第四章 线性方程组

第一讲 高斯消元法

一、线性方程组的相关概念

定义

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

称为 m 个方程，n 个未知量的线性方程组的代数形式，

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为未知量，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为常数项.

系数矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

常数项

增广矩阵：$\overline{A}=(A,b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

线性方程组的初等变换：

（1） 交换两个方程的次序；

（2） 某个方程乘以一个非零常数；

（3） 一个方程加上另一个方程的常数倍.

线性方程组的初等变换 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵的初等行变换

齐次线性方程组的初等变换 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵的初等行变换

二、高斯消元法

阶梯形方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_k. \end{cases}$$

主元

自由未知量

定义

将线性方程组通过初等变换化为同解的阶梯形方程组的过程称为高斯消元法.

适当地安排未知数的次序, 可将增广矩阵用初等行变换化成最简形矩阵:

$$\overline{A}=(A,b)\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,1} & \cdots & c_{2,n-r} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,1} & \cdots & c_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

相应的同解方程组为:

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + c_{1,1}x_{r+1} + \cdots + c_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \quad x_2 + \cdots + c_{2,1}x_{r+1} + \cdots + c_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad x_r + c_{r,1}x_{r+1} + \cdots + c_{r,n-r}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}. \end{cases}$$

结论:

1. 如果 $d_{r+1} \neq 0$, 原方程组无解;
2. 如果 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$, 原方程组有唯一解:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n;$$

3. 如果 $d_{r+1}=0$ 且 $r<n$，原方程组有无穷多组解：

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2,1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - c_{r,1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n-r}x_n, \\ x_{r+1} = x_{r+1}, \\ x_{r+2} = x_{r+2}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n. \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 是自由未知量.

例：利用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 13. \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 13. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \quad x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_2 + 8x_3 = 10. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \quad x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

得原方程的解为：$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

高斯消元法的矩阵形式:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&2&4&7\\1&3&9&13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&3&4\\0&2&8&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&3&4\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

同解方程组为: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\ \quad\ \ x_2+3x_3=4,\\ \qquad\qquad\ x_3=1.\end{cases}$

故原方程组的解为: $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=1,\\x_3=1.\end{cases}$

高斯消元法的核心:

利用初等行变换将线性方程组的增广矩阵化为阶梯形矩阵.

第二讲　齐次线性方程组有非零解的条件

一、齐次线性方程组的有关概念

定义

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

称该方程组为齐次线性方程组.

零解：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = (0, 0, \cdots, 0)^T$.

系数矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，　　$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，

齐次线性方程组的矩阵形式：$Ax=0.$

其中，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

齐次线性方程组的向量形式： $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0,$

其中 $\alpha_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)^T$ 是系数矩阵 A 的列向量.

定义

如果齐次线性方程组有非零解: $x=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$,

则存在一组不全为0的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ ，使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=0$ ，

从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关.

即齐次线性方程组的系数矩阵 A 的列向量组线性相关.

二、齐次线性方程组有非零解的条件

定理1

n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充要条件是系数矩阵 A 的秩 $r(A)<n.$

即 $Ax=0$ 只有零解的充要条件是 $r(A)=n$.

齐次线性方程组 $\xrightarrow{\text{高斯消元法}}$ 阶梯形

- 阶梯形 $\rightarrow$ 非零方程的个数等于未知量的个数 $\longrightarrow$ 仅有零解
- 阶梯形 $\rightarrow$ 非零方程的个数小于未知量的个数 $\longrightarrow$ 有非零解

$m < n \Rightarrow$ 有非零解

$m = n$,有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$

例　讨论如下齐次线性方程组是否有非零解.

$$\begin{cases} x_1 - \quad x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad kx_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

解法一 利用高斯消元法:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix},$$

所以, 当 $k=1$ 时, 方程组有非零解;

当 $k \neq 1$时, 方程组仅有零解.

解法二

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & k & 2\end{vmatrix}=2k-2,$$

所以, 当 $k=1$ 时, 方程组有非零解;

当 $k\neq 1$时, 方程组仅有零解.

三、齐次线性方程组解的性质

由齐次方程组的矩阵形式, 可得齐次方程组的解满足如下定理:

定理2

若 $x=\xi_1, x=\xi_2$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个解,

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

即齐次线性方程组的任意两个解之和还是它的解.

证明 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0.$

定理3

若 $x=\xi$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个解,

k 为任意常数, 则 $x=k\xi$ 也是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

即齐次线性方程组的解的任意常数倍还是它的解.

证明 $A(k\xi)=k(A\xi)=k0=0.$

容易推广到:

齐次线性方程组的解的线性组合 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r$ 也是它的解,

其中 $\xi_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为齐次线性方程组的解,

$k_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为任意常数.

本节主要内容:

1、 齐次线性方程组有非零解的条件;

2、 齐次线性方程组解的性质.

