# 研途考研数学零基础

——概率论与数理统计（数一、数三）

主讲：朱祥和

新浪微博：祥和老师

0 概率论的前世今生

1 概率论部分考察内容

2 数理统计部分考察内容

# 第一章　随机事件和概率

## §1 随机事件与运算

**【1. 随机试验】**

随机试验的定义：概率论中将具有以下三个特点的试验称为随机试验，简称实验，常记为$E$.

（1）可以在相同的条件下重复地进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

**【2. 样本空间】**随机试验的所有可能结果组成的集合称为样本空间记为$\Omega$，$\Omega$中的元素称为样本点.

**【3. 随机事件】**

（1）随机事件的定义：样本空间$\Omega$的子集，即试验的结果称为随机事件，简称事件，通常用大写字母$A$，$B$，$C$等表示.

（2）随机事件的分类

基本事件：由一个样本点组成的单点集称为基本事件；

复合事件：由两个或两个以上样本点组成的事件称为复合事件；

必然事件：样本空间$\Omega$包含所有样本点，它是$\Omega$自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件，记为$\Omega$；

不可能事件：空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为不可能事件，记为$\varnothing$.

（3）事件发生：在每次试验中，事件有且仅有一个样本点出现时，称事件发生或者出现.

**【4. 事件的关系与运算】**

（1）包含关系：$A \subset B \Leftrightarrow$ 事件$A$发生一定导致$B$发生；

（2）事件相等：$A \subset B$且$B \subset A$，则事件$A = B$；

（3）$A$和$B$的和事件：记为$A \quad B$或$A + B \Leftrightarrow A$，$B$至少有一个发生时事件$A \quad B$发生，

类似地，称 $\mathop{\quad}\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \quad , A_n$ 的和事件；

（4）$A$ 和 $B$ 的积事件：记为 $A \quad B$ 或 $AB \Leftrightarrow A$，$B$ 同时发生时事件 $A \quad B$ 发生，

类似地，称 $\mathop{\quad}\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \quad , A_n$ 的积事件；

（5）$A$ 和 $B$ 的差事件：事件 $A-B$ 或 $A\overline{B} \Leftrightarrow A$ 发生且 $B$ 不发生时事件 $A-B$ 发生；

（6）互斥（互不相容）事件：$AB=\varnothing \Leftrightarrow A$ 与 $B$ 不能同时发生；

（7）对立（互逆）事件：$A \quad B=\Omega$ 且 $A \quad B=\varnothing \Leftrightarrow A$，$B$ 在一次试验中必然发生且只能发生一个，$A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$；

（8）完全（备）事件组：若事件 $A_1 \qquad\quad A_n=\Omega, A_iA_j=\phi, 1\le i\ne j\le n$，则称事件 $A_1, \quad , A_n$ 是一个完全事件组.

**【5. 事件的运算律】**

（1）交换律：$A \quad B=B \quad A$，$A \quad B=B \quad A$；

（2）结合律：$A \quad (B \quad C)=(A \quad B) \quad C$，$A \quad (B \quad C)=(A \quad B) \quad C$；

（3）分配律：$A \quad (B \quad C)=(A \quad B) \quad (A \quad C)$，$A \quad (B \quad C)=(A \quad B) \quad (A \quad C)$；

（4）德摩根律（对偶律）：$\overline{A \quad B}=\overline{A} \quad \overline{B}, \overline{A \quad B}=\overline{A} \quad \overline{B}$.

**【例 1】** 向指定目标射三枪，观察射中目标的情况。用 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 分别表示事件“第 1、2、3 枪击中目标”，试用 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 表示以下各事件：

（1）只击中第一枪；
（2）只击中一枪；
（3）三枪都没击中；
（4）至少击中一枪；
（5）至少击中两枪；
（6）至多击中两枪。

**【例 2】** 对于任意两个事件 $A, B$，与 $A \quad B=B$ 不等价的是(　　)

(A) $A \subset B$.　(B) $\overline{B} \subset \overline{A}$.　(C) $A\overline{B} = \varnothing$.　(D) $\overline{A}B = \varnothing$.

**【例 3】** 设 $A, B$ 为任意两个事件，则下列选项错误的是(　　)

(A) $AB = \varnothing$，则 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 可能不相容.　(B) $AB \neq \varnothing$，则 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 也可能相容.

(C) $AB = \varnothing$，则 $\overline{A}$，$B$ 也可能相容.　(D) $AB \neq \varnothing$，则 $\overline{A}$，$B$ 一定不相容.

## §2 概率的定义与性质

【定义】设 $E$ 是随机试验，$\Omega$ 是它的样本空间，对于 $E$ 的每一个事件 $A$ 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 $A$ 的概率，如果集合函数 $P(\ )$ 满足下列条件：

1）非负性：对于每一个事件 $A$，有 $P(A) \geq 0$；

2）规范性：对于必然事件 $\Omega$，有 $P(\Omega) = 1$；

3）可列可加性：设 $A_1, A_2,$ 　是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j = \phi, i, j = 1, 2,$ 　,则有 $P(A_1 \quad A_2 \quad) = P(A_1) + P(A_2) +$ 　.

【概率的性质】

1）非负性：$\forall A \subseteq \Omega$，$0 \leq P(A) \leq 1$；

2）规范性：$P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$；

3）有限可加性：设 $A_1, A_2,$ 　$, A_n$ 是两两互不相容的事件，即对于

$i \neq j, A_iA_j = \phi, i, j = 1, 2,$ 　$, n$

则有 $P(A_1 \quad A_2 \qquad A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \quad + P(A_n)$；

4）逆事件的概率对于任一事件 $A$，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

5）可比性：设 $A, B$ 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$P(A) \le P(B)$ 且 $P(B - A) = P(B) - P(A)$，

一般地：$P(B - A) = P(B) - P(AB)$（减法公式）；

6）加法公式对于任意两随机事件 $A, B$ 有：$P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

注：3 个事件的概率加法公式：

$P(A \quad B \quad C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.

**【例 1】** 设事件 $A, B$ 的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ . 在下列三种情况下分别求 $P(B\overline{A})$ 的值：

（1）$A$ 与 $B$ 互斥；

（2）$A \subset B$；

（3）$P(AB) = \frac{1}{4}$.

**【例 2】** 设随机事件 $A, B$，$P(A) = 0.5$，$P(A \quad B) = 0.8$，若 $A, B$ 互不相容，则 $P(B) =$ ________.

**【例 3】** 已知 $P(A) = 0.8$，$P(A - B) = 0.1$，则 $P(\overline{AB}) =$ ________.

**【例 4】** 已知 $A, B$ 两个随机事件满足 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$，且 $P(A) = p$，则 $P(B) =$ ________.

**【例 5】** 若 $A \supset B$，$A \supset C$，且 $P(A) = 0.9$，$P(\overline{B} \quad \overline{C}) = 0.8$，求 $P(A - BC) =$ ________.

**【例 6】** 已知随机事件 $A, B$ 满足条件 $P$（$AB \cup \overline{A}\overline{B}) = 0$，则有：

（A） $A,B$ 为对立事件； （B） $A,B$ 为互斥；

（C） $P$（$A$）$=P$（$B$）； （D） $P$（$A$）$=P$（$\overline{B}$）.

**【例 7】** 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$，则事件 $A,B,C$ 全不发生的概率为________.

# §3 条件概率公式与乘法公式

**【条件概率】**

①定义:设 $A,B$ 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为

在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的条件概率.

②性质：

1） $0\le P(B\mid A)\le 1$；

2） $P(\Omega\mid A)=1$；

3） $P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$；

4） $P\{(A_1+A_2)\mid B\}=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)-P(A_1A_2\mid B)$；

**【乘法公式】** $P(A)>0,P(AB)=P(B|A)P(A)$；

推广： $A,B,C$ 为事件，且 $P(AB)>0$，则有 $P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$.

**【例 1】** 已知 $P(B)=0.4,P(A+B)=0.5$，求 $P(A\mid\overline{B})$.

【例 2】 已知$0<P(B)<1$，且$P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是(　　)

（A）$P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

（B）$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

（C）$P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

（D）$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

【例 3】 设$0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则

A、$AB=\phi$　B、$B=\overline{A}$　C、$P(AB)\neq P(A)P(B)$　D、$P(AB)=P(A)P(B)$

【例 4】 已知$P(A)=0.4$，$P(B|A)=0.5$，$P(A|B)=0.25$，则$P(B)=$________.

【例 5】 一盒中装有 5 只产品，其中有 3 只正品，2 只次品，从中取产品两次，每次取一只，作不放回抽样，求在第一次取到正品条件下，第二次取到的也是正品的概率.

【例 6】 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意拨号，求他拨号不超过三次能接通所需电话的概率，若已知最后一个数字是奇数，此概率是多少？

【思考】证明：已知$P(A)>0$，$P(AB|A)\geq P(AB|A\cup B)$.

## §4 全概率公式与贝叶斯公式

**【全概率公式】**

$A_1, A_2, \cdots, A_n$是完全事件组，且$P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$则$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$.

**【贝叶斯公式】**（逆概公式）

$A_1, A_2, \quad, A_n$ 是完全事件组，$P(B) > 0, P(A_i) > 0, i = 1, 2, \quad, n$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \qquad i = 1, 2, \quad, n .$$

**【例 1】** 一批产品有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不放回，则第二次抽出的是次品的概率为________.

**【例 2】** 有 1 台机床，当其正常时，产品的合格率为 90%，当其不正常时，产品的合格率为 40%。由历史数据分析显示：每天上班开动机床时，机床是正常的概率为 80%。现有某检验人员为了检验机床是否正常，开动机床生产出了一件产品，经检验，该产品为合格。问此时机床处于正常状态的概率为多少？

【例 3】根据以往的记录，某种诊断肝炎的试验有如下效果：对肝炎病人的试验呈阳性的概率为 0.95 ；非肝炎病人的试验呈阴性的概率为 0.95 . 对自然人群进行普查的结果为：有千分之五的人患有肝炎。现有某人做此试验结果为阳性，问此人确有肝炎的概率为多少？

**【例 4】**三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球。现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 个球，这个球为白球的概率等于______. 已知取出的球是白球，此球属于第二个箱子的概率为________.

