第8章 向量代数与空间解析几何

1、向量的概念和线性运算：

（1）向量的加法，数乘向量，向量的减法

（2）与$\vec{a}$同方向的单位向量为：

$$\vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.\quad \rightarrow \text{将}\vec{a}\text{单位化．此时，}\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0.$$

2、向量的坐标、方向余弦、方向角：

（1）$a=a_x i+a_y j+a_z k=\{a_x,a_y,a_z\}$

（2）$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

（3）$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

(4) 设 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

(5) $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$.

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

(6) $$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.}$$

即对应分量成比例.

3、数量积

（1）数量积的定义：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$，

此时，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$。

（2）数量积的性质

1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　交换律

2）$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　分配律

3）$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

4）$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

5）$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

（2）数量积的坐标表示：

设$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

4、向量积

（1）向量积的定义：设$\vec{a}$与$\vec{b}$为向量，若$\vec{c}$满足：

1）$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$，$\theta$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；

2）$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$；

3）$\vec{a}$，$\vec{b}$与$\vec{c}$服从右手规则.

则称$\vec{c}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，记作$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

（2）向量积的性质

1） $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

2） $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{d}=\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{d}$

3） $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

4） $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

5） $\vec{a}\,//\,\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

（2）向量积的坐标表示：

设 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$， $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

5、平面方程

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$， $\vec{n} = \{A, B, C\}$，则

（1）点法式方程： $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

（2）一般方程： $Ax + By + Cz + D = 0$

（3）截距式方程： $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

（4）特殊的平面：

1） $D = 0$，过原点；

2） $A = 0$， $\vec{n} = \{0, B, C\}$，即 $By + Cz + D = 0$，平行于 x 轴.

3） $A = 0$， $B = 0$， $\vec{n} = \{0,0,C\}$，即，$Cz + D = 0$，平行于 xoy 面.

6、直线方程

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，$\vec{s} = \{m, n, p\}$，则

（1）点向式方程：$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

（2）参数方程：$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

（3）一般方程：$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

此时，可取 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

7、常用空间曲面

（1）柱面：不显含某一个变量。

（2）球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$。

（3）椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

（4）椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$。

（5）锥面：$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$。

8、空间曲线

（1）一般方程

（2）参数方程

（3）曲线的投影柱面与投影：

设空间曲线 C 方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，则从两方程中消去 z，即得到以曲线 C 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程。

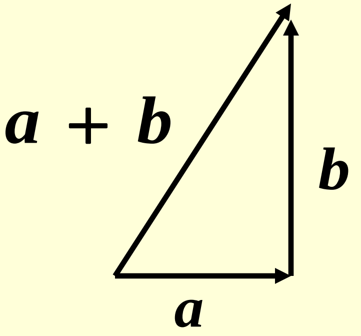
一、填空题:

1、已知 a 与 b 垂直,且 $|a| = 5, |b| = 12$,则

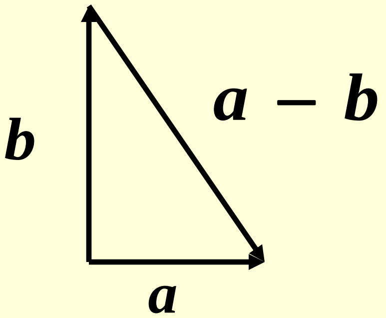
$|a + b| =$ 13　　　$|a - b| =$ 13

分析　如图所示,

$$|a + b| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$



$$|a - b| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$



2、设向量 $\overrightarrow{OA}=\{1,2,1\},\overrightarrow{OB}=\{-2,-1,1\}$，则

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ <u>-3</u> $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=$ <u>$\{3,-3,3\}$</u> $\cos\angle AOB=$ <u>$-\frac{1}{2}$</u>

分析

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times(-2)+2\times(-1)+1\times1=-3.$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}k=3i-3j+3k$$

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$$

3、已知点 $A(4,0,5)$, $B(2,1,3)$, 则与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量为