第三讲 齐次线性方程组的基础解系

一、齐次线性方程组的基础解系

回顾

齐次线性方程组的所有解恰好构成一个向量空间, 称之为解空间.

定义

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是齐次线性方程组的解向量, 若满足:

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关;

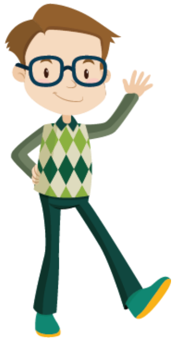
(2) 齐次线性方程组的任一解向量均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$,

线性表示, 则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$, 称为该方程组的一个基础解系.

注

1. 齐次线性方程组的的基础解系，实际上就是其解空间的一组基.

2. 基础解系的线性组合称为通解或一般解.



定理1

对于n元齐次线性方程组, 如果其系数矩阵的秩 r 小于未知量的个数n ,

则方程组的基础解系存在, 且含$n-r$ 个解向量, 即解空间的维数为$n-r$.

证明　不妨设对系数矩阵 A 进行初等行变换后, 得到其行最简形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

A 的最简形所对应的方程组为:

$$\begin{cases} x_1 = -c_{11}x_{r+1} - c_{12}x_{r+2} - \cdots - c_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -c_{21}x_{r+1} - c_{22}x_{r+2} - \cdots - c_{2,n-r}x_n, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}x_{r+1} - c_{r2}x_{r+2} - \cdots - c_{r,n-r}x_n, \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为自由未知量.

令 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 取下列 $n-r$ 组值:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

则依次可得主元 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的 $n-r$ 组解.

从而得到齐次线性方程组的 $n-r$ 个线性无关的解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-c_{11}\\ \vdots\\ -c_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-c_{12}\\ \vdots\\ -c_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1,n-r}\\ \vdots\\ -c_{r,n-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

显然，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

令 $x_{r+1}=k_1,x_{r+2}=k_2,\cdots,x_n=k_{n-r}$，

得 $$\begin{cases} x_1 = -c_{11}k_1 - c_{12}k_2 - \cdots - c_{1,n-r}k_{n-r}, \\ x_2 = -c_{21}k_1 - c_{22}k_2 - \cdots - c_{2,n-r}k_{n-r}, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_r = -c_{r1}k_1 - c_{r2}k_2 - \cdots - c_{r,n-r}k_{n-r}, \end{cases}$$

即 $$x = \begin{pmatrix} -c_{11}k_1 - c_{12}k_2 - \cdots - c_{1,n-r}k_{n-r} \\ -c_{21}k_1 - c_{22}k_2 - \cdots - c_{2,n-r}k_{n-r} \\ \vdots \\ -c_{r1}k_1 - c_{r2}k_2 - \cdots - c_{r,n-r}k_{n-r} \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-r} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -c_{11} \\ -c_{21} \\ \vdots \\ -c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -c_{12} \\ -c_{22} \\ \vdots \\ -c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-r} \begin{pmatrix} -c_{1,n-r} \\ -c_{2,n-r} \\ \vdots \\ -c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组的一个基础解系.

从而，方程组的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

其中，$k_i\,(i=1,2,\cdots,n-r)$ 为任意实数.

注

1. 自由未知量的选取不是唯一的；
2. $n-r$ 个自由未知量的取值不是唯一的，

   只需在 $n-r$ 维向量空间中任取一组基.

二、求解齐次线性方程组

例1 求方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$$

的一个基础解系和通解.

解 用初等行变换将系数矩阵 A 化为行最简形:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为自由未知量, 即得:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = \quad 2x_4, \\ x_4 = \quad\quad x_4. \end{cases}$$

令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2$，得:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

从而得方程组的一个基础解系为:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

方程组的通解为: $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$,

其中 k_1, k_2 为任意实数.

例2 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系,

$$\eta_1=\xi_1+\xi_2+\xi_3,\eta_2=\xi_2-\xi_3,\eta_3=\xi_2+\xi_3,$$

判定 η_1,η_2,η_3 是否也是 $Ax=0$ 的基础解系.

解 η_1,η_2,η_3 显然是 $Ax=0$ 的解, 故只需判定是否线性无关.

设有 $x_1,x_2,x_3,$

使得 $x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3=0,$

即 $x_1(\xi_1+\xi_2+\xi_3)+x_2(\xi_2-\xi_3)+x_3(\xi_2+\xi_3)=0,$

亦即 $x_1\xi_1+(x_1+x_2+x_3)\xi_2+(x_1-x_2+x_3)\xi_3=0.$

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关, 所以

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

又 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$

即上面方程组的系数行列式不等于0, 由此方程组只有零解,

所以 η_1,η_2,η_3 线性无关,

因而 η_1,η_2,η_3 也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

本节主要内容：

齐次线性方程组的基础解系及其通解的求解.