**【例 5】**假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随机挑出一箱，然后从该箱中先后取出两个零件（取出的零件均不放回），试求：

① 先取出的零件是一等品的概率 $p$ ；

② 在先取出的零件是一等品的条件下，后取出的零件仍然是一等品的条件概率 $q$ .

## §5 事件的独立性

①定义:设 $A,B$ 是两个事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，

则称事件 $A,B$ 相互独立，简称事件 $A,B$ 独立.

② 独立的等价说法

若 $0<P(A)<1$，则事件 $A,B$ 独立 $\Leftrightarrow$

$P(B)=P(B\mid A)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(B)=P(B\mid \overline{A})\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$ .

③独立的性质

若事件 $A,B$ 相互独立，则 $A$与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$B$，$\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立.

④三个事件的独立性

设 $A,B,C$ 是三个事件，如果满足等式

$$\left.\begin{aligned}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\end{aligned}\right\}\Rightarrow A,B,C \text{ 两两独立.}$$

如果满足等式

$$\left.\begin{aligned}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{aligned}\right\}\Rightarrow A,B,C \text{ 相互独立.}$$

**【例1】** 盒中有编号为1, 2, 3, 4的4只球，随机地从盒中取1只球，事件 $A$：取得的是1号球

或2号球，事件 $B$：取得的是1号或3号球，事件 $C$：取得的是1号或4号球，证明：事件 $A,B,C$ 两两独立，但 $A,B,C$ 三事件不独立.

**【例2】** 设$A$、$B$是两个随机事件，且 $0<P(A)<1, P(B)>0,\ P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$ 则必有(　　)

(A) $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$　　　(B) $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

**【例 3】** 对于任意二事件 $A$ 和 $B$ (　　)

(A) 若 $AB\neq\varnothing$，则 $A,B$ 一定独立　　　(B) 若 $AB\neq\varnothing$，则 $A,B$ 有可能独立

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 $A,B$ 一定独立　　　(D) 若 $AB=\varnothing$，则 $A,B$ 一定不独立

**【例 4】** 设 $A,B,C$ 三个事件两两独立，则 $A,B,C$ 相互独立的充分必要条件是(　　)

(A) $A$ 和 $BC$ 独立　　　(B) $AB$ 与 $A\quad C$ 独立

(C) $AB$ 与 $AC$ 独立　　　(D) $A\quad B$ 与 $A\quad C$ 独立

【思考】三人独立去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，问三人中至少有一人能将此密码译出的概率为？

## §6 三大概型（1）

### 古典概型

（1）定义：具有以下两特点的试验称为古典概型：

1）样本空间有限 $\Omega=\{e_1,e_2\quad e_n\}$；

2）等可能性 $P\{e_1\}=P\{e_2\}= \quad =P\{e_n\}$.

（2）计算方法：$P(A)=\dfrac{k}{n}$，其中 $k=\{A$ 中基本事件的个数$\}$，$n=\{\Omega$ 中基本事件的个数$\}$.

（3）古典概率的性质

非负性：$\forall A\subseteq\Omega$，$0\le P(A)\le 1$；

规范性：$P(\varnothing)=0,P(\Omega)=1$；

有限可加性：设 $A_1,A_2, \quad ,A_n$ 是两两互不相容的事件，

即对于 $i\ne j,A_iA_j=\phi,i,j=1,2, \quad ,n$

则有 $P(A_1 \quad A_2 \quad\quad A_n)=P(A_1)+P(A_2)+ \quad +P(A_n)$.

**古典概型计算常见模型及处理问题的方法：**

**要领：利用乘法原理和加法原理，熟练掌握有关排列、组合的计数公式.**

**（1）摸球模型**

**【例 1（1）】**一袋中有 5 个大小形状相同的球，其中 3 个黑色球，2 个白色球。现从袋中随机地取两次，每次取出 1 个球，求取出的两个球都是黑色球的概率。

**【例 1（2）】**一袋中有 5 个大小形状相同的球，其中 3 个黑色球，2 个白色球。现从袋中随机地取出 2 个球，求取出的两个球都是黑色球的概率。

【练习】在一个装有 $n_1$ 只白球，$n_2$ 只黑球，$n_3$ 只红球的袋中任取 $m$ 只球，其中白、黑、红球分别为 $m_1,m_2,m_3(m_1+m_2+m_3=m)$ 只的概率为_____.

**（2）分球入杯问题**

**【例 2】** 将 $N$ 个球随机地放入 $n$ 个盒子中 $(n>N)$，求：

（1）每个盒子最多有一个球的概率；

（2）某指定的盒子中恰有 $m$（$m<N$）个球的概率。

【思考】将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

**（3）取数问题**

**【例 3】** 在 1～9 的整数中可重复的随机取 3 个数组成 3 位数，求下列事件的概率：

（1）3 个数完全不同；

（2）3 个数不含偶数；

**【思考】** 求在数字 $0,1,2,\quad,9$ 中不重复地任取四个组成一个四位偶数的概率.

**（4）配对问题**

【例 4】从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率.

# §7 三大概型（2）

## 2. 几何概型

【定义】如果试验 $E$ 是从某一线段（或平面、空间中有界区域）$\Omega$ 上任取一点，并且所取得点位于 $\Omega$ 中任意两个长度（或面积、体积）相等的子区间（或子区域）内的可能性相同，则所取得点位于 $\Omega$ 中任意子区间（或子区域）$A$ 内这一事件（仍记作 $A$）的概率为：

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

$m(A)=\{A$ 的测度（长度、面积、体积等）$\}$，$m(\Omega)=\{\Omega$ 的测度（长度、面积、体积等）$\}$.

【例 1】（会面问题）

两人相约在某天下午 2：00~3：00 在预定地方见面，先到者要等候 20 分钟，过时则离去.如果每人在这指定的一小时内任一时刻到达是等可能的，求约会的两人能会到面的概率.

**【例 2】** 随机的向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（$a$ 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 $x$ 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

**3.伯努利概型**

①定义：只有两个结果 $A$ 和 $\overline{A}$ 的试验称为伯努利试验，若将伯努利试验独立重复地进行 $n$ 次，则称为 $n$ 重伯努利实验.

②二项概率公式

设在每次实验中，事件 $A$ 发生的概率 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 $n$ 重伯努利实验中，事件 $A$ 发生 $k$ 次记为 $A_k$，其概率为 $P(A_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\quad,n)$，此公式称为二项概率公式.

**【例 3】** 某人打靶的命中率为 0.5，当他连续射击三次后，发现靶已命中，则他在第一次射击时就已命中的概率是__________.

**【例 4】** 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为（）.

（A）$3p(1-p)^2$ （B）$6p(1-p)^2$ （C）$3p^2(1-p)^2$ （D）$6p^2(1-p)^2$

# 第二章 一维随机变量及分布

## §1 随机变量与分布函数

### 1、随机变量的概念

（1）随机变量定义

定义:在样本空间$\Omega=\{e\}$上的实值函数$X=X(e)\ e\in\Omega$，则该变量$X(e)$称为随机变量. 随机变量常用大写字母$X,Y,Z$等表示，即$\forall e\in\Omega\xrightarrow{P}X=X(e)$，其取值用小写字母$x,y,z$等表示.

（2）随机变量的分类

① 离散型随机变量;

② 连续型随机变量;

③ 非离散型也非连续型.

### 2、随机变量的分布函数

（1）定义：设$X$是一个随机变量，对于任意实数$x$，令$F(x)=P\{X\le x\}\ (-\infty<x<+\infty)$称$F(x)$为随机变量$X$的概率分布函数，简称分布函数.

（2）分布函数的性质

① 非负性： $0\le F(x)\le 1$;

② 规范性：$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

③ 单调不减性：对于任意$x_1<x_2$，有$F(x_1)\le F(x_2)$;

④ 右连续性：$F(x_0)=F(x_0+0)$.

**【例 1】** 设随机变量的分布函数$F(x)=\begin{cases}a+\dfrac{b}{(1+x)^2} & x>0\\ c & x\le 0\end{cases}$，求$a,b,c$的值.

【例 2】 已知 X 的分布函数为$F(x)$，可以下列可作为随机变量分布函数的是(　　)

(A) $2F(x)$　　(B) $F(2x)$

(C) $F(x^2)$　　(D) $F(|x|)$

【思考】下列函数中，可以作为随机变量分布函数的是(　　)

(A) $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(B) $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x$

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{1+x}, & x>0\end{cases}$　　(D) $F(x)=\dfrac{2}{\pi}\arctan x+1$

【例 3】 设 $F_1(x),F_2(x)$ 分别为随机变量 $X_1$，$X_2$ 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$ 也是分布函数，则（　）

（A） $a=\dfrac{3}{5},b=-\dfrac{2}{5}$　（B） $a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{2}{3}$　(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$　(D) $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$

（3）利用分布函数求各种随机事件的概率

已知 $X\sim F(x)$，则有

① $P\{X\le a\}=F(a)$；

② $P\{X>a\}=1-F(a)$；

③ $P\{X<a\}=F(a-0)=\lim\limits_{x\to a^-}F(x)$；

④ $P\{X\ge a\}=1-F(a-0)$；

⑤ $P\{X=a\}=P\{X\le a\}-P\{X<a\}=F(a)-F(a-0)$；

⑥ $P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)$；

⑦ $P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X\le a\}=F(b-0)-F(a)$；

⑧ $P\{a\le X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a-0)$；

⑨ $P\{a\le X<b\}=P\{X<b\}-P\{X<a\}=F(b-0)-F(a-0)$.

