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵的 n 个特征值；

（2）n 元实二次型 f 的标准形不唯一，但由惯性定理知，f 的标准形中，正系数个数（称为正惯性指数）及负系数个数（称为负惯性指数）是唯一确定的，它与所用的可逆线性变换无关.

5、B.

解析：定理 设 $f = x^T Ax$ 是关于 x 的 n 元实二次型，则下列命题等价：

（1）A 是正定矩阵；

（2）f 的正惯性指数为 n；

（3）A 的特征值全大于零；

（4）A 的所有顺序主子式（共 n 个）全大于零；

（5）存在可逆矩阵 C，使得 $A = C^T C$.

题中选项 A，C，D 都可由此定理得出，下面看选项 B，初看起来该选项也对，但是该二次型有三个变量，当 f 为零时只能得到 $x_1 = x_2 = 0$，不能得到 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，从而由正定二次型的定义不能得到 f 是正定二次型.

6、D.

解析：正定矩阵必为对称矩阵，A, B 正定时，说明 A, B 都是对称矩阵，但不能保证 AB 是对称矩阵，所以 AB 不可能是正定矩阵；当 A, B 正定时，它们的特征值都大于零，由特征值的性质有 $|A| > 0, |B| > 0$，从而 $|AB| > 0$，说明 AB 为可逆矩阵.

7、D.

解析：由上述第 5 题解析中给出的定理知选项 A、B、C 均错. 由 A 的特征值与 A^{-1} 的特征值的关系，A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征值都大于零 $\Leftrightarrow$ A^{-1} 的特征值都大于零 $\Leftrightarrow$ A^{-1} 正定，所以 D 正确.

8、D.

解析：在第 7 题的解析基础上继续分析此题，显然 B 正确，由于 A 和 A^T 的特征值相同，所以 A^T 也正定，从而选项 A 正确. 下面看选项 C 和 D：由方阵 A 和 A 的矩阵多项式的特征值的关系，若 λ 是 A 的一个特征值，则 $\lambda+1,\lambda-1$ 分别是 $A+E,A-E$ 的一个特征值，显然 $\lambda>0$ 不能保证 $\lambda-1>0$，从而不能保证 $A-E$ 的特征值全为正，所以 $A-E$ 不一定是正定矩阵.

二、此类题是在实对称矩阵的对角化的基础上完成的，由主轴定理知，一定可以找到一个正交变换 $x=Py$ 将 f 化为标准形，找正交矩阵 P 的过程就是需将 f 所对应的那个实对称矩阵 A 对角化，所以大家首先必须熟练掌握实对称矩阵的对角化. 本题解答步骤如下：

1、写出二次型的矩阵，并求出其所有特征值.

$A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-2\\0&1-\lambda&0\\-2&0&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(\lambda-4)$，得特征值为：

$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

2、分别求出各特征值对应的齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 的基础解系.

（1）当 $\lambda_1=0$ 时，系数矩阵 $A-0E=\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

（2）当 $\lambda_2=1$ 时，系数矩阵 $A-E=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$；

（3）当 $\lambda_3=4$ 时，系数矩阵 $A-4E=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-3&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

3、将基础解系中的向量单位正交化

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3属于不同的特征值，必两两正交，所以只需对它们单位化：

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};\quad \gamma_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad \gamma_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

4、写出正交变换和标准形.

构造正交矩阵 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，所用正交变换为$x=Py$，

二次型的标准形为：$f=x_2^2+4x_3^2$.

三、用配方法将二次型化为标准形时，一般将二次型分为含平方项和不含平方项两种情形，并分别有相对固定的方法，新课学习中有详细介绍. 这里特各举一例，解答思路如下：

1、此题为含平方项的二次型

（1）将含变量x_1的项分为一组，并配方，同时将其它项进行整理；

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3\\&=(x_1^2+2x_1x_2)+2x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-x_2^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3\end{aligned}$$

（2）类似于第（1）步的做法处理含变量x_2的项；

$$\begin{aligned}&=(x_1+x_2)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2\end{aligned}$$

注：这里进行完第（2）步时，f正好化为两项的平方和，所以不需再对变量x_3进行类似的运算. 对f的变量按上述方法配方时，如有n个变量，则最多进行n次配方运算.

（3）依次令每一个完全平方项的底数为$y_i(i=1,2,\cdots,k,k\le n)$，得到关于$y_i$的标准形，同时可写出相应的线性变换. 此题的完整解答过程为：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2\end{aligned}$$

化为标准形：$f=y_1{}^2+y_2{}^2$，所用线性变换为$\begin{cases} y_1=x_1+x_2; \\ y_2=x_2+2x_3; \\ y_3=x_3. \end{cases}$，即$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3; \\ x_2=y_2-2y_3; \\ x_3=y_3. \end{cases}$，写成

矩阵形式为$x=Cy$，其中$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

注：为巩固上述方法，请大家再独立完成下题：

用配方法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2x_3$为标准形，并求出所用线性变换.