$\frac{1}{3}\{-2,1,-2\}$

分析 $a^0 = \dfrac{1}{|a|}a$

$$\overrightarrow{AB} = \{-2,1,-2\},$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\{-2,1,-2\}$$

4、若两平面 $kx+y+z-k=0$ 与 $kx+y-2z=0$ 互相垂直，则 $k=$ $\underline{\quad \pm 1 \quad}$

分析

（1）π_1和π_2垂直 $\Longleftrightarrow$ $n_1 \perp n_2$ $\Longleftrightarrow$ $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

（2）π_1和π_2平行 $\Longleftrightarrow$ $n_1 // n_2$ $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

由两平面互相垂直知，$k^2+1-2=0$，

解得 $k=\pm 1$.

5、过点$(3,-2,-1)$ 和点$(5,4,5)$ 的直线方程为

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+1}{6}$$

分析

取 $s=\{5-3,4-(-2),5-(-1)\}=\{2,6,6\}$

则直线方程为

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{6}=\frac{z+1}{6}$$

6、点$(1,3,2)$到平面$x+2y-2z+3=0$的距离为 2

分析

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d=\frac{|1+2\times3-2\times2+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

7、母线平行于 z 轴且通过曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ x^2=y^2+z^2 \end{cases}$

的柱面方程是 $\underline{5x^2-3y^2=1}$

分析 两方程消去 z 得所求柱面方程

$$\frac{1-x^2-y^2}{4}=x^2-y^2$$

即 $5x^2-3y^2=1$

8、球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 的球心为

$(1,-2,0)$ 半径为 $\sqrt{5}$

分析 将方程配方：

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$$

二、单项选择题：

1、若两直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{6}$ 与 $x-1=\frac{y+5}{2}=\frac{z+2}{k-2}$

平行，则 $k=$ <u>D</u>

（A）2；（B）3；（C）4；（D）5。

分析

（1）$l_1 // l_2 \Longleftrightarrow s_1 // s_2 \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

（2）$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow s_1 \perp s_2 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

2、设平面方程为 $Bx + Cz + D = 0$，且 $BCD \neq 0$ 则平面 ____B____

（A）平行于 x 轴；（B）平行于 y 轴；

（C）经过 y 轴；（D）垂直于 y 轴。

分析 特殊平面

（1）$D = 0$：过原点

（2）$A = 0$：平行于 x 轴

（3）$A = 0, B = 0$：平行于 xOy 面

3、过点 $(2,1,-1)$ 且与平面 $2x+3y-z+1=0$ 垂直的直线方程为 C

(A) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$；(B) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$

(C) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$；(D) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$。

分析 取 $s=n=\{2,3,-1\}$

4、设三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的模分别为3，6，7，且满足

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ __B__

（A）45；（B）—47；（C）42；（D）—43。

分析 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{a}=-|\vec{a}|^2=-9$

$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{b}=-|\vec{b}|^2=-36$

$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}=0$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\vec{c}=-|\vec{c}|^2=-49$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}(-9-36-49)=-47.$

4、设三向量 a,b,c 的模分别为3，6，7，且满足

$a+b+c=0$ 则 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=$ ___B___

（A）45；（B）—47；（C）42；（D）—43。

分析 $(a+b+c)\cdot(a+b+c)=$

$$a\cdot a+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot a+b\cdot b+b\cdot c+c\cdot a+c\cdot b+c\cdot c=0$$

$\Rightarrow$

$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=\frac{1}{2}(-a\cdot a-b\cdot b-c\cdot c)$$

$$=\frac{1}{2}(-|a|^2-|b|^2-|c|^2)=-47.$$

5、方程 $x^2+4y^2=16$ 所表示的空间曲面的名称为 D

(A)椭球面；(B)球面；(C)椭圆抛物面；(D)柱面.