**【例 4】** 设随机变量的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$________.

(A) $0$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$ (D) $1-e^{-1}$

## §2 离散型随机变量

离散型随机变量的定义：取值为有限个或可数无穷多个.

（1）分布律

定义:设 $X$ 为离散型随机变量，其可能取值为 $x_1$, $x_2$, $x_k$, ，$X$ 取各个值 $x_k$ 的概率为

$P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\quad)$，其中（$p_k\ge 0$ $(k=1,2,\quad)$，$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$），

则称 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\quad)$ 为随机变量 $X$ 的概率分布或分布律，也可记为

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_k$ |

（2）离散型随机变量的分布函数

定义：$F(x)=P\{X\le x\}=\sum\limits_{x_i\le x}P\{X=x_i\}=\sum\limits_{x_i\le x}p_i\quad x\in R$.

若 $X$ 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\quad,n)$，不妨设 $x_1<x_2<\quad<x_k<\quad<x_n$，则

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ p_1, & x_1\le x<x_2,\\ p_1+p_2, & x_2\le x<x_3,\\ & \\ 1, & x\ge x_n.\end{cases}$$

**【例 1】**已知随机变量 $X$ 的概率分布为 $P(X=1)=0.2$，$P(X=2)=0.3$，$P(X=3)=0.5$，试写出其分布函数 $F(x)$.

**【例 2】**设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\le x<1\\ 0.8, & 1\le x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$，则 $X$ 的分布律为________.

**【练习】** 从 1，2，3，4 中随机取 2 个数，其中最小的数记为 X，则 X 的分布律为：__________.

## §3 常见的离散型分布

**（1）$0-1$ 分布**

若随机变量 $X$ 只有两个可能的取值 0 和 1，其概率分布为

| | | |
|---|---|---|
| X | 0 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| | $1-p$ | $p$ |

或 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}(0<p<1)$，$k=0,1$ 则称 $X$ 服从 $0-1$ 分布.

【例 1】设 X 服从 0-1 分布，其分布律为 $P\ \{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$，求 X 的分布函数。

**（2）二项分布** $B(n,p)$

设事件 $A$ 在任意一次实验中出现的概率都是 $p(0<p<1)$，$X$ 表示 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 发生的次数，则 $X$ 所有可能的取值为 $0,1,2,\quad,n$，且相应的概率为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,\quad,n)$.

**注：二项分布与 0-1 分布的关系.**

**【例 2】** 设随机变量 $X$ 服从于参数为 $(2,p)$ 的二项分布，随机变量 $Y$ 服从于参数为 $(3,p)$ 的二项分布，若 $P\{X\geq 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\geq 1\}=$________.

**【例 3】** 设 $X$ 的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $1/3$ | $1/6$ | $1/2$ |

现对 $X$ 进行三次独立观测，求至少有两次观测值大于 1 的概率.

**（3）泊松分布**

设随机变量 $X$ 的概率分布为：$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(\lambda>0), k=0,1,2,\quad$ 则称 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$.

【例 4】设某段时间内通过路口车流量服从泊松分布，已知该时段内没有车通过的概率为$\frac{1}{e}$，则这段时间内至少有两辆车通过的概率为_______.

【例 5】 设随机变量$X\sim P(\lambda)$，$Y\sim P(2\lambda)$，$P(X<1)=\frac{1}{5}$，则$P(Y\geq 1)$=________.

**（4）几何分布**

若$X$的分布律为$P\left\{X=k\right\}=(1-p)^{k-1}p,(0<p<1),k=1,2,\cdots$，则称$X$服从几何分布.

注：在独立重复的做一系列伯努利试验中，若每次试验成功的概率为$p$（$0<p<1$），则在第$k$次试验时才首次试验成功的概率服从几何分布.

**（5） 超几何分布**

设随机变量$X$的概率分布为：$P\left\{X=k\right\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,2,\cdots n$，其中$M,N,n$都是正整数，且$n\leq M\leq N$，则称$X$服从参数为$M,N$和$n$的超几何分布，记为$X\sim H(n,M,N)$.

注：如果 N 件产品中含有 M 件次品，从中任意一次取出$n$件，令 X = 抽取的$n$件产品中的次品件数，则 X 服从参数为$n,N,M$的超几何分布.

**泊松定理**

设随机变量序列$X_n$服从二项分布$B(n,p_n)$（这里概率$p_n$与$n$有关），若$p_n$满足$\lim\limits_{n\to+\infty}np_n=\lambda>0$（$\lambda$为常数），

则有：$\lim\limits_{n\to+\infty}P\{X=k\}=\lim\limits_{n\to+\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=0,1,2,\quad)$.

## §4 连续型随机变量

**（1）概率密度函数定义**

如果对于随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$，存在非负可积函数 $f(x)\geq 0\ (-\infty<x<+\infty)$，使得对于任意实数 $x$，有 $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，则称 $X$ 为连续型随机变量，函数 $f(x)$ 称为 $X$ 的概率密度函数（简称密度函数）.

**（2）性质**

① 非负性：$f(x)\geq 0\ (-\infty<x<+\infty)$；

② 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$；

③ 对于任意实数 $a$ 和 $b(a<b)$，有 $P\{a<X\leq b\}=\int_a^b f(x)dx$；

④ 在 $f(x)$ 的连续点处，有 $F'(x)=f(x)$；

⑤ 连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数；

⑥ 对于连续型随机变量 $X$，$\forall x\in R$ 都有 $P\{X=x\}=0$.

**【例 1】**下列函数中可以作为连续型随机变量 $X$ 的密度函数的是（　　）.

A. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \pi\leq x\leq(3\pi/2),\\ 0, & 其他,\end{cases}$

B. $g(x)=\begin{cases}-\sin x, & \pi\leq x\leq(3\pi/2),\\ 0, & 其他,\end{cases}$

C. $\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & \pi\leq x\leq(3\pi/2),\\ 0, & 其他,\end{cases}$

D. $h(x)=\begin{cases}1-\cos x, & \pi\leq x\leq(3\pi/2),\\ 0, & 其他,\end{cases}$

【例 2】已知连续型随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 2-x, & 1\le x<a, \\ 0, & 其他. \end{cases}$，求 $a$ 及分布函数 $F(x)$.

【例 3】 设 $X_1$， $X_2$ 为任意两个连续型随机变量，它们的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，密度函数分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则(　　)

（A） $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某随机变量的分布函数

（B） $F_1(x)-F_2(x)$ 必为某随机变量的分布函数

（C） $f_1(x)\ f_2(x)$ 必为某随机变量的密度函数

（D） $\dfrac{1}{3}f_1(x)+\dfrac{2}{3}f_2(x)$ 必为某随机变量的密度函数

【例 4】 设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$，以 $Y$ 表示对 $X$ 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$________.

【例 5】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3},x\in[0,1]\\ \frac{2}{9},x\in[3,6]\\ 0,其他\end{cases}$，若常数 $k$ 使得 $P(X\geq k)=\frac{2}{3}$，则 $k$ 的取值范围是________.

## §5 常见连续型分布

### （1）均匀分布

如果随机变量 $X$，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leq x\leq b,\\ 0\quad, & 其他.\end{cases}$，则称 $X$ 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，

记作 $X\sim U[a,b]$. 其中 $a,b$ 是分布的参数.

性质 设 $X$ 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，则对 $a\leq c<d\leq b$，有 $P(c\leq X\leq d)=\frac{d-c}{b-a}$，即随机变量 X 落入区间 $[c,d]$ 的概率等于该区间长度与 $[a,b]$ 长度之比.

$X$ 的分布函数为： $F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b,\\ 1, & x\geq b.\end{cases}$.

【例 1】随机变量 $K$ 在 $\left[0,5\right]$ 上服从于均匀分布，则方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率为________.

【思考】 设随机变量 X 在区间 $(a,b)$ 上服从均匀分布，已知 $P(X<0)=P(X>2)=\frac{1}{4}$，则 $b=$____.

（2）**指数分布**

如果随机变量 $X$，其密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0\ \ , & x\le 0.\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 为参数，则称 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，记作 $X\sim E(\lambda)$.

性质：设 $X\sim E$（$\lambda$），

(1) $P$（$X>t$）$=\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda t},t>0$；

(2) $P(X>t+s\mid X>s)=\dfrac{P(X>t+s)}{P(X>s)}=\dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(X>t),t,s>0$.

指数分布的分布函数：$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, \quad\quad x\le 0.\end{cases}$

【例 2】 假设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，且 $X$ 落入区间 $(1,2)$ 内的概率达到最大，则 $\lambda=$________.

【思考】设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的指数分布，$a$ 为常数且大于 0，则 $P(X\le a+1\mid X>a)=$

（3）正态分布

1）一般正态分布

一个连续型随机变量 $X$，如果其密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}(-\infty<x<+\infty)$，其中 $\mu,\sigma$ 为常数，$-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0$，则称 $X$ 服从参数为 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

2）标准正态分布

i）定义：当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时的正态分布称为标准正态分布，记作 $N(0,1)$，其密度函数用 $\varphi(x)$ 表示，分布函数用 $\Phi(x)$ 表示。其中 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty)$.

ii）性质

① $\varphi(-x)=\varphi(x)$ 关于 $y$ 轴对称；

② $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$；

③ $\Phi(0)=\frac{1}{2}$；

④ $P\{|X|\le a\}=2\Phi(a)-1$.

iii）上—$\alpha$ 分位点

设 $X\sim N(0,1)$，对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，如果 $u_\alpha$ 满足条件：$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，则称 $u_\alpha$ 为标准正态分布的上—$\alpha$ 分位点。

3）正态分布的标准化

一般正态分布 $X\sim N(u,\sigma^2)$，可以通过线性变换 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 转化为标准正态分布.