第四讲 非齐次线性方程组的解

一、非齐次线性方程组的有关概念

回顾

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 不全为0, 称其为非齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

称为导出组.

令 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$

非齐次线性方程组的矩阵形式：$Ax=b.$

非齐次线性方程组的向量形式：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b,$

其中 $\alpha_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)^T$ 是系数矩阵 A 的列向量.

非齐次线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ b 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

二、非齐次线性方程组的解

定理1

非齐次线性方程组有解的充要条件是 $r(A)=r(\overline{A})$

证明　充分性 $r(A)=r(\overline{A})$　即 $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b\right)$

因而 A 的列向量组的最大无关组也是 $\overline{A}$ 的列向量组的最大无关组,

因此 b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示,

所以该方程组有解.

必要性 因为该方程组有解, 所以

b 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价,

所以 $r(A)=r(\overline{A})$.

例1 已知如下方程组有无穷多组解, 求 a,b .

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2+4x_3=7, \\ x_1+bx_2+10x_3=a. \end{cases}$$

解 利用高斯消元法,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & b & 10 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 12-3b & a-4b+1 \end{pmatrix},$$

所以 $12-3b=0, a-4b+1=0,$

从而得 $a=15, b=4.$

三、非齐次线性方程组解的性质

定理2

若 η_1,η_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解,

则 $\eta_1-\eta_2$ 是其导出组 $Ax=0$ 的解.

证明 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0.$

定理3

若 ξ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解, η 为非齐次线性方程组 $Ax=b$的解, 则

$\xi+\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$的解.

证明 $A(\xi+\eta)=0+b=b.$

本节主要内容:

1. 非齐次线性方程组有解的充要条件;

2. 非齐次线性方程组解的性质.

第五讲 非齐次线性方程组解的结构

一、非齐次线性方程组的通解

定义

若 ξ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解,

η 为非齐次线性方程组 $Ax=b$的解，则方程组 $Ax=b$ 的通解为 $\xi+\eta$.

定理

当 $r(A)=r(\bar{A})=n$ 时,

非齐次线性方程组及其导出齐次线性方程组有唯一解;

当 $r(A)=r(\bar{A})=r<n$ 时,

非齐次线性方程组及其导出齐次线性方程组有无穷多组解;

定理

若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系, η 为 $Ax=b$ 的一个解,

则 $Ax=b$ 的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta.$

二、非齐次线性方程组求解

在解非齐次线性方程组时，首先写出其增广矩阵，用初等行变换将化为

行阶梯形矩阵来判别 $r(A)$ 是否等于 $r(\bar{A})$.

若 $r(A) \neq r(\bar{A})$ ，则方程组无解；

若 $r(A) = r(\bar{A}) = n$ 则最简方程组给出唯一解；

若 $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$ ，令自由未知量取任意实数，由最简方程组可直接写出方程组的通解.

例1 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

解 对增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换, 化为最简形矩阵:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $r(A) = r(\overline{A}) = 2$, 故原方程组有解, 对应同解方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = \dfrac{1}{2}, \\ x_3 - 2x_4 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2,$

方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k_1、k_2 为任意实数.

例2 讨论 λ 为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？有解时求出解.

解 对增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换，化为阶梯形矩阵：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-6 & \lambda-2 \end{pmatrix}.$$

（1） 当 $\lambda \neq -3,2$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=3$，方程组有唯一解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{\lambda+3} \\ \dfrac{1}{\lambda+3} \end{pmatrix}.$$

（2） 当 $\lambda=-3$ 时，$r(A)=2, r(\bar{A})=3$，所以此时方程组无解.

（3） 当 $\lambda=2$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=2<3$，此时方程组有无穷多解，

其通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（k 为任意实数）.

本节主要内容:

1. 非齐次线性方程组解的结构;

2. 非齐次线性方程组的求解.

温馨提示：

此习题为本章补充练习，针对《线性代数》慕课第四章所介绍内容设计，并附有答案和解析，建议大家学习完本章内容（最好学习完第五章复习长视频的版块一）后完成！建议时量：45分钟.

一、填空与选择题：

1、线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = a; \\ x_2 - x_3 = 2a; \\ x_3 - x_4 = 3a; \\ x_4 - x_1 = 1. \end{cases}$有解的充要条件为（　　）.

2、方程组$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的基础解系所含向量的个数是（　　）.

3、已知$Ax = b$是一个四元非齐次线性方程组，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是其三个解向量，且$r(A) = 3, \alpha_1 = (1,2,3,4)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0,1,2,3)^T, k$为任意常数，则线性方程组$Ax = b$的通解为（　　）.

A　$(1,2,3,4)^T + k(1,1,1,1)^T$；　　B　$(1,2,3,4)^T + k(0,1,2,3)^T$；

C　$(1,2,3,4)^T + k(2,3,4,5)^T$；　　D　$(1,2,3,4)^T + k(3,4,5,6)^T$.