分析 常用空间曲面：

（1）柱面：不显含某一个变量

（2）球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

（3）椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（4）椭圆抛物面：$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

（5）锥面：$z^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

三、解答题

1、已知向量 $a=\{1,0,-1\}, b=\{2,2,-1\}$, 求 $(3a-2b)\times(a+b)$.

解

$$(3a-2b)\times(a+b)=3a\times a+3a\times b-2b\times a-2b\times b=5a\times b$$

而

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}k=2i-j+2k.$$

所以, $(3a-2b)\times(a+b)=10i-5j+10k.$

三、解答题

1、已知向量 $a = \{1,0,-1\}, b = \{2,2,-1\}$, 求 $(3a - 2b) \times (a + b)$.

解法二

$$3a - 2b = \{3,0,-3\} - \{4,4,-2\} = \{-1,-4,-1\}$$

$$a + b = \{1,0,-1\} + \{2,2,-1\} = \{3,2,-2\}$$

$$\Rightarrow (3a - 2b) \times (a + b) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= 10i - 5j + 10k$$

2、设 $m = 2a + b, n = ka + b$，其中 $|a| = 1, |b| = 2$ 且 $a \perp b$，求数 k 使得 $m \perp n$.

解 若 $m \perp n$，则有 $m \cdot n = 0$.

$$m \cdot n = (2a + b) \cdot (ka + b) = 2ka \cdot a + 2a \cdot b + kb \cdot a + b \cdot b$$

$$= 2k|a|^2 + (2 + k)a \cdot b + |b|^2 = 0$$

由 $a \perp b$ 得 $a \cdot b = 0$. 且 $|a| = 1, |b| = 2$

所以，$2k + 4 = 0 \Rightarrow k = -2$

3、设有点 $A(2,1,0)$ 和 $B(-2,3,2)$，求线段 AB 的垂直平分面方程。

解　取 $n = \overrightarrow{AB} = \{-4,2,2\}$，由于线段的中点在平面上且其坐标为

$$\left\{\frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}\right\} = \{0,2,1\}$$

因此，所求平面方程为

$$-4\cdot(x-0)+2\cdot(y-2)+2\cdot(z-1)=0$$

即 $2x - y - z + 3 = 0$

3、设有点 $A(2,1,0)$ 和 $B(-2,3,2)$，求线段 AB 的垂直平分面方程。

解法二 设所求平面上的任一点 $M(x,y,z)$，则

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2}$$

两边平方，整理得：

$$8x-4y-4z+12=0,$$

即 $2x-y-z+3=0$

4、已知点 $A(2,3,1)$, $B(-5,4,1)$, $C(6,2,-3)$, $D(5,-2,1)$, 求通过点 A 且垂直于 B, C, D 所确定的平面的直线方程。

解　$\overrightarrow{BC}=\{11,-2,-4\}$, $\overrightarrow{BD}=\{10,-6,0\}$　取

$$s=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 11 & -2 & -4 \\ 10 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} 11 & -4 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} k$$

$$=-24i-40j-46k$$

所以，直线方程为 $\dfrac{x-2}{-24}=\dfrac{y-3}{-40}=\dfrac{z-1}{-46}$

5、用点向式方程和参数方程表示直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

解 令 $y=0$，代入直线方程可得 $\begin{cases} x+z+1=0, \\ 2x+3z+4=0. \end{cases}$

解得 $x=1, z=-2.$ 取

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} k$$

$$=4i-j-3k$$

所以，直线的点向式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{-3}$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

6、求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-12}{3}=\dfrac{z-9}{3}$,

与平面 $x+3y-5z-2=0$ 的交点坐标。

解　直线的参数方程为 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=3t+12 \\ z=3t+9 \end{cases}$

设交点坐标为 $(x_0, y_0, z_0)=(t_0+1, 3t_0+12, 3t_0+9)$

由于交点在平面上，所以

$$(t_0+1)+3(3t_0+12)-5(3t_0+9)-2=0$$

解得 $t_0=-2.$

因此交点坐标为 $(-1,6,3)$.