**【例 3】** $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 $P(X>4)=\frac{1}{2}$，则 $\mu=$________.

【例 4】 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$________.

【例 5】 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 均服从正态分布，$X\sim N\left(\mu,4^2\right),Y\sim N\left(\mu,5^2\right)$;记 $p_1=P\left\{X\le\mu-4\right\},p_2=P\left\{Y\ge\mu+5\right\}$,则(　　)

(A)对任何实数 $\mu$，都有 $p_1=p_2$　　(B)对任何实数 $\mu$，都有 $p_1<p_2$

(C)只对 $\mu$ 的个别值，都有 $p_1=p_2$　　(D)对任何实数 $\mu$，都有 $p_1>p_2$

【例 6】 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 $u_\alpha$ 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$ 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 $x$ 等于________.

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

## §6 随机变量函数的分布

### 1. 离散型随机变量的函数分布

设 $X$ 是离散型随机变量，概率分布为 $P\left\{X=x_k\right\}=p_k,k=1,2,\quad$ ,则随机变量 $X$ 的函数 $Y=g(X)$ 取值 $g(x_k)$ 的概率为 $P\left\{Y=g(x_k)\right\}=p_k,k=1,2,\quad$ ,.

如果$g(x_k)$中出现相同的函数值，则将它们相应的概率之和作为随机变量$Y=g(X)$取该值的概率，就可以得到$Y=g(X)$的概率分布.

**【例 1】** 随机变量$X$的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $p$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

则$Y=X^2$的分布律为?

**【思考】**设随机变量$\xi$的分布列为$P\{\xi=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots$，求$\eta=\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$的分布律.

**2. 连续型随机变量函数的概率密度**

1）公式法：

已知$X\sim f_X(x),Y=g(X)$，且恒有$g'(x)>0$或$g'(x)<0$，其值域为$(\alpha,\beta)$，则

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|[g^{-1}(y)]'\right|, & y\in(\alpha,\beta), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

特别的，当$Y=aX+b,a\neq 0$时，有$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

【例 2】 设随机变量 X～$U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，求$Y=\sin X$的概率密度函数$f_Y(y)$.

2）分布函数法 ：

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y}f_X(x)dx$，再求$f_Y(y)=F_Y'(y)$，可得密度函数.

【例 3】 设随机变量 $X$ 服从（0，2）上的均匀分布，则随机变量 $Y = X^2$ 在（0，4）内的概率分布密度 $f_Y(y) =$________.

【例 4】 设随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

# 第三章 二维随机变量及分布

## §1 二维随机变量及分布函数

（1）二维随机变量定义

设 $X=X(\omega),Y=Y(\omega)$ 是定义在样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 上的两个随机变量，则称向量 $(X,Y)$ 为二维随机变量（或随机向量）.

（2）联合分布函数

二维随机变量分布函数的定义：设 $(X，Y)$ 是二维随机变量，对于任意实数 $x，y$，称二元函数 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$ 为二维随机变量 $(X，Y)$ 的联合分布函数，它表示随机事件 $\{X\le x\}$ 与 $\{Y\le y\}$ 同时发生的概率.

（3）二维随机变量分布函数的性质

① 非负性：对于任意实数 $x,y\in R$，$0\le F(x,y)\le 1$；

② 规范性：$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$，$F(x,-\infty)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$，

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1；$$

③ 单调不减性：$F(x,y)$ 分别关于 $x$ 和 $y$ 单调不减；

④ 右连续性：$F(x,y)$ 分别关于 $x$ 和 $y$ 右连续，即

$$F(x,y)=F(x+0,y),F(x,y)=F(x,y+0)\ \ x,y\in R.$$

【例 1】设随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}a(b+\arctan x)(c-e^{-y}) & x\in R,y>0,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

求常数 $a,b,c$ 的值.

（4）二维随机变量的边缘分布函数

设二维随机变量 $(X，Y)$ 的分布函数为 $F(x,y)$，分别称 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$，

$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$ 分别为 $(X,Y)$ 关于 $X$ 和关于 $Y$ 的边缘分布函数.

【例 2】设二维随机变量的分布函数为$F(x,y)$，X，Y 的边缘分布函数分别为$F_X(x),F_Y(y)$，

则概率$P(X>a,Y>b)=$（　）

（A）$1-F(a,b)$　　　（B）$1-F_X(a)-F_Y(b)$

（C）$1-F_X(a)-F_Y(b)+F(a,b)$　　　（D）$F(a,b)+F_X(a)+F_Y(b)-1$

【例 3】设二维随机变量$(X,Y)$的分布函数为$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

试求$F_X(x),F_Y(y)$.

（5）二维随机变量的独立性

设二维随机变量$(X,Y)$的分布函数为$F(x,y)$，关于$X$和关于$Y$的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，如果对于任意实数$x$和$y$有：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量$X$和$Y$相互独立.

**【例 4】** 一电子仪器由两个部件构成，以$X$与$Y$分别表示两个部件的寿命（单位：千小时），已知$X$与$Y$的联合分布函数为:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)} & \text{若}x\ge 0,y\ge 0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

①问 $X$ 与 $Y$ 是否独立？

②求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率.

## §2 二维离散型随机变量

（1）定义：如果二维随机变量 $(X,Y)$ 可能取的值为有限对或无限可列多对实数，则称 $(X,Y)$ 为二维离散型随机变量.

（2）联合分布律

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 所有可能的取值为 $(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$，且对应的概率为

$$P(X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},(i,j=1,2,\cdots)\text{其中：}p_{ij}\geq 0,\ i,j=1,2,\cdots,\text{且}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1,$$

则称为二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布或随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率分布.

（3）边缘分布律

定义：对于二维离散型随机变量 $(X,Y)$，设其概率分布为:

$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$.则 $X$ 的边缘分布为:

$$P\left\{X=x_i\right\}=P\left\{X=x_i,Y<+\infty\right\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}(i=1,2,\cdots)$$

$Y$ 的边缘分布为:

$$P\left\{Y=y_i\right\}=P\left\{X<+\infty,Y=y_i\right\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}(j=1,2,\cdots)$$

边缘分布函数：

$$F_X(x)=P\left\{X\leq x\right\}=\sum_{x_i\leq x}P\left\{X=x_i\right\}=\sum_{x_i\leq x}p_{i\cdot}$$

$$F_Y(y)=P\left\{Y\leq y\right\}=\sum_{y_j\leq y}P\left\{Y=y_j\right\}=\sum_{y_j\leq y}p_{\cdot j}$$

（4）条件分布律

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的概率分布为 $P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij},\ i,\ j=1,2,\cdots$.

①对于给定的 $j$，如果 $P\left\{Y=y_j\right\}>0(j=1,2,\cdots)$，则称

$$P\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{Y=y_j\right\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 $X$ 的条件概率分布.

②对于给定的 $i$，如果 $P\left\{X=x_i\right\}>0(i=1,2,\quad)$，则称

$$P\left\{Y=y_j \middle| X=x_i\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{X=x_i\right\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},i=1,2,$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 $Y$ 的条件概率分布.

（5）离散型随机变量 $X$ 与 $Y$ 的独立性

如果 $(X,Y)$ 是二维离散型随机变量，则随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立的充分必要条件是

$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=P\left\{X=x_i\right\}P\left\{Y=y_j\right\}$，$i,j=1,2,\quad$.

即 $p_{ij}=p_{i}*p_{j}$ $i,j=1,2,\quad$.

【例 1】设 $(X,Y)$ 的分布律为

| $Y$ \ $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0.2 | 0.1 | 0 |
| 0 | 0.1 | 0 | 0.3 |
| 1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

（1）求 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布律；

（2）求 $(X,Y)$ 的分布函数 $F(1,1)$ 的值.

【例 2】 某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80，10 和 10 件，现从中随机抽取一件，记 $X_i=\begin{cases}1, & 若抽到i等品\\ 0, & 其它\end{cases}$，$i=1,2,3$，试求 $X_1$ 与 $X_2$ 的联合分布律.

【例 3】 一射手对同一目标进行射击，每次击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击进行到第二次击中目标为止，设 X 表示第一次击中目标时所进行的射击次数，Y 表示第二次击中目标时所进行的射击次数，求 $(X,Y)$ 的联合分布律及两个条件分布律.

【例 4】 已知随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 的概率分布 $X_1\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}, X_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，且 $P\{X_1X_2=0\}=1$.

①求 $X_1$ 和 $X_2$ 的联合分布；

②问 $X_1$ 和 $X_2$ 是否独立？为什么？

## §3 二维连续型随机变量

（1）定义

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数为 $F(x,y)$，如果存在非负可积的二元函数 $f(x,y)$，使得对任意实数 $x,y$，有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$，则称 $(X,Y)$ 为二维连续型随机变量，称函数 $f(x,y)$ 为二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度函数或随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合密度函数.

（2）性质

① $f(x,y)\geq 0$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$；

③ 若 $f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处连续，则有 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$；

④ 设 $D$ 是 $xoy$ 平面上任一区域，则点 $(x,y)$ 落在 $D$ 内的概率为：

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)d\sigma .$$

【例 1】 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}kx, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

①求常数 $k$ .

②计算 $P\{X+Y\le 1\}$ .

（3）边缘概率密度

定义：设 $(X,Y)$ 为连续型随机变量，它的概率密度函数为 $f(x,y)$，则 $X$ 的边缘密度函数为：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ .

$Y$ 的边缘密度函数为：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ .

【例 2】 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

①求 $X$ 的概率密度 $f_X(x)$ .

②求 $P\{X+Y\le 1\}$ .

（4）条件概率密度

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$

①对于给定的实数 $y$，边缘概率密度 $f_Y(y)>0$，则称 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在条件 $Y=y$ 下 $X$ 的条件概率密度函数.