4、设A是$m \times n$矩阵，$Ax = 0$是$Ax = b$的导出组，则下列结论正确的是（　　）.

A　若$Ax = 0$仅有零解，则$Ax = b$有唯一解；

B　若$Ax = 0$有非零解，则$Ax = b$有无穷多解；

C　若$Ax = b$有无穷多解，则$Ax = 0$仅有零解；

D　若$Ax = b$有无穷多解，则$Ax = 0$有非零解.

二、已知线性方程组$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a - 3; \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2. \end{cases}$，当参数$a$满足什么条件时，分别有

1、方程组有唯一解，并求解；

2、方程组无解；

3、方程组有无穷多解，并求解.

三、若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是某齐次线性方程组的一个基础解系，试判断$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$是否也是它的基础解系？

答案与解析：

一、填空与选择题：

1、$-\frac{1}{6}$.

解析：非齐次线性方程组有解的充要条件为系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩. 由于

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3a \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1+a+2a \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a+2a+3a \end{pmatrix},$$

所以，$1+6a=0$，即$-\frac{1}{6}$.

2、1.

解析：该方程组为齐次线性方程组，含 3 个未知数，系数矩阵的秩为 2.

齐次线性方程组 $Ax=0$ 有一重要结论：$r(A)$ +基础解系所含向量的个数=未知数个数 n.

所以，此题答案：1.

3、C.

解析：此题在第 2 题的基础上绕了个弯子. $Ax=b$ 的通解等于它的任意一个特解+它的导出组的通解.

（1）由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是 $Ax=b$ 的解，都可作为特解，因为条件中 α_1 已直接给出，所以特解取 α_1；

（2）对导出组 $Ax=0$，未知数个数为 4，$r(A)$ =3，说明其基础解系只含一个解向量，不妨设为 β（由于任意一个非零向量都是线性无关的，所以 $Ax=0$ 的任意一个非零解都可以作为基础解系），从而 $Ax=0$ 的通解为 $k\beta$（k 为任意常数）.

（3）下面求 β：因为 $A\alpha_1=b, A(\alpha_2+\alpha_3)=2b$，所以，$A[2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)]=0$，说明 $2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)$ 是 $Ax=0$ 的解，计算得出为 $(2,3,4,5)^T$.

正确答案：C.

4、D.

解析：此题探讨 $Ax=b$ 与其导出组 $Ax=0$ 的解的关系. $Ax=0$ 仅有零解只能得出 $r(A)=n$，不能得出 $r(A)=r(\overline{A})=n$，所以选项 A 错；$Ax=0$ 有非零解只能得出 $r(A)<n$，不能得出 $r(A)=r(\overline{A})<n$，所以选项 B 错；反过来，$Ax=b$ 有无穷多解，说明

$r(A)=r(\overline{A})<n$，显然 $r(A)<n$，从而 $Ax=0$ 有无穷多个非零解，所以选项 C 错.

正确答案： D.

二、

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 3(a-1) \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 3(a-1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & 3(a-1) \end{pmatrix} = \overline{B},$$

1、$a \neq -2$ 且 $a \neq 1$，方程组有唯一解，求解由 $\overline{B}$ 所对应的同解方程组得唯一解 $\dfrac{1}{a+2}(a-1,-3,-3)^T$；

2、$a=-2$ 时，方程组无解；

3、$a=1$ 时，方程组有无穷多解，求解方程组 $x_1+x_2+x_3=-2$（此时方程组只含一个方程）

得通解 $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.　$(k_1, k_2 \in R)$

三、是.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是某齐次线性方程组的一个基础解系，试判断 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是否也是它的基础解系？

解析：设 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的线性组合等于零，则有：$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$，即 $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为基础解系，必有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而 $\begin{cases} k_1+k_3=0; \\ k_1+k_2=0; \\ k_2+k_3=0. \end{cases}$ 又因为系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，说明该方程组只要零解，说明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，从而也是一个基础解系.

第四章　　线性方程组知识图解

- **线性方程组**
  - **通解的定义**
  - **非齐次线性方程组$Ax=b$**
    - 无解：$r(A)<r(A,b)$
    - 有解：$r(A)=r(A,b)$
      - 唯一解：$r(A)=r(A,b)=n$
      - 无穷多解：$r(A)=r(A,b)<n$
    - 通解：$Ax=b$的一特解+导出组$Ax=0$的通解
  - **齐次线性方程组$Ax=0$**
    - 解的判断
      - $r(A)=n$，只有零解
      - $r(A)<n$，无穷多解
    - 基础解系的定义
    - 基础解系与系数矩阵的关系：$r(A)$+基础解系所含向量的个数$=n$
    - 通解：基础解系的线性组合