《离散数学》期末考试题(A)参考答案

一、1. $A\cup B=\{\{a\},\ \ \{a,b\},\ \ \{b,c\},\ \ \{c\}\}$，$A\cap B=\{\{c\}\}$，$P(A)=\{\varnothing, \{\{a, b\}\}, \{\{c\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}\}$.

2. $3^3, 3^9, 3^{27}$.

3. $(p\vee q)\downarrow 0$.

4. {-1，-2，-3，-6，1，2，3，6}.

5. 9.

二、1(C); 2(B); 3(A); 4(C); 5(D).

三、1(×); 2(√); 3(×); 4(×); 5(√).

四、**证** 对于任意$(x,y)\in(A-B)\times(C-D)$，有$x\in A-B$且$y\in C-D$，于是$x\in A, x\notin B$且$y\in C, y\notin D$，进而$(x,y)\in A\times C, (x,y)\notin B\times D$，因此$(x,y)\in(A\times C)-(B\times D)$，所以$(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$.

例如取 $A=B=\{a,b\}, C=\{c\}, D=\{d\}$，这时 $A-B=\varnothing$，进而$(A-B)\times(C-D)=\varnothing$，而

$$(A\times C)-(B\times D)=\{(a,c),(b,c)\}-\{(a,d),(b,d)\}=\{(a,c),(b,c)\},$$

故$(A-B)\times(C-D)\neq(A\times C)-(B\times D)$.

五、**证** 1.对于任意$x\in$N，由于$x+x=2x$是偶数，于是$(x,x)\in R$，因此R是N上的自反关系.

对于任意$x,y\in$N，若$(x,y)\in R$，则$x+y$是偶数，即$y+x$是偶数，于是$(y,x)\in R$，因此R是N上的对称关系.

对于任意$x,y,z\in$N，若$(x,y)\in R$且$(y,z)\in R$，则$x+y$是偶数且$y+z$是偶数，于是$x+z=(x+y)+(y+z)-2y$是偶数，进而$(x,z)\in R$，因此R是N上的传递关系.

综上所述，R是N上的等价关系.

2. N关于等价关系R的所有等价类为$[0]_R=\{0,2,4,6,\ldots\}$和$[1]_R=\{1,3,5,7,\ldots\}$.

3.令$f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}, f(x)=\begin{cases}0, x\text{是偶数}\\1, x\text{是奇数}\end{cases}$，显然$R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathrm{N}, f(x)=f(y)\}$.

六、**证** 令 $N(x): x$ 是自然数，$Z(x): x$ 是整数，则

前提: $\exists x N(x), \forall x(N(x) \to Z(x))$

结论: $\exists x Z(x)$

构造性证明如下:

(1) $\exists x N(x)$ P

(2) $N(c)$ ES(1)

(3) $\forall x(N(x) \to Z(x))$ P

(4) $N(c) \to Z(c)$ US(3)

(5) $Z(c)$ T(2)(4)I

(6) $\exists x Z(x)$ EG(5)

七、**证** (1)对于任意 $(a,b),(c,d) \in G$，有 $a,c \neq 0$，进而 $ac \neq 0$，于是 $(ac, ad+b) \in G$，即“·”是 G 上的代数(封闭)运算.

(2)结合律 对于任意 $(a,b),(c,d),(e,f) \in G$，一方面有

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (ac, ad+b)\cdot(e,f)$$

$$= (ace, ac\cdot f + (ad+b)) = (ace, acf + ad + b),$$

另一方面有

$$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) = (a,b)\cdot(ce, cf+d) = (ace, a(cf+d)+b)$$

$$= (ace, acf + ad + b),$$

于是 $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$.

(3)单位元为(1, 0) 对于任意 $(a,b) \in G$，由于

$(1,0)\cdot(a,b) = (a, b+0) = (a,b)$ 且 $(a,b)\cdot(1,0) = (a, a0+b) = (a,b)$，于是(1, 0)是单位元.

(4)每元素均存在逆元 对于任意 $(a,b) \in G$，因为 $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \in G$ 且

$(a,b)\cdot\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(a\cdot\frac{1}{a}, a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right) = (1,0)$，而

$$\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)\cdot(a,b)=\left(\frac{1}{a}\cdot a,\frac{1}{a}\cdot b+\left(-\frac{b}{a}\right)\right)=(1,0),$$

所以，G 中每元素均有逆元.

(5)由于 $(1,2)\cdot(2,1)=(2,3)$ 且 $(2,1)\cdot(1,2)=(2,5)$，即 $(1,2)\cdot(2,1)\neq(2,1)\cdot(1,2)$，因而“$\cdot$”不可交换.

综上所述，$(G,\cdot)$ 是非 Abel 群.

八、**证**(反证) 设 G 是不连通的，则 G 有 $k(k\geq 2)$ 个连通分支 $G_1,G_2,...,G_k$. 对于任意 $i(1\leq i\leq k)$，令 G_i 是 (n_i,m_i) 图.

若存在 $j(1\leq j\leq k)$ 使得 $n_j=1$，则另外 6 个节点所生成的子图恰 15 条边. 由于 G 是简单图，K_6 的边数为 15，即 G 中含 K_6 子图. 显然，K_6 不是平面图，这与已知 G 是平面图矛盾.

若存在 $j(1\leq j\leq k)$ 使得 $n_j=2$，则另外 5 个节点所生成的子图恰 14 条边，这不可能，因为 K_5 的边数恰为 10.

于是 $n_j\geq 3, j=1,2,...,k$，因此对于每个连通分支有 $m_i\leq 3n_i-6(1\leq j\leq k)$，进而 $m=\sum_{i=1}^{k}m_i\leq\sum_{i=1}^{k}(3n_i-6)=3\sum_{i=1}^{k}n_i-6k=3n-6k$. 因为 $n=7,m=15$，所以 $15\leq 3\cdot 7-6k$，由此得出 $k\leq 1$，与 $k\geq 2$ 矛盾. 故 G 是连通图.