②对于给定的实数 $x$，边缘概率密度 $f_X(x)>0$，则称 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为在条件 $X=x$ 下 $Y$ 的条件概率密度函数.

【例 3】 设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y),0<y<x<1\\ 0,其他\end{cases}$，求（1）边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；（2）条件概率密度$f_{Y|X}(y|x),f_{X|Y}(x|y)$.

【例 4】设随机变量$X \quad U(0,1)$，当给定$X=x$时，随机变量$Y$的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x,0<y<\dfrac{1}{x},\\ 0,其它\end{cases}$$

①求$X,Y$的联合概率密度函数$f(x,y)$；②求边缘概率密度$f_Y(y)$；③$P(X>Y)$.

（5）二维连续型随机变量$(X,Y)$的独立性

如果二维随机变量$(X,Y)$的联合密度为$f(x,y)$，边缘概率密度分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则随机变量$X$和$Y$相互独立的充要条件是，对一切$x,y$均有$f(x,y)=f_X(x)*f_Y(y)$.

【例 5】设二维随机变量$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}6xy^2,0<x<1,0<y<1\\ 0\ ,其他\end{cases}$，

求（1）求边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；（2）$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$是否独立，为什么？

【思考】 设$X$和$Y$是两个相互独立的随机变量，$X$在$(0,1)$区间上服从均匀分布，$Y$的密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，

求：①$(X,Y)$的联合密度.

②设含有$a$的二次方程$a^2+2Xa+Y=0$，求$a$没有实根的概率（用$\Phi(x)$表示）.

## §4 两个特殊二维连续型分布

①二维均匀分布

定义：设$G$是平面上有界可求面积的区域，其面积为$S_G$，若二维随机变量$(X,Y)$具有密度函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G},(x,y)\in G,\\ 0,\quad (x,y)\notin G.\end{cases}$，则称$(X,Y)$服从区域$G$上的二维均匀分布.

性质：若在各边平行于坐标轴的矩形区域$D=\{(x,y)|a\le x\le b,c\le y\le d\}$上服从均匀分布的随机变量$(X,Y)$，则它的两个分量$X$和$Y$是独立的，并且分别服从区间$[a,b],[c,d]$上的一维均匀分布.

**【例 1】**设平面区域$D$由曲线$y=\dfrac{1}{x}$及直线$y=0,x=1,x=e^2$所围成，二维随机变量$(X,Y)$在区域$D$上服从均匀分布，则$(X,Y)$关于$X$的边缘概率密度在$x=2$处的值为______.

**【思考】** 设随机变量$(X,Y)$在$D=\{(x,y)|x\ge 0,y\ge 0,x+y\le 1\}$上服从均匀分布，若分布函数满足$F(\dfrac{1}{2},y)=\dfrac{3}{4}$，则$y$满足________.

② 二维正态分布

如果二维连续型随机变量$(X，Y)$的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},x,y\in R$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$均为常数，则称$(X，Y)$服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$和$\rho$的二维正态分布，记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，也称$(X，Y)$为二维正态随机变量.

性质：① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

② $X$与$Y$独立的充分必要条件是$\rho=0$.

③ $X$与$Y$非零线性组合仍服从正态分布，且

当$X$与$Y$独立时：$k_1X+k_2Y\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2)$.

当$X$与$Y$不独立时：$k_1X+k_2Y\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+2k_1k_2\rho\sigma_1\sigma_2)$.

④若$(X_1,X_2)$服从二维正态分布，设$(Y_1,Y_2)$是$(X_1,X_2)$的线性函数，则$(Y_1,Y_2)$也服从二维正态分布.

**【例 2】** 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0)$，则概率$P\left(\frac{X}{Y}<0\right)$为(　　)

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2\pi}$

**【练习】**设两个相互独立的随机变量$X$和$Y$分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$，则(　　)

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　(B) $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

【例 3】

设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，则条件概率密度为$f_{Y|X}(y|x)=$__________.

## §5 随机变量函数的分布（1）

### 一、两个离散型随机变量函数的分布

已知$(X,Y)$的联合分布律为$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=p_{ij}$，$i,j=1,2,$　.则$Z=g(X,Y)$的分布律为：

| $Z=g(X,Y)$ | $g(X_1,Y_1)$ | ………… | $g(X_i,Y_j)$ | ………… |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_{11}$ | ………… | $p_{ij}$ | ………… |

【例 1】 设相互独立的两个随机变量$X$、$Y$服从同一分布，且$X$的分布律为

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

则随机变量$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的分布律为?

**【例 2】** 将两封信随意地投入 3 个邮筒，设 $X,Y$ 分别表示投入第 1,2 号邮筒中信的数目，求：$Z_1=X+Y,Z_2=X-Y$ 的概率分布.

**二、离散型与连续型随机变量（混合型）函数的分布**

**【例 3】** 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 独立，其中 $X$ 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而 $Y$ 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

# §6 随机变量函数的分布（2）

**三、两个连续型随机变量函数的分布**

1、四则运算函数的分布

（1）和的分布：$Z=X+Y$，

$Z$ 的密度函数为：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$ 或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$ .

若 $X$ 与 $Y$ 独立，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$ 或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$，这个公式称为独立和卷积公式.

**【例 1】**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1. \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求

（1）$P(X>2Y)$；（2）$Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

（2）差的分布 $Z=X-Y$

$Z$ 的密度函数为：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\mathrm{x}-\mathrm{z})dx$ 或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,y)dy$.

若 $X$ 与 $Y$ 独立，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(\mathrm{x}-\mathrm{z})dx$ 或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z+y)f_Y(y)dy$，这个公式称为独立和卷积公式.

（3）线性函数的分布 $Z=aX+bY\ (a\neq 0,b\neq 0)$

$Z$ 的密度函数为：$f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\frac{z-ax}{b})dx$ 或 $f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{z-by}{a},y)dy$.

**【例 2】**设二维随机变量的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1, 0<y<2x \\ 0, \text{其他}\end{cases}$，

求 $Z=2X-Y$ 的概率密度.

（4）积的分布 $Z=XY$

$Z$ 的密度函数为：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx$ 或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f(\frac{z}{y},y)dy$.

**【例 3】**设二维随机变量的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)}, x>0, y>0 \\ 0, \text{其他}\end{cases}$，

求 $Z=XY$ 的概率密度.

（5）商的分布 $Z=\dfrac{Y}{X}$

$Z$ 的密度函数为：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,\mathrm{zx})dx$.

2、一般方法：分布函数法

设二维连续型随机变量$(X，Y)$的概率密度为$f(x,y)$，则随机变量的函数$Z=g(X,Y)$的分布函数为：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy.$$

【例 4】

设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1.\\ 0, & 其他\end{cases}$，求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

3、最值函数的分布

问题：设$X_1,\quad ,X_n$相互独立，其分布函数分别为$F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\quad ,F_{X_n}(x_n)$，求

$$M=\max_{1\le i\le n}\{X_i\}，\quad N=\min_{1\le i\le n}\{X_i\}.$$

$$F_M(z)=P\{\max(X_1,X_2,\quad ,X_n)\le z\}=P\{X_1\le z,X_2\le z,\quad ,X_n\le z\}$$

$$=P\{X_1\le z\}P\{X_2\le z\}\quad P\{X_n\le z\}=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\quad F_{X_n}(z)$$

$$F_N(z)=P\{\min(X_1,X_2,\quad ,X_n)\le z\}=1-P\{\min(X_1,X_2,\quad ,X_n)>z\}$$

$$=1-P\{X_1>z,X_2>z,\quad ,X_n>z\}=1-P\{X_1>z\}P\{X_2>z\}\quad P\{X_n>z\}$$

$$=1-\left[1-F_{X_1}(z)\right]\left[1-F_{X_2}(z)\right]\cdots\left[1-F_{X_n}(z)\right]$$

特别地，当$X_1,\cdots,X_n$独立同分布，即$X_i\sim F(x)$（$i=1,2,\cdots,n$）时

$$F_M(z)=F^n(z),F_N(z)=1-\left[1-F(z)\right]^n.$$

**【例 5】** 设随机变量$X$与$Y$独立，且均服从$\left[0,3\right]$上的均匀分布，则$P\left\{\max(X,Y)\le 1\right\}=$________，$P\left\{\min(X,Y)\le 1\right\}=$________.

**【例 6】** 设相互独立的随机变量$X_i$的分布函数为$F_i(x)$，概率密度为$f_i(x)$，$i=1,2$，则随机变量$Y=\max(X_1,X_2)$的概率密度为（　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$　　（B）$f_1(x)+f_2(x)$

（C）$f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$　　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

# 第四章 随机变量的数字特征

## §1 期望的定义与性质

**1. 期望的定义**

（离散型）数学期望：设随机变量 $X$ 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\quad)$，则其数学期望为

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k\text{，（要求无穷级数绝对收敛）.}$$

（连续型）数学期望：设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)$，则其数学期望为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\text{，（要求广义积分绝对收敛）.}$$

**【典型问题】**已知随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$，则 $EX=$______.

**【例 1】** 盒中有 5 个球，其中有 3 个白球，2 个红球．从中任取两球，求取出白球个数 $X$ 的平均值．

**【例 2】** 设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^n}{n!}e^{-x},x>0\\ 0,x\le 0\end{cases}$，求 $E(X)$.

**2. 期望的性质**

（1） $E(C)=C$ （$C$ 为常数）；

（2） $E(CX)=CE(X)$；

（3） $E(X+C)=E(X)+C$；

（4） $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

（5）若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

**【例 3】**设 $X$ 是随机变量且 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2(\mu,\sigma>0)$，则对任意常数 $c$，下列等式成立的是（　　）

(A) $E(X-c)^2=EX^2-c^2$　　(B) $E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$

(C) $E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$　　(D) $E(X-c)^2\ge E(X-\mu)^2$

**3. 随机变量函数的期望**

（1）一维随机变量函数：

①设 $X$ 的分布律 $P(X=x_i)=p_i$，则 $Y=g(x)$ 的数学期望 $E(Y)=\sum_{i} g(x_i)P(X=x_i)$；

②设 $X$ 的概率密度为 $f_X(x)$，则 $Y=g(x)$ 的数学期望 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$.