答案：$f=2y_1^2+y_2^2-9y_3^2$，所用线性变换$x=Cy$，其中$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2、此题为不含平方项的二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

（1）由于$f(x_1,x_2,x_3)$不含平方项，通过线性变换$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_1=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$（即$x=C_1y$，其中

$C_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$）将$f$化为关于变量$y_1,y_2,y_3$的含平方项的二次型，即

$$f=x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3 \quad \underline{\underline{x=C_1y}} \quad y_1^2-y_2^2+2y_1y_3-6y_2y_3$$

（2）将关于变量y_1,y_2,y_3的含平方项的二次型f按照第1题的方法化为标准形；

$$\begin{aligned} f &= x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3 \\ &= y_1^2-y_2^2+2y_1y_3-6y_2y_3 \\ &= (y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-(y_2^2+6y_2y_3)-y_3^2 \\ &= (y_1+y_3)^2-(y_2+3y_3)^2+9y_3^2-y_3^2 \\ &= (y_1+y_3)^2-(y_2+3y_3)^2+8y_3^2 \\ &= z_1^2-z_2^2+8z_3^2 \end{aligned}$$

所用线性变换为$\begin{cases} z_1=y_1+y_3; \\ z_2=y_2+3y_3; \\ z_3=y_3. \end{cases}$，即$\begin{cases} y_1=z_1-z_3; \\ y_2=z_2-3z_3 \\ y_3=z_3. \end{cases}$，写出矩阵形式为$y=C_2z$，其中

$C_2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以，关于变量 x_1,x_2,x_3 的二次型 f 化为关于 z_1,z_2,z_3 的标准形 f 所用的线性变换为 $x=C_1y=C_1(C_2z)=(C_1C_2)z=Cz$，其中

$$C=C_1C_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-4\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

四、方法一：用配方法化二次型为标准形，即

$$\begin{aligned}f&=5x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3\\&=5x_1^2+[x_2{}^2+4x_2(x_1-x_3)]+5x_3^2-8x_1x_3\\&=5x_1^2+[x_2+2(x_1-x_3)]^2-4(x_1-x_3)^2+5x_3^2-8x_1x_3\\&=[2(x_1-x_3)+x_2]^2+x_1^2+x_3^2\geq 0\end{aligned}$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=0$， $f=0$，所以 f 正定.

方法二：已知 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$，由于各阶顺序主子式为：

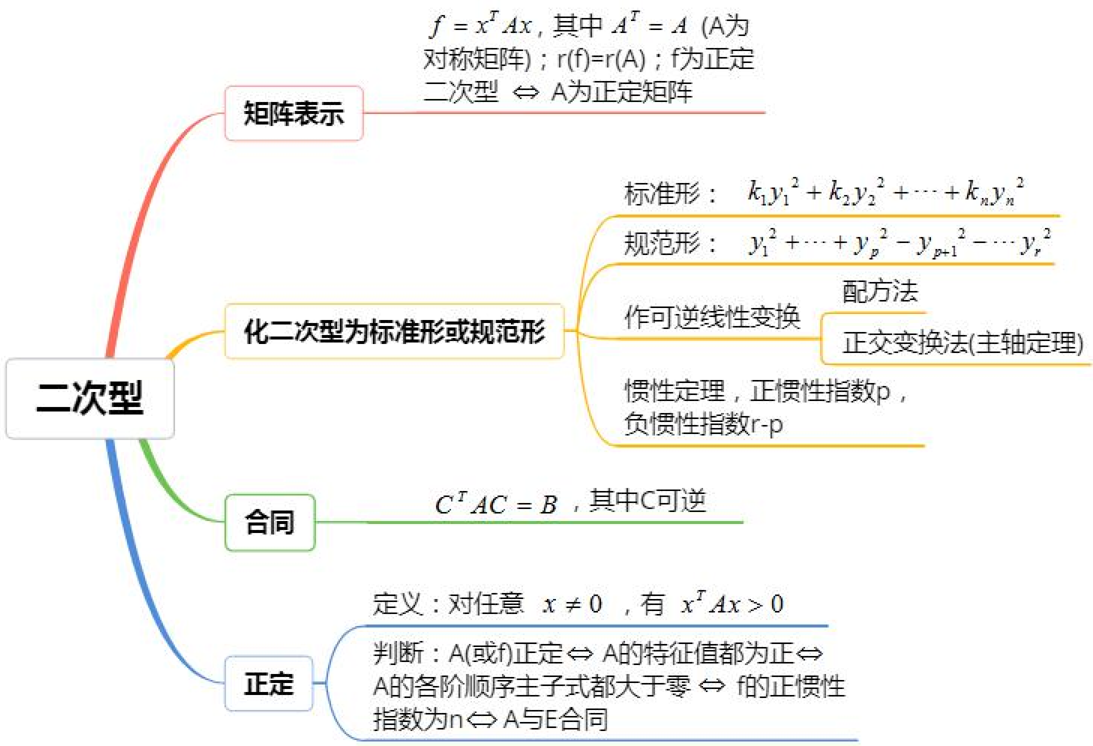
$$|5|>0;\ \begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0;\ \begin{vmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}=1>0.$$

因此 A 为正定矩阵，即 f 为正定二次型.

注：（1）用配方法时，我们一般先考虑含变量 x_1 的项进行配方，但方法一中先考虑含变量 x_2 的项进行配方也是可行的，也更简便；

（2）当 f 的具体形式给出时，通常用顺序主子式法判断 f 的正定性相对简单一些.

第六章　　二次型知识图解



二次型
矩阵表示
$f = x^T Ax$，其中 $A^T = A$ (A为对称矩阵)；r(f)=r(A)；f为正定二次型 ⇔ A为正定矩阵
化二次型为标准形或规范形
标准形： $k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$
规范形： $y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots y_r^2$
作可逆线性变换
配方法
正交变换法(主轴定理)
惯性定理，正惯性指数p，负惯性指数r-p
合同
$C^TAC = B$，其中C可逆
正定
定义：对任意 $x \neq 0$，有 $x^TAx > 0$
判断：A(或f)正定⇔ A的特征值都为正⇔ A的各阶顺序主子式都大于零 ⇔ f的正惯性指数为n⇔ A与E合同