（2）二维随机变量函数 $Z=g(X,Y)$：

①若 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$；

特别，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$；$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$；

②若 $(X,Y)$ 为离散型随机变量，则先求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律，再求 $Z$ 的数学特征.

**【例 4】　设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求 $E(e^{-X})$.**

**【例 5】**　设 $(X,Y)$ 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)/3, & 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X),E(XY),E(X^2+Y^2)$.

## §2 方差的定义与性质

1. **方差的定义：** $D(X)=E(X-EX)^2=E(X^2)-E^2(X)$. 一般的，

（离散型）方差：设随机变量 $X$ 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\quad)$，则其方差为

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2p_k$$ ，（要求无穷级数绝对收敛）.

（连续型）方差：设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)$，则其方差为

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx$$ ，（要求广义积分绝对收敛）.

根据方差的定义显然有 $D(X)\ge 0$，我们称方差的算术根 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 $X$ 的标准差(或均方差)．这样，随机变量的标准差、数学期望与随机变量本身有相同的计量单位．

**2. 方差的性质**

（1） $D(C)=0$ （$C$ 为常数）;

（2） $D(C+X)=D(X)$；

（3） $D(CX)=C^2D(X)$； $D(-X)=D(X)$；

（4）若 $X$ 与 $Y$ 相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

（5） $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\operatorname{cov}(X,Y)$.

【例 1】 设 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，用 $X$ 表示杯子中球的最多个数，求：
（1） $X$ 的分布律；（2） $E(X)$；（3） $D(X)$.

【例 2】 设随机变量 $X$ 的概率分布为 $P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$.

①写出其分布函数；

②求 $X$ 的期望与方差.

**【例 3】** 设随机变量 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

求（1） $EX$ 及 $DX$；（2） $D(X^2)$.

**【例 4】** 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $D(x)$.

**【练习】** 设 $\boldsymbol{X_1,X_2,\ \ ,X_n}$ 是相互独立且同分布的随机变量，$\boldsymbol{E(X_i)=\mu}$，$\boldsymbol{D(X_i)=\sigma^2}$，

记 $\boldsymbol{\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}$，求 $\boldsymbol{E(\overline{X}),D(\overline{X})}$。

# §3 常见分布的期望与方差

| 分布 | 分布律或概率密度 | 数学期望 | 方差 |
|---|---|---|---|
| 1.（0-1）分布 | $P(X=k)=p^k q^{1-k}$， $k=0,1$ <br> $0<p<1$， $p+q=1$ | $p$ | $pq$ |
| 2．二项分布 | $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\quad,n$ <br> $0<p<1$， $p+q=1$ | $np$ | $npq$ |
| 3．泊松分布 | $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$， $k=0,1,2,\quad,\lambda>0$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| 4．正态分布 | $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$\sigma>0,-\infty<x<+\infty$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| 5．均匀分布 | $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & 其他\end{cases}$ | $\dfrac{a+b}{2}$ | $\dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| 6．指数分布 | $\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$，（$\lambda>0$ 为参数） | $\dfrac{1}{\lambda}$ | $\dfrac{1}{\lambda^2}$ |
| 7．几何分布 | $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$，$k=1,2,\quad,0<p<1$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\dfrac{1-p}{p^2}$ |

**【例 1】**设随机变量 $X_1,X_2,X_3$ 相互独立且 $X_1\sim U[0,6],X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim P(3)$，若 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $D(Y)=$________.

**【例 2】** 设 $X\sim B(4,0.5)$，$Y$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，且满足 $E[(X+1)(X-1)]=2E[(Y-1)(Y-2)]$，求参数 $\lambda$。

【例 3】 设随机变量 $X \quad N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(|X-\mu|)$.

【例 4】 设 $X \sim N(1,2)$，$Y \sim N(2,4)$ 且 $X$，$Y$ 相互独立，求 $Z=2X+Y-3$ 的分布密度函数 $f_Z(z)$.

【例 5】 设两个随机变量 $X$，$Y$ 相互独立，都服从 $N(0,\frac{1}{2})$，求 $D(|X-Y|)$.

【例 6】 设随机变量 $X$ 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$, 则

$E(X)$________, $\sqrt{D(X)}=$________.

【练习】 设随机变量 $X$ 服从标准正态分布 $N$（0,1)，则 $E(e^{2X})=$________.

# §4 协方差与相关系数

**1. 协方差的定义及性质**

协方差：$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=EXY-EXEY$

性质：

（1）$Cov(X,X)=D(X)$；

（2）$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$； $Cov(X,C)=0$；

（3）$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$；

（4）$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$；

（5）若随机变量 $X,Y$ 相互独立，则 $Cov(X,Y)=0$；

**2. 相关系数定义及性质**

相关系数: $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$，若 $\rho_{XY}=0$，称随机变量 $X,Y$ 不相关。

性质：

（1）$-1\le\rho_{XY}\le 1$， $\rho_{XY}=\rho_{YX}$， $\rho_{XX}=1$；

（2）若 $X,Y$ 相互独立，则 $\rho_{XY}=0$；

（3）$|\rho|=1\Leftrightarrow X$ 与 $Y$ 以概率 1 线性相关，即∃常数 $a,b$ 且 $a\neq 0$，使 $P\{X=aY+b\}=1$；

**3. 几个常用结论**

（1）$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$，

特别当 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立时， $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$；

（2）$Cov(X,Y)=0\Leftrightarrow\rho_{XY}=0\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$；

（3）$\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立 $\Rightarrow\rho_{XY}=0$, 即 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 不相关，但反过来不正确；

（4）若 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，则 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立 $\Leftrightarrow X$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 不相关.

**4. 随机变量的矩**

(1) 对于正整数 $k$，称随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的 $k$ 次幂的数学期望为 $\boldsymbol{X}$ 的 $k$ 阶原点矩，记为 $v_k$，即

$$\boldsymbol{v_k=E(X^k),k=1,2,\ldots}$$

于是，我们有

$$\boldsymbol{v_k}=\begin{cases}\sum_i x_i^k p_i, & \text{当}X\text{为离散型时},\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\mathrm{d}x, & \text{当}X\text{为连续型时},\end{cases}$$

(2)对于正整数 $\boldsymbol{k}$，称随机变量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{E(X)}$ 差的 $\boldsymbol{k}$ 次幂的数学期望为 $\boldsymbol{X}$ 的 $\boldsymbol{k}$ 阶中心矩，记为

$\boldsymbol{\mu_k}$ ，即 $\boldsymbol{\mu_k=E[X-E(X)]^k,(k=2,\dots).}$

于是，我们有

$$\boldsymbol{\mu_k}=\begin{cases}\sum_i (x_i-E(X))^k p_i, & \text{当}X\text{为离散型时},\\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^k p(x)\mathrm{d}x, & \text{当}X\text{为连续型时},\end{cases}$$

(3)对于随机变量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$，如果有 $\boldsymbol{E(X^kY^l)}$ 存在，则称之为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的 $k+l$ 阶混合原点矩，记为 $\boldsymbol{v_{kl}}$，即

$$\boldsymbol{v_{kl}=E(X^kY^l)}\,.$$

如果有 $\boldsymbol{E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]}$ 存在，则称之为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的 $k+l$ 阶混合中心矩，记为 $\boldsymbol{\mu_{kl}}$，即

$$\boldsymbol{\mu_{kl}=E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l].}$$

**【例 1】**设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的方差存在且不等于 0，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 $X$ 和 $Y$

(A)不相关的充分条件，且不是必要条件

(B)独立的充分条件，但不是必要条件

(C)不相关的充分必要条件

(D)独立的充分必要条件

**【例 2】**若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则下列各式正确的是（　　）

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) $X$ 与 $Y$ 独立　　(D) $X$ 与 $Y$ 不独立

【例 3】 设$Z=\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y$，其中$X\sim N(1,3^2),Y\sim N(0,4^2),\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$,求：

① $E(Z)$，$D(Z)$；

② $\rho_{XZ}$；

【例 4】 设随机向量$(X,Y)$服从二维正态分布，则随机变量$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充要条件为（　　）

(A) $E(X)=E(Y)$　　(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$　　(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

【例 5】 设二维随机变量$(X,Y)$服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，则

$P(XY-Y<0)=$__________.

【例 6】将一枚硬币重复掷$n$次，以$X$和$Y$分别表示正面向上和反面向上的次数，则$X$和$Y$的相关系数等于（　　）

（A）$-1$　　（B）$0$　　（C）$0.5$　　（D）$1$

【**练习**】设$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$Cov(X,Y)$.

# 第五章 大数定律与中心极限定理

## 一、基本概念

### 1.切比雪夫不等式

设随机变量 $X$ 具有数学期望 $\mu$ 和方差 $\sigma^2$，则对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，下列切比雪夫不等式成立：$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ 或者 $P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

**【例 1】** 设 X 的概率密度为 $f(x)$，DX=1，Y 的概率密度 $f(-y)$，且 X 与 Y 的相关系数为 $-\dfrac{1}{4}$，用切比雪夫不等式估计 $P(|X+Y|\geq 2)=$________.

**【例 2】** 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的数学期望分别为－2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为－0.5，则根据切比雪夫不等式，有 $P(|X+Y|\geq 6)\leq$________.

**2.(依概率收敛)** 设 $X_n(n=1,2,\ldots)$ 为随机变量列，若存在随机变量 $X$，对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|<\varepsilon)=1$，则称随机变量列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于随机变量 $X$，并用下面符号表示：$X_n\xrightarrow{P}X$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X(P)$.

**【例 3】** 设总体 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，$X_1$，$X_2$,…，$X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于________.

## 二、大数定律

### 1. 切比雪夫大数定律

设随机变量 $X_1$，$X_2,\ldots$ 相互独立的随机变量序列，期望和方差均存在，且方差有界，则对于任意的正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

特殊情形：若 $X_1$，$X_2,\ldots$ 具有相同的数学期望 $E\left(X_i\right)=\mu$，则上式成为

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

切比雪夫大数定律指出，$n$ 个相互独立，且具有有限的相同的数学期望与方差的随机变量，当 $n$ 很大时，它们的算术平均以很大的概率接近它们的数学期望.

### 2. 辛钦大数定律

设 $X_1$，　$X_n$，　是独立同分布的随机变量序列，且 $EX_i=\mu$，则对任意给定的正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu=E(X_i)$ 更一般地，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}E(X_i^k)$.

### 3. 伯努利大数定律

设 $f_A$ 是 $n$ 次独立重复试验中事件 $A$ 发生的次数，$p$ 是事件 $A$ 在每次试验中发生的概率，则对于任意正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{f_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

伯努利大数定律说明了当试验次数很多的时候，事件发生的频率依概率收敛到事件的概率，即频率无限接近概率.

## 三、中心极限定理

### 1. 列维—林德伯格中心极限定理

设 $X_1, X_2, \quad X_n,$ 为独立同分布的随机变量序列，$E(X_i)=\mu,\ D(X_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\ldots,$ 则对任意实数 $x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

即当 $n$ 较大时，$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} \approx N(0,1)$.

### 2. 棣莫弗—拉普拉斯定理

设随机变量 $X_1, X_2, \quad X_n,$ 均服从参数为 $n$，$p(0<p<1)$ 的二项分布，则对于任意实数 $x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

即当 $n$ 较大时，$\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0,1)$.

**【例 4】**设 $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n,\ldots$ 为独立且均服从 $B(1,\frac{1}{2})$ 的随机变量列，记 $\varPhi(x)$ 为标准正态分布函数，则（　）.

(A) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 2n}{2\sqrt{n}} \le x\right\} = \varPhi(x).$

(B) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\lambda}{\sqrt{2n}} \le x\right\} = \varPhi(x).$

(C) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \varPhi(x).$

(D) $\lim_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \varPhi(x).$

# 第六章 统计基础

## §1 数理统计的基本概念

**1．统计量的概念**

样本$(X_1,X_2,\dots,X_n)$的不含未知参数的函数$T=T(X_1,X_2,\dots,X_n)$，如果$x_1,x_2,\dots,x_n$是样本$X_1,X_2,\dots,X_n$的样本值，则数值$T(x_1,x_2,\dots,x_n)$为统计量$T(X_1,X_2,\dots,X_n)$的观测值.

**2．常用统计量及其数字特征**

（1）样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

（2）样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$；

（3）样本$k$阶原点矩 $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k \qquad k=1,2$

（4）样本$k$阶中心矩 $B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \qquad k=1,2$

（5）统计量的数字特征

$$E(\overline{X})=E(X)=\mu，\quad D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}，\quad E(S^2)=D(X)=\sigma^2$$

如果$E(X^k)=\mu_k$，$A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}\mu_k$.

**【例 1】**设总体$X$服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，从中抽取简单随机样本$X_1,\quad ,X_{2n}$，（$n\geq 2$），其样本均值为$\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量$Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$的数学期望$EY$.

【例 2】 设总体 X 的数学期望和方差都存在，且 $EX=\mu,DX=\sigma^2$，来自总体 X 的样本 $X_1,X_2,\quad,X_n$，求：

（1） $E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2]$； （2） $E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]$.

## §2 三大抽样分布

**（1） $\chi^2$ 分布**

①典型模式：$X_1,X_2,..X_n$ 相互独立且均服从 $N(0,1)$，则称

$\chi^2=X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}+...+X_n^{\ 2}$ 服从自由度为 $n$ 的 $\chi^2$ 分布，记 $\chi^2\quad\chi^2(n)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$E(\chi^2)=n$， $D(\chi^2)=2n$；

② 可加性：设 $\chi_1^2\quad\chi^2(n_1)$， $\chi_2^2\quad\chi^2(n_2)$， 且 $\chi_1^2$和$\chi_2^2$ 相互独立，则 $\chi_1^2+\chi_2^2\quad\chi^2(n_1+n_2)$；

③上 $\alpha$ 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$：设 $\chi^2\quad\chi^2(n)$，对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\alpha$ 的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 $\alpha$ 分位点.

【例 1】 设 $X_1,X_2,X_3$ 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，记 $X=a(X_1-2X_2+3X_3)^2$ 服从卡方分布，则常数 $a=$________.

（2）$t$ 分布

①典型模式：$X,Y$ 独立，$X \quad N(0,1)$，$Y \quad \chi^2(n)$，则

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \quad t(n) \qquad f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad -\infty<x<+\infty$$

$f(x)$ 是偶函数，$n$ 充分大时，$t(n)$ 近似 $N(0,1)$.

②上 $\alpha$ 分位点 $t_\alpha(n)$

$T\sim t(n)$，$0<\alpha<1$，$P(T>t_\alpha(n))=\alpha$，$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$，$P(|T|>t_{\alpha/2}(n))=\alpha$

**【例 2】** 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立同服从 $N(0,3^2)$ 分布，$X_1$，$X_2$,…，$X_9$ 以及 $Y_1$，$Y_2$,…，$Y_9$ 是分别来自总体 $X$，$Y$ 的样本，求统计量 $K=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum\limits_{i-1}^{9}Y_i^2}}$ 的分布.

（3）$F$ 分布

①典型模式：$X,Y$ 独立，$X \quad \chi^2(n_1), Y\sim\chi^2(n_2)$，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2} \quad F(n_1,n_2)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}\dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

如果 $F \quad F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F} \quad F(n_2,n_1)$.

②$\alpha$ 分位点 $F_\alpha(n_1,n_2)$

$F \quad F(n_1,n_2)$，$0<\alpha<1$，$P(F>F_\alpha(n_1,n_2))=\alpha$，

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}.$$

【例 3】 设随机变量 $X \quad t(n)$ $(n>1)$，求 $Y=\dfrac{1}{X^2}$ 的分布.

## §3 正态总体的抽样分布

### （1）单个正态总体

设 $X \quad N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,..X_n$ 来自总体 $X$ 的样本, 样本均值 $\overline{X}$，样本方差 $S^2$，则

① $\overline{X} \quad N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad N(0,1)$；

② $\overline{X}$ 与 $S^2$ 相互独立，且 $X^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \quad \chi^2(n-1)$；

③ $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \quad t(n-1)$；

④ $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \quad \chi^2(n)$.

【例 1】 设 $(X_1,X_2, \quad ,X_n)$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$S_1{}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2{}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_3{}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，

$S_4{}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 则服从自由度 $n-1$ 的 $t$ 分布的随机变量是 $T=$（　　）

(A) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　　(B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

(C) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　(D) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

【例 2】 设 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 为来自总体 $N(1,\sigma^2)$（$\sigma>0$）的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为(　　)

(A) N（0,1） (B) $t(1)$ (C) $\chi^2(1)$ (D) $F(1,1)$

（2）两个正态总体

设 $X\quad N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$，$Y\quad N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$，$X_1,X_2,..X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,..Y_{n_2}$，分别来自 $X,Y$ 的样本，相互独立，样本均值与样本方差分别为 $\overline{X},\overline{Y},S_1^2,S_2^2$，则有，

① $\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)\quad N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2})$，$U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}\quad N(0,1)$

② 如果 $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$，则

$T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\quad t(n_1+n_2-2)$，其中 $S_\omega{}^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

③ $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1{}^2}{S_2^2/\sigma_2{}^2}\quad F(n_1-1,n_2-1)$

【例 3】 设总体 X 和 Y 均服从 $N(\mu,\sigma^2),\sigma>0$，$X_1,X_2,\quad,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\quad,Y_n$ 分别来自总体 X, Y 的两个相互独立的简单随机样本，样本方差分别为 $S_X^2,S_Y^2$，则统计量 $T=\dfrac{n-1}{\sigma^2}(S_X^2+S_Y^2)$ 服从________分布.

# §4 点估计

**1. 点估计的概念**

用样本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 构造的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ 来估计未知参数 $\theta$，统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ 称为估计量，它所取得的观测值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ 称为估计值，估计量和估计值统称 $\theta$ 的估计.

**2. 矩估计法**

用样本估计相应的总体矩，用样本矩的函数估计总体矩相应函数

(1)矩估计不必知道分布形式，只要矩存在.

(2)可用中心矩，也可用原点矩.

(3) $k$ 个参数要求列出一阶至 $k$ 阶矩方程.

(4) $\alpha_1, \alpha_2$ 为一阶、二阶原点矩，$\hat{\alpha}_1$和$\hat{\alpha}_2$ 为一阶、二阶样本原点矩，$g(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ 就是 $g(\alpha_1, \alpha_2)$ 的矩估计量.

**【例 1】** 设总体 $X \sim P(\lambda)$，$X_1$，$X_2$,…，$X_n$ 是取自总体 $X$ 的样本，求对 $\lambda$ 的矩估计量.

**【例 2】** 设总体 $X$ 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X_1$，$X_2$,…，$X_n$ 为取自总体 $X$ 的简单随机样本，

求：（1）$\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

（2）$D(\hat{\theta})$.

**3. 最大似然估计法**

(1)似然函数

离散型 $P(X=a_i)=p(a_i;\theta)\qquad i=1,2,\dots,$

$$L(\theta)=L(X_1,X_2,\dots,X_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(X_i;\theta).$$

连续型 $f(x;\theta)$

$$L(\theta)=L(X_1,X_2,\dots,X_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i;\theta).$$

(2)最大似然估计思想

使似然函数 $L(X_1,X_2,\dots,X_n;\theta)$ 达到最大值的参数值 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\dots,X_n)$.

(3)似然方程

$\theta$ 为一维时，$\dfrac{dL(\theta)}{d\theta}=0$ 或 $\dfrac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}=0$.

$\theta$ 为二维时，$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=0\\ \dfrac{\partial L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=0\\ \dfrac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=0\end{cases}$.

【例 3】 设总体 $X$ 的分布律为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\theta^2$ | $2\theta(1-\theta)$ | $(1-\theta)^2$ |

已知样本 $X_1,X_2,X_3$ 来自总体 $X$，其取值为 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$，

分别求未知参数 $\theta$ 的矩估计值 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计值 $\hat{\theta}_2$.

【例 4】 设总体 $X\sim E(\lambda)$，$X_1$，$X_2,\dots$，$X_n$ 为 $X$ 的一个样本，求：$\lambda$ 的矩估计量及最大似然估计量.

【练习】设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$\theta$为未知参数，$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求$\theta$的矩估计量；

（Ⅱ）求$\theta$的最大似然估计量.

# 第七章 数一专项

## §1 估计量的评选标准

(1)无偏性：$E(\hat{\theta})=\theta$.

**【例 1】** 设 $X_1$，$X_2$,…，$X_n$ 是来自正态分布总体 $N(\mu，\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，适当选取 $C$，使得 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计量.

(2)有效性：如果 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 $\theta$ 的无偏估计量，且 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

**【例 2】** 设 $X_1$，$X_2$,…，$X_n$ 是总体的一个样本，试证：

(1) $\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$.

(2) $\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3$.

(3) $\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{3}{4}X_2-\frac{1}{12}X_3$.

都是总体均值 $\mu$ 的无偏估计，并比较哪一个最有效？

(3)一致性（相合性）：$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$，称$\hat{\theta}$为$\theta$的一致估计量.

**【例 3】** 设$X_1$，$X_2$,…，$X_n$是取自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，试证$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$是$\sigma^2$的一致估计量.

## §2 区间估计

**1. 置信区间**

对于给定的$\alpha$ $(0<\alpha<1)$，如果两个统计量$\theta_1, \theta_2$满足$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1-\alpha$，则称随机区间$(\theta_1, \theta_2)$为参数$\theta$的置信水平（或置信度）为$1-\alpha$的置信区间（或区间估计），简称为$\theta$的$1-\alpha$的置信区间，$\theta_1$和$\theta_2$分别称为置信下限和置信上限.

**2. 一个正态总体参数的区间估计**

| 未知参数 | | $1-\alpha$ 置信区间 |
|---|---|---|
| $\mu$ | $\sigma^2$ 已知 | $(\overline{X} - U_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{X} + U_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ |
| | $\sigma^2$ 未知 | $(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$ |
| $\sigma^2$ | $\mu$ 已知 | $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$ |
| | $\mu$ 未知 | $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})$ |

3. 两个正态总体参数的区间估计

| 未知参数 | | $1-\alpha$ 置信区间 |
|---|---|---|
| $\mu_1-\mu_2$ | $\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 已知 | $(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$ |
| | $\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ | $(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}),\overline{X}-\overline{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$ |
| $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | $\mu_1,\mu_2$ 已知 | $(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot F_{\alpha/2}(n_2,n_1))$ |
| | $\mu_1,\mu_2$ 未知 | $(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1))$ |

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

【例 1】 由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$，容量为9的简单随机样本，若得到样本均值 $\overline{X}=5$，则未知参数 $\mu$ 的置信度为0.95的置信区间为________. $(u_{0.025}=1.96)$

【例 2】设 $x_1,x_2,\quad,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 $\mu$ 的置信度为0.95的双侧置信区间的置信上限为10.8，则 $\mu$ 的置信度为0.95的双侧置信区间为_____________.

# §3 假设检验

### 1. 假设检验

假设：关于总体分布的未知参数的假设，所提出的假设称为零假设或原假设，记为$H_0$，对立于零假设的假设称为独立假设或备择假设，记为$H_1$.

假设检验：根据样本，按照一定规则判断所做假设$H_0$的真伪，并作出接受还是拒绝接受$H_0$的决定.

### 2. 两类错误

拒绝实际真的假设$H_0$（弃真）称为第一类错误；

接受实际不真的假设$H_0$（纳伪）称为第二类错误.

### 3. 显著性检验

在确定检验法则时，应尽可能地使犯两类错误的概率都小些，但是一般来说，当样本容量取定后，如果要减少犯某一类错误的概率，则犯另一类错误的概率往往要增大。要使犯两类错误的概率都减少，只好加大样本容量。在给定样本容量的情况下，我们总是控制犯第一类错误的概率，使它不大于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，这种检验问题称为显著性检验问题，给定的$\alpha$称为显著性水平，通常取$\alpha=0.1,0.05,0.01,0.001$.

在对假设$H_0$进行检验时，常使用某个统计量$T$，称为检验统计量。当检验统计量在某个区域$W$取值时，我们就拒绝假设$H_0$，称区域$W$为拒绝域.

### 4. 显著性检验的一般步骤

（1）根据问题要求提出原假设$H_0$和对立假设$H_1$；

（2）给出显著性水平$\alpha(0<\alpha<1)$及样本容量$n$；

（3）确定检验统计量及拒绝域形式；

（4）按犯第一类错误的概率等于$\alpha$，求出拒绝域$W$；

（5）根据样本值计算检验统计量$T$的观测值$t$，当$t\in W$时，拒绝原假设$H_0$，否则

接受原假设 $H_0$.

**5. 正态总体参数的假设检验**

设显著性水平为 $\alpha$，单个正态总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的参数的假设检验以及两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$ 的 $\mu_1-\mu_2$ 和 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的假设检验，列表如下：

| 检验参数 | 情形 | 假设 $H_0$ | 假设 $H_1$ | 检验统计量 | $H_0$ 为真时检验统计量的分布 | 拒绝域 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | $\sigma^2$ 已知 | $\mu=\mu_0$<br>$\mu\le\mu_0$<br>$\mu\ge\mu_0$ | $\mu\ne\mu_0$<br>$\mu>\mu_0$<br>$\mu<\mu_0$ | $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $N(0,1)$ | $\lvert U\rvert\ge u_{\alpha/2}$<br>$U\ge u_\alpha$<br>$U\le -u_\alpha$ |
| | $\sigma^2$ 未知 | $\mu=\mu_0$<br>$\mu\le\mu_0$<br>$\mu\ge\mu_0$ | $\mu\ne\mu_0$<br>$\mu>\mu_0$<br>$\mu<\mu_0$ | $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ | $t(n-1)$ | $\lvert T\rvert\ge t_{\alpha/2}(n-1)$<br>$T\ge t_\alpha(n-1)$<br>$T\le -t_\alpha(n-1)$ |
| $\sigma^2$ | $\mu$ 已知 | $\sigma^2=\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2\le\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2\ge\sigma_0{}^2$ | $\sigma^2\ne\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2>\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2<\sigma_0{}^2$ | $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi^2(n)$ | $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$<br>或<br>$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n)$<br>$\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n)$<br>$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n)$ |
| | $\mu$ 未知 | $\sigma^2=\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2\le\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2\ge\sigma_0{}^2$ | $\sigma^2\ne\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2>\sigma_0{}^2$<br>$\sigma^2<\sigma_0{}^2$ | $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ | $\chi^2(n-1)$ | $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$<br>或<br>$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$<br>$\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)$<br>$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1-u_2$ | $\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2$ 已知 | $\mu_1-\mu_2=\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2\le\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2\ge\mu_0$ | $\mu_1-\mu_2\ne\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2>\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2<\mu_0$ | $U=\dfrac{X-Y-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ | $N(0,1)$ | $\lvert U\rvert\ge u_{\alpha/2}$<br>$U\ge u_\alpha$<br>$U\le -u_\alpha$ |
| | $\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2$ 未知但 $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$ | $\mu_1-\mu_2=\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2\le\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2\ge\mu_0$ | $\mu_1-\mu_2\ne\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2>\mu_0$<br>$\mu_1-\mu_2<\mu_0$ | $T=\dfrac{X-Y-\mu_0}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ | $t(n_1+n_2-2)$ | $\lvert T\rvert\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$<br>$T\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$<br>$T\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ |
| $\sigma_1{}^2=\sigma$ | $\mu_1,\mu_2$ 已知 | $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2\le\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2\ge\sigma_2{}^2$ | $\sigma_1{}^2\ne\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2>\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2<\sigma_2{}^2$ | $F=\dfrac{n_2\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}$ | $F(n_1,n_2)$ | $F\le F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$<br>或<br>$F\ge F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$<br>$F\ge F_\alpha(n_1,n_2)$<br>$F\le F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$ |
| | $\mu_1,\mu_2$ 未知 | $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2\le\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2\ge\sigma_2{}^2$ | $\sigma_1{}^2\ne\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2>\sigma_2{}^2$<br>$\sigma_1{}^2<\sigma_2{}^2$ | $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ | $F(n_1-1,n_2-1)$ | $F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或<br>$F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$<br>$F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$<br>$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ |

注：表中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

【例 1】给定总体 $X\quad N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$ 已知，给定样本 $X_1,X_2,\quad,X_n$，对总体均值 $\mu$ 进行检验，令 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\ne\mu_0$，则

A．若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 $H_0$，则 $\alpha=0.01$ 时也拒绝 $H_0$.

B. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 $H_0$，则 $\alpha=0.01$ 时拒绝 $H_0$.

C. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 $H_0$，则 $\alpha=0.01$ 时接受 $H_0$.

D. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 $H_0$，则 $\alpha=0.01$ 时也接受 $H_